



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Comportamiento Hidrodinámico para el proceso de Exclusión simple
Simétrico.

Julián Facundo Martinez

Directora de tesis: Dra. Mariela Sued.

25 de Agosto de 2008

Índice general

1. Cadenas y procesos de Markov en espacios de estados discretos	3
1.1. Cadenas de Markov: tiempo discreto	4
1.1.5. Probabilidades invariantes	6
1.2. Procesos de Markov: tiempo continuo	7
1.2.5. Construcción de Procesos de Markov	9
1.2.7. Semigrupo y Medidas invariantes	10
2. Presentación del modelo y de los resultados esperables	12
2.1. Descripción y propiedades del proceso de Exclusión Simple	12
2.2. Pasaje de escala Macroscópica a Microscópica	15
2.3. Deducción de la Ecuación Hidrodinámica	18
3. Formulaciones débiles del equilibrio y el resultado principal	22
3.0.7. Enunciado del Teorema	25
4. Demostración del comportamiento hidrodinámico	28
4.1. Relativa compacidad	29
4.1.1. Unicidad de los puntos límite	31
4.1.2. La jugada final: convergencia en probabilidad para t fijo	33
5. Apéndice	34
5.1. Martingalas y procesos de Markov	34
5.2. Compacidad sobre el espacio de medidas	35
5.2.1. Prohorov	35
5.2.3. El espacio $D([0, T], \mathcal{E})$	35

Agradecimientos

Gracias:

A Mariela, por enseñarme con tanto entusiasmo mucha probabilidad . Por tenerme confianza aún en los momentos difíciles. Por darme su apoyo y amistad. Por discutir conmigo ideas de igual a igual.

A Patu, por su amistad. Por los miles de favores. También por la enseñanza y darme buenas ideas.

A ambos, por hacer un lugar para mí, por tanto laburo que le ponen a todo esto. Por darme ese empujón que necesitaba. Por darme ánimo para hacer muchas cosas que temía no poder. Por aguantarme con mis vueltas.

A mis viejos, por estar siempre, por su cariño. Por ayudarme aún cuando estoy insoportable.

A mi hermana, por ser grossa y no faltar nunca (que es equivalente a estar siempre). Por protegerme como lo hace y acompañarme en todo.

A Cecilia, por su cariño, compañía y aguante. Por hacerme ver las cosas sencillas. A mis amigos de la vida, Santi, Joan y Mariano.

A Javier, por su carácter y las discusiones sobre matemática.

A mis hermanos probabilistas: Ana, Julieta y Lucas. Por hacerme divertir en los congresos y ayudarme a comprender las cosas. A Kari, Barbi y Pau. Por las risas y el estudio juntos. A Maru, por las horas de estudio, y los buenos consejos. A Dani por la buena onda.

A Sebas, Lucas y Andrés, por las charlas reflexivas. A Mercedes, por las horas que me aguantó en el teléfono.

A los chicos de básquet, “los Altos”, por permitirme cantar mal el tanto: Norber, Diego x 2, Dani, Alfred, Edu, Lali.

A Manu, Nico, Ana, Igna, Caro, Juan, Pablos, Marce, Georgi, Lau, ...

A los del secu: Vazco , Ricky y Schavlo. A mis amigos físicos: Gabi, Gerva y Dani. Por ser delirantes.

A Ulises y Edgardo, por su pasión por la ciencia.

A TODOS, POR QUE AGUANTAN MIS IDAS Y VUELTAS. POR SU AMISTAD.

Introducción

Para la mecánica clásica, utilizando las leyes de Newton, la evolución de un sistema puede ser descrita indicando la posición y velocidad de cada partícula en cada instante, a partir de las condiciones iniciales. Sin embargo, para sistemas compuestos por una gran cantidad de partículas (10^{23}), esta propuesta no resulta satisfactoria puesto que demanda resolver sistemas de ecuaciones en espacios de dimensión muy grande, lo que excede las posibilidades computacionales de las que se disponen hasta el momento. Siguiendo el enfoque de la mecánica estadística introducido por Boltzmann, no nos preocuparemos por el estado microscópico del sistema (es decir, por las condiciones de cada partícula para cada tiempo), sino que concentraremos nuestra atención en parámetros macroscópicos $\rho = (p_1, \dots, p_a)$ (velocidad media, temperatura, densidad) definidos originalmente para sistemas en equilibrio. Para sistemas fuera de equilibrio estos parámetros se definen localmente suponiendo que en cada instante t , en torno de cada punto u , tenemos un estado de equilibrio caracterizado por parámetros macroscópicos locales $\rho(t, u)$.

En ciertas ocasiones es de esperar que dichos parámetros $\rho(t, u)$ evolucionen suavemente siendo solución de una ecuación diferencial, la cual es llamada ecuación hidrodinámica.

En este trabajo, con el fin de estudiar el comportamiento macroscópico del sistema, la evolución microscópica, en principio determinística, es sustituida por leyes de evolución estocásticas. Mediante este tratamiento se espera obtener la ecuación hidrodinámica para los parámetros macroscópicos en función de la dinámica microscópica aleatoria.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 introducimos los procesos Markovianos, que serán utilizados modelar la evolución microscópica de los sistemas.

En el capítulo 2 nos concentramos en el proceso de exclusión simple y sus características. También presentamos el pasaje de la escala macro a la micro, junto a la heurística para la obtención de la ecuación hidrodinámica.

En el capítulo 3 introducimos distintas definiciones de equilibrios y enunciamos el teorema central de esta tesis, con los preliminares correspondientes para la demostración del mismo.

En el capítulo 4 se encuentra la demostración del teorema enunciado en el capítulo anterior. Finalmente, en el Apéndice se encuentran los enunciados de los resultados más técnicos que son requeridos para llevar a cabo las demostraciones, como por ejemplo, teoría de martingalas y el espacio de trayectorias continuas a derecha con límite a izquierda, entre otros.

Este trabajo está basado en la obra de Kipnis y Landim: Scaling limits of interacting particle systems ([2]). Todas las obras incluidas en la lista bibliográfica que no son citadas, también fueron consultadas para la elaboración de esta tesis.

Capítulo 1

Cadenas y procesos de Markov en espacios de estados discretos

Vamos a comenzar introduciendo algunas nociones sobre procesos estocásticos necesarias para poder comprender los tópicos presentados en este trabajo. Para un desarrollo en mayor profundidad, puede consultarse [9], [13] y [4].

Un proceso estocástico tomando valores en el espacio medible (E, \mathcal{E}) consiste en una familia de elementos aleatorios (funciones medibles) $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ donde

$$X_t : \Omega \rightarrow E$$

con (Ω, \mathcal{F}, P) espacio de probabilidad. Usualmente E se dice espacio de estados mientras que el índice t suele representar al tiempo. En algunos casos pensaremos en $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ o $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$, dando lugar a un proceso estocástico a tiempo discreto, mientras que hablaremos de procesos a tiempo continuo cuando $\mathbb{T} = [0, \infty)$. Por ejemplo, una sucesión $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (en adelante i.i.d.) es un ejemplo de proceso estocástico.

Para evitar dificultades técnicas, en lo que sigue, restringiremos nuestra atención al estudio de procesos tomando valores en espacios de estados finitos. La idea de variables aleatorias i.i.d. está asociada a la repetición en forma independiente de un mismo fenómeno. En tales circunstancias, conocer los valores pasados del proceso no resulta informativo a la hora de predecir valores futuros.

Más específicamente, tenemos que

$$P(X_{n+1} = a_{n+1} | X_i = a_i, i \leq n) = P(X_{n+1} = a_{n+1}) \quad (1.1)$$

de donde concluimos que

$$P(X_i = a_i, i \leq n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = a_i) = \prod_{i=1}^n \mu(a_i),$$

siendo μ la ley marginal del proceso: $X_i \sim \mu$ para todo i .

Una primera propuesta para incrementar la complejidad del proceso es asumir que este tiene *memoria uno*, en cuyo caso sustituimos la condición (1.1) por

$$P(X_{n+1} = a_{n+1} | X_i = a_i, i \leq n) = P(X_{n+1} = a_{n+1} | X_n = a_n).$$

Procesos satisfaciendo esta última condición se dicen Markovianos y constituyen el objeto de estudio de la próxima Sección.

1.1. Cadenas de Markov: tiempo discreto

Definición 1.1.1 Una cadena de Markov es un proceso estocástico a tiempo discreto $(X_n)_{n \geq 0}$ tal que

$$P(X_{n+1} = a_{n+1} | X_0 = a_0, \dots, X_n = a_n) = P(X_{n+1} = a_{n+1} | X_n = a_n), \forall n \geq 1, \quad (1.2)$$

siempre que ambos miembros de la igualdad estén bien definidos.

Si además $P(X_{n+1} = a_{n+1} | X_n = a_n) = p(a_n, a_{n+1})$ diremos que la cadena es homogénea con matriz de transición p .

La matriz de transición p verifica las siguientes propiedades:

1. $p(a, b) \geq 0 \quad \forall a, b \in E$.
2. $\sum_{b \in E} p(a, b) = 1 \quad \forall a \in E$.

Definición 1.1.2 Toda función $p : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaciendo las propiedades 1 y 2 se dirá matriz de transición en E .

Definición 1.1.3 Dada una cadena de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ denotamos por μ a la ley de X_0 , llamada distribución inicial del proceso:

$$\mu(a) = P(X_0 = a) \quad \forall a \in E.$$

La condición (1.2) nos permite concluir que, para una cadena de Markov homogénea con matriz de transición p y distribución inicial μ , podemos calcular probabilidades de la siguiente manera:

$$P(X_0 = a_0, \dots, X_n = a_n) = P(X_0 = a_0, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}) \cdot P(X_n = a_n | X_0 = a_0, \dots, X_{n-1} = a_{n-1})$$

por markov

$$\begin{aligned} &= P(X_0 = a_0, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}) \cdot P(X_n = a_n | X_{n-1} = a_{n-1}) \\ &= P(X_0 = a_0, \dots, X_{n-2} = a_{n-2}) \cdot P(X_{n-1} = a_{n-1} | X_0 = a_0, \dots, X_{n-2} = a_{n-2}) p(a_{n-1}, a_n) \\ &\vdots \\ &= P(X_0 = a_0) p(a_0, a_1) \dots p(a_{n-2}, a_{n-1}) p(a_{n-1}, a_n) \\ &= \mu(a_0) p(a_0, a_1) \dots p(a_{n-2}, a_{n-1}) p(a_{n-1}, a_n). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Concluimos entonces que μ y p caracterizan al proceso. Surge entonces naturalmente la siguiente pregunta:

Dada p matriz de transición y una probabilidad μ en E ,

¿Existe una cadena de Markov homogénea con matriz de transición p y distribución inicial μ ?

Vamos a comenzar respondiendo a esta pregunta de manera constructiva, siguiendo [4], presentando una cadena de Markov con matriz de transición p y distribución inicial dada. Además, la construcción nos permitirá simular trayectorias de la cadena. El valor del proceso en el instante $n + 1$ se determinará en términos del valor del proceso en el instante n y de ciertas variables independientes. Mas específicamente, construiremos el proceso poniendo $X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1})$, con $(U_i)_{i \geq 1}$ variables aleatorias independientes. Este hecho garantizará la Markovianidad del proceso definido mediante la recurrencia. Eligiendo de forma adecuada la distribución de las variables con las que actualizaremos

el proceso, así como también la función F (llamada mecanismo de actualización), conseguiremos que el proceso tenga las transiciones deseadas. Por último, utilizaremos como condición inicial para la recurrencia una nueva variable X_0 , independiente del proceso de actualización $(U_i)_{i \geq 1}$, con la distribución inicial deseada.

Dada $E = \{a_1, \dots, a_m\}$ y p matriz de transición en E , para cada $i = 1, \dots, m$ consideremos una partición $I(a_i, a_j)$ $j = 1, \dots, m$ del intervalo $[0, 1]$ formada por conjuntos medibles de forma tal que

$$|I(a_i, a_j)| = p(a_i, a_j) \quad \forall j = 1, \dots, m,$$

donde $|I(a_i, a_j)|$ denota la medida de Lebesgue del conjunto $I(a_i, a_j)$. Finalmente definimos nuestro proceso de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X_0 &= a_0, \\ X_{n+1} &:= F(X_n, U_{n+1}), \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde $(U_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de variables independientes uniformes en el intervalo $[0, 1]$ y

$$F(a, u) = \sum_{j=1, \dots, m} a_j \mathbf{1}_{\{u \in I(a, a_j)\}}.$$

Observemos que el proceso definido de esta manera es Markoviano debido a la independencia de las variables uniformes: el valor del proceso a tiempo $n + 1$ depende sólo de lo que sucede a tiempo n y del valor de U_{n+1} . Además,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = a_{n+1} | X_n = a_n) &= P(F(a_n, U_{n+1}) = a_{n+1}) = P(U_{n+1} \in I(a_n, a_{n+1})) \\ &= |I(a_n, a_{n+1})| = p(a_n, a_{n+1}) \end{aligned}$$

con lo cual el proceso construido resulta una cadena de Markov homogénea con matriz de transición p . El haber utilizado $X_0 = a_0$ como condición inicial, hace que la cadena tenga distribución inicial concentrada en a_0 . Luego, para que el proceso tenga distribución inicial μ , utilizamos como nueva condición inicial una variable aleatoria X_0 con distribución μ , independiente de la sucesión de variables uniformes $(U_i)_{i \geq 1}$ con las que actualizamos el proceso.

A continuación presentamos otra posible construcción de una cadena de Markov homogénea con matriz de transición p y distribución inicial μ , utilizando el Teorema de extensión de Kolmogorov.

Comencemos suponiendo que queremos construir un número finito de variables aleatorias (X_0, \dots, X_m) satisfaciendo la Markovianidad (1.2) para $0 \leq n \leq m - 1$, teniendo distribución inicial concentrada en el punto $a \in E$. Tales variables pueden obtenerse tomando

$$\Omega = E^{m+1}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega),$$

$$P_a^{m+1}(\omega) := \mathbf{1}_{\{a\}}(\omega_0) p(\omega_0, \omega_1) p(\omega_1, \omega_2) \dots p(\omega_{m-1}, \omega_m), \quad \omega = (\omega_0, \dots, \omega_m) \in \Omega,$$

$$X_i(\omega) := \omega_i, \quad 0 \leq i \leq m.$$

Es decir, hemos conseguido definir probabilidades P_a^{m+1} sobre los espacios E^{m+1} de forma tal que las proyecciones definidas en estos resultan Markovianas con matriz de transición p y estado inicial a . Imitando esta idea, sería natural definir la cadena infinita considerando las proyecciones X_n , definidas en $\tilde{\Omega} = E^{\mathbb{N}_0}$ mediante

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= E^{\mathbb{N}_0} \xrightarrow{X_n} E \\ \omega &= (\omega_0, \omega_1, \dots) \longmapsto \omega_n. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Para que las proyecciones resulten medibles, en $\tilde{\Omega} = E^{\mathbb{N}_0}$ consideramos la σ -álgebra

$$\tilde{\mathcal{F}} = \sigma(X_n : n \geq 0).$$

Por último, resta garantizar la existencia de una probabilidad \mathbb{P}_a en $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ que haga de las proyecciones $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con matriz de transición p y distribución inicial concentrada en a : $\mathbb{P}_a(X_0 = a) = 1$. Para ello, apelaremos al Teorema de extensión de Kolmogorov:

Teorema 1.1.4 *Sea $(\mu_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de probabilidades compatibles:*

1. μ_n probabilidad sobre E^n ,
2. $\mu_{n+1}\{(s_1, \dots, s_{n+1}) \in E^{n+1} : (s_1, \dots, s_n) \in A\} = \mu_n(A)$.

Entonces existe una única probabilidad \tilde{P} sobre $(E^{\mathbb{N}}, \tilde{\mathcal{F}})$, tal que

$$\tilde{P}(\{\omega \in \tilde{\Omega} : (w_1, \dots, w_n) \in A\}) = \mu_n(A), \quad \forall A \subseteq E^n, \forall n \geq 1.$$

Utilizando el resultado del Teorema 1.1.4 con la sucesión de probabilidades compatibles $(P_a^{m+1})_{m \geq 0}$, obtenemos que existe una única probabilidad \mathbb{P}_a en $E^{\mathbb{N}_0}$ para la cual las proyecciones $(X_n)_{n \geq 0}$ son una cadena de Markov con matriz de transición p y $\mathbb{P}_a(X_0 = a) = 1$. Dada una probabilidad μ en E , definiendo \mathbb{P}_μ en $E^{\mathbb{N}_0}$ mediante

$$\mathbb{P}_\mu(A) = \sum_{a \in E} \mu(a) \mathbb{P}_a(A) \quad A \in \tilde{\mathcal{F}}, \quad (1.6)$$

obtenemos que, bajo \mathbb{P}_μ , $(X_n)_{n \geq 0}$, con X_n definida en (1.5), resulta ser una cadena de Markov homogénea con matriz de transición p y distribución inicial μ .

1.1.5. Probabilidades invariantes

Heurísticamente μ y p consisten en una “ley inicial” y una “ley de evolución”. Estas, combinadas, determinan la ley del proceso en cada instante n mediante la fórmula

$$P(X_n = a) = \sum_{b \in E} \mu(b) p^n(b, a), \quad (1.7)$$

donde p^n denota la n -ésima potencia de la matriz de transición p . Es decir, tenemos una familia de matrices $\{p^n : n \geq 1\}$ actuando multiplicativamente sobre el espacio de probabilidades definidas en E , de forma tal que si μ es la distribución inicial del proceso, entonces $\mu^T p^n$ es la distribución del proceso en el instante n : si $X_0 \sim \mu$ entonces $X_n \sim \mu^T p^n$.

Típicamente, los sistemas en equilibrio son aquellos en los cuales, en algún sentido, no vemos variaciones temporales. Cuando trabajamos con modelos aleatorios hablaremos de equilibrio cuando la distribución de las variables que describen la evolución es la misma en cualquier instante. Luego, diremos que el sistema está en equilibrio si las variables $(X_n)_{n \geq 0}$ son idénticamente distribuidas.

Siendo que $X_n \sim \mu^T p^n$, para que el sistema este en equilibrio la distribución inicial μ debe ser tal que $\mu^T p^n = \mu$ para todo $n \geq 1$, lo que se reduce a verificar que $\mu^T p = \mu$. Es decir, la distribución inicial debe ser preservada por la dinámica. Esto da origen a la siguiente definición.

Definición 1.1.6 Sea p una matriz de transición en E . Diremos que una probabilidad π sobre E es invariante con respecto a p si

$$\pi(a) = \sum_{b \in E} \pi(b)p(b, a) \quad \forall a \in E .$$

Matricialmente, escribimos $\pi = \pi^T p$.

La existencia y unicidad de probabilidades invariantes es uno de los primeros problemas que se abordan en el estudio sistemático de cadenas de Markov. Sólo vamos a mencionar que en nuestro contexto, siendo el espacio de estados finito, siempre existen probabilidades invariantes. La unicidad de las mismas depende, fundamentalmente, de la capacidad del proceso para pasar de un estado a cualquier otro con probabilidad positiva.

Si bien sólo necesitaremos hablar de cadenas de Markov con espacios de estados finitos, tanto las definiciones como las construcciones hechas valen para espacios numerables. En tal caso la existencia de probabilidades invariantes no está garantizada. Por último, ponemos énfasis en los siguientes aspectos:

1. Una cadena de Markov homogénea queda caracterizada por su ley de evolución, codificada en la matriz de transición p y la distribución inicial μ del proceso (ver (1.3)).
2. Dada una ley de evolución p , aquellas probabilidades π que son preservadas por la dinámica se dicen probabilidades invariantes: $\pi = \pi^T p$.

1.2. Procesos de Markov: tiempo continuo

En lo que sigue, vamos a agregar una nueva fuente de aleatoriedad en la dinámica. En lugar de pensar que los saltos se realizan en momentos preestablecidos ($n = 1, 2, \dots$), permitiremos que el tiempo de permanencia en cada estado también sea aleatorio. Para preservar la Markovianidad del nuevo sistema, las permanencias serán modeladas con variables aleatorias exponenciales, permitiendo que el parámetro varíe con el estado. Para evitar cuestiones técnicas, podemos pensar que si el proceso se encuentra en el estado a , espera un tiempo exponencial de parámetro $\lambda(a)$ al cabo del cual decide pasar al estado b con probabilidad $p(a, b)$, siendo p una matriz de transición en E con $p(a, a) = 0$ para todo $a \in E$ (excluimos de esta exposición a los procesos con estados absorbentes). Los parámetros $\{\lambda(a) : a \in E\}$ junto con la matriz de transición p determinan la dinámica. Resta decidir la distribución inicial para caracterizar al proceso. Esta descripción coloquial admite la siguiente formalización:

Definición 1.2.1 $(X_t)_{t \geq 0}$ se dice proceso de Markov homogéneo a tiempo continuo si verifica las siguientes tres condiciones:

a) (Markov)

$$P(X_{s+t} = b | X_{t_1} = a_1, \dots, X_{t_n} = a_n, X_t = a) = P(X_{s+t} = b | X_t = a)$$

$s, t > t_1, > \dots, > t_n \geq 0; \forall b, a, a_n, \dots, a_1 \in E$, cuando ambos términos estén bien definidos.

b) (Homogéneo) $P(X_{s+t} = b | X_s = a) = P_t(a, b)$.

c) (Propiedad de saltos) Existe una sucesión de tiempos de parada $(T_n)_{n \geq 0}$ estrictamente creciente tal que $T_0 = 0$, X_t es constante en el intervalo $[T_n, T_{n+1})$ y $X_{T_n-} \neq X_{T_n} \quad \forall n \geq 0$.

Veremos más adelante cómo relacionar la descripción heurística hecha al inicio de la Sección con la Definición 1.2.1. Por el momento, continuaremos a partir de esta siguiendo un abordaje analítico del tema.

Tal como en el caso discreto, llamaremos distribución inicial del proceso a la ley de X_0 . De alguna manera, las matrices $\{P_t : t > 0\}$ codifican la ley de evolución. Combinando la ley de evolución con la distribución inicial del proceso, obtenemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 < t_1 < \dots < t_n$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in E$

$$P(X_0 = a_0, X_{t_1} = a_1, \dots, X_{t_n} = a_n) = \mu(a_0)P_{t_1}(a_0, a_1)P_{t_2-t_1}(a_1, a_2)P_{t_n-t_{n-1}}(a_{n-1}, a_n) .$$

Consecuentemente, la distribución del proceso en el instante t está dada por

$$P(X_t = a) = \sum_{b \in E} \mu(b)P_t(b, a) .$$

Por último, notemos que a partir de la Markovianidad del proceso, podemos concluir que definiendo P_0 como la matriz identidad, las matrices $\{P_t : t \geq 0\}$ verifican la relación de semigrupo, conocida como ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$P_{t+s} = P_t P_s .$$

La propiedad de semigrupo permite determinar la matriz P_t para tiempos grandes conociéndola apenas para tiempos chicos. Más específicamente, se tienen los siguientes resultados:

Teorema 1.2.2 *Sea $\{P_t : t \geq 0\}$ el semigrupo de matrices de transición asociado al proceso Markoviano $(X_t)_{t \geq 0}$. Existe una matriz $Q = \{q(a, b) : a, b \in E\}$, llamada matriz de tasas, que verifica*

$$P_h(a, b) = h q(a, b) + o(h) \quad \text{si } a \neq b , \tag{1.8}$$

$$P_h(a, a) = 1 + h q(a, a) + o(h) , \tag{1.9}$$

cuando $h \downarrow 0$. Concluimos así que $\{P_t : t \geq 0\}$ es la única solución del sistema

$$\begin{cases} \frac{dP_t}{dt} = QP_t & t > 0 , \\ P_0 = I . \end{cases} \tag{1.10}$$

La matriz Q verifica

1. $q(a, b) \geq 0$ si $a \neq b$,
2. $q(a, a) = - \sum_{b \in E, b \neq a} q(a, b) \leq 0$.

Definición 1.2.3 *Toda matriz Q verificando estas propiedades se llama matriz de tasas.*

La matriz de tasas Q define un operador sobre el espacio de funciones definidas en E tomando valores en \mathbb{R} . Para $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, consideramos

$$L[f](a) = \sum_{b \in E} q(a, b)f(b) = \sum_{b \in E} q(a, b)[f(b) - f(a)] . \tag{1.11}$$

Definición 1.2.4 *El operador L asociado a una matriz de tasas Q se llama generador infinitesimal. Si $(X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov con semigrupo $\{P_t : t \geq 0\}$ y matriz de tasas Q , decimos que L es el generador infinitesimal asociado al proceso $(X_t)_{t \geq 0}$. Toda transformación lineal que aplique el espacio de funciones $\{f; f : E \rightarrow \mathbb{R}\}$ en si mismo y cuya matriz asociada sea una matriz de tasas se dice generador infinitesimal.*

El Teorema 1.2.2 establece una correspondencia entre el semigrupo de matrices $\{P_t : t \geq 0\}$ y su matriz de tasas. Por otro lado, matrices de tasas se encuentran en correspondencia con generadores infinitesimales. Luego, basta con conocer el generador infinitesimal L (o equivalentemente, la matriz de tasas Q) para caracterizar la ley de evolución del proceso. Es por ello que decimos que L contiene toda la información que caracteriza la dinámica.

Así como en el caso discreto pudimos construir cadenas de Markov con matriz de transición p y distribución inicial μ , dado un generador infinitesimal L y una probabilidad μ en E queremos ahora construir un proceso que tenga a L por generador y a μ por distribución inicial.

1.2.5. Construcción de Procesos de Markov

La descripción del proceso hecha al inicio de la Sección en términos de tiempos de espera exponenciales de parámetro $\{\lambda(a) : a \in E\}$ y saltos según una matriz de transición p , determinaría un proceso con tasas

$$q(x, y) := \begin{cases} \lambda(x)p(x, y) & \text{si } x \neq y, \\ -\lambda(x) & \text{cc.} \end{cases} \quad (1.12)$$

Usando esta idea, dado un generador infinitesimal L y una probabilidad μ en E , vamos a construir un proceso de Markov homogéneo con generador infinitesimal L y distribución inicial μ . Sea Q la matriz de tasas asociada al generador L . Motivados por (1.12), consideramos los parámetros $\{\tilde{\lambda}(a) : a \in E\}$ y la matriz de transición \tilde{p} , definidos por

$$\tilde{\lambda}(a) = \sum_{b \neq a} q(a, b) \quad (1.13)$$

$$\tilde{p}(a, b) = \frac{q(a, b)}{\tilde{\lambda}(a)} \text{ para } a \neq b. \quad (1.14)$$

Dado un estado $a \in E$ consideremos

- $(E^{\mathbb{N}_0}, \tilde{\mathcal{F}}_1, \mathbb{P}_a)$ el espacio de probabilidad que hace de las proyecciones $(Y_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con matriz de transición \tilde{p} y estado inicial a (ver Teorema 1.1.4) .
- $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ dónde están definidas $(\tau_i)_{i \geq 0} \sim \mathcal{E}(1)$, i.i.d.

Con estos dos espacios definimos el espacio de probabilidad producto,

$$(\Omega, \mathcal{F}, P_a) := (\Omega_1 \times \Omega_2, \tilde{\mathcal{F}}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_a \otimes P_2).$$

Poniendo $\sigma_n := \tilde{\lambda}(Y_n)^{-1} \tau_n$, definimos

$$\begin{aligned} T_0 &= 0, & T_n &:= \sigma_0 + \dots + \sigma_{n-1}, \quad n \geq 1, \\ X_t &:= Y_n & T_n &\leq t < T_{n+1}, \quad n = 0, \dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

Es decir, X_t espera σ_n tiempo en el estado Y_n y luego salta al estado Y_{n+1} . En esta construcción, el proceso empieza siempre en el estado a . Puede demostrarse que $(X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso Markoviano con generador infinitesimal L y distribución inicial concentrada en a . Para hacer una construcción donde la distribución inicial del proceso sea μ , basta tomar una combinación convexa de las probabilidades P_a pesadas según μ , poniendo $P_\mu = \sum \mu(a)P_a$, y considerar en $(\Omega, \mathcal{F}, P_\mu)$ el proceso definido por (1.15).

Observación: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P_a)$ un espacio de probabilidad con $(X_t)_{t \geq 0}$ proceso de Markov tomando valores en E , con condición inicial a y generador infinitesimal L . Fijado $\omega \in \Omega$, la función que a cada instante asigna $t \mapsto X_t(\omega) \in E$ (llamada trayectoria) es una función continua a derecha con límite a izquierda en cada punto t . Denotemos por $D([0, \infty), E)$ el espacio de tales funciones. Este espacio puede ser metrizable, de forma tal que trayectorias que saltan cerca resulten parecidas (métrica de Skorohod presentada para intervalos finitos en el Apéndice, ver sección 5.1). La aplicación que asigna a ω su trayectoria resulta ser una función medible entre los espacios Ω y $D([0, \infty), E)$. Denotamos por \mathbb{P}_a a la probabilidad imagen de P_a inducida por esta aplicación. Tenemos entonces que \mathbb{P}_a es una probabilidad en el espacio $D([0, \infty), E)$, concentrada en trayectorias que comienzan en el punto a y que hace de las proyecciones un proceso Markoviano con igual generador infinitesimal que el proceso $(X_t)_{t \geq 0}$. Definiendo $\mathbb{P}_\mu = \sum_{a \in E} \mu(a) \mathbb{P}_a$, tenemos que las proyecciones resultan un proceso de Markov con generador L y distribución inicial μ . Puede además demostrarse que \mathbb{P}_μ queda caracterizada por esta propiedad.

Definición 1.2.6 Dado un generador infinitesimal L y una probabilidad μ en E , denotaremos por \mathbb{P}_μ a la única probabilidad en el espacio de trayectorias $D([0, \infty), E)$ que hace de las proyecciones

$$D([0, \infty), E) \longrightarrow E \tag{1.16}$$

$$(e_s)_{s \geq 0} \longrightarrow e_t, \tag{1.17}$$

un proceso de Markov con generador L y distribución inicial μ .

1.2.7. Semigrupo y Medidas invariantes

Las matrices $\{P_t : t \geq 0\}$ también definen operadores sobre el espacio de funciones definidas en E tomando valores en \mathbb{R} . Para $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, definimos el operador $S_t[f]$ mediante la fórmula

$$S_t[f](a) = \sum_{b \in E} P_t(a, b) f(b). \tag{1.18}$$

Si L es el generador infinitesimal correspondiente al semigrupo de matrices $\{P_t : t \geq 0\}$, tenemos entonces que $S_t[f](a)$ representa la esperanza de la observable f evaluada en X_t , considerando el proceso con generador L y distribución inicial concentrada en a :

$$S_t[f](a) = \mathbb{E}_a[f(X_t)].$$

Por otro lado, siendo el proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ Markov, tenemos que $\{S_t : t \geq 0\}$ es un semigrupo:

$$S_{t+s} = S_t \circ S_s.$$

Utilizando además las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, obtenemos que

$$\partial_t S_t[f] = S_t[L[f]].$$

Haciendo un abuso de notación utilizaremos también $\{S_t : t \geq 0\}$ para denotar al semigrupo $\{P_t : t \geq 0\}$ actuando sobre el espacio de probabilidades definidas en E , mediante la fórmula

$$S_t \mu(a) := \sum_{b \in E} \mu(b) P_t(b, a) = (\mu^T P_t)(a) = \mathbb{P}_\mu(X_t = a).$$

Es decir, $S_t\mu$ es la distribución del proceso en el instante t siendo μ la distribución inicial.

Para finalizar esta sección, resta hablar de probabilidades invariantes para procesos de Markov. Como ya hemos mencionado en el caso discreto, una probabilidad resultará invariante para la dinámica si es preservada por la misma. En el presente contexto, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.2.8 Una probabilidad π definida en E es invariante para el semigrupo $\{S_t : t \geq 0\}$ si verifica

$$S_t\pi = \pi, \quad \forall t > 0,$$

o equivalentemente,

$$\pi(a) = \sum_{b \in E} \pi(b)P_t(b, a) = P(X_t = a) \quad \forall a \in E, t > 0.$$

Derivando en t , tenemos que si π es invariante entonces

$$\sum_{b \in E} \pi(b)q(b, a) = 0 \quad \forall a \in E.$$

El próximo resultado garantiza además que esta condición es suficiente.

Proposición 1.2.9 Una probabilidad π sobre E es invariante si y sólo si $\pi^T Q = 0$.

Esta proposición nos da el siguiente sistema de ecuaciones para π :

$$\sum_{a \in E} \pi(a)q(a, b) = \sum_{c \in E} \pi(c)q(c, b) \quad (\text{ecuaciones de balance}) \tag{1.19}$$

En muchos casos, resulta más sencillo resolver el sistema

$$\pi(a)q(a, b) = \pi(b)q(b, a) \quad a \neq b \quad (\text{ecuaciones de balance detallado}) \tag{1.20}$$

Definición 1.2.10 Diremos que una probabilidad π en E es reversible respecto a la matriz de tasas Q (o al generador infinitesimal asociado a esta) si verifica (1.20).

Observación: Sumando sobre los posibles a vemos que si π es reversible, entonces es invariante.

En lo que sigue consideraremos los operadores $\{S_t : t \geq 0\}$ y L definidos sobre el espacio de Hilbert

$$L^2(\mu) = \left\{ f; f : E \rightarrow \mathbb{R} : \int f^2(a)d\mu(a) < \infty \right\} = \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{a \in E} f^2(a)\mu(a) < \infty \right\}$$

con producto interno

$$\langle f, g \rangle_\mu := \int f g d\mu = \sum_{a \in E} f(a)g(a)\mu(a).$$

Notemos que, siendo E finito, tenemos que $L^2(\mu) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}\}$. Los siguientes resultados permiten caracterizar probabilidades reversibles e invariantes en términos del semigrupo $\{S_t : t \geq 0\}$ y el generador infinitesimal L , respectivamente.

Proposición 1.2.11 π es reversible respecto a la matriz de tasas Q si y sólo si los operadores $\{S_t : t \geq 0\}$ asociados a Q resultan autoadjuntos en $L^2(\pi)$:

$$\langle f, S_t[g] \rangle_\mu = \langle S_t[f], g \rangle_\mu \quad \text{para todo } t \geq 0, f, g \in L^2(\mu).$$

Proposición 1.2.12 Denotemos por L^* al operador adjunto de L en $L^2(\mu)$. Entonces

L^* es un generador si y sólo si π es invariante.

Capítulo 2

Presentación del modelo y de los resultados esperables

2.1. Descripción y propiedades del proceso de Exclusión Simple

El espacio de configuraciones. Sea \mathbb{Z}^d el reticulado d -dimensional. Para N entero positivo denotaremos con \mathbb{T}_N al toro discreto $\mathbb{T}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ y $\mathbb{T}_N^d = (\mathbb{T}_N)^d = \{0, 1, \dots, N-1\}^d$. Los puntos de \mathbb{T}_N^d serán llamados sitios y los denotaremos con las letras x, y y z .

La aritmética en \mathbb{T}_N^d se realiza módulo N , coordenada a coordenada. Siguiendo la regla de exclusión, cada sitio puede tener a lo sumo una partícula, por lo cual el espacio de estados (también llamado de configuraciones) del proceso con el que estamos trabajando es $\chi_N = \{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d}$.

Para $\eta \in \chi_N$, tenemos que

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si hay una partícula en } x, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

La dinámica. La evolución del proceso puede ser descrita de la siguiente manera: dada una configuración η , cada una de las partículas, en forma independiente respecto de las demás, espera un tiempo exponencial de parámetro 1 al cabo del cual intenta saltar de la posición en que se encuentra. Una partícula en el lugar x elige el sitio y con probabilidad $p(x, y)$ y, siguiendo la regla de exclusión, el salto se realiza sólo si el lugar elegido no está ocupado. Caso contrario, nada ocurre. en cualquiera de los dos casos, el proceso vuelve a comenzar utilizando nuevas variable exponenciales para cada una de las partículas.

Es decir, nuestra nueva configuración es igual a la anterior en todos los sitios salvo por el cambio operado entre las posiciones x y y , siempre que la regla de exclusión lo permita.

El generador. Sea $p(\cdot, \cdot)$ matriz de transición sobre \mathbb{Z}^d con las siguientes propiedades:

- p invariante por traslaciones: $p(x, y) = p(0, y - x) =: p(y - x)$ siendo p una probabilidad en \mathbb{Z}^d .
- La probabilidad $p(\cdot)$ es irreducible en \mathbb{Z}^d :
 $\forall x, y \in \mathbb{Z}^d$ existen x_0, x_1, \dots, x_k tales que $x = x_0, y = x_k$ y $p(x_{i+1} - x_i) > 0$ para $0 \leq i \leq k - 1$.
- p de rango finito: existe $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $p(x) = 0$ para todo x con $|x| \geq M$.

$p(\cdot)$ se llama probabilidad de saltos. En base a p tendremos para cada N una probabilidad de saltos p^N en \mathbb{T}_N^d , definida por:

$$p^N(x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} p(x + Nz)$$

Observación: dado que p es de rango finito, para N suficientemente grande $p^N \equiv p$. Como estamos interesados en resultados asintóticos cuando $N \uparrow \infty$, en muchas ocasiones omitiremos p^N utilizando p .

El generador L_N correspondiente a la dinámica descripta, está dado por

$$L_N[f](\eta) := \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{y \in \mathbb{T}_N^d} \underbrace{1}_{\substack{\text{espera} \\ \text{exponencial} \\ \text{de parámetro} \\ 1}} \underbrace{p^N(y)}_{\substack{\text{elige tamaño del} \\ \text{salto}}} \underbrace{\eta(x)[1 - \eta(x + y)]}_{\substack{\text{salta sólo si hay una partícula en } x \\ \text{y el sitio } x + y \text{ no está ocupado}} \underbrace{[f(\eta^{x,x+y}) - f(\eta)]}_{\substack{\text{instantáneamente } f \text{ varía} \\ \text{así}}}, \quad (2.1)$$

para $f : \chi_N \rightarrow \mathbb{R}$, donde

$$\eta^{x,y}(z) = \begin{cases} \eta(z) & \text{si } z \neq x, y, \\ \eta(y) & \text{si } z = x, \\ \eta(x) & \text{si } z = y. \end{cases}$$

La expresión (2.1) tiene la siguiente representación que nos será de utilidad:

$$L_N[f](\eta) = \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{y \in \mathbb{T}_N^d} \eta(x)p^N(y)[f(\eta^{x,x+y}) - f(\eta)].$$

Notemos que estamos trabajando con un proceso de Markov a saltos en el espacio finito χ_N , como los presentados en el Capítulo 1. Denotaremos por $\{S_t^N, t \geq 0\}$ al semigrupo de Markov asociado al generador L_N y por \mathbb{P}_ν a la única probabilidad en el espacio $D([0, \infty), \{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d})$ para la cual las trayectorias $(\eta_t)_{t \geq 0}$ resultan un proceso de Markov con generador L_N y distribución inicial ν (como en (1.2.6)). Esperanzas respecto de la probabilidad \mathbb{P}_ν serán denotadas por \mathbb{E}_ν mientras que E_ν representa la esperanza respecto de la probabilidad ν .

Observación: En algunos casos, $(\eta_t)_{t \geq 0}$ denotará también al proceso con generador NL_N o N^2L_N , según sea oportunamente establecido.

Medidas Invariantes Ahora estudiaremos las medidas invariantes para estos procesos.

Definición 2.1.1 Dado $0 \leq \alpha \leq 1$, notemos por ν_α^N y ν_α a las medidas producto de Bernoulli de parámetro α en $\{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d}$ y $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, respectivamente. En particular, bajo ν_α las variables aleatorias $\{\eta(x)\}_{x \in \Lambda}$ son independientes y su distribución es Bernoulli de parámetro α .

Notación: Para no recargar la notación, cuando no se preste a confusión, denotaremos por ν_α a la medida producto de parámetro α tanto para productos finitos como infinitos.

Proposición 2.1.2 Las medidas producto de Bernoulli $\{\nu_\alpha^N\}_{0 \leq \alpha \leq 1}$ son invariantes para el proceso de Exclusión Simple. Además, con respecto a ν_α^N , el proceso de exclusión simple con probabilidad de saltos $\tilde{p}(z) := p(-z)$ es el proceso adjunto al de probabilidad de saltos $p(z)$. En particular, si p es simétrica el proceso es autoadjunto con respecto a cada ν_α^N .

Demostración: Vamos a verificar que

$$\begin{aligned}
 \langle L_N[f], g \rangle_{\nu_\alpha} &= \int L[f](\eta)g(\eta)d\nu_\alpha = \langle f, L_N^*[g] \rangle_{\nu_\alpha} = \int f(\eta)L^*[g](\eta)d\nu_\alpha \quad \forall f, g \in L^2(\nu_\alpha). \\
 \int L_N[f](\eta)g(\eta)d\nu_\alpha &= \int \sum_x \sum_z \eta(x)p(z)\{f(\eta^{x,x+z}) - f(\eta)\}g(\eta)d\nu_\alpha \\
 &= \int \sum_x \sum_z \eta(x)p(z)f(\eta^{x,x+z})g(\eta)d\nu_\alpha - \int \sum_x \sum_z \eta(x)p(z)f(\eta)g(\eta)d\nu_\alpha \\
 &= \underbrace{\int \sum_x \sum_z \xi(x+z)p(z)f(\xi)g(\xi^{x,x+z})d\nu_\alpha}_{\xi=\eta^{x,x+z}} - \underbrace{\int \sum_x \sum_w \eta(x)p(-w)f(\eta)g(\eta)d\nu_\alpha}_{w=-z} \\
 &= \underbrace{\int \sum_w \sum_v \xi(h)p(-v)f(\xi)g(\xi^{h+v,h})d\nu_\alpha}_{h=x+z, v=-z} - \int \sum_x \sum_w \eta(x)p(-w)f(\eta)g(\eta)d\nu_\alpha \\
 &= \langle f, L_N^*[g] \rangle_{\nu_\alpha}
 \end{aligned}$$

La familia de medidas invariantes $\{\nu_\alpha^N\}_{0 \leq \alpha \leq 1}$ está “parametrizada” por su densidad, pues:

$$E_{\nu_\alpha}[\eta(0)] = \nu_\alpha\{\eta(0) = 1\} = \alpha.$$

El proceso de exclusión simple puede construirse también en $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Sobre dicha construcción y sus propiedades puede verse [10] y [11].

A lo largo de este trabajo consideraremos funciones $f : \{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d} \rightarrow \mathbb{R}$ para diferentes valores de N . En ciertas ocasiones, las funciones estarán definidas sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Siendo \mathbb{T}_N^d finito, toda función definida en $\{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d}$ depende de finitas coordenadas. Las funciones definidas en $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ que dependen de un número finito de coordenadas juegan un papel especial.

Definición 2.1.3 Una función $\psi : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice local o cilíndrica si depende de finitas coordenadas. En tal caso, escribiremos

$$\psi(\eta) = \psi(\eta(x_1), \dots, \eta(x_k))$$

y decimos que $\{x_1, \dots, x_k\}$ es el soporte de ψ . Dada una función ψ cilíndrica, definimos la función $\tilde{\psi} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, mediante la fórmula

$$\tilde{\psi}(\alpha) := E_{\nu_\alpha}[\psi]. \quad (2.2)$$

Si la función ψ depende de k coordenadas, puede tomar a lo sumo 2^k valores y por lo tanto es acotada. Por otra parte su esperanza respecto de la medida ν_α , $\tilde{\psi}(\alpha)$, es un polinomio en α y por consiguiente tan regular como sea requerido. Las funciones cilíndricas serán evaluadas en configuraciones finitas (en $\{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d}$) siempre que su soporte este contenido en una caja centrada en el origen con lados de longitud menor que N .

Finalizaremos esta Sección introduciendo el grupo de traslaciones, el cual actúa en diferentes espacios. Abusando de la notación, lo denotaremos siempre de la misma manera.

Para $x \in \mathbb{Z}^d$ sea $\tau_x : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$, definida por

$$\tau_x(y) = x + y. \tag{2.3}$$

Como $\tau_0(x) = x$ y $\tau_x \circ \tau_y = \tau_{x+y}$, tenemos que la composición de funciones hace de $\{\tau_x : x \in \mathbb{Z}^d\}$ un grupo conmutativo. El próximo paso consiste en trasladar configuraciones, definiendo $\tau_x : \chi \rightarrow \chi$ para $\chi = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, mediante la fórmula

$$(\tau_x \eta)(y) = \eta(y + x), \quad y \in \mathbb{Z}^d. \tag{2.4}$$

Esta acción del grupo de traslaciones sobre las configuraciones se extiende naturalmente a las funciones $f \in C(\chi)$, donde $C(\chi)$ denota a la familia de funciones continuas de χ en \mathbb{R} , mediante la fórmula

$$(\tau_x f)(\eta) = f(\tau_x(\eta)). \tag{2.5}$$

Por último, dada μ una probabilidad en χ , definimos $\tau_x \mu$ como la única medida que verifica:

$$\int_{\chi} f(\eta) (\tau_x \mu)(d\eta) = \int_{\chi} f(\tau_x \eta) \mu(d\eta) \quad \forall f \in \mathcal{C}(\chi). \tag{2.6}$$

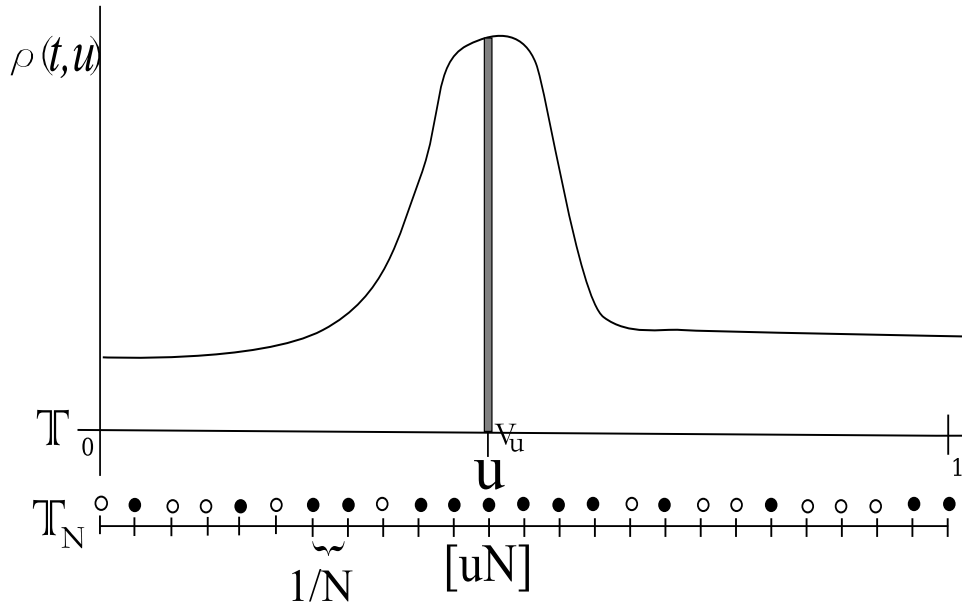
La suma módulo N coordenada a coordenada hace de \mathbb{T}_N^d un grupo conmutativo. Utilizando esta nueva suma en (2.3), queda definido el grupo de traslaciones $\{\tau_x : x \in \mathbb{T}_N^d\}$ actuando en \mathbb{T}_N^d . Adaptando las definiciones dadas en (2.4), (2.5) y en (2.6), el grupo de traslaciones actúa sobre el espacio de configuraciones $\{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d}$, sobre el de funciones a valores reales definidas en $\{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d}$, y sobre el espacio de medidas definidas en $\{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d}$, respectivamente.

2.2. Pasaje de escala Macroscópica a Microscópica

Podemos decir que un sistema físico está en equilibrio cuando los parámetros macroscópicos que lo caracterizan (temperatura, presión, densidad) no varían en el tiempo. Restringiremos nuestra atención al estudio de la densidad como única variable de interés, en principio definida para sistemas en equilibrio. Sin embargo, para sistemas fuera del equilibrio, esta puede ser considerada localmente. Para fijar ideas, supongamos que tenemos un gas en $V = \mathbb{T}^d$. Cuando decimos que en cierto instante t el gas está distribuido de acuerdo a la densidad $\rho(t, \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, entendemos que para cada $u \in \mathbb{T}^d$, en un entorno V_u suficientemente pequeño comparado a V , el gas (alrededor de u) estaría distribuido uniformemente en V_u con densidad constante $\rho(t, u)$. Según este enfoque, en cada uno de estos entornos se verifica un equilibrio. Típicamente $\rho(t, u)$ resulta ser la solución de una ecuación diferencial, con condición inicial dada por ρ_0 , la densidad inicial con la que se encuentra distribuido el gas.

El espacio macroscópico donde se mueve el sistema está representado por el toro d -dimensional $\mathbb{T}^d = [0, 1)^d$. \mathbb{T}_N^d representa una discretización del toro d -dimensional y puede considerarse contenido en el mismo tomando en \mathbb{T}^d el reticulado formado por los vértices x/N , $x \in \mathbb{T}_N^d$. Luego, a la posición macroscópica u le asignamos el punto $[uN]$ del conjunto \mathbb{T}_N^d . Esquemáticamente, resumimos esta correspondencia poniendo

Macro		Micro
\mathbb{T}^d		\mathbb{T}_N^d
u	—————→	$x = [uN]$
x/N	←————	x



Haciendo $N \uparrow \infty$ esperamos relacionar propiedades del sistema microscópico con las del macroscópico.

Queremos ahora interpretar un perfil de densidad macroscópica ρ en términos microscópicos. Cuando trabajamos con dinámicas aleatorias, los equilibrios resultan ser las medidas invariantes. Fuera del equilibrio, esperamos observar medidas que se comporten localmente como equilibrios, tal como ocurre a nivel macroscópico. Esta idea sugiere la siguiente definición.

Definición 2.2.1 *Medida producto con parámetro de variación lenta asociado al perfil ρ :*

Dada $\rho : \mathbb{T}^d \rightarrow [0, 1]$ suave, representamos por $\nu_{\rho(\cdot)}^N$ a la única probabilidad en el espacio $\{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d}$ caracterizada por las siguientes dos propiedades: bajo $\nu_{\rho(\cdot)}^N$

1. $\{\eta(x); x \in \mathbb{T}_N^d\}$ son variables aleatorias independientes,
2. $\eta(x)$ tiene distribución Bernoulli de parámetro $\rho(x/N)$, para todo $x \in \mathbb{T}_N^d$.

Es decir,

$$\nu_{\rho(\cdot)}^N \{ \eta : \eta(x_1) = i_1, \dots, \eta(x_k) = i_k \} = \prod_{j=1}^k \rho(x_j/N)^{i_j} (1 - \rho(x_j/N))^{1-i_j} ,$$

$$\forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{T}_N^d, i_j \in \{0, 1\} .$$

Dado un perfil $\rho : \mathbb{T}^d \rightarrow [0, 1]$ y un entero positivo N , $\nu_{\rho(\cdot)}^N$ es una medida producto con distribuciones marginales Bernoulli de parámetro variable.

Si miramos esta medida en torno a $[uN]$, representante microscópico del punto macroscópico $u \in \mathbb{T}^d$, para ρ continua, cuando $N \uparrow \infty$ observamos una medida producto de distribuciones Bernoulli de parámetro constante $\rho(u)$. En particular, tendremos que

$$E_{\nu_{\rho(\cdot)}^N} [\eta([uN])] = \rho([uN]/N) \rightarrow \rho(u) = E_{\nu_{\rho(u)}} [\eta(0)] .$$

De forma más general, si $\psi(\eta)$ es local, $\psi(\eta) = \psi(\eta(x_1), \dots, \eta(x_k))$, al centrar la función ψ alrededor del punto $[uN]$ y tomar esperanza con respecto a $\nu_{\rho(\cdot)}^N$, estaremos trabajando con una medida producto

de k distribuciones Bernoulli de parámetro $\rho([uN] + x_i/N)$, para $0 \leq i \leq k$. Si ρ es continua en u , cada densidad marginal converge a $\rho(u)$ y entonces

$$E_{\nu_{\rho(\cdot)}^N}[\tau_{[uN]}\psi(\eta)] = E_{\nu_{\rho(\cdot)}^N}[\psi(\eta([uN] + x_1), \dots, \eta([uN] + x_k))] \rightarrow E_{\nu_{\rho(u)}}[\psi(\eta(x_1), \dots, \eta(x_k))] .$$

De algún modo la probabilidad $\nu_{\rho(\cdot)}^N$ definida en el espacio $\{0, 1\}^{\mathbb{T}^d_N}$ es consistente con la noción de *equilibrio local* macroscópico: localmente la medida se comporta (para N grande) similar a una medida producto de distribuciones Bernoulli de parámetro constante, la cual hemos visto (proposición (2.1.2)) que es invariante para la dinámica.

Es decir, $\nu_{\rho(\cdot)}^N$ en torno al representante microscópico del punto u se comporta como si estuviera bajo un equilibrio con densidad $\rho(u)$. Cualquier otra familia de medidas con esta misma propiedad será considerada una versión microscópica del perfil ρ .

Definición 2.2.2 *Equilibrio Local: Una sucesión de probabilidades $(\mu^N)_{N \geq 1}$ en $\{0, 1\}^{\mathbb{T}^d_N}$ es un equilibrio local asociado al perfil $\rho : \mathbb{T}^d \rightarrow [0, 1]$ si*

$$E_{\mu^N}[\psi(\tau_{[uN]}\eta)] =: E_{\tau_{[uN]}\mu^N}[\psi(\eta)] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E_{\nu_{\rho(u)}}[\psi(\eta)] \quad \forall \psi \text{ local},$$

para todo u punto de continuidad de $\rho(\cdot)$.

Tenemos entonces el siguiente resultado.

Lema 2.2.3 *La sucesión $(\nu_{\rho(\cdot)}^N)_{N \geq 1}$, con $\nu_{\rho(\cdot)}^N$ presentadas en la Definición 2.2.1, resulta ser un equilibrio local asociado al perfil ρ*

Sabiendo relacionar perfiles definidos en el toro con una sucesión de probabilidades en $\{0, 1\}^{\mathbb{T}^d_N}$, consideremos una densidad inicial $\rho_0 : \mathbb{T}^d \rightarrow [0, 1]$ y un equilibrio local $(\mu^N)_{N \geq 1}$ asociado a ρ_0 . Para fijar ideas podemos poner $\mu^N = \nu_{\rho_0(\cdot)}^N$. Fijado N , queremos estudiar el proceso de exclusión teniendo a μ^N como distribución inicial, reflejando así el hecho de que ρ_0 resulta ser la condición inicial del sistema macroscópico.

Puesto que macroscópicamente para cada t podemos hablar de una densidad $\rho(t, \cdot)$, esperamos que la condición de equilibrio local con la que comenzamos el proceso se conserve a lo largo de la evolución. Desearíamos que si la distribución inicial del proceso está asociada a un perfil ρ_0 , entonces la distribución del proceso (apropiadamente acelerado) en el instante t esté asociada a un perfil $\rho(t, \cdot)$:

$$\mathbb{E}_{\mu^N}[\tau_{[uN]}\psi(\eta_t)] = E_{S_t \mu^N}[\tau_{[uN]}\psi(\eta)] = E_{\tau_{[uN]} S_t \mu^N}[\psi(\eta)] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E_{\nu_{\rho(t, u)}}[\psi(\eta)] \quad \forall \psi \text{ local},$$

siendo $\rho(t, u)$ solución de una E.D.P., llamada ecuación hidrodinámica. En tal caso, hablaremos de conservación del equilibrio local.

2.3. Deducción de la Ecuación Hidrodinámica

Exhibidas ya estas ideas, asumiendo conservación local del equilibrio, nos propondremos deducir la ecuación hidrodinámica asociada al proceso de exclusión simple. Para ello, fijemos $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}^d)$ y consideremos la aplicación que a η le asigna el valor $N^{-d} \sum H(x/N)\eta(x)$. Haciendo uso del Lema 5.1.3 (ver Apéndice, sección 5.2), sea M_t^H la martingala definida por

$$M_t^H = \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} H(x/N)\eta_t(x) - \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} H(x/N)\eta_0(x) - \int_0^t \frac{\sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} H(x/N)L_N[\text{proy}_x](\eta_s)}{N^d} ds, \quad (2.7)$$

donde

$$\text{proy}_x : \{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d} \rightarrow \{0, 1\}, \quad \text{proy}_x(\eta) := \eta(x).$$

Recordemos que, siendo $p(\cdot)$ de rango finito, para N suficientemente grande

$$\begin{aligned} L_N[f] &= \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{|y| \leq M} \underbrace{\eta(x)[1 - \eta(x+y)]p(y)}_{c(x,y,\eta)} [f(\eta^{x,x+y}) - f(\eta)] \\ &= \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{|y| \leq M} c(x,y,\eta) [f(\eta^{x,x+y}) - f(\eta)] \end{aligned}$$

por lo tanto si consideramos $f = \text{proy}_z$

$$\begin{aligned} L_N[\text{proy}_z](\eta) &= \sum_{|y| \leq M} c(z+y, -y, \eta) - c(z, y, \eta) && \text{pues cuando salta de } z+y \text{ a } z \text{ gana una} \\ & && \text{partícula y mientras que de } z \text{ a } z+y \\ & && \text{pierdo una partícula} \\ &= \sum_{|y| \leq M} -W_{z,z+y}, \quad \text{con } W_{a,b} = W_{a,b}(\eta) = c(a, b-a, \eta) - c(b, a-b, \eta) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|y| \leq M} -W_{z,z+y} + \frac{1}{2} \sum_{|y| \leq M} -W_{z,z+y} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|y| \leq M} -W_{z,z+y} + \frac{1}{2} \sum_{|y| \leq M} \underbrace{-W_{z,z-y}}_{W_{z-y,z}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|y| \leq M} W_{z-y,z} - W_{z,z+y}, \end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} H(x/N)L_N[\text{proy}_x](\eta_s) = \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} H(x/N) \frac{1}{2} \sum_{|y| \leq M} \{W_{x-y,x}(\eta_s) - W_{x,x+y}(\eta_s)\}$$

haciendo partes

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{|y| \leq M} \{H(x+y/N) - H(x/N)\} \frac{1}{2} W_{x,x+y}(\eta_s) \\
 &= \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{|y| \leq M} \{\nabla H(x/N) \cdot y/N + o(N^{-1})\} \frac{1}{2} W_{x,x+y}(\eta_s) \\
 &= \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \frac{\nabla H(x/N)}{N} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{|y| \leq M} y W_{x,x+y}(\eta_s) \right\} + o(N^{-1}), \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

siendo $\nabla H(u)$ el vector de derivadas parciales de la función H en el punto u mientras que la operación entre los vectores indicada por el punto es el producto interno. Reescribiendo

$$W_x(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{|y| \leq M} y W_{x,x+y}(\eta) = \tau_x W_0(\eta)$$

tenemos que M_t^H tiene la siguiente expresión

$$M_t^H = \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} H(x/N) \eta_t(x) - \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} H(x/N) \eta_0(x) - \int_0^t \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \frac{\nabla H(x/N)}{N} \tau_x W_0(\eta_s) ds + o(N^{-1}).$$

Dado que M_t^H es martingala y a tiempo 0 se anula, entonces su esperanza se anula para todo tiempo, por lo tanto

$$\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} H(x/N) \mathbb{E}_{\nu_{\rho(\cdot)}}^N[\eta_t(x)] - \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} H(x/N) \mathbb{E}_{\nu_{\rho(\cdot)}}^N[\eta_0(x)] = \int_0^t \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \frac{\nabla H(x/N)}{N} \mathbb{E}_{\nu_{\rho(\cdot)}}^N[\tau_x W_0(\eta_s)] ds + o(N^{-1}).$$

Asumiendo conservación del equilibrio local vamos a pensar que en torno de x en el instante s tenemos una medida producto de parámetro constante $\rho(s, x/N)$. En tal caso, podemos sustituir $\mathbb{E}_{\nu_{\rho(\cdot)}}^N[\eta_t(x)]$ por $E_{\nu_{\rho(t, x/N)}}[\eta(0)] = \rho(t, x/N)$ y $\mathbb{E}_{\nu_{\rho(\cdot)}}^N[\tau_x W_0(\eta_s)]$ por $E_{\nu_{\rho(s, x/N)}}[W_0]$. Además, dado que $\nu_{\rho(\cdot)}^N$ es un equilibrio local del perfil ρ_0 , reemplazamos $\mathbb{E}_{\nu_{\rho(\cdot)}}^N[\eta_0(x)]$ por $E_{\nu_{\rho_0(x/N)}}[\eta(0)] = \rho_0(x/N)$. Finalmente tenemos:

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} H(x/N) \rho(t, x/N)}_{\approx \int_{\mathbb{T}^d} H(u) \rho(t, u) du} - \underbrace{\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} H(x/N) \rho_0(x/N)}_{\approx \int_{\mathbb{T}^d} H(u) \rho_0(u) du} = \frac{1}{N} \int_0^t \underbrace{\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \nabla H(x/N) \cdot E_{\nu_{\rho(s, x/N)}}[W_0(\eta)]}_{\int_{\mathbb{T}^d} \nabla H(u) \cdot \tilde{W}(\rho(s, u)) du} ds + o(N^{-1}), \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

con

$$\tilde{W}(\alpha) := E_{\nu_\alpha}[W_0(\eta)] = \frac{1}{2} \sum_{|y| \leq M} y E_{\nu_\alpha}[W_{0,y}(\eta)] = \frac{1}{2} \sum_{|y| \leq M} \alpha(1-\alpha)y[p(y) - p(-y)] = m\alpha(1-\alpha),$$

donde $m = \sum_x xp(x)$.

Si tomamos $N \rightarrow \infty$ observamos que $\rho(t, u)$ responde a la ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \partial_t \rho = 0 \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot), \end{cases}$$

cuya solución está dada por $\rho(t, u) = \rho_0(u)$, para todo $t \geq 0$; lo que significa que a nivel macroscópico no vemos variar temporalmente al perfil inicial ρ_0 . Este se debe, esencialmente, al factor $1/N$ que aparece del lado derecho de la ecuación (2.9). Heurísticamente lo que está sucediendo es que a nivel microscópico el proceso está evolucionando muy lentamente con respecto al tiempo macroscópico, es decir, las partículas no tienen tiempo suficiente para moverse. Sin embargo, si consideramos la misma dinámica acelerada con tiempos exponenciales de tasas N , obtenemos que el generador del proceso acelerado está dado por

$$\tilde{L}_N[f] = NL_N[f].$$

Utilizando en (2.7) este nuevo generador, observamos que aparece un nuevo factor N . Esta aceleración del proceso puede verse como un “reescala temporal” de la escala microscópica. Es decir, podemos seguir considerando el proceso con tasas de salto de parámetro 1, sólo que a un tiempo macroscópico t le corresponde un tiempo microscópico tN . En algún sentido es de esperar la necesidad de un reescala espacio-temporal, pues a mayor cantidad de sitios más tiempo debo esperar para que las partículas se desplacen.

Finalmente, con el proceso acelerado, tomando $N \rightarrow \infty$ obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{T}^d} H(u)\rho(t, u)du - \int_{\mathbb{T}^d} H(u)\rho(u)du = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^d} \nabla H(u) \cdot \tilde{W}(\rho(s, u))du ds,$$

$\forall H$ suficientemente regular, por lo que ρ es solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \partial_t \rho = - \sum_{0 \leq i \leq d} \partial_{u_i} \tilde{W}_i(\rho) \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot). \end{cases} \quad (2.10)$$

En nuestro caso resulta ser

$$\begin{cases} \partial_t \rho = - \sum_{0 \leq i \leq d} m_i \partial_{u_i} \{\rho(1 - \rho)\} \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot) \end{cases}$$

con $m_i = \sum_x x_i p(x)$. Claramente vemos que si $m = 0$ la solución de esta ecuación coincide con la condición inicial, con lo cual tampoco habrá variación temporal macroscópica del perfil inicial. Volvamos a (2.8) para trabajar con

$$\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \frac{1}{2} \sum_{|y| \leq M} \nabla H(x/N) \cdot y W_{x, x+y}(\eta) = \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \frac{1}{2} \sum_{|y| \leq M} \sum_{i=1}^d \partial_i H(x/N) y_i \tau_x W_{0,y}(\eta),$$

siendo

$$W_{0,y} = c(0, y, \eta) - c(y, -y, \eta) = \eta(0)[1 - \eta(y)]p(y) - \eta(y)[1 - \eta(0)]p(-y).$$

Si suponemos p simétrica, entonces

$$W_{0,y} = [\eta(0) - \eta(y)]p(y) = h_y(\eta) - \tau_y h_y(\eta), \text{ con } h_y(\eta) = p(y)\eta(0) \quad (2.11)$$

En ese caso, ignorando ordenes, haciendo partes una vez más (notar que esto es posible producto de

(2.11)), tendremos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{|y| \leq M} \sum_{i=1}^d \partial_i H(x/N) y_i \tau_x W_{0,y}(\eta) &= \frac{1}{2N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{|y| \leq M} \sum_{i=1}^d \partial_i H(x/N) y_i \{ \tau_x h_y(\eta) - \tau_{x+y} h_y(\eta) \} \\
 &= \frac{1}{2N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{|y| \leq M} \sum_{i=1}^d \{ \partial_i H(x/N) - \partial_i H(x-y/N) \} y_i \tau_x h_y(\eta) \\
 &= \frac{1}{2N^{d+1}} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{|y| \leq M} \sum_{i,j=1}^d \{ \partial_{i,j} H(x/N) y_j \} y_i \tau_x h_y(\eta) \\
 &= \frac{1}{2N^{d+1}} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{i,j=1}^d \partial_{i,j} H(x/N) \tau_x \left\{ \sum_{|y| \leq M} y_j y_i h_y(\eta) \right\},
 \end{aligned}$$

lo que nos permitirá escribir a la martingala, (salvo orden $o(N^{-2})$) como

$$M_t^H = \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} H(x/N) \eta_t(x) - \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} H(x/N) \eta_0(x) - \frac{1}{N^2} \int_0^t \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{i,j=1}^d \partial_{i,j} H(x/N) \tau_x h_{i,j}(\eta_s) ds$$

con

$$h_{i,j}(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{|y| \leq M} y_j y_i h_y(\eta), \quad \tilde{h}_{i,j}(\alpha) = \alpha \frac{1}{2} \sum_{|y| \leq M} y_i y_j p(y) = \frac{1}{2} \alpha \sigma_{ij}.$$

Repetiendo el razonamiento hecho para deducir la ecuación hidrodinámica cuando $m \neq 0$, percibimos que para ver una variación temporal cuando p es simétrica debemos reescalar el tiempo, pero esta vez por un factor N^2 . Es decir, ahora la tasa de salto de nuestro proceso será N^2 . De esta forma obtenemos que la ecuación hidrodinámica está dada por

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq d} \sigma_{ij} \partial_{ij} \rho \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot) \end{cases} \quad (2.12)$$

Una posible interpretación de dicho reescale es que, debido a que el desplazamiento medio por partícula es cero ($m = 0$, no hay “drift”) debemos acelerar aun más el proceso para observar variaciones macroscópicas.

Siendo que el reescale temporal depende del proceso (en este caso según m , el desplazamiento medio por partícula) tenemos la siguiente definición.

Definición 2.3.1 *Conservación local del equilibrio:* Diremos que un equilibrio local $(\mu^N)_{N \geq 1}$ del perfil ρ_0 se conserva en el tiempo si existen una renormalización temporal $\theta(N)$ y $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ tales que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_{S_{t\theta(N)}^N \mu^N} [\tau_{[uN]} \psi] = E_{\nu_{\rho(t,u)}} [\psi] \quad \forall \psi \text{ local},$$

donde $S_{t\theta(N)}^N \mu^N$ es la distribución a tiempo $t\theta(N)$ del proceso que inicia con medida μ^N y tiene generador L_N .

La preservación local del equilibrio es un objetivo demasiado ambicioso que no siempre seremos capaces de alcanzar. En el próximo Capítulo presentaremos maneras mas débiles de relacionar parámetros macroscópicos con microscópicos, de forma tal que la correspondencia en la condición inicial sea preservada por la dinámica.

Capítulo 3

Formulaciones débiles del equilibrio y el resultado principal

Como acabamos de mencionar, la preservación local del equilibrio es un objetivo demasiado ambicioso. La dificultad radica en la manera de vincular perfiles ρ con medidas μ^N dada en la definición de equilibrio local (Definición 2.2.2). Para relajar esta condición, en lo que sigue daremos una nueva noción de equilibrio local, más débil que la anterior. Comenzaremos con algo de heurística: dada $G \in C(\mathbb{T}^d)$ y ψ cilíndrica,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d} G(u) E_{\nu_{\rho(u)}}[\psi] du &\cong \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) E_{\nu_{\rho(x/N)}}[\psi] \cong \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) E_{\tau_x \nu_{\rho(\cdot)}}[\psi] \\ &= \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) E_{\nu_{\rho(\cdot)}}[\tau_x \psi] = E_{\nu_{\rho(\cdot)}} \left[\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) \tau_x \psi \right] \end{aligned}$$

De alguna forma, esta cuenta nos dice que

$$E_{\nu_{\rho(\cdot)}} \left[\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) \tau_x \psi \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^d} G(u) E_{\nu_{\rho(u)}}[\psi] du \quad (3.1)$$

Mas aún, si $\psi(\eta) = \psi(\eta(x_0))$, las variables $\tau_x \psi$ resultan independientes bajo $\nu_{\rho(\cdot)}^N$ y la varianza de $\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) \tau_x \psi$ converge a cero. Combinado con (3.1) obtenemos la convergencia en probabilidad de $\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) \tau_x \psi$ a $\int_{\mathbb{T}^d} G(u) E_{\nu_{\rho(u)}}[\psi] du$ bajo $\nu_{\rho(\cdot)}^N$. Es decir, puede que necesitemos ponderar en diferentes valores de u y sumar en los sitios del toro para poner en correspondencia los dos sistemas. Esto nos lleva a dar las siguientes definiciones.

Definición 3.0.2 *Equilibrio Local Débil:* Una sucesión de probabilidades $(\mu^N)_{N \geq 1}$ en $\{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d}$ es un equilibrio local débil asociado a un perfil $\rho : \mathbb{T}^d \rightarrow [0, 1]$ si para toda $G \in C(\mathbb{T}^d)$, para toda ψ local, tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu^N \left[\left| \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) (\tau_x \psi)(\eta) - \int_{\mathbb{T}^d} G(u) \tilde{\psi}(\rho(u)) du \right| > \delta \right] = 0, \forall \delta > 0.$$

La función $\psi(\eta) = \eta(0)$ tiene un rol especial, puesto que está relacionada con la cantidad total de partículas (que es la cantidad conservada por la dinámica).

Definición 3.0.3 *Probabilidades asociadas a un perfil:* Una sucesión de probabilidades $(\mu^N)_{N \geq 1}$ en $\{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d}$ se dice asociada a un perfil $\rho : \mathbb{T}^d \rightarrow [0, 1]$ si para toda $G \in C(\mathbb{T}^d)$, tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu^N \left[\left| \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) \eta(x) - \int_{\mathbb{T}^d} G(u) \rho(u) du \right| > \delta \right] = 0, \quad \forall \delta > 0.$$

Claramente si $(\mu^N)_{N \geq 1}$ es un equilibrio local débil del perfil ρ tenemos que $(\mu^N)_{N \geq 1}$ son probabilidades asociadas al perfil ρ .

La siguiente proposición nos dice que, efectivamente, todo equilibrio local es un equilibrio local débil.

Proposición 3.0.4 *Sea $(\mu^N)_{N \geq 1}$ un equilibrio local del perfil ρ , entonces $(\mu^N)_{N \geq 1}$ es un equilibrio local débil asociado al perfil ρ .*

Demostración: Queremos ver que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu^N \left[\left| \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) \psi(\tau_x \eta) - \int_{\mathbb{T}^d} G(u) \tilde{\psi}(\rho(u)) du \right| > \delta \right] = 0.$$

Como $\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) \tilde{\psi}(\rho(x/N)) \rightarrow \int_{\mathbb{T}^d} G(u) \tilde{\psi}(\rho(u)) du$ y G es acotada, basta ver que bajo $(\mu^N)_{N \geq 1}$

$$\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) \{ \tau_x \psi - \tilde{\psi}(\rho(x/N)) \} \rightarrow 0.$$

Recordemos de la Definición 2.2 que $\tilde{\psi}(\rho(x/N)) = E_{\nu_{\rho(x/N)}}[\psi]$, por lo que esperamos poder aproximar la esperanza $\tilde{\psi}(\rho(x/N))$ sumando valores de ψ centrados en el punto x . Para ello, consideremos

$$\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) \left\{ \tau_x \psi \mp \frac{1}{(2l+1)^d} \sum_{|y| \leq l} \tau_{x+y} \psi - \tilde{\psi}(\rho(x/N)) \right\}.$$

Siendo ψ acotada, usando la continuidad uniforme de G en \mathbb{T}^d y haciendo un cambio de variables concluimos que, para todo $l \in \mathbb{N}$ (fijo),

$$\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) \left\{ \tau_x \psi - \frac{1}{(2l+1)^d} \sum_{|y| \leq l} \tau_{x+y} \psi \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Finalmente, acotando G , basta ver que, bajo $(\mu^N)_{N \geq 1}$

$$\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \left| \frac{1}{(2l+1)^d} \sum_{|y| \leq l} \psi(\tau_{y+x} \eta) - \tilde{\psi}(\rho(x/N)) \right| \rightarrow 0.$$

De la desigualdad de Markov, tenemos que

$$\mu^N \left[\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \left| \frac{1}{(2l+1)^d} \sum_{|y| \leq l} \psi(\tau_{y+x} \eta) - \tilde{\psi}(\rho(x/N)) \right| > \delta \right]$$

$$\leq \frac{1}{\delta N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} E_{\mu^N} \left[\left| \frac{1}{(2l+1)^d} \sum_{|y| \leq l} \psi(\tau_{y+x}\eta) - \tilde{\psi}(\rho(x/N)) \right| \right] \quad (3.2)$$

Queremos ver que esta última expresión converge a cero cuando N, l crecen a infinito. Esta última expresión puede ser escrita como $\frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{T}^d} h_{N,l}(u) du$, definiendo

$$h_{N,l}(u) := E_{\mu^N} \left[\left| \frac{1}{(2l+1)^d} \sum_{|y| \leq l} \tau_{[uN]+y} \psi - \tilde{\psi}(\rho([uN]/N)) \right| \right].$$

Resta probar que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^d} h_{N,l}(u) du = 0.$$

Como vamos a intercambiar límites con integrales, comencemos observando que $\|h_{N,l}\|_\infty \leq 2\|\psi\|_\infty$ para todo N, l . Haciendo $N \rightarrow \infty$, tenemos que

$$h_{N,l}(u) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E_{\nu_{\rho(u)}} \left[\left| \frac{1}{(2l+1)^d} \sum_{|y| \leq l} \tau_y \psi(\eta) - \tilde{\psi}(\rho(u)) \right| \right] = g_l(u). \quad (3.3)$$

Para verificar esta última convergencia, usando la continuidad de $\tilde{\psi}$ y ρ notemos que

$$h_{N,l}(u) = E_{\mu^N} \left[\tau_{[uN]} \left| \varphi(\eta) - \tilde{\psi}(\rho(u)) \right| \right] + o(1), \quad \text{con} \quad \varphi(\eta) = \frac{1}{(2l+1)^d} \sum_{|y| \leq l} \tau_y \psi(\eta).$$

Por hipótesis sabemos que $E_{\mu^N} \left[\tau_{[uN]} \left| \varphi(\eta) - \tilde{\psi}(\rho(u)) \right| \right] \rightarrow E_{\nu_{\rho(u)}} \left[\left| \varphi(\eta) - \tilde{\psi}(\rho(u)) \right| \right]$, lo que nos permite concluir la convergencia (3.3).

Utilizando el Teorema Ergódico espacial (ver capítulo 4 de [12]), sabemos que

$$g_l(u) = E_{\nu_{\rho(u)}} \left[\left| \frac{1}{(2l+1)^d} \sum_{|y| \leq l} \tau_y \psi(\eta) - E_{\nu_{\rho(u)}}[\psi] \right| \right] \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0.$$

Resta apelar al teorema de la convergencia dominada para garantizar que la expresión (3.2) tiende a 0, lo cual finaliza la demostración de la Proposición 3.0.4.

Vamos ahora a definir las conservaciones correspondientes a cada una de estas nuevas nociones de equilibrio.

Definición 3.0.5 *Conservación del equilibrio local débil: Diremos que un equilibrio local débil $(\mu^N)_{N \geq 1}$ del perfil ρ_0 se conserva en el tiempo si existen una renormalización temporal $\theta(N)$ y $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ de forma tal que la distribución del proceso en el instante $t\theta(N)$ resulte ser un equilibrio local débil asociado al perfil $\rho(t, \cdot)$: para toda $G \in C(\mathbb{T}^d)$, para toda ψ local, tenemos que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{t\theta(N)}^N \mu^N \left[\left| \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) (\tau_x \psi)(\eta) - \int_{\mathbb{T}^d} G(u) \tilde{\psi}(\rho(t, u)) du \right| > \delta \right] = 0, \quad \forall \delta > 0.$$

donde $S_{t\theta(N)}^N \mu^N$ es la distribución a tiempo $t\theta(N)$ del proceso que inicia con medida μ^N y tiene generador L_N .

Definición 3.0.6 *Comportamiento Hidrodinámico:* Diremos que conocemos el comportamiento hidrodinámico del proceso si para toda sucesión $(\mu^N)_{N \geq 1}$ de probabilidades asociadas al perfil ρ_0 , tenemos que existen una renormalización temporal $\theta(N)$ y $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ de forma tal que la distribución del proceso en el instante $t\theta(N)$ resulte ser una sucesión de probabilidades asociadas al perfil $\rho(t, \cdot)$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{t\theta(N)}^N \mu^N \left[\left| \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) \eta(x) - \int_{\mathbb{T}^d} G(u) \rho(t, u) du \right| > \delta \right] = 0, \forall \delta > 0 \forall G \in C(\mathbb{T}^d). \quad (3.4)$$

3.0.7. Enunciado del Teorema

Habiendo presentado las diferentes nociones de equilibrio, describimos el principal resultado que se demuestra en esta tesis:

Consideremos el proceso de exclusión simple simétrico a primeros vecinos. Para obtener una ecuación independiente de la dimensión, trabajaremos con una pseudo probabilidad de saltos, donde $p(e_i) = p(-e_i) = 1/2$ para $1 \leq i \leq d$, donde e_i representa el i -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^d . Tenemos entonces que el generador en este caso, está dado por

$$L_N[f](\eta) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{T}^d} \sum_{|z|=1} \eta(x) [1 - \eta(x+z)] [f(\eta^{x, x+z}) - f(\eta)]. \quad (3.5)$$

En estas condiciones,

Teorema 3.0.8 *Sea $\rho_0 : \mathbb{T}^d \rightarrow [0, 1]$ un perfil inicial y $(\mu^N)_{N \geq 1}$ probabilidades en $\{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d}$ asociadas al perfil ρ_0 . Entonces, para todo $t > 0$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{t\theta(N)}^N \mu^N \left[\left| \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) \eta(x) - \int_{\mathbb{T}^d} G(u) \rho(t, u) du \right| > \delta \right] = 0, \forall \delta > 0 \forall G \in C(\mathbb{T}^d),$$

con

$$\begin{cases} \partial_t \rho = (1/2) \Delta \rho \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot), \end{cases} \quad (3.6)$$

Es decir, conocemos el comportamiento hidrodinámico del proceso.

Hemos visto que conocer el comportamiento hidrodinámico consiste en garantizar que la sucesión de probabilidades $(S_{t\theta(N)}^N \mu^N)_{N \geq 1}$ está asociada a un perfil $\rho(t, \cdot)$ para cada t , donde $S_{t\theta(N)}^N \mu^N$ denota la distribución marginal a tiempo $t\theta(N)$ del proceso que inicia con probabilidad μ^N y tiene generador L_N . Recordemos además que mirar tiempos de la forma $t\theta(N)$ para el generador L_N equivale a mirar tiempos de la forma t en un nuevo proceso con generador dado por $\theta(N)L_N$. Luego la condición (3.4) puede sustituirse por

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mu^N} \left[\left| \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) \eta_t(x) - \int_{\mathbb{T}^d} G(u) \rho(t, u) du \right| > \delta \right] = 0, \forall \delta > 0 \forall G \in C(\mathbb{T}^d), \quad (3.7)$$

donde \mathbb{P}_{μ^N} es la probabilidad sobre $D([0, \infty), \{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d})$, presentada en la Definición 1.2.6, correspondiente al generador $\theta(N)L_N$ y distribución inicial μ^N .

En lo que sigue, vincularemos la noción de probabilidades asociadas a un perfil con cierta convergencia en $\mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{T}^d)$, el espacio de medidas finitas y positivas definidas en el toro. Para eso introducimos una función que nos será de utilidad:

$$\begin{aligned} \{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d} &\xrightarrow{\pi^N} \mathcal{M}_+ \\ \eta &\longmapsto \pi^N(\eta) = \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \eta(x) \delta_{x/N}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

siendo δ_w la medida de Dirac concentrada en el punto w . Las medidas $\pi^N(\eta)$ serán llamadas medidas empíricas. Por último, utilizando esta función definimos

$$\begin{aligned} D([0, \infty), \{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d}) &\longrightarrow \mathcal{M}_+ \\ (\eta_s)_{s \geq 0} &\longmapsto \pi_t^N := \pi^N(\eta_t) = \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \eta_t(x) \delta_{x/N}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Vamos ahora a reescribir (3.7) en términos de convergencia en $\mathcal{M}_+(\mathbb{T}^d)$ de las medidas empíricas. Poniendo

$$\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N) \eta_t(x) = \int_{\mathbb{T}^d} G(u) d \left\{ \frac{1}{N^d} \sum_{z \in \mathbb{T}_N^d} \eta_t(z) \delta_{z/N} \right\},$$

el lado izquierdo de (3.7) puede escribirse como:

$$\mathbb{P}_{\mu^N} [| \langle \pi_t^N, G \rangle - \langle \rho(t, u) du, G \rangle | > \delta],$$

donde

$$\langle \mu, f \rangle := \int_{\mathbb{T}^d} f(u) d\mu.$$

Consideremos la topología débil en el espacio $\mathcal{M}_+(\mathbb{T}^d)$, según la cual

$$\mu^k \xrightarrow{w} \mu \quad \text{si y sólo si} \quad \langle \mu^k, G \rangle = \int_{\mathbb{T}^d} G(u) d\mu^k \rightarrow \langle \mu, G \rangle = \int_{\mathbb{T}^d} G(u) d\mu \quad \forall G \in C(\mathbb{T}^d).$$

Esta convergencia puede ser caracterizada por el siguiente lema:

Lema 3.0.9 *Sea $(\mu^k)_{k \geq 1}$ una sucesión de medidas en \mathbb{T}^d . Sea D denso en $C(\mathbb{T}^d)$, entonces:*

$$\mu^k \xrightarrow{w} \mu \quad \text{sii} \quad \langle \mu^k, f \rangle \rightarrow \langle \mu, f \rangle \quad \forall f \in D.$$

Luego de este lema, nos es posible metrizar la topología débil (siendo $C(\mathbb{T}^d)$ separable) definiendo la siguiente distancia entre dos medidas $\lambda, \beta \in \mathcal{M}_+(\mathbb{T}^d)$

$$\zeta(\lambda, \beta) := \sum_i \frac{1}{2^i} \frac{|\langle \lambda, f_i \rangle - \langle \beta, f_i \rangle|}{1 + |\langle \lambda, f_i \rangle - \langle \beta, f_i \rangle|}, \quad (3.10)$$

donde $\{f_k : k \geq 1\}$ es una familia de funciones continuas, densa en $C(\mathbb{T}^d)$ con $f_1 = 1$.

Concluimos entonces que una condición equivalente a (3.7) es:

$$\mathbb{P}_{\mu^N} (\zeta(\pi_t^N, \rho(t, u) du) > \delta) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \delta > 0.$$

Esta última expresión, la cual generaliza la convergencia en probabilidad, la notaremos por

$$\pi_t^N \xrightarrow{\mathbb{P}_{\mu^N}} \rho(t, u) du.$$

Finalmente el Teorema 3.0.8 admite la siguiente reformulación,

Lema 3.0.10 *Sea $\rho_0 : \mathbb{T}^d \rightarrow [0, 1]$ un perfil inicial y $(\mu^N)_{N \geq 1}$ probabilidades en $\{0, 1\}^{\mathbb{T}^d}$ asociadas al perfil ρ_0 . Entonces, para todo $t > 0$*

$$\pi_t^N \xrightarrow{\mathbb{P}_{\mu^N}} \rho(t, u) du ,$$

con ρ solución de la ecuación del calor,

$$\begin{cases} \partial_t \rho = (1/2) \Delta \rho \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot), \end{cases} \quad (3.11)$$

Capítulo 4

Demostración del comportamiento hidrodinámico

Fijado un perfil inicial $\rho_0 : \mathbb{T}^d \rightarrow [0, 1]$ y una sucesión $(\mu^N)_{N \geq 1}$ de probabilidades iniciales en $\{0, 1\}^{\mathbb{T}^d_N}$ asociadas al perfil ρ_0 , denotemos por \mathbb{P}_{μ^N} a la probabilidad sobre $D([0, \infty), \{0, 1\}^{\mathbb{T}^d_N})$, presentada en la Definición 1.2.6, que hace de $(\eta_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Markov con generador $N^2 L_N$ y distribución inicial μ^N , siendo L_N el generador definido en (3.5). Para demostrar el comportamiento hidrodinámico del sistema, siguiendo el Lema 3.0.10, vamos a probar que, para todo $t \geq 0$, las medidas empíricas π_t^N definidas en (3.9) convergen en \mathcal{M}_+ bajo $(\mathbb{P}_{\mu^N})_{N \geq 1}$ a una medida π_t absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue que resuelve una versión débil de la ecuación (3.11).

Para ser más precisos, comencemos fijando $T > 0$. Sea Q_N la medida imagen de \mathbb{P}_{μ^N} inducida por la aplicación que a una trayectoria $\{\eta_t : t \geq 0\} \in D([0, \infty), \{0, 1\}^{\mathbb{T}^d_N})$ le asigna la trayectoria de medidas empíricas

$$\begin{aligned} D([0, \infty), \{0, 1\}^{\mathbb{T}^d_N}), \mathbb{P}_{\mu^N} &\longrightarrow D([0, T], \mathcal{M}_+), Q_N \\ (\eta_s)_{s \geq 0} &\longmapsto (\pi_t^N)_{t \leq T} := (\pi^N(\eta_t))_{t \leq T}, \end{aligned}$$

para π^N definido en (3.8).

El camino a seguir consistirá en:

1. Demostrar la convergencia en ley cuando $N \uparrow \infty$ de $(\pi_t^N)_{t \leq T}$ a $\{\rho(t, u)du, 0 \leq t \leq T\}$, con $\{\rho(t, u)du, 0 \leq t \leq T\}$ trayectoria continua.
2. Utilizar que el límite está concentrado en una trayectoria continua para poder preservar la convergencia mediante proyecciones en diferentes tiempos y así garantizar que para $t \leq T$ tenemos que $(\pi_t^N)_{N \geq 1}$ converge en ley en \mathcal{M}_+ a $\rho(t, u)du$.
3. Utilizar que convergencia en ley a un límite determinístico implica convergencia en probabilidad.

Notemos que $(\pi_t^N)_{t \leq T}$ son elementos aleatorios tomando valores en el espacio métrico $D([0, T], \mathcal{M}_+)$, induciendo en él probabilidades Q^N . Una exposición completa sobre convergencia en ley en espacios métricos puede encontrarse en ???. En el caso particular en que el espacio métrico es \mathbb{R} , esta noción coincide con la convergencia en distribución de variables aleatorias.

De estos tres items, el primero resulta ser el más demandante. En lo que sigue, vamos a concentrar nuestra atención en demostrar que $Q^N \rightarrow \delta_{\{\rho(t, u)du, 0 \leq t \leq T\}}$ en ley. Para eso probaremos los siguientes hechos:

1. **Relativa compacidad:** La sucesión $(Q^N)_N$ definida sobre el espacio $D([0, T], \mathcal{M}_+)$ es relativamente compacta.
2. **Unicidad de los puntos límite:** Todas las subsucesiones convergentes tienen por límite a $\delta_{\{\rho(t,u)du, 0 \leq t \leq T\}}$.

Vamos ahora a desarrollar cada uno de estos dos últimos pasos:

4.1. Relativa compacidad

El primer paso consiste en probar que la sucesión de medidas $(Q^N)_{N \geq 1}$ es relativamente compacta en $D([0, T], \mathcal{M}_+)$. Consideremos el espacio $C^2(\mathbb{T}^d)$, denso en $C(\mathbb{T}^d)$ para la topología uniforme. Por la Proposición 5.2.9, basta ver que la sucesión de probabilidades $(Q^{N,G})_{N \geq 1}$ sobre $D([0, T], \mathbb{R})$ es relativamente compacta para toda función $G \in C^2(\mathbb{T}^d)$, con $Q^{N,G}$ la probabilidad inducida por la aplicación

$$\begin{aligned} D([0, T], \mathcal{M}_+), Q_N &\longrightarrow D([0, T], \mathbb{R}), Q^{N,G} \\ (\lambda_t)_{0 \leq t \leq T} &\longmapsto \langle \lambda_t, G \rangle_{t \leq T} . \end{aligned}$$

Siendo las probabilidades $(Q_N)_{N \geq 1}$ inducidas por las trayectorias empíricas, podemos directamente considerar el siguiente esquema

$$\begin{aligned} D([0, \infty), \{0, 1\}^{\mathbb{T}_N^d}), \mathbb{P}_{\mu^N} &\rightarrow D([0, T], \mathbb{R}), Q^{N,G} \\ (\eta_t)_{t \geq 0} &\longmapsto \langle \pi_t^N, G \rangle_{0 \leq t \leq T} = \langle \pi^N(\eta_t), G \rangle_{0 \leq t \leq T} \end{aligned}$$

El proceso $\langle \pi_t^N, G \rangle_{t \geq 0}$ toma valores en \mathbb{R} , por lo tanto, aplicaremos el Teorema 5.2.7 y la Proposición 5.2.8 para $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ y $\delta = | \cdot |$.

Condición 1) Denotemos por $\|G\|_\infty$ al máximo valor que la función puede tomar: $\|G\|_\infty = \max_{u \in \mathbb{T}^d} G(u)$. Luego, tenemos que

$$| \langle \pi_t^N, G \rangle | = \left| \frac{1}{N^d} \sum_x G(x/N) \eta_t(x) \right| \leq \|G\|_\infty \cdot 1 = \|G\|_\infty ,$$

pues a lo sumo hay una partícula por sitio.

Condición 2) Utilizando la Proposición 5.2.8 tenemos que ver

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathcal{I}_T, \theta \leq \gamma} Q^{N,G} [|w_\tau - w_{\tau+\theta}| > \varepsilon] = 0$$

Notemos que

$$\begin{aligned} Q^{N,G} [|w_\tau - w_{\tau+\theta}| > \varepsilon] &= Q^N [| \langle \lambda_{\tau+\theta}, G \rangle - \langle \lambda_\tau, G \rangle | > \varepsilon] = \\ &= \mathbb{P}_{\mu^N} [| \langle \pi^N(\eta_{\tau+\theta}), G \rangle - \langle \pi^N(\eta_\tau), G \rangle | > \varepsilon] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Aplicando el generador L_N a la proyección en la coordenada x , cuando $p(\pm e_i) = \frac{1}{2}$, obtenemos que

$$L_N(\text{proj}_x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \{ \eta(x + e_j) + \eta(x - e_j) - 2\eta(x) \} .$$

Luego, haciendo dos sumas por partes, bajo \mathbb{P}_{μ^N} tenemos

$$\langle \pi_t^N, G \rangle = \langle \pi_0^N, G \rangle + (1/2) \int_0^t \langle \pi_s^N, \Delta_N G \rangle ds + M_t^{G,N}. \quad (4.2)$$

donde $\Delta_N G(x/N) = N^2 \sum_{j=1}^d \{G(x + e_j/N) + G(x - e_j/N) - 2G(x/N)\}$ y $(M_t^{G,N})_{t \geq 0}$ martingala. Luego, el último término en (4.1) está dado por

$$\mathbb{P}_{\mu^N} \left[\left| \int_0^{\tau+\theta} \langle \pi_s^N, \Delta_N G \rangle ds - \int_0^{\tau} \langle \pi_s^N, \Delta_N G \rangle ds + M_{\tau+\theta}^{G,N} - M_{\tau}^{G,N} \right| > \varepsilon \right],$$

lo que nos permite separar el problema en dos:

i) Siendo $G \in C^2(\mathbb{T}^d)$, tenemos que

$$\int_{\tau}^{\tau+\theta} \langle \pi_s^N, \Delta_N G \rangle ds = \int_{\tau}^{\tau+\theta} \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \Delta_N G(x/N) \eta_s(x) ds \leq C(G)\theta,$$

lo que controla el primer termino.

ii) Verifiquemos la condición de la Proposición 5.2.8 para la martingala $(M_t^{G,N})_{t \geq 0}$. De la desigualdad de Markov, tenemos que

$$\mathbb{P}_{\mu^N} \left[\left| M_{\tau+\theta}^{G,N} - M_{\tau}^{G,N} \right| > \varepsilon \right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_{\mu^N} \left[\left| M_{\tau+\theta}^{G,N} - M_{\tau}^{G,N} \right|^2 \right].$$

Vamos entonces a trabajar con la variación cuadrática esta última expresión. Utilizando el Lema 5.1.3, las expresiones (5.1) y (5.2), tenemos que variación cuadrática para $(M_t^{G,N})_{t \geq 0}$ está dada por

$$\int_0^t B^G(\eta_s) ds, \text{ siendo } B^G(\eta) = \frac{1}{2N^{2(d-1)}} \sum_{|x-y|=1} \eta(x)(1-\eta(y)) \{G(x/N) - G(y/N)\}^2.$$

Es decir, tenemos que

$$H_t^G = (M_t^{G,N})^2 - \int_0^t B^G(\eta_s) ds$$

es una martingala. Luego

$$\implies \mathbb{E}_{\mu^N} \left[(M_{\tau+\theta}^{G,N} - M_{\tau}^{G,N})^2 \right] = \mathbb{E}_{\mu^N} \left[\int_{\tau}^{\tau+\theta} B_s^G ds \right] \leq \frac{C(G)\theta}{N^d} \quad (4.3)$$

pues $G(y/N) - G(x/N) = \nabla G(x/N)(y-x/N) + o(N^{-1})$, $\implies (G(y) - G(x))^2 \leq \frac{\|\nabla G(x/N)\|^2}{N^2} + o(N^{-2})$ y por lo tanto

$$B^G(\eta) \leq \frac{N^2}{N^{2d}} \sum_{|y-x|=1} (G(y/N) - G(x/N))^2 \leq \frac{N^2}{N^{2d}} \sum_{|y-x|=1} \frac{\|\nabla G(x/N)\|^2}{N^2} + o(N^{-2}) \leq \frac{C(G)}{N^d},$$

lo que permite concluir (4.3).

Tras haber verificado las condiciones del Teorema 5.2.7, podemos garantizar que $(Q^{N,G})_{N \geq 1}$ es relativamente compacta para toda función $G \in C^2(\mathbb{T}^d)$ y entonces, usando la Proposición 5.2.9 tenemos que $(Q^N)_{N \geq 1}$ es relativamente compacta en $D([0, T], \mathcal{M}_+)$.

4.1.1. Unicidad de los puntos límite

Sea Q^* punto límite y $(Q^{N_k})_k$ subsucesión que converge a Q^* . Para probar que Q^* es una masa puntual en la trayectoria $\{\rho(t, u) du\}_{0 \leq t \leq T}$, utilizaremos la siguiente estrategia:

1. Demostrar que Q^* concentra su masa en trayectorias $\{\pi_t\}_{0 \leq t \leq T}$ absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue,
2. Probar que $Q^*(\pi_o = \rho_0(u) du) = 1$,
3. Probar que las densidades de las trayectorias π_t son soluciones débiles de la ecuación del calor,
4. Utilizar resultados sobre unicidad para soluciones débiles de la ecuación del calor.

Estos cuatro pasos nos permitirán concluir que $Q^* = \delta_{\{\rho(t, u) du\}_{0 \leq t \leq T}}$. Vamos ahora a trabajar en cada uno de los puntos mencionados.

1. Para probar que Q^* está concentrada en trayectorias $\{\pi_t\}_{0 \leq t \leq T}$ con π_t absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue, basta ver que bajo Q^*

$$| \langle \pi_t, G \rangle | \leq \int_{\mathbb{T}^d} |G(u)| du, \quad (4.4)$$

para todo $0 \leq t \leq T$, para toda función $G \in C(\mathbb{T}^d)$. Fijada $G \in C(\mathbb{T}^d)$ definimos

$$\begin{aligned} D([0, T], \mathcal{M}_+) &\xrightarrow{\Theta} \mathbb{R} \\ (\pi_t)_t &\longmapsto \Theta(\pi) := \sup_{0 \leq t \leq T} | \langle \pi_t, G \rangle | \end{aligned}$$

Luego,

$$Q^* \left[\sup_{0 \leq t \leq T} | \langle \pi_t, G \rangle | \leq \int |G(u)| du \right] = Q^* \left[\Theta(\pi) \leq \int |G(u)| du \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q^* \left[\Theta(\pi) \leq \int |G(u)| du + \varepsilon \right].$$

Sabemos que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} | \langle \pi_t^N, G \rangle | \leq \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} |G(x/N)|$$

pues a lo sumo hay una partícula por sitio. Fijado $\varepsilon > 0$, siendo G continua podemos elegir k_0 tal que para todo $k \geq k_0$

$$\left| \frac{1}{N_k^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_{N_k}^d} |G(x/N_k)| - \int_{\mathbb{T}^d} |G(u)| du \right| \leq \varepsilon$$

Tenemos entonces que

$$Q^{N_k} \left[\Theta(\pi) \leq \int_{\mathbb{T}^d} |G(u)| du + \varepsilon \right] = 1, \quad \forall k \geq k_0.$$

Utilizando que Θ es continua,

$$\begin{aligned} & Q^* \left[\Theta(\pi) \leq \int_{\mathbb{T}^d} |G(u)| du + \varepsilon \right] \\ & \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} Q^{N_k} \left[\Theta(\pi) \leq \int_{\mathbb{T}^d} |G(u)| du + \varepsilon \right] = 1, \quad \forall \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

lo que permite concluir (4.4).

2. Para ver que Q^* esta concentrada en trayectorias que a tiempo 0 son iguales a $\rho_0(u)du$, escribamos

$$\begin{aligned} & Q^* \left[\left| \int G(u)\pi_0(du) - \int G(u)\rho_0(u)du \right| > \varepsilon \right] \\ & \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} Q^{N_k} \left[\left| \int G(u)\pi_0(du) - \int G(u)\rho_0(u)du \right| > \varepsilon \right] \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^{N_k} \left[\left| \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} G(x/N)\eta_0(x) - \int G(u)\rho_0(u)du \right| > \varepsilon \right] = 0 \end{aligned}$$

pues μ^N esta asociada al perfil ρ_0 .

3. Veremos ahora que Q^* está concentrada en trayectorias que verifican

$$\langle \pi_t, G \rangle = \langle \pi_0, G \rangle + (1/2) \int_0^t \langle \pi_s, \Delta G \rangle ds \quad (4.5)$$

Consideremos

$$\begin{aligned} D([0, T], \mathcal{M}_+) & \xrightarrow{\beta} \mathbb{R} \\ (\pi_t)_{0 \leq t \leq T} & \longmapsto \sup_{t \leq T} \left| \langle \pi_t, G \rangle - \langle \pi_0, G \rangle - (1/2) \int_0^t \langle \pi_s, \Delta G \rangle ds \right|, \end{aligned}$$

continua si $G \in C^2$. Luego, el conjunto $\{\beta > \varepsilon\}$ es abierto y de la convergencia débil de $(Q^{N_k})_{k \geq 1}$ a Q^* , tenemos que

$$\begin{aligned} & \liminf_{k \rightarrow \infty} Q^{N_k} \left(\sup_{t \leq T} \left| \langle \pi_t, G \rangle - \langle \pi_0, G \rangle - (1/2) \int_0^t \langle \pi_s, \Delta G \rangle ds \right| > \varepsilon \right) \\ & \geq Q^* \left(\sup_{t \leq T} \left| \langle \pi_t, G \rangle - \langle \pi_0, G \rangle - (1/2) \int_0^t \langle \pi_s, \Delta G \rangle ds \right| > \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Para $G \in C^2(\mathbb{T}^d)$, podemos acotar uniformemente en η la diferencia

$$\left| \langle \pi^N(\eta), \Delta G \rangle - \langle \pi^N(\eta), \Delta_N G \rangle \right|.$$

Basta entonces demostrar que

$$\mathbb{P}_{\mu^{N_k}} \left(\sup_{t \leq T} \left| \langle \pi_t^N, G \rangle - \langle \pi_0^N, G \rangle - (1/2) \int_0^t \langle \pi_s^N, \Delta_N G \rangle ds \right| > \varepsilon \right) = 0 \quad (4.6)$$

Utilizando la martingala introducida en 4.2, para esta última probabilidad tenemos

$$= \mathbb{P}_{\mu_{N_k}} \left[\sup_{t \leq T} |M_t^{G,N}| \geq \varepsilon \right] \stackrel{\text{Doob}}{\leq} 4\varepsilon^{-2} \mathbb{E}_{\mu_{N_k}} \left[(M_T^{G,N})^2 \right] = 4\varepsilon^{-2} \mathbb{E}_{\mu_{N_k}} \left[\int_0^T B_s^G ds \right] \stackrel{\text{idem que antes}}{\leq} \frac{C(G)T}{\varepsilon^2 N^d}.$$

Hemos demostrado que Q^* esta concentrada en trayectorias que satisfacen (4.5), sin embargo, los resultados sobre unicidad de soluciones débiles para la ecuación del calor, requieren verificar una condición análoga pero con funciones G dependiendo de tiempo y espacio: necesitamos verificar que Q^* se concentra en trayectorias tales que para toda función $G : [0, T] \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^{1,2}$

$$\langle \pi_t, G_t \rangle = \langle \pi_0, G_0 \rangle + \int_0^t \langle \pi_s, \partial_s G_s - \frac{1}{2} \Delta G_s \rangle ds. \quad (4.7)$$

Para ello, consideramos la martingala dada por

$$\langle \pi_t^N, G_t \rangle - \langle \pi_0^N, G_0 \rangle - \int_0^t (\partial_s + N^2 L_N) \langle \pi_s^N, G_s \rangle ds \quad (4.8)$$

y repitiendo las cuentas para verificar la condición (4.5) conseguimos probar que Q^* se concentra en trayectorias satisfaciendo (4.7).

4. Tras haber verificado los items 1-3 , hemos demostrado que la medida Q^* se concentra en trayectorias $\pi_t = \rho(t, u)du$ con $\pi_0 = \rho_0(u)du$, que además verifican (4.7). Varios son los autores que han demostrado unicidad para la solución este problema(ver [7] y [8]). Mas aún , la ecuación (3.11) admite solución fuerte, la cual termina resultando en la única solución débil. Hemos así demostrado que $Q^* = \delta_{\{\rho(t,u)du\}_{0 \leq t \leq T}}$, siendo $\rho(t, u)$ solución de (3.11).

Es decir, $(\pi_t^N)_{t \leq T}$ converge en ley a la trayectoria $\{\rho(t, u)du, 0 \leq t \leq T\}$, única solución de la ecuación hidrodinámica.

4.1.2. La jugada final: convergencia en probabilidad para t fijo

En general no es cierto que, para $t \leq T$, la proyección $\Pi_t : D([0, T], \mathcal{M}_+) \rightarrow \mathcal{M}_+$, dada por $\Pi_t(\{\pi_s\}_{0 \leq s \leq T}) = \pi_t$, sea continua. Sin embargo, como el límite en ley de $(\pi_t^N)_{t \leq T}$ está concentrado en la trayectoria continua $\{\rho(t, u)du, 0 \leq t \leq T\}$, la convergencia en ley es preservada mediante las proyecciones Π_t . Tenemos entonces que, $\forall 0 \leq t \leq T$, $(\pi_t^N)_{N \geq 1}$ converge en ley a $\rho(t, u)du$. Por último, notemos que convergencia débil a una medida concentrada en un único punto garantiza convergencia en probabilidad:

$$(\pi_t^N)_{N \geq 1} \xrightarrow{\mathbb{P}_{\mu_N}} \rho(t, u)du \quad \forall t \geq 0,$$

siendo T arbitrario. Esto concluye la demostración de Teorema 3.0.8.

Capítulo 5

Apéndice

5.1. Martingalas y procesos de Markov

Definición 5.1.1 *Un proceso estocástico $\{M_t\}_{t \geq 0}$ definido sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) tomando valores en \mathbb{R} se dice que es una martingala respecto una familia creciente de σ -álgebras $\{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{F}$, si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. M_t es \mathcal{M}_t -medible $\forall t \geq 0$.
2. $E(|M_t|) < \infty \forall t \geq 0$.
3. $E(M_t | \mathcal{M}_s) = M_s \quad \forall s \leq t$.

Una propiedad inmediata que se deduce de la definición de martingala es que tienen esperanza constante: $E[M_t] = E[M_0]$ para todo $t > 0$. El siguiente resultado, es utilizado varias veces a lo largo de la tesis

Teorema 5.1.2 (*Desigualdad de Doob*)

Sea $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ una martingala con trayectorias continuas a derecha. Entonces ,

$$P \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| > \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda^p} E(|M_T|^p) \quad \forall p \geq 1, \lambda > 0.$$

Vamos ahora a presentar algunas martingalas especiales, en el contexto de procesos de Markov. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Markov con generador L . Consideremos $F : \mathbb{R}_+ \times E \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, tal que

- Para cada $x \in E$, $F(\cdot, x) \in C^2(\mathbb{R}_+)$.
- $\exists C$ finita, tal que

$$\sup_{(s,x)} |(\partial_s^j F)(s, x)| \leq C \quad j = 1, 2$$

y definamos

$$M_t^F := F(t, X_t) - F(0, X_0) - \int_0^t (\partial_s + L)F(s, X_s) ds, \quad (5.1)$$

$$H_t^F := (M_t^F)^2 - \int_0^t LF^2(s, X_s) - 2F(s, X_s)LF(s, X_s) ds. \quad (5.2)$$

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Lema 5.1.3 Sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ la filtración inducida por el proceso de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$: $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$. Entonces, los procesos $(M_t^F)_{t \geq 0}$ y $(H_t^F)_{t \geq 0}$ son $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -martingalas.

5.2. Compacidad sobre el espacio de medidas

5.2.1. Prohorov

Teorema 5.2.2 Sea Y un espacio métrico completo y separable. Consideremos la convergencia en ley en $\mathcal{M}_1(Y)$, el espacio de probabilidades definidas en Y . Entonces la sucesión de probabilidades $(P^N)_{N \geq 0}$ sobre Y es relativamente compacta si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon \text{ compacto en } Y / P^N(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall N$$

Los siguientes resultados son clásicos en la literatura que conciernen al espacio $D([0, T], \mathcal{E})$, siendo (\mathcal{E}, δ) un espacio métrico completo y separable (para un estudio mas completo del tema, véase [1]).

5.2.3. El espacio $D([0, T], \mathcal{E})$

Consideremos $D([0, T], \mathcal{E})$ el espacio de funciones definidas del intervalo $[0, T]$ en \mathcal{E} , continuas a derecha con límite a izquierda. Este es el espacio de trayectorias donde vive los procesos de saltos. Pequeños cambios en el instante en que se produce un salto resulta en trayectorias muy distantes para la distancia uniforme. Para evitar este inconveniente, la distancia que se utiliza es la de Skorohod. Antes de introducirla, consideremos

$$\Lambda = \{\lambda \text{ funciones continuas estrictamente crecientes de } [0, T] \text{ en } [0, T]\}.$$

Definimos

$$\|\lambda\| = \sup_{s \neq t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right|$$

y

$$d(\mu, \nu) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \max \left\{ \|\lambda\|, \sup_{0 \leq t \leq T} \delta(\mu_t, \nu_{\lambda(t)}) \right\} \quad (5.3)$$

La presencia de las funciones λ crecientes en esta distancia, corrige precisamente el problema de la topología uniforme, puesto que no compara ambas trayectorias en los mismos instantes t , sino que en tiempos levemente distantes.

Proposición 5.2.4 Si (\mathcal{E}, δ) es completo y separable, entonces $D([0, T], \mathcal{E})$ con la topología de la métrica d es completo y separable.

Esto nos permite utilizar el teorema (5.2.2) para $Y = D([0, T], \mathcal{M}_+)$. Para poder extender el teorema de Arzela-Ascoli al conjunto $D([0, T], \mathcal{E})$ y obtener una buena caracterización de los conjuntos relativamente compactos, recordemos que el modulo de continuidad uniforme de una trayectoria μ esta dado por

$$w_\mu(\gamma) = \sup_{|t-s| \leq \gamma} \delta(\mu_s, \mu_t).$$

Introduciremos el modulo módulo de continuidad uniforme modificado, mediante :

$$w'_\mu(\gamma) := \inf_{\{t_i\}_{0 \leq i < r}} \max_{0 \leq i < r} \sup_{t_i \leq s < t < t_{i+1}} \delta(\mu_s, \mu_t) ,$$

dónde el ínfimo esta tomado sobre todas las particiones $\{t_i, 0 \leq i < r\}$ del intervalo $[0, T]$ tal que:

$$\begin{cases} 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = T \\ t_i - t_{i-1} > \gamma & i = 1, \dots, r \end{cases}$$

Lema 5.2.5 $\mu : [0, T] \rightarrow \mathcal{E}$ pertenece al conjunto $D([0, T], \mathcal{E})$ si y solo si $w'_\mu(\gamma) \rightarrow 0$ cuándo $\gamma \downarrow 0$.

La siguiente proposición nos da una extensión del teorema de Arzela-Ascoli.

Proposición 5.2.6 $A \subset D([0, T], \mathcal{E})$ es relativamente compacto si y sólo si

1. $\{\mu_t, \mu \in A, 0 \leq t \leq T\}$ es relativamente compacto en \mathcal{E}
2. $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \sup_{\mu \in A} w'_\mu(\gamma) = 0$

Con este resultado obtenemos una formulación del teorema de Prohorov, la cual nos caracteriza cuando una sucesión de probabilidades en $D([0, T], \mathcal{E})$ es relativamente compacta.

Teorema 5.2.7 Sea $(P^N)_{N \geq 1}$ una sucesión de probabilidades en $D([0, T], \mathcal{E})$. La sucesión es relativamente compacta si y sólo si

1. $\forall t \in [0, T]$ y $\forall \varepsilon > 0 \exists K(t, \varepsilon) \subset \mathcal{E}$ compacto /

$$\sup_N P^N(\mu_t \notin K(t, \varepsilon)) \leq \varepsilon.$$

2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} P^N [\mu; w'_\mu(\gamma) > \varepsilon] = 0$

Observación: La segunda condición que aparece en el teorema anterior, la cual depende de toda la trayectoria $\{\mu_t, 0 \leq t \leq T\}$ y no solo del comportamiento para un tiempo fijo t , es la más difícil de verificar. Sin embargo vale que:

$$w'_\mu(\gamma) \leq w_\mu(2\gamma) .$$

Por lo tanto en vez de la condición 2. utilizaremos la siguiente condición equivalente:

- 2'. $\forall \varepsilon > 0, \lim_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} P^N [\mu; w_\mu(\gamma) > \varepsilon] = 0$

Observación: Es fácil ver que todos los puntos límite de la sucesión P^N que satisface 2'. esta concentrado en trayectorias continuas. El siguiente resultado obtenido por Aldous, nos da una condicion suficiente para garantizar la segunda condicion del Teorema 5.2.7.

Proposición 5.2.8 Una sucesión de probabilidades P^N sobre $D([0, T], \mathcal{E})$ satisface la condición 2. del Teorema 5.2.7 si:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_T, \theta \leq \gamma} P^N [\delta(\mu_\tau, \mu_{\tau+\theta}) > \varepsilon] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 , \quad (5.4)$$

siendo \mathcal{T}_T la familia de tiempos de parada acotados por T . Por convención, asumiremos que todos los tiempos involucrados están acotados por T ; es decir, $\tau + \theta$ puede pensarse como $(\tau + \theta) \wedge T$.

En el problema que nos concierne, tenemos que $\mathcal{E} = \mathcal{M}_+$ con la topología débil. Para probar que una sucesión $(Q^N)_{N \geq 1}$ de probabilidades sobre $D([0, T], \mathcal{M}_+)$ es relativamente compacta, el siguiente resultado afirma que es suficiente chequear las condiciones del Teorema 5.2.7 para cada proceso obtenido “proyectando” las empíricas π_t^N con funciones de un conjunto denso numerable en $C(\mathbb{T}^d)$. Mas precisamente:

Proposición 5.2.9 *Sea $\{g_k; k \geq 1\}$ una familia densa en $C(\mathbb{T}^d)$ con $g_1 = 1$. Una sucesión $(Q^N)_{N \geq 1}$ de probabilidades en $D([0, T], \mathcal{M}_+)$ es relativamente compacta si $\forall k \geq 0$ la familia $(Q^{N, g_k})_{N \geq 1}$ de probabilidades en $D([0, T], \mathbb{R})$ tienen esta propiedad, siendo Q^{N, g_k} la probabilidad inducida por la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} D([0, T], \mathcal{M}_+), Q_N & \longrightarrow & D([0, T], \mathbb{R}), Q^{N, g_k} \\ (\lambda_t)_{0 \leq t \leq T} & \longmapsto & \langle \lambda_t, g_k \rangle_{0 \leq t \leq T} . \end{array}$$

Bibliografía

- [1] P. Billingsley. Convergence of probability measures. John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.
- [2] C. Kipnis and C. Landim. Scaling limits of interacting particle systems, volume 320 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [3] Timo Seppalainen - Translation Invariant Exclusion Processes
<http://www.math.wisc.edu/~seppalai/excl-book/etusivu.html>
- [4] Pablo Ferrari, Antonio Galves -Construction of Stochastic Processes,Coupling and Regeneration
<http://www.ime.usp.br/~pablo/book/abstract.html>
- [5] Olla Stefano - Thermodynamics of chains of anharmonic oscillators
<http://www.ceremade.dauphine.fr/olla/ihp220908>
- [6] De Masi, A. and Ianiro, N. and Presutti, E. and Pellegrinotti, A. - A Survey of the Hydrodynamical Behavior of Many Particle Systems, Vol. II , Studies in Stat. Mechanics, JL LEBOWITZ and EW MONTRÖLL Ed, North Holland,1984.
- [7] Brezis, H. and Crandall, MG - Uniqueness of solution of the initial value problem for $u_t - \Delta\phi(u) = 0$, J.Pure Appl. Math, vol 58,pag. 153-163,1979.
- [8] Oelschläger, K. - A law of large numbers for moderately interacting diffusion processes, J. Probability Theory and Related Fields, vol.69, 2,pag.279-322,1985,Springer.
- [9] Brémaud, P. -Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues, 1999, Springer.
- [10] Liggett, T.M. -Interacting Particle Systems,1985, New York.
- [11] Liggett, T.M. - Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter, and Exclusion Processes, 1999, Springer.
- [12] Georgii, H.O.- Gibbs Measures and Phase Transitions, 1988, Walter de Gruyter.
- [13] Varadhan,SRS- Probability Theory, 2001, American Mathematical Society.
<http://www.math.nyu.edu/faculty/varadhan/limittheorems.html>