



Departamento de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Tesis de Licenciatura

# Geometría de Atlas de Relaciones

David Kigel

Director: Gabriel Minian

Marzo de 2008

## **Agradecimientos**

A mi familia y en especial a mis padres por su apoyo constante e incondicional a lo largo de toda mi vida.

A mis amigos y compañeros por su calidez, su gran sentido del humor y por tantos buenos momentos compartidos.

A Jony, Matías, Miguel y Nico por permitirme conocer sus temas de trabajo y por ofrecerme su colaboración en varias ocasiones.

A Gabriel Minian porque sus comentarios, sugerencias y correcciones fueron una importante ayuda en la escritura de esta tesis.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Complejos simpliciales</b>	<b>7</b>
1.1. Complejos, subcomplejos y morfismos . . . . .	7
1.2. Realización geométrica . . . . .	10
1.3. Join . . . . .	11
1.4. Grupo de caminos de aristas . . . . .	12
1.5. Homología simplicial . . . . .	14
<b>2. Relaciones y Cubrimientos</b>	<b>17</b>
2.1. Complejos simpliciales asociados a una relación . . . . .	17
2.2. Complejos simpliciales asociados a un cubrimiento . . . . .	23
<b>3. Acciones globales y Atlas de grupoides</b>	<b>27</b>
3.1. Acciones globales . . . . .	27
3.2. Atlas de grupoides . . . . .	31
3.3. Complejos simpliciales e invariantes asociados . . . . .	36
<b>4. Atlas de relaciones de equivalencia</b>	<b>43</b>
4.1. Caminos débiles y el grupoide fundamental . . . . .	44
4.2. El punto de vista del nervio . . . . .	46
4.3. Teorema chino para relaciones y el tipo homotópico completo . . . . .	48
4.4. Homología de dos relaciones . . . . .	54
4.5. Aplicaciones a complejos simpliciales . . . . .	57
<b>5. Atlas de subgrupos</b>	<b>61</b>
5.1. Acciones simpliciales . . . . .	61
5.2. Producto amalgamado de subgrupos y $\pi_1(A(G, \mathcal{H}))$ . . . . .	63
5.3. Subgrupos como relaciones de equivalencia . . . . .	68
<b>Bibliografía</b>	<b>71</b>



# Introducción

El concepto de *grupoide* aparece en el siglo XX como una generalización de la noción de grupo. Estos objetos permiten estudiar problemas topológicos y geométricos de una forma más natural y flexible que los grupos, como lo evidencian el estudio del grupoide fundamental de un espacio topológico y el teorema de Van Kampen [3]. Además de los grupos, varios objetos algebraicos clásicos, como las relaciones de equivalencia y en cierto sentido, las acciones de grupos sobre conjuntos, pueden pensarse como grupoides. Por ejemplo, una relación de equivalencia es lo mismo que un grupoide con a lo sumo una fecha entre cada par ordenado de objetos.

Los *atlas de grupoides* fueron introducidos por Bak, Brown, Minian y Porter en [2] con el objetivo de estudiar problemas de índole local-global y son una especie de "versión algebraica" de las variedades diferenciables (de ahí el nombre de atlas). Un atlas de grupoides consiste de una familia de grupoides cuyos objetos forman subconjuntos de un conjunto en común  $X$ , y de morfismos de grupoides que permiten relacionar los grupoides locales entre sí.

Uno de los principales objetivos de esta tesis es desarrollar herramientas que permitan analizar la interacción entre distintas relaciones de equivalencia definidas en un conjunto  $X$  desde un punto de vista topológico-geométrico. Nuestro punto de partida serán los atlas de equivalencias. A partir de un atlas  $A$  se pueden construir dos complejos simpliciales, el nervio  $N(A)$  y el vctoris  $V(A)$ , que permitirán estudiar geoméricamente estos problemas. Daremos en esta tesis una demostración alternativa de un teorema de Dowker [9] que asegura que estos dos complejos simpliciales son homotópicamente equivalentes y, por lo tanto, para estudiar las características homotópicas u homológicas de las relaciones se utilizarán cualquiera de los dos poliedros indistintamente.

Probamos en esta tesis varios resultados originales, como por ejemplo una caracterización del tipo homotópico cuando las relaciones en cuestión satisfacen una propiedad similar al teorema chino del resto. También obtenemos, utilizando la homología de los atlas, algunas desigualdades que vinculan dos relaciones con la relación generada por ambas y con la relación intersección. Haremos también el camino inverso: proponemos aquí una novedosa forma de estudiar, analizar o clasificar poliedros por medio de relaciones de equivalencias e introducimos para eso el concepto de complejo simplicial  $n$ -relacionado.

Otro de los problemas que abarcamos en este trabajo es el de estudiar un grupo  $G$  a través del análisis de una familia de subgrupos  $\mathcal{H}$  que lo generan. Este estudio tiene precedentes en el trabajo [1] de principios de los 90, donde el nervio asociado al cubrimiento de  $G$  por co-clases  $\{Hg\}_{g \in G, H \in \mathcal{H}}$  juega un papel clave. También en [2] se revisan algunos resultados de ese trabajo y se propone reformularlos en términos de los atlas de grupoides  $A(G, \mathcal{H})$ . Comenzaremos

repassando aquí los resultados relevantes que aparecen en [1] y [2]. Entre esos resultados, veremos una interesante fórmula que vincula el grupo  $G$  con el producto amalgamado de subgrupos  $*_{\cap}\mathcal{H}$  mediante el grupo fundamental  $\pi_1 A(G, \mathcal{H})$ . Finalmente aplicamos en este contexto los nuevos métodos y resultados para atlas de relaciones que aquí desarrollamos.

La tesis está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 1 damos una pequeña introducción a los complejos simpliciales que tiene como objetivo cubrir los conceptos que utilizaremos en el resto de la tesis. En particular, tratamos las versiones combinatorias de algunos invariantes como el grupo fundamental y la homología singular. Las referencias principales para este capítulo son [10] y [8].

El capítulo 2 trata sobre los complejos simpliciales asociados a cubrimientos y más en general a relaciones binarias. Ofrecemos una demostración del teorema de Dowker siguiendo a [9] lo cual nos lleva a estudiar la contigüidad de morfismos simpliciales y las subdivisiones baricéntricas. También enunciamos el teorema de McCord publicado en [7] junto con una reformulación del mismo en el contexto de complejos simpliciales. Esta reformulación, que será de utilidad más adelante, nos permite además verlo como una generalización del resultado de Dowker.

El capítulo 3 introduce las acciones globales y los atlas de grupoides. Estudiamos aquí ambas estructuras así como también los correspondientes morfismos en sus variantes débiles y fuertes. Mostramos los ejemplos más importantes y analizamos cómo y porqué la primera estructura dio lugar a la segunda. Después presentamos los complejos simpliciales  $V(A)$  y  $N(A)$  junto con sus invariantes asociados: el grupo(ide) fundamental y la homología. Este capítulo se basa en el trabajo [2].

El capítulo 4 está dedicado a los atlas de relaciones de equivalencia  $A(X, \mathcal{E})$ . Los resultados que aquí aparecen son originales. Estudiamos los caminos, su conexión con la relación generada y la forma en que dan lugar a nuevos atlas de relaciones. Luego investigamos la geometría del nervio  $N(A)$  y damos una caracterización de su tipo homotópico para familias de relaciones  $\mathcal{E}$  que cumplen con el "teorema chino". Utilizando la homología de los atlas obtenemos desigualdades que vinculan dos relaciones con su relación generada y su relación intersección. La sección final propone aplicar los atlas de relaciones para estudiar a los complejos simpliciales. Se incluyen aquí caracterizaciones geométricas de los complejos  $V(A)$  y  $N(A)$  correspondientes a una cantidad  $n$  de relaciones. Introducimos la noción de complejo  $n$ -relacionado y discutimos sus aplicaciones.

El capítulo 5 trata sobre los atlas de grupoides  $A(G, \mathcal{H})$ . Comienza con el estudio de las acciones simpliciales de  $G$  sobre los complejos  $V$  y  $N$  y sus consecuencias geométricas. Luego obtenemos la fórmula de [1] que vincula a  $G$  con el producto amalgamado  $*_{\cap}\mathcal{H}$  utilizando el grupo fundamental  $\pi_1 A(G, \mathcal{H})$ . Finalmente, mostramos como aplicar los resultados obtenidos para atlas de relaciones en este contexto.

# Capítulo 1

## Complejos simpliciales

Este capítulo es una breve introducción a los complejos simpliciales. Nuestra exposición se concentra en aquellos aspectos del tema que más adelante utilizaremos en la tesis. El lector interesado en hacer un estudio más profundo puede consultar [10].

Un complejo simplicial es un objeto combinatorio que describe la construcción de un poliedro. Concretamente, esta descripción consiste en dar un conjunto de vértices e indicar cuales subconjuntos de estos vértices generan símlices.

En esta tesis los complejos simpliciales jugaran un rol muy importante pues nos permitirán entender en forma geométrica otros objetos combinatorios como relaciones, cubrimientos y atlas de grupoides.

Exponemos aquí como se reformulan algunos de los invariantes clásicos como el grupo fundamental y la homología para ser aplicados a complejos simpliciales. Los invariantes simpliciales que así se obtienen coinciden con los correspondientes al poliedro asociado. Por lo tanto, nos brindan una alternativa puramente combinatoria para su cálculo.

Esta introducción también abarca algunas operaciones con complejos simpliciales que utilizaremos al trabajar con cubrimientos y relaciones de equivalencia : la unión e intersección (internas) y el join (externa).

### 1.1. Complejos, subcomplejos y morfismos

**Definición 1.1.1.** Un *complejo simplicial*  $K$  consiste de un conjunto  $V_K$  (los vértices) y una familia  $S_K$  (los símlices) formada por subconjuntos finitos no vacíos de  $V_K$ .

La familia de símlices  $S_K$  debe cumplir además:

1.  $\{v\} \in S_K$  para todo  $v \in V_K$
2. Si  $s \in S_K$  y  $t \subseteq s$  es un subconjunto no vacío entonces  $t \in S_K$

La *dimensión de un simplex*  $s \in S_K$  es la cantidad de vértices que lo forman menos uno, es decir,  $\dim s = \#s - 1$ . Es común llamar *n - símlices* a los símlices de dimensión  $n$ .

A su vez, la *dimensión del complejo simplicial* es  $\dim K = \sup \{\dim s : s \in S_K\}$ .

Llamaremos *símplices generalizados* de  $K$  a los conjuntos  $s \subseteq V_K$  tal que para todo subconjunto finito  $t \subseteq s$  se tiene que  $t \in S_K$ . Cuando  $\#s < \infty$  esto es equivalente a  $s \in S_K$ .

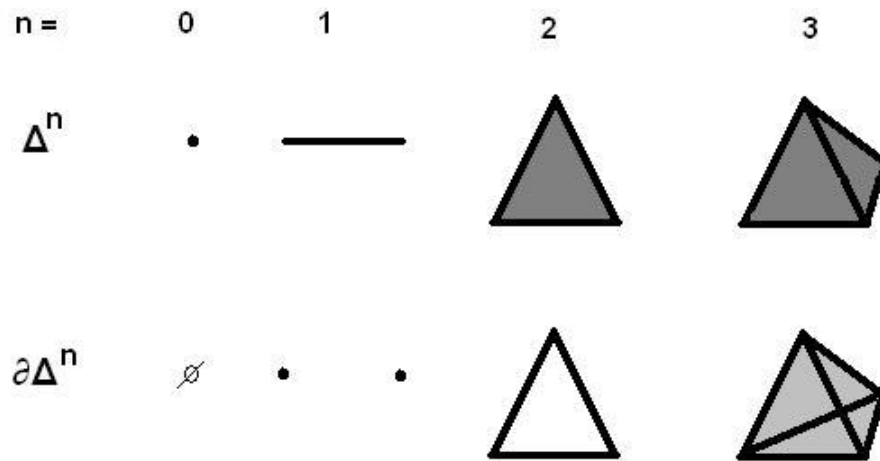
**Observación 1.1.2.** El conjunto de vértices  $V_K$  se corresponde con el de los 0-*símplices*. Por lo tanto, un complejo simplicial queda determinado por su conjunto de símplices  $S_K$ .

Damos a continuación algunos ejemplos de complejos simpliciales acompañados de los poliedros que describen o como los llamaremos más adelante, de sus realizaciones geométricas:

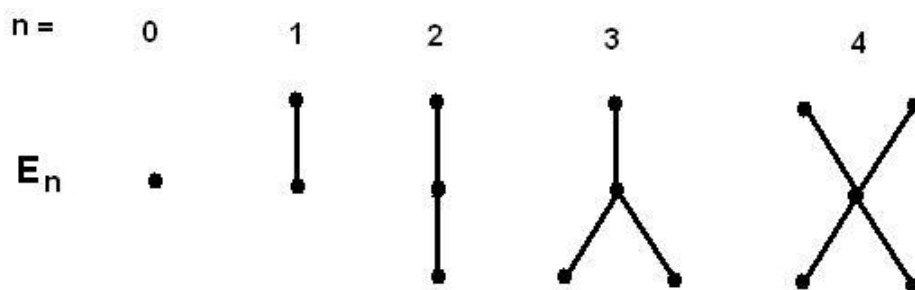
**Ejemplo 1.1.3.** Se definen para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  dos complejos simpliciales: el  $n$ -*simplex* notado  $\Delta^n$  y el *borde del  $n$ -simplex* notado  $\partial\Delta^n$ . Los mismos quedan determinados por sus conjuntos de símplices:

$$S_{\Delta^n} = \mathcal{P} \{0, 1, \dots, n\} - \{\emptyset\}$$

$$S_{\partial\Delta^n} = S_{\Delta^n} - \{0, 1, \dots, n\}$$



**Ejemplo 1.1.4.** Dado  $n \in \mathbb{N}_0$  llamamos *estrella de  $n$  segmentos* y notaremos con  $E_n$  al complejo simplicial con vértices  $V_{E_n} = \{0, 1, \dots, n\}$  y símplices  $S_{E_n} = \{\{0\}, \{i\}, \{0, i\} : i = 1, \dots, n\}$ .





**Ejemplo 1.1.5.** El complejo simplicial *recta* que notaremos  $L$  tiene como vértices al conjunto de números enteros  $V_L = \mathbb{Z}$  y como simplices  $S_L = \{\{n\}, \{n, n+1\} : n \in \mathbb{Z}\}$ .



**Definición 1.1.6.** Un complejo simplicial  $L$  se dice *subcomplejo* de otro  $K$  cuando se tiene  $V_L \subseteq V_K$  y  $S_L \subseteq S_K$ . En ese caso notamos  $L \leq K$ .

Decimos que  $L$  es un *subcomplejo pleno* si además se cumple:

$$s \in S_K, s \subseteq V_L \Rightarrow s \in S_L$$

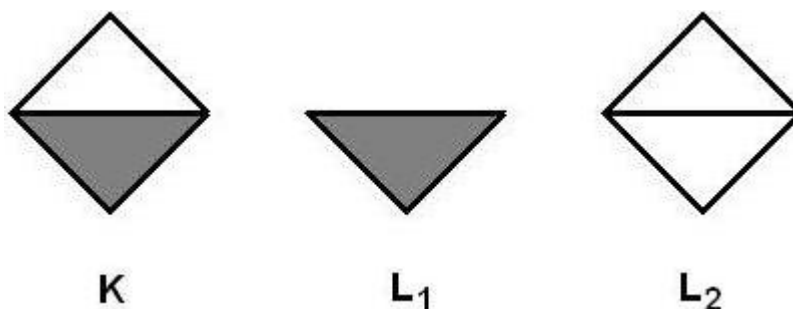
**Ejemplo 1.1.7.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $s$  un simplex (generalizado) de  $K$ . Llamamos  $\bar{s}$  al subcomplejo de simplices  $S_{\bar{s}} = \{t \in S_K : t \subseteq s\}$ .

$\bar{s}$  es pleno y salvo el nombre de los vértices, cuando  $s \in S_K$ , es  $\bar{s} = \Delta^n$  donde  $n = \dim s$ .

Por una cuestión de simplicidad, muchas veces abusaremos de la notación indicando al complejo simplicial  $\bar{s}$  como  $s$ , confundiendo así al simplex con el subcomplejo que determina.

**Ejemplo 1.1.8.** El siguiente gráfico muestra dos subcomplejos  $L_1$  y  $L_2$  de un complejo  $K$ .

$L_1$  es pleno.  $L_2$  no lo es debido a que le falta el 2-simplex.



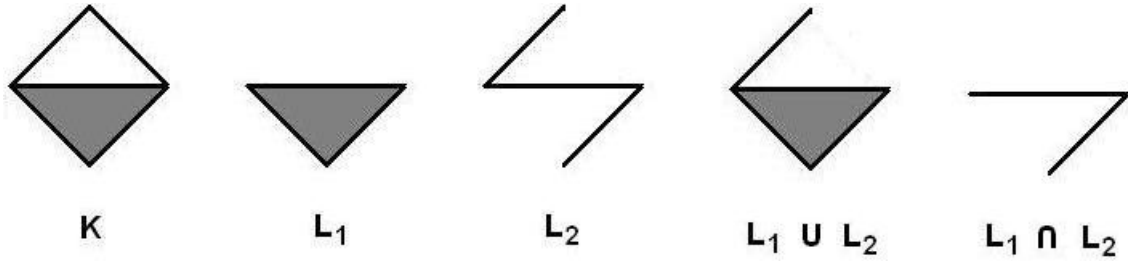
Veamos dos operaciones que se pueden realizar con subcomplejos:

**Definición 1.1.9.** Sean  $L_1, L_2 \leq K$  subcomplejos. Los *subcomplejos unión e intersección*, que notaremos respectivamente  $L_1 \cup L_2$  y  $L_1 \cap L_2$ , son los que se obtienen al realizar la correspondiente operación conjuntista con los simplices:

$$S_{L_1 \cup L_2} = S_{L_1} \cup S_{L_2} \text{ y } S_{L_1 \cap L_2} = S_{L_1} \cap S_{L_2}$$

**Observación 1.1.10.** Ambas operaciones se generalizan a familias de subcomplejos en la forma evidente. Notar que la intersección puede dar como resultado el subcomplejo vacío  $\emptyset$ .

**Ejemplo 1.1.11.** Veamos como resultan la unión e intersección en un caso concreto:



Al trabajar con complejos simpliciales se consideran los siguientes morfismos:

**Definición 1.1.12.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales. Un morfismo  $\phi : K \rightarrow L$  consiste en una función conjuntista  $\phi : V_K \rightarrow V_L$  que envía símplices en símplices, es decir, para todo  $s \in S_K$  se tiene  $\phi(s) \in S_L$ .

Los complejos simpliciales provistos de estos morfismos constituyen una categoría que notamos **CS**.

**Observación 1.1.13.** Un morfismo  $\phi : K \rightarrow L$  es isomorfismo sii define una biyección en los vértices y en los símplices.

## 1.2. Realización geométrica

La realización geométrica de un complejo simplicial es el poliedro (espacio topológico) que este describe en términos de vértices y símplices.

**Definición 1.2.1.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Su *realización geométrica*  $|K|$  es el espacio cuyo conjunto subyacente son las combinaciones convexas de vértices que forman símplices.

Más formalmente, podemos considerar al conjunto  $|K|$  formado por las funciones  $\alpha : V_K \rightarrow [0, 1]$  tales que:

1.  $\sum_{v \in V_K} \alpha(v) = 1$
2.  $\{v \in V_K : \alpha(v) \neq 0\} \in S_K$

Identificando cada vértice  $v \in V_K$  con la correspondiente función característica de  $\{v\}$ , obtenemos la escritura como combinación convexa  $\alpha = \sum_{v \in V_K} \alpha(v) v$  para cada  $\alpha \in |K|$ .

Nos resta dar una topología para  $|K|$ :

Dado un simplex  $s \in S_K$  indicamos con  $|s|$  al subconjunto de  $|K|$  formado por las  $\alpha$ s cuyo soporte  $\{v \in V_K : \alpha(v) \neq 0\} \subseteq s$ . Damos a  $|s|$  la topología inducida por la métrica:

$$d(\alpha, \beta) = \sum_{v \in V_K} (\alpha(v) - \beta(v))^2$$

Finalmente, declaramos un subconjunto  $G \subseteq |K|$  abierto cuando se verifica que  $G \cap |s|$  es abierto en  $|s|$  para todo  $s \in S_K$ .

**Observación 1.2.2.** Notemos que la topología elegida para  $|K|$  es la final respecto de las inclusiones  $|s| \hookrightarrow |K|$  con  $s \in S_K$ . Se elige así con el objetivo de que la continuidad de una función  $f : |K| \rightarrow X$  sea equivalente a la de sus restricciones  $f|_{|s|}$ .

**Ejemplo 1.2.3.** Algunas realizaciones geométricas:

- $|\Delta^n| = D^n$
- $|\partial\Delta^n| = S^{n-1}$
- $|L| = \mathbb{R}$ .

Veamos ahora como se define la realización geométrica de los morfismos:

**Definición 1.2.4.** Dado un morfismo simplicial  $\phi : K \rightarrow L$ , su realización  $|\phi| : |K| \rightarrow |L|$  es la función continua que se obtiene al extender  $\phi$  por linealidad. Más explícitamente :

$$|\phi|(\sum_{v \in V_K} \alpha_v v) = \sum_{v \in V_K} \alpha_v \phi(v)$$

Queda de esta forma construido el funtor realización geométrica  $|\cdot| : \mathbf{CS} \rightarrow \mathbf{Top}$ , donde  $\mathbf{Top}$  denota la categoría de espacios topológicos.

**Definición 1.2.5.** Un espacio topológico  $X$  es un *poliedro* cuando existe un complejo simplicial  $K$  y un homeomorfismo  $f : |K| \rightarrow X$ . En ese caso, un tal par  $(K, f)$  es una *triangulación* de  $X$ .

### 1.3. Join

El join es una operación "externa" entre complejos simpliciales. Es fácil de describir combinatoriamente y por otro lado, tiene un significado geométrico importante.

**Definición 1.3.1.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales.

El *join de  $K$  con  $L$* , que notamos  $K * L$ , esta dado por el siguiente conjunto de símplices:

$$S_{K*L} = \{s \cup t : s \in S_K \cup \{\emptyset\}, t \in S_L \cup \{\emptyset\}, s \neq \emptyset \text{ ó } t \neq \emptyset\}$$

**Observación 1.3.2.** Es fácil ver que la realización geométrica del join  $|K*L|$  es el join topológico  $|K| * |L|$ , que consiste de los segmentos que unen un punto de  $|K|$  con un punto de  $|L|$ .

**Ejemplo 1.3.3.** Dado un complejo simplicial  $K$ , el *cono de base  $K$*  es el complejo  $a * K$  donde  $a = \Delta^0$ .

**Ejemplo 1.3.4.** Para todos  $n, m \in \mathbb{N}_0$  se tiene  $\Delta^n * \Delta^m \approx \Delta^{n+m+1}$ . En particular, el cono de base  $\Delta^n$  es  $\Delta^{n+1}$ .

**Observación 1.3.5.** Notar que la operación join es asociativa, esto nos permite trabajar con joins multiples  $K_1 * \dots * K_n$ . Concretamente, los símplices de  $K_1 * \dots * K_n$  son:

$$\{s_1 \cup \dots \cup s_n : s_i \in S_{K_i} \cup \{\emptyset\}, \exists i s_i \neq \emptyset\}$$

## 1.4. Grupo de caminos de aristas

Los caminos de aristas son una versión combinatoria de los caminos usuales en un espacio topológico. Como ya es habitual, en las siguientes definiciones,  $K$  es un complejo simplicial:

**Definición 1.4.1.** (Aristas y Caminos de aristas)

Una *arista* es un par ordenado  $e = (v, w)$  con  $v, w \in V_K$  tal que  $\{v, w\} \in S_K$ . Los vértices  $v$  y  $w$  se llaman *origen* y *fin* de la arista respectivamente. Se notan  $orig(e)$  y  $fin(e)$ .

Dada una arista  $e = (v, w)$  llamamos *arista inversa* a  $e^{-1} = (w, v)$ .

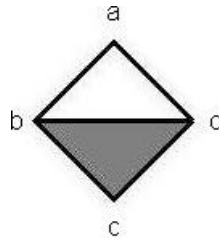
Un *camino de aristas* es una sucesión finita  $\alpha = e_1, \dots, e_n$  tal que  $orig(e_{i+1}) = fin(e_i)$  para todo  $i$ . Notamos  $orig(\alpha) = orig(e_1)$  y  $fin(\alpha) = fin(e_n)$ .

Cuando  $orig(\alpha) = fin(\alpha) = v$  decimos que  $\alpha$  es un *loop con base en el vértice*  $v$ .

**Nota 1.4.2.** Indicaremos a veces un camino de aristas por los vértices que recorre.

Si el camino es  $\alpha = e_1, \dots, e_n$  y sus aristas son  $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$  escribiremos  $\alpha = (v_0, \dots, v_n)$ .

**Ejemplo 1.4.3.** Consideremos el siguiente complejo simplicial:



Son ejemplos de aristas  $(a, b)$ ,  $(b, a)$ ,  $(b, c)$  y  $(c, c)$ . En cambio  $(a, c)$  no es una arista.

Un ejemplo de camino de aristas es  $\alpha = (a, b)(b, c)(c, d)(d, b)(b, d)(d, d)(d, a)$ .

A partir de los caminos de aristas definimos las componentes:

**Definición 1.4.4.** Dos vértices  $v, w \in V_K$  se encuentran en una misma componente si existe un camino de aristas  $\alpha$  tal que  $orig(\alpha) = v$  y  $fin(\alpha) = w$ . Escribimos en ese caso  $v \sim w$ .

Es fácil ver que  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $V_K$ . Las *componentes arco-conexas* de  $K$  son los subcomplejos plenos  $C \leq K$  con  $V_C \in V_K / \sim$ .

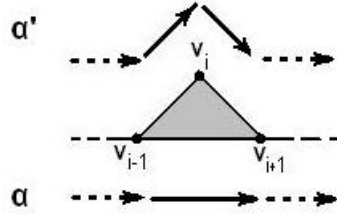
Veamos ahora una noción simplicial de la homotopía de caminos con extremos fijos:

**Definición 1.4.5.** Sean  $\alpha$  y  $\alpha'$  dos caminos de aristas en  $K$ .

Decimos que  $\alpha'$  *se reduce* a  $\alpha$  y escribimos  $\alpha' \geq \alpha$  si son de la forma  $\alpha = (v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$  y  $\alpha' = (v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$  para algún  $0 < i < n$  y además  $\{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\} \in S_K$ .

Decimos que  $\alpha$  y  $\alpha'$  *son equivalentes* si existe una sucesión finita de caminos  $\alpha = \alpha_0, \dots, \alpha_n = \alpha'$  tal que para todo  $1 \leq i \leq n$  es  $\alpha_i \leq \alpha_{i-1}$  o  $\alpha_{i-1} \leq \alpha_i$ . Escribimos  $\alpha \approx \alpha'$ .

**Observación 1.4.6.** Veamos el significado geométrico de que un camino  $\alpha'$  se reduzca a otro  $\alpha$  cuando  $\{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\} \in S_K$  es un  $2$ -simplex:



Notemos que la reducción también puede tener lugar cuando  $\{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\} \in S_K$  es un  $1$ -simplex o inclusive  $0$ -simplex. Dejamos al lector visualizar las correspondientes situaciones.

**Observación 1.4.7.**  $\approx$  es una relación de equivalencia en el conjunto de caminos de aristas que tienen un origen y fin dados.

**Ejemplo 1.4.8.** Trabajamos nuevamente con el complejo simplicial del ejemplo anterior 1.4.3. Sean los caminos  $\alpha = (a, b, c)$ ;  $\beta = (a, b, d, c)$  y  $\gamma = (a, d, c)$ . Es fácil ver que  $\alpha$  es equivalente con  $\beta$  pero no lo es con  $\gamma$ .

**Ejemplo 1.4.9.** Consideremos los loops de  $\partial\Delta^2$  con base en el vértice 0.

Definimos la "cantidad de vueltas" que da un tal loop  $\alpha = e_1, \dots, e_n$  por:

$$v(\alpha) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^3 \#\{i : e_i = f_i\} - \#\{i : e_i = f_i^{-1}\}$$

Donde las aristas  $f_i$  están dadas por  $f_1 = (0, 1)$ ,  $f_2 = (1, 2)$  y  $f_3 = (2, 0)$ . Puede probarse que dos de estos caminos  $\alpha$  y  $\alpha'$  son equivalentes si y solo si  $v(\alpha) = v(\alpha')$ .

**Definición 1.4.10.** Dados dos caminos de aristas  $\alpha = e_1, \dots, e_n$  y  $\beta = f_1, \dots, f_m$  que cumplen  $orig(\beta) = fin(\alpha)$  definimos su concatenación  $\alpha * \beta = e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m$ .

**Definición 1.4.11.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $v \in V_K$ .

Consideremos los loops de  $K$  con base en el vértice  $v$ . El conjunto de sus clases módulo equivalencia provistas de la operación inducida por la concatenación resultan un grupo.

En efecto, la operación es asociativa y tiene como elemento neutro a la clase de la arista  $(v, v)$ . Además la clase de un camino  $\alpha = (v_0, \dots, v_n)$  tiene como inverso a la clase del camino  $\alpha^{-1} = (v_n, \dots, v_0)$ .

Este grupo se conoce como el *grupo de aristas de  $K$  con base en  $v$*  y se nota  $\pi_1(K, v)$ .

**Ejemplo 1.4.12.** En la situación del ejemplo 1.4.9 se tiene un isomorfismo  $\pi_1(\partial\Delta^2) \rightarrow \mathbb{Z}$  que consiste en asignar a la clase de un loop  $[\alpha]$  el número de vueltas  $v(\alpha)$ .

Notemos que el grupo de aristas de  $\partial\Delta^2$  coincide con el grupo fundamental de su realización geométrica  $S^1$ . Se prueba en [10] que eso sucede en general:

**Teorema 1.4.13.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $v \in V_K$ . Entonces el grupo de aristas  $\pi_1(K, v)$  coincide con el grupo fundamental de la realización geométrica  $\pi_1(|K|, v)$ .

## 1.5. Homología simplicial

La homología simplicial es el equivalente combinatorio a la conocida homología singular de espacios topológicos. En forma similar a lo que ocurre con el grupo de caminos de aristas y el grupo fundamental, esta homología coincide con la proveniente de la realización geométrica.

En lo que sigue  $K$  es un complejo simplicial.

**Definición 1.5.1.** Un  $n$ -simplex ordenado de  $K$  es una sucesión finita  $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$  con  $\{v_0, \dots, v_n\} \in S_K$   $n$ -simplex.

Dos  $n$ -símplices ordenados  $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$  y  $\sigma' = (w_0, \dots, w_n)$  tienen la misma orientación si existe una permutación par  $f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$  tal que  $w_i = v_{f(i)}$  para todo  $i$ . Escribimos en ese caso  $\sigma \sim \sigma'$ .

$\sim$  es una relación de equivalencia en los  $n$ -símplices ordenados. Las clases de equivalencia se llaman  $n$ -símplices orientados de  $K$ .

**Observación 1.5.2.** Cada  $n$ -simplex  $s = \{v_0, \dots, v_n\} \in S_K$  con  $n \geq 1$  determina  $(n + 1)!$  símplices ordenados pero solo dos símplices orientados:  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  y  $[v_1, v_0, \dots, v_n]$ . Decimos de estos últimos que son de orientación opuesta.

**Definición 1.5.3.** El complejo de cadenas de símplices, que notaremos  $C_*(K)$ , se define de la siguiente forma:

- Para cada  $n \geq 0$  tomamos  $C_n(K)$  como el grupo abeliano libre generado por los  $n$ -símplices orientados, identificando  $\sigma' = -\sigma$  cuando  $\sigma$  y  $\sigma'$  son de orientación opuesta.
- El morfismo de borde  $d_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$  se define sobre la base por la formula:

$$d_n([v_0, \dots, v_n]) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]$$

Donde  $[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]$  indica el  $(n - 1)$ -simplex orientado que se obtiene al suprimir el  $i$ -ésimo vértice.

Luego extendemos por linealidad a todo  $C_n(K)$ .

**Proposición 1.5.4.**  $C_*(K)$  es efectivamente un complejo de cadenas

*Demostración.* Basta con probar  $d_{n-1}d_n(\sigma) = 0$  para todo  $n$ -simplex orientado  $\sigma$ .

Supongamos  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$  entonces:

$$\begin{aligned} d_{n-1}d_n(\sigma) &= d_{n-1}(\sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]) = \\ &= \sum_{i>j} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n] + \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n] = 0 \end{aligned}$$

□

**Definición 1.5.5.** La homología  $H_*(K)$  es la homología del complejo  $C_*(K)$ .

**Observación 1.5.6.**  $H_0(K)$  es un grupo abeliano libre y su rango coincide con la cantidad de componentes de  $K$ .

En efecto, por definición  $H_0(K) = C_0(K)/\text{Im } d_1$ . Ahora bien, notemos que  $C_1$  y  $C_0$  son los grupos libres generados por las aristas y los vértices respectivamente. Por otro lado, la imagen de una arista  $[v_0, v_1]$  por  $d_1$  es  $[v_1] - [v_0]$ . Por lo tanto,  $H_0$  resulta de indentificar entre sí los vértices que se hallan en cada una de las componentes y así resulta que estas forman una base.

**Observación 1.5.7.** Si  $\dim K = n$  entonces para  $k > n$  no hay  $k$ -símplices, por esa razón,  $C_k(K) = 0$  y resulta  $H_k(K) = 0$ .

**Ejemplo 1.5.8.** La homología de  $\Delta^2$ :

Según las observaciones anteriores tenemos  $H_0 = \mathbb{Z}$  y  $H_n = 0$  para  $n \geq 3$ . Solo nos falta obtener  $H_1$  y  $H_2$  estudiando la primer parte del complejo:

$$0 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0$$

Llamemos  $\sigma = [0, 1, 2]$ ,  $a = [0, 1]$ ,  $b = [1, 2]$  y  $c = [2, 0]$ . Entonces  $\{\sigma\}$ ,  $\{a, b, c\}$  y  $\{0, 1, 2\}$  son bases de  $C_2$ ,  $C_1$  y  $C_0$  respectivamente.

$d_2(\sigma) = a + b + c \neq 0$  por lo tanto  $\text{Ker } d_2 = 0$  y resulta  $H_2 = 0$ . Por otro lado:

$$d_1(xa + yb + zc) = x(1 - 0) + y(2 - 1) + z(0 - 2) = (z - x)0 + (x - y)1 + (y - z)2$$

Luego  $\text{Ker } d_1 = \langle a + b + c \rangle$ . Esto es  $\text{Ker } d_1 = \text{Im } d_2$  y así  $H_1 = \text{Ker } d_1 / \text{Im } d_2 = 0$ .

**Ejemplo 1.5.9.** La homología de  $\partial\Delta^2$ :

Seguimos con  $H_0 = \mathbb{Z}$  y  $H_n = 0$  si  $n \geq 2$ . Por otro lado, como  $d_1$  es la del ejemplo anterior  $H_1 = \text{Ker } d_1 = \langle a + b + c \rangle \approx \mathbb{Z}$ .

Notemos que las homologías simpliciales obtenidas en ambos ejemplos coinciden con las homologías singulares de los correspondientes poliedros. Como lo indica el siguiente teorema, cuya demostración puede consultarse en [10], esto es siempre así:

**Teorema 1.5.10.** *Sea  $K$  un complejo simplicial. Entonces la homología simplicial de  $K$  coincide con la homología singular de su realización geométrica  $|K|$ .*

Recordamos por último algunos aspectos sobre la característica de Euler:

Comenzamos por la definición algebraica. En lo que sigue, dado un grupo abeliano  $A$  notamos su rango libre  $rg(A)$ .

**Definición 1.5.11.** Un grupo abeliano graduado  $M_* = \{M_n\}$  es finitamente generado si  $M_n$  es finitamente generado para todo  $n$  y además  $M_n = 0$  para todos salvo finitos  $n$ .

**Definición 1.5.12.** La característica de Euler de un grupo abeliano graduado finitamente generado  $M_*$  es el número entero:

$$\chi(M) = \sum (-1)^n rg(M_n)$$

La demostración del siguiente hecho básico puede encontrarse, por ejemplo, en [10]:

**Proposición 1.5.13.** *Si un complejo de cadenas  $(C_*, d)$  es finitamente generado entonces también lo es su homología  $H_*(C_*)$  y además se tiene  $\chi(C_*) = \chi(H_*(C))$ .*

A partir de lo anterior definimos la característica de Euler geométrica:

**Definición 1.5.14.** Sea  $K$  un complejo simplicial con finitos vértices (luego  $C_*(K)$  es finitamente generado). La característica de Euler de  $K$  es  $\chi(K) = \chi(C_*(K)) = \chi(H_*(K))$ .

**Observación 1.5.15.** Pensando  $\chi(K) = \chi(C_*(K))$ , dado que para cada  $n \geq 0$  el número  $rg C_n(K)$  es la cantidad de  $n$ -símplices, obtenemos la conocida fórmula:

$$\chi(K) = \#\{0\text{-símplices}\} - \#\{1\text{-símplices}\} + \#\{2\text{-símplices}\} - \dots$$

**Observación 1.5.16.** Supongamos que  $K_1$  y  $K_2$  son dos complejos simpliciales con  $X = |K_i|$   $i = 1, 2$ . Entonces, utilizando el teorema 1.5.10 resulta  $\chi(K) = \chi(H_*(X)) = \chi(K')$ .

Este hecho permite definir la *característica de Euler del poliedro  $X$*  como  $\chi(X) = \chi(K)$  con  $K$  algún complejo simplicial que lo triangula.



## Capítulo 2

# Relaciones y Cubrimientos

### 2.1. Complejos simpliciales asociados a una relación

Consideremos una relación  $R$  de un conjunto  $X$  en otro  $Y$ , es decir, un subconjunto  $R \subseteq X \times Y$ . Si  $(x, y) \in R$  lo indicaremos con  $x R y$ .

Vamos a asociarle a  $R$  dos complejos simpliciales  $K_R$  y  $L_R$ :

$K_R$  tendrá como símlices los subconjuntos  $\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq X$  tales que existe  $y \in Y$  con  $x_i R y$  para todo  $i$ . Dualmente,  $L_R$  tendrá como símlices los subconjuntos  $\{y_0, \dots, y_n\} \subseteq Y$  tales que existe  $x \in X$  con  $x R y_i$  para todo  $i$ .

Veamos como son estos complejos en algunos ejemplos:

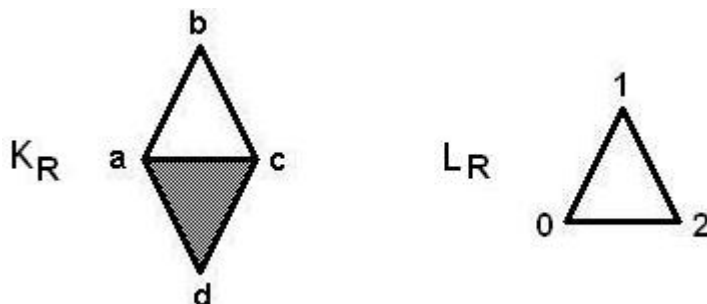
**Ejemplo 2.1.1.** Sean  $X = \{0, \dots, n\}$ ,  $Y = \{0, \dots, m\}$  para ciertos  $n, m \in \mathbb{N}_0$  y consideremos la relación completa  $R = X \times Y$ .

Resulta entonces  $K_R = \Delta^n$  y  $L_R = \Delta^m$ .

**Ejemplo 2.1.2.** Sean  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $Y = \{0, 1, 2\}$  y tomemos la siguiente relación:

$$R = \left\{ \begin{array}{ccc} (0, a) & (0, b) & \\ & (1, b) & (1, c) \\ (2, a) & & (2, c) & (2, d) \end{array} \right\}$$

En este caso obtenemos:



En los ejemplos se observa que  $K_R$  y  $L_R$  pueden ser complejos simpliciales geoméricamente muy diferentes. Sin embargo, si se los compara desde un punto de vista homotópico, ya no hay diferencias: en el ejemplo 1 ambos complejos son contráctiles y en el ejemplo 2 ambos son homotopicamente equivalentes a  $S^1$ .

C.H.Dowker demostró en el trabajo [4] publicado en 1952 que se trata de un hecho general:

$|K_R|$  y  $|L_R|$  resultan homotópicamente equivalentes cualquiera sea la relación  $R$

Vamos a dar una demostración de este resultado siguiendo a [8]. Para eso, hacemos uso de una noción de homotopía entre morfismos simpliciales llamada *contigüidad*:

Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales y  $f, g : K \rightarrow L$  dos morfismos.

**Definición 2.1.3.**  $f$  es *elementalmente contiguo* a  $g$  si para todo simplex  $s$  de  $K$   $f(s) \cup g(s)$  es un simplex de  $L$ . Escribimos en ese caso  $f \approx_{ec} g$ .

**Definición 2.1.4.**  $f$  es *contiguo* a  $g$  si existe una sucesión de morfismos  $f = f_0, f_1, \dots, f_n = g$  tal que  $f_i \approx_{ec} f_{i+1}$  para todo  $i$ . Escribimos en ese caso  $f \approx g$  a secas.

**Observación 2.1.5.**  $\approx$  es una relación de equivalencia en el conjunto de morfismos simpliciales de  $K$  en  $L$ .

**Ejemplo 2.1.6.** Cualesquiera dos morfismos  $f, g : K \rightarrow \Delta^n$  con  $K$  un complejo simplicial arbitrario son elementalmente contiguos (y por lo tanto contiguos).

**Ejemplo 2.1.7.** Sea  $L$  un complejo simplicial. Notemos que los morfismos  $\Delta^0 \rightarrow L$  están en correspondencia biunívoca con los vértices de  $L$ . Sean  $f_v$  y  $f_w$  los correspondientes a dos vértices  $v$  y  $w$ .

$f_v$  y  $f_w$  son elementalmente contiguos si y solo si  $(v, w)$  es una arista de  $L$ .

$f_v$  y  $f_w$  son contiguos si y solo si existe un camino de aristas de  $v$  a  $w$ .

**Ejemplo 2.1.8.** Toda función  $\{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$  define un morfismo simplicial  $\partial\Delta^2 \rightarrow \partial\Delta^2$ . De modo que hay 27 de estos morfismos. 6 de ellos corresponden a las biyecciones y cada uno constituye una clase de contigüidad. El conjunto de los 21 morfismos restantes forman otra clase de contigüidad.

**Proposición 2.1.9.** Si  $f, g : K \rightarrow L$  son dos morfismos contiguos entonces sus realizaciones geométricas  $|f|, |g| : |K| \rightarrow |L|$  son homotópicas.

*Demostración.* Debido a la transitividad de la relación de homotopía entre funciones continuas y a la definición dada para la relación de contigüidad de morfismos bastara probar que  $|f|$  y  $|g|$  son homotópicas en el caso que  $f \approx_{ec} g$ .

En dicho caso consideremos la homotopía "lineal" :

$$H : |K| \times I \rightarrow |L|, H(x, t) = (1 - t)|f|(x) + t|g|(x)$$

Debemos probar que  $H$  esta bien definida, esto es, ver que para todo  $x \in |K|$  las combinaciones convexas de  $|f|(x)$  y  $|g|(x)$  estan en  $|L|$ .

En efecto, sea  $s$  un simplex de  $K$  tal que  $x \in |s|$ . Dado que  $f \approx_{ec} g$ , tenemos que  $f(s) \cup g(s)$  es un simplex de  $L$ . Como  $|f|(x), |g|(x) \in |f(s) \cup g(s)|$  que es un convexo contenido en  $|L|$ , sus combinaciones convexas están en  $|L|$ .

Resta observar que  $H$  es continua. Eso se debe a que las restricciones a  $|s| \times I$  con  $s$  simplex de  $K$  lo son.  $\square$

**Observación 2.1.10.** La recíproca no es cierta: los morfismos simpliciales  $f, g : \partial\Delta^2 \rightarrow \partial\Delta^2$  definidos por  $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$  y  $g(0) = 1, g(1) = 2; g(2) = 0$  satisfacen  $|f| \approx |g|$  sin embargo como mencionamos antes no son contiguos.

Otro ingrediente que utilizaremos para demostrar el teorema de Dowker son las subdivisiones baricéntricas:

**Definición 2.1.11.** La *subdivisión baricéntrica* de un complejo simplicial  $K$ , que notaremos  $K'$ , es el complejo simplicial que tiene como vértices a los símlices  $s$  de  $K$  y como símlices a los subconjuntos de símlices de  $K$   $\{s_0, \dots, s_n\}$  con  $s_0 \subseteq \dots \subseteq s_n$ .

Si bien esta definición es la más apropiada para la demostración del teorema de Dowker, puede resultar un tanto artificial. Hay otra definición equivalente que es más geométrica:

**Nota 2.1.12.** Sea  $s$  un simplex de un complejo simplicial  $K$ . Se define el baricentro de  $s$  como el punto de la realización geométrica  $b_s = \frac{1}{\#s} \sum_{v \in s} v$ .

Notemos que conociendo el baricentro de un simplex podemos recuperar el simplex mismo como el conjunto de vértices que aparecen en la combinación convexa que lo define. Por lo tanto, los símlices están en correspondencia biunívoca con sus baricentros.

Este hecho nos permite pensar  $K'$  de una forma más geométrica: sus vértices son los baricentros de los símlices de  $K$  y sus símlices son los subconjuntos de baricentros  $\{b_{s_0}, \dots, b_{s_n}\}$  con  $s_0 \subseteq \dots \subseteq s_n$ .

**Proposición 2.1.13.** La función lineal  $b : |K'| \rightarrow |K|$  que asigna a cada vértice  $s$  de  $K'$  (simplex de  $K$ ) su baricentro  $b_s$  es un homeomorfismo. Por lo tanto, podemos pensar  $|K'| = |K|$

*Demostración.* Vamos por partes:

- **Esta bien definida:** Sea  $x' = \sum_{j=1}^n x'_j s_j \in |K'|$  con  $s_1 \subseteq \dots \subseteq s_n$ . Se tiene  $b_{s_j} \in |s_j| \subseteq |s_n|$  para todo  $j$  de modo que  $b(x') = \sum_{j=1}^n x'_j b_{s_j} \in |s_n| \subseteq |K|$ .
- **Es biyectiva** Debemos probar que cada  $x = \sum_{v \in V_K} x_v v \in |K|$  se escribe en forma única como combinación convexa de baricentros  $x = \sum_{s \in S_K} x'_s b_s$  donde  $\{s : x'_s \neq 0\}$  es totalmente ordenado.

Con ese fin escribamos los valores  $\{x_v : v \in V_K, x_v \neq 0\}$  de mayor a menor como

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n$$

Teniendo en cuenta la definición de baricentro de un simplex  $s$ ,  $b_s = \frac{1}{\#s} \sum_{v \in s} v$ , se concluye fácilmente que la única escritura posible es  $x = \sum_{j=1}^n x'_j s_j$  con :

$$s_j = \{v : x_v \geq a_j\}$$

$$x'_j = \#s_j(a_j - a_{j+1}) \text{ para } j \leq n-1 \text{ y } x'_n = \#s_n a_n$$

Estos últimos verifican  $s_1 \subseteq \dots \subseteq s_n$  y  $\sum_{j=1}^n x'_j = 1$  como necesitamos.

- **Es homeomorfismo** Como siempre la continuidad de  $b$  y  $b^{-1}$  la debemos verificar restringiendo a cada simplex. Como  $b$  es una aplicación lineal la continuidad de las restricciones queda garantizada.

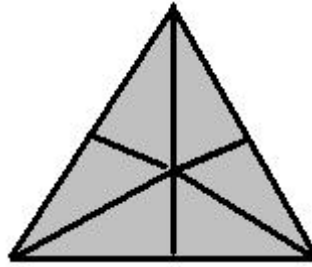
La inversa  $b^{-1}$  no es lineal, ni siquiera en cada simplex de  $|K|$ , pero es "lineal a trozos" :

Dado un simplex  $s$  de  $K$  podemos escribir  $|s| = \cup b|s'|$  sobre los símlices  $s'$  de  $K'$  formados por caras de  $s$  (mirar biyectividad). Como esta es una unión de finitos cerrados basta verificar la continuidad de  $b$  en cada  $b|s'|$ . Pero  $b : |s'| \rightarrow b|s'|$  es la restricción de una iso lineal del subespacio generado por símlices de  $s'$  en el subespacio generado por sus baricentros (estos últimos son li). Por lo tanto  $b^{-1} : b|s'| \rightarrow |s'|$  es la restricción de la inversa del iso, es lineal y en consecuencia continua. Concluimos entonces que  $b^{-1}$  también es continua.

□

**Observación 2.1.14.** Terminemos de justificar el nombre de *subdivisión baricéntrica*: si pensamos los vértices de  $K'$  como baricentros de símlices de  $K$ , como dice la proposición 2.1.13, tenemos  $|K|=|K'|$ . Además, la escritura de cada simplex  $s$  de  $K$  en términos de simplex  $s'$  de  $K'$  se convierte en  $|s| = \cup |s'|$ . Es decir, cada simplex de  $K$  es unión de símlices de  $K'$ .

**Ejemplo 2.1.15.** La subdivisión baricéntrica del 2-simplex:



Nos podemos preguntar ahora lo siguiente: así como hay una función continua canónica  $b : |K'| \rightarrow |K|$ , ¿ cómo se pueden definir morfismos simpliciales  $K' \rightarrow K$  ?

Una forma cómoda de hacerlo es dando un orden  $\leq$  al conjunto de vértices  $V_K$  que sea total en cada simplex  $s \in S_K$ . Una vez hecho eso, es fácil verificar que asignarle a cada vértice de  $K'$  (simplex de  $K$ ) el mínimo de sus vértices define un morfismo simplicial  $\varphi : K' \rightarrow K$ .

Esta construcción no es canónica, el morfismo obtenido depende del orden elegido. Sin embargo, es notable que:

**Proposición 2.1.16.** *La clase de contigüidad de  $\varphi$  es independiente de  $\leq$*

*Demostración.* Sean  $\leq_1$  y  $\leq_2$  dos ordenes para los vértices de  $K$ . Probaremos que  $\varphi_{\leq_1} \approx_{ec} \varphi_{\leq_2}$ . En efecto sea  $s' = \{s_0 \subseteq \dots \subseteq s_n\}$  simplex de  $K'$ . Entonces  $\varphi_{\leq_i}(s_j) \in s_j$  para todos  $i = 1, 2$   $j = 0, \dots, n$ . Como  $s_j \subseteq s_n$  resulta  $\varphi_{\leq_i}(s') \subseteq s_n$  para  $i = 1, 2$  y por lo tanto su unión forma un simplex de  $K$  como queríamos ver. □

**Observación 2.1.17.** En el caso particular  $K = L'$  para cierto complejo simplicial  $L$ , si hay una elección canónica de  $\varphi$ : tomando como orden en los vértices de  $K$  el dado por la inclusión  $\subseteq$  en los símlices de  $L$ .

Hay una relación importante entre las funciones  $b$  y  $|\varphi| : |K'| \rightarrow |K|$ :

**Proposición 2.1.18.**  $b \approx |\varphi|$  cualquiera sea el orden  $\leq$  elegido

*Demostración.* Consideremos, como otras veces, una homotopía "lineal" :

$$H : |K'| \times I \rightarrow |K|, H(x', t) = (1 - t)b(x') + t|\varphi|(x')$$

Hay que ver que  $H$  esta bien definida. En efecto sea  $x' = \sum_{i=0}^n x'_i s_i \in |K'|$  con  $s_0 \subseteq \dots \subseteq s_n$ . Dado que  $|s_n| \subseteq |K|$  es convexo bastara con probar  $b(x'), |\varphi|(x') \in |s_n|$ . En efecto,  $b_{s_i} \in |s_i| \subseteq |s_n|$  por lo tanto  $b(x') = \sum_{i=0}^n x'_i b_{s_i} \in |s_n|$ . Por otro lado, como  $\varphi(s_i) \in |s_i| \subseteq |s_n|$  se tiene  $|\varphi|(x') = \sum_{i=0}^n x'_i \varphi(s_i) \in |s_n|$ . La continuidad es inmediata.  $\square$

Hasta ahora subdividimos complejos simpliciales, también se pueden subdividir los morfismos simpliciales. En otras palabras, tomar subdivisión baricéntrica es funtorial:

**Definición 2.1.19.** Dado un morfismo simplicial  $f : K \rightarrow L$  llamamos subdivisión baricéntrica de  $f$ , al morfismo simplicial  $f' : K' \rightarrow L'$  dado por considerar  $f$  como aplicación de  $S_K$  en  $S_L$ .

**Proposición 2.1.20.** Sea  $f : K \rightarrow L$  un morfismo simplicial entonces el siguiente diagrama conmuta módulo contigüidad.

$$\begin{array}{ccc} K' & \xrightarrow{f'} & L' \\ \downarrow \varphi_K & & \downarrow \varphi_L \\ K & \xrightarrow{f} & L \end{array}$$

Donde  $\varphi_K$  y  $\varphi_L$  son los morfismos que vinculan los complejos con sus subdivisiones, definidos a partir de algún orden en los vértices de  $K$  y  $L$ .

*Demostración.* Mostraremos que  $f\varphi_K \approx_{ec} \varphi_L f'$ . Sea  $s' = \{s_0 \subseteq \dots \subseteq s_n\}$  simplex de  $K'$ . Bastara probar que  $f\varphi_K(s_i), \varphi_L f'(s_i) \in f(s_n)$  que es un simplex de  $L$ . En efecto  $\varphi_K(s_i) \in s_i \subseteq s_n$  para todo  $i$ , de este modo  $f\varphi_K(s_i) \in f(s_n)$ . Por otro lado  $f(s_0) \subseteq \dots \subseteq f(s_n)$  y por esa razón  $\varphi_L f'(s_i) \in f(s_i) \subseteq f(s_n)$  para todo  $i$  como queríamos ver.  $\square$

**Corolario 2.1.21.** Sea  $f : K \rightarrow L$  un morfismo simplicial entonces el siguiente diagrama de funciones continuas conmuta módulo homotopía.

$$\begin{array}{ccc} |K'| & \xrightarrow{|f'|} & |L'| \\ \downarrow b_K & & \downarrow b_L \\ |K| & \xrightarrow{|f|} & |L| \end{array} .$$

Donde  $b_K$  y  $b_L$  son los homeos que vinculan las realización de cada complejo con la realización de su subdivisión.

*Demostración.* Al tomar realización geométrica en el diagrama de la proposición 2.1.20 se obtiene un diagrama conmutativo módulo homotopia en virtud de 2.1.9. Después usamos 2.1.18 para reemplazar  $\varphi_K$  y  $\varphi_L$  por  $b_K$  y  $b_L$  respectivamente.  $\square$

Ya estamos en condiciones de probar el resultado prometido:

**Teorema 2.1.22. (Dowker)** *Sea  $R$  una relación  $R \subseteq X \times Y$  entonces  $|K_R|$  y  $|L_R|$  resultan homotópicamente equivalentes.*

*Demostración.* De ahora en adelante abreviamos  $K = K_R$  y  $L = L_R$ .

Vamos a definir un morfismo  $f : K' \rightarrow L$ . Tomemos un vértice de  $K'$ , es decir un simplex de  $K$ ,  $s = \{x_0, \dots, x_n\}$ . Según se definió  $K$ , debe existir  $y \in Y$  tal que  $x_i R y$  para todo  $i$ . Definimos  $f(s) = y$  para algún  $y$  que cumpla lo anterior.<sup>1</sup>

Veamos que  $f$  es simplicial. Sea  $s' = \{s_0 \subseteq \dots \subseteq s_n\}$  simplex de  $K'$  y tomemos  $x \in s_0$  arbitrario. Resulta entonces  $x R f(s_i)$  para todo  $i$  y por lo tanto  $f(s') = \{f(s_0), \dots, f(s_n)\}$  es un simplex de  $L$  como necesitábamos.

Definimos un morfismo  $g : L' \rightarrow K$  en forma completamente simétrica.

$|f|$  y  $|g|$  (o más formalmente  $|f|b_K^{-1}$  y  $|g|b_L^{-1}$ ) resultan equivalencias homotópicas recíprocas.

Probaremos  $|g|b_L^{-1}|f|b_K^{-1} \approx 1_{|K|}$ . Una vez hecho eso bastara cambiar  $R$  por  $R^{-1}$ ,  $f$  por  $g$  y  $g$  por  $f$  para obtener  $|f|b_K^{-1}|g|b_L^{-1} \approx 1_{|L|}$ .

Fijemos algún orden total para los vértices de  $K$  y consideremos el orden dado por la inclusión en los vértices de  $K'$ . Llamaremos  $\varphi_K : K' \rightarrow K$  y  $\varphi_{K'} : K'' \rightarrow K'$  a los morfismos simpliciales que se obtienen considerando esos ordenes.

Afirmamos que  $gf' \approx_{ec} \varphi_K \varphi_{K'}$  donde  $f'$  es la subdivisión de  $f$ .

En efecto sea  $s'' = \{s'_0 \subseteq \dots \subseteq s'_n\}$  simplex de  $K''$ . Tomemos  $y = f\varphi_{K'}(s'_0) \in Y$ . Bastará mostrar que  $\varphi_K \varphi_{K'}(s'_i) R y$ ,  $gf'(s'_i) R y$  para todo  $i$ .

Para ver la primera condición usaremos que  $\varphi_{K'}$  revierte el orden: cuando más grande sea el simplex  $s'$  de  $K'$  más chico sera  $\varphi_{K'}(s')$  que es el mínimo de los símlices de  $K$  que lo conforman. Por esa razón se tiene  $\varphi_K \varphi_{K'}(s'_i) \in \varphi_{K'}(s'_i) \subseteq \varphi_{K'}(s'_0)$ . Como  $y = f\varphi_{K'}(s'_0)$ , se sigue de la definición de  $f$  que  $\varphi_K \varphi_{K'}(s'_i) R y$  para todo  $i$ .

Para ver la segunda condición usaremos que  $f'$  preserva el orden: cuando más grande sea el simplex  $s'$  de  $K'$ , es decir cuando más símlices de  $K$  contenga, más grande es el subconjunto  $f'(s')$  que se obtiene. Luego  $y = f\varphi_{K'}(s'_0) \in f'(s'_0) \subseteq f'(s'_i)$  y por lo tanto según se definió  $g$  resulta  $gf'(s'_i) R y$  para todo  $i$ .

Ahora que tenemos probado  $gf' \approx_{ec} \varphi_K \varphi_{K'}$  se sigue de las proposiciones 2.1.9 y 2.1.18 que  $|g||f'| \approx |b_K||b_{K'}|$ . Haciendo uso de 2.1.21 podemos reescribir  $|f'|$  obteniendo  $|g|b_L^{-1}|f|b_{K'} \approx b_K b_{K'}$ . Pasando de termino los homeos  $b_K$  y  $b_{K'}$  queda finalmente  $|g|b_L^{-1}|f|b_K^{-1} \approx 1_{|K|}$  como se quería probar.  $\square$

<sup>1</sup>Es interesante y fácil de probar que los diferentes morfismos  $f$  que uno puede construir de esta forma están en una misma clase de contigüidad.

## 2.2. Complejos simpliciales asociados a un cubrimiento

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{U}$  una familia de subconjuntos que lo cubren. Entonces contamos con una relación de  $X$  en  $\mathcal{U}$ : la relación de pertenencia  $\in$ . En este caso particular, los complejos correspondientes  $K$  y  $L$  se indican  $V(\mathcal{U})$  y  $N(\mathcal{U})$  respectivamente. A  $V(\mathcal{U})$  se lo conoce como el complejo de Vietoris y a  $N(\mathcal{U})$  como el nervio o complejo de Čech.

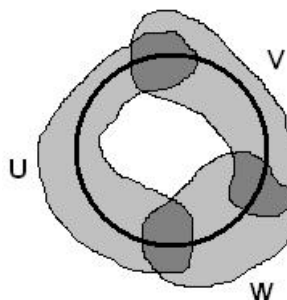
Concretamente:

- $V(\mathcal{U})$  tiene como vértices a los puntos  $x \in X$  y un subconjunto finito de esos puntos forman un simplex cuando están contenidos en algún  $U \in \mathcal{U}$ .
- $N(\mathcal{U})$  tiene como vértices a los subconjuntos  $U \in \mathcal{U}$  y un subconjunto finito  $\{U_0, \dots, U_n\}$  de ellos forman un simplex cuando existe  $x$  en  $X$  con  $x \in U_i$  para todo  $i$ , es decir, cuando  $\bigcap U_i \neq \emptyset$ .

El teorema de Dowker 2.1.22 nos dice que  $|V(\mathcal{U})| \approx |N(\mathcal{U})|$ .

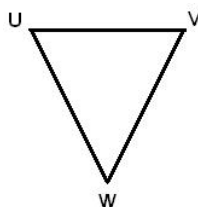
Estas construcciones tienen particular importancia cuando  $X$  es un espacio topológico y  $\mathcal{U}$  es un cubrimiento por abiertos:

**Ejemplo 2.2.1.** Sea  $\mathcal{U}$  el siguiente cubrimiento abierto de  $S^1$  :



Su complejo de Vietoris es inmenso: tiene un vértice por cada punto de  $S^1$  y resulta de dimensión infinita dado que  $U, V$  y  $W$  están formados por infinitos puntos!

Su nervio, en cambio, es mucho más pequeño:



Notemos que  $N(\mathcal{U})$  tiene el tipo homotópico de  $S^1$ .

**Nota 2.2.2.** En general  $N(\mathcal{U})$  es mucho “más pequeño” que  $V(\mathcal{U})$  y por lo tanto más sencillo de estudiar con herramientas combinatorias. Por esa razón, si bien son homotópicamente equivalentes, a partir de ahora nos concentramos en  $N(\mathcal{U})$ .

Motivados por el ejemplo anterior, nos hacemos una pregunta muy natural: ¿hay alguna relación entre los espacios  $X$  y  $|N(\mathcal{U})|$ ?

El teorema de M.McCord que enunciamos a continuación, nos da una respuesta afirmativa cuando se trabaja con cubrimientos que cumplen ciertas condiciones.

Damos dos definiciones necesarias para comprender su enunciado:

**Definición 2.2.3.** Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  se dice *equivalencia homotópica débil* cuando los morfismos que induce en los grupos de homotopía  $f_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$  con  $x \in X$  y  $n \geq 0$  son todos isomorfismos.

**Definición 2.2.4.** Un espacio  $X$  se dice *homotópicamente trivial* cuando  $\pi_n(X, x) = 0$  para todo  $x \in X$  y  $n \geq 0$ . Es decir, cuando la función constante  $f : X \rightarrow \{*\}$  es equivalencia débil.

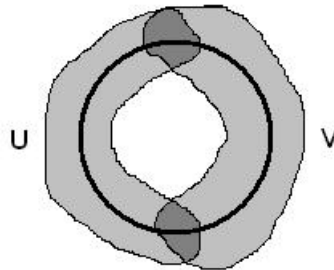
**Teorema 2.2.5. (McCord)** Sea  $X$  un espacio y  $\mathcal{U}$  un cubrimiento por abiertos. Si  $\mathcal{U}$  es puntualmente finito y con intersecciones homotópicamente triviales entonces existe una equivalencia débil  $|N(\mathcal{U})| \rightarrow X$

La demostración dada por McCord utiliza técnicas de espacios finitos cuya introducción nos alejaría considerablemente del objetivo principal de esta tesis. Por ese motivo, le proponemos al lector interesado consultarla en [7].

Notemos la potencia del teorema: podemos estudiar el espacio  $X$  aplicando métodos combinatorios al nervio que es un complejo simplicial.

**Ejemplo 2.2.6.** Este ejemplo muestra que la hipótesis de que los abiertos del cubrimiento tengan intersecciones homotópicamente triviales es clave para garantizar que toda la “información homotópica” este contenida en el nervio.

Consideremos un nuevo cubrimiento abierto  $\mathcal{V}$  de  $S^1$ :



El nervio correspondiente es:

$$U \text{ ————— } V$$

$N(\mathcal{V})$  ya no tiene el tipo homotópico de  $S^1$ . El problema es que  $U \cap V$  no es conexo y por lo tanto no es homotópicamente trivial como pide el teorema.



En lo que queda de esta sección obtenemos resultados similares al teorema de McCord en un contexto de complejos simpliciales. Aquí los cubrimientos estarán dados por una familia de subcomplejos.

El caso más sencillo de subcomplejos son los símplices. Este caso se puede tratar con el teorema de Dowker:

**Proposición 2.2.7.** *Sea  $K$  un complejo simplicial y  $\mathcal{S}$  una familia de símplices generalizados que satisface  $K = \cup_{s \in \mathcal{S}} s$ . Entonces hay una equivalencia homotópica  $|N(\mathcal{S})| \rightarrow |K|$ .*

*Demostración.* La familia  $\mathcal{S}$  nos da un cubrimiento del conjunto  $V_K$  y es inmediato que  $V(\mathcal{S}) = K$ . Por el teorema de Dowker  $V(\mathcal{S}) \approx N(\mathcal{S})$ .  $\square$

**Nota 2.2.8.** Es interesante notar que esta proposición es *equivalente* al teorema de Dowker. En efecto, sea  $R \subseteq X \times Y$  una relación. Para cada vértice  $y$  de  $L_R$  consideremos el simplex (generalizado) en  $K_R$  con vértices  $R^{-1}y = \{x \in X : x R y\}$ . Obtenemos de esta forma una familia de símplices  $\mathcal{S}$  tal que  $K_R = \cup_{s \in \mathcal{S}} s$ . Es inmediato que  $N(\mathcal{S}) = L_R$  y por lo tanto aplicando la proposición obtenemos la tesis del teorema de Dowker  $|K_R| \approx |L_R|$ .

Como una aplicación podemos dar una demostración combinatoria de un resultado clásico:

**Corolario 2.2.9.** *Sea  $K$  un complejo simplicial entonces su cono  $a * K$  es contráctil.*

*Demostración.* Consideremos la familia  $\mathcal{S}_K$  formada por todos los símplices de  $K$ . Evidentemente  $K = \cup_{s \in \mathcal{S}_K} s$  y por lo tanto  $\mathcal{S} = \{a * s\}_{s \in \mathcal{S}_K}$  es una familia de símplices cuya unión es  $a * K$ . Luego  $|a * K| \approx |N(\mathcal{S})|$ . Ahora bien, todos los símplices de  $\mathcal{S}$  tienen un vértice en común por lo tanto  $N(\mathcal{S})$  es un simplex y resulta contráctil.  $\square$

Ahora pasamos a enunciar una reformulación del teorema de McCord:

**Teorema 2.2.10.** *Sea  $K$  un complejo simplicial con  $\dim K < \infty$  y consideremos una familia de subcomplejos  $\mathcal{L}$  con  $K = \cup_{L \in \mathcal{L}} L$ . Si  $\mathcal{L}$  es puntualmente finito (ie. cada vértice de  $K$  esta en a lo sumo finitos subcomplejos de  $\mathcal{L}$ ) y las intersecciones son subcomplejos contráctiles entonces existe una equivalencia homotópica  $|N(\mathcal{L})| \rightarrow |K|$ .*

Antes de demostrarla queremos destacar la siguiente:

**Nota 2.2.11.** Este teorema implica la proposición anterior cuando  $\dim K < \infty$  y la familia de símplices  $\mathcal{S}$  es puntualmente finita. En virtud de la nota 2.2.8 concluimos que el teorema de McCord implica el de Dowker para  $\dim K_R$  y  $\dim L_R < \infty$ .

Para demostrar 2.2.10 necesitamos "inflar" símplices para obtener abiertos:

**Lema 2.2.12.** *Sea  $K$  complejo simplicial con  $\dim K < \infty$ . Se puede dar para cada subcomplejo pleno  $L \leq K$  un abierto  $i(L) \subseteq |K|$  de forma que:*

1.  $|L| \subseteq i(L)$  es RDF
2.  $i(L) \neq \emptyset \Leftrightarrow L \neq \emptyset$
3.  $i(L \cap M) = i(L) \cap i(M)$

*Demostración.* Comenzamos eligiendo un número positivo  $\epsilon < 1/(\dim K + 1)$  y definimos :

$$i(L) = \{\sum_{v \in V_K} \alpha_v v : \alpha_v < \epsilon \text{ para todo } v \notin V_L\}$$

Es inmediato, restringiendo a cada simplex de  $K$ , que  $i(L)$  es abierto. Probemos (1): es claro que  $|L| \subseteq i(L)$ , veamos que es RDF. Para eso consideramos la homotopía  $H : i(L) \times I \rightarrow i(L)$  :

$$H(\sum_{v \in V_K} \alpha_v v, t) = (A + tB) \sum_{v \in V_L} \frac{\alpha_v}{A} v + (1 - t) \sum_{v \notin V_L} \alpha_v v$$

donde  $A = \sum_{v \in V_L} \alpha_v$  y  $B = \sum_{v \notin V_L} \alpha_v$ .

Notemos que  $A > 0$ . En efecto  $B < \#\{v : v \notin V_L, \alpha_v \neq 0\} \epsilon < 1$  dado que el conjunto es un simplex y por eso tiene a lo sumo  $\dim K + 1$  vértices. Como es  $A + B = 1$  debe ser  $A > 0$ .

Por otro lado  $(1 - t)\alpha_v < \alpha_v < \epsilon$  para todo  $t$ , lo cual garantiza que  $H$  esta bien definida.

$H$  es continua y verifica:  $H(x, 0) = x$  para todo  $x \in |K|$ ,  $H(x, t) = x$  para todo  $(x, t) \in |L| \times I$  y también  $H(x, 1) = \sum_{v \in V_L} \frac{\alpha_v}{A} v \in |L|$ . Luego  $|L| \subseteq i(L)$  es RDF.

La condición (2) es consecuencia directa de la forma en que elegimos  $\epsilon$ . (3) es inmediata.  $\square$

**Observación 2.2.13.** Se pueden construir los abiertos  $i(L)$  para *todos* los subcomplejos  $L \leq K$  (no necesariamente plenos). Para eso se puede usar un hecho fácil de verificar:  $L \leq K \Rightarrow L' \leq K'$  subcomplejo pleno y considerar los  $i(L) = i(L')$  pensando  $|K| = |K'|$ .

Ahora sí, podemos probar el teorema:

*Demostración de 2.2.10.*  $K$  es unión de los subcomplejos de la familia  $\mathcal{L}$ . Aplicando el lema tenemos entonces un cubrimiento abierto  $\mathcal{U} = \{i(L) : L \in \mathcal{L}\}$  de  $|K|$ .

$\mathcal{U}$  hereda las propiedades de  $\mathcal{L}$ : (1) y (3) permiten probar que las intersecciones en  $\mathcal{U}$  son contráctiles mostrando que se retractan por deformación fuerte a subcomplejos contráctiles. (2) y (3) garantizan que  $N(\mathcal{L}) = N(\mathcal{U})$ , en particular, al igualar dimensiones,  $\mathcal{U}$  resulta puntualmente finito. Solo resta aplicar el teorema de McCord a  $\mathcal{U}$  y usar que una equivalencia débil entre poliedros es una equivalencia homotópica (teorema de Whitehead).  $\square$

## Capítulo 3

# Acciones globales y Atlas de grupoides

### 3.1. Acciones globales

Con el objetivo de mostrar la forma en que surgieron los atlas de grupoides analizaremos primero a sus precursoras las acciones globales.

Las acciones globales son un análogo algebraico a las variedades topológicas, en el sentido de que ambas se basan en un "pegado" de objetos locales más simples. El modelo local en las variedades topológicas es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , para las acciones globales, es la acción de un grupo sobre un conjunto.

Comenzaremos con un breve repaso acerca de acciones de grupos sobre conjuntos, con el propósito de recordar los hechos básicos y establecer la notación que utilizaremos en adelante. Luego presentamos las acciones globales siguiendo los papers [2] [6]. Damos algunos ejemplos como la acción global  $GL(n, R)$  que dio origen al concepto en la K-teoría y más en general las  $A(G, \mathcal{H})$ s que permiten estudiar un grupo  $G$  a partir de una familia de subgrupos  $\mathcal{H}$ . Después nos volcamos a los morfismos de acciones globales en sus dos variantes débiles y fuertes.

**Definición 3.1.1.** Una *acción (a izquierda) de un grupo  $G$  sobre un conjunto  $X$*  consiste en una multiplicación  $\cdot : G \times X \rightarrow X$  que cumple con las siguientes propiedades:

1.  $g.(h.x) = (gh).x$  para todos  $g, h \in G$  y  $x \in X$
2.  $1.x = x$  para todo  $x \in X$

Indicamos una tal acción con  $G \curvearrowright X$ .

**Definición 3.1.2.** Dada una acción  $G \curvearrowright X$  se tiene una relación de equivalencia en  $X$ :  $x \approx x' \Leftrightarrow$  existe  $g \in G$  tal que  $x' = g.x$ . Las clases de equivalencia se llaman *órbitas* de la acción. Cuando la acción tiene una única órbita se dice que es *transitiva*.

Para cada  $x \in X$  se tiene un subgrupo de  $G$  dado por  $G_x = \{g \in G : g.x = x\}$ . Este subgrupo se conoce como el *estabilizador de  $x$* .

**Ejemplo 3.1.3.** Sea  $G$  un grupo. Cualquier subgrupo  $H \leq G$  actúa sobre el conjunto  $G$  por multiplicación a izquierda. Las órbitas de esta acción son el conjunto de co-classes a derecha  $\{Hg$  con  $g \in G\}$ . Los estabilizadores son triviales.

**Ejemplo 3.1.4.** Sea  $G$  un grupo y  $H \leq G$  un subgrupo.  $G$  actúa sobre el conjunto de co-classes a izquierda  $G/H = \{gH$  con  $g \in G\}$  por multiplicación a izquierda  $g.(aH) = (ga)H$ . Esta acción es transitiva: sean  $aH$  y  $bH$  dos co-classes, tomando  $g = ba^{-1}$  resulta  $g.(aH) = bH$ . El estabilizador de  $aH$  es  $aHa^{-1}$ .

**Ejemplo 3.1.5.** Sea  $X$  un conjunto y consideremos una permutación  $\sigma \in S(X)$ . Se puede definir una acción  $(\mathbb{Z}, +) \curvearrowright X$  por  $n.x = \sigma^n(x)$ . Las órbitas de esta acción forman la llamada estructura cíclica de  $\sigma$ . El estabilizador de un cierto  $x$  es el subgrupo  $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$  donde  $n$  es el tamaño del ciclo de  $\sigma$  del cual forma parte  $x$ .

Podemos dar también una versión diferenciable de esta acción. El conjunto es ahora una variedad diferenciable compacta  $M$  y en vez de permutaciones, consideramos un campo  $X \in X(M)$ . Notemos con  $\phi_P : \mathbb{R} \rightarrow M$  la curva integral de  $X$  que cumple  $\phi_P(0) = P$ . Es fácil ver que  $t.P = \phi_P(t)$  define una acción  $(\mathbb{R}, +) \curvearrowright M$  utilizando la unicidad de las curvas integrales y su invariancia por traslaciones en  $t$ .

**Definición 3.1.6.** Dadas dos acciones de grupos sobre conjuntos  $G \curvearrowright X$  y  $H \curvearrowright Y$ , un morfismo  $F : G \curvearrowright X \rightarrow H \curvearrowright Y$  consiste de un par  $(\phi, f)$  formado por un morfismo de grupos  $\phi : G \rightarrow H$  y una función de conjuntos  $f : X \rightarrow Y$  que satisfacen  $f(g.x) = \phi(g).f(x)$  para todos  $g \in G$  y  $x \in X$ .

**Nota 3.1.7.** Este capítulo incluye algunas observaciones categóricas. El lector que no maneje este lenguaje podrá omitir 3.1.8, 3.1.21, 3.2.2, 3.2.9, 3.3.18 y 3.3.27 sin perjudicar con esto su comprensión de los próximos capítulos.

**Observación 3.1.8.** Las acciones de grupos sobre conjuntos con los morfismos recién definidos y la composición "en cada coordenada" forman una categoría que notamos **Acc**.

La siguiente proposición nos permite entender como son todas las acciones de un grupo dado:

**Proposición 3.1.9.** Sea  $G \curvearrowright X$  una acción,  $x \in X$  y notemos con  $\mathcal{O}_x$  la órbita de  $x$ . Entonces la acción restringida  $G \curvearrowright \mathcal{O}_x$  es isomorfa a  $G \curvearrowright G/G_x$ .

*Demostración.* Considerar el morfismo de  $G$ -acciones  $\phi : G/G_x \rightarrow \mathcal{O}_x$  dado por  $\phi(gG_x) = g.x$ . Evidentemente  $\phi$  es sobreyectivo. Veamos que también es inyectivo: sean  $g, h \in G$  tales que  $\phi(g) = \phi(h)$ . Entonces  $g.x = h.x$  o bien  $h^{-1}g.x = x$ , es decir,  $h^{-1}g \in G_x$ . Por lo tanto  $gG_x = hG_x$  como queríamos.  $\square$

Ya repasado el "modelo local", pasemos a las prometidas acciones globales:

**Definición 3.1.10.** Una *acción global*  $A$  consiste de un conjunto  $X_A$  junto con una familia de acciones de grupos  $G_\alpha$  sobre subconjuntos  $X_\alpha \subseteq X_A$ . Estas acciones están vinculadas por ciertos morfismos. Más precisamente  $A = (X_A, \phi_A, \{X_\alpha\}, \{G_\alpha\})$  donde

1.  $X_A$  es un conjunto.

2.  $\phi_A$  es un conjunto de índices dotado de una relación reflexiva  $\leq$ .
3. Para cada  $\alpha \in \phi_A$ , hay un subconjunto  $X_\alpha \subseteq X_A$  y un grupo local  $G_\alpha$  que actúa sobre el.
4. Si  $\alpha \leq \beta$ , hay un morfismo  $\phi_\alpha^\beta : G_\alpha \rightarrow G_\beta$  tal que  $g.x = \phi_\alpha^\beta(g).x$  para todo  $x \in X_\alpha \cap X_\beta$  y  $g \in G_\alpha$ .

Pedimos además  $\phi_\alpha^\alpha = id_{G_\alpha}$  y  $\phi_\alpha^\gamma = \phi_\beta^\gamma \circ \phi_\alpha^\beta$  cuando los tres morfismos están definidos.

También se requiere que  $A$  sea *cubierta*, esto es,  $X = \cup_\alpha X_\alpha$ . Si la acción global  $A$  cumple además  $X_\alpha = X_A$  para todo  $\alpha$ , decimos que  $A$  es *simple*.

**Observación 3.1.11.** Notemos que como consecuencia de (4), para  $\alpha \leq \beta$  se tiene  $G_\alpha(X_\alpha \cap X_\beta) \subseteq X_\alpha \cap X_\beta$ . Por lo tanto se tiene una acción  $G_\alpha \curvearrowright (X_\alpha \cap X_\beta)$  y un morfismo de acciones  $(\phi_\alpha^\beta, i_\alpha^\beta) : (G_\alpha \curvearrowright X_\alpha \cap X_\beta) \rightarrow (G_\beta \curvearrowright X_\beta)$  donde  $i_\alpha^\beta$  es la inclusión de conjuntos.

**Ejemplo 3.1.12.** El ejemplo más simple, claro está, consiste en pensar una única acción  $G \curvearrowright X$  como acción global con conjunto de índices unitario.

**Ejemplo 3.1.13.** Este es el ejemplo que dio origen a las acciones globales en la K-teoría. Se trata de la llamada *acción global lineal general* de orden  $n$  con coeficientes en  $R$ . Donde  $n \in \mathbb{N}$  y  $R$  es un anillo con unidad.

Un subconjunto  $\alpha$  de  $\Lambda = \{(i, j) : i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$  se dice *cerrado* si  $(i, j) \in \alpha$  y  $(j, k) \in \alpha$  implican  $(i, k) \in \alpha$ . Consideremos  $X_A = GL(n, R)$  y  $\phi_A = \{\alpha \subseteq \Lambda \text{ cerrados}\}$  ordenado por la inclusión. Para cada  $\alpha$  tomamos  $G_\alpha \subseteq GL(n, R)$  como el subgrupo generado por las matrices

$$\{E_{ij}(r) \text{ para } (i, j) \in \alpha \text{ y } r \in R\}$$

Donde  $E_{ij}(r)$  es la matriz con 1s en la diagonal,  $r$  en la posición  $(i, j)$  y 0 en los demás lugares. Los subgrupos  $G_\alpha$  actúan sobre  $GL(n, R)$  por multiplicación a izquierda.

Para  $\alpha \subseteq \beta$  denotamos con  $\phi_\alpha^\beta$  la inclusión  $G_\alpha \rightarrow G_\beta$ .

Este último ejemplo sugiere generalizar la situación de 3.1.3 considerando simultáneamente la acción de varios subgrupos:

**Ejemplo 3.1.14.** Sea  $G$  un grupo y  $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}$  una familia de subgrupos de  $G$ . La acción global  $A(G, \mathcal{H})$  consiste en tomar  $X_A = G$  y considerar la acción de cada  $H_\alpha$  sobre el grupo  $G$  por multiplicación a izquierda (es una acción global simple). El conjunto  $\phi_A$  es el que indexa la familia  $\mathcal{H}$  con  $\alpha \leq \beta$  si  $H_\alpha \subseteq H_\beta$ . Los morfismos  $\phi_\alpha^\beta$  son las correspondientes inclusiones.

Si además nos dan una acción  $G \curvearrowright X$ , podemos construir una acción global que notamos  $A(G, \mathcal{H}) \curvearrowright X$ . Esta acción global tiene  $X_A = X$  y las acciones locales son las restricciones  $H_\alpha \curvearrowright X$  de la acción dada a los diferentes subgrupos. El conjunto de índices  $\phi_A$  y los morfismos  $\phi_\alpha^\beta$  se toman como en el caso de la  $A(G, \mathcal{H})$ .

Pasamos ahora a los morfismos de acciones globales. Estos morfismos vienen en dos tipos: débiles y fuertes. La diferencia está en la cantidad de información que preservan.

Para definir los morfismos débiles usamos la noción de tira local:

**Definición 3.1.15.** Sea  $A$  una acción global. Una *tira local* o más específicamente una  $\alpha$ -tira es un subconjunto finito de puntos  $x_0, \dots, x_n$  de una órbita de alguna acción local  $G_\alpha \curvearrowright X_\alpha$ .

**Definición 3.1.16.** Sean  $A$  y  $B$  acciones globales. Un *morfismo débil*  $f : A \rightarrow B$  es una función de conjuntos  $f : X_A \rightarrow X_B$  que preserve tiras locales. Es decir, si  $x_0, \dots, x_n$  forman una tira local en  $A$  entonces  $f(x_0), \dots, f(x_n)$  forman una tira local en  $B$ .

Los morfismos débiles sólo preservan información de las órbitas locales. Corresponden a pensar una acción global como un conjunto con un cubrimiento.

**Ejemplo 3.1.17.** Consideremos dos acciones de grupos sobre conjuntos  $G \curvearrowright X$  y  $H \curvearrowright Y$  como acciones globales. Un morfismo débil  $f : G \curvearrowright X \rightarrow H \curvearrowright Y$  es una función de conjuntos que envía cada órbita de  $G \curvearrowright X$  dentro de alguna órbita de  $H \curvearrowright Y$ .

A continuación presentamos los morfismos fuertes, que a diferencia de los débiles, preservan los datos sobre las acciones locales y la forma en que estas interactúan:

**Definición 3.1.18.** Sean  $A$  y  $B$  acciones globales. Un *morfismo fuerte*  $\eta : A \rightarrow B$  es una terna  $(\eta_\phi, \{\eta_\alpha\}, \eta_X)$  que satisface lo siguiente:

1.  $\eta_\phi : \phi_A \rightarrow \phi_B$  es una función de índices que preserve relaciones: si  $\alpha \leq \beta \Rightarrow \eta_\phi(\alpha) \leq \eta_\phi(\beta)$ .
2. Para cada  $\alpha \in \phi_A$  se tiene un morfismo de grupos  $\eta_\alpha : G_\alpha^A \rightarrow G_{\eta_\phi(\alpha)}^B$  de forma que si  $\alpha \leq \beta$  se tiene un cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha^A & \xrightarrow{\eta_\alpha} & G_{\eta_\phi(\alpha)}^B \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_\beta^A & \xrightarrow{\eta_\beta} & G_{\eta_\phi(\beta)}^B \end{array}$$

Donde las flechas verticales son los morfismos de estructura correspondientes a cada acción global.

3.  $\eta_X : X_A \rightarrow X_B$  es una función de conjuntos tal que  $\eta_X(X_\alpha^A) \subseteq X_{\eta_\phi(\alpha)}^B$  y además resulta  $(\eta_\alpha, \eta_X) : G_\alpha^A \curvearrowright X_\alpha^A \rightarrow G_{\eta_\phi(\alpha)}^B \curvearrowright X_{\eta_\phi(\alpha)}^B$  morfismo de acciones para cada  $\alpha \in \phi_A$ .

**Observación 3.1.19.** Si  $\eta$  es un morfismo fuerte, debido a la condición (3), es claro que  $\eta_X$  preserva tiras locales y por lo tanto define un morfismo débil.

**Ejemplo 3.1.20.** Consideremos nuevamente dos acciones  $G \curvearrowright X$  y  $H \curvearrowright Y$  como acciones globales. Dar un morfismo fuerte de acciones  $G \curvearrowright X \rightarrow H \curvearrowright Y$  corresponde a dar un morfismo de acciones en el sentido usual.

Podemos ver en este ejemplo que *los morfismos fuertes entre acciones globales pueden ser muy escasos*. Eso sucede cuando tenemos pocos morfismos de grupos. Por ejemplo, cuando  $G$  y  $H$  son grupos finitos con ordenes coprimos, sólo contamos con el morfismo  $\phi : G \rightarrow H$  trivial. En ese caso, los morfismos de acciones quedan muy restringidos, como es fácil ver, están dados por las funciones  $f : X \rightarrow Y$  constantes en cada órbita.

**Observación 3.1.21.** Las acciones globales junto con los morfismos débiles o en forma alternativa con los morfismos fuertes constituyen dos categorías que notamos  $\mathbf{AccGl}_D$  y  $\mathbf{AccGl}$  respectivamente.

### 3.2. Atlas de grupoides

Los grupoides son estructuras algebraicas en cierto sentido similares a los grupos que poseen además una "dimensión espacial". Su uso se extiende a distintas ramas de la matemática. El motivo de esto, en parte, es que permiten dar formulaciones muy elegantes de resultados cuya expresión clásica, en términos de grupos, resulta muy complicada. Eso ocurre, por ejemplo, en topología algebraica con el teorema de Van Kampen.

En el trabajo [2] se utiliza una conocida forma de ver las acciones como grupoides para reformular la definición de acción global y así obtener los llamados atlas de grupoides.

Los atlas de grupoides resultan más flexibles que las acciones globales: son más ricos en morfismos y además le dan un espectro más amplio a la teoría. Esto último se debe a que los grupoides no solo "generalizan" a las acciones, sino que también incluyen, por ejemplo, a las relaciones de equivalencia.

**Definición 3.2.1.** Un grupoide  $\mathcal{G}$  consiste de :

1. Un conjunto de objetos  $Obj \mathcal{G}$ .
2. Para cada par de objetos  $x, y \in Obj \mathcal{G}$  un conjunto de flechas de  $x$  a  $y$  que notamos  $\mathcal{G}(x, y)$ . Cuando  $x = y$  escribimos solamente  $\mathcal{G}(x)$ .
3. Una composición de flechas  $\circ : \mathcal{G}(x, y) \times \mathcal{G}(y, z) \rightarrow \mathcal{G}(x, z)$  definida para cada  $x, y, z \in Obj \mathcal{G}$  que satisface:
  - Es asociativa:  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$  para toda terna de flechas componibles  $f, g$  y  $h$ .
  - Admite elementos identidad: para cada  $x \in Obj \mathcal{G}$  existe una flecha  $1_x \in \mathcal{G}(x)$  tal que  $f \circ 1_x = f$  para toda  $f \in \mathcal{G}(x, y)$  y  $1_x \circ g = g$  para toda  $g \in \mathcal{G}(y, x)$ , cualquiera sea  $y \in Obj \mathcal{G}$ . (La flecha  $1_x$  es necesariamente única)
  - Admite inversos: para toda  $f \in \mathcal{G}(x, y)$  existe  $g \in \mathcal{G}(y, x)$  tal que  $g \circ f = 1_x$  y  $f \circ g = 1_y$ .

**Nota 3.2.2.** La anterior definición se puede abreviar diciendo que un grupoide es una categoría pequeña en la cual todos los morfismos son isomorfismos.

**Definición 3.2.3.** Sea  $\mathcal{G}$  un grupoide. Para cada  $x \in Obj \mathcal{G}$  el conjunto de flechas  $\mathcal{G}(x)$  resulta un grupo con la composición. Se llama *grupo en el objeto  $x$* .

Más en general, podemos restringir los objetos a un subconjunto  $X \subseteq Obj \mathcal{G}$  y quedarnos con las flechas entre esos objetos provistas de la ley de composición de  $\mathcal{G}$ . Obtenemos así el *subgrupoide pleno con objetos en  $X$*  que indicamos con  $\mathcal{G}|_X$ .

Hay una relación de equivalencia en  $Obj \mathcal{G}$  dada por  $x \approx y \Leftrightarrow \mathcal{G}(x, y) \neq \emptyset$ . Las clases de equivalencia se llaman *componentes conexas* del grupoide  $\mathcal{G}$ .

Veamos algunos ejemplos de grupoides:

**Ejemplo 3.2.4.** Analicemos los grupoides de pocos objetos y los de pocas flechas:

- Los grupoides con un único objeto son los grupos.
- Los grupoides que tienen a lo sumo una flecha de un objeto a otro son las relaciones de equivalencia en el conjunto de objetos. Un grupoide conexo con esta propiedad se dice simplemente conexo.

**Ejemplo 3.2.5.** Se define el *grupoide fundamental de un espacio topológico*  $X$ , notado  $\pi_1(X)$ , de la siguiente forma:

- $Obj \pi_1(X) = X$
- Dados  $x, x' \in X$ ,  $\pi_1(X)(x, x')$  es el conjunto de clases de caminos de  $x$  a  $x'$  módulo homotopía con extremos fijos.
- La composición es la inducida por la concatenación de caminos.

Para cada  $x$  la identidad esta dada por la clase del camino constante  $x$ . El inverso de la clase de un camino  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  es la clase del camino recorrido en sentido inverso  $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ .

Notemos que el grupo que se obtiene en cada punto  $x$  es el grupo fundamental usual  $\pi_1(X, x)$  y que las componentes de  $\pi_1(X)$  son las componentes arcoconexas del espacio  $X$ .

**Ejemplo 3.2.6.** En forma análoga al ejemplo anterior se define el *grupoide fundamental* de un complejo simplicial  $K$ :

- $Obj \pi_1(K) = V_K$
- Dados  $v, v' \in V_K$ ,  $\pi_1(K)(v, v')$  es el conjunto de clases de caminos de  $v$  a  $v'$  módulo la equivalencia de caminos de aristas.
- La composición es la inducida por la concatenación de caminos de aristas.

Para cada  $v$  la identidad es la clase del camino de aristas  $(v, v)$ . El inverso de la clase de un camino  $c = (v_0, \dots, v_n)$  es la clase del camino recorrido en sentido inverso  $c^{-1} = (v_n, \dots, v_0)$ .

El grupo que se obtiene en cada vértice  $v$  es el grupo de caminos de aristas  $\pi_1(K, v)$ . Las componentes de  $\pi_1(K)$  son los conjuntos de vértices correspondientes a las componentes de  $K$ .

**Ejemplo 3.2.7.** Dada una acción  $G \curvearrowright X$ , hay un *grupoide asociado a la acción* que se nota  $G \rtimes X$  y se define por:

- $Obj G \rtimes X = X$
- Dados  $x, x' \in X$ ,  $G \rtimes X(x, x') = \{g \in G : g.x = x'\}$ .
- La composición de flechas esta dada por la multiplicación del grupo.

En cada  $x$  se tiene como identidad a  $1 \in G \rtimes X(x)$ . El inverso de  $g \in G \rtimes X(x, x')$  es  $g^{-1} \in G \rtimes X(x', x)$ .

En este caso, el grupo que se obtiene en cada punto  $x$  es el correspondiente estabilizador de la acción  $G_x$  y las componentes del grupoide son las órbitas de la acción.

Estudiamos ahora los morfismos de grupoides:

**Definición 3.2.8.** Sean  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  dos grupoides. Un morfismo (o funtor)  $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  esta dado por:

1. Una función de conjuntos  $f : Obj \mathcal{G} \rightarrow Obj \mathcal{H}$ .
2. Para cada  $x, y \in Obj \mathcal{G}$  una función  $f_{xy} : \mathcal{G}(x, y) \rightarrow \mathcal{H}(f(x), f(y))$ . (es común escribir solo  $f$  y dar por entendidos  $x$  e  $y$  según las flechas a las que se aplica)

Además debe cumplirse  $f_{yz}(\beta) \circ f_{xy}(\alpha) = f_{xz}(\beta \circ \alpha)$  para todas  $\alpha \in \mathcal{G}(x, y)$ ,  $\beta \in \mathcal{G}(y, z)$ .



**Observación 3.2.9.** Con la composición natural entre morfismos obtenemos la categoría de los grupoides, notada **Grpd**. Todas las construcciones de grupoides que mostramos en los ejemplos son funtoriales.

Hasta aquí hemos introducido las nociones básicas de grupoides que necesitamos para estudiar los atlas de grupoides. Se puede continuar el estudio de los grupoides en [5] donde se desarrollan algunas similitudes con la teoría de grupos y otros aspectos ligados a la "dimensión espacial" como los revestimientos de grupoides. El lector interesado en las aplicaciones a la topología algebraica también puede consultar [3].

Ahora reformulamos la definición de acción global, reemplazando las acciones locales por sus grupoides asociados y los morfismos de acciones  $(\phi_\alpha^\beta, i_\alpha^\beta) : (G_\alpha \curvearrowright X_\alpha \cap X_\beta) \rightarrow (G_\beta \curvearrowright X_\beta)$  (mirar 3.1.11) por los correspondientes morfismos de grupoides.

**Definición 3.2.10.** Un atlas de grupoides  $A$  consiste de un conjunto  $X_A$  junto con una familia de grupoides con objetos en  $X_A$  y ciertos morfismos que los vinculan. Más precisamente  $A = (X_A, \phi_A, \{\mathcal{G}_\alpha\})$  donde

1.  $X_A$  es un conjunto.
2.  $\phi_A$  es un conjunto de índices dotado de una relación reflexiva
3. Para cada  $\alpha \in \phi_A$  hay un grupoide  $\mathcal{G}_\alpha$  con  $X_\alpha = \text{Obj } \mathcal{G}_\alpha \subseteq X_A$  de forma que  $X_A = \cup X_\alpha$ .
4. Si  $\alpha \leq \beta$  el conjunto  $X_\alpha \cap X_\beta$  es unión de componentes de  $\mathcal{G}_\alpha$  y hay un morfismo de grupoides  $\phi_\alpha^\beta : \mathcal{G}_\alpha|_{X_\alpha \cap X_\beta} \rightarrow \mathcal{G}_\beta|_{X_\beta}$  que es la inclusión en los objetos.

Pedimos además  $\phi_\alpha^\alpha = \text{id}_{\mathcal{G}_\alpha}$  y  $\phi_\alpha^\gamma = \phi_\beta^\gamma \circ \phi_\alpha^\beta$  en  $\mathcal{G}_\alpha|_{X_\alpha \cap X_\beta \cap X_\gamma}$  siempre que los tres morfismos estén definidos.

**Ejemplo 3.2.11.** Todo grupoide puede ser visto como un atlas de grupoides con conjunto de índices unitario.

**Ejemplo 3.2.12.** El ejemplo fundamental, que como ya explicamos, sugirió la definición, es el atlas de grupoides inducido por una acción global.

Por otro lado, es importante notar, que *no todo atlas de grupoides proviene de una acción global*. De hecho, no todo grupoide corresponde a una acción como se desprende de la siguiente observación.

**Observación 3.2.13.** Los grupoides tipo relación de equivalencia que pueden obtenerse a partir de una acción son aquellos en las cuales todas las componentes tienen igual cantidad de elementos.

En efecto, sería el caso de una acción con estabilizadores triviales, por la proposición 3.1.9 todas las órbitas resultan isomorfas a la acción del grupo sobre sí mismo por multiplicación a izquierda, en particular tienen igual cantidad de elementos.

Otros ejemplos provienen de las construcciones de grupoides que ya comentamos:

**Ejemplo 3.2.14.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{U}$  un cubrimiento por abiertos de  $X$ . El atlas de grupoides  $A(X, \mathcal{U})$  se define de la siguiente forma: el conjunto subyacente es  $X$  y el conjunto de índices es  $\mathcal{U}$  ordenado por la inclusión. Para cada  $U \in \mathcal{U}$ , el grupoide local  $\mathcal{G}_U$  es el grupoide fundamental  $\pi_1(U)$  y los morfismos  $\phi_U^V$  son los inducidos por las inclusiones.

**Ejemplo 3.2.15.** Sea  $X$  un conjunto provisto por una familia relaciones de equivalencia  $\mathcal{E} = \{\approx_\alpha\}$  en  $X$ . Podemos construir un atlas de grupoides  $A(X, \mathcal{E})$  con  $X$  como conjunto subyacente y grupoides locales dados por las relaciones de equivalencia de  $\mathcal{E}$ .

El conjunto de índices de este atlas es el correspondiente a  $\mathcal{E}$ . Las relaciones de equivalencia son subconjuntos de  $X \times X$  y por lo tanto se encuentran ordenadas por la inclusión. Respetando ese orden, declaramos  $\alpha \leq \beta$  si para todos  $x, y \in X$  se tiene  $x \approx_\alpha y \Rightarrow x \approx_\beta y$ . Para  $\alpha \leq \beta$  consideramos los morfismos de grupoides  $\phi_\alpha^\beta$  inducidos por la inclusión de relaciones.

Una ligera variante de estos atlas se obtiene al permitir que las relaciones de equivalencia estén definidas en subconjuntos de  $X$ .

Los atlas de relaciones son muy importantes, porque permiten estudiar la interacción entre diferentes relaciones de equivalencia, y además de esto, porque su comprensión permite entender la teoría débil de los demás atlas (3.2.16 y 3.2.19). Por estas razones, en el próximo capítulo nos dedicamos de lleno a su estudio.

**Observación 3.2.16.** Todo atlas de grupoides  $A = (X_A, \phi_A, \{\mathcal{G}_\alpha\})$  induce un atlas de relaciones de equivalencia  $A(X, \mathcal{E})$  haciendo  $X = X_A$  y considerando la familia de relaciones de equivalencia  $\mathcal{E}$  que surgen de identificar puntos en  $X$  según las componentes de cada grupoide local  $\mathcal{G}_\alpha$ .

Cuando pensamos una acción como grupoide vimos en 3.2.7 que las las componentes del grupoide son las órbitas. Con esto en mente recuperamos las tiras locales y por lo tanto los morfismos débiles:

**Definición 3.2.17.** Sea  $A$  un atlas de grupoides. Una *tira local* o más específicamente una  $\alpha$ -tira es un subconjunto finito de puntos  $x_0, \dots, x_n$  de una componente de algún grupoide local  $\mathcal{G}_\alpha$ .

**Definición 3.2.18.** Sean  $A$  y  $B$  atlas de grupoides. Un *morfismo débil*  $f : A \rightarrow B$  es una función de conjuntos  $f : X_A \rightarrow X_B$  que preserva tiras locales. Es decir, si  $x_0, \dots, x_n$  forman una tira local en  $A$  entonces  $f(x_0), \dots, f(x_n)$  forman una tira local en  $B$ .

**Proposición 3.2.19.** *Todo atlas de grupoides es isomorfo en forma débil al atlas de relaciones de equivalencia que induce.*

*Demostración.* Es inmediato, el isomorfismo débil está dado por la identidad en el conjunto subyacente.  $\square$

También podemos considerar morfismos fuertes:

**Definición 3.2.20.** Sean  $A$  y  $B$  atlas de grupoides. Un morfismo fuerte  $\eta : A \rightarrow B$  es una terna  $(\eta_\phi, \{\eta_\alpha\}, \eta_X)$  que satisface lo siguiente :

1.  $\eta_\phi : \phi_A \rightarrow \phi_B$  es una función de índices que preserva relaciones : si  $\alpha \leq \beta \Rightarrow \eta_\phi(\alpha) \leq \eta_\phi(\beta)$ .
2.  $\eta_X : X_A \rightarrow X_B$  es una función de conjuntos tal que  $\eta_X(X_\alpha^A) \subseteq X_{\eta_\phi(\alpha)}^B$  para cada  $\alpha \in \phi_A$ .
3. Para cada  $\alpha \in \phi_A$  hay un morfismo de grupoides  $\eta_\alpha : \mathcal{G}_\alpha^A \rightarrow \mathcal{G}_{\eta_\phi(\alpha)}^B$  que coincide con  $\eta_X$  en los objetos. También pedimos si  $\alpha \leq \beta$  que el siguiente cuadrado sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{G}_\alpha^A|_{X_\alpha \cap X_\beta} & \xrightarrow{\eta_\alpha} & \mathcal{G}_{\eta_\phi(\alpha)}^B|_{X_{\eta_\phi(\alpha)} \cap X_{\eta_\phi(\beta)}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{G}_\beta^A & \xrightarrow{\eta_\beta} & \mathcal{G}_{\eta_\phi(\beta)}^B
\end{array}$$

Donde las flechas verticales son los morfismos de estructura correspondientes a cada atlas de grupoides.

**Observación 3.2.21.** Los atlas de grupoides con los morfismos débiles o alternativamente con los morfismos fuertes dan lugar a dos categorías que notamos  $\mathbf{AtlGr}_D$  y  $\mathbf{AtlGr}$ .

Los morfismos de acciones globales inducen morfismos en los correspondientes atlas de grupoides. Por lo tanto se tienen funtores  $\mathbf{AccGl}_D \rightarrow \mathbf{AtlGr}_D$  y  $\mathbf{AccGl} \rightarrow \mathbf{AtlGr}$ .

Es sencillo comprobar que el primero de estos funtores es una *equivalencia categórica*. Para eso se construye una vuelta  $\mathbf{AtlGr}_D \rightarrow \mathbf{AccGl}_D$ . Este funtor le asigna a cada atlas una acción global que tiene el mismo conjunto subyacente y por cada  $\alpha \in \phi_A$  una acción local  $G_\alpha \curvearrowright X_\alpha$  cuyas orbitas coinciden con las componentes de  $\mathcal{G}_\alpha$ . Los morfismos débiles entre atlas dan lugar en forma inmediata a morfismos de acciones globales.

El siguiente ejemplo, muestra que los atlas de grupoides son más ricos en morfismos fuertes que las acciones globales. En particular, el segundo funtor  $\mathbf{AccGl} \rightarrow \mathbf{AtlGr}$  no es una equivalencia categórica (alternativamente recordar 3.2.12).

**Ejemplo 3.2.22.** Consideremos dos grupos finitos con ordenes coprimos  $G$  y  $H$  actuando sobre sí mismos por multiplicación a izquierda. A continuación pensamos estas acciones como acciones globales y luego como atlas de grupoides.

Según vimos, los morfismos fuertes como acciones globales son los morfismos de acciones y en este caso, en que  $G$  y  $H$  tienen ordenes coprimos, resultan constantes en cada órbita. Como la acción de  $G$  sobre sí mismo es transitiva, concluimos que los morfismos fuertes se corresponden con las *funciones constantes*  $G \rightarrow H$ .

Los morfismos fuertes como atlas de grupoides son los morfismos entre los grupoides asociados. Como la multiplicación de un grupo es cancelativa, estos grupoides resultan simplemente conexos. Es fácil ver que los morfismos entre grupoides simplemente conexos se corresponden con todas las posibles funciones de objetos, en nuestro caso, *todas las funciones*  $G \rightarrow H$ .

### 3.3. Complejos simpliciales e invariantes asociados

Los atlas de grupoides y en particular las acciones globales poseen una cierta dinámica: un punto en  $X_A$  se mueve "empujado" por las flechas de los diferentes grupoides locales (3.3.1).

Esta dinámica se compone de dos partes. Una dinámica local que tiene lugar en cada grupoide  $\mathcal{G}_\alpha$  y una dinámica global que surge de la interacción que se produce en las intersecciones entre los diferentes grupoides y en la cual intervienen los morfismos  $\phi_\alpha^\beta$ .

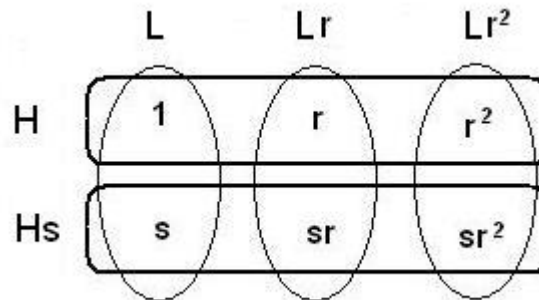
Se le asocia al atlas espacios de construcción combinatoria que codifican esta dinámica como información homotópica y nos permiten estudiarla haciendo uso de los invariantes usuales como el grupo fundamental o la homología.

Aquí mostramos los espacios que se consideran en [2]. Estos espacios son los complejos simpliciales  $V(A)$  y  $N(A)$  correspondientes al cubrimiento de  $X_A$  por componentes de los grupoides locales. Son adecuados para estudiar la dinámica de los atlas a nivel global.

Los invariantes asociados a estos complejos se conocen como invariantes débiles. Ese nombre se debe al hecho de que no registran la dinámica local como si lo hacen los llamados invariantes fuertes que se presentan en [6]. Dichos invariantes ya no provienen de complejos simpliciales sino de espacios combinatorios más sofisticados que se llaman conjuntos simpliciales.

**Ejemplo 3.3.1.** Analicemos la acción global/atlas de grupoides  $A(D_3, \mathcal{H})$  donde  $D_3$  es el grupo diedral de orden 6 y  $\mathcal{H}$  esta formada por los subgrupos  $H = \langle r \rangle$  y  $L = \langle s \rangle$ .

Las acciones de  $H$  y  $L$  dividen a los elementos de  $G$  en órbitas :



Notemos como surgen naturalmente caminos y ciclos. Por ejemplo, actuando en forma alternada con los elementos  $r \in H$  y  $s \in L$  obtenemos el ciclo:

$$1 \xrightarrow{r} r \xrightarrow{s} sr \xrightarrow{r} rsr = s \xrightarrow{s} 1$$

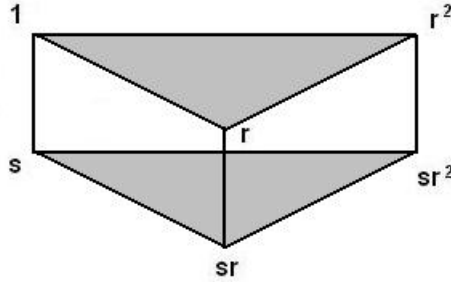
Veremos más adelante que estos ciclos guardan información muy valiosa acerca de la presentación del grupo.

En lo que sigue  $A$  es un atlas de grupoides.

**Definición 3.3.2.** Llamamos  $V(A)$  al complejo simplicial Vietoris correspondiente al cubrimiento de  $X_A$  por las componentes de los diferentes grupoides locales  $\mathcal{G}_\alpha$  con  $\alpha \in \phi_A$ . Es decir, al complejo simplicial cuyos vértices son los elementos de  $X_A$  y sus símlices las tiras locales.

**Ejemplo 3.3.3.** Para un atlas  $A$  formado por un único grupoide,  $V(A)$  es una unión disjunta de símplexes. Cada simplex tiene como vértices a los objetos que forman una componente del grupoide.

**Ejemplo 3.3.4.** Para el atlas  $A(D_3, \mathcal{H})$  del comienzo  $V(A)$  es:



Notemos que  $V(A)$  "luce de la misma forma mirado desde cualquier vértice". Más adelante, veremos que esto es siempre así para atlas de grupoides  $A(G, \mathcal{H})$ .

Dos vértices  $x, x' \in V(A)$  forman una arista  $(x, x')$  cuando hay una flecha  $x \rightarrow x'$  en algún grupoide local. Por lo tanto, los atlas de grupoides heredan del complejo simplicial  $V(A)$  la siguiente noción de camino:

**Definición 3.3.5.** Un camino (débil) en  $A$  es una sucesión finita de puntos  $(x_0, \dots, x_n)$  de  $X_A$  tal que para cada  $1 \leq i \leq n$  existe una flecha  $x_{i-1} \rightarrow x_i$  en algún grupoide local  $\mathcal{G}_\alpha$ .

**Definición 3.3.6.** Dos puntos  $x, x' \in X_A$  se encuentran en una misma componente arco-conexa si existe un camino débil de  $x$  a  $x'$ . Notamos el conjunto de las componentes arco-conexas de  $A$  con  $\pi_0(A)$ . Cuando  $A$  tiene una única componente arco-conexa decimos que es un atlas de grupoides arco-conexo.

**Observación 3.3.7.** Un camino débil registra la existencia de flechas entre los puntos consecutivos que recorre pero no incluye una elección particular de las mismas.

**Ejemplo 3.3.8.** Son ejemplos de caminos en el atlas  $A(D_3, \mathcal{H})$  las sucesiones  $(1, r, sr, s, 1)$  y  $(1, r, r^2)$ . La sucesión  $(1, s, r)$  no corresponde a un camino pues no existen elementos en ninguno de los subgrupos de  $\mathcal{H}$  cuya acción sobre  $s$  nos lleve a  $r$ .

Como se puede apreciar en el gráfico de  $V(A)$ , se trata de un atlas arco-conexo. La siguiente proposición nos dice que esto es una consecuencia de que los subgrupos de  $\mathcal{H}$  generan a  $D_3$ .

**Componentes arco-conexas de los distintos tipos de atlas**

**Proposición 3.3.9.** Sean  $G$  un grupo y  $\mathcal{H}$  una familia de subgrupos de  $G$ . Las componentes arco-conexas del atlas de grupoides  $A = A(G, \mathcal{H})$  son las co-classes a derecha del subgrupo generado  $\langle \mathcal{H} \rangle$ . En particular,  $A$  es arco-conexo sii la familia  $\mathcal{H}$  genera  $G$ .

*Demostración.* Sean  $x, x' \in X_A = G$ . Bastará probar que existe un camino de  $x$  a  $x'$  si y solo si  $x$  y  $x'$  están en una misma co-clase de  $\langle \mathcal{H} \rangle$ .

Supongamos que existe un tal camino  $x = x_0, \dots, x_n = x'$ . Entonces para cada  $1 \leq i \leq n$  hay un elemento  $g_i$  en algún subgrupo  $H_{\alpha_i} \in \mathcal{H}$  tal que  $x_i = g_i x_{i-1}$ . De modo que  $x' = g_n \dots g_1 x$ . Como  $g_n \dots g_1 \in \langle \mathcal{H} \rangle$  concluimos que  $x$  y  $x'$  se encuentran en una misma co-clase a derecha de ese subgrupo.

Recíprocamente, si  $x$  y  $x'$  se encuentran en una misma co-clase a derecha de  $\langle \mathcal{H} \rangle$  entonces  $x' = g_n \dots g_1 x$  para ciertos  $g_i$  elementos de subgrupos  $H_{\alpha_i} \in \mathcal{H}$ . Podemos construir un camino  $x = x_0, \dots, x_n = x'$  tomando  $x_i = g_i \dots g_1 x$ .  $\square$

Es fácil generalizar la proposición anterior a los atlas de grupoides  $A(G, \mathcal{H}) \curvearrowright X$ :

**Proposición 3.3.10.** *Sean  $G$  un grupo y  $\mathcal{H}$  una familia de subgrupos de  $G$ . Consideremos una acción  $G \curvearrowright X$ . Las componentes arco-conexas del atlas de grupoides  $A = A(G, \mathcal{H}) \curvearrowright X$  son las orbitas de la acción  $\langle \mathcal{H} \rangle \curvearrowright X$ . En particular,  $A$  es arco-conexo sii esa acción es transitiva.*

**Proposición 3.3.11.** *Sean  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{U}$  un cubrimiento por abiertos. Las componentes arco-conexas del atlas  $A(X, \mathcal{U})$  coinciden con las componentes arco-conexas de  $X$ .*

*Demostración.* Sean  $x, x' \in X_A = X$ . Supongamos que existe en el espacio  $X$  un camino  $\gamma$  de  $x$  a  $x'$ . Un argumento clásico con la compacidad del intervalo  $[0, 1]$  permite "descomponer"  $\gamma$  obteniendo puntos  $x = x_0, \dots, x_n = x'$  en  $X$  y caminos  $\gamma_i$  de  $x_{i-1}$  a  $x_i$  contenidos en abiertos  $U_{\alpha_i} \in \mathcal{U}$ . Entonces para cada  $1 \leq i \leq n$  existe una flecha  $x_{i-1} \rightarrow x_i$  en el grupoide local  $\pi_1(U_{\alpha_i})$  correspondiente a la clase del camino  $\gamma_i$ . Por lo tanto  $x = x_0, \dots, x_n = x'$  es un camino de  $x$  a  $x'$  en  $A(X, \mathcal{U})$ .

Recíprocamente, supongamos que existe un camino  $x = x_0, \dots, x_n = x'$  de  $x$  a  $x'$  en  $A(X, \mathcal{U})$ . Esto quiere decir que para cada  $1 \leq i \leq n$  los puntos  $x_{i-1}$  y  $x_i$  se encuentran en una misma componente de  $\pi_1(U_{\alpha_i})$  para algún abierto  $U_{\alpha_i} \in \mathcal{U}$ . Por lo tanto existen caminos  $\gamma_i$  de  $x_{i-1}$  a  $x_i$ . La concatenación  $\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_n$  es un camino de  $x$  a  $x'$  en el espacio  $X$ .  $\square$

Para la siguiente proposición recordamos el concepto de relación de equivalencia generada. Dada una familia  $\mathcal{E}$  de relaciones de equivalencia en un conjunto  $X$ , existe una mínima relación de equivalencia en  $X$  que las contiene a todas (como subconjuntos de  $X \times X$ ). Esta relación, que notaremos  $\approx_{\cup \mathcal{E}}$ , es la relación de equivalencia generada por la familia  $\mathcal{E}$  y concretamente esta dada por:

$x \approx_{\cup \mathcal{E}} x' \Leftrightarrow$  Existe una sucesión finita  $x = x_0, \dots, x_n = x'$  de elementos de  $X$  tal que para todo  $1 \leq i \leq n$  existe  $\approx_i \in \mathcal{E}$  con  $x_{i-1} \approx_i x_i$ .

**Proposición 3.3.12.** *Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{E}$  una familia de relaciones de equivalencia en el conjunto  $X$ . Entonces las componentes arco-conexas del atlas  $A = A(X, \mathcal{E})$  son las clases de la relación de equivalencia generada  $\approx_{\cup \mathcal{E}}$ .*

*Demostración.* Es inmediata teniendo en cuenta que la existencia de una flecha  $x \rightarrow x'$  en el grupoide correspondiente a una relación de equivalencia  $\approx \in \mathcal{E}$  es equivalente a  $x \approx x'$ .  $\square$

También podemos definir a partir de  $V(A)$  el grupo/grupoide fundamental de un atlas:

**Definición 3.3.13.** El grupo fundamental (débil) de  $A$  en el punto  $x \in X_A$  es  $\pi_1(V(A), x)$ , el grupoide fundamental es  $\pi_1(V(A))$ . Los notamos  $\pi_1(A, x)$  y  $\pi_1(A)$  respectivamente. (recordar 1.4.11 y 3.2.6)

**Ejemplo 3.3.14.** Para un atlas  $A$  formado por un único grupoide, dado que  $V(A)$  es unión disjunta de símlices, el grupo fundamental débil es trivial en cualquier punto.

**Ejemplo 3.3.15.** Para el atlas  $A(D_3, \mathcal{H})$  del comienzo, observando  $V(A)$ , se puede concluir que  $\pi_1(A, 1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ . Más adelante, veremos que el grupo fundamental de los  $A(G, \mathcal{H})$  esta vinculado a las relaciones algebraicas necesarias para recuperar el grupo  $G$  a partir de los subgrupos de la familia  $\mathcal{H}$ .

**Nota 3.3.16.** Los caminos, grupos y grupoide fundamental débiles también pueden presentarse utilizando morfismos débiles de atlas de grupoides como se hace en [2].

Para eso se considera un modelo de la recta dado por el atlas de grupoides  $L$  con

- $X_L = \mathbb{Z}$
- $\phi_L = \{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{n, n+1\} : n \in \mathbb{Z}\}$  ordenado por la inclusión.
- $\mathcal{G}_{\{n\}}$  y  $\mathcal{G}_{\{n, n+1\}}$  simplemente conexos con objetos  $n$  y  $\{n, n+1\}$  respectivamente.
- $\phi_n^{n, n+1}$  y  $\phi_{n+1}^{n, n+1}$  son las correspondientes inclusiones de grupoides.

Un camino débil es entonces un morfismo débil  $f : L \rightarrow A$  que se estabiliza para valores grandes de  $n$ , es decir, existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $f(n) = f(n+1)$  cuando  $|n| > M$ .

Se define naturalmente el producto de dos atlas de grupoides y esto permite considerar morfismos débiles  $h : L \times L \rightarrow A$ . Con una condición de estabilización apropiada, estos morfismos juegan el rol de homotopías de caminos.

Los grupos/grupoide fundamentales se obtienen en la forma usual como las clases de caminos débiles módulo homotopía junto con la operación inducida por la concatenación.

**Definición 3.3.17.** El *complejo singular (débil)*  $(C_*(A), \partial)$  es el correspondiente a  $V(A)$ . Notamos los correspondientes grupos de homología  $H_n(A)$ . (recordar 1.5.3 y 1.5.5).

**Observación 3.3.18.** La construcción del complejo de Vietoris  $V(A)$  es funtorial. Esto es inmediato dado que las tiras locales de  $A$  corresponden a los símlices de  $V(A)$  y por lo tanto los morfismos débiles  $A \rightarrow B$  son morfismos simpliciales  $V(A) \rightarrow V(B)$ .

De hecho, el funtor  $V : \mathbf{AtlGrpd}_D \rightarrow \mathbf{CS}$  es una *equivalencia categórica*. Se construye una vuelta  $\mathbf{CS} \rightarrow \mathbf{AtlGrpd}_D$  asignándole a cada complejo simplicial  $K$  un atlas de grupoides  $A(K)$ . Donde  $A(K)$  tiene  $X_A = V_K$ ,  $\phi_A = S_K$  ordenado por inclusión y por cada simplex  $s$  un grupoide local simplemente conexo  $\mathcal{G}_s$  con  $Obj \mathcal{G}_s = s$ . Los morfismos simpliciales son automáticamente morfismos débiles entre los correspondientes atlas.

**Definición 3.3.19.** Llamamos  $N(A)$  al complejo simplicial nervio correspondiente al cubrimiento de  $X_A$  por las componentes de los diferentes grupoides locales  $\mathcal{G}_\alpha$  con  $\alpha \in \phi_A$ .

Concretamente, los vértices de  $N(A)$  son las componentes de los diferentes grupoides locales y los símlices consisten en conjuntos de esas componentes  $\{C_0, \dots, C_n\}$  con  $\cap C_i \neq \emptyset$ .

**Observación 3.3.20.** Sea  $A$  un atlas de grupoides con  $\#\phi_A = n$  entonces  $\dim N(A) \leq n - 1$ . Esto se debe a que las componentes de cada grupoide local son disjuntas dos a dos y por lo tanto un simplex de  $N(A)$  tiene a lo sumo  $n$  vértices. En caso de que  $A$  sea *simple*, es decir  $X_\alpha = X_A$  para todo  $\alpha \in \phi_A$ , resulta  $\dim N(A) = n - 1$ .

**Observación 3.3.21.** Como ya sabemos por el teorema de Dowker (2.1.22),  $|V(A)| \approx |N(A)|$  y por lo tanto  $N(A)$  nos suministra la misma información homotópica que  $V(A)$ . En particular:

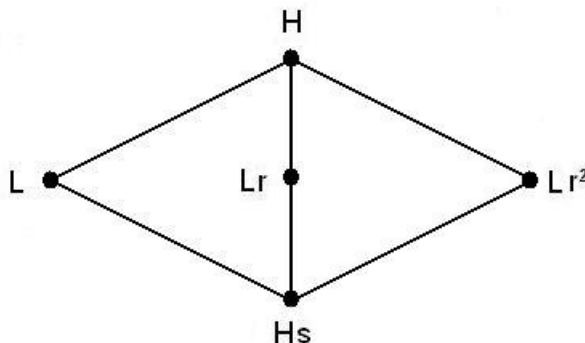
- Si  $x \in X_A$  y  $c(x)$  es una componente de algún grupoide local de  $A$  que contiene a  $x$  resulta  $\pi_1(A, x) = \pi_1(N(A), c(x))$ .
- Los grupoides fundamentales  $\pi_1(A)$  y  $\pi_1(N(A))$  resultan equivalentes como categorías.
- Los grupos de homología débil de  $A$  coinciden con los grupos de homología de  $N(A)$ .

Podemos pensar  $N(A)$  como un “diagrama de intersecciones” entre las componentes de los grupoides locales y así concluir que los invariantes débiles registran solo esa información “global”.

**Ejemplo 3.3.22.** Veamos dos casos sencillos:

- Si el atlas  $A$  esta formado por un único grupoide  $\mathcal{G}$  entonces  $N(A)$  es discreto con un punto por cada componente de  $\mathcal{G}$ .
- Si el  $A$  es simple y de grupoides locales conexos entonces  $N(A) = \Delta^n$  donde  $n = \#\phi_A - 1$ .

**Ejemplo 3.3.23.** Para el atlas  $A(D_3, \mathcal{H})$  el complejo  $N(A)$  es el siguiente “diagrama de intersección de co-classes” :



Notemos que es bastante más simple que  $V(A)$  y que también nos permite obtener  $\pi_1 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

**Ejemplo 3.3.24.** Consideremos los atlas  $A(X, \mathcal{U})$  correspondientes a los cubrimientos de  $S^1$  que vimos en los ejemplos 2.2.1 y 2.2.6. Sus nervios, dado que los abiertos son arco-conexos, son los vistos entonces:  $\partial\Delta^2$  y  $\Delta^1$  respectivamente.

**Proposición 3.3.25.** Consideremos un atlas de grupoides  $A = A(X, \mathcal{U})$  correspondiente a un espacio  $X$  con un cubrimiento por abiertos arco-conexos  $\mathcal{U}$ .

Sea  $x \in X$  y tomemos un abierto  $U_x \in \mathcal{U}$  que contiene a  $x$  entonces se tiene la igualdad  $\pi_1(A, x) = \pi_1(N\mathcal{U}, U_x)$ .

Si además  $\mathcal{U}$  es puntualmente finito y sus intersecciones son homotópicamente triviales resulta  $\pi_1(A, x) = \pi_1(X, x)$ .

*Demostración.* Como los abiertos de  $\mathcal{U}$  son arco-conexos, el cubrimiento dado por las componentes de sus grupoides fundamentales es el mismo  $\mathcal{U}$ . Entonces resulta  $N(A) = N(\mathcal{U})$  y en particular, en vista de la observación,  $\pi_1(A, x) = \pi_1(N\mathcal{U}, U_x)$ . Cuando el cubrimiento  $\mathcal{U}$  cumple los requisitos adicionales, por el teorema de McCord (2.2.10), los espacios  $X$  y  $N\mathcal{U}$  son débilmente equivalentes. De modo que  $\pi_1(N\mathcal{U}, U_x) = \pi_1(X, x)$ .  $\square$



**Nota 3.3.26.** La proposición anterior es una muestra de que los invariantes débiles solo responden a la dinámica global. Nos permiten recuperar la información del atlas en forma completa, en este caso el grupo fundamental de  $X$ , sólo cuando la dinámica local es trivial.

En el próximo capítulo analizaremos los nervios provenientes de los atlas de relaciones. Daremos nuevos ejemplos y mostraremos que su geometría tiene características particulares.

Finalizamos con algunos resultados que nos dicen como influye la cantidad de grupoides del atlas en sus invariantes débiles:

**Proposición 3.3.27.** *Sea  $A$  un atlas de grupoides entonces:*

- Cuando  $\#\phi_A = 1$  los grupos fundamentales débiles son triviales.
- Cuando  $\#\phi_A = 2$  los grupos fundamentales débiles son libres.

*Demostración.* Ambos resultados pueden deducirse estudiando los grupos fundamentales de  $N(A)$ . Cuando  $n = 1$   $N(A)$  es un conjunto discreto de puntos y para  $n = 2$  es un grafo. (Es sabido que el grupo fundamental de un grafo es libre, consultar por ejemplo [10]).

Notemos que el caso  $n = 1$  también se puede probar con  $V(A)$  (ejemplo 3.3.3), no es así para el caso  $n = 2$ . □

**Proposición 3.3.28.** *Sea  $A$  un atlas de grupoides con  $\#\phi_A = n$  entonces la homología cumple  $H_k(A) = 0$  para todo  $k \geq n$ .*

*Demostración.* La homología de  $N(A)$  satisface esa condición porque  $\dim N(A) \leq n - 1$  y coincide con la homología débil de  $A$ . □

**Observación 3.3.29.** *La construcción del complejo Nervio  $N(A)$  no es funtorial.* Es decir, no proviene de un funtor  $N : \mathbf{AtlGrpd}_D \rightarrow \mathbf{CS}$ .

En efecto, si existiera un tal funtor entonces atlas de grupoides débilmente isomorfos tendrían nervios isomorfos. A continuación mostramos con un ejemplo que esto no sucede en general.

Sea  $\mathcal{G}_{\{0,1\}}$  un grupoide con objetos  $\{0, 1\}$  y sea  $\mathcal{G}_{\{0\}}$  otro grupoide con 0 de único objeto. Consideremos un atlas  $A$  que consiste en un único grupoide  $\mathcal{G}_{\{0,1\}}$  y otro atlas  $B$  definido a partir de los dos grupoides  $\mathcal{G}_{\{0,1\}}$  y  $\mathcal{G}_{\{0\}}$ . La identidad de  $\{0, 1\}$  es un isomorfismo débil  $A \approx B$ .

Por otro lado  $N(A)$  resulta ser "un punto" y  $N(B)$  es "un segmento" que no son complejos simpliciales isomorfos.



## Capítulo 4

# Atlas de relaciones de equivalencia

Este capítulo trata sobre los atlas de grupoides  $A(X, \mathcal{E})$ , donde  $\mathcal{E}$  es una familia de relaciones de equivalencia en un conjunto  $X$ . Nos proponemos aquí estudiar la forma en que “interactúan” las distintas relaciones desde un punto de vista homotópico, utilizando los complejos simpliciales e invariantes introducidos en el capítulo anterior.

En la primer sección de este capítulo estudiamos los caminos y las relaciones que induce entre ellos la familia  $\mathcal{E}$ . Mostramos que estas relaciones están vinculadas a la homotopía de caminos en  $V(A)$  y en particular se manifiestan en el grupoide fundamental  $\pi_1(A(X, \mathcal{E}))$ . También observamos que permiten construir nuevos atlas de caminos.

En la segunda y tercer sección hacemos un análisis del nervio  $N(A)$ . Pasamos a trabajar con familias  $\mathcal{E}$  formadas por un número finito  $n$  de relaciones y probamos que en esa situación  $N(A)$  es  $n$ -partito y  $n - 1$ -homogéneo. Analizamos en particular el caso en el cual  $N(A)$  está completo: veremos cual es el significado en términos de las relaciones de  $\mathcal{E}$  y ofrecemos una caracterización del tipo homotópico correspondiente.

En la cuarta sección de este capítulo nos concentramos en el caso particular de dos relaciones. Damos una fórmula para el rango del grupo de homología débil  $H_1(A)$  en términos de cantidades de clases y derivamos a partir de ella las acotaciones:

$$\#X/\approx_1 + \#X/\approx_2 \leq \#X/\approx_{\cup\mathcal{E}} + \#X/\approx_{\cap\mathcal{E}} \leq \#X/\approx_1 \cdot \#X/\approx_2 + 1$$

Revisamos los dos casos “extremos” en los que vale alguna de las igualdades y en conexión con el caso inferior tratamos las relaciones localmente comparables.

En la quinta y última sección nos dedicamos al estudio de los complejos simpliciales empleando atlas de relaciones. Caracterizamos aquí los complejos simpliciales que se pueden obtener como vektoris de una cantidad  $n$  de relaciones e investigamos cuales son las propiedades que tienen.

## 4.1. Caminos débiles y el grupoide fundamental

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{E} = \{\approx_\alpha\}$  una familia de relaciones de equivalencia en  $X$ . Recordemos que el atlas de grupoides  $A(X, \mathcal{E})$  tiene como conjunto subyacente a  $X$  y sus grupoides locales están dados por las relaciones de equivalencia  $\approx_\alpha$  (3.2.15).

Comenzamos analizando el significado de los caminos débiles y las tiras locales para este tipo particular de atlas:

- Los *caminos* corresponden a formas de relacionar dos elementos de  $X$  empleando alternadamente las diferentes relaciones de  $\mathcal{E}$ . Más precisamente:

Son sucesiones finitas  $(x_0, \dots, x_n)$  de elementos en  $X$  tales que para todo  $1 \leq i \leq n$  existe una relación de equivalencia  $\approx_i \in \mathcal{E}$  con  $x_{i-1} \approx_i x_i$ .

Notaremos al conjunto de los caminos débiles con  $\mathcal{C}(X, \mathcal{E})$ , cuando queramos aclarar el punto inicial y final de los mismos escribiremos  $\mathcal{C}(X, \mathcal{E})(x, y)$ .

- Las *tiras locales* corresponden a formas de relacionar dos elementos empleando una única relación:

Son sucesiones finitas  $(x_0, \dots, x_n)$  de elementos en  $X$  tales que existe una relación de equivalencia  $\approx \in \mathcal{E}$  con  $x_{i-1} \approx x_i$  para todo  $i$ .

Como ya vimos en el capítulo anterior  $\pi_0(A(X, \mathcal{E})) = X / \approx_{\cup \mathcal{E}}$ . Es decir, las componentes arco-conexas  $\pi_0(A(X, \mathcal{E}))$  nos permiten saber que pares de elementos se pueden relacionar entre sí por medio de  $\mathcal{E}$ .

Ahora bien, dos familias de relaciones de equivalencia muy diferentes pueden dar lugar a la misma relación de equivalencia generada. De modo que un estudio completo de la "interacción" entre relaciones no puede darse por terminado al conocer si un par de elementos de  $X$  se logran relacionar entre sí. Tiene interés estudiar los caminos, que como vimos, son las distintas formas en que estos pares de elementos se relacionan. En particular, nos interesan ciertas relaciones de equivalencia que surgen naturalmente entre ellos:

**Observación 4.1.1.** Cada relación  $\approx \in \mathcal{E}$  induce una relación de equivalencia  $\approx^*$  en el conjunto de caminos  $\mathcal{C}(X, \mathcal{E})$  que consiste esencialmente en identificar entre sí las  $\approx$ -tiras locales.

Más precisamente, llamamos  $\approx^*$  a la menor relación de equivalencia compatible con concatenación que satisface  $c \approx^* c'$  para todas  $c, c'$   $\approx$ -tiras locales con  $orig(c) = orig(c')$  y  $fin(c) = fin(c')$ .

No es evidente que la relación de equivalencia  $\approx^*$  exista, debemos probarlo:

**Proposición 4.1.2.** Sea  $\approx \in \mathcal{E}$  entonces la relación de equivalencia  $\approx^*$  en el conjunto de caminos  $\mathcal{C}(X, \mathcal{E})$  efectivamente existe y podemos exhibirla concretamente. Para eso, consideremos la relación auxiliar  $\leq$  dada por:

$\alpha \leq \beta$  cuando son de la forma  $\alpha = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  y  $\beta = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  para algún  $0 < i < n$  y además  $x_{i-1} \approx x_i \approx x_{i+1}$ .

Tenemos entonces:

$\alpha \approx^* \beta \Leftrightarrow$  existe una sucesión  $\alpha = \alpha_0, \dots, \alpha_n = \beta$  tal que para todo  $1 \leq i \leq n$   $\alpha_{i-1} \leq \alpha_i$  ó  $\alpha_i \leq \alpha_{i-1}$ .

*Demostración.* En efecto, definida según el enunciado,  $\approx^*$  verifica:

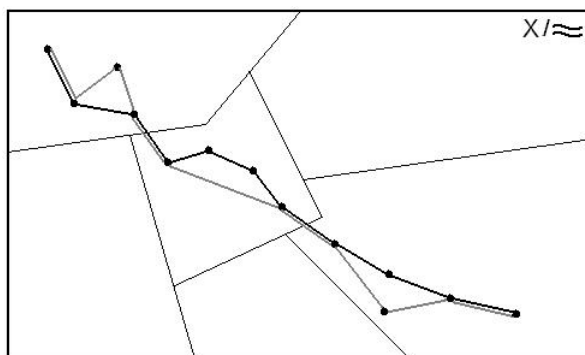
- Es relación de equivalencia, de hecho, es la relación de equivalencia generada por  $\leq$ . Resulta compatible con concatenación porque  $\leq$  evidentemente lo es.
- Toda relación del equivalencia  $\sim$  en  $\mathcal{C}(X, \mathcal{E})$  compatible con concatenación que hace la identificación de  $\approx$ -tiras locales cumple  $\approx^* \subseteq \sim$ :

En efecto, supongamos primero que  $\alpha \leq \beta$  entonces las tiras locales  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$  y  $(x_{i-1}, x_{i+1})$  quedan indentificadas por  $\sim$ . Como además  $\sim$  es compatible con concatenación tenemos  $\alpha \sim \beta$ .

Si  $\alpha \approx^* \beta$  entonces existe una sucesión  $\alpha = \alpha_0, \dots, \alpha_n = \beta$  tal que para todo  $1 \leq i \leq n$   $\alpha_{i-1} \leq \alpha_i$  ó  $\alpha_i \leq \alpha_{i-1}$ . Según vimos entonces  $\alpha_{i-1} \sim \alpha_i$  para todo  $i$  y por transitividad resulta  $\alpha \sim \beta$  como necesitábamos. □

**Observación 4.1.3.** Si  $\alpha \approx^* \beta$  entonces  $\alpha$  y  $\beta$  tienen un mismo elemento inicial y final en  $X$ .

**Observación 4.1.4.** En la proposición anterior se puede observar la similitud entre la relación  $\approx^*$  y la relación de homotopía usual entre los caminos de  $V(A)$  (1.4.5). Podemos pensar a la relación  $\approx^*$  como una relación de “ $\approx$ -homotopía” entre caminos que permite deformaciones dentro de las clases de equivalencia  $X/\approx$ , es decir, homotopías de caminos que solo involucran a los símlices de  $V(A)$  que esas clases determinan:



Tenemos entonces una nueva familia de relaciones de equivalencia  $\mathcal{E}^* = \{\approx^* : \approx \in \mathcal{E}\}$  en  $\mathcal{C}(X, \mathcal{E})$ . Estas relaciones se manifiestan en el grupoide fundamental del atlas  $A(X, \mathcal{E})$ :

**Proposición 4.1.5.** Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{E}$  una familia de relaciones de equivalencia en  $X$ . Entonces para  $x, y \in X$  las flechas del grupoide fundamental están dadas por:

$$\pi_1 A(X, \mathcal{E})(x, y) = \mathcal{C}(X, \mathcal{E})(x, y) / \approx_{\cup \mathcal{E}^*}$$

*Demostración.* Los caminos en  $V(A)$  son los caminos en  $A$ , resta ver que la homotopía de caminos en  $V(A)$  esta dada por  $\approx_{\cup \mathcal{E}^*}$ .

En efecto, sea  $\approx \in \mathcal{E}$ . Como recién comentamos, cuando dos caminos  $\alpha$  y  $\beta$  satisfacen  $\alpha \approx^* \beta$  quiere decir que hay una homotopía entre ambos que solo involucra símlices contenidos en clases de equivalencia de  $\approx$ . Los símlices de  $V(A)$  por definición están contenidos en las clases de equivalencia de las distintas relaciones de  $\mathcal{E}$ . Por lo tanto, cualquier homotopía de caminos

se puede expresar como una concatenación de  $\approx$ -homotopías con  $\approx \in \mathcal{E}$ . Concluimos así que la relación de homotopía usual de caminos coincide con  $\approx_{\cup \mathcal{E}}$ .  $\square$

Obtuvimos un nuevo atlas de relaciones de equivalencia  $A(\mathcal{C}(X, \mathcal{E}), \mathcal{E}^*)$ . Restringiendo las relaciones también podemos considerar para cada par  $x, y \in X$  el atlas  $A(\mathcal{C}(X, \mathcal{E})(x, y), \mathcal{E}^*)$ . Este último mantiene una importante relación con el atlas original:

**Corolario 4.1.6.** *Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{E}$  una familia de relaciones de equivalencia en  $X$ . Entonces para todo par de elementos  $x, y \in X$  es*

$$\pi_1 A(X, \mathcal{E})(x, y) = \pi_0 A(\mathcal{C}(X, \mathcal{E})(x, y), \mathcal{E}^*)$$

*Demostración.* Basta recordar que el  $\pi_0$  de un atlas de relaciones esta dado por las clases de equivalencia correspondientes a la relación generada.  $\square$

## 4.2. El punto de vista del nervio

El análisis que hicimos del atlas  $A(X, \mathcal{E})$  en la sección anterior se apoyo principalmente en el complejo simplicial  $V(A)$ : la noción central fue la de camino débil en  $A$  que corresponde a un camino en este complejo. Ese enfoque nos permitió estudiar aspectos de la interacción entre relaciones vinculados a la relación generada  $\approx_{\cup \mathcal{E}}$ .

En esta sección, cambiamos el punto de vista, nos concentramos en el complejo simplicial  $N(A)$ . A través del mismo podremos estudiar la relación de equivalencia intersección:

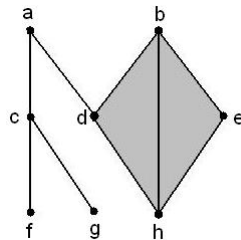
**Definición 4.2.1.** *Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{E}$  una familia de relaciones de equivalencia en  $X$ . La relación de equivalencia intersección  $\approx_{\cap \mathcal{E}}$  se define para  $x, y \in X$  por:*

$$x \approx_{\cap \mathcal{E}} y \Leftrightarrow x \approx y \text{ para toda } \approx \in \mathcal{E}$$

El complejo simplicial  $N(A)$  tiene características muy particulares, las siguientes definiciones nos permitirán describirlas:

**Definición 4.2.2.** Un complejo simplicial  $K$  se dice *n-partito* si existe una partición de su conjunto de vértices  $V_K = V_1 \amalg \dots \amalg V_n$  tal que cada simplex  $s \in S_K$  tiene a lo sumo un vértice en cada  $V_i$ .

**Ejemplo 4.2.3.** Un complejo simplicial 3-partito en la forma  $V_K = \{a, b\} \amalg \{c, d, e\} \amalg \{f, g, h\}$



**Definición 4.2.4.** Un complejo simplicial  $K$  con  $\dim K = n$  se dice *homogéneo* si para todo simplex  $s \in S_K$  existe un  $n$ -simplex  $t \in S_K$  tal que  $s \subseteq t$ .

**Observación 4.2.5.** Los complejos simpliciales homogéneos se pueden pensar alternativamente como aquellos que son unión de subcomplejos  $n$ -simplices para algún  $n$ .

**Ejemplo 4.2.6.** El  $n$ -simplex  $\Delta^n$  y su borde  $\partial\Delta^n$  son homogéneos. El complejo simplicial del ejemplo anterior 4.2.3 no es homogéneo porque existen varios 1-simplices que no se encuentran contenidos en ningún 2-simplex.

**Proposición 4.2.7.** Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{E} = \{\approx_1, \dots, \approx_n\}$  una familia de relaciones de equivalencia en  $X$ .

Entonces el complejo simplicial nervio  $N(A(X, \mathcal{E}))$  verifica :

- Sus vértices son las clases de equivalencia de las diferentes relaciones de  $\mathcal{E}$ . Resulta  $n$  -partito en la forma  $V_N = X/\approx_1 \amalg \dots \amalg X/\approx_n$ .
- Es homogéneo con  $\dim N(A) = n - 1$ . Sus simplices de dimensión  $n - 1$  se corresponden con las clases de equivalencia de la relación intersección  $\approx_{\cap\mathcal{E}}$ .

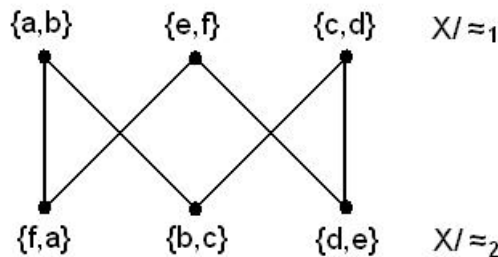
*Demostración.* Los vértices son las clases de equivalencia porque esas son las componentes de los grupoides correspondientes a cada relación  $\approx \in \mathcal{E}$ . Sea  $\{C_1, \dots, C_k\}$  un simplex de  $N(A)$  entonces  $\cap_{i=1}^k C_i \neq \emptyset$ . Las clases de una relación dada son disjuntas dos a dos por lo tanto el simplex tiene a lo sumo un vértice en cada cociente como queríamos ver.

Veamos ahora que es homogéneo con dimensión  $n - 1$ . En efecto, sea  $s = \{C_1, \dots, C_k\} \in S_N$ , como  $\cap_{i=1}^k C_i \neq \emptyset$  podemos tomar  $x \in \cap_{i=1}^k C_i$ . El elemento  $x$  se encuentra en una clase de equivalencia de cada relación. Como son  $n$  relaciones, podemos agregar las clases faltantes en  $s$  y así obtener un simplex  $t = \{C_1, \dots, C_n\}$ . Tenemos por lo tanto  $s \subseteq t$  donde  $t$  es un  $n - 1$  -simplex.

Por último observemos que hay una correspondencia evidente entre  $n - 1$  - simplices y clases de equivalencia de la relación intersección  $\approx_{\cap\mathcal{E}}: \{C_1, \dots, C_n\} \leftrightarrow \cap_{i=1}^n C_i$ . □

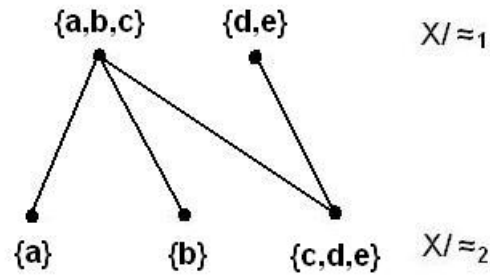
A continuación consideramos algunos ejemplos en los cuales se tiene un conjunto  $X$  provisto de una familia  $\mathcal{E}$  de dos relaciones de equivalencia. En esta situación  $N(A)$  es un grafo bipartito:

**Ejemplo 4.2.8.**  $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $X/\approx_1 = \{\{a, b\}; \{c, d\}; \{e, f\}\}$  y  $X/\approx_2 = \{\{b, c\}; \{d, e\}; \{f, a\}\}$ .



Las 6 aristas corresponden a las clases de  $X/\approx_1 \cap \approx_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\}$ .

**Ejemplo 4.2.9.**  $X = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $X/\approx_1 = \{\{a, b, c\}; \{d, e\}\}$  y  $X/\approx_2 = \{\{a\}; \{b\}; \{c, d, e\}\}$ .



Las 4 aristas corresponden a las clases de  $X/\approx_1 \cap \approx_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$ .

### 4.3. Teorema chino para relaciones y el tipo homotópico completo

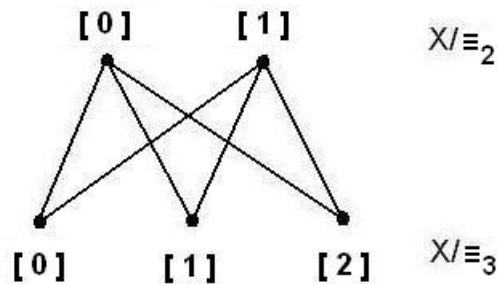
**Ejemplo 4.3.1.** Sea  $X = \mathbb{Z}$  con las relaciones de equivalencia congruencia módulo 2  $\equiv_2$  y congruencia módulo 3  $\equiv_3$ .

El teorema chino del resto, dado que 2 y 3 son coprimos, nos asegura que los sistemas de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv_2 i \\ x \equiv_3 j \end{cases}$$

con  $i = 0, 1$  y  $j = 0, 1, 2$  tienen solución.

Si notamos con  $[i]_2$  la clase módulo 2 de  $i$  y  $[j]_3$  la clase módulo 3 de  $j$ , lo anterior es equivalente a decir que  $[i]_2 \cap [j]_3 \neq \emptyset$ . Por lo tanto el grafo bipartito está completo: tiene las 6 aristas correspondientes a todas las posibles intersecciones entre clases mód 2 y clases mód 3.



Por otro lado, es fácil ver que  $\equiv_2 \cap \equiv_3 = \text{congruencia módulo } 6$  y por lo tanto las aristas se corresponden con las clases de enteros módulo 6.

La siguiente proposición, de demostración inmediata, captura la situación de este último ejemplo:



### 4.3. TEOREMA CHINO PARA RELACIONES Y EL TIPO HOMOTÓPICO COMPLETO 49

**Proposición 4.3.2.** Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{E} = \{\approx_1, \dots, \approx_n\}$  una familia de relaciones de equivalencia en  $X$ . Entonces son equivalentes :

1. Para toda elección de clases  $C_i \in X/\approx_i$   $i = 1, \dots, n$  se tiene  $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ .
2. Se cumple "la propiedad del teorema chino del resto", es decir, para toda elección de  $x_i \in X$   $i = 1, \dots, n$  existe una solución  $x$  al sistema :

$$\begin{cases} x \approx_1 x_1 \\ \dots \\ x \approx_n x_n \end{cases}$$

3. El nervio del atlas  $N(A(X, \mathcal{E}))$  es el complejo simplicial  $n$ -partito completo con vértices en  $X/\approx_1 \amalg \dots \amalg X/\approx_n$ . Esto quiere decir  $N = X/\approx_1 * \dots * X/\approx_n$  donde pensamos a los  $X/\approx_i$  como complejos simpliciales discretos.

**Definición 4.3.3.** Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{E}$  una colección de relaciones de equivalencia en  $X$ . Decimos que el par  $(X, \mathcal{E})$  es *completo* cuando se encuentra en las condiciones de la proposición anterior.

**Ejemplo 4.3.4.** Generalicemos el ejemplo anterior. Sea  $\{n_1, \dots, n_k\} \subseteq \mathbb{Z}$  un subconjunto de números con  $\text{mcd}(n_i : n_j) = 1$  para todos  $i \neq j$ . Podemos considerar la familia de congruencias en  $\mathbb{Z}$  correspondiente  $\mathcal{E} = \{\equiv_{n_i} : 1 \leq i \leq k\}$ . Como consecuencia del teorema chino del resto, el par  $(\mathbb{Z}, \mathcal{E})$  es completo.

**Ejemplo 4.3.5.** Sea  $X = A_1 \times \dots \times A_n$  con  $A_i$  conjuntos arbitrarios y  $n \in \mathbb{N}$ . Consideremos para cada  $1 \leq i \leq n$  la relación de equivalencia  $x \approx_i y \Leftrightarrow x_i = y_i$ . Entonces  $(X, \{\approx_i\})$  es completo.

En lo que sigue nos proponemos caracterizar el **tipo homotópico del nervio para un par  $(X, \mathcal{E})$  completo**. Trabajaremos en esta parte con dos hipótesis de finitud:  $\mathcal{E}$  es finito con  $\mathcal{E} = \{\approx_1, \dots, \approx_n\}$  y los cocientes  $X/\approx_i$  son finitos para todo  $i$  con  $\#X/\approx_i = k_i$ .

Por lo tanto, salvo por el nombre de los vértices, el nervio es  $N = I_{k_1} * \dots * I_{k_n}$  donde notamos con  $I_k$  al complejo simplicial discreto con  $k$  vértices. Nuestro objetivo es probar:

**Teorema 4.3.6.**  $I_{k_1} * \dots * I_{k_n}$  tiene el tipo homotópico de la unión por un punto de  $(k_1 - 1) \dots (k_n - 1)$  esferas de dimensión  $n-1$ .

Para demostrar el teorema vamos a hacer uso de la siguiente proposición clásica cuya demostración puede consultarse en [11] en el contexto más general de CW-complejos:

**Proposición 4.3.7.** Sean  $K$  un complejo simplicial,  $L$  un subcomplejo contráctil de  $K$  y  $v$  un vértice de  $L$ .

Entonces hay una equivalencia homotópica punteada:

$$\left(\frac{|K|}{|L|}, *\right) \approx (|K|, v)$$

Donde  $*$  indica a  $|L|$  colapsado a un punto.

Obtuvimos dos demostraciones diferentes del teorema:

Primera demostración

Comienza con un lema que corresponde al caso particular donde  $k_i = 2$  para todo  $i$ .

**Lema 4.3.8.** *Hay un homeomorfismo  $\underbrace{S^0 * \dots * S^0}_n = S^{n-1}$ .*

*Demostración.* Llamemos  $E_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_i = 1\}$  para  $i = 1, 2$ . Donde  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$  son las correspondientes normas 1 y 2 usuales en  $\mathbb{R}^n$ .

Hay un homeomorfismo  $S^0 * \dots * S^0 = E_1$  dado por la aplicación lineal que envía los vértices  $\pm 1$  de la copia  $i$ -ésima de  $S^0$  a  $\pm e_i \in \mathbb{R}^n$ . Por otro lado  $S^{n-1} = E_2$ .

Las funciones continuas "de normalización"  $f_{ij} : E_i \rightarrow E_j$   $x \mapsto x / \|x\|_j$  con  $(i, j) = (1, 2)$  y  $(2, 1)$  son biyecciones recíprocas. Luego  $E_1 = E_2$ . □

**Nota 4.3.9.** En lo que resta de la demostración trabajamos con complejos simpliciales que tienen un vértice distinguido.

Supongamos que tenemos dos de ellos  $K$  y  $L$  con correspondientes vértices  $v$  y  $w$ . Elegiremos como vértice distinguido para el join  $K * L$  a  $v$  o  $w$  según convenga.

Desde el punto de vista homotópico, ambas elecciones son equivalentes. En efecto, si indicamos con  $\overline{kl}$  al segmento que une ambos vértices, en virtud de la proposición 4.3.7 hay equivalencias homotópicas punteadas:

$$(|K * L|, k) \approx \left( \frac{|K * L|}{|\overline{kl}|}, * \right) \approx (|K * L|, l)$$

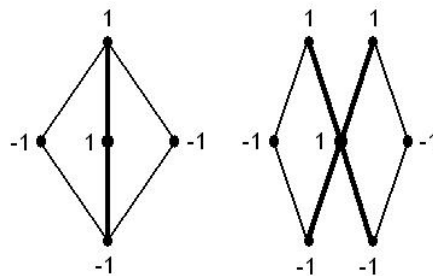
El otro ingrediente de esta demostración es una interesante ley distributiva:

**Proposición 4.3.10.** *Sean  $K_1, K_2$  y  $L$  complejos simpliciales con vértice distinguido entonces hay una equivalencia homotópica de espacios punteados:*

$$(|K_1| \vee |K_2|) * |L| \approx (|K_1| * |L|) \vee (|K_2| * |L|)$$

Antes de la demostración de esta proposición veamos un caso particular:

**Ejemplo 4.3.11.** Observemos los espacios  $(S^0 \vee S^0) * S^0$  y  $(S^0 * S^0) \vee (S^0 * S^0)$ .



La diferencia entre ellos es que el primero tiene un único cono  $1 * S^0$  mientras que el segundo tiene dos conos  $1 * S^0$  unidos en 1 (resaltados en la figura). Como en ambos casos se trata de subcomplejos contráctiles, el tipo homotópico no cambia si se los colapsa a un punto. Después de

### 4.3. TEOREMA CHINO PARA RELACIONES Y EL TIPO HOMOTÓPICO COMPLETO 51

este colapso los dos espacios que se obtienen resultan iguales, por lo tanto, hay una equivalencia homotópica punteada entre los espacios originales.

Es interesante notar que no hay un homeomorfismo punteado entre ambos dado que al eliminar el 1 central el primer espacio sigue conexo y en cambio el segundo espacio queda con dos componentes conexas.

Ahora pasamos al caso general:

*Demostración de 4.3.10.* Sean  $k_1$  y  $k_2$  los vértices distinguidos de los complejos  $K_1$  y  $K_2$ . Vamos a elegir los vértices distinguidos en los joins de modo que en ambos complejos  $(K_1 \vee K_2) * L$  y  $(K_1 * L) \vee (K_2 * L)$  el vértice distinguido sea  $k = k_1 \vee k_2 = \text{identificación de } k_1 \text{ y } k_2$ .

Hay un morfismo simplicial evidente  $\phi$  que envía "dos copias de  $L$  en una":

$$(K_1 \vee K_2) * L \leftarrow (K_1 * L) \vee (K_2 * L)$$

Tomando realización geométrica y pasando a los cocientes por los subcomplejos  $k * L$  y  $(k * L) \vee (k * L)$  obtenemos una función continua  $|\bar{\phi}|$ :

$$\frac{|(K_1 \vee K_2) * L|}{|k * L|} \leftarrow \frac{|(K_1 * L) \vee (K_2 * L)|}{|(k * L) \vee (k * L)|}$$

Como estos subcomplejos son contráctiles, obtenemos de la proposición anterior equivalencias homotópicas punteadas  $\frac{|(K_1 \vee K_2) * L|}{|k * L|} \approx |(K_1 \vee K_2) * L|$  y  $\frac{|(K_1 * L) \vee (K_2 * L)|}{|(k * L) \vee (k * L)|} \approx |(K_1 * L) \vee (K_2 * L)|$ .

Bastaría entonces con probar que  $|\bar{\phi}|$  es un homeomorfismo. Como los espacios involucrados son compactos solo nos falta ver la biyectividad. Esta se sigue de las siguientes dos observaciones que surgen de un sencillo análisis:

- $\phi$  preserva la dimensión de los símlices. Por lo tanto  $|\phi|$  aplica el interior de cada simplex  $s$  biyectivamente sobre el interior del simplex  $\phi(s)$ . (El interior de un simplex es el conjunto las combinaciones convexas que involucran a todos sus vértices).
- $\phi$  determina una biyección entre los símlices de  $(K_1 * L) \vee (K_2 * L)$  que no se encuentran en  $k * L \vee k * L$  y los símlices de  $(K_1 \vee K_2) * L$  que no se encuentran en  $k * L$ .

□

Estamos en condiciones de dar la primera demostración del teorema:

*Primer demostración de 4.3.6.* Utilizamos la propiedad distributiva 4.3.10 y el lema 4.3.8:

$$|I_{k_1} * \dots * I_{k_n}| = |I_{k_1}| * \dots * |I_{k_n}| = \vee_{k_1-1} S^0 * \dots * \vee_{k_n-1} S^0 \approx \vee_{\prod k_i-1} S^0 * \dots * S^0 = \vee_{\prod k_i-1} S^{n-1}$$

Donde estamos haciendo uso de la nota 4.3.9 para omitir los vértices distinguidos de los joins.

## Segunda demostración

Requiere el siguiente:

**Lema 4.3.12.** *Elijamos un vértice  $a_i$  en  $I_{k_i}$  para  $i = 1, \dots, n$ . Entonces el siguiente subcomplejo de  $I_{k_1} * \dots * I_{k_n}$  es contráctil :*

$$T = \cup_{i=1}^n I_{k_1} * \dots * \overbrace{a_i}^{i^o\text{-lugar}} * \dots * I_{k_n}$$

*Demostración.* Consideramos la familia de subcomplejos de  $T$  dada por  $\mathcal{L} = \{I_{k_1} * \dots * a_i * \dots * I_{k_n} : i = 1, \dots, n\}$ . Evidentemente  $\dim T < \infty$  y  $\mathcal{L}$  es puntualmente finita. Además las intersecciones de subfamilias de  $\mathcal{L}$  son conos y por lo tanto contráctiles (2.2.9). El teorema de McCord para complejos simpliciales (2.2.10) nos permite concluir entonces que  $|T|$  es homotópicamente equivalente a  $|N(\mathcal{L})|$ .

Ahora bien, todos los subcomplejos de  $\mathcal{L}$  contienen al simplex  $\{a_1, \dots, a_n\}$  y por lo tanto la intersección de cualquier subfamilia es no vacía. De modo que  $N(\mathcal{L})$  es el  $n - 1$  - simplex y por lo tanto  $|N(\mathcal{L})|$  resulta contráctil. Luego  $|T|$  es contráctil.  $\square$

Este lema nos permite deducir:

**Proposición 4.3.13.** *Sea  $K$  un subcomplejo de  $I_{k_1} * \dots * I_{k_n}$ . Supongamos que  $K$  contiene a su vez un subcomplejo  $T$  como el del lema anterior.*

*Entonces hay una equivalencia homotópica  $|K| \approx \vee_m S^{n-1}$  donde  $m$  es la cantidad de simplices de  $K$  con  $n$  vértices que no contienen a ningún  $a_i$ .*

*Demostración.* Los simplices de  $I_{k_1} * \dots * I_{k_n}$  son de la forma  $s = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$  con  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$  y  $v_{i_j} \in I_{k_{i_j}}$ .

Aquellos de estos simplices  $s$  con una cantidad de vértices  $r < n$  son simplices de  $T$ . En efecto, tomemos algún  $1 \leq t \leq n$  diferente de los  $i_1, \dots, i_r$  entonces  $s$  es un simplex de  $I_{k_1} * \dots * a_t * \dots * I_{k_n}$ . Por otro lado, los simplices  $s$  con  $n$  vértices que pertenecen a  $T$  son los que tienen algún  $a_i$  como vértice.

Luego  $S_K - S_T$  esta formado por los simplices de  $K$  con  $n$  vértices que no contienen a ningún  $a_i$ . Estos son  $m$  simplices de dimensión  $n - 1$  cuyos bordes están en  $T$ . Como  $\frac{|\Delta^{n-1}|}{|\partial\Delta^{n-1}|} = S^{n-1}$  podemos concluir entonces  $\frac{|K|}{|T|} = \vee_m S^{n-1}$ .

Por último, utilizando que  $|T|$  es contráctil (4.3.12) obtenemos de la proposición 4.3.7 una equivalencia homotópica  $|K| \approx \frac{|K|}{|T|}$  de donde se deduce lo que queríamos probar.  $\square$

Obtenemos de esta forma la segunda demostración del teorema:

*Segunda demostración de 4.3.6.* Basta tomar  $K = I_{k_1} * \dots * I_{k_n}$  en la proposición anterior (4.3.13) y observar que el número de simplices de  $n$  vértices en  $K$  que no contienen ningún  $a_i$  es  $m = \prod (k_i - 1)$ .  $\square$

Esta segunda forma de trabajar nos permite además, dar una recíproca del teorema y así conseguir la siguiente caracterización:

### 4.3. TEOREMA CHINO PARA RELACIONES Y EL TIPO HOMOTÓPICO COMPLETO 53

**Teorema 4.3.14.** *Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{E} = \{\approx_1, \dots, \approx_n\}$  una familia de relaciones de equivalencia en  $X$ . Supongamos además  $n \geq 2$  y  $\#X/\approx_i = k_i \geq 2$  para todo  $i$ .*

*Entonces son equivalentes:*

1.  $(X, \mathcal{E})$  es completo
2.  $N(A) \approx V(A)$  tienen el tipo homotópico de  $\vee_{\prod (k_i-1)} S^{n-1}$
3. La homología (débil) de  $A(X, \mathcal{E})$  es:

$$H_k = \begin{cases} \mathbb{Z}^{\prod k_i-1} & k = n-1 \\ \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0, n-1 \end{cases}$$

*Demostración.*  $1 \Rightarrow 2$  Queda doblemente probado porque es el teorema anterior.

$2 \Rightarrow 3$  Recordemos que la homología débil de  $A(X, \mathcal{E})$  es la homología simplicial de  $V$ . Esta última coincide con la homología singular de  $|V|$ . Como la homología singular es invariante por equivalencia homotópica, en virtud de (2), obtenemos la homología de  $\vee_{\prod k_i-1} S^{n-1}$  que es la que figura en el inciso (3).

$3 \Rightarrow 1$  Probaremos el contra-recíproco. Supondremos que el par  $(X, \mathcal{E})$  no es completo y concluiremos que su homología no puede ser la de (3). Notamos en lo que sigue  $N = N(A)$  y  $M = I_{k_1} * \dots * I_{k_n}$ .

En efecto, como  $(X, \mathcal{E})$  no es completo  $N \not\cong M$ . Hay entonces  $s = \{v_1, \dots, v_n\} \in S_M - S_N$   $n-1$  simplex. Llamemos  $M'$  al complejo simplicial con simplices  $S_{M'} = S_M - \{s\}$ .

Como  $k_i \geq 2$  para todo  $i$ , podemos elegir vértices  $a_i \in I_{k_i}$  diferentes del correspondiente  $v_i$ . Se tiene así un subcomplejo  $K = \cup_{i=1}^n I_{k_1} * \dots * a_i * \dots * I_{k_n} \leq M'$  y podemos aplicar la proposición anterior (4.3.13) para concluir  $|M'| \approx \vee_{m-1} S^{n-1}$  donde  $m = \prod (k_i - 1)$ .

Como  $N \leq M'$  y  $\dim M' = n-1$  entonces  $H_{n-1}(N) \leq H_{n-1}(M')$ . Pero  $\text{rg } H_{n-1}(M') = m-1$  entonces  $\text{rg } H_{n-1}(N) < m$  y por lo tanto la homología débil del atlas no puede ser la del inciso (3).  $\square$

En particular:

**Corolario 4.3.15.** *Si  $(X, \mathcal{E})$  es completo entonces  $V$  y  $N$  son  $n-2$  - conexos.*

*Demostración.* Se debe a que  $\vee_{\prod (k_i-1)} S^{n-1}$  lo es.  $\square$

También obtenemos la siguiente consecuencia sobre el atlas de caminos:

**Corolario 4.3.16.** *Si  $(X, \mathcal{E})$  es completo y la cantidad de relaciones  $n \geq 3$  entonces para todos  $x, y \in X$  el atlas  $A(\mathcal{C}(X, \mathcal{E})(x, y), \mathcal{E}^*)$  es arco-conexo.*

*Demostración.* Por el corolario anterior  $V$  resulta simplemente conexo. Luego, debido a 4.1.6, para todos  $x, y \in X$  vale  $\#\pi_0(A(\mathcal{C}(X, \mathcal{E})(x, y), \mathcal{E}^*)) = \#\pi_1(A(X, \mathcal{E}))(x, y) = \#\pi_1(V)(x, y) = 1$ .  $\square$

#### 4.4. Homología de dos relaciones

En esta sección nos concentramos en la situación más sencilla en la cual existe "interacción". Esta situación, claro esta, se obtiene cuando el conjunto  $X$  esta provisto de dos relaciones  $\mathcal{E} = \{\approx_1, \approx_2\}$ . Como en la sección anterior, seguiremos suponiendo que los correspondientes cocientes son finitos.

Comenzamos con una interpretación del grupo de homología  $H_1(A)$  en términos de cantidades de clases de equivalencia :

**Proposición 4.4.1.**  $H_1(A)$  es libre con rango  $(\#X/\approx_{\cup\mathcal{E}} + \#X/\approx_{\cap\mathcal{E}}) - (\#X/\approx_1 + \#X/\approx_2)$ .

*Demostración.* Recordemos que la homología débil del atlas se puede obtener como la homología de  $N$ . Como estamos trabajando con dos relaciones,  $N$  es un grafo y por lo tanto  $H_1(N)$  es libre.

Dado que los cocientes  $X/\approx_i$  se suponen finitos  $N$  tiene finitos vértices. Por esa razón el complejo de cadenas  $C_*(N)$  y su homología  $H_*(N)$  resultan finitamente generados y además, en virtud de 1.5.13, vale la igualdad de las características  $\chi(C_*(N)) = \chi(H_*(N))$ .

Utilizando la proposición 4.2.7 obtenemos:

$$\begin{aligned} \chi(C_*(N)) &= -rg C_1(N) + rg C_0(N) = -aristas + vertices = \\ &= -\#X/\approx_{\cap\mathcal{E}} + (\#X/\approx_1 + \#X/\approx_2) \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que  $|V| \approx |N|$  resulta  $H_0(N) = H_0(V)$  y así:

$$\chi(H_*(N)) = -rg H_1(N) + rg H_0(N) = -rg H_1(N) + rg H_0(V) = -rg H_1(N) + \#X/\approx_{\cup\mathcal{E}}$$

Basta igualar ambas expresiones para obtener el resultado buscado. □

**Corolario 4.4.2.**  $\#X/\approx_{\cup\mathcal{E}} + \#X/\approx_{\cap\mathcal{E}} \leq \#X/\approx_1 + \#X/\approx_2 + 1$

Vale la igualdad si y solo si  $(X, \mathcal{E})$  es completo.

*Demostración.* Se debe a la proposición anterior junto a los siguientes hechos que surgieron al demostrar la caracterización de pares completos por la homología en 4.3.14:

- $(X, \mathcal{E})$  completo  $\Rightarrow rg H_1 = (\#X/\approx_1 - 1) \cdot (\#X/\approx_2 - 1)$ .
- $(X, \mathcal{E})$  no es completo  $\Rightarrow rg H_1 < (\#X/\approx_1 - 1) \cdot (\#X/\approx_2 - 1)$  (cuando probamos  $3 \Rightarrow 1$ )

□

**Corolario 4.4.3.**  $\#X/\approx_1 + \#X/\approx_2 \leq \#X/\approx_{\cup\mathcal{E}} + \#X/\approx_{\cap\mathcal{E}}$

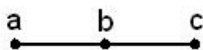
Vale la igualdad si y solo si las componentes de  $N$  (o equivalentemente las de  $V$ ) son contráctiles.

*Demostración.* La desigualdad se deduce de la proposición anterior (4.4.1) teniendo en cuenta que  $rg H_1 \geq 0$ . Por otro lado  $rg H_1(N) = 0$  si y solo si  $rg H_1(C) = 0$  para toda componente  $C$  de  $N$ . Como las componentes  $C$  son grafos conexos  $C \approx \vee_{m_C} S^1$  y  $rg H_1(C) = m_C$  para cierto  $m_C \in \mathbb{N}_0$ . Luego  $rg H_1(C) = 0 \Leftrightarrow C$  es equivalente homotópico a un punto, es decir, contráctil.

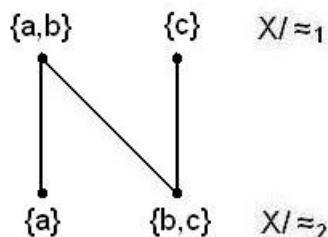
Es equivalente que las componentes de  $V$  sean contráctiles a que las de  $N$  lo sean debido a la equivalencia homotópica  $|V| \approx |N|$ . □

**Ejemplo 4.4.4.** Sea  $X = \{a, b, c\}$  y consideremos relaciones definidas por  $X/\approx_1 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$  y  $X/\approx_2 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$ . Resulta  $X/\approx_{\cup\mathcal{E}} = \{\{a, b, c\}\}$  y  $X/\approx_{\cap\mathcal{E}} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$  de modo que se tiene la igualdad del corolario. Observemos que ambos complejos simpliciales son contráctiles:

El vektoris es:



y el nervio:



### Relaciones localmente comparables

Una situación particular en la cual las componentes de  $V$  y  $N$  son contráctiles es cuando  $\approx_1$  y  $\approx_2$  son comparables, esto es, cuando  $\approx_1 \subseteq \approx_2$  o  $\approx_2 \subseteq \approx_1$ . Es fácil ver que en ese caso las componentes de  $V$  son símlices y las de  $N$  estrellas.

Con la intención de *caracterizar* las relaciones  $\mathcal{E} = \{\approx_1, \approx_2\}$  para las cuales las componentes son de ese tipo damos la siguiente definición:

**Definición 4.4.5.** Sea  $X$  un conjunto provisto de dos relaciones de equivalencia  $\approx_1$  y  $\approx_2$ . Decimos que  $\approx_1$  y  $\approx_2$  son *localmente comparables* si para todo  $x \in X$  se tiene  $[x]_1 \subseteq [x]_2$  o  $[x]_2 \subseteq [x]_1$ . (notamos  $[x]_i$  a la clase de equivalencia de  $x$  según  $\approx_i$ )

**Observación 4.4.6.** Si dos relaciones son comparables entonces son localmente comparables. La recíproca es falsa.

**Proposición 4.4.7.** Sea  $X$  un conjunto provisto de dos relaciones de equivalencia  $\mathcal{E} = \{\approx_1, \approx_2\}$ . Son equivalentes:

1.  $\approx_1$  y  $\approx_2$  son localmente comparables.
2. Todo camino débil en  $A(X, \mathcal{E})$  es tira local
3. Las componentes de  $V(A)$  son símlices (generalizados).

*Demostración.*  $1 \Rightarrow 2$

Probaremos que todo camino débil  $\alpha$  es tira local por inducción en la longitud.

Para los caminos de longitud 2 es inmediato. Ahora supongamos cierto el resultado para caminos de longitud  $n$  y veamos que vale para caminos  $\alpha = (x_1, \dots, x_{n+1})$  de longitud  $n + 1$ . En efecto, consideremos el camino auxiliar  $\beta = (x_1, \dots, x_n)$ . Por hipótesis inductiva  $\beta$  es tira local y por lo tanto existe  $i = 1$  ó  $2$  tal que  $\{x_l : 1 \leq l \leq n\} \subseteq [x_n]_i$ . Por otro lado, sabemos que existe  $j = 1$  o  $2$  tal que  $x_n \approx_j x_{n+1}$  o lo que es igual  $\{x_n, x_{n+1}\} \subseteq [x_n]_j$ .

Como  $\approx_1$  y  $\approx_2$  son localmente comparables hay una clase de equivalencia máxima  $[x]_k = \max\{[x]_1, [x]_2\}$ . Esa clase contiene a  $[x]_i$  y  $[x]_j$ . Resulta entonces  $\{x_l : 1 \leq l \leq n\} \cup \{x_n, x_{n+1}\} \subseteq [x]_k$  y por lo tanto  $\alpha$  es una  $k$ -tira local.

$2 \Rightarrow 3$

Debemos mostrar que todo subconjunto finito  $\{x_0, \dots, x_n\}$  de los vértices de una componente de  $V(A)$  forman un simplex. En efecto, para cada  $1 \leq l \leq n$  sea  $\alpha_l$  un camino de  $x_{l-1}$  a  $x_l$ . Consideremos el camino que se obtiene al concatenarlos  $\alpha = \alpha_n * \dots * \alpha_1$ . Por hipótesis este camino es una tira local. Esto implica en particular que existe  $i = 1$  o  $2$  tal que  $x_{l-1} \approx_i x_l$  para todo  $l$  y por lo tanto  $\{x_0, \dots, x_n\}$  es un simplex de  $V(A)$ .

$3 \Rightarrow 1$

Sea  $x \in X$ . Debemos probar que  $[x]_1 \subseteq [x]_2$  o  $[x]_2 \subseteq [x]_1$ .

Llamemos  $C_x$  al conjunto de vértices de la componente de  $V(A)$  con  $x \in C_x$ . Tenemos que  $[x]_i \subseteq C_x$  para  $i = 1, 2$ . Bastara probar que además  $C_x \subseteq [x]_1$  ó  $C_x \subseteq [x]_2$ .

Supongamos que esto último no se cumple, es decir, que hay  $a \in C_x - [x]_1$  y  $b \in C_x - [x]_2$ . Como  $C_x$  es simplex generalizado,  $s = \{a, b, x\} \subseteq C_x$  resulta simplex. Por lo tanto  $\{a, b, x\} \subseteq [x]_1$  ó  $\{a, b, x\} \subseteq [x]_2$ . Esto es una contradicción, luego  $C_x \subseteq [x]_1$  ó  $C_x \subseteq [x]_2$  como queríamos.  $\square$

**Proposición 4.4.8.** *Sea  $X$  un conjunto provisto de dos relaciones de equivalencia  $\mathcal{E} = \{\approx_1, \approx_2\}$ . Son equivalentes:*

1.  $\approx_1$  y  $\approx_2$  son localmente comparables.
2. Las componentes de  $N(A)$  son estrellas.

*Demostración.* Podemos expresar la condición (1) de la siguiente forma: para todas  $C_1 \in X/\approx_1$  y  $C_2 \in X/\approx_2$  con  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$  se tiene  $C_1 \subseteq C_2$  ó  $C_2 \subseteq C_1$ .

Por otro lado, tanto para  $(i, j) = (1, 2)$  como para  $(i, j) = (2, 1)$ , son equivalentes las afirmaciones " $C_i \subseteq C_j$ " y " $C_i \cap C'_j = \emptyset$  para toda  $C'_j \in X/\approx_j$ ,  $C'_j \neq C_j$ ".

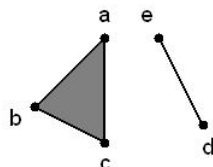
Recordemos que  $N(A)$  es un grafo con una arista por cada par de clases con intersección no vacía. Luego, (1) es equivalente a decir que cada una de estas aristas tiene al menos un vértice "libre", es decir, que no pertenece a ninguna otra arista. Esta propiedad corresponde a que las componentes de  $N(A)$  son estrellas (2).  $\square$

**Ejemplo 4.4.9.** Retomemos el ejemplo anterior con  $X = \{a, b, c\}$ ,  $X/\approx_1 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$  y  $X/\approx_2 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$ . Puede observarse en las figuras que las componentes de  $V(A)$  no son simplices y las de  $N(A)$  no son estrellas. Por otro lado,  $\approx_1$  y  $\approx_2$  no son localmente comparables pues  $[b]_1 = \{a, b\}$  y  $[b]_2 = \{b, c\}$  de modo que  $[b]_1 \not\subseteq [b]_2$  y  $[b]_2 \not\subseteq [b]_1$ .

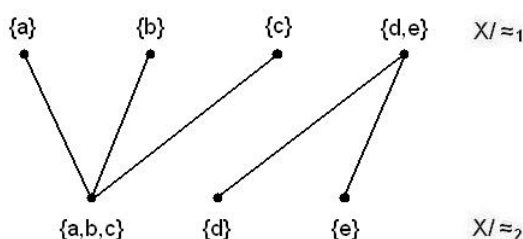


**Ejemplo 4.4.10.** Sea  $X = \{a, b, c, d, e\}$  con relaciones dadas por  $X/\approx_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$  y  $X/\approx_2 = \{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e\}\}$ . Luego  $\approx_1$  y  $\approx_2$  son localmente comparables.

El Vietoris queda :



y el Nervio:



## 4.5. Aplicaciones a complejos simpliciales

Dado un complejo simplicial  $K$  cualquiera siempre es posible encontrar un atlas de relaciones tal que  $K = V(A)$ . En efecto, basta tomar  $X = V_K$  y  $\mathcal{E} = \{\approx_s : s \in S_K\}$  donde  $\approx_s$  es la relación de equivalencia que identifica los vértices de  $s$ .

Este hecho sugiere encarar un estudio de los complejos simpliciales a través de los atlas de relaciones. Es decir, invertir los roles que tenían en las secciones anteriores donde se analizó a los atlas por medio de complejos simpliciales.

En esta sección todos los complejos simpliciales se suponen de dimensión finita.

Comenzamos con una caracterización de los complejos simpliciales que se pueden obtener como Vietoris de un atlas con una determinada cantidad de relaciones de equivalencia:

**Definición 4.5.1.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $n \in \mathbb{N}$ .

Decimos que  $K$  es  $n$ -relacionado si existe un conjunto  $X$  provisto de  $n$  relaciones de equivalencia  $\mathcal{E} = \{\approx_i : i = 1, \dots, n\}$  tal que  $K = V(A(X, \mathcal{E}))$ .

Definimos ahora el *número de relaciones de  $K$* : cuando  $K$  es  $n$ -relacionado para algún  $n$  es  $n_K = \min\{n \in \mathbb{N} : K \text{ es } n\text{-relacionado}\}$  sino  $n_K = \infty$ .

**Proposición 4.5.2.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces son equivalentes:

1.  $K$  es  $n$ -relacionado.
2. Los *símplices* maximales de  $K$  se pueden agrupar en  $n$  familias  $\mathcal{S}_i$   $i = 1, \dots, n$  formadas por *símplices* disjuntos dos a dos.

*Demostración.*  $1 \Rightarrow 2$

Supongamos  $K = V(A(X, \mathcal{E}))$  como en la definición y sea  $\mathcal{S}$  el conjunto de los símlices maximales de  $K$ . Probaremos que  $\mathcal{S} \subseteq \cup_{i=1}^n X / \approx_i$ . En efecto, dado  $s \in \mathcal{S}$  sabemos por la definición de  $V(A)$  que existe  $C \in X / \approx_i$  para algún  $1 \leq i \leq n$  tal que  $s \subseteq C$ . Si fuese  $s \subsetneq C$  entonces existiría un simplex  $t$  con  $s \subsetneq t$  en contradicción con la maximalidad de  $s$ . Por lo tanto  $s = C \in X / \approx_i$  como queríamos.

Como  $\mathcal{S} \subseteq \cup_{i=1}^n X / \approx_i$  entonces podemos elegir para cada simplex  $s \in \mathcal{S}$  un índice  $1 \leq i_s \leq n$  con  $s \in X / \approx_{i_s}$ . Consideremos finalmente las familias de símlices  $\mathcal{S}_i = \{s \in \mathcal{S} \mid i_s = i\}$  con  $i = 1, \dots, n$ . Los símlices en cada  $\mathcal{S}_i$  resultan disjuntos 2 a 2 pues son clases de equivalencia correspondientes a  $\approx_i$ . Por lo tanto se cumple (2).

$2 \Rightarrow 1$  Sea  $X$  el conjunto de vértices  $V_K$ . Cada familia de símlices  $\mathcal{S}_i$  define una relación de equivalencia en  $X$ :

$$x \approx_i y \Leftrightarrow \text{Existe } s \in \mathcal{S}_i \text{ tal que } x, y \in s \text{ ó } x = y$$

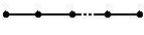
Sea  $V$  el complejo de vektoris del atlas  $A(X, \mathcal{E})$  con  $\mathcal{E} = \{\approx_1, \dots, \approx_n\}$ . Entonces los símlices de  $V$  son aquellos símlices de  $K$  que se encuentran contenidos en un simplex maximal. Como estamos suponiendo  $\dim K < \infty$  eso se cumple para todos los símlices de  $K$  y resulta  $S_K = S_V$ . Es decir,  $K = V(A(X, \mathcal{E}))$ .  $\square$



**Corolario 4.5.3.** *Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $\mathcal{S}$  el conjunto de sus símlices maximales. Entonces  $n_K \leq \#\mathcal{S}$ . Se tiene la igualdad si y solo si para todos  $s, t \in \mathcal{S}$  es  $s \cap t \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Es inmediata de la proposición 4.5.2. La desigualdad se debe a que  $K$  es vektoris de un conjunto con  $\#\mathcal{S}$  relaciones. Basta considerar familias unitarias  $\mathcal{S}_s = \{s\}$  con  $s \in \mathcal{S}$ .

Cuando existe un par de símlices disjuntos en  $\mathcal{S}$  se pueden agrupar en una única familia reduciendo la cantidad total de las mismas. Así se obtiene la condición para la igualdad.  $\square$

**Ejemplo 4.5.4.** El número de relaciones de algunos complejos simpliciales:

Complejo Simplicial $K$	$n_K$
$t$ -simplex $\Delta^t$	1
Borde del $t$ -simplex $\partial\Delta^t$	$t+1$
 $t \geq 2$ Segmentos consecutivos	2

 <p>Polígono de <math>t \geq 3</math> segmentos</p>	$\begin{cases} 2 & \text{si } t \text{ es par} \\ 3 & \text{si } t \text{ es impar} \end{cases}$
 <p>Estrella de <math>t</math> segmentos</p>	$t$

Los siguientes resultados muestran que tipo de información nos da el número de relaciones de un complejo simplicial:

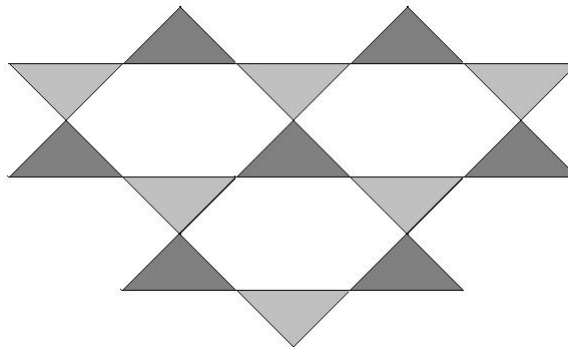
**Proposición 4.5.5.** *Sea  $K$  un complejo simplicial con  $n_K < \infty$  entonces existe un complejo simplicial  $N$  homogéneo con  $\dim N = n_K - 1$  tal que  $|K| \approx |N|$ .*

*Demostración.* Sabemos que  $K = V(A)$  con  $A = A(X, \mathcal{E})$  y  $\#\mathcal{E} = n_K$ . Entonces el nervio  $N = N(A)$ , según vimos en 4.2.7, es homogéneo con  $\dim N = n_K - 1$  y  $|V(A)| \approx |N(A)|$ .  $\square$

**Corolario 4.5.6.** *Sea  $K$  un complejo simplicial.*

- Si  $n_K = 1$  entonces las componentes de  $K$  son símplices y por lo tanto contráctiles
- Si  $n_K = 2$  entonces las componentes de  $K$  son contráctiles u homotópicamente equivalentes a uniones por un punto de copias de  $S^1$ .

**Ejemplo 4.5.7.** El siguiente complejo simplicial tiene número de relaciones 2, basta considerar las familias  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  formadas por los 2-símplices en los diferentes tonos de gris.



Es homotópicamente equivalente a  $\vee_3 S^1$ .

**Corolario 4.5.8.** *Sea  $K$  un complejo simplicial. Entonces  $H_n(K) = 0$  para todo  $n \geq n_K$ .*

Para finalizar damos una caracterización de los complejos simpliciales que son nervio de un atlas con  $n$  relaciones. Este es el resultado dual al probado en el comienzo para el vietoris.

**Proposición 4.5.9.** *Sea  $K$  un complejo simplicial y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces son equivalentes:*

1. *Existe un conjunto  $X$  provisto de  $n$  relaciones de equivalencia  $\mathcal{E} = \{\approx_i: i = 1, \dots, n\}$  tal que  $K = N(A(X, \mathcal{E}))$ .*
2.  *$K$  es  $n$ -partito y homogéneo con  $\dim K = n - 1$ .*

*Demostración.*  $1 \Rightarrow 2$  Ya fue probado en el capítulo anterior.

$2 \Rightarrow 1$  Sea  $X$  el conjunto de los  $n-1$ -símplices de  $K$ . Como  $K$  es  $n$ -partito hay una partición  $V_K = V_1 \amalg \dots \amalg V_n$  tal que cada simplex  $s \in S_K$  tiene a lo sumo un vértice en cada  $V_i$ .

Dado  $v \in V_K$  llamamos  $st v = \{s \in X : v \in s\}$ . Notemos que los símplices  $s \in X$  tienen exactamente un vértice en cada  $V_i$ . Por lo tanto  $\{st v\}_{v \in V_i}$  es una partición de  $X$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Sea  $\mathcal{E} = \{\approx_i\}$  la correspondiente familia de relaciones de equivalencia y consideremos el nervio  $N = N(A(X, \mathcal{E}))$ .

Afirmamos que hay un isomorfismo simplicial  $\phi: K \rightarrow N$  dado por  $v \in V_K \mapsto st v \in V_N$ .

Evidentemente queda definida una biyección a nivel vértices. Solo falta ver que se trata de una biyección a nivel símplices. Esto es probar para  $s \subseteq V_K$  que  $s \in S_K \Leftrightarrow \phi(s) \in S_N$ .

Supongamos  $s \in S_K$  y veamos  $\phi(s) \in S_N$ . En efecto, como  $K$  es homogéneo con  $\dim K = n - 1$  hay un  $n - 1$ -simplex  $t \in X$  tal que  $s \subseteq t$ . Luego  $t \in \cap_{v \in s} st v$  y por lo tanto  $\phi(s) = \{st v: v \in S\} \in S_N$ .

Recíprocamente, si  $\phi(s) \in S_N$  quiere decir que existe  $t \in \cap_{v \in s} st v$ . Entonces  $s \subseteq t$  y como  $t \in S_K$  se deduce  $s \in S_K$ .

□

# Capítulo 5

## Atlas de subgrupos

Este capítulo está dedicado a los atlas de subgrupos  $A(G, \mathcal{H})$ . Estos atlas nos permiten estudiar al grupo  $G$  a través de una familia de subgrupos  $\mathcal{H}$  que lo generan. Nuestras referencias aquí son [1] y [2].

La primera sección trata sobre las acciones simpliciales del grupo  $G$  sobre los complejos  $V$  y  $N$ , y en particular, sobre las fuertes consecuencias que estas tienen sobre la geometría de ambos. En la segunda sección construimos el producto amalgamado  $*_{\cap} \mathcal{H}$  y mostramos como puede vincularse con el grupo  $G$  mediante el grupo fundamental  $\pi_1 A(G, \mathcal{H})$ . La tercera sección propone pensar al atlas  $A(G, \mathcal{H})$  como un atlas de relaciones. Esto permite aplicar los resultados que obtuvimos en el capítulo anterior a este nuevo contexto.

### 5.1. Acciones simpliciales

**Definición 5.1.1.** Sea  $G$  un grupo y  $K$  un complejo simplicial. Una *acción simplicial* a izquierda  $G \curvearrowright K$  consiste en una acción a izquierda de  $G$  sobre el conjunto de vértices  $V_K$  con la siguiente propiedad adicional:

Para todo  $g \in G$  la multiplicación por  $g$ ,  $\phi_g : v \in V_K \mapsto g.v \in V_K$  es un morfismo simplicial.  
Es decir, si  $s \in S_K$  entonces  $g.s \in S_K$ .

Se definen análogamente acciones simpliciales a derecha  $K \curvearrowright G$ .

Consideremos un grupo  $G$  y una familia de subgrupos  $\mathcal{H}$ . A continuación mostramos que  $G$  actúa simplicialmente sobre el vórtice  $V = V(A(G, \mathcal{H}))$  y el nervio  $N = N(A(G, \mathcal{H}))$ .

Tengamos presente que los vértices de  $V$  son los elementos de  $G$  y que los vértices de  $N$  son las co-clases a izquierda  $Hx$  con  $H \in \mathcal{H}$  y  $x \in G$ .

**Proposición 5.1.2.** Hay una acción simplicial  $V \curvearrowright G$  inducida por la acción de  $G$  sobre su conjunto subyacente por multiplicación a derecha.

*Demostración.* Sea  $s$  un simplex de  $V$  entonces existen  $H \in \mathcal{H}$  y  $x \in G$  tales que  $s \subseteq Hx$ . Luego  $s.g \subseteq Hxg$  y por lo tanto  $s.g$  resulta simplex de  $V$ .  $\square$

**Definición 5.1.3.** Un complejo simplicial  $K$  se dice *geométricamente homogéneo* si para todos  $v, w \in V_K$  existe un automorfismo simplicial  $\phi : K \rightarrow K$  tal que  $\phi(v) = w$ .

**Observación 5.1.4.** Intuitivamente un complejo simplicial es geométricamente homogéneo cuando "se ve igual desde cualquiera de sus vértices". Advertimos al lector que esta propiedad no implica ni es implicada por el hecho de que el complejo simplicial sea homogéneo en el sentido de los capítulos anteriores.

**Ejemplo 5.1.5.** Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$  el  $n$ -simplex  $\Delta^n$  y su borde  $\partial\Delta^n$  son geométricamente homogéneos.

La "recta"  $L$  con  $V_L = \mathbb{Z}$  y simplices  $S_L = \{\{n, n+1\}, \{n\} : n \in \mathbb{Z}\}$  también lo es. Si nos quedamos en cambio con  $n \geq 2$  segmentos consecutivos obtenemos un complejo simplicial que no es geométricamente homogéneo.

**Proposición 5.1.6.** *Son equivalentes:*

1.  $K$  es geométricamente homogéneo
2. Hay un grupo  $G$  y una acción simplicial (a izquierda o a derecha) de  $G$  sobre  $K$  que es transitiva en el conjunto de vértices.

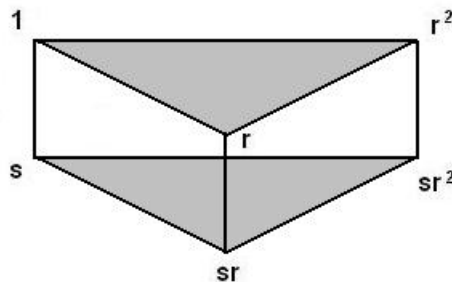
*Demostración.*  $1 \Rightarrow 2$  Considerar la acción simplicial  $\text{Aut}(K) \curvearrowright K$ . El hecho de que  $K$  sea homogéneo nos dice que esta acción es transitiva.

$2 \Rightarrow 1$  Supongamos que la acción es a izquierda. En caso que sea a derecha se trabaja en forma análoga. Dados dos vértices  $v, w \in V_K$  existe  $g \in G$  tal que  $w = g.v$ . El elemento  $g \in G$  define un automorfismo simplicial  $\phi_g$  (tiene inverso  $\phi_{g^{-1}}$ ) que cumple  $\phi_g(v) = w$  como necesitamos.  $\square$

**Corolario 5.1.7.** *El vctoris  $V$  de un atlas  $A(G, \mathcal{H})$  es un complejo simplicial homogéneo.*

*Demostración.* La acción simplicial de  $G$  sobre  $V$  por multiplicación a derecha es transitiva.  $\square$

**Ejemplo 5.1.8.** Consideremos el grupo diedral  $D_3$  con orden 6 y la familia de subgrupos  $\mathcal{H} = \{H, L\}$  con  $H = \langle r \rangle$  y  $L = \langle s \rangle$ . Se observa claramente que el vctoris de  $A(G, \mathcal{H})$  es geométricamente homogéneo:



**Observación 5.1.9.** Notemos que el vctoris de un atlas de grupoides no es en general geométricamente homogéneo. Es más, recordemos que *todo complejo simplicial* es el vctoris de un atlas de relaciones de equivalencia.

**Proposición 5.1.10.** *Hay una acción simplicial  $N \curvearrowright G$  dada por multiplicar las co-clases a izquierda de subgrupos de  $\mathcal{H}$  por la derecha.*

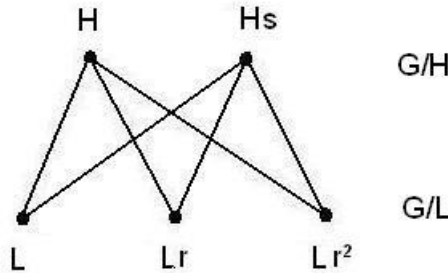
*Las órbitas de esta acción son los cocientes  $G/H$  con  $H \in \mathcal{H}$ .*

*Demostración.* Es claro que la multiplicación de co-clases  $Hx.g = Hxg$  define una acción sobre el conjunto de vértices de  $N$ . Veamos que resulta simplicial. Sea  $s = \{H_{i_1}x_{i_1}, \dots, H_{i_n}x_{i_n}\}$  un simplex de  $N$  entonces  $\cap_{j=1}^n H_{i_j}x_{i_j} \neq \emptyset$ . Para verificar que  $s.g$  resulta simplex de  $N$  debemos ver que  $\cap_{j=1}^n H_{i_j}x_{i_j}g \neq \emptyset$ . Esto es inmediato pues  $\cap_{j=1}^n H_{i_j}x_{i_j}g = (\cap_{j=1}^n H_{i_j}x_{i_j}).g$ .  $\square$

**Observación 5.1.11.** El nervio  $N$  no tiene porque ser geoméricamente homogéneo. El hecho de que las órbitas de la anterior acción sean los cocientes  $G/H$  nos dice que  $N$  se ve igual desde los vértices correspondientes a dos clases de un mismo cociente. Es decir, "es geoméricamente homogéneo como complejo simplicial partito".

En general, el nervio de un atlas de grupoides que no sea  $A(G, \mathcal{H})$ , no tiene esta propiedad.

**Ejemplo 5.1.12.** Observemos el nervio del atlas  $A(D_3, \mathcal{H})$  con el que trabajamos en el ejemplo anterior. Notar que se ve "igual" desde dos clases de un mismo cociente.



El lector interesado puede encontrar más información acerca de la acción simplicial sobre el nervio en [2].

## 5.2. Producto amalgamado de subgrupos y $\pi_1(A(G, \mathcal{H}))$

Sea  $G$  un grupo y  $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}$  una familia de subgrupos que lo generan. En esta sección mostramos que el grupo  $G$  se puede reconstruir a partir de los subgrupos de  $\mathcal{H}$  utilizando el grupo fundamental  $\pi_1(A(G, \mathcal{H}))$ .

El producto amalgamado es el análogo a la unión conjuntista en la teoría de grupos. Es un grupo que se obtiene "pegando" los subgrupos de la familia  $\mathcal{H}$  por sus intersecciones de a pares:

**Definición 5.2.1.** El producto amalgamado de los subgrupos de la familia  $\mathcal{H}$  es un grupo  $*_{\cap} \mathcal{H}$  provisto de una familia de morfismos  $i_\alpha : H_\alpha \rightarrow *_{\cap} \mathcal{H}$  que cumplen  $i_\alpha|_{H_\alpha \cap H_\beta} = i_\beta|_{H_\alpha \cap H_\beta}$  para todos  $\alpha, \beta$  y son universales respecto de esa propiedad. Es decir:

Para cualquier grupo  $L$  y familia de morfismos  $f_\alpha : H_\alpha \rightarrow L$  con  $f_\alpha|_{H_\alpha \cap H_\beta} = f_\beta|_{H_\alpha \cap H_\beta}$  para todos  $\alpha, \beta$  existe un único morfismo  $\bar{f} : *_{\cap} \mathcal{H} \rightarrow L$  tal que  $\bar{f}i_\alpha = f_\alpha$  para todo  $\alpha$ .

Ahora mostraremos que el producto amalgamado efectivamente existe dando una construcción explícita del mismo. Es fácil de probar que es único salvo isomorfismos utilizando la propiedad universal.

**Teorema 5.2.2.** *Existe el producto amalgamado  $*_{\cap}\mathcal{H}$ .*

*Demostración.* Los elementos del grupo son clases de palabras formadas por elementos de  $\cup_{\alpha}H_{\alpha}$ :

$$*_{\cap}\mathcal{H} = \{(h_n, \dots, h_1) : n \in \mathbb{N} \ h_i \in \cup_{\alpha}H_{\alpha}\} / \approx$$

Donde  $\approx$  es la menor relación de equivalencia compatible con concatenación de palabras que verifica  $(h, h') \approx (hh')$  para todo  $\alpha$  y todos  $h, h' \in H_{\alpha}$ .

Luego, hay una operación  $*$  en  $*_{\cap}\mathcal{H}$  inducida por la concatenación de palabras (que también notamos  $*$ ).

Es fácil probar que  $*_{\cap}\mathcal{H}$  con la operación  $*$  resulta grupo:

- $*$  es asociativa (porque la concatenación de palabras lo es).
- $\overline{(1)}$  es neutro donde 1 es el neutro de  $G$ .
- Todo elemento  $\overline{(h_n, \dots, h_1)}$  tiene inverso  $\overline{(h_1^{-1}, \dots, h_n^{-1})}$ .

Para cada  $\alpha$  tenemos un morfismo  $i_{\alpha} : H_{\alpha} \rightarrow *_{\cap}\mathcal{H}$  dado por  $i_{\alpha}(h) = \overline{(h)}$ :

$$i_{\alpha}(h'.h) = \overline{(h'.h)} = \overline{(h', h)} = \overline{(h')} * \overline{(h)} = \overline{(h')} * \overline{(h)} = i_{\alpha}(h') * i_{\alpha}(h) \text{ para todos } h, h' \in H_{\alpha}.$$

Nos resta ver que  $*_{\cap}\mathcal{H}$  provisto de los morfismos  $i_{\alpha}$  satisface la propiedad universal de la definición.

En efecto, sea  $L$  un grupo y consideremos una familia de morfismos  $f_{\alpha} : H_{\alpha} \rightarrow L$  que cumplen con  $f_{\alpha}|_{H_{\alpha} \cap H_{\beta}} = f_{\beta}|_{H_{\alpha} \cap H_{\beta}}$ . Debemos mostrar que existe un único morfismo  $\bar{f} : *_{\cap}\mathcal{H} \rightarrow L$  tal que  $\bar{f}i_{\alpha} = f_{\alpha}$  para todo  $\alpha$ .

Para comenzar supongamos que  $\bar{f}$  existe y veamos que pinta tiene :

$$\bar{f}(\overline{(h_n, \dots, h_1)}) = \bar{f}(\overline{(h_n * \dots * h_1)}) = \bar{f}(\overline{(h_n)}) \dots \bar{f}(\overline{(h_1)})$$

Si ahora elegimos índices  $\alpha_i$  de modo que  $h_i \in H_{\alpha_i}$ , como  $\bar{f}i_{\alpha_i} = f_{\alpha_i}$  tenemos:

$$\bar{f}(\overline{(h_n, \dots, h_1)}) = f_{\alpha_n}(h_n) \dots f_{\alpha_1}(h_1)$$

Por lo tanto el morfismo  $\bar{f}$  en caso de existir queda determinado por la familia de morfismos  $f_{\alpha}$ , por esa razón su unicidad queda garantizada.

Para ver la existencia probaremos que la formula anterior efectivamente define un morfismo:

- La buena definición de la función  $\bar{f}$  se obtiene en dos pasos:
  1. Queda definida una función  $f$  sobre las palabras por  $(h_n, \dots, h_1) \mapsto f_{\alpha_n}(h_n) \dots f_{\alpha_1}(h_1)$ . En efecto, dado que  $f_{\alpha}|_{H_{\alpha} \cap H_{\beta}} = f_{\beta}|_{H_{\alpha} \cap H_{\beta}}$  para todos  $\alpha, \beta$  se tiene que el valor de  $f_{\alpha_i}(h_i)$  es independiente del  $\alpha_i$  elegido con  $h_i \in H_{\alpha_i}$ .



2. Veamos que  $f$  pasa al cociente por la relación de equivalencia  $\approx$ . Esto es, si llamamos  $\sim$  a la relación de equivalencia entre palabras  $w \sim w' \Leftrightarrow f(w) = f(w')$ , probar  $\approx \subseteq \sim$ .

En efecto, es inmediato verificar que  $\sim$  es compatible con concatenación. Por otro lado, dados  $h, h' \in H_\alpha$  para algun  $\alpha$  resulta  $f(h', h) = f_{\alpha_i}(h') \cdot f_{\alpha_i}(h) = f_{\alpha_i}(h' \cdot h) = f(h'h)$  y por lo tanto  $(h', h) \sim (h'h)$ . Luego, como  $\approx$  es la menor relación de equivalencia con estas propiedades, podemos concluir  $\approx \subseteq \sim$ . Por lo tanto  $f$  pasa al cociente y obtenemos una función  $\bar{f}$ .

- $\bar{f}$  es morfismo: Sean  $(\overline{h_n, \dots, h_1}), (\overline{l_m, \dots, l_1}) \in *_\cap \mathcal{H}$ . Elijamos índices  $\alpha_i$  con  $h_i \in H_{\alpha_i}$  y  $\beta_j$  con  $l_j \in H_{\beta_j}$  entonces:  

$$\bar{f}[(\overline{h_n, \dots, h_1}) * (\overline{l_m, \dots, l_1})] = \bar{f}[(\overline{h_n, \dots, h_1}) * (\overline{l_m, \dots, l_1})] = \bar{f}(\overline{h_n, \dots, h_1, l_m, \dots, l_1}) =$$

$$= f_{\alpha_n}(h_n) \dots f_{\alpha_1}(h_1) f_{\beta_m}(l_m) \dots f_{\beta_1}(l_1) = \bar{f}(\overline{h_n, \dots, h_1}) \cdot \bar{f}(\overline{l_m, \dots, l_1})$$

□

**Observación 5.2.3.** Cuando los subgrupos de  $\mathcal{H}$  verifican  $H_\alpha \cap H_\beta = 1$  para  $\alpha \neq \beta$  la propiedad universal se simplifica: la condición que pide a los  $f_\alpha$  compatibilidad en las intersecciones resulta superflua. Se obtiene entonces el coproducto de grupos, es decir, el producto libre usual  $*\mathcal{H}$ .

En general, el producto amalgamado de los subgrupos de  $\mathcal{H}$ , no es la "reconstrucción" prometida del grupo  $G$ . Esto se debe a que la construcción de  $*_\cap \mathcal{H}$  no involucra la forma en que se multiplican los elementos de diferentes subgrupos entre sí. Mostraremos que las relaciones algebraicas que nos falta agregar al producto amalgamado para recuperar  $G$  están en correspondencia con el grupo fundamental  $\pi_1(A(G, \mathcal{H}))$ . Seguimos aquí el trabajo [2].

**Proposición 5.2.4.** *Los elementos del producto amalgamado  $*_\cap \mathcal{H}$  se corresponden con los caminos débiles de  $A(G, \mathcal{H})$  que comienzan en 1 módulo homotopía con extremos fijos.*

*Demostración.* Recordemos que los elementos del producto amalgamado son clases de palabras  $(h_n, \dots, h_1)$  en los elementos de  $\cup_\alpha H_\alpha$ . Hay una correspondencia entre esas palabras y los caminos débiles  $(x_0, \dots, x_n)$  con  $x_0 = 1$ . En efecto, haciendo actuar sucesivamente los elementos de una palabra  $(h_n, \dots, h_1)$  conseguimos un camino débil  $x_0 = 1, x_i = h_i \cdot x_{i-1}$ . Recíprocamente, dado un camino débil  $(x_0, \dots, x_n)$  podemos obtener la palabra formada por los elementos  $h_i = x_i \cdot x_{i-1}^{-1}$  cuya acción nos lleva de cada punto al siguiente.

Resta ver que bajo esta correspondencia, la relación  $\approx$  utilizada en la construcción de  $*_\cap \mathcal{H}$  equivale a la homotopía de caminos.

En efecto,  $\approx$  es la menor relación de equivalencia en las palabras  $(h_n, \dots, h_1)$  compatible con concatenación que satisface  $(h', h) \approx (h'h)$  para todo  $\alpha$  y todos  $h, h' \in H_\alpha$ . Notemos que si  $x_i = h \cdot x_{i-1}$  y  $x_{i+1} = h' \cdot x_i$  entonces  $h, h' \in H_\alpha$  para algun  $\alpha$  sii  $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$  es simplex de  $V(A)$ . Por lo tanto, en términos de caminos débiles,  $\approx$  se traduce en pedir  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \approx (x_{i-1}, x_{i+1})$  siempre que  $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$  sea un simplex de  $V(A)$ . Luego  $\approx$  es la relación de homotopía de caminos.

□

**Definición 5.2.5.** Llamamos morfismo *evaluación*  $e : *_\cap \mathcal{H} \rightarrow G$  al definido por

$$e(\overline{h_n, \dots, h_1}) = h_n \cdot \dots \cdot h_1$$

Es decir, al morfismo que definen por propiedad universal las inclusiones  $j_\alpha : H_\alpha \rightarrow G$ .

**Observación 5.2.6.** En vista de la proposición anterior podemos dar una interpretación de  $e$  en términos de caminos. Sea  $w$  un camino débil que comienza en 1 entonces  $e(\bar{w})$  es el elemento de  $G$  donde finaliza  $w$ .

**Corolario 5.2.7.** Se tiene  $Ker e = \pi_1(A(G, \mathcal{H}), 1)$  y por lo tanto  $e$  determina un isomorfismo  $\frac{*_{\cap} \mathcal{H}}{\pi_1(A(G, \mathcal{H}), 1)} \approx G$ .

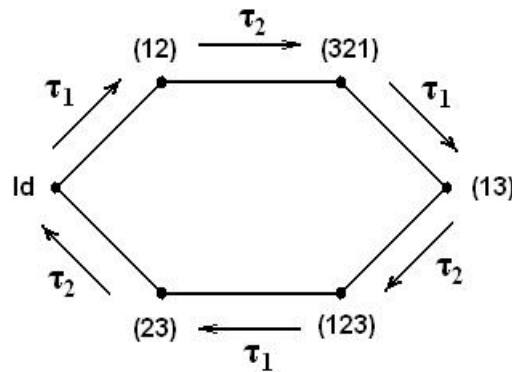
*Demostración.* Como consecuencia de la observación anterior es  $Ker e = \pi_1(A(G, \mathcal{H}), 1)$ . Por otro lado, como estamos suponiendo que la familia de subgrupos  $\mathcal{H}$  genera  $G$ , el morfismo evaluación es sobre.  $\square$

**Nota 5.2.8.** En el trabajo [1], que es anterior a [2], se ofrece una demostración del corolario que utiliza revestimientos:

Sean  $\tilde{G} = *_{\cap} \mathcal{H}$  y  $\tilde{\mathcal{H}} = \{i_\alpha(H_\alpha)\}$ . Se puede mostrar entonces que el morfismo evaluación induce un revestimiento de complejos simpliciales  $e : V(A(\tilde{G}, \tilde{\mathcal{H}})) \rightarrow V(A(G, \mathcal{H}))$  para el cual se tiene  $Aut e = Ker e$ . Luego se prueba que  $e$  es el revestimiento universal de  $V(A(G, \mathcal{H}))$  y por lo tanto  $Aut e = \pi_1(V(A(G, \mathcal{H}), 1))$ . De donde se obtiene  $Ker E = \pi_1(V(A(G, \mathcal{H}), 1))$  y se sigue el corolario.

**Ejemplo 5.2.9.** Sea  $G = S_3$  y consideremos las transposiciones  $\tau_1 = (12)$  y  $\tau_2 = (23)$ . Tomemos la familia  $\mathcal{H}$  compuesta de los subgrupos  $H = \langle \tau_1 \rangle$  y  $L = \langle \tau_2 \rangle$ .

El vitoris de  $A(G, \mathcal{H})$  es el siguiente hexágono:



Es un complejo simplicial conexo por lo tanto los subgrupos de  $\mathcal{H}$  generan  $S_3$ , o lo que es igual, las transposiciones  $\tau_1$  y  $\tau_2$  son generadores para  $S_3$ .

Notemos que  $H \cap L = 1$  y por lo tanto el producto amalgamado es sencillamente  $H * L$ .

Evidentemente  $\pi_1(V(A)) \approx \mathbb{Z}$ . La clase del camino señalado con flechas, que corresponde a la palabra  $\tau_2\tau_1\tau_2\tau_1\tau_2\tau_1$  de  $H * L$ , es un generador.

Concluimos entonces que  $S_3 = \frac{H * L}{\langle \tau_2\tau_1\tau_2\tau_1\tau_2\tau_1 \rangle}$  y recuperamos así la presentación clásica:

$$S_3 = \langle \tau_1, \tau_2 : \tau_1^2 = 1 \tau_2^2 = 1 \tau_1\tau_2\tau_1 = \tau_2\tau_1\tau_2 \rangle.$$

Observamos nuevamente que el Vitoris de un  $A(G, \mathcal{H})$  es geoméricamente homogéneo.

Sabemos que la arco-conexión de  $A(G, \mathcal{H})$  es equivalente a que la familia de subgrupos  $\mathcal{H}$  genere  $G$  (3.3.9). Según el corolario 5.2.7, la simple-conexión de  $A(G, \mathcal{H})$  es equivalente a que  $G$  sea el producto amalgamado de los subgrupos de  $\mathcal{H}$ . Es decir, corresponde a que  $\mathcal{H}$  genere  $G$  en un sentido más fuerte: las relaciones algebraicas entre elementos de  $G$  son las que se presentan dentro de los diferentes subgrupos.

Estos hechos sugieren "medir que tan buena" generadora es la familia  $\mathcal{H}$  por el grado de conexión de  $A(G, \mathcal{H})$ . La siguiente definición puede encontrarse en [1]:

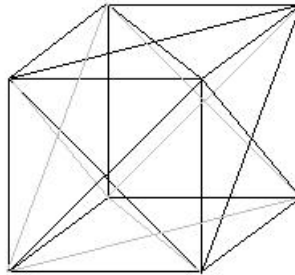
**Definición 5.2.10.** Una familia de subgrupos  $\mathcal{H}$  de  $G$  se dice  $n$ -generadora si el atlas  $A(G, \mathcal{H})$  es  $(n - 1)$ -conexo, es decir, si  $\pi_i(A(G, \mathcal{H})) = 1$  para  $0 \leq i < n$ .

**Ejemplo 5.2.11.** Sea  $G = S_4$  y consideremos las transposiciones  $\tau_1 = (12)$ ,  $\tau_2 = (23)$ ,  $\tau_3 = (34)$ . Elegimos  $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, H_3\}$  donde  $H_1 = \langle \tau_2, \tau_3 \rangle$ ,  $H_2 = \langle \tau_1, \tau_3 \rangle$ ,  $H_3 = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ .

El vioris tiene  $4! = 24$  vértices y dimensión 5, de modo que es bastante intratable. El nervio, en cambio, tiene 14 vértices y dimensión 2. En efecto  $H_i \approx S_3$  para  $i = 1, 3$  y  $H_2 \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Por lo tanto la cantidad de co-classes a izquierda es:

$$[G : H_1] + [G : H_2] + [G : H_3] = 4 + 6 + 4 = 14.$$

Afirmamos que  $N(A)$  consiste en el borde de un cubo con sus seis caras trianguladas por sus centros en la forma evidente:



En efecto, según sea  $i = 1, 2$  o  $3$  las co-classes a izquierda de  $H_i$  pueden pensarse:

1.  $\{f \in S_4 : f^{-1}(1) = k\}$  con  $k = 1, 2, 3, 4$ .
2.  $\{f \in S_4 : f^{-1}\{1, 2\} = \{k_1, k_2\}\}$  con  $\{k_1, k_2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$  y  $k_1 \neq k_2$ .
3.  $\{f \in S_4 : f^{-1}(4) = k\}$  con  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Cada una de las 6 co-classes de  $H_2$  determinada por un subconjunto  $\{k_1, k_2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$  es el centro de una cara. Llamemos  $\{l_1, l_2\} = \{1, 2, 3, 4\} - \{k_1, k_2\}$ . Entonces la correspondiente cara tiene vértices  $\{f \in S_4 : f^{-1}(1) = k_1\}$ ,  $\{f \in S_4 : f^{-1}(1) = k_2\}$ ,  $\{f \in S_4 : f^{-1}(4) = l_1\}$  y  $\{f \in S_4 : f^{-1}(4) = l_2\}$ .

Concluimos entonces que  $N(A) \approx S^2$  y por lo tanto  $\pi_1(A(G, \mathcal{H})) = 1$ . Luego, según el corolario,  $S_4$  es el producto amalgamado de los subgrupos de la familia  $\mathcal{H}$ . El grupo  $S_4$  resulta 2-generado por  $\mathcal{H}$ .

Notar también que este complejo simplicial se ve igual desde el centro de cualquiera de sus 6 caras. Esto es una consecuencia de la acción simplicial sobre el nervio, que tiene al conjunto de "centros" como una órbita.

### 5.3. Subgrupos como relaciones de equivalencia

Comenzamos esta sección mostrando que los atlas de subgrupos  $A(G, \mathcal{H})$  pueden verse como atlas de relaciones de equivalencia:

En efecto, sea  $H_\alpha \in \mathcal{H}$  un subgrupo. El grupoide  $H_\alpha \times G$  asociado a la acción de  $H_\alpha \curvearrowright G$  es simplemente conexo y tiene como componentes a las co-classes a izquierda de  $H_\alpha$ . Entonces podemos pensarlo como la relación de equivalencia  $\approx_\alpha$  definida para  $x, y \in G$  por:

$$x \approx_\alpha y \Leftrightarrow yx^{-1} \in H_\alpha$$

De esta forma concluimos que  $A(G, \mathcal{H}) = A(X, \mathcal{E})$  donde  $X$  es el conjunto subyacente a  $G$  y  $\mathcal{E} = \{\approx_\alpha : H_\alpha \in \mathcal{H}\}$ .

Por lo tanto, los resultados vistos para atlas de relaciones son aplicables en el contexto actual de subgrupos:

Notemos que la condición de completitud de  $(X, \mathcal{E})$  se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{Para toda elección de } x_1, \dots, x_n \in G \text{ se tiene } H_1x_1 \cap \dots \cap H_nx_n \neq \emptyset$$

Obtenemos entonces :

**Proposición 5.3.1.** *Supongamos que la familia de subgrupos es finita,  $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_n\}$  con  $[G : H_i] < \infty$  para todo  $i$ .*

*Si para toda elección de  $x_1, \dots, x_n \in G$  se tiene  $H_1x_1 \cap \dots \cap H_nx_n \neq \emptyset$  entonces resulta  $V \approx N \approx \vee_{\prod_j ([G:H_j]-1)} S^{n-1}$  y en particular  $G$  esta  $(n-1)$  – generado por la familia  $\mathcal{H}$ .*

*Demostración.* Es la caracterización 4.3.14 para el tipo homotópico de un par  $(X, \mathcal{E})$  completo. Como  $A(X, \mathcal{E})$  resulta  $(n-2)$  – conexo entonces  $\mathcal{H}$  es  $(n-1)$  – generadora.  $\square$

**Ejemplo 5.3.2.** Sean  $G_1, \dots, G_n$  grupos finitos y consideremos su producto directo  $G = \prod_j G_j$ . Llamemos  $\mathcal{H}$  a la familia de subgrupos  $H_i = \prod_{j \neq i} G_j$  con  $i = 1, \dots, n$ .

Dados  $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^n) \in G$   $i = 1, \dots, n$  podemos formar  $\tilde{x} \in G$  tomando como coordenada  $i$ -ésima a  $x_i^i$  y resulta  $\tilde{x} \in \cap_j H_j x_j$ . (comparar con 4.3.5)

Concluimos entonces por 5.3.1 que  $V \approx N \approx \vee_{\prod_j ([G:H_j]-1)} S^{n-1}$  y que  $G$  esta  $(n-1)$  – generado por la familia  $\mathcal{H}$ .

Veamos que relación hay entre el grupo  $G$  y el producto amalgamado  $*_{\cap} \mathcal{H}$ :

- Si  $n \geq 3$ ,  $\pi_1(A(G, \mathcal{H})) = 1$  y por lo tanto es  $G = *_{\cap} H_\alpha$ .
- Para  $n = 2$ ,  $\pi_1(A(G, \mathcal{H}))$  es grupo libre de rango  $([G : H_1] - 1)([G : H_2] - 1)$ . Se pueden elegir como generadores los conmutadores  $aba^{-1}b^{-1} \in H_1 * H_2$  con  $a \in H_1$  y  $b \in H_2$   $a, b \neq 1$ . Por otro lado, es  $H_1 \cap H_2 = 1$  y por lo tanto  $H_1 *_{\cap} H_2 = H_1 * H_2$ .

Obtenemos así la relación usual entre el producto directo y el libre:  $G = \frac{H_1 * H_2}{\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle}$ .

Para terminar nos concentramos en el caso en el cual la familia  $\mathcal{H}$  esta formada por dos subgrupos  $H_1$  y  $H_2$  de índice finito en  $G$ . Sean  $\mathcal{E} = \{\approx_1, \approx_2\}$  las correspondientes relaciones de equivalencia.

Es fácil probar que la relación de equivalencia correspondiente al subgrupo generado  $\langle \mathcal{H} \rangle$  es  $\approx_{\cup \mathcal{E}}$  y la correspondiente al subgrupo intersección  $\cap \mathcal{H}$  es  $\approx_{\cap \mathcal{E}}$ .

Entonces podemos expresar los resultados obtenidos en 4.4 en términos de índices:

**Proposición 5.3.3.** *El grupo de homología  $H_1(A(G, \mathcal{H}))$  es libre con rango:*

$$([G : \langle \mathcal{H} \rangle] + [G : \cap \mathcal{H}]) - ([G : H_1] + [G : H_2])$$

Con esta proposición podemos dar el siguiente refinamiento de 5.2.7 :

**Corolario 5.3.4.** *Supongamos que los subgrupos  $H_1$  y  $H_2$  generan el grupo  $G$  entonces este puede recuperarse del producto amalgamado  $H_1 *_{\cap} H_2$  imponiendo  $1 + [G : \cap \mathcal{H}] - ([G : H_1] + [G : H_2])$  relaciones.*

*Demostración.* Como consecuencia de la proposición anterior el grupo fundamental  $\pi_1(A(G, \mathcal{H}))$  resulta libre en  $(1 + [G : \cap \mathcal{H}] - ([G : H_1] + [G : H_2]))$  generadores.  $\square$

**Corolario 5.3.5.**  $[G : \langle \mathcal{H} \rangle] + [G : \cap \mathcal{H}] \leq [G : H_1] \cdot [G : H_2] + 1$

*Vale la igualdad si y solo si para toda elección de  $x_1, x_2 \in G$  se tiene  $H_1 x_1 \cap H_2 x_2 \neq \emptyset$ .*

**Corolario 5.3.6.**  $[G : H_1] + [G : H_2] \leq [G : \langle \mathcal{H} \rangle] + [G : \cap \mathcal{H}]$

*Vale la igualdad si y solo si las componentes de  $N$  (o equivalentemente las de  $V$ ) son contráctiles.*

**Observación 5.3.7.** Notemos que:

$\approx_1$  y  $\approx_2$  son comparables  $\Leftrightarrow H_1$  y  $H_2$  son comparables (es decir  $H_1 \subset H_2$  ó  $H_2 \subset H_1$ )

Además, es fácil ver que *para las relaciones provenientes de subgrupos* vale:

$\approx_1$  y  $\approx_2$  son comparables  $\Leftrightarrow \approx_1$  y  $\approx_2$  son localmente comparables

Obtenemos entonces de los resultados 4.4.7 y 4.4.8:

**Proposición 5.3.8.** *Son equivalentes:*

1.  $H_1$  y  $H_2$  son comparables
2. Las componentes de  $V$  son simplices (generalizados)
3. Las componentes de  $N$  son estrellas



# Bibliografía

- [1] H. Abels, S. Holz. *Higher generation by subgroups*. J.Alg **160** pp. 311-341 (1993)
- [2] A. Bak, R. Brown, E. G. Minian, T. Porter. *Global actions, groupoid atlases and applications*. Journal of Homotopy and Related Structures **1** pp. 101-167 (2006)
- [3] R. Brown. *Topology and grupoids*. Booksurge (2006)
- [4] C. H. Dowker. *Homology groups of relations*. Annals of Maths **56** (1952)
- [5] P. J. Higgins. *Categories and Grupoids*. Reprints in Theory and Applications of Categories **7** pp. 1-195 (1971)
- [6] M. L. del Hoyo, E.G. Minian. *Classical invariants for global actions and grupoid atlases*. Applied Categorical Structures (a ser publicado)
- [7] M. C. McCord. *Homotopy type comparison of a space with complexes associated with its open covers*. Proceedings of the American Mathematical Society **18** pp. 705-708 (1967)
- [8] E. G. Minian., *Notas de Topología Algebraica*. (Curso dictado en Elena II, Vaquerías). Universidad Nacional de Córdoba, FaMAF (2004)
- [9] E. G. Minian., *Poliedros asociados a relaciones y cubrimientos*. (Notas de Topología Diferencial), UBA (2005)
- [10] E. H. Spanier. *Algebraic topology*. McGraw-Hill (1966)
- [11] R. Switzer. *Algebraic Topology. Homotopy and Homology*. Springer-Verlag (1975)