**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

**Departamento de Matemática**

**Tesis de Licenciatura**

# Anillos de Cohen-Macaulay
# y
# Teoría de Invariantes

**Gonzalo Comas**

**Director:** Fernando Cukierman

4 de septiembre de 1997

# Índice general

# Introducción

A principios de la década del '70, los matemáticos Hochster e Eagon querían probar que el ideal generado por los menores de tamaño $t+1$ de una matriz de tamaño $r \times s$ con coeficientes en un anillo (conmutativo y con unidad) $R$ era perfecto si su grado era $(s-t)(r-t)$, el más grande posible. El resultado ya había sido demostrado para $t=0$, $t=1$ y para $t+1=r \leq s$.

En el camino encontraron una manera de probar esto usando teoría de invariantes. Notaron que este ideal surge como solución del segundo problema fundamental de la teoría de invariantes, que es encontrar generadores para el ideal de las relaciones entre los generadores de un anillo de invariantes. Más precisamente encontraron una representación de un grupo tal que el ideal generado por las relaciones entre los generadores del anillo de invariantes coincidía con el ideal en el que estaban interesados. Entonces, usando un teorema que caracteriza a los anillos graduados que son Cohen-Macaulay, redujeron el problema a probar que cierto anillo de invariantes era Cohen-Macaulay.

A pesar de haber encontrado una demostración de este hecho, no los conformó, pues servía sólo para el caso en que se trabajaba en un anillo de polinomios sobre un cuerpo de característica cero.

Finalmente dejaron de lado la teoría de invariantes y encontraron una demostración independiente de ella. Tenía la desventaja de que era necesario demostrar que todos los ideales de una familia de ideales más grande y más complicada eran perfectos. Lo más sorprendente es que cada uno de estos ideales podía obtenerse también como solución del segundo problema de la teoría de invariantes para una representación de un grupo reductivo. Lo cual permitió encontrar varios ejemplos de anillos de invariantes que eran Cohen-Macaulay.

Con todos estos ejemplos en mente se abocaron a la tarea de "cazar" (usando sus propias palabras) ideales perfectos y anillos de Cohen-Macaulay. Claramente buscaban anillos de invariantes, e ideales generados por las relaciones entre los generadores de estos anillos. Ejemplos de tales anillos son los anillos homogéneos de coordenadas de las Grassmannianas y de las subvariedades de Schubert de estas, y el anillo de invariantes de cualquier representación racional de un toro $GL(1,K)^m$. Al no encontrar ejemplos de representaciones de grupos reductivos en las que el anillo de invariantes no sea Cohen-Macaulay conjeturaron que esto debía ocurrir en general. Fue así que Hochster conjeturó que si un grupo reductivo actúa racionalmente en un anillo de polinomios, entonces el anillo de invariantes es Cohen-Macaulay.

Parte de esta motivación esta relacionada con el renacer que tuvo el estudio de invariantes de representaciones gracias a los trabajos del matemático Mumford, quien introdujo una nueva teoría, la teoría geométrica de invariantes.

Ya en la década del '80, Hochster junto con Roberts pudo probar la conjetura que los anillos de invariantes son Cohen-Macaulay, usando teoría de haces coherentes. Posteriormente, el matemático Kempf dió una demostración más simple de esta conjetura usando teoría de clases características.

En el presente trabajo estudiaremos los ejemplos que motivaron a Eagon y Hochster. En primer lugar, en el capítulo 1, probaremos que el anillo de invariantes de cualquier representación racional de un toro $GL(1, K)^m$ es Cohen-Macaulay. De paso demostraremos que en el caso en que un grupo finito actúa en un anillo, y el orden del grupo es invertible en el anillo entonces el anillo de invariantes es Cohen-Macaulay.

En el capítulo 2 enunciaremos los resultados de [Ho Ea], poniendo énfasis en la relación que hay entre algunos anillos de invariantes y ciertos ideales de determinantes. En general vamos a probar los resultados en el caso en que el cuerpo en el que trabajamos es algebraicamente cerrado, para dar una motivación geométrica, dando las referencias para ver las demostraciones en el caso general.

La relación entre estos anillos y las subvariedades de Schubert de las Grassmannianas lo veremos en el capítulo 3. En este capítulo trabajaremos en un cuerpo de característica cero, y nuevamente lo supondremos algebraicamente cerrado (con lo cual el lector prefiera pensar que este cuerpo es $\mathbb{C}$).

Para estos dos capítulos, suponemos conocidas nociones básicas de geometría algebraica, en especial los teoremas de dimensión de variedades algebraicas (teoremas 11.12 y 11.14 de [Ha]). También usaremos el teorema de los ceros de Hilbert (razón por la que trabajaremos con cuerpos algebraicamente cerrados).

Si se desea mayor información respecto a los resultados de teoría de invariantes que se utilizan en estos tres capítulos, se recomienda la lectura de los capítulos de [Di Ca] y [We] citados durante los mismos.

Para no distraer la atención, los principales resultados que usaremos están comprendidos en dos apéndices. En el primero enunciaremos resultados básicos de álgebra conmutativa, entre los cuales se encuentran la dimensión y la profundidad de anillos y módulos, y la noción de anillo Cohen-Macaulay. Presuponemos conocidos los elementos de la descomposición primaria de módulos y anillos.

En el segundo de los apéndices demostramos teoremas de álgebra homológica que necesitaremos para probar la caracterización de álgebras graduadas que son Cohen-Macaulay. Para este segundo apéndice presuponemos conocimientos básicos de álgebra homológica, en especial manejo del funtor Ext.

# Capítulo 1

# Anillos de invariantes de un toro

En este capítulo probaremos que el anillo de invariantes de una representación racional del grupo $G = GL(1,K)^m$ es de Cohen-Macaulay. Para ello vamos a seguir los pasos hechos en [Ho 2].

## 1.1. Planteo del problema

Sea $G = GL(1,K)^m$ , y tomemos una acción racional de $G$ en un espacio $V$ de dimensión $n$ . Tomemos la acción inducida en el álgebra simétrica de $V$ , $K[x_1,\ldots,x_n]$ . Fijada una base de $V$ y un isomorfismo de $V$ en $K^n$ , un elemento $g \in G$ actúa asignando a un polinomio $p \in K[x_1,\ldots,x_n]$ el polinomio $p(g(x_1,\ldots,x_n))$ .

Nuestro primer objetivo es probar el siguiente

**Teorema 1** *Si $G = GL(1,K)^m$ actúa racionalmente en un espacio vectorial $V$ de dimensión finita, entonces $K[x_1,\ldots,x_n]^G$ , el anillo de invariantes de la acción inducida de G en el álgebra simétrica $K[x_1,\ldots,x_n]$ de V, es Cohen-Macaulay.*

Para hacer esto vamos a replantear el problema, relacionando una representación de $G = GL(1,K)^m$ con las soluciones enteras no negativas de un sistema de ecuaciones con coeficientes enteros.

La acción se puede diagonalizar de manera que un elemento $a = (a_1,\ldots,a_m) \in G$ actúa en $K[x_1,\ldots,x_n]$ de la siguiente manera

$$x_j \longmapsto a_1^{t_{1j}} \ldots a_m^{t_{mj}} x_j,$$

para cada $1 \leq j \leq n$ , y donde los $t_{ij}$ son los $mn$ enteros que determinan la representación diagonal. (Esto se puede deducir de [Di Ca, Ch. 2 Sec.1].)

Luego, un elemento $(a_1,\ldots,a_m) \in G$ actúa en un monomio $x_1^{h_1},\ldots,x_n^{h_n}$ vía

$$x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n} \mapsto a_1^{t_{11}h_1+\cdots+t_{1n}h_n} \ldots a_m^{t_{m1}h_1+\cdots+t_{mn}h_n} x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n}$$

Es claro entonces que si un polinomio $p \in K[x_1, \dots, x_n]$ es invariante por $G$, deben serlo también cada uno de sus monomios. Entonces $K[x_1, \dots, x_n]^G$ está generado como $K$-espacio vectorial por los monomios $x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n}$ invariantes por la acción de $G$, que son aquellos que verifican

$$t_{i1}h_1 + \cdots + t_{in}h_n = 0, \text{ para cada } 1 \leq i \leq m.$$

Recíprocamente, sea

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} t_{11}h_1 & + & \cdots & + & t_{1n}h_n & = & 0 \\ t_{21}h_1 & + & \cdots & + & t_{2n}h_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{m1}h_1 & + & \cdots & + & t_{mn}h_n & = & 0 \end{array} \right.$$

un sistema homogéneo de $m$ ecuaciones y $n$ incógnitas a coeficientes enteros. Consideremos la representación de $GL(1,K)^m$ en $K[x_1, \dots, x_n]$ en la que un elemento $(a_1, \dots, a_n) \in G$ actúa en las variables por

$$x_j \longmapsto a_1^{t_{1j}} \dots a_m^{t_{mj}} x_j,$$

para cada $1 \leq j \leq n$. Entonces el anillo de invariantes $K[x_1, \dots, x_n]^G$ está generado como $K$-espacio vectorial por los monomios cuyos exponentes verifican el sistema dado. Sea $M$ el conjunto de los monomios cuyos exponentes satisfacen el sistema dado, entonces lo que queremos ver es que $K[M]$ es Cohen-Macaulay.

El caso en que el cuerpo $K$ es finito lo desarrollaremos en la sección 1.5

Pero primero necesitamos desarrollar algunas ideas.

## 1.2. Subsemigrupos de monomios

En esta sección vamos a dar una caracterización para el anillo de invariantes que queremos estudiar, en función de ciertos subsemigrupos de monomios.

**Definición 1.1** *Sea $(N, \cdot)$ un semigrupo conmutativo y cancelativo. Vamos a decir que un subsemigrupo $M \subset N$ es completo si para cada terna de elementos $p, p', p'' \in N$ tales que $pp' = p''$ y $p', p'' \in M$ se verifica que $p \in M$.*

*Vamos a decir que un subsemigrupo $M \subset N$ es normal si es finitamente generado y si para cada terna de elementos $p, p', p'' \in M$ y cada número natural n tales que $p(p')^n = (p'')^n$, existe un elemento $q \in M$ tal que $p = q^n$.*

Observar que la característica de ser completo depende de la estructura de semigrupo de $M$ y de cómo $M$ está inmerso en $N$, mientras que la caractirística de ser normal depende sólo de la estructura de semigrupo de $M$.

Es fácil ver que si un subsemigrupo finitamente generado es completo, entonces también es normal.

Vamos a trabajar con el semigrupo $N$ de monomios en las variables $x_1, \ldots, x_n$, con lo que vamos a hablar de subsemigrupos completos y subsemigrupos normales de monomios. También trabajaremos con el semigrupo $\mathbb{Z}_+^n = \{(h_1, \ldots, h_n) : h_i \in \mathbb{Z} \text{ y } h_i \geq 0\}$.

Si $x_1, \ldots, x_n$ son indeterminadas, y $(h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, denotamos con $x^h$ a $x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n}$. Esto permite definir un isomorfismo entre el semigrupo $\mathbb{Z}_+^n$ con la suma y el semigrupo de monomios en las variables $x_1, \ldots, x_n$ con la multiplicación. A la aplicación inversa la llamaremos $\log$. Es claro que entonces un subsemigrupo $M$ de monomios va a ser completo (respectivamente normal) si y sólo si $\log M$ lo es como subsemigrupo de $(\mathbb{Z}_+^n, +)$.

Introduzcamos la siguiente notación: $\mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}$ es el conjunto de los racionales no negativos, y $\mathbb{Q}_+^n$ denota el primer cuadrante de $\mathbb{Q}^n$. Si $S \subset \mathbb{Q}^n$, notamos con $S_+$ a $S \cap \mathbb{Q}_+^n$. Dado que $(\mathbb{Q}_+^n, +)$ es un semigrupo, hablaremos de subsemigrupos de $\mathbb{Q}_+^n$ completos.

Sea $H \subset \mathbb{Z}_+^n$ un subsemigrupo. Notaremos con $\mathbb{Q}(H)$ al subespacio de $\mathbb{Q}^n$ que generan los elementos de $H$, con $\mathbb{Z}(H)$ al grupo abeliano $H - H = \{h - k : h, k \in H\}$ y con $\mathbb{Q}_+(H)$ al conjunto de las combinaciones $\mathbb{Q}_+$-lineales de elementos de $H$ (que es el conjunto $\{\frac{h}{n} : h \in H, n \in \mathbb{Z}\}$).

Los subsemigrupos completo de monomios están relacionados con el anillo de invariantes que estamos estudiando: los monomios que generan este anillo de invariantes forman un subsemigrupo completo de monomios (pues sus exponentes son soluciones de un sistema de ecuaciones lineales). Luego, para ver que el anillo de invariantes de una representación racional de un toro es Cohen-Macaulay basta ver que si $K$ es un cuerpo y $M$ es un semigrupo completo de monomios, entonces $K[M]$ es Cohen-Macaulay.

Por otro lado, los semigrupos completo y normales de monomios se relacionan con anillos normales. (Un dominio se dice *normal* si es noetheriano e íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones. Por ejemplo, si $K$ es un cuerpo, el anillo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$ es normal.)

**Proposición 1.2** *Sea M un semigrupo de monomios en las variables* $x_1, \ldots, x_n$. *Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes :*

1. *Existe un cuerpo K tal que* $K[M] \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ *es normal.*

2. *M es normal.*

3. *M es isomorfo como semigrupo a un semigrupo completo de monomios en algún conjunto finito de variables.*

4. *M es finitamente generado como semigrupo y para cada dominio D íntegramente cerrado el subanillo* $D[M] \subset D[x_1, \ldots, x_n]$ *es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones.*

Con esto podemos reducir nuestro problema a probar que si $M$ es un subsemigrupo normal de monomios, entonces $K[M]$ es Cohen-Macaulay.

Vamos a dar unas definiciones y unos lemas antes de la demostración de esta proposición.

**Definición 1.3** *Sean* $R \subset S$ *anillos. Vamos a decir que* $\rho : S \to R$ *es un operador de Reynolds para el par* $(R, S)$ *si y sólo si* $\rho$ *es un morfismo de R-módulos tal que* $\rho(r) = r$ *para todo* $r \in R$.

Observemos que la existencia de un operador de Reynolds equivale a la existencia de un $R$-submódulo $T \subset S$ tal que $R \oplus T = S$.

Es fácil verificar que si el par $(R, S)$ tiene un operador de Reynolds y $S$ es noetheriano, entonces $R$ es noetheriano.

**Lema 1.4** *Sea M un subsemigrupo completo de monomios en las variables* $x_1, \ldots, x_n$. *Entonces para cada anillo R existe un operador de Reynolds para el par* $(R[M], R[x_1, \ldots, x_n])$. *Por lo tanto si R es noetheriano, entonces* $R[M]$ *lo es, y en consecuencia M es finitamente generado como semigrupo.*

*Demostración:* $R[M]$ es un $R$-módulo libre con los elementos de $M$ como base. Podemos tomar como complemento de $R[M]$ el $R$-submódulo libre $T \subset R[x_1, \ldots, x_n]$ generado por los monomios que no pertenecen a $M$. Como $M$ es completo, el producto de un monomio que pertenece a $M$ por uno que no pertenece, no está en $M$, luego $T$ resulta un $R[M]$-módulo.

Como $R[x_1, \ldots, x_n]$ es noetheriano si $R$ lo es, entonces $R[M]$ también lo es. Si en particular $R = K$ un cuerpo, $K[M]$ es una $K$-álgebra graduada noetheriana. Por lo tanto existen monomios $p_1, \ldots, p_k \in M$ que generan el ideal maximal de $K[M]$. Entonces $K[M] = K[p_1, \ldots, p_k]$, y por lo tanto $M$ está generado como semigrupo por $p_1, \ldots, p_k$. ■

**Lema 1.5** *Sea M un subsemigrupo completo de monomios en las variables* $x_1, \ldots, x_n$ *y sea K un cuerpo. Sea F el cuerpo de fracciones de* $K[M]$. *Entonces* $F \cap K[x_1, \ldots, x_n] = K[M]$. *Por lo tanto* $K[M]$ *es íntegramente cerrado en F.*

*Demostración:* Supongamos que existe un elemento $g \in (F \cap K[x_1, \ldots, x_n]) - K[M]$. Podemos suponer sin perder generalidad que ninguno de los monomios de $g$ está en $M$. Entonces $g = f/f'$ donde $f, f' \in K[M] - 0$. Sea $p$ un monomio de $f = gf'$. Se puede escribir a $p$ como $p'p''$ donde $p'$ y $p''$ son monomios de $g$ y $f'$ respectivamente. Como $p, p' \in M$ y $M$ es completo, $p'' \in M$ lo cual es un absurdo. ■

Veamos ahora la demostración de la proposición 1.2

*Demostración:* (*de la proposición 1.2*).

1) $\Rightarrow$ 2) Como $K[M]$ es una $K$-álgebra graduada noetheriana, existen monomios $p_1, \ldots, p_k$ en $M$ que generan el ideal maximal de $K[M]$, y por lo tanto $M$ está generado como semigrupo por $p_1, \ldots, p_k$. Sean ahora $p, p', p'' \in M$ tales que $p(p')^n = (p'')^n$. Entonces $(p''/p')^n = p$, por lo que $p''/p'$ está en la clausura entera de $K[M]$, y por lo tanto en $K[M]$. Como $p''/p'$ es un monomio y $K[M]$ es libre sobre $K$ con los elementos de $M$ como base, tiene que pasar que $p''/p' \in M$.

2) $\Rightarrow$ 3) Ver [Ho 2, Página 323].

3) $\Rightarrow$ 4) Sale usando los dos lemas anteriores y el hecho que si dos semigrupos de monomios $M$ y $M'$ son isomorfos como semigrupos, las álgebras $R[M]$ y $R[M']$ lo son como $R$-álgebras (pues son las álgebras de semigrupo de $M$ y $M'$).

4) $\Rightarrow$ 1) Trivial. ∎

Tenemos que hacer aún otra reducción, queremos ver que el que $K[M]$ sea Cohen-Macaulay para un subsemigrupo normal depende solamente de la estructura de semigrupo de $\mathbb{Q}_+(\log M)$.

**Definición 1.6** *Sea $(N, \cdot)$ un semigrupo conmutativo y cancelativo, y $M \subset N$ un subsemigrupo completo. Definiremos la expansión de M como el conjunto $M^e$ de elementos $p \in N$ tales que $p^k \in M$ para algún entero $k > 0$. Si un subsemigrupo completo M verifica que $M = M^e$ diremos que M es expandido.*

Hablaremos entonces de expansión de subsemigrupos completos de monomios y de subsemigrupos de monomios expandidos; y también de expansión de subsemigrupos de $\mathbb{Z}_+^n$ completos y de subsemigrupos de $\mathbb{Z}_+^n$ completos expandidos.

Tenemos el siguiente lema

**Lema 1.7** *Sea $S \subset \mathbb{Z}_+^n$ un subsemigrupo completo, entonces S es expandido si y sólo si se verifican una de las dos siguientes proposiciones equivalentes*

1. *$S = W \cap \mathbb{Z}_+^n$ , donde W es un subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^n$.*

2. *S es el conjunto de soluciones enteras no negativas de un sistema lineal homogéneo de ecuaciones a coeficientes enteros.*

*Demostración:* Es claro que 1) es equivalente 2), y también es claro que $W \cap \mathbb{Z}_+^n$ es expandido. Por otro lado tomemos $S$ un semigrupo expandido y sea $W$ el subespacio vectorial generado por los elementos de $S$. Veamos que $S = W \cap \mathbb{Z}_+^n$ Es claro que $S \subset W \cap \mathbb{Z}_+^n$, pues $S \subset W$ y $S \subset \mathbb{Z}_+^n$. Por otro lado sea $w \in W \cap \mathbb{Z}_+^n$, entonces $w = q_1 s_1 + \cdots + q_k s_k$, donde cada $q_i \in \mathbb{Q}$ y cada $s_i \in S$. Multiplicando a $w$ por el mínimo común múltiplo de los denominadores de los $q_i$ obtenemos $nw = a_1 s_1 + \cdots + a_k s_k$, donde ahora cada $a_i \in \mathbb{Z}$, y $n \in \mathbb{N}$. Pasando de miembro los $a_i s_i$ tales que $a_i < 0$, conseguimos escribir $nw + s = s'$, con $s, s' \in S$, con lo cual $nw \in S$ (pues $S$ es completo) y por lo tanto $w \in S$, ya que $S$ es expandido. ∎

**Lema 1.8** *Sea M un semigrupo expandido de monomios, entonces $K[M]$ es el anillo de invariantes de una representación de un toro. Recíprocamente, cada anillo de invariantes de una representación de un toro es K-isomorfo a $K[M]$ para un semigrupo expandido de monomios.*

*Demostración:* El único enunciado que no conocíamos es el primero. Pero por la caracterización 2) del lema anterior $\log M$ es el conjunto de soluciones enteras no negativas de un sistema de $m$ ecuaciones a coeficientes enteros. Y ya vimos cómo construir una representación de $GL(1, K)^m$ tal que su anillo de invariantes sea $K[M]$. ∎

Los siguientes dos lemas terminan de caracterizar a los anillos generados por semigrupos de monomios (normales, completo, y expandidos).

**Lema 1.9** *Sea $M$ un semigrupo completo de monomios en $x_1, \ldots, x_n$ y $K$ un cuerpo, entonces la clausura entera de $K[M]$ en $K[x_1, \ldots, x_n]$ es $K[M^e]$ y por lo tanto $K[M]$ es entero en $K[x_1, \ldots, x_n]$ si y sólo si $M$ es expandido.*

*Demostración:* Haremos la demostración en el caso en que el cuerpo $K$ es infinito.

sólo tenemos que ver que $K[M]$ es íntegramente cerrado en $K[x_1, \ldots, x_n]$ si $M$ es expandido. Ahora, en este caso $K[M] = K[x_1, \ldots, x_n]^G$, donde $G$ es un toro actuando racionalmente. Tomemos un elemento $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$ entero sobre $K[x_1, \ldots, x_n]^G$. El estabilizador de $p$, $G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$ es cerrado en $G$. Además el cociente $G/G_p$ es finito pues es isomorfo a la órbita de $p$ que está contenida en el conjunto de raíces de la ecuación de dependencia de $p$. Dándole a $G/G_p$ la topología cociente, tenemos que $G/G_p$ es conexo pues $G$ lo es (acá es donde necesitamos que el cuerpo sea infinito). Pero como $G/G_p$ es además finito, entonces $G/G_p = \{*\}$. Luego $G = G_p$ y por lo tanto $p \in K[x_1, \ldots, x_n]^G$. ■

El lema anterior no hace a la demostración del teorema 1, pero termina la caracterización de anillos generados por subsemigrupos de monomios.

**Lema 1.10** *Sean $M$ y $M'$ dos semigrupos normales de monomios tales que $\mathbb{Q}_+(\log M)$ y $\mathbb{Q}_+(\log M')$ sean isomorfos como semigrupos, entonces $K[M]$ es Cohen-Macaulay si y sólo si $K[M']$ lo es.*

*En particular, si $M$ es un semigrupo completo entonces $K[M]$ es Cohen-Macaulay si y sólo si $K[M^e]$ lo es. (Pues $\mathbb{Q}_+(\log M) = \mathbb{Q}_+(\log M^e)$ ).*

*Demostración:* Ver [Ho 2, Página 326]. ■

Antes de seguir observemos que por todo lo hecho, para ver que nuestro anillo de invariantes es Cohen-Macaulay basta ver que si $M$ es un semigrupo expandido de monomios, entonces $K[M]$ es Cohen-Macaulay. Esto es lo que haremos, pero primero necesitamos introducir la noción de politopo de ideales.

## 1.3. Politopos de ideales

En esta sección vamos a definir lo que es un politopo de ideales con el fin de aprovechar propiedades de los politopos usuales que se traducen a propiedades de ideales. Por *politopo* vamos a entender la realización geométrica de un complejo simplicial. En nuestro caso particular vamos a trabajar con politopos que son la cápsula convexa de finitos puntos de $\mathbb{Q}^n$ (o sea, vamos a trabajar con poliedros en $\mathbb{Q}^n$ ).

Llamaremos *dimensión* de un politopo $P$ al número entero $d-1$ donde $d$ es la mayor cantidad de puntos de $P$ afínmente independientes. Sea $H$ el hiperplano

$$\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{Q}^n : a_1x_1+\cdots+a_nx_n=r\}.$$

Si se verifica que

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n\geq r \text{ para todos los } (x_1,\ldots,x_n)\in P,$$

diremos que el conjunto $H\cap P$ es una *cara* de $P$. Observar que una cara de un politopo es un nuevo politopo, con lo que tiene sentido hablar de la dimensión de una cara.

Dado $P$ un politopo (real o racional) de dimensión $d$, vamos a notar con $\partial P$ a la unión de las caras de $P$ de dimensión $d-1$.

Y vamos a llamar $L(P)$ al conjunto formado por los subconjuntos de $\partial P$ que son uniones de caras (consideramos al conjunto $\emptyset$ como una cara de dimensión $-1$).

Observemos que $L(P)$ es un reticulado bajo $\cap$ y $\cup$. Notar también que cada elemento $B$ en $L(P)$ se escribe de manera única como una unión de caras (sin relaciones de inclusión entre ellas). A esas caras las llamaremos componentes de $B$. Definiremos la dimensión de un elemento $B$ en $L(P)$ como el supremo de las dimensiones de sus componentes.

Vamos a definir ahora un politopo de ideales.

**Definición 1.11** *Sea $R$ un anillo noetheriano de dimensión finita. Vamos a llamar politopo de ideales a un par $(\mathcal{I},\alpha)$ donde $\mathcal{I}$ es una familia de ideales propios de $R$ que forman un reticulado bajo $+$ y $\cap$, y $\alpha$ es un isomorfismo de reticulados*

$$\alpha:\mathcal{I}\to L(P)$$

*para algún politopo $P$ que invierte el orden, tal que para una constante $c\in\mathbb{Z}$ y para todo ideal $I$ en $\mathcal{I}$ se verifica*

$$\dim I-\dim\alpha(I)=c$$

*donde $\dim I$ es la dimensión del anillo $R/I$ (ver A.1).*

Si llamamos $\beta$ a la inversa de $\alpha$, entonces vamos a decir que un ideal $I=\beta(B)$ es un ideal cara de $\mathcal{I}$ si $B$ es una cara de $P$.

Similarmente a lo que ocurre con un politopo $P$, cada ideal de $\mathcal{I}$ puede escribirse de manera única como intersección de ideales cara (que no verifican relaciones de inclusión entre ellos).

Es fácil ver que si $\dim I-\dim\alpha(I)$ es constante en los ideales cara de $\mathcal{I}$ entonces es constante en todo $\mathcal{I}$. (Esto es porque $\dim I_1\cap I_2=\max\{\dim I_1,\dim I_2\}$).

Antes de seguir mostremos un ejemplo de un politopo de ideales de $K[x_1,\ldots,x_n]$:

- $\mathcal{I}$ será el reticulado de ideales formado por intersecciones de los ideales generados por subconjuntos no vacíos de $\{x_1,\ldots,x_n\}$.

- $P$ es el símplice $\Delta^{n-1} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{Q}^n : z_1 + \cdots + z_n = 1 \text{ y } z_i \geq 0 \; \forall \, i\}$

- La aplicación de $\mathcal{I}$ en $L(P)$ se define en los ideales generados por los subconjuntos no vacíos de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ asociando al ideal $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ la cara de $\Delta^{n-1}$ definida por $\{(z_1, \ldots, z_n) \in \Delta^{n-1} : z_{i_j} = 0 \; \forall \, 1 \leq j \leq r\}$

La aplicación se extiende luego a todos los ideales en $\mathcal{I}$ de forma que quede un morfismo de reticulados. Observar que por este isomorfismo el ideal $(x_1, \ldots, x_n)$ se corresponde con la cara $\emptyset$ de $\Delta^{n-1}$.

Falta todavía verificar que la diferencia entre la dimensión de un ideal en $\mathcal{I}$ y su subconjunto correspondiente en $\Delta^{n-1}$ es constante. Para esto basta ver que el resultado vale en los ideales generadores del reticulado (pues estos ideales se corresponden a las caras de $\Delta^{n-1}$). Pero esto último es claro, ya que la dimensión del conjunto

$$\{(z_1, \ldots, z_n) \in \Delta^{n-1} : z_{i_j} = 0 \; \forall \, 1 \leq j \leq r\}$$

es $(n - r) - 1$, y la dimensión del ideal

$$(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$$

es $n - r$.

Observemos que a pesar de que vamos a trabajar solamente con politopos racionales, vamos a probar resultados para politopos reales. Esto no va a traer problemas ya que el reticulado $L(P)$ es el mismo para un politopo racional que para el politopo real con los mismos vértices.

Demostraremos ahora un teorema que nos va a servir para trabajar con politopos de ideales homogéneos en anillos de polinomios.

Empecemos con una definición.

**Definición 1.12** *Vamos a definir un conjunto constructible en $L(P)$ de manera recursiva:*

1. *Cada cara en L(P) es constructible.*

2. *Si $B_1$ y $B_2$ son dos conjuntos constructibles de dimensión k y $B_1 \cap B_2$ es constructible de dimensión $k - 1$, entonces $B_1 \cup B_2$ es constructible.*

**Teorema 1.13** *Sea $\alpha : \mathcal{I} \to L(P)$ una aplicación que define un politopo de ideales en un anillo noetheriano R, y sea B un subconjunto constructible de $\partial P$. Entonces si R es una K-álgebra graduada finitamente generada para un cuerpo K, los ideales de $\mathcal{I}$ son homogéneos, y los ideales cara de $\mathcal{I}$ son semi-regulares, se tiene que $\beta(B)$ es semi-regular. (Recordamos que un ideal $I \subset R$ se dice semi-regular si $R/I$ es Cohen-Macaulay.)*

*Demostración:* Como $R$ es una $K$-álgebra graduada finitamente generada, entonces $R$ es isomorfa a $K[x_1,\ldots,x_n]/J$ donde $J$ es un ideal homogéneo (si le asignamos a cada $x_i$ el grado del respectivo generador de $R$). Dada la proyección

$$\pi : K[x_1,\ldots,x_n] \to K[x_1,\ldots,x_n]/J,$$

y dado $I \subset R$ un ideal homogéneo, llamaremos $\tilde{I} \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ al ideal $\pi^{-1}(I)$ (que es homogéneo también). Como $R/I$ es una $K$-álgebra graduada finitamente generada que es isomorfa a $K[x_1,\ldots,x_n]/\tilde{I}$ tenemos que

$$\dim R/I = \dim K[x_1,\ldots,x_n]/\tilde{I}$$

y que

$$I \text{ es semi-regular } \Leftrightarrow \tilde{I} \text{ es semi-regular.}$$

Además, el morfismo de reticulados desde $\mathcal{I}$ en el reticulado $\tilde{\mathcal{I}} = \{\pi^{-1}(I) : I \in \mathcal{I}\}$ es un isomorfismo. Como $\dim R/I = \dim K[x_1,\ldots,x_n]/\tilde{I}$ para cada ideal $I \subset \mathcal{I}$, el reticulado $\tilde{\mathcal{I}}$ es un politopo de ideales homogéneos en $K[x_1,\ldots,x_n]$. Por la última observación hecha en el párrafo anterior, este nuevo politopo verifica las hipótesis del teorema, luego podemos suponer que $R = K[x_1,\ldots,x_n]$ y que $\mathcal{I}$ es un politopo de ideales homogéneos en $K[x_1,\ldots,x_n]$, tal que sus ideales cara son semi-regulares.

Como un ideal homogéneo en $K[x_1,\ldots,x_n]$ es semi-regular si y sólo si es perfecto (por el teorema B.13) , veamos que los conjuntos constructibles de $L(P)$ se corresponden con ideales perfectos de $\mathcal{I}$.

Para esto observemos que los ideales cara son perfectos por hipótesis; y que si $I_1$ e $I_2$ son dos ideales perfectos de $\mathcal{I}$ ambos de dimensión $k$ y el ideal $I_1 + I_2$ es perfecto de dimensión $k-1$, entonces $I_1 \cup I_2$ es perfecto de dimensión $k+1$. Esto se deduce de la proposición B.12 una vez que se observa que en un anillo de polinomios, las nociones de altura y profundidad de ideales coinciden y por lo tanto $\operatorname{depth}_I(K[x_1,\ldots,x_n]) = \dim K[x_1,\ldots,x_n] - \dim I$, para cada ideal $I$ propio.

Luego por la definición de conjunto constructible, se ve que los ideales que corresponden a subconjuntos constructibles de $\partial P$ son perfectos. ■

En el siguiente corolario vamos a usar un resultado de [Br Ma] que afirma que $\partial P$ es constructible para cualquier politopo $P$ real y convexo.

**Corolario 1.14** *Sea $\alpha : \mathcal{I} \to L(P)$ una aplicación que da un politopo de ideales homogéneos en una $K$-álgebra graduada finitamente generada $R$. Supongamos que los ideales cara de $\mathcal{I}$ son semi-regulares. Entonces $\beta(\partial P)$ es semi-regular.*

*Demostración:* Sabemos que $\partial P$ es constructible (por el corolario de la proposición 2 de [Br Ma]). Luego por el teorema anterior $\beta(\partial P)$ es semi-regular. ■

## 1.4. Demostración del teorema principal

Ahora vamos a demostrar por inducción en $n$ que si $M$ es un semigrupo expandido de monomios en $x_1, \ldots, x_n$ y $K$ es un cuerpo, entonces $K[M]$ es Cohen-Macaulay.

Primero tenemos que construir un politopo de ideales asociado al semigrupo $M$. Vamos a usar el politopo que construimos como ejemplo en la sección 1.3.

Tomemos ahora la familia de ideales $\mathcal{J} = \mathcal{I} \cap K[M] = \{I \cap K[M] : I \in \mathcal{I}\}$ Vamos a probar que $\mathcal{J}$ es un politopo de ideales en $K[M]$. Observemos que si $I \in \mathcal{I}$ entonces $I \cap K[M]$ está generado como $K$-espacio vectorial por los monomios de $M$ que son múltiplos en $K[x_1, \ldots, x_n]$ de los monomios que generan a $I$.

Construyamos ahora el politopo que hará de $\mathcal{J}$ un politopo de ideales.

Sea $X$ el hiperplano de $\mathbb{Q}^n$ definido por la ecuación $q_1 + \cdots + q_n = 1$. Sea $P = X \cap \mathbb{Q}_+(M)$. Como $P$ depende de $M$ lo vamos a llamar también $P(M)$. $P$ es un politopo en $\mathbb{Q}^n$ pues es intersección finita y acotada de semi-espacios. Observemos que como cada rayo en $S = \mathbb{Q}_+(M)$ corta a $P$ en exactamente un punto, el reticulado $L(P)$ es isomorfo al reticulado $L$ de uniones no vacías de caras no vacías de $S$ (es claro que al pasar de $L(P)$ a $L$ las dimensiones son incrementadas en 1).

Dado $u$ un subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$ sea

$$I_u = (\{x_i : i \in u\}) \cap K[M].$$

El ideal $I_u$ está en $\mathcal{J}$ si $u \neq \emptyset$ ($I_\emptyset = (0)$).

Sean $M_u$ el conjunto de monomios en las variables

$$\{x_i : i \in \{1, \ldots, n\} - u\},$$

y $X_u$ el conjunto de puntos $(q_1, \ldots, q_n)$ en $\mathbb{Q}^n$ tales que $q_i = 0$ si $i \in u$. Tenemos entonces que $\log M_u = \mathbb{Z}_+^n \cap X_u$. Si $n(u)$ es el número de elementos en $\{1, \ldots, n\}$ que no están en $u$, entonces $X_u$ puede ser identificado con $\mathbb{Q}^{n(u)}$ y podemos pensar que la función log correspondiente a $K[M_u]$ va a parar a $X_u$ en vez de a $\mathbb{Q}^{n(u)}$.

El siguiente lema nos da una primera idea de cómo vamos a ver a $\mathcal{J}$ como un politopo de ideales.

**Lema 1.15** *Sea $M$ un semigrupo expandido de monomios en las variables $x_1, \ldots, x_n$. Entonces para cada $u \subset \{1, \ldots, n\}$, $M \cap M_u$ es un semigrupo expandido de monomios en las variables $\{x_i : i \in \{1, \ldots, n\} - u\}$.*

*Las caras de $P = P(M)$ son los conjuntos $P \cap X_u$ ($P$ es $P \cap X_\emptyset$). Las caras propias de dimensión máxima están entre los conjuntos $P \cap X_{\{i\}}$, $1 \leq i \leq n$.*

*Para cada u, $K[M]/I_u \cong K[M \cap M_u]$, y el politopo $P(M \cap M_u)$, pensado como un subconjunto de $X_u$, es $P(M) \cap X_u$.*

*Más aún, para cada* $u \subset \{1,\ldots,n\}$*, se tiene*

$$\dim I_u = \dim K[M]/I_u = \dim(P \cap X_u) + 1.$$

*En particular,* $\dim K[M] = \dim S = \dim P + 1$.

*Demostración:* Es claro que $M \cap M_u$ es expandido si $M$ lo es.

Si $u \in \{1,\ldots,n\}$, sea

$$H = \left\{ (q_1,\ldots,q_n) \in \mathbb{Q}^n : \sum_{i \notin u} -q_i = -1 \right\}.$$

Es claro que $\sum_{i \notin u} -q_i \geq -1$ si $(q_1,\ldots,q_n) \in P$, luego el conjunto

$$F_u = \left\{ (q_1,\ldots,q_n) \in P : \sum_{i \notin u} -q_i = -1 \right\}$$

es una cara de $P$. Pero es claro que $F_u = M_u$. Además, dado que $S = W \cap \mathbb{Q}^n_+$, donde $W$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, resulta que $P = X \cap (W \cap \mathbb{Q}^n_+)$, es fácil ver que entonces un punto cuyas coordenadas sean todas distintas de cero no puede pertenecer a ninguna cara.

Por otro lado, los ideales $I_u$ están generados como $K$-espacio vectorial por los monomios en $M$ en los que aparece una de las $x_i$ para un $i \in u$. Por lo tanto $K[M]/I_u \cong K[M \cap M_u]$. Más aún, se tiene lo siguiente :

$$X \cap \mathbb{Q}_+(\log(M \cap M_u)) = X \cap \mathbb{Q}_+(\log M) \cap \mathbb{Q}_+(\log M_u) = P \cap (X_u)_+ = P \cap X_u$$

o sea, $P(M \cap M_u) = P(M) \cap X_u$.

Veamos ahora que $\dim K[M] = \dim S$. Para eso tomemos $s_1,\ldots,s_k$ una base del subespacio vectorial que generan los elementos de $S$, formada por elementos de $\log M$ (con lo cual, $\dim S = k$). Veamos que $x^{s_1},\ldots,x^{s_k}$ son elementos de $K[M]$ que son algebraicamante independientes:

Si $p(y) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha y^\alpha \in K[y_1,\ldots,y_k]$ es tal que $p(x^{s_1},\ldots,x^{s_k}) = 0$, entonces lo que ocurre es que

$$\sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha x^{d_\alpha} = 0 \text{ , donde } d_\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i.$$

Ahora, si $d_\alpha = d_\beta$, tenemos que $\alpha = \beta$ pues los vectores $s_1,\ldots,s_k$ son linealmente independientes.

Luego debe ocurrir que $a_\alpha = 0$ para todo $\alpha$ que interviene en $p$, o lo que es lo mismo, $p = 0$ y $x^{s_1},\ldots,x^{s_k}$ son algebraicamente independientes.

Veamos que entonces estos elementos forman una base de trascendencia para el cuerpo de fracciones de $K[M]$. Como el cuerpo de fracciones de $K[M]$ es igual a $K(x^\alpha : \alpha \in \log M)$, basta ver que cada $\alpha \in \log M$ es algebraico sobre $K(x^{s_1}, \dots, x^{s_k})$. Escribamos a $\alpha$ como una combinación lineal sobre $\mathbb{Q}$ de los vectores $s_i$,

$$\alpha = q_1 s_1 + \cdots + q_k s_k.$$

Multiplicando por el mínimo común múltiplo de los numeradores de los $q_i$, obtenemos

$$n\alpha = a_1 s_1 + \cdots + a_k s_k,$$

con $a_i \in \mathbb{Z}$. Con lo cual $x_\alpha$ es raíz del polinomio

$$p(t) = t^n - (x^{s_1})^{a_1} \dots (x^{s_k})^{a_k} \in K(x^{s_1}, \dots, x^{s_k})[t].$$

Con esto $\dim K[M] = \dim S$ (por el Teorema de normalización de Noether, teorema A.8). Y como ya habíamos observado que $\dim S = \dim P + 1$, sólo nos falta ver que

$$\dim I_u = \dim K[M]/I_u = \dim(P \cap X_u) + 1.$$

La primera igualdad no es más que la definición de la dimensión de un ideal (recordar que $I_u$ es un ideal del anillo $K[M]$), y la otra igualdad es clara pues $K[M]/I_u \cong K[M \cap M_u]$, y por lo tanto

$$\dim K[M \cap M_u] = \dim(P(M \cap M_u)) + 1.$$

Pero como $P(M \cap M_u) = P \cap X_u$, sale la igualdad que queremos. ■

Finalmente, la proposición siguiente termina con la construcción del politopo de ideales que buscábamos:

**Proposición 1.16** *Sea $M$ un semigrupo expandido de monomios en $x_1, \dots, x_n$. Supongamos que cada una de las $x_i$ forma parte de un monomio de $M$. Si definimos una aplicación $\alpha$ desde $\mathcal{J}$ hasta el conjunto de subconjuntos de $P$ por*

$$\alpha(I) = P - \mathbb{Q}_+(\log(I \cap M)),$$

*entonces $\alpha$ es un isomorfismo de reticulados entre $\mathcal{J}$ y $L(P)$ tal que para cada $u \subset \{1, \dots, n\}$, $\alpha(I_u) = P \cap X_u$. Además para cada $I \in \mathcal{J}$, $\dim I = \dim \alpha(I) + 1$. Por lo tanto $(\mathcal{J}, \alpha)$ es un politopo de ideales.*

*Demostración:* Vamos a ver que $\alpha$ es una composición de isomorfismos de reticulados.

Primero notemos que como cada $I \in \mathcal{J}$ está generado como $K$-espacio vectorial por el conjunto $I \cap M$, la aplicación $\gamma$ que manda un ideal $I \in \mathcal{J}$ a $I \cap M$ es una función inyectiva entre $\mathcal{J}$ y los subconjuntos de $M$ y manda sumas en uniones e intersecciones en intersecciones. Además, como la función $\log$ es una inyección de $M$ en $\mathbb{Q}_+^n$, la función $\log \gamma$ es una aplicación inyectiva desde $\mathcal{J}$ en el conjunto de subconjuntos de $\mathbb{Q}_+^n$ que manda sumas en uniones e intersecciones en intersecciones. También es fácil ver que

$$\mathbb{Q}_+(\log(I \cap M)) \cap \mathbb{Z}_+^n = \log(I \cap M).$$

Por lo tanto la función $\mathbb{Q}_+ \log \gamma$ es un isomorfismo de reticulados entre $\mathcal{J}$ y el conjunto de subconjuntos de $\mathbb{Q}_+^n$ que son uniones de rayos que están incluídos en $S$. Como cada elemento de $\log(I \cap M)$ está en $S - \{0\}$, cada uno de estos rayos está determinado por el punto en que interseca al hiperplano $t_1 + \cdots + t_n = 1$, que es el mismo punto en el que interseca a $P$. Por lo tanto la función $\gamma'$ que manda a $I$ en $P \cap (\mathbb{Q}_+ \log(I \cap M))$ es un morfismo de reticulados inyectivo entre $\mathcal{J}, +, \cap$ y el conjunto de subconjuntos de $P, \cup, \cap$. Si finalmente componemos a $\gamma'$ con la función que envía a un conjunto en su complemento en $P$ obtenemos $\alpha$.

Como $I_u \cap M$ es el conjunto de monomios en $M$ que involucra alguna de las $x_i$ para un $i \in u$, tenemos que $\mathbb{Q}_+(\log(I_u \cap M))$ es el conjunto de los puntos $(q_1, \ldots, q_n)$ en $\mathbb{Q}_+^n$ tales que $q_i \neq 0$ para algún $i \in u$. Luego su complemento en $P$ es $X_u \cap P$. Luego cada cara de $P$ está en la imagen de $\alpha$ y por lo tanto tenemos que $L(P) \subset \operatorname{Im} \alpha$. Y como $\mathcal{J}$ estaba generado por los ideales $I_{\{1\}}, \ldots, I_{\{n\}}$ (i.e. todo ideal en $\mathcal{J}$ es unión e intersección de estos ideales), la imagen de $\alpha$ está generada por las caras propias de $P$ (y es acá donde usamos que cada $x_i$ está en alguno de los monomios de $M$, y por lo tanto las imágenes de $I_{\{1\}}, \ldots, I_{\{n\}}$ por $\alpha$ son caras propias de $P$). Luego $\operatorname{Im} \alpha \subset L(P)$.

Por último falta ver que $\dim I = \dim \alpha(I) + 1$. Pero esto es cierto ya que por el lema anterior vale para los ideales cara de $\mathcal{J}$ (o sea los $I_u$ para $u \subset \{1, \ldots, n\}$). ■

Ya está todo listo para demostrar el siguiente

**Teorema 1.17** *Sea $M$ un semigrupo expandido de monomios en $x_1, \ldots, x_n$ y $K$ un cuerpo. Entonces $K[M]$ es un anillo de Cohen-Macaulay.*

*Demostración:* Vamos a hacer inducción en $n$, la cantidad de variables.

Si $n = 1$ es fácil pues en ese caso, se tiene que $M = \{1\}$, o que $M$ es el semigrupo generado por la variable $x_1$ (en otras palabras, $K[M] = K$ o bien $K[M] = K[x_1]$), y en ambos casos $K[M]$ es Cohen-Macaulay.

Sea $n > 1$ y sea $M$ un semigrupo expandido en las variables $x_1, \ldots, x_n$. Si alguna de las variables $x_i$ no aparece en ningún monomio de $M$, entonces $M$ puede ser visto como un semigrupo en menos de $n$ variables y el resultado sale por hipótesis inductiva.

Tomemos entonces para cada $1 \leq i \leq n$ un monomio $p_i \in M$ tal que $x_i$ intervenga en $p_i$. Sea $p = p_1 \ldots p_n$ y sea $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{N}^n$ de manera que $p = x^h = x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n}$. El monomio $p$ pertenece a $M$, pero vamos a necesitar que el monomio $x_1 \ldots x_n$ pertenezca a $M$. Para eso vamos a ver que se puede pedir esto último sin pérdida de generalidad.

Definamos una función biyectiva

$$T : \mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}^n$$

por la fórmula

$$T(q_1, \ldots, q_n) = (q_1/h_1, \ldots, q_n/h_n).$$

Sea $S = \mathbb{Q}_+(\log M)$, entonces $T(S)$ es un semigrupo de $\mathbb{Q}_+^n$ que es isomorfo a $S$. Más aún, $T(S)$ es un semigrupo completo

$$(T(S) - T(S)) \cap \mathbb{Q}_+^n = (T(S) - T(S)) \cap T(\mathbb{Q}_+^n) = T((S - S) \cap \mathbb{Q}_+^n) = T(S),$$

(la última de las igualdades es consecuencia de que $M$ es expandido).

Sea $H = T(S) \cap \mathbb{Z}_+^n$. Es claro que $H$ es un semigrupo expandido ($H = \mathbb{Z}_+^n \cap T(\mathbb{Q}(S))$), y además $T(S) = \mathbb{Q}_+(H)$.

Sea $N = \{x^h : h \in H\}$. Es claro que $\log N = H$, luego como

$$\mathbb{Q}_+(\log N) = \mathbb{Q}_+(H) = T(S) \cong S = \mathbb{Q}_+(\log M),$$

tenemos, por la proposición 1.10, que $K[M]$ es Cohen-Macaulay si y sólo si $K[N]$ lo es. Además, como $(1, \ldots, 1) \in H$, podemos suponer que el monomio $x_1 \ldots x_n \in M$.

Ahora vamos a usar la proposición 1.16, obteniendo una aplicación

$$\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow L(P),$$

(donde $\mathcal{J}$ es la familia de ideales de $K[M]$ que definimos al comienzo de la construcción del politopo).

Sabemos que los ideales caras de $\mathcal{J}$ son los ideales $I_u$ para $u \subset \{1, \ldots, n\}$ ($u \neq \emptyset$), y que cada $I_u$ es semirregular por hipótesis inductiva ($K[M]/I_u \cong K[M \cap M_u]$ donde $M \cap M_u$ es expandido en menos de $n$ variables). Entonces aplicando el corolario 1.14 de la proposición 1.13, tenemos que $\beta(\partial P)$ es semi-regular. Pero $\beta(\partial P)$ es igual a $\beta(P \cap (\bigcup_{i=1}^n X_{\{i\}}))$ y

$$\beta(P \cap (\textstyle\bigcup_{i=1}^n X_{\{i\}})) = \bigcap_{i=1}^n (x_i K[x_1, \ldots, x_n] \cap K[M]) = (x_1 \ldots x_n) \cap K[M] = (x_1 \ldots x_n)K[M]$$

con lo cual $(x_1 \ldots x_n)K[M]$ es un ideal semi-regular. Entonces, dado que $x_1 \ldots x_n$ es un polinomio homogéneo de grado positivo que no es divisor de cero en $K[M]$, tenemos por el corolario B.16 del teorema B.13 que caracteriza las álgebras graduadas que son Cohen-Macaulay, que

$$K[M] \text{ es Cohen-Macaulay } \Leftrightarrow K[M]/(x_1 \ldots x_n)K[M] \text{ lo es.}$$

Como $(x_1 \ldots x_n)K[M]$ es un ideal semi-regular, tenemos que $K[M]/(x_1 \ldots x_n)K[M]$ es Cohen-Macaulay, con lo cual $K[M]$ también lo es. ■

Con esto ya queda demostrado el teorema 1 que afirma que el anillo de invariantes de una representación racional del grupo $GL(1, K)^m$ en el anillo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$ es Cohen-Macaulay.

Sin embargo todavía podemos demostrar algo más.

**Teorema 1.18** *Sea $M$ un semigrupo normal de monomios en las variables $x_1, \ldots, x_n$. Entonces si $R$ es un anillo de Cohen-Macaulay, $R[M]$ también lo es.*

*Demostración:* Sea $\mathcal{P} \subset R[M]$ un ideal primo. Sea $\wp = \mathcal{P} \cap R \subset R$.

Dado que $(R[M])_{\mathcal{P}} = (R_\wp[M])_{\mathcal{P}R_\wp[M]}$ y que $R_\wp$ anillo local, podemos suponer que $R$ es local y que $\wp$ es su ideal maximal.

Como $R[M]$ es $R$ playo (pues es libre), también lo es $R[M]_{\mathcal{P}}$. Luego si $a_1, \ldots, a_n \in \wp$ es una sucesión $R$-regular, también es $R[M]_{\mathcal{P}}$-regular. En otras palabra, $\operatorname{depth} R \leq \operatorname{depth} R[M]_{\mathcal{P}}$. Además, por ser $R[M]$ $R$-playo, tenemos (c.f. [Ma, Th.19 (2), página 79])

$$\dim R[M]_{\mathcal{P}} = \dim R + \operatorname{ht}(\mathcal{P}/\wp R[M]).$$

Consideremos entonces los dos casos siguientes:

1. $\wp R[M] = \mathcal{P}$

2. $\wp R[M] \subsetneq \mathcal{P}$

El caso 1 es sencillo una vez que notamos que $\dim R = \dim R[M]_{\mathcal{P}}$ (pues $\operatorname{ht}(\mathcal{P}/\wp R[M]) = 0$) y que $\dim R = \operatorname{depth} R$ (pues $R$ es Cohen-Macaulay). Así

$$\dim R[M]_{\mathcal{P}} = \dim R = \operatorname{depth} R \leq \operatorname{depth} R[M]_{\mathcal{P}}$$

y por lo tanto $R[M]_{\mathcal{P}}$ es Cohen-Macaulay.

Veamos ahora el segundo caso.

Sea $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}/\wp R[M] \subset R[M]/\wp R[M] = R/\wp[M]$. Pero $R/\wp$ es un cuerpo, luego podemos usar el teorema para cuerpos (teorema 1.17) y afirmar que $R/\wp[M]$ es Cohen-Macaulay. Por lo tanto, dado que $\overline{\mathcal{P}}$ es primo,

$$\operatorname{depth}_{\overline{\mathcal{P}}}(R[M]/\wp R[M]) = \dim(R[M]/\wp R[M])_{\overline{\mathcal{P}}} = \operatorname{ht} \overline{\mathcal{P}} = \operatorname{ht}(\mathcal{P}/\wp R[M]).$$

Como tenemos que $\dim R[M]_{\mathcal{P}} = \dim R + \operatorname{ht}(\mathcal{P}/\wp R[M])$, podemos deducir que

$$\dim R[M]_{\mathcal{P}} = \operatorname{depth} R + \operatorname{depth}_{\overline{\mathcal{P}}}(R[M]/\wp R[M]).$$

Sea ahora $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s \in \overline{\mathcal{P}}$ una sucesión $R[M]/\wp R[M]$-regular. Los elementos $b_1, \ldots, b_s$ no son divisores de cero en $R/(a_1, \ldots, a_r)[M]$ (donde $a_1, \ldots, a_r \in \wp$ es una sucesión $R$-regular maximal que, por ser $R$ Cohen-Macaulay, verifica $(a_1, \ldots, a_r) = \wp$). Luego $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$ es una sucesión $R[M]_{\mathcal{P}}$-regular. Con lo cual

$$\operatorname{depth} R[M]_{\mathcal{P}} \geq r + s = \dim R[M]_{\mathcal{P}},$$

y por lo tanto $R[M]$ es un anillo de Cohen-Macaulay. ■

## 1.5. El caso en que el cuerpo es finito

Vamos a ver que el anillo de invariantes de cualquier representación del grupo $G = GL(1, K)^m$ es Cohen-Macaulay si el cuerpo $K$ es finito. Es más, vamos a ver que si un grupo finito cualquiera actúa en un anillo de Cohen-Macaulay y el orden del grupo es inversible en $R$, entonces el anillo de invariantes es Cohen-Macaulay.

**Teorema 1.19** *Sean $S$ y $R$ dos anillos noetherianos tales que $S$ sea entero sobre $R$ y tal que exista un operador de Reynolds $\rho$ para el par (R,S). Entonces si $S$ es Cohen-Macaulay, $R$ también lo es.*

*Demostración:* Comencemos tomando un ideal primo $\mathcal{P} \subset R$. Localicemos a $R$ en $\mathcal{P}$ y a $S$ en el conjunto multiplicativamente cerrado $R \setminus \mathcal{P}$ (en otras palabras consideremos los anillos $R_\mathcal{P} \cong R \otimes_R R_\mathcal{P}$ y $S \otimes_R R_\mathcal{P}$). La extensión $R \otimes_R R_\mathcal{P} \to S \otimes_R R_\mathcal{P}$ sigue siendo entera y la aplicación de $R_\mathcal{P}$-módulos $\rho \otimes id : S \otimes_R R_\mathcal{P} \to R \otimes_R R_\mathcal{P}$ es un operador de Reynolds para el par $(R \otimes_R R_\mathcal{P}, S \otimes_R R_\mathcal{P})$. Además el anillo $S \otimes_R R_\mathcal{P}$ es Cohen-Macaulay, luego el par $(R \otimes_R R_\mathcal{P}, S \otimes_R R_\mathcal{P})$ verifica las hipótesis de la proposición y podemos entonces suponer que $R$ es local y que $\mathcal{P}$ es su ideal maximal.

Tomemos $r \in \mathcal{P}$ que no sea divisor de cero en $S$, entonces $r$ no es divisor de cero en $R$. Además $rS \cap R = rR$ (pues tengo un operador de Reynolds). Si entonces consideramos el par $(R/rR, S/rS \cong S \otimes_R (R/rR))$, se puede ver fácilmente que verifica las hipótesis del teorema. Por lo tanto podemos considerar que los elementos de $\mathcal{P}$ son todos divisores de cero en $S$ (porque el procedimiento de dividir por elementos que no son divisores de cero termina en finitos pasos, pues la cantidad de pasos está acotada por la profundidad del ideal $\mathcal{P}$ en $R$, que es finita pues $S$ es noetheriano).

Sean $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_k$ los ideales primos asociados a $(0)$ en $S$. Los ideales $\mathcal{Q}_i$ son minimales pues $S$ es Cohen-Macaulay (ver proposición A.16 item 1). Entonces $\mathcal{P} \subset \bigcup_{i=1}^k \mathcal{Q}_i \cap R$. Como cada $\mathcal{Q}_i \cap R$ es primo tenemos que $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}_i \cap R$ para algún $i$. Supongamos de ahora en más que $i = 1$. Como $S$ es entero sobre $R$, $\mathcal{Q}_1$ debe ser también maximal (entonces es maximal y minimal). Si $\mathcal{Q}_1$ es el único ideal primo de $S$, entonces tenemos que $\dim S = 0$, pero como $S$ es entero sobre $R$, $\dim R = \dim S = 0$. Entonces, dado que $\mathrm{depth}_\mathcal{P}(R) = 0 = \dim R$, $R$ es Cohen-Macaulay.

Si $\mathcal{Q}_1$ no es el único ideal primo de $S$ entonces los ideales $\mathcal{Q}_1$ y $\bigcap_{i=2}^k \mathcal{Q}_i$ son coprimos y tenemos por el teorema chino de los restos que

$$S = S/(0) = S/\textstyle\bigcap_{i=1}^k \mathcal{Q}_i \cong S/\mathcal{Q}_1 \times S/\bigcap_{i=2}^k \mathcal{Q}_i.$$

Llamemos $S_1$ a $S/\mathcal{Q}_1$ y $S_2$ a $S/\bigcap_{i=2}^k \mathcal{Q}_i$. Sea $h : R \to S_1 \times S_2$ la inclusión y sean $\pi_i : S_1 \times S_2 \to S_i$ las proyecciones ($i = 1, 2$). Estos morfismos son de $R$-módulos, por lo tanto las aplicaciones $\rho\pi_i h : R \to R$ son morfismos de $R$-módulos para $i = 1, 2$ y coinciden con multiplicar por elementos fijos y unívocamente determinados $r_1$ y $r_2$. Como $\rho$ es una retracción, se debe tener $r_1+r_2=1$, y por ser $R$ local, o bien $r_1$ o bien $r_2$ debe ser inversible. Supongamos que $r_1$ es inversible. Entonces el morfismo $\pi_1 h : R \to S_1$ es inyectivo, y podemos tomar el par $(R, S_1 \cong S/0 \times S_2)$, que verifica las hipótesis. Como $S$ es noetheriano realizando este proceso finitas veces llegamos al caso en que tenemos un par $(R, \tilde{S})$ donde $\tilde{S}$ tiene un solo ideal primo. ■

**Teorema 1.20** *Si un grupo G actúa en un anillo de Cohen-Macaulay R, y el orden de G es inversible en R entonces $R^G$ es Cohen-Macaulay.*

*Demostración:* Sea $n$ el orden de $G$. Tenemos el operador de Reynolds para el par $(R^G, R)$, dado por

$$\rho(r) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \cdot r.$$

Además $R$ es entero sobre $R^G$, pues cada elemento $r \in R$ satisface la ecuación con coeficientes en $R^G$

$$\prod_{g \in G} (x - g \cdot r) = 0. \blacksquare$$

**Corolario 1.21** *Si $K$ es un cuerpo finito y $G = GL(1,K)^m$ actúa en $K[x_1, \ldots, x_n]$, entonces el anillo de invariantes $K[x_1, \ldots, x_n]^G$ es Cohen-Macaulay.*

*Demostración:* Es claro que si $p$ es la característica de $K$, $p$ no divide a $(p^s-1)^m$ que es el orden de $G$. ■

# Capítulo 2

# Ideales generados por menores de matrices y anillos de invariantes

En este capítulo veremos la relación entre la "perfección" de ciertos ideales generados por menores de matrices y anillos de invariantes que son Cohen-Macaulay. Vamos a enunciar los principales resultados de [Ho Ea], y demostraremos algunos.

## 2.1. Una clase de ideales generados por menores de matrices

El objetivo de Eagon y Hochster en [Ho Ea] era ver que dada una matriz $M \in R^{r\times s}$ (donde $R$ es un anillo), tal que el grado del ideal $I$ generado por los menores de tamaño $(t+1)$ es lo más grande posible, $(r-t)(s-t)$, entonces $I$ es perfecto (ver el apéndice B, sección B.3 para una definición y propiedades de ideales perfectos)

Ellos trabajaron sin embargo con una clase de ideales más grande :

**Definición 2.1** *Sea $R$ un anillo conmutativo noetheriano. Sea $M = (m_{ij}) \in R^{r\times s}$. Sea $H = (h_0, \ldots, h_m)$ una sucesión estrictamente creciente de números enteros tales que $h_0 = 0$, $h_m = s$, y $m < r$. Sea $n$ un entero tal que $0 \leq n \leq s$. Llamaremos $I = I_{H,n} = I_{H,n}(M)$ al ideal de $R$ generado por los menores de tamaño $t+1$ de las primeras $h_t$ columnas de $M$ ($1 \leq t \leq m$) y por $m_{11}, \ldots, m_{1n}$ (si $h_t < t+1$ no hay tales menores y ponemos $0$).*

Se puede ver que si $k$ es el menor entero tal que $h_k \geq n$, el mayor grado posible para $I_{H,n}$ es

$$g_{H,n} = rs - (r+s)m + k + (1/2)m(m+1) + h_1 + \cdots + h_{m-1},$$

(donde el grado de un ideal $I \subset R$ es la mayor longitud de una sucesión $R$-regular incluida en $I$, ver definición A.11 y observaciones subsiguientes). Al final de este capítulo daremos una demostración de este hecho en el caso en que $R = K[X]$, donde $X$ es una matriz de indeterminadas de tamaño $r\times s$, y $K$ es un cuerpo algebraicamente cerrado. (Para que el grado sea lo más grande uno debe pedir que no haya relaciones algebraicas entre las coordenadas de $M$, es por esto que el grado máximo se alcanza en anillos de la forma $R = K[X]$, donde $X$ es una matriz de indeterminadas algebraicamente independientes entre si.)

El resultado principal de [Ho Ea] es:

**Teorema 2.2** *Bajo las hipótesis de la definición, se tiene:*

*Si $n = h_t$ o $n = h_t + 1$ y el grado de $I_{H,n} = g_{H,n}$, entonces $I_{H,n}$ es perfecto.*

*Más aún, si $K$ es un dominio noetheriano, y $R = K[X] = K[x_{ij}]$ donde $X = (x_{ij})$ es una matriz de indeterminadas sobre K de tamaño $r \times s$, entonces $I_{H,n}(X)$ es un ideal radical de grado $g_{H,n}$, y perfecto si $n = h_t$ o $h_t + 1$ $(0 \leq t \leq m)$. Si $n = h_t$ entonces $I_{H,n}$ es primo.*

*Demostración:* Ver [Ho Ea, Th. 1, página 1023]. Daremos una idea del proceso inductivo que se hace en ese artículo. Los autores reducen el problema a probar el enunciado del último párrafo. Los autores suponen probado el resultado inductivamente para matrices más chicas y para ideales más grandes de la forma $I_{H',n'}$, $n' = h_{t'}$ o $n' = h_{t'} + 1$.

Hay dos casos principales. Si $n = h_t$ o $h_t + 1$, $t < m$, entonces $x = x_{1,n+1}$ no es un divisor de cero en $I_{H,n}$ (que es primo), luego el hecho que $I_{H,n}$ es perfecto es equivalente a que $I_{H,n+1} = I_{H,n} + (x)$ sea perfecto (por el corolario B.15 del teorema B.13). Pero este último es perfecto por la hipótesis inductiva. El otro caso es $n = h_t + 1, n \neq h_{t+1}$. En este caso se prueba que $I_{H,n} = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, donde $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, y $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ son ideales de la forma $I_{H',n'}$, $n' = h_{t'}$ (y por lo tanto, perfectos por la hipótesis inductiva) y el grado de $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ es uno más que los grados de $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ que son iguales. Entoces por la proposición B.12, el ideal $I_{H,n} = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ es perfecto. ■

Como corolario se obtiene el resultado que buscaban originalmente,

**Corolario 2.3** *Si $H = (0, 1, 2, \ldots, t-1, s)$ y $n = 0$, $I_{H,n}$ es el ideal generado por los menores de tamaño $t+1$ de $M$ (al que llamaremos $\mathcal{I}_t(M)$); si el grado de $\mathcal{I}_t(M)$ es máximo, este ideal es perfecto. En este caso, $g_{H,n} = (r-t)(s-t)$.*

*Demostración:* Es claro que el ideal generado por los menores de tamaño $t+1$ de $M$ coincide con $I_H(M)$. El resultado respecto al grado es un caso particular de la fórmula de $g_{H,n}$. ■

## 2.2. Anillos de invariantes

Vamos a ver que los ideales recién definidos surgen como solución al segundo problema fundamental de la teoría de invariantes. Es decir son los ideales generados por las relaciones entre los generadores de anillos de invariantes de ciertas representaciones de grupos. El primer problema fundamental de la teoría de invariantes es, dada una representación racional de un grupo $G$ en un anillo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$ (inducida por una representación racional de $G$ en un $K$-espacio vectorial $V$ de dimensión $n$), determinar un conjunto finito $\{p_1, \ldots, p_k\}$ de polinomios homogéneos invariantes que generan el anillo $K[x_1, \ldots, x_n]^G$. Definamos una aplicación

$$\begin{array}{ccc} K[y_1, \ldots, y_k] & \xrightarrow{\phi} & K[x_1, \ldots, x_n]^G \\ y_i & \longmapsto & p_i \end{array}$$

Entonces el ideal $I = \ker \phi$ es homogéneo (si se le asigna a cada $y_i$ el grado de $p_i$). El segundo problema fundamental de la teoría de invariantes es encontrar generadores para este ideal.

Observemos el siguiente hecho, que es el punto de conexión entre la teoría de invariantes y la "perfección" de ideales. El anillo de invariantes $K[x_1, \ldots, x_n]^G$ es Cohen-Macaulay si y sólo si el ideal $\ker \phi$ es perfecto (por el teorema B.13, que caracteriza las álgebras graduadas que son Cohen-Macaulay).

Nuestro objetivo ahora es ver que los ideales $I_{H,0}$ son ideales de la forma $\ker \phi$ para alguna representación de un grupo reductivo.

Veamos primero que el ideal $I$ generado por los menores de tamaño $t+1$ de una matriz $X$ de indeterminadas de tamaño $r \times s$ sobre un cuerpo $K$ de característica cero, se puede obtener de esta manera.

**Proposición 2.4** *Sean $U$ y $V$ matrices de indeterminadas de tamaño $r \times t$ y $t \times s$ respectivamente. Definamos una acción de $GL(t, K)$ en $K[U, V]$ de la siguiente manera: una matriz $A \in GL(t, K)$ actúa asignando a cada coordenada de $U$ y de $V$ la correspondiente de $UA^{-1}$ y $AV$ respectivamente. Entonces las coordenadas de $UV$ generan el anillo de invariantes de la acción descripta. Dada $X$ una matriz de indeterminadas de tamaño $r \times s$, definamos la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \xrightarrow{\phi} & K[UV] \\ x_{ij} & \longmapsto & (UV)_{ij} \end{array}$$

*entonces el núcleo de $\phi$ (que es el ideal de las relaciones entre los generadores de $K[UV]$) es el ideal generado por los menores de tamaño $t+1$ de $X$.*

Antes de la demostración veamos que esta representación es la inducida por una representación del grupo $GL(t, K)$ en $K^{r \times t} \times K^{t \times s}$.

Sea entonces $A \in GL(t, K)$. El elemento $A$ actúa en $K^{r \times t} \times K^{t \times s}$ por

$$(C, D) \mapsto (CA^{-1}, AD).$$

Esta aplicación induce un morfismo de anillos entre los anillos de coordenadas que coinciden con las álgebras simétricas. Este anillo es $K[U, V]$, el anillo de polinomios en todas las indeterminadas de $U$ y de $V$ (consideramos a todas las indeterminadas algebraicamente independientes entre sí). Notaremos

$$K[U, V] \xrightarrow{A^*} K[U, V].$$

al morfismo inducido. Veamos el efecto de $A^*$ en una variable $v_{ij}$ de $V$. Por definición, $A^*(v_{ij}) = v_{ij} \circ A$, es decir el polinomio $A^*(v_{ij})$ es la coordenada $ij$ de la matriz $AV$. Haciendo lo mismo con las indeterminadas de la matriz $U$, le dimos sentido a la definición de la representación de grupos hecha en el enunciado de la proposición anterior. Ahora veamos la demostración.

*Demostración:* La demostración de que $K[U,V]^{GL(t,K)} = K[UV]$ se deduce fácilmente de [We, Ch. II, §6]. Por otro lado, que el ideal de las relaciones entre los generadores de este anillo es el ideal generado por los menores de tamaño $t+1$ de una matriz de indeterminadas de tamaño $r \times s$ se puede ver en [We, Ch. II, §14].

Sin embargo, aceptando que este último ideal es radical, y suponiendo que el cuerpo $K$ es algebraicamente cerrado, podemos hacer lo siguiente.

Consideremos el morfismo (de variedades algebraicas)

$$\begin{array}{ccc} K^{r\times t} \times K^{t\times s} & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & K^{r\times s} \\ (C,D) & \longmapsto & CD \end{array}$$

Si invertimos las flechas mirando los anillos de coordenadas, tenemos el morfismo

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \stackrel{\pi^*}{\longrightarrow} & K[U,V] \\ x_{ij} & \longmapsto & (UV)_{ij} \end{array}$$

Veamos que $\ker \pi^*$ es el ideal generado por los menores de tamaño $t+1$. El núcleo de $\pi^*$ corresponde al ideal de la clausura de la imagen de $\pi$, que es el conjunto $K_t^{r\times s}$ de las matrices en $K^{r\times s}$ de rango menor o igual a $t$. Pero $K_t^{r\times s} = V(\mathcal{I}_t)$, donde $\mathcal{I}_t$ es el ideal generado por los menores de tamaño $t+1$ de $X$. Así, por el teorema de los ceros de Hilbert, $\ker \pi^* = I(V(\mathcal{I}_t)) = \mathcal{I}_t$ pues el ideal $\mathcal{I}_t$ es radical (recordemos que este ideal coincide con uno de los ideales $I_{H,n}$ definidos en la sección anterior, y son radicales).

Por otro lado, la imagen de $\pi^*$ es $K[UV]$, el subanillo de $K[U,V]$ generado por los polinomios que son coordenadas de la matriz $UV$.

Con todo esto tenemos que

$$K[UV] = K[X]/\ker \pi^* = K[X]/\mathcal{I}_t,$$

y como $K[U,V]^{GL(t,K)} = K[UV]$, se deduce el resultado que buscábamos. ■

Claramente, por lo observado anteriormente, el ideal generado por los menores de tamaño $t+1$ de una matriz de indeterminadas va a ser perfecto (asumiendo que es radical) si y sólo si el anillo de invariantes $K[U,V]^{GL(t,K)}$ es Cohen-Macaulay.

Vamos a definir ahora una representación de grupos que relacione al anillo de invariantes con un ideal $I_{H,0}$ definido como en la sección anterior.

**Definición 2.5** *Sean $U_i$ y $V_i$ matrices de indeterminadas sobre $K$ (un cuerpo) de tamaño $t_{i+1} \times t_i$ y $t_i \times j_i$ ($1 \leq i \leq m$), respectivamente. Notemos con $U$ y $V$ a las $m$-uplas*

*$(U_1, \ldots, U_m)$ y $(V_1, \ldots, V_m)$ respectivamente. Sea $K[U,V]$ el anillo de polinomios en las coordenadas de todas las $U's$ y las $V's$. Definamos entonces una representación del grupo $G = \prod_{i=1}^{m} GL(t_i, K)$ en $K[U,V]$ de la siguiente manera : un elemento $(A_1, \ldots, A_m) \in G$ actúa asignando a cada coordenada de $U_i$ la correspondiente de $A_{i+1}U_iA_i^{-1}$ para los $i$ tales que $1 \leq i \leq m-1$, a cada coordenada de $U_m$ la correspondiente de $U_mA_m^{-1}$, y a cada coordenada de $V_i$ la correspondiente de $A_iV_i$ ($1 \leq i \leq m$).*

De forma similar a lo hecho anteriormente, se demuestra que esta representación es la inducida por la acción del grupo $G = \prod_{i=1}^{m} GL(t_i, K)$ en $K^{t_2 \times t_1} \times K^{t_3 \times t_2} \times \cdots \times K^{t_{m+1} \times t_m} \times K^{t_1 \times j_1} \times \cdots \times K^{t_m \times j_m}$ en la que un elemento $(A_1, \ldots, A_m) \in G$ actúa vía

$$(C_1, \ldots, C_m, D_1, \ldots, D_m) \longmapsto (A_2C_1A_1^{-1}, \ldots, A_mC_{m-1}A_{m-1}^{-1}, C_mA_m^{-1}, A_1D_1, \ldots, A_mD_m)$$

Manteniendo las notaciones de la definición definamos a $r = t_{m+1}$ y a $s = \sum_{i=1}^{m} j_i$, y definamos $U * V$ como la matriz de $r$ por $s$ dada por bloques :

$$[U_mU_{m-1} \ldots U_1V_1 \mid U_mU_{m-1} \ldots U_2V_2 \mid \cdots \mid U_mU_{m-1}V_{m-1} \mid U_mV_m].$$

Entonces se obtiene la siguiente

**Proposición 2.6** *Si $K$ tiene característica cero, el anillo de invariantes de la acción de $G$ recién descripta es $K[U * V]$ (el anillo generado por las coordenadas de $U * V$).*

*Demostración:* Consideremos una acción de $G$ en un anillo (posiblemente) más grande. Para ello tomemos $V_{m+1}$ una nueva matriz de indeterminadas de tamaño $t_{m+1} \times j_{m+1}$ (en el caso que $j_{m+1}$ sea cero, este nuevo anillo es $K[U,V]$). Consideremos la acción de $G$ en $K[U,V]$ (donde ahora $V = (V_1, \ldots, V_{m+1})$) que es igual a la del enunciado en las $U_i$ y las $V_i$ ($1 \leq i \leq m$) y que deja cada coordenada de $V_{m+1}$ fija.

Veamos entonces por inducción en $m$ que el anillo de invariantes de $K[U,V]$ es $K[U * V]$ donde ahora $U * V$ es la matriz por bloques

$$[U_mU_{m-1} \ldots U_1V_1 \mid U_mU_{m-1} \ldots U_2V_2 \mid \cdots \mid U_mU_{m-1}V_{m-1} \mid U_mV_m \mid V_{m+1}].$$

El caso $m = 1$ es la proposición 2.4

Sea entonces $m \geq 2$ y supongamos que ya hemos probado el resultado para $k < m$. Como la acción de $G$ en $V_{m+1}$ es la identidad podemos reducirnos al caso en que $V = (V_1, \ldots, V_m)$ (o sea, suponer que $j_{m+1} = 0$). Es claro entonces que $U * V = U_m(U' * V')$, donde $U' = (U_1, \ldots, U_{m-1})$ y $V' = (V_1, \ldots, V_m)$. Por otro lado $G = GL(t_m, K) \times G'$ donde $G' = \prod_{i=1}^{m-1} GL(t_i, K)$. Como la acción de $G'$ en $U_m$ es la identidad, el anillo de invariantes de $G'$ es $K[U' * V', U_m]$ (por hipótesis inductiva) y el anillo de invariantes de $G$ es el anillo de invariantes en $K[U' * V', U_m]$ por la acción de $GL(t_m, K)$.

Sea $Y$ una nueva matriz de indeterminadas del tamaño de $U' * V'$, y consideremos el morfismo de $K$-álgebras que asigna a cada coordenada de la matriz $[Y \mid U_m]$ la correspondiente de $[U' * V' \mid U_m]$. Tomemos la acción de $GL(t_m, K)$ en $K[Y, U_m]$ inducida por $Y \to AY$, $U_m \to U_m A^{-1}$. Entonces por el caso $m = 1$, el anillo de invariantes de esta acción es $K[U_m Y]$. Como esta acción induce la acción que estamos considerando en $K[U' * V', U_m]$, y como $GL(t_m, K)$ es reductivo, el anillo de invariantes de $K[U' * V', U_m]$ es $K[U_m(U' * V')] = K[U * V]$; tal como queríamos probar. ∎

Relacionemos ahora estos anillos de invariantes con los ideales $I_{H,0}$ descriptos en la sección anterior :

**Proposición 2.7** *Manteniendo las hipótesis, sea X una matriz de indeterminadas de tamaño* $r \times s$ *y sea* $K[X]$ *el anillo de polinomios en las coordenadas de X. Consideremos el morfismo*

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \xrightarrow{\phi} & K[U * V] \\ x_{ij} & \longmapsto & (U * V)_{ij}. \end{array}$$

*Entonces para algún* $H = (h_0, \ldots, h_m)$, $\ker \phi = I_{H,0}(X)$ *(permitimos que* $h_0 \neq 0$ *y que* $h_m < s$ *.)*

*Demostración:* Ver [Ho Ea, Prop. 27, página 1047]. ∎

Si asignamos a cada $x_{ij}$ el grado de $(U * V)_{ij}$ de manera que el núcleo del morfismo $\phi$ sea homogéneo, entonces tenemos

**Proposición 2.8** *Si K tiene característica cero, entonces el anillo de invariantes* $K[U * V]$ *es Cohen-Macaulay.*

*Demostración:* Es claro que $K[U * V] \cong K[X]/\ker \phi$, con lo cual $K[U * V]$ es Cohen-Macaulay si y sólo si $\ker \phi$ es perfecto (por la caracterización de las álgebras graduadas que son Cohen-Macaulay hecha en el teorema B.13). Pero este ideal es perfecto, pues es isomorfo a $I_{H,0}$ (que es perfecto por el teorema 2.2). ∎

Obsevar que $K[U * V]$ es Cohen-Macaulay sin importar la característica del cuerpo, el problema es que no sabemos si es un anillo de invariantes.

Finalmente logramos lo que buscábamos: cada uno de los ideales $I_{H,0}(X)$ aparece como el ideal de relaciones de los generadores de un anillo de invariantes.

**Proposición 2.9** *Si* $H = (h_0, \ldots, h_m)$ *(*$h_0 = 0, h_m = s$*), tomemos* $t_{m+1} = r$, $t_i = i$ *(*$1 \leq i \leq m$*), y* $j_i = h_i - h_{i-1}$ *(*$1 \leq i \leq m$*). Entonces manteniendo las notaciones de las proposiciones anteriores,* $\ker \phi = I_H(X)$.

*Demostración:* Se puede ver en [Ho Ea, Prop. 26, página 1045] que los ideales $I_H(X)$ son primos (luego, radicales). Por otro lado, por [Ho Ea, Prop. 25, página 1044], el radical de $I_H(X)$ y el $\ker \phi$ son iguales, con lo que la proposición está demostrada.

Vale la pena sin embargo hacer una demostración de que $\sqrt{I_H(X)} = \ker\phi$, usando el hecho que $I_H(X)$ es radical y suponiendo que el cuerpo $K$ es algebraicamente cerrado.

Para esto comencemos por mirar el siguiente morfismo (de variedades algebraicas)

$$\begin{array}{ccc} K^{t_2\times t_1}\times K^{t_3\times t_2}\times\cdots\times K^{t_{m+1}\times t_m}\times K^{t_1\times j_1}\times\cdots\times K^{t_m\times j_m} & \xrightarrow{\pi} & K^{r\times s} \\ (C_1,\ldots,C_m,D_1,\ldots,D_m) & \longmapsto & C*D \end{array}$$

Este morfismo induce un morfismo de anillos entre los respectivos anillos de coordenadas

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \xrightarrow{\pi^*} & K[U*V] \\ x_{ij} & \longmapsto & (U*V)_{ij} \end{array}$$

Observemos que esta aplicación es exactamente la misma que $\phi$. Queremos ver que

$$\sqrt{I_H(X)} = \ker\phi = \ker\pi^*.$$

Pero esto último vale si y sólo si

$$\overline{\operatorname{Im}\pi} = V(\ker\pi^*) = V\left(\sqrt{I_H(X)}\right) = V(I_H(X)).$$

Veamos entonces que si una matriz $W\in K^{r\times s}$ puede escribirse en la forma $C*D$ (para $C$ y $D$ donde corresponda), entonces los menores de tamaño $t+1$ de la matriz $W|_{h_t}$ formada por las primeras $h_t$ columnas de $W$ son cero. Pero como

$$W|_{h_t} = [C_mC_{m-1}\ldots C_1D_1 \mid \cdots \mid C_mC_{m-1}\ldots C_tD_t],$$

podemos escribir

$$W|_{h_t} = (C_m\ldots C_t)\cdot[C_{t-1}\ldots C_1D_1 \mid \cdots \mid D_t].$$

Como se tiene que o bien $C_m\ldots C_t$, o bien $[C_{t-1}\ldots C_1D_1 \mid \cdots \mid D_t]$ tienen rango menor o igual que $t$, se puede concluir lo mismo con $W|_{h_t}$. Con esto probamos que $\operatorname{Im}\pi\subset V(I_H(X))$ con lo cual $\sqrt{I_H(X)}\subset\ker\phi=\ker\pi^*$.

Veamos la otra inclusión. Como ya hicimos recién, vamos a ver en vez que $\operatorname{Im}\pi\supset V(I_H(X))$. Sea entonces $M\in K^{r\times s}$ tal que para cada $1\le t\le m$ los menores de tamaño $t+1$ de la matriz $M|_{h_t}$ son todos cero. Escribamos a $M$ como

$$M = [M_1 \mid M_2 \mid \cdots \mid M_m],$$

donde cada $M_i\in K^{r\times j_i}$. Las matrices $M|_{h_t} = [M_1 \mid M_2 \mid \cdots \mid M_t]$ son de rango menor o igual que $t$, luego podemos elegir matrices $P_t\in K^{r\times t}$ tales que el espacio generado por las columnas de $[M_1 \mid \cdots \mid M_t]$ sea el mismo que el generado por las columnas de $P_t$. Existen entonces matrices $C_t\in K^{(t+1)\times t}$ tales que $P_t = P_{t+1}C_t$ ($1\le t\le m-1$), y definamos $C_m = P_m$. Por otro lado existen matrices $D_t\in K^{t\times j_t}$ tales que $M_t = P_tD_t$ ($1\le t\le m$).

Es claro que $P_t = C_m \ldots C_t$, y entonces $M_t = C_m \ldots C_t D_t$. Pero esto último quiere decir que $M = C * D$, con lo cual $M \in \operatorname{Im} \pi$. ■

Por último, veamos lo que dejamos pendiente respecto al grado máximo de los ideales $I_{H,n}$.

Haremos el caso particular en que $K$ es un cuerpo algebraicamente cerrado, $n = 0$, y $R = K[X]$ donde $X$ es una matriz de indeterminadas sobre $K$ de tamaño $r \times s$ (el caso general se puede ver en [Ho Ea, §10, páginas 1050-1052]). En este caso, veremos que el grado de $I_{H,n}$ es $g_{H,n} = rs - (r+s)m + 1/2m(m+1) + h_1 + \cdots + h_{m-1}$.

Ya sabemos que el ideal $I_H$ es el ideal de la variedad

$$W = \{M \in K^{r \times s} : \operatorname{rg}(M|_{h_t}) \leq t, \ \ \forall \ 1 \leq t \leq m\}.$$

($W$ es una variedad ya que si $X$ es una matriz de indeterminadas de tamaño $r \times s$, entonces $W$ es el conjunto de ceros de la familia de polinomios {menores de tamaño i+1 de $X|_{h_i}$} con $1 \leq i \leq m$.) Por lo tanto para probar el resultado respecto del grado basta con ver que la dimensión de la variedad $W$ es $(r+s)m - 1/2m(m+1) - (h_1 + \cdots + h_{m-1})$

Para visualizar mejor las cosas vamos a ver a una matriz $M \in K^{r \times s}$ como una transfomación lineal $f_M : K^s \to K^r$.

Hecha esta aclaración tomemos los siguientes conjuntos que nos permitirán calcular la dimensión de $W$.

$$Z = \{f : K^s \to K^r : f \text{ es } K\text{-lineal}\},$$

$$V_i = \{(k_1, \ldots, k_s) \in K^s : k_{h_i+1} = \ldots = k_s = 0\} \text{ para cada } 1 \leq i \leq m,$$

$$G = \{(S_1, \ldots, S_m) : S_i \text{ es subespacio vectorial de } V_i, S_i \subset S_{i+1}, \text{ y } \dim S_i = h_i - i\},$$

$$\overline{W} = \{(f, S_1, \ldots, S_m) : f \in Z \text{ y } f(S_m) = 0\} \subset Z \times G.$$

El conjunto $G$ es una subvariedad de $G(h_1 - 1, V_1) \times \cdots \times G(h_m - m, V_m)$ donde cada $G(h_i - i, V_i)$ es la variedad de subespacios vectoriales del espacio $V_i$, que tienen dimensión $h_i - i$. Las variedades $G(h_i - i, V_i)$ son ejemplos de *Grassmannianas*, son irreducibles y tienen dimensión $(h_i - i) \times (\dim V_i - (h_i - i))$ (todo esto lo veremos con más detalle en el capítulo 3 dedicado a estas variedades).

La imagen de

$$\pi_1 : Z \times G \to Z$$

es $W$ pues dada una aplicación $f \in Z$ tal que $f(S_m) = 0$, entonces $f(S_i) = 0$ para cada $1 \leq i \leq m-1$, con lo que $\operatorname{rg}(M|_{h_i}) \leq i$ para cada $1 \leq i \leq m$.

Luego la dimensión de $W$ será la misma que la de $\overline{W}$. Calculemos entonces la dimensión de $\overline{W}$.

Sea $\pi_2 : Z \times G \to G$ la proyección en la segunda coordenada. Observemos que la fibra $\pi_2^{-1}(S_1, \ldots, S_m)$ de un elemento $(S_1, \ldots, S_m) \in G$, es el conjunto

$$\{(f, S_1, \ldots, S_m) : f(S_m) = 0\} \cong \operatorname{Hom}_K(K^s/S_m, K^r),$$

que es un espacio vectorial. Luego $\overline{W}$ es un fibrado vectorial. Por lo tanto si probamos que el conjunto $G$ es una variedad irreducible, $\overline{W}$ lo será también, y su dimensión será la dimensión de $G$ más la dimensión de la fibra de un elemento (por los teoremas 11.12 y 11.14 de [Ha]).

La dimensión de la fibra de un elemento $(S_1, \ldots, S_m)$ es la dimensión del espacio vectorial

$$\mathrm{Hom}_K(K^s/S_m, K^r)$$

que es $(s - (h_m - m))r = (s - (s - m))r = mr$.

La dimensión de $G$ se calcula usando la sucesión de conjuntos

$$G_k = \{(S_1, \ldots, S_k) : S_i \text{ es subespacio vectorial de } V_i, S_i \subset S_{i+1}, \text{ y } \dim S_i = h_i - i\}.$$

Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} G_k & \xrightarrow{\pi} & G_{k-1} \\ (S_1, \ldots, S_k) & \longmapsto & (S_1, \ldots, S_{k-1}) \end{array}$$

Calculemos entonces la dimensión de $G_k$ en función de la de $G_{k-1}$ suponiendo que esta última es una variedad irreducible.

Con estas hipótesis podemos concluir que $G_k$ es irreducible y que su dimensión es igual a la de $G_{k-1}$ sumada a la dimensión de la fibra $\pi^{-1}(S_1, \ldots, S_{k-1})$. (Esto vale por los teoremas 11.12 y 11.14 de [Ha].) Pero esta última es el conjunto $G(h_k - k - (h_{k-1} - (k-1)), V_k/S_{k-1}) = G(h_k - h_{k-1} - 1, V_k/S_{k-1})$, que tiene dimensión $(h_k - h_{k-1})(h_k - (h_{k-1} - (k-1)) - (h_k - h_{k-1} - 1)) = (h_k - h_{k-1} - 1)k$.

Luego $\dim G_k = \dim G_{k-1} + k(h_k - h_{k-1} - 1)$ (siempre asumiendo que las variedades $G_k$ son irreducibles).

Luego basta ver que $G_1$ es irreducible. Pero

$$G_1 = \{S_1 : S_1 \subset V_1 \text{ y } \dim S_1 = h_1 - 1\} = G(h_1 - 1, V_1),$$

que es irreducible de dimensión $h_1 - 1$.

Por lo tanto, cada una de las $G_k$ es irreducible, y por lo tanto $G = G_m$ también. Además,

$$\dim G = \sum_{k=1}^{m} k(h_k - h_{k-1} - 1) = mh_m - (1/2)m(m+1) - \sum_{k=1}^{m-1} h_k = ms - (1/2)m(m+1) - \sum_{k=1}^{m-1} h_k.$$

Luego

$$\dim \overline{W} = mr + ms - (1/2)m(m+1) - \sum_{k=1}^{m-1} h_k = m(r+s) - \left((1/2)m(m+1) + \sum_{k=1}^{m-1} h_k\right).$$

Finalmente veamos que la dimensión de $W$ es la misma que la de $\overline{W}$.

Sea

$$W' = W \setminus Z_{m-1},$$

donde $Z_{m-1}$ es el conjunto de matrices $M \in Z$ de rango menor o igual que $m-1$. Entonces la fibra $\pi_1^{-1}(M)$ de un elemento $M \in W'$ tiene un solo elemento, con lo que $\pi_1$ restringida a $\pi_1^{-1}(W')$ es un isomorfismo. Luego $\dim \overline{W} = \dim W'$ y como $W'$ es denso en $W$ (pues $W'$ es abierto en $W$), $\dim W = \dim W' = \dim \overline{W}$.

Finalmente, dado que $I(W) = I_{H,n}$, tenemos que

$$\operatorname{gr} I_{H,n} = rs - \dim W = rs - m(r+s) + (1/2)m(m+1) + \sum_{k=1}^{m-1} h_k.$$

(Estamos calculando en realidad la altura del ideal $I_{H,n}$, pero en un anillo de polinomios sobre un cuerpo las nociones de grado, profundidad y altura de un ideal coinciden, pues es un anillo de Cohen-Macaulay (ver proposición A.18).)

# Capítulo 3

# Grassmannianas y subvariedades de Schubert

En este capítulo vamos a ver la relación entre ideales generados por menores de matrices y subvariades de las Grassmannianas.

## 3.1. Grassmannianas

**Definición 3.1** *Sea $V$ un $K$-espacio vectorial de dimensión $s$, y $r$ un número natural menor o igual que $s$. Llamaremos $G(r,V)$ al conjunto de subespacios de $V$ de dimensión $r$. Además notaremos con $G(r,s)$ a $G(r,K^s)$.*

Si $K = \mathbb{R}$, las Grassmannianas son variedades diferenciables de dimensión $r(s-r)$, y como los cambios de coordenadas del atlas diferenciable canónico son funciones racionales, estas variedades resultan variedades algebraicas de la misma dimensión (pues contienen un abierto afín que es isomorfo a $\mathbb{A}^{r(s-r)}$.)

Existe una presentación de la variedad $G(r,s)$ como una subvariedad del espacio proyectivo $\mathbb{P}^{\binom{s}{r}-1}$. Tomemos una matriz $M \in K^{r\times s}$ de rango $r$, asociémosle a $M$ el subespacio de $K^s$ generado por las filas de $M$. Esto induce una aplicación

$$K_0^{r\times s} = \{M \in K^{r\times s} : M \text{ es de rango } r\} \xrightarrow{f} G(r,s).$$

Si definimos en $K_0^{r\times s}$ la siguiente relación de equivalencia:

$$M \sim N \Leftrightarrow \text{ existe } G \in GL(r,K) \text{ tal que } GM = N,$$

entonces la aplicación $f$ pasa al cociente, de manera que $G(r,s) \cong K_0^{r\times s}/\sim$. (Esta es una igualdad conjuntista, ahora veremos que este conjunto se sumerge en un espacio proyectivo dándole una estructura de variedad.)

Dados un conjunto $a \subset \{1, \ldots, s\}$ de $r$ elementos y una matriz $M \in K_0^{r \times s}$, llamaremos $M_a$ a la submatriz formada por las columnas de $M$ indicadas por los elementos de $a$ (numerando las columnas de izquierda a derecha.)

Definamos entonces una aplicación

$$\begin{array}{ccll} K_0^{r\times s} & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}^{\binom{s}{r}-1} & \\ M & \mapsto & (\det M_a)_a & \text{donde } a \subset \{1, \ldots, s\} \text{ y } \#a = r. \end{array}$$

La aplicación $p$ preserva la relación definida anteriormente induciendo una función

$$P : G(r, s) \to \mathbb{P}^{\binom{s}{r}-1},$$

que es conocida como la inmersión de Plücker. Se puede ver que el conjunto $\operatorname{Im} P \subset \mathbb{P}^{\binom{s}{r}-1}$ es una variedad algebraica cuyo ideal está dado por cuádricas (llamadas cuádricas de Plücker, para mayor información ver [Ha]).

Tomemos una matriz $X$ de indeterminadas sobre $K$ de tamaño $r \times s$. Si llamamos $A$ al conjunto de subconjuntos de $\{1, \ldots, s\}$ que tienen $r$ elementos, y tomamos $\binom{s}{r}$ indeterminadas $y_a$ indexadas por $A$, obtenemos el morfismo de anillos inducido por $p$

$$\begin{array}{ccc} K[y_a]_a & \xrightarrow{p^*} & K[X] \\ y_a & \longmapsto & \det X_a. \end{array}$$

Llamemos $K[X/r]$ al anillo generado por los menores de tamaño $r$ de $X$, entonces $\operatorname{Im} p^* = K[X/r]$. Sea $\mathcal{J} = \ker p^*$, es claro que $V(\mathcal{J}) = G(r, s)$. Por lo tanto el anillo

$$K[y_a]_a/\mathcal{J} \cong K[X/r]$$

es un anillo de coordenadas homogéneas para $G(r, s)$. También es cierto que el ideal $\mathcal{J}$ es el ideal de la variedad $G(r, s)$ y está generado por las cuádricas de Plücker.

Observemos que entonces el anillo $K[X/r]$ es Cohen-Macaulay si y sólo si el ideal $\mathcal{J}$ es perfecto.

## 3.2. Subvariedades de Schubert

Vamos a definir las subvariedades de Schubert tal como se hace en [Ho 1].

**Definición 3.2** *Sean $r$ y $s$ dos números naturales con $r \leq s$ y $\sigma = (s_1, \ldots, s_r)$ una sucesión de números enteros tales que $0 \leq s_1 < \cdots < s_r < s$. Sea además $0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$ una sucesión estrictamente creciente de subespacios de $K^s$, donde el subespacio $V_{r-i+1}$ está generado por los vectores $e_{s_i+1}, \ldots, e_s$ de la base canónica de $K^s$. Llamaremos $\mathcal{S}_\sigma$ al conjunto de subespacios $T$ de $K^s$ de dimensión $r$ tales que la dimensión de $T \cap V_i$ es mayor o igual que $i$ para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$.*

Observar que si tomamos $\tau = (0, \dots, r-1)$, entonces $\mathcal{S}_\tau = G(r,s)$.

Por ser subconjuntos de $G(r,s)$ los conjuntos $\mathcal{S}_\sigma$ están inmersos en $\mathbb{P}^{\binom{s}{r}-1}$. Sea

$$B_\sigma = \{a \subset \{1, \dots, s\} : \#a = r \text{ y } \#(a \cap \{1, \dots, s_i\}) \geq i \text{ para algún } i\},$$

donde $\#\emptyset = 0$. Sea $T \subset K^s$ es un subespacio de dimensión $r$ y $M \in K_0^{r \times s}$ es una matriz cuyas filas son una base de $T$, veamos que $T \in \mathcal{S}_\sigma \Leftrightarrow \det M_a = 0$ para todos los $a$ que pertenecen a $B_\sigma$. Tomemos una matriz $M$ de rango $r$ cuyas filas generan un subespacio $T$ de $K^s$ de dimensión $r$,

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1s} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{r1} & m_{r2} & \cdots & m_{rs} \end{pmatrix}.$$

Un elemento típico de $T$ es una combinación lineal

$$t = \alpha_1(m_{11}, \dots, m_{1s}) + \cdots + \alpha_r(m_{r1}, \dots, m_{rs}).$$

Dado que cada subespacio $V_i$ está dado por

$$V_i = \{(x_1, \dots, x_s) : x_1 = \cdots = x_{s_{r-i+1}} = 0\},$$

para que un elemento $t \in T$ pertenezca a $V_i$, los $\alpha_k$ deben verificar las siguientes ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} m_{11}\alpha_1 & + & \cdots & + & m_{r1}\alpha_r & = & 0 \\ m_{12}\alpha_1 & + & \cdots & + & m_{r2}\alpha_r & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{1s_{r-i+1}}\alpha_1 & + & \cdots & + & m_{rs_{r-i+1}}\alpha_r & = & 0 \end{array} \right.,$$

luego para que $\dim T \cap V_i \geq i$, la matriz del sistema anterior debe tener rango menor o igual que $r-i$. Pero esta matriz es $(M|_{s_{r-i+1}})^t$, con lo que la condición para que $\dim T \cap V_i \geq i$ es que $\operatorname{rg} M|_{s_{r-i+1}} \leq r-i$. Cambiando de índices obtenemos la condición $\operatorname{rg} M|_{s_i} \leq i-1$.

Tomemos ahora un subespacio $T \in \mathcal{S}_\sigma$, y $M$ una matriz cuyo subespacio fila sea $T$. Sea $a \in B_\sigma$, entonces existe un $i$ tal que $\#(a \cap \{1, \dots, s_i\}) \geq i$. Pero como $T \in \mathcal{S}_\sigma$, se debe tener que $\operatorname{rg} M|_{s_i} \leq i-1$, y por lo tanto $\det M_a = 0$.

Recíprocamente, dada $M$ una matriz de rango $r$ tal que $\det M_a = 0$ para todo $a \in B_\sigma$, veamos que el subespacio $T$ generado por las filas de $M$ pertenece a $\mathcal{S}_\sigma$. Supongamos que esto no ocurre. Entonces debe existir un $i$ tal que $\operatorname{rg} M|_{s_i} \geq i$. Sean $a_1, \dots, a_i$ los números de $i$ columnas de $M|_{s_i}$ que son linealmente independientes, y sea $a \supset \{a_1, \dots, a_i\}$ de cardinal $r$, tal que $\operatorname{rg} M_a = r$. Entonces $\det M_a \neq 0$, lo cual es un absurdo pues $\#(a \cap \{1, \dots, s_i\}) \geq i$.

Esta condición dice que los conjuntos $\mathcal{S}_\sigma$ son la intersección de $G(r,s)$ y finitos planos coordenados de $\mathbb{P}^{\binom{s}{r}-1}$, con lo cual son variedades algebraicas (que son subvariedades de $G(r,s)$).

**Definición 3.3** *A las variedades $\mathcal{S}_\sigma$ las llamaremos variedades de Schubert standard.*

Si llamamos $\mathcal{B}_\sigma$ al ideal de $K[X/r]$ generado por $\{X_b : b \in B_\sigma\}$, entonces es claro que $K[X/r]/\mathcal{B}_\sigma$ es un anillo de coordenadas homogéneas para $\mathcal{S}_\sigma$. Sea $\pi$ el morfismo

$$\begin{array}{ccc} K[y_a]_a & \xrightarrow{\pi} & K[X/r]/\mathcal{B}_\sigma \\ y_a & \rightarrow & \overline{X_a} \end{array}$$

Es claro que $K[X/r]/\mathcal{B}_\sigma \cong K[y_a]_a/\ker\pi$, con lo cual $K[X/r]/\mathcal{B}_\sigma$ es Cohen-Macaulay si y sólo si el ideal $\ker\pi$ es perfecto. Al ideal $\ker\pi$ lo vamos a notar con $\mathcal{J}_\sigma$.

El resultado principal en [Ho 1] es:

**Teorema 3.4** *Sea $\sigma = (s_1, \ldots, s_r)$ (con $0 \leq s_1 < \cdots < s_n < s$). Entonces $K[X/r]/\mathcal{B}_\sigma$ es un anillo de Cohen-Macaulay.*

*Demostración:* Ver [Ho 1, Th. 3.1$^*$, página 47]. La demostración consiste en probar que los ideales $\mathcal{J}_\sigma$ son perfectos, para lo cual se usa un argumento similar al que se usa para probar el resultado principal de [Ho Ea]. ■

Sabiendo esto podemos concluir que los ideales $I_{H,0}$ definidos en el capítulo anterior son perfectos.

**Proposición 3.5** *Sea $X$ una matriz de indeterminadas sobre un cuerpo $K$ de tamaño $r \times s$ y sea $0 \leq h_0 < h_1 < \cdots < h_m \leq s$ una sucesión de números enteros, con $m < r$. Sea $I \subset K[X]$ el ideal generado por los menores de tamaño $t+1$ de la matriz formada por las primeras $h_t$ filas de $X$ ($1 \leq t \leq m$). Entonces el ideal $I$ es perfecto.*

*Demostración:* Ver [Ho 1, Cor 3.13, página 53]. ■

Finalmente realicemos el cálculo de la dimensión de las subvariedades $\mathcal{S}_\sigma$

**Proposición 3.6** *Las dimensión de la subvariedad $\mathcal{S}_\sigma$ es*

$$\dim \mathcal{S}_\sigma = rs - \frac{1}{2}r(r+1) - \sum_{i=1}^{r} s_i.$$

*Demostración:* La demostración va a ser similar a la hecha al calcular el grado de los ideales $I_{H,n}$ en el capítulo anterior.

Definamos para cada $1 \leq k \leq r$ los conjuntos

$$G_k = \{(S_1, \ldots, S_k) : S_i \subset V_i, \dim S_i = i \text{ y } S_i \subset S_{i+1} \text{ para cada } 1 \leq i \leq k-1\}.$$

La dimensión de $G_r$ se puede calcular recursivamente. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} G_k & \xrightarrow{\pi_k} & G_{k-1} \\ (S_1, \ldots, S_k) & \longmapsto & (S_1, \ldots, S_{k-1}) \end{array}$$

Calculemos entonces la dimensión de $G_k$ en función de la de $G_{k-1}$ suponiendo que esta última es una variedad irreducible.

Con estas hipótesis podemos concluir que $G_k$ es irreducible y que su dimensión es igual a la de $G_{k-1}$ sumada a la dimensión de la fibra $\pi_k^{-1}(S_1, \ldots, S_{k-1})$. Pero esta última es el conjunto $G(1, V_k/S_{k-1})$, que tiene dimensión $s - s_{r-k+1} - k$. (Estamos usando los teoremas 11.12 y 11.14 de [Ha].)

Luego $\dim G_k = \dim G_{k-1} + s - s_{r-k+1} - k$ (siempre asumiendo que las variedades $G_k$ son irreducibles).

Basta para esto ver que $G_1$ es irreducible. Pero

$$G_1 = \{S_1 : S_1 \subset V_1 \text{ y } \dim S_1 = 1\} = G(1, V_1),$$

que es irreducible de dimensión $s - s_r - 1$, con lo cual también se ve que

$$\dim G_r = \sum_{k=1}^{r}(s - s_{r-k+1} - k) = rs - \frac{1}{2}r(r+1) - \sum_{i=1}^{r} s_i.$$

Finalmente, tenemos que la proyección

$$\begin{array}{ccc} G_r & \xrightarrow{\pi_1} & G(r, V_r) \\ (S_1, \ldots, S_r) & \longmapsto & S_r \end{array}$$

tiene como imagen a la variedad $\mathcal{S}_\sigma$. Además, el conjunto

$$U = \{S \subset V_r : \dim S \cap V_i = i\} \subset \mathcal{S}_\sigma$$

es un abierto Zariski, y $\pi_1$ restringida a $\pi_1^{-1}(U)$ es uno a uno, por lo cual la dimensión de $\mathcal{S}_\sigma$ coincide con la de $G_r$. ■

## 3.3. Más anillos de invariantes

Vamos a ver que los anillos de coordenadas homogéneas para las Grassmannianas y para las subvariedades de Schubert que definimos en las secciones anteriores, surgen como anillos de invariantes de ciertas representaciones de grupos.

En primer lugar enunciamos que el anillo de coordenadas homogéneas para las Grassmannianas es el anillo de invariantes de una representación de un grupo reductivo.

**Proposición 3.7** *Sea $X$ una matriz de indeterminadas de tamaño $r \times s$. Consideremos la acción de $SL(r, K)$ en $K[X]$ que actúa asignando a cada coordenada de $X$ la correspondiente de $AX$. Entonces el anillo de invariantes de esta acción es $K[X/r]$, que es un anillo de coordenadas homogéneas para las Grassmannianas.*

*Demostración:* Ver [We, Ch. II, §6]. ■

Veamos ahora que los anillos de coordenadas homogéneas de las subvariedades de Schubert son anillos de invariantes de representaciones de grupos.

**Proposición 3.8** *Sea* $0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_m = s$ *una sucesión de números enteros, con* $m < r$. *Sean* $U_i$ *y* $V_i$ *matrices de indeterminadas sobre* $K$ *(un cuerpo) de tamaño* $(i+1) \times i$ *e* $i \times j_i$, *donde* $j_i = h_i - h_{i-1}$ $(1 \leq i \leq m)$, *respectivamente, y sea* $V_{m+1}$ *una matriz de indeterminadas de tamaño* $r \times r$. *Notemos con* $U$ *y* $V$ *a las* $m$*-uplas* $(U_1, \ldots, U_m)$ *y* $(V_1, \ldots, V_{m+1})$ *respectivamente. Sea* $K[U, V]$ *el anillo de polinomios en las coordenadas de todas las* $U's$ *y las* $V's$. *Definamos entonces una representación del grupo* $G = \prod_{i=1}^{m} GL(i, K)$ *en* $K[U, V]$ *de la siguiente manera: un elemento* $(A_1, \ldots, A_m) \in G$ *actúa asignando a cada coordenada de* $U_i$ *la correspondiente de* $A_{i+1} U_i A_i^{-1}$ *para los* $i$ *tales que* $1 \leq i \leq m-1$, *a cada coordenada de* $U_m$ *la correspondiente de* $U_m A_m^{-1}$, *a cada coordenada de* $V_i$ *la correspondiente de* $A_i V_i$ $(1 \leq i \leq m)$ *y que deja las coordenadas de* $V_{m+1}$ *fijas. Por otro lado consideremos la siguiente acción del grupo* $SL(r, K)$ *: una matriz* $A \in SL(r, K)$ *actúa asignando a cada coordenada de* $U_m$ *y de* $V_{m+1}$ *la correspondiente de* $AU_m$ *y de* $AV_{m+1}$ *respectivamente, y dejando las otras fijas. Es fácil ver que estas dos acciones conmutan, definiendo luego una acción desde el grupo* $G' = SL(r, K) \times G$. *Entonces si* $K$ *tiene característica cero, el anillo de invariantes de esta es acción es el anillo de coordenadas homogéneas* $K[X/r]/\mathcal{B}_\sigma$ *donde* $\sigma = (h_0, \ldots, h_m, h_m + 1, \ldots, h_m + r - m - 1)$, *y* $X$ *es una matriz de indeterminadas de tamaño* $r$ *por* $s + r$.

*Demostración:* Sabemos por la proposición 2.6, que el anillo de la representación de $G$ en $K[U, V]$ es $K[U * V]$. Ahora $U * V = [U_m \cdot U' * V' \mid V_{m+1}]$ donde $U' = (U_1, \ldots, U_{m-1})$, $V' = (V_1, \ldots, V_m)$ y

$$U' * V' = [U_{m-1} \ldots U_1 V_1 \mid \cdots \mid V_m].$$

Nos encontramos en la situación en que una matriz $A \in SL(r, K)$ actúa en $K[U * V]$ llevando cada coordenada de $U * V$ en la correspondiente de $A \cdot U * V$. Consideremos una nueva matriz de indeterminadas $Y$ de tamaño $r \times (r + s)$. En la proposición anterior vimos que la acción de $SL(r, K)$ en $K[Y]$ que manda cada coordenada de $Y$ en la correspondiente de $AY$ tiene como anillo de invariantes a $K[Y/r]$

Por lo tanto el anillo de invariantes de la acción de $G'$ en $K[U, V]$ es $K[U * V/r]$. Faltaría ver que este último anillo es isomorfo a $K[X/r]/\mathcal{B}_\sigma$ donde recordamos que $\sigma = (h_0, \ldots, h_m, h_m + 1, \ldots, h_m + r - m - 1)$, y que $X$ es una matriz de indeterminadas de tamaño $r \times (s + r)$.

Estos dos anillos son isomorfos a cocientes del anillo $K[z_a]_a$ donde $a$ es un subconjunto de $r$ elementos del conjunto $\{1, \ldots, s + r\}$. $K[X/r]/\mathcal{B}_\sigma \cong K[z_a]_a/\mathcal{J}_\sigma$, donde $\mathcal{J}_\sigma$ es el núcleo del morfismo

$$\begin{array}{ccc} K[z_a]_a & \xrightarrow{\pi} & K[X/r]/\mathcal{B}_\sigma \\ z_a & \to & \overline{X_a}. \end{array}$$

De la misma manera, $K[U * V/r] \cong K[z_a]_a/\mathcal{I}$, con $\mathcal{I}$ el núcleo del morfismo

$$\begin{array}{ccc} K[z_a]_a & \xrightarrow{\psi} & K[U * V/r] \\ z_a & \to & (U * V)_a. \end{array}$$

Queremos ver que los ideales $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}_\sigma$ son iguales.

Consideremos el morfismo de variedades algebraicas

$$\begin{array}{ccc} K^{2\times 1}\times K^{3\times 2}\times\cdots\times K^{r\times m}\times K^{1\times j_1}\times\cdots\times K^{m\times j_m}\times K^{r\times r} & \stackrel{\phi}{\longrightarrow} & K^{r\times(s+r)} \\ (C_1,\ldots,C_m,D_1,\ldots,D_m,D_{m+1}) & \longmapsto & C*D. \end{array}$$

Vimos en el capítulo anterior que esta aplicación induce un isomorfismo $K[U*V]\cong K[Y]/I_H$, donde $Y$ es una matriz de indeterminadas de tamaño $r\times(r+s)$, e $I_H$ es el ideal generado por los menores de tamaño $t+1$ de la matriz $Y|_{h_t}$ ($1\le t\le m$). Tomemos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} K^{r\times(s+r)} & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & K^{\binom{s+r}{r}} \\ M & \longmapsto & (M_a)_a. \end{array}$$

y consideremos la composición $\varphi\circ\phi$. Entonces tenemos que $(\varphi\circ\phi)^*=\psi$ y por lo tanto $I\left(\overline{\operatorname{Im}\varphi\circ\phi}\right)=\mathcal{I}$.

Como por otro lado el ideal $\mathcal{J}_\sigma$ es el ideal de la subvariedad $\mathcal{S}_\sigma$, veamos que esta variedad es isomorfa a la variedad $\overline{\operatorname{Im}\varphi\circ\phi}$.

Para ello basta ver que el conjuntos de matrices de tamaño $r\times(s+r)$ tales que su espacio fila representa a un subespacio de dimensión $r$ que pertenece a $\mathcal{S}_\sigma$ es igual al conjunto de matrices de tamaño $r\times(s+r)$ de rango $r$ que se pueden escribir como

$$[M\mid N],$$

donde $M$ es una matriz de tamaño $r\times s$ tal que el rango de $M|_{h_t}\le t$ para cada $1\le t\le m$. (Basta con esto pues los menores de tamaño $r$ de una matriz de rango menor que $r$ son todos cero.)

Por el análisis hecho en la sección 3.2, si el espacio generado por las filas de una matriz $L\in K^{r\times(s+r)}$ pertenece a $\mathcal{S}_\sigma$, entonces $\operatorname{rg}L|_{s_i}\le i-1$ para cada $1\le i\le r$. En particular, $\operatorname{rg}L|_{h_t}\le t$ para cada $1\le t\le m$. Luego si llamamos $M=L|_{h_t}$ y $N$ es la matriz formada por las últimas s columnas de $L$, podemos escribir $L=[M\mid N]$, donde $M$ verifica $\operatorname{rg}M|_{h_t}\le t$ para cada $1\le t\le m$.

Si por otro lado $L\in K^{r\times(s+r)}$, se escribe como $L=[M\mid N]$, con $M\in K^{r\times s}$ tal que $\operatorname{rg}M|_{h_t}\le t$ para cada $1\le t\le m$, entonces es claro que $\operatorname{rg}L|_{s_i}\le i-1$, para cada $1\le i\le m+1$ (pues $s_i=h_{i-1},\ 1\le i\le m+1$). Finalmente como $s_{m+1+j}=h_m+j$ para $1\le j\le r-m-1$, es claro que $\operatorname{rg}L|_{s_{m+1+j}}\le m+j$, con lo cual $\operatorname{rg}L|_{s_i}\le i-1$ para cada $1\le i\le r$, condición para que el subespacio fila de $L$ pertenezca a $\mathcal{S}_\sigma$. ■

Luego vimos otro ejemplo en que el anillo de invariantes de la representación de un grupo reductivo es Cohen-Macaulay (pues el anillo de coordenadas homogéneas de $\mathcal{S}_\sigma$ lo es).

# Apéndice A

# Diccionario de Álgebra Conmutativa

Vamos a considerar solamente anillos conmutativos y con unidad.

## A.1. Dimensión

Sea $A$ un anillo. Vamos a llamar *cadena de ideales primos de* $A$ a una sucesión finita estrictamente creciente de ideales primos ; si $\wp_0 \subset \wp_1 \subset \ldots \subset \wp_r$ es una tal cadena diremos que su longitud es $r$.

Llamaremos *dimensión de* $A$ al supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos de $A$, y lo vamos a notar $\dim A$.

La dimensión de un anillo es un número entero no negativo o infinito. En adelante vamos a trabajar sólo con anillos que tienen dimensión finita.

Si $\wp \subset A$ es un ideal primo, llamaremos *altura de* $\wp$ al supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos $\wp_0 \subset \wp_1 \subset \ldots \subset \wp_r$ tales que $\wp_r = \wp$, y la vamos a notar $\operatorname{ht} \wp$. Observar que $\operatorname{ht} \wp = \dim A_\wp$ (la dimensión del anillo $A$ localizado en $\wp$).

Si $I \subset A$ es un ideal arbitrario, definiremos $\operatorname{ht} I$ como el mínimo de las alturas de ideales primos $\wp \supseteq I$.

Siempre se cumple

$$\dim A/I + \operatorname{ht} I \leq \dim A$$

Por último, definiremos la dimensión de un $A$-módulo $M$ como $\dim M = \dim A/\operatorname{Ann}(M)$, y la dimensión de un ideal $I \subset A$, como $\dim I = \dim A/I$.

## A.2. Dimensión sobre anillos semi-locales

**Definición A.1** *Sea $A$ un anillo semi-local y sea $\mathcal{M}$ el ideal radical de Jacobson (la intersección de los ideales maximales de $A$). Llamaremos ideal de definición de $A$ a un ideal $I$ que verifique una de las siguientes propiedades equivalentes*

*1.* $\mathcal{M}^n \subseteq I \subseteq \mathcal{M}$ *para algún* $n > 0$.

*2.* $I \subseteq \mathcal{M}$ *y* $A/I$ *es de longitud finita.*

**Teorema A.2** *Sea $A$ un anillo semi-local, $\mathcal{M}$ el ideal radical de $A$, y $M$ un $A$-módulo. Entonces se tiene la siguiente caracterización de la dimensión de $M$:*

$$\dim M = \text{mín}\{r \in \mathbb{Z} : \text{ existen } a_1, \ldots, a_r \in \mathcal{M} \text{ y } M/(a_1, \ldots, a_r)M \text{ es de longitud finita}\}$$

*Demostración:* Ver [Ma, Th.17, página 76]. ■

**Corolario A.3** *Sea $A$ un anillo semi-local y sea $\mathcal{M}$ su ideal radical. Entonces la dimensión de $A$ es la mínima cantidad de generadores de un ideal de definición de $A$.*

*Demostración:* Ver [Se, Cor.2, III-9]. ■

**Definición A.4** *Sea $A$ un anillo semi-local, y $M$ un $A$-módulo de dimensión $n$. Vamos a decir que $x_1, \ldots, x_n$ son un sistema de parámetros de $M$ si y sólo si el $A$-módulo $M/(x_1, \ldots, x_n)M$ es de longitud finita.*

**Definición A.5** *Sea $(A, \mathcal{M})$ un anillo local. Diremos que $A$ es un anillo local regular si y sólo si existe un sistema de parámetros de $A$ que generan el ideal maximal $\mathcal{M}$. A un tal sistema de parámetros lo llamaremos sistema regular de parámetros.*

**Proposición A.6** *Sea $A$ un anillo semi-local, $M$ un $A$-módulo de dimensión $n$ y $x_1, \ldots, x_r$ elementos del radical de $A$. Entonces*

$$\dim M/(x_1, \ldots, x_r)M + r \geq \dim M$$

*y vale la igualdad si y sólo si $x_1, \ldots, x_r$ son parte de un sistema de parámetros de $M$.*

*Demostración:* Ver [Se, Prop.6, III-11]. ■

## A.3. Dimensión de álgebras

En esta sección establecemos los resultados de dimensión de álgebras.

**Teorema A.7** *Sea $A$ un anillo noetheriano y $A[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en las variables $x_1, \ldots, x_n$. Entonces*

$$\dim A[x_1, \ldots, x_n] = \dim A + n$$

*Demostración:* Ver [Ma, Th.22, página 83]. ■

En consecuencia, el anillo de polinomios sobre un cuerpo en las variables $x_1, \ldots, x_n$ tiene dimensión $n$.

**Teorema A.8 Teorema de normalización de Noether**

*Sea $A$ un álgebra finitamente generada sobre un cuerpo $K$. Entonces existen $r$ elementos $y_1, \ldots, y_r \in A$ que son algebraicamente independientes sobre $K$, tales que $A$ es entera sobre $K[y_1, \ldots, y_r]$. Se tiene que $r = \dim A$ y que si $A$ es un dominio, $r$ es el grado de trascendencia de $A$ sobre $K$.*

*Demostración:* Ver [Ma, Cor.1, página 91]. ■

## A.4. Profundidad

Hasta el fin de este apéndice trabajaremos con anillos noetherianos únicamente.

Sea $A$ un anillo y $M$ un $A$-módulo. Sea $a_1, \ldots, a_r$ una sucesión de elementos de $A$. Vamos a decir que $a_1, \ldots, a_r$ es una *sucesión $M$-regular* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Para cada $1 \leq i \leq r$, $a_i$ no es un divisor de cero en $M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M$
2. $M \neq (a_1, \ldots, a_r)M$

Si $I \subset A$ es un ideal, y además $a_i \in I$ para $1 \leq i \leq r$, diremos que $a_1, \ldots, a_r$ es una *sucesión $M$-regular en $I$*.

Si bien esta noción depende del orden de los elementos, en el caso en que $M$ es finitamente generado se puede determinar cuál es la longitud de una sucesión regular maximal (observar que una tal sucesión maximal existe, ya que la sucesión de submódulos $(a_1)M, (a_1, a_2)M, \ldots$ es es estrictamente creciente, y luego $(a_1), (a_1, a_2), \ldots$ es una sucesión creciente de ideales en $A$ que se estaciona).

**Teorema A.9** *Sean $A$ un anillo noetheriano, $M$ un $A$-módulo finitamente generado, $I \subset A$ un ideal tal que $IM \neq M$, y $n > 0$ un entero. Entonces son equivalentes:*

1. $\mathrm{Ext}^i_A(N, M) = 0$ $(i < n)$ *para cada $A$-módulo finitamente generado $N$ tal que* $\mathrm{Supp}\, N \subseteq \mathrm{Supp} A/I$
2. $\mathrm{Ext}^i_A(A/I, M) = 0$ $(i < n)$
3. *Existe un $A$-módulo finitamente generado $N$ con* $\mathrm{Supp} N = \mathrm{Supp} A/I$ *tal que* $\mathrm{Ext}^i_A(N, M) = 0$ $(i < n)$
4. *Existe una sucesión $M$-regular $a_1, \ldots, a_n$ de longitud $n$ en $I$*

*Demostración:* Ver [Ma, Th.28, página 100]. ■

Entonces tiene sentido definir

**Definición A.10** *Sean A,M,I como en el teorema anterior. Llamaremos profundidad de I en M a la longitud de las sucesiones M-regulares maximales incluidas en I, y la notaremos* $\operatorname{depth}_I(M)$ *.*

El teorema muestra que

$$\operatorname{depth}_I(M) = \min\{i \in \mathbb{Z} : \operatorname{Ext}^i_A(A/I, M) \neq 0\}.$$

En caso que $(A, \mathcal{M})$ sea local, llamaremos $\operatorname{depth} M$ a $\operatorname{depth}_{\mathcal{M}}(M)$ .

Existe además la noción de *grado* introducida por *D.Rees*, que se relaciona con la de profundidad.

**Definición A.11** *Sea A un anillo noetheriano,* $M \neq 0$ *un A-módulo finitamente generado y sea* $I = \operatorname{Ann} M$ *. Se define el grado de M como*

$$\operatorname{gr} M = \min\{i \in \mathbb{Z} : \operatorname{Ext}^i_A(M, A) \neq 0\}.$$

El teorema anterior muestra que

$$\operatorname{gr} M = \operatorname{depth}_I(A), \ (\text{donde } I = \operatorname{Ann} M).$$

Por otro lado si $I \subset A$ es un ideal, se llama *grado* de $I$ a $\operatorname{gr} A/I$ (i.e. el grado de $I$ es $\operatorname{depth}_I(A)$ , la longitud de una sucesión $A$-regular maximal en $I$ ).

Si bien Eagon y Hochster usan esta última noción, nosotros usaremos la de profundidad, esperando que no cause confusión al que quiera leer los trabajos originales de ellos.

Para finalizar esta sección enunciaremos un lema que relaciona sucesiones regulares y dimensión en anillos locales.

**Lema A.12 Teorema de Krull**

*Sea A un anillo local y M un A-módulo finitamente generado. Sea* $a_1, \ldots, a_r$ *una sucesión M-regular,entonces* $\dim M/(a_1, \ldots, a_r)M = \dim M - r$ *.*

*Demostración:* Es claro que $\dim M/(a_1, \ldots, a_r)M \geq \dim M - r$ (por teorema A.2). Tomemos ahora $b$ un elemento M-regular. Este elemento no pertenece a ningún ideal minimal de $\operatorname{Supp} M$ , luego $\dim M/(b)M < \dim M$ , o lo que es lo mismo $\dim M/(b)M \leq \dim M - 1$ . El lema sale iterando este procedimiento $r$ veces. ■

## A.5. Anillos y módulos de Cohen-Macaulay

En esta sección definiremos la noción de ser Cohen-Macaulay, y enunciaremos resultados básicos sobre esta clase de módulos y anillos. Empezaremos probando una proposición que nos permitirá tener una idea del significado de ser Cohen-Macaulay.

**Proposición A.13** *Sea* $(A, \mathcal{M})$ *un anillo noetheriano local y sea* $M \neq 0$ *un A-módulo finitamente generado. Entonces* $\operatorname{depth} M \leq \dim(A/\mathcal{P})$ *para cada* $\mathcal{P} \in \operatorname{Ass} M$ *.*

*Demostración:* Hagamos inducción en la dimensión de $A/\mathcal{P}$.

Si $\dim A/\mathcal{P} = 0$, $\mathcal{P}$ es maximal. Entonces $\mathcal{P} = \mathcal{M}$, y por lo tanto $\mathcal{M} \in \operatorname{Ass} M$. Luego $\operatorname{Ext}^0_A(A/\mathcal{P}, M) = \operatorname{Hom}_A(A/\mathcal{P}, M) \neq 0$ y $\operatorname{depth} M = 0$.

Si $\dim A/\mathcal{P} = r > 0$, existe $x$ que pertenece a $\mathcal{M}$ y no a $\mathcal{P}$. Además, $\mathcal{P} + (x) \subset \mathcal{Q}$, para algún $\mathcal{Q} \in \operatorname{Ass}(A/\mathcal{P} + (x))$. Luego, dado que $\dim A/\mathcal{Q} < r$, y usando hipótesis inductiva, sale que $\operatorname{depth} M \leq \dim(A/\mathcal{Q}) < \dim(\mathcal{A}/\mathcal{P})$. ■

**Corolario A.14** *Sea* $(A, \mathcal{M})$ *un anillo noetheriano local y sea* $M \neq 0$ *un A-módulo finitamente generado. Entonces* $\operatorname{depth} M \leq \dim M$ *.*

*Demostración:* Es fácil ver que $\dim M = \sup\{\dim A/\mathcal{P} : \mathcal{P} \in \operatorname{Ass} M\}$. ■

Luego definimos

**Definición A.15** *Sea* $(A, \mathcal{M})$ *un anillo local y M un A-módulo finitamente generado. Vamos a decir que M es un módulo de Cohen-Macaulay si y sólo si* $M = 0$ *o* $\operatorname{depth} M = \dim M$*. Y diremos que A es un anillo de Cohen-Macaulay si lo es como A-módulo.*

Las siguientes son propiedades de los módulos de Cohen-Macaulay sobre anillos locales.

**Proposición A.16** *Sea* $(A, \mathcal{M})$ *un anillo local y M un A-módulo finitamente generado, entonces valen las siguientes propiedades:*

1. *Si M es un módulo de Cohen-Macaulay y* $\mathcal{P} \in \operatorname{Ass} M$*, entonces* $\operatorname{depth} M = \dim A/\mathcal{P}$*. Por lo tanto M no tiene primos inmersos.*

2. *Si* $a_1, \ldots, a_r$ *es una sucesión M-regular en* $\mathcal{M}$ *y* $M' = M/(a_1, \ldots, a_r)$*, entonces M es Cohen-Macaulay si y sólo si* $M'$ *lo es.*

3. *Si M es Cohen-Macaulay, luego para cada ideal primo* $\mathcal{P} \in A$ *el* $A_{\mathcal{P}}$*-módulo* $M_{\mathcal{P}}$ *es Cohen-Macaulay, y si* $M_{\mathcal{P}} \neq 0$ *se tiene que* $\operatorname{depth}_{\mathcal{P}}(M) = \operatorname{depth} M_{\mathcal{P}}$*.*

4. *Si A es un anillo de Cohen-Macaulay, e I es un ideal propio de A, entonces* $\operatorname{ht} I = \operatorname{depth}_I(A) = \operatorname{gr} I$*.*

   *Además,* $\operatorname{ht} I + \dim A/I = \dim A$*.*

5. *Si M es un módulo de Cohen-Macaulay, todo sistema de parámetros de M es una sucesión M-regular. Recíprocamente si un sistema de parámetros de M es una sucesión M-regular, M es un módulo de Cohen-Macaulay.*

6. *Si M es un módulo de Cohen-Macaulay, y si* $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ *son dos ideales primos en el soporte de M, entonces todas las cadenas saturadas de ideales primos que unen* $\mathcal{P}$ *con* $\mathcal{P}'$ *tienen la misma longitud :* $\dim A/\mathcal{P} - \dim A/\mathcal{P}'$ .

*Demostración:* Ver [Se, IV-24] y [Ma, página 107]. ■

Se puede definir también lo que es un anillo de Cohen-Macaulay sin necesidad de que este sea local

**Definición A.17** *Sea A un anillo noetheriano. Diremos que A es un anillo de Cohen-Macaulay si y sólo si el anillo local* $A_{\mathcal{P}}$ *es un anillo local de Cohen-Macaulay para todo ideal primo* $\mathcal{P} \subset A$ *.(i.e.* $\operatorname{ht} \mathcal{P} = \operatorname{depth}_{\mathcal{P}}(A)$ *)*

Por la proposición A.16 basta ver que $A_{\mathcal{M}}$ es un anillo local de Cohen-Macaulay para cada ideal maximal $\mathcal{M} \subset A$.

No todas las propiedades que valían para anillos locales de Cohen-Macaulay se siguen aplicando en el caso general, sin embargo tenemos

**Proposición A.18** *Sea A un anillo de Cohen-Macaulay e* $I \subset A$ *un ideal propio. Entonces* $\operatorname{ht} I = \operatorname{depth}_I(A) = \operatorname{gr} I$ .

*Demostración:* Por ser $A$ Cohen-Macaulay sabemos que $\operatorname{ht} \mathcal{P} = \dim A_{\mathcal{P}} = \operatorname{depth}_{\mathcal{P}}(A)$ para cada ideal primo de $A$. Pero como

$$\begin{aligned} \operatorname{ht} I &= \sup\{\operatorname{ht} \mathcal{P} : \mathcal{P} \text{ es primo y } \mathcal{P} \supset I\} \\ \operatorname{depth}_I(A) &= \sup\{\operatorname{depth}_{\mathcal{P}}(A) : \mathcal{P} \text{ es primo y } \mathcal{P} \supset I\} \end{aligned}$$

es claro que $\operatorname{ht} I = \operatorname{depth}_I(A)$. ■

Para terminar con este capítulo enunciamos que el anillo de polinomios en $n$ variables sobre un anillo de Cohen-Macaulay es Cohen-Macaulay.

**Teorema A.19 Teorema de Macaulay**

*Sea A un anillo de Cohen-Macaulay. Entonces el anillo de polinomios en n variables* $A[x_1, \ldots, x_n]$ *es Cohen-Macaulay.*

*Demostración:* Ver [Ma, Th.33, página 111]. ■

# Apéndice B

# Herramientas homológicas

En este capítulo definiremos la dimensión proyectiva de módulos y demostraremos la fórmula de Auslander-Buchsbaum, que permite calcular la dimensión proyectiva de módulos sobre anillos locales usando la profundidad.

Daremos también la noción de ideal perfecto. Con esta definición y con la fórmula de Auslander-Buchsbaum podremos caracterizar a los módulos de Cohen-Macaulay sobre anillos graduados de una forma sencilla.

## B.1. Dimensión proyectiva

Comencemos definiendo la dimensión proyectiva de un $A$-módulo

**Definición B.1** *Sea $M$ un $A$-módulo, llamaremos dimensión proyectiva de $M$, y la notaremos $\operatorname{pd} M$, al menor número natural $n$ que satisface que existe una resolución proyectiva finita de $M$ de longitud $n$; en el caso en que no existan resoluciones proyectivas finitas la definiremos como infinito.*

La dimensión proyectiva puede ser calculada en función de Ext. Más precisamente, se tiene

**Proposición B.2** *Sean $M$ un $A$-módulo y $n$ un número natural, entonces son equivalentes:*

1. $\operatorname{pd} M \leq n$.
2. $\operatorname{Ext}_A^i(M,N) = 0$ *para todo* $i > n$ *y para todo $A$-módulo $N$.*
3. *Dada una sucesión exacta* $0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} M_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$, *donde $M_i$ es proyectivo para cada* $0 \leq i \leq n-1$, *entonces* $M_n$ *es proyectivo.*

*Demostración:*

1) $\Rightarrow$ 2) Dado que $\operatorname{pd} M \leq n$, existe una resolución proyectiva de $M$ de longitud $n$

$$0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} M_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

Esta sucesión induce la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ker f_0 \xrightarrow{i} M_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

La cual a su vez induce, para cada $A$-módulo $N$ la sucesión larga de homología

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_A^0(M,N) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_A^{k-1}(\ker f_0, N) & \xrightarrow{\delta^{k-1}} \\ & \xrightarrow{\delta^{k-1}} & \mathrm{Ext}_A^k(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_A^k(M_0,N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_A^k(\ker f_0, N) & \xrightarrow{\delta^k} & \cdots \end{array}$$

Como $M_0$ es proyectivo, $\mathrm{Ext}_A^k(M_0,N) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $A$-módulo $N$. Luego se tiene que

$$\mathrm{Ext}_A^{k+1}(M,N) \cong \mathrm{Ext}_A^k(\ker f_0, N) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Haciendo el mismo procedimiento con la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ker f_1 \xrightarrow{i} M_1 \xrightarrow{f_1} \ker f_0 \longrightarrow 0$$

encontramos que

$$\mathrm{Ext}_A^{k+1}(\ker f_0, N) \cong \mathrm{Ext}_A^k(\ker f_1, N) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Juntando ambas igualdades obtenemos

$$\mathrm{Ext}_A^k(\ker f_1, N) \cong \mathrm{Ext}_A^{k+2}(M,N) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Finalmente iterando el procedimento $n$ veces tenemos que

$$\mathrm{Ext}_A^k(\ker f_{n-1}, N) \cong \mathrm{Ext}_A^{k+n}(M,N) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}$$

pero como $\ker f_{n-1} = M_n$ esta igualdad se transforma en

$$\mathrm{Ext}_A^k(M_n, N) \cong \mathrm{Ext}_A^{k+n}(M,N) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Y como $\mathrm{Ext}_A^k(M_n,N) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $A$-módulo $N$, tenemos que

$$\mathrm{Ext}_A^i(M,N) = 0 \text{ para todo } i > n \text{ y para todo } A\text{-módulo } N.$$

2) $\Rightarrow$ 3) Por la demostración de 1) $\Rightarrow$ 2), (observar que no se usa que $M_n$ sea proyectivo) tenemos que $\mathrm{Ext}_A^k(M_n,N) \cong \mathrm{Ext}_A^{k+n}(M,N)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $A$-módulo $N$.

Pero como $\mathrm{Ext}_A^i(M,N) = 0$ para todo $i > n$, se tiene que $\mathrm{Ext}_A^k(M_n,N) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $A$-módulo $N$; luego $M_n$ es proyectivo.

3) $\Rightarrow$ 1) Se puede construir paso a paso una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} M_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

donde $M_i$ es proyectivo para cada $0 \leq i \leq n-1$, luego, por la hipótesis, $M_n$ es proyectivo y tenemos una resolución proyectiva de $M$ de longitud $n$; con lo cual $\mathrm{pd}\, M \leq n$. ■

Como corolario obtenemos

**Corolario B.3** $\operatorname{pd} M = \sup\{k \in \mathbb{Z} : \operatorname{Ext}_A^k(M,N) \neq 0$ *para algún* $A$*-módulo* $N\}$

Veamos ahora la relación entre las dimensiones proyectivas de los términos de una sucesión exacta corta.

**Proposición B.4** *Sea* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta, entonces*

*1.* $\operatorname{pd} M \leq \sup(\operatorname{pd} M', \operatorname{pd} M'')$ *y si la desigualdad es estricta, se tiene que*

$$\operatorname{pd} M'' = \operatorname{pd} M' + 1$$

*2.* $\operatorname{pd} M'' \leq \sup(\operatorname{pd} M, \operatorname{pd} M' + 1)$ *y si la desigualdad es estricta, se tiene que*

$$\operatorname{pd} M = \operatorname{pd} M'$$

*Demostración:*

1. Sea $n > \sup(\operatorname{pd} M', \operatorname{pd} M'')$, tenemos entonces que

   $$\operatorname{Ext}_A^n(M',N) = \operatorname{Ext}_A^n(M'',N) = 0 \text{ para cualquier } A\text{-módulo } N.$$

   Fijemos un $A$-módulo $N$. Si miramos la parte siguiente de la sucesión exacta larga de la homología

   $$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(M'',N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(M,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(M',N) \longrightarrow \cdots$$

   tenemos que $\operatorname{Ext}_A^n(M,N) = 0$ pues los extremos son $0$ también. Luego, por la proposicón B.2, $\operatorname{pd} M \leq n$.

   Para ver qué pasa si la desigualdad es estricta tomemos $r = \operatorname{pd} M$. Entonces, mirando la sucesión exacta larga de la homología

   $$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(M,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(M',N) \xrightarrow{\delta n} \operatorname{Ext}_A^{n+1}(M'',N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{n+1}(M,N) \longrightarrow \cdots$$

   para un $A$-módulo $N$ cualquiera y notando que $\operatorname{Ext}_A^n(M,N) = 0$ para todo $n > r$, tenemos que

   $$\operatorname{Ext}_A^n(M',N) \cong \operatorname{Ext}_A^{n+1}(M'',N) \text{ para todo } n > r$$

   Es claro entonces que $\operatorname{pd} M'' = \operatorname{pd} M' + 1$

2. Similar al anterior. ■

## B.2. Fórmula de Auslander-Buchsbaum

Antes de demostrar la fórmula veamos un teorema que caracteriza a los módulos proyectivos sobre anillos locales.

**Teorema B.5** *Sean* $(A, \mathcal{M})$ *un anillo local y* $M$ *un* $A$*-módulo finitamente generado, entonces* $M$ *es proyectivo si y sólo si* $M$ *es libre.*

*Demostración:*

$\Leftarrow$) Trivial.

$\Rightarrow$) Sean $g_1, \ldots, g_n$ generadores de $M$, de manera que su cantidad sea mínima. Entonces $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_n$ son una base del $A/\mathcal{M}$-espacio vectorial $M/\mathcal{M}M$.

Sea $F = A^n$, y sea $F \xrightarrow{\varphi} M$, definido en la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $F$ como $\varphi(e_i) = g_i$, para $1 \leq i \leq n$. $\varphi$ induce un isomorfismo $F/\mathcal{M}F \xrightarrow{\bar{\varphi}} M/\mathcal{M}M$. En particular tenemos que $\ker \varphi \subset \mathcal{M}F$. Además, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \ker \varphi \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

se parte, por ser $M$ es proyectivo. Entonces, $F = M' \oplus \ker \varphi$, con $M' \cong M$.

Entonces, $\mathcal{M}F = \mathcal{M}M' \oplus \mathcal{M} \ker \varphi$, y como $\ker \varphi \subset \mathcal{M}F$, se ve que $\mathcal{M} \ker \varphi = \ker \varphi$; y por el lema de Nakayama, $\ker \varphi = 0$ y $M$ es libre. ■

También vamos a necesitar la siguiente proposición

**Proposición B.6** *Sean* $(A, \mathcal{M})$ *un anillo local,* $M$ *un* $A$*-módulo finitamente generado y*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

*una sucesión exacta con* $F$ *y* $K$ *libres. Si* $g$ *es suryectiva y* $\ker g \subseteq \mathcal{M}$, *entonces los morfismos*

$$\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, K) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, F)$$

*inducidos por* $f$ *son el morfismo nulo para cada* $i \geq 0$.

*Demostración:* Como $F$ y $K$ son libres, se tiene que $F = A^m$ y $K = A^n$ para $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces $f$ se puede representar como una matriz $(a_{ij}) \in A^{n \times m}$, donde cada $a_{ij} \in \mathcal{M}$ (pues $\operatorname{Im} f \subseteq \mathcal{M}$). Identificando a $\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, K)$ y $\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, F)$ con $(\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, A))^n$ y $(\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, A))^m$ respectivamente, tenemos que $f_*$ está representada por la misma matriz. Luego dado que los elementos de $\mathcal{M}$ anulan a $\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, A)$, $f_*$ tiene que ser cero. ■

Los dos resultados anteriores siguen valiendo si reemplazamos al par $(A, \mathcal{M})$ por un anillo graduado $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ donde $A_0$ es un cuerpo, y $\mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$ es el ideal irrelevante maximal de $A$, y a $M$ por un $A$-módulo graduado $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ finitamente generado.

**Teorema B.7 Fórmula de Auslander-Buchsbaum**

*Sea $(A, \mathcal{M})$ un anillo local, y sea $M$ un $A$-módulo finitamente generado de dimensión proyectiva finita. Entonces se tiene la siguiente fórmula*

$$\operatorname{pd} M + \operatorname{depth} M = \operatorname{depth} A$$

*Demostración:* Vamos a hacer inducción en la dimensión proyectiva de M.

Supongamos que $\operatorname{pd} M = 0$. Entonces $M$ es libre, y por lo tanto $M \cong A^n$ para algún $n \in N$. Se tiene entonces que $\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, M) \cong (\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, A))^n$, y por la proposición 2 del teorema A.9 , $\operatorname{depth} A = \operatorname{depth} M$.

Supongamos que $\operatorname{pd} M = 1$. Entonces se tiene una resolución libre de M

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

Si se elige $F$ de manera que tenga rango mínimo, entonces el morfismo $\varphi$ verifica las hipótesis de la proposición B.6, luego el morfismo

$$\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, K) \xrightarrow{i_*} \operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, F)$$

es el morfismo nulo para cada $i \in \mathbb{Z}_+$.

Así a partir de la sucesión exacta larga de homología se obtiene el siguiente isomorfismo

$$\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, M) \xrightarrow{\delta_i} \operatorname{Ext}^{i+1}_A(A/\mathcal{M}, K)$$

para cada $i \in \mathbb{Z}_+$.

Pero como $K = A^n$ para algún $n \in N$, se tiene que $\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, K) = (\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, A))^n$. Por lo tanto, $\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, M) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}_A(A/\mathcal{M}, A) \neq 0$

Luego, por la caracterización de la profundidad de los $A$-módulos usando Ext, se tiene que $\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} A - 1$.

Supongamos ahora que $\operatorname{depth} M > 1$.

Tomemos una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0\,,$$

con $F$ un $A$-módulo libre. Es claro que $\operatorname{pd} N = \operatorname{pd} M - 1$. Luego si vemos que $\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} N - 1$ el teorema queda demostrado.

Llamemos $d = \operatorname{depth} N$. Es claro que $\operatorname{depth} F \geq d$. Luego

$$\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, F) = \operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, N) = 0 \text{ , para } i < d$$

De la sucesión exacta larga de la homología se obtiene que

$$\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathcal{M}, M) = 0 \text{ , si } i < d - 1$$

Entonces sólo hace falta ver que $\mathrm{Ext}_A^{d-1}(A/\mathcal{M}, M) \neq 0$

Como $\operatorname{depth} N = d$, entonces $\mathrm{Ext}_A^d(A/\mathcal{M}, N) \neq 0$.

Veamos una parte de la sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{d-1}(A/\mathcal{M}, M) \xrightarrow{\delta_{d-1}} \mathrm{Ext}_A^d(A/\mathcal{M}, N) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Ext}_A^d(A/\mathcal{M}, F)$$

Si $i_*$ es el morfismo nulo, entonces $\mathrm{Ext}_A^{d-1}(A/\mathcal{M}, M) = \mathrm{Ext}_A^d(A/\mathcal{M}, N)$, y por lo tanto $\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} N - 1$.

Ahora $\operatorname{pd} N > 0$ y $\operatorname{pd} N = \operatorname{pd} M - 1$, luego, por hipótesis inductiva, $d = \operatorname{depth} N < \operatorname{depth} A$. Entonces $\mathrm{Ext}_A^d(A/\mathcal{M}, F) = 0$, y por lo tanto, $i_* = 0$. ∎

## B.3. Ideales perfectos

Definiremos ahora la noción de ideal perfecto, que está muy relacionada con la de Cohen-Macaulay en el caso de módulos sobre un anillo de polinomios.

**Definición B.8** *Sea $A$ un anillo e $I \subset A$ un ideal. Diremos que $I$ es perfecto si y sólo si* $\operatorname{pd} A/I = \operatorname{depth}_I(A)$ *(la dimensión proyectiva de $A/I$ se calcula considerándolo un $A$-módulo).*

De manera similar definimos módulos perfectos:

**Definición B.9** *Sea $M \neq 0$ un $A$-módulo. Vamos a decir que $M$ es perfecto si y sólo si la dimensión proyectiva de $M$ es igual a la profundidad del ideal $I = \operatorname{Ann} M$.*

Observemos que por la caracterización de la profundidad y de la dimensión proyectiva en términos del funtor Ext hecha en la proposición B.2, siempre se tiene que $\operatorname{depth}_I(A) \leq \operatorname{pd} A/I$ y que $\operatorname{depth}_{\operatorname{Ann} M}(A) \leq \operatorname{pd} M$.

Un ejemplo fácil de un ideal perfecto es un ideal $I = (a_1, \ldots, a_r)$ donde $a_1, \ldots, a_r \in A$ es una sucesión regular, ya que el *complejo de Koszul* permita dar una resolución de $A/I$ de longitud $r$, con lo que $\operatorname{pd} A/I \leq r = \operatorname{depth}_I(A)$. (Ver [Ma, ].)

La relación con los anillos de Cohen-Macaulay es la siguiente

**Proposición B.10** *Sea $A$ un anillo de Cohen-Macaulay e $I \subset A$ un ideal perfecto. Entonces $A/I$ es un anillo de Cohen-Macaulay.*

*Demostración:* Sea $\mathcal{P} \subset A$ un ideal primo tal que $(A/I)_{\mathcal{P}} \neq 0$. Veamos primero que el ideal $IA_{\mathcal{P}} \subset A_{\mathcal{P}}$ es perfecto.

El ideal $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}A/I$ es primo y se tiene además que $(A/I)_{\bar{\mathcal{P}}} \cong A_{\mathcal{P}}/IA_{\mathcal{P}}$, luego, dado que localizar es exacto, se tiene que

$$\operatorname{pd} A_{\mathcal{P}}/IA_{\mathcal{P}} \leq \operatorname{pd} A/I$$

donde en el primer término se ve a $A_\mathcal{P}/IA_\mathcal{P}$ como un $A_\mathcal{P}$-módulo. Como $I$ es perfecto, $\operatorname{pd} A/I = \operatorname{depth}_I(A)$, y como localizar conserva la regularidad, tenemos que

$$\operatorname{depth}_I(A) \leq \operatorname{depth}_{IA_\mathcal{P}}(A_\mathcal{P})$$

En definitiva lo que se tiene es que $\operatorname{pd} A_\mathcal{P}/IA_\mathcal{P} \leq \operatorname{depth}_{IA_\mathcal{P}}(A_\mathcal{P})$ y como la otra desigualdad vale siempre, el ideal $IA_\mathcal{P}$ es perfecto.

Luego basta ver que el teorema es cierto si $(A, \mathcal{M})$ es un anillo local de Cohen-Macaulay.

Sea entonces $(A, \mathcal{M})$ un anilo local, e $I \subset A$ un ideal perfecto.

Por la fórmula de Auslander-Buchsbaum, tenemos

$$\operatorname{pd} A/I = \operatorname{depth} A - \operatorname{depth} A/I,$$

pero como $I$ es perfecto lo que vale es que

$$\operatorname{depth}_I(A) = \operatorname{depth} A - \operatorname{depth} A/I.$$

Por otro lado, por ser $A$ Cohen-Macaulay y local,

$$\operatorname{depth} A = \dim A/I + \operatorname{depth}_I(A).$$

Juntando las dos últimas igualdades,

$$\dim A/I = \operatorname{depth} A/I$$

con lo cual, $A/I$ es Cohen-Macaulay. ■

Es fácil ver que si dos ideales $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son perfectos y $\operatorname{depth}_\mathcal{P}(A) = n = \operatorname{depth}_\mathcal{Q}(A)$, entonces también $\operatorname{depth}_{\mathcal{P}\cap\mathcal{Q}}(A) = n$.

Las siguientes proposiciones relacionan la "perfección" de $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ con la de $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$.

**Proposición B.11** *Sean $P$ y $Q$ dos ideales perfectos tales que $\operatorname{depth}_\mathcal{P}(A) = \operatorname{depth}_\mathcal{Q}(A) = n$, y supongamos que $\mathcal{P} \not\subset \mathcal{Q}$ y que $\mathcal{Q} \not\subset \mathcal{P}$. Sea $E_\mathcal{P} = (\mathcal{P} + \mathcal{Q})/\mathcal{Q} \cong \mathcal{Q}/(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$, y sea $E_\mathcal{Q} = (\mathcal{P} + \mathcal{Q})/\mathcal{P} \cong \mathcal{P}/(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ es perfecto. (Como $\operatorname{depth}_{\mathcal{P}\cap\mathcal{Q}}(A) = n$ esto es equivalente a $\operatorname{pd} A/(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) = n$ o a $\operatorname{pd} A/(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) \leq n$.)*

2. *$\operatorname{pd} A/(\mathcal{P} + \mathcal{Q}) \leq n + 1$. (Como $n \leq \operatorname{depth}_{\mathcal{P}+\mathcal{Q}}(A)$, $n \leq \operatorname{pd} R/(\mathcal{P} + \mathcal{Q})$ es automático.)*

3. *$\operatorname{pd} E_\mathcal{P} \leq n$. (Como el anulador de $E_\mathcal{P}$ contiene a $\mathcal{P}$, $\operatorname{depth}_{E_\mathcal{P}}(A) \geq n$; por lo tanto si vale 3), $\operatorname{pd} E_\mathcal{P} = n$ y $E_\mathcal{P}$ es perfecto.)*

4. *$\operatorname{pd} E_\mathcal{Q} \leq n$. (Valen los mismos comentarios que para 3).)*

*Demostración:* 1) $\Leftrightarrow$ 3) y 2) $\Leftrightarrow$ 3) salen de la proposición B.4 y de las sucesiones exactas

$$0 \to E_{\mathcal{P}} \to A/(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) \to A/\mathcal{Q} \to 0$$

y

$$0 \to E_{\mathcal{P}} \to A/\mathcal{P} \to A/(\mathcal{P} + \mathcal{Q}) \to 0$$

respectivamente. La equivalencia de 4) sale por simetría. ■

**Proposición B.12** *Bajo las mismas hipótesis, si $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ es perfecto y $\operatorname{depth}_{\mathcal{P}+\mathcal{Q}}(A) \leq n+1$, entonces $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ es perfecto, y $\operatorname{depth}_{\mathcal{Q}}(A) = n$. Si $\operatorname{depth}_{\mathcal{P}+\mathcal{Q}}(A) = n+1$, entonces $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ es perfecto si y sólo si $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ lo es.*

*Demostración:* Aplicar la equivalencia 1) $\Leftrightarrow$ 2) de la proposición anterior. ■

Ahora vamos a ver un teorema que nos permite decidir si un álgebra graduada noetheriana es Cohen-Macaulay o no de una manera sencilla.

**Teorema B.13** *Sea $S = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$ una $K$-álgebra graduada noetheriana con $S_0 = K$ un cuerpo. Sea $\mathcal{P} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} S_i$ el ideal irrelevante maximal de $S$. Recordemos que como $S$ es noetheriana, es finitamente generada como $K$-álgebra (está generada por los generadores del ideal $\mathcal{P}$), luego $S$ puede escribirse como $R/I$ donde $R$ es el anillo de polinomios sobre $K$ en la cantidad de variables como generadores tenga $S$, e $I$ es un ideal homogéneo (si se le asigna a cada variable el grado del generador correspondiente en $S$). Bajo estas hipótesis las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *$S$ es Cohen-Macaulay.*
2. *$S_{\mathcal{P}}$ es Cohen-Macaulay.*
3. *$I$ es perfecto.*

*Demostración:* 3) $\Rightarrow$ 1) Dado que $R$ es Cohen-Macaulay y que $I$ es perfecto, $S \cong R/I$ es Cohen-Macaulay por la proposición B.10.

1) $\Rightarrow$ 2) Es la parte 3) de la proposcón A.16.

2) $\Rightarrow$ 3) Tomemos $\mathcal{Q}$ el ideal irrelevante maximal de $R$ (i.e. el ideal generado por los elementos homogéneos de $R$ de grado mayor estricto que cero) y notemos que entonces $S_{\mathcal{P}} \cong R_{\mathcal{Q}}/IR_{\mathcal{Q}}$. Esto último dice que $R_{\mathcal{Q}}/IR_{\mathcal{Q}}$ es un anillo de Cohen-Macaulay, y por lo tanto tenemos que

$$\operatorname{depth} R_{\mathcal{Q}}/IR_{\mathcal{Q}} = \dim R_{\mathcal{Q}}/IR_{\mathcal{Q}}.$$

Como $R_{\mathcal{Q}}$ es un anillo local de Cohen-Macaulay, tenemos que

$$\dim R_{\mathcal{Q}} = \operatorname{depth}_{IR_{\mathcal{Q}}}(R_{\mathcal{Q}}) + \dim R_{\mathcal{Q}}/IR_{\mathcal{Q}} \text{ y que } \dim R_{\mathcal{Q}} = \operatorname{depth} R_{\mathcal{Q}}.$$

Además, por la fórmula de Auslander-Buchsbaum, se tiene

$$\operatorname{pd} R_{\mathcal{Q}}/IR_{\mathcal{Q}} = \operatorname{depth} R_{\mathcal{Q}} - \operatorname{depth} R_{\mathcal{Q}}/IR_{\mathcal{Q}}.$$

Operando adecuadamente obtenemos

$$\operatorname{pd} R_{\mathcal{Q}}/IR_{\mathcal{Q}} = \dim R_{\mathcal{Q}} - (\dim R_{\mathcal{Q}} - \operatorname{depth}_{IR_{\mathcal{Q}}}(R_{\mathcal{Q}})) = \operatorname{depth}_{IR_{\mathcal{Q}}}(R_{\mathcal{Q}}).$$

Con lo cual el ideal $IR_{\mathcal{Q}}$ es perfecto.

Se deduce que $I$ es perfecto del siguiente

**Lema B.14** *Sea $M$ un $R$-módulo graduado (donde $R$ es un anillo graduado) , $I \subset R$ un ideal homogéneo y sea $\mathcal{Q}$ el ideal irrelevante maximal de $R$. Entonces* $\operatorname{depth}_I(M) = \operatorname{depth}_{IR_{\mathcal{Q}}}(M_{\mathcal{Q}})$ *.*

*Demostración:* Ya sabemos que $\operatorname{depth}_I(M) \leq \operatorname{depth}_{IR_{\mathcal{Q}}}(M_{\mathcal{Q}})$ . Para probar la otra desigualdad tomemos un elemento $\frac{a}{s} \in IR_{\mathcal{Q}}$ $M_{\mathcal{Q}}$-regular. Supongamos que $a$ es un divisor de cero en $M$ , entonces existe un ideal primo $\mathcal{P} \subset R$ asociado a $M$ tal que $a \in \mathcal{P}$ . Pero $\mathcal{P}$ es homogéneo y de la forma $\operatorname{Ann} m$ , donde $m \in M$ es un elemento homogéneo. En particular, $am = 0$ . Como $m$ es homogéneo, no puede ser $\frac{m}{1} = 0$ en $M_{\mathcal{Q}}$ , pues si así lo fuera, existiría un elemento $s' \notin \mathcal{Q}$ tal que $s'm = 0$ lo cual estaría en contradicción con $\operatorname{Ann} m \subset \mathcal{Q}$ . Pero entonces $\frac{a}{s}\frac{m}{1} = 0$ que es un absurdo porque $\frac{a}{s}$ es $M_{\mathcal{Q}}$-regular. Luego $a$ es un elemento $M$-regular, y el lema queda demostrado.

Apliquemos el lema a los siguientes pares de módulos graduados e ideales

- $R, I$ .
- $R, \mathcal{Q}$ .
- $R/I, \mathcal{Q}$ .

obteniendo respectivamente las siguientes igualdades:

- $\operatorname{depth}_{IR_{\mathcal{Q}}}(R_{\mathcal{Q}}) = \operatorname{depth}_I(R)$ .
- $\operatorname{depth}_{\mathcal{Q}R_{\mathcal{Q}}}(R_{\mathcal{Q}}) = \operatorname{depth}_{\mathcal{Q}}(R)$ .
- $\operatorname{depth}_{\mathcal{Q}R_{\mathcal{Q}}}((R/I)_{\mathcal{Q}}) = \operatorname{depth}_{\mathcal{Q}}(R)$ .

Usando la primera de las igualdades y el hecho que $IR_{\mathcal{Q}}$ es perfecto, logramos

$$\operatorname{depth}_I(R) = \operatorname{depth}_{IR_{\mathcal{Q}}}(R_{\mathcal{Q}}) = \operatorname{pd} R_{\mathcal{Q}}/IR_{\mathcal{Q}}.$$

La fórmula de Auslander-Buchsbaum nos dice que

$$\operatorname{pd} R_{\mathcal{Q}}/IR_{\mathcal{Q}} = \operatorname{depth}_{\mathcal{Q}R_{\mathcal{Q}}}(R_{\mathcal{Q}}) - \operatorname{depth}_{\mathcal{Q}R_{\mathcal{Q}}}((R/I)_{\mathcal{Q}}),$$

pero usando las dos últimas de las igualdades que nos dio el lema, obtenemos

$$\operatorname{pd} R_{\mathcal{Q}}/IR_{\mathcal{Q}} = \operatorname{depth}_{\mathcal{Q}}(R) - \operatorname{depth}_{\mathcal{Q}}(R/I).$$

Finalmente usando la fórmula de Auslander-Buchsbaum para anillos graduados (es válido usarla ya que $R$ es un anillo de polinomios sobre un cuerpo y por lo tanto todos los $R$-módulos tendrán dimensión proyectiva finita (c.f. [Ma, Lemma 5, página 129 y Hilbert's Syzygy Theorem, página 132].))

$$\operatorname{pd} R_{\mathcal{Q}}/IR_{\mathcal{Q}} = \operatorname{depth}_{\mathcal{Q}}(R) - \operatorname{depth}_{\mathcal{Q}}(R/I) = \operatorname{pd} R/I.$$

Por lo tanto

$$\operatorname{depth}_I(R) = \operatorname{pd} R/I,$$

con lo cual $I$ es perfecto. ■

**Corolario B.15** *Sea $I$ un ideal homogéneo en un anillo de polinomios $R$ y sea $f$ un polinomio homogéneo que no es divisor de cero en $R/I$. Entonces $I$ es perfecto si y sólo si $I+(f)$ lo es.*

*Demostración:* Por el teorema anterior $I$ es perfecto si y sólo si $R_{\mathcal{Q}}/IR_{\mathcal{Q}}$ es Cohen-Macaulay, e $I+(f)$ es perfecto si y sólo si $R_{\mathcal{Q}}/(I+(f))R_{\mathcal{Q}}$ es Cohen-Macaulay. Pero por la proposición A.16 item 2., $R_{\mathcal{Q}}/IR_{\mathcal{Q}}$ es Cohen-Macaulay si y sólo si $R_{\mathcal{Q}}/(I+(f))R_{\mathcal{Q}}$ lo es. ■

**Corolario B.16** *Sea $S$ una $K$-álgebra graduada sobre un cuerpo $K$, $f$ un elemento homogéneo de $S$ de grado positivo que no es divisor de cero. Entonces $S$ es Cohen-Macaulay si y sólo si $S/fS$ lo es.*

*Demostración:* Escribiendo a $S$ como $S = R/I$, donde $R$ es un anillo de polinomios sobre $K$ y eligiendo un polinomio homogéneo $\tilde{f} \in R$ tal que su imagen en $S$ sea $f$, todo se reduce a probar que $I$ es perfecto si y sólo si $I+(\tilde{f})$ lo es; y esto ya lo vimos en el corolario anterior. ■

# Bibliografía


[Br Ma] Bruggesser, H. and Mani, P. *Shellable decompositions of cells and spheres* Math. Scand. **29** (1971), 197-205.

[Di Ca] Dieudonné J.A. and Carrell, J.B. *Invariant Theory, Old and New.* Academic Press, New York, 1970.

[Ha] Harris, J. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1992.

[Ho 1] Hochster, M. *Grassmannians and their Schubert subvarieties are arithmetically Cohen-Macaulay.* Journal of Algebra **25** (1973), 40-57.

[Ho 2] Hochster, M. *Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes.* Annals of Mathematics (2) **96** (1972), 318-337.

[Ho Ea] Hochster, M. and Eagon, J.A. *Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the perfection of determinantal loci.* Amer. J. Math. **93** (1971), 1020-1058.

[Ma] Matsumura, H. *Commutative Algebra, second edition.* W. A. Benjamin, New York, 1980.

[Se] Serre, J-P. *Algèbre Locale. Multiplicités.* Springer Lect. Notes in Math. 11. Springer-Verlag, New York, 1957.

[We] Weyl, H. *The classical groups.* Princeton University Press, Princeton, 1946.