UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

Alexis Carmona

Director: Dr. Pablo Amster

Diciembre 2009

Agradecimientos

A Dios por todo lo que tengo y lo que no tengo. A mi padre por su gran impulso, fuerza y carácter. A mi madre por su confianza, cariño y por estar siempre cuando sus hijos la necesitan. A mi esposa, por su infinito amor, confianza plena, y apoyo constante.

A mi hermana, Melina que tanto quiero, junto a toda su gran familia. A mis primos Iver, Álvaro, Cocó, *Γιάννη*, a mi tía Magda, y mi tío Spiros. A mis abuelos todos, que en paz descansen.

A mis amigos, todos y cada uno, incluyendo a mi director Pablo, y a todos los que de una u otra forma me ayudaron a llegar hasta acá.

Índice

1. Introducción

El objetivo de esta tesis ha sido el de comprender y desarrollar la teoría de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas con cierto grado de formalidad. Primeramente se desarrolla la teoría necesaria para entender lo que significa una ecuación diferencial estocástica, pasando por todos sus elementos: movimiento Browniano, martingalas, integral de Itô y las reglas de integración de Itô, para luego al final de este trabajo desarrollar algunos resultados de la teoría misma, como ser el Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones, Estimación de los Momentos y Dependencia de los Parámetros. Cabe mencionar que todos estos resultados y sus demostraciones son adaptaciones de la teoría correspondiente en el caso determinista.

Veamos un poco de que se trata esta teoría. Una *Ecuación Diferencial Estocástica* (EDE) es una ecuación diferencial que incluye la posibilidad de efectos aleatorios. Formalmente,

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t))\xi(t)$$
$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{Z}$$

donde $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ y $\xi(t) :=$ "ruido blanco" m dimensional. (La solución $\mathbf{X}(t)$ será entonces un proceso estocástico $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t,\omega)$.)

O bien, en su forma integral, tenemos lo que sería una *Ecuación Integral Estocástica*

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Z} + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}(t))\mathrm{d}\mathbf{W}$$

donde $\mathrm{d}\mathbf{W} = \xi(t)\mathrm{d}t$ o sea, $W(t) = \int_0^t \xi(s)\mathrm{d}s$. A $\mathbf{W}(t)$ se lo denomina *proceso de Wiener* o *movimiento Browniano* y como su definición lo sugiere, es la variable que acumula el ruido producido de 0 a T.

Claramente, para entender lo que significa esto, hay que dar definiciones precisas de movimiento Browniano e Integral de Itô, como además probar su existencia. En el caso de la integral surge un problema adicional, que es el de encontrar un espacio de integrandos útil a la hora de enfrentar ecuaciones estocásticas.

Como primer paso, a la hora de definir el Browniano, se pide que tenga incrementos independientes, y, usando caminos aleatorios, se concluye que $W(t)-W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. De acá ya se pueden intuir problemas a la hora de querer definir $\xi(t)$, ya que de existir quedaría, formalmente, $\xi(t)\sqrt{\mathrm{d}t} \sim \mathcal{N}(0,1)$ algo que hace bastante ruido. Efectivamente, como se verá rigurosamente en el Teorema 3.1, $W(t)$ no es derivable en ningún t con probabilidad 1, o sea $\xi(t)$ no existe como función. De todas formas, como suele suceder, su uso es útil para ciertas deducciones sobre $W(t)$. Por ejemplo en la deducción de su forma explícita. En este trabajo se la ha reemplazo por una deducción rigurosa sencilla que utiliza la derivada discreta de $W(t)$ (ver Sección 2.2.1).

Una vez probada su existencia y sus propiedades más características, abordamos la segunda cuestión de definir lo que significa la integral estocástica

$$\int_0^t \mathbf{X}(s)\mathrm{d}\mathbf{W}(s)$$

Como se verá en este trabajo, no es tarea sencilla, ya que $W(t)$ presenta la dificultad adicional de ser de variación infinita en cada subintervalo por lo que la integral no admite la definición de Lebesgue-Stieltjes puntual en el espacio muestral Ω. Para abordar el tema comenzamos con un ejemplo, el cálculo de $\int_0^t W(s)\mathrm{d}W$. Al calcular las sumas de Riemann nos encontramos con la identidad

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p_n} W_{t_{i-1}^n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n}) &= W\Big|_0^t - \sum_{i=1}^{p_n} W_{t_i^n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n}) \\ &= W_t^2 - \sum_{i=0}^{p_n} W_{t_{i-1}^n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n}) - \sum_{i=1}^{p_n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n})^2 \end{aligned}$$

por lo que $\sum_{i=1}^{p_n} W_{t_{i-1}^n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n}) = \frac{W_t^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p_n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n})^2$. Ahora, resulta que el término adicional $\sum_{i=1}^{p_n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n})^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t \quad \text{en } L^2(\Omega)$ por lo que obtenemos que $\int_0^t W(s)\mathrm{d}s = \frac{W^2(t)}{2} - \frac{t}{2}$. De este ejemplo vemos que la integral admite una definición en $L^2(\Omega)$ pero además nos muestra una peculiaridad que es el término adicional $\frac{t}{2}$, el cual provino del resultado

$$\sum_{i=1}^{p_n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n})^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

Este resultado es de vital importancia en la teoría, ya que nos dará la idea heurística de que $\mathrm{d}W = \sqrt{\mathrm{d}t}$ y hará que en los términos lineales de los desarrollos en un punto aparezca además un término correspondiente al de orden 2.

Volviendo al tema de integración, para definir la integral en general, vemos que necesitamos algo que nos garantice en general la convergencia en $L^2(\Omega)$ de las sumas de Riemann. Esto se obtendrá como veremos haciendo uso de una isometría entre espacios. Al tomar las sumas de Riemann veremos la peculiaridad de que sus límites dependen del punto que se toma en cada intervalo de la partición. Y la clave en la teoría de integración de Itô, es tomar el extremo izquierdo, o sea la suma

$$\sum_{i=1}^{p} X_{i-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}),$$

que corresponde a la integral del proceso simple

$$X^p(t,\omega) = X_0(\omega)\cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{p} X_{i-1}(\omega)\cdot 1_{(t_{i-1},t_i]}(t),$$

debido a que si los procesos que se integran verifican que X_s es independiente de $W_t - W_s$ para $t > s$ entonces lo que se tiene es una suma de variables ortogonales en

$L^2(\Omega)$ con lo cual

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} X_{i-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{p} E\left(X_{i-1}^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} E\left(X_{i-1}^2\right)(t_i - t_{i-1}) = E\left(\int_0^t (X_s^m)^2 \mathrm{d}s\right)$$

o sea, $\left\|\int_0^t X_s^m \mathrm{d}W_s\right\|_{L^2(\Omega)}^2 = E\left(\int_0^t (X_s^m)^2 \mathrm{d}s\right)$, la isometría mencionada para los procesos simples. El dominio de esta isometría será el espacio $\mathbb{L}^2[0,T]$ que representa básicamente, las funciones conjuntamente medibles en las variables t y ω con segundo momento finito.

Lamentablemente, este espacio no alcanzará a los fines prácticos y se lo extenderá al denominado $\mathbb{M}^2(0,T)$ (Ver Sección 3.6)

Una vez definida la integral y trabajadas sus propiedades fundamentales, trabajaremos con las reglas de integración básicas:

- Fórmula de Integración por Partes o Regla del Producto y
- Fórmula de Itô o Regla de la Cadena

Estas se pueden adaptar con éxito pero con modificaciones importantes. Del resultado ya mencionado $\int_0^t W(s)\mathrm{d}W(s) = \frac{W^2(t)}{2} - \frac{t}{2}$, o sea $\mathrm{d}W^2(t) = 2W(t)\mathrm{d}W + \mathrm{d}t$ vemos que aparece un término adicional similar al correspondiente término cuadrático del desarrollo de Taylor de $u(x) = x^2$ en $W(t)$: $(\mathrm{d}W)^2$ en el cual, si reemplazamos $\mathrm{d}W = \sqrt{\mathrm{d}t}$ obtenemos el original. Esta situación se mantiene en la Regla del Producto

$$\mathrm{d}(X_1X_2) = X_2\mathrm{d}X_1 + X_1\mathrm{d}X_2 + G_1G_2\mathrm{d}t$$

para $\mathrm{d}X_1 = F_1\mathrm{d}t + G_1\mathrm{d}W$ y $\mathrm{d}X_2 = F_2\mathrm{d}t + G_2\mathrm{d}W$. Si multiplicamos los diferenciales $\mathrm{d}X_1$ y $\mathrm{d}X_2$ y despreciamos los términos con $(\mathrm{d}t)^2$ y $\mathrm{d}W\mathrm{d}t$ obtenemos la fórmula enunciada. Ídem con la regla de la Cadena de Itô

$$\mathrm{d}(u(X_t)) = u'(X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}u''(X_t)G_t^2\mathrm{d}t$$

para $\mathrm{d}X_t = F_t\mathrm{d}t + G_t\mathrm{d}W_t$.

En la demostración de este último resultado se trabaja con polinomios en x y luego se lo deduce en general por aproximación. Más complicado es el caso multidimensional $u = u(\mathbf{x},t)$, donde la filosofia es la misma pero se necesita un resultado de aproximación uniforme por polinomios no solo para u sino también para sus derivadas parciales. La demostración de este resultado, ausente en la bibliografia utilizada, fue propuesta como parte de este trabajo y se encuentra en el Apéndice A.

Finalmente, en la teoría propia de las EDE, vemos los resultados de Existencia y Unicidad, Estimación de los Momentos y Dependencia de los Parámetros.

Sobre el resultado de Existencia y Unicidad (ver Teorema 5.8) cabe mencionar que se mantienen las mismas hipótesis que en el caso determinista. Sólo se le pide al dato inicial pertenecer a $L^2(\Omega)$. Asimismo los pasos de la demostración mantienen una analogía con la salvedad de que al no tener una cota punto a punto de $\int_0^t \mathbf{G}(s)\mathrm{d}\mathbf{W}(s)$ como en la integral determinista, debemos recurrir obligatoriamente a acotaciones en L^2 usando la isometría. Similarmente sucede con el resultado de Estimación de los Momentos y Dependencia de los Parámetros, cuyas demostraciones ausentes en la bibliografía utilizada han sido propuestas como contribución al trabajo de tesis.

En la Estimación de los Momentos, sin embargo se necesita de una acotación de la integral $\int_0^t \mathbf{G}(s)\mathrm{d}\mathbf{W}(s)$ en $L^{2p}(\Omega),\ p \geq 1$. La acotación obtenida ha sido la siguiente

$$E\left(\left|\int_0^t \mathbf{G}(s)\mathrm{d}\mathbf{W}(s)\right|^{2p}\right) \leq Ct^{p-1}E\left(\int_0^t |\mathbf{G}(s)|^{2p}\mathrm{d}s\right)$$

vale la pena recordar el análogo en el caso determinista

$$\left|\int_0^t \mathbf{g}(s)\mathrm{d}s\right|^{2p} \leq t^{2p-1}\int_0^t |\mathbf{g}(s)|^{2p}\mathrm{d}s$$

Aquí nuevamente se ve la afectación de la noción heurística $\mathrm{d}W = \sqrt{\mathrm{d}t}$.

Bibliografía. Se ha tomado como eje central el libro de Evans (ver [EVANS]) sobre el cual se ha hecho un gran número de modificaciones y ampliaciones. Otra referencia importante ha sido el libro de Korn (ver [KO/KO]).

2. Movimiento Browniano y Martingalas

Suposición general para esta sección:
Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad completo con conjunto muestral Ω, σ-álgebra $\mathcal{F}$ y medida de probabilidad P.

Definición 2.1. Sea I un conjunto ordenado de índices. Una *filtración* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ es una familia de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para $s < t$, $s, t \in I$.

Interpretación. Recordemos que si un vector aleatorio $\mathbf{X}$ es medible $\mathcal{U}$ entonces $\mathcal{U}$ contiene toda la información relevante sobre $\mathbf{X}$. Luego podemos entender a las σ-álgebras como fuentes de información pues éstas nos dicen que eventos se pueden observar y cuales no. Así en una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$, $\mathcal{F}_t$ modelará que eventos pueden ser observados hasta el tiempo t. Por esto se dice que las filtraciones nos dan el *flujo de información en el tiempo.*

Definición 2.2. Diremos que $\{\mathbf{X_t}, \mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ es un *proceso estocástico* con filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ si los $\mathbf{X}_t$ son vectores aleatorios $\mathcal{F}_t$-medibles.

De ser el conjunto de índices I discreto (p. ej. $I = \mathbb{N}$) diremos que el proceso estocástico es *discreto.*

Observación 2.3.
1. En lo que sigue utilizaremos como conjunto de índices $I = [0, T]$ o $I = [0, \infty)$, salvo que indiquemos lo contrario.
2. Si hablamos simplemente de un proceso $\{\mathbf{X_t}\}_{t\in I}$ se entenderá que la filtración asociada es la *filtración natural* o *filtración canónica* de $\mathbf{X}_t$:
$$\mathcal{F}_t^{\mathbf{X}} := \sigma\{\mathbf{X}_s | s \leq t, s \in I\}.$$
3. En lugar de $\{\mathbf{X}_t\}_{t\in I}$ usualmente escribiremos $\{\mathbf{X}(t)\}_{t\in I}$ o simplemente $\mathbf{X}$. También lo notaremos como función $I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ $\mathbf{X}(t, \omega) = \mathbf{X}_t(\omega)$.
4. Podemos pensar al proceso estocástico como una *función aleatoria* tal que para cada $\omega \in \Omega$ toma el *camino muestral*
$$\mathbf{X}(\cdot, \omega) : I \to \mathbb{R}^n.$$

Definición 2.4. Sean $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ y $\{Y_t, \mathcal{G}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ dos procesos estocásticos. Diremos que Y es una *modificación* de X si se verifica
$$P\{\omega \,|\, X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} = 1 \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Definición 2.5. Sean $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ y $\{Y_t, \mathcal{G}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ dos procesos estocásticos. Diremos que X e Y son *indistinguibles* si se verifica
$$P\{\omega \,|\, X_t(\omega) = Y_t(\omega) \text{ para todo } t \geq 0\} = 1.$$

Observación 2.6. Que $\{\mathbf{Y}_t, \mathcal{G}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ sea una modificación de $\{\mathbf{X}_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ no implica que $\mathbf{Y}_t$ sea medible $\mathcal{F}_t$. Para evitar esto, sin embargo, podemos optar por trabajar con la *filtración P aumentada* de $\mathcal{F}_t$:
$$\mathcal{F}_t^+ := \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{N}) \quad t \in [0, \infty)$$
donde $\mathcal{N} = \{A \,|\, A \in \mathcal{F} \text{ y } P(A) = 1 \text{ o } P(A) = 0\}$.

Teorema 2.7. *Sea Y una modificación del proceso estocástico X. Si ambos procesos son continuos a.s. P entonces X e Y son indistinguibles.*

Demostración. Sea

$$B = \{\omega \mid X(\cdot, \omega) \text{ e } Y(\cdot, \omega) \text{ son continuos}\}.$$

Luego $P(B) = 1$. Y sea

$$A_q = \{\omega \mid X_q(\omega) = Y_q(\omega)\},$$

para $q \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. También $P(A_q) = 1$. Si tomamos $C = B \cap \bigcap_q A_q$ entonces $P(C) = 1$. Pero, si $\omega \in C$ entonces $X(q, \omega) = Y(q, \omega)$ para todo $q \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, con lo que junto a la continuidad de $X(\cdot, \omega)$ y $Y(\cdot, \omega)$ implica que $X(t, \omega) = Y(t, \omega)$ para todo $t \geq 0$. Luego X e Y son indistinguibles como queríamos ver. □

2.1. Martingalas.

Definición 2.8. Sea $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ un proceso estocástico a valores reales con $E|X_t| < \infty$. Diremos que X_t es

a) una *supermartingala* si para todo $s, t \in I$ con $s \leq t$

$$E\left(X_t | \mathcal{F}_s\right) \leq X_s \quad \text{a.s. } P,$$

b) una *submartingala* si para todo $s, t \in I$ con $s \leq t$

$$E\left(X_t | \mathcal{F}_s\right) \geq X_s \quad \text{a.s. } P,$$

c) una *martingala* si para todo $s, t \in I$ con $s \leq t$

$$E\left(X_t | \mathcal{F}_s\right) = X_s \quad \text{a.s. } P.$$

Ejemplo 2.9.

(1) Las martingalas discretas son usualmente usadas para modelar juegos de azar: Si la sucesión $X_n, n \in \mathbb{N}$ denota las ganancias de un jugador después de su n-ésima participación y el juego es justo entonces deberá satisfacer la condición

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n \quad a.s.$$

O sea deberá tratarse de una martingala. Similarmente si el juego es favorable se deberá tratar de una submartingala y una supermartingala modelará un juego desfavorable.

(2) Nosotros estaremos más interesados en martingalas continuas siendo un ejemplo clásico de éstas el movimiento Browniano tal como veremos más adelante cuando lo hayamos definido.

Proposición 2.10. Desigualdad de Jensen Condicional. *Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cóncava con $E(|\phi(X)|) < \infty$ (y $E(|X|) < \infty$). Luego*

$$\phi(E(X|\mathcal{V})) \leq E(\phi(X)|\mathcal{V}) \quad a.s.$$

Lema 2.11. *Sea $\{X_t, \mathcal{F}_t\}$ una martingala y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cóncava con $E(|\phi(X_t)|) < \infty$ para todo $t \in I$. Luego $\{\phi(X_t), \mathcal{F}_t\}$ es una submartingala.*

Demostración. Por la Desigualdad de Jensen Condicional

$$E(\phi(X_t)|\mathcal{F}_s) \geq \phi(E(X_t|\mathcal{F}_t)) = \phi(X_s) \quad a.s. \quad \forall t \geq s.$$

$\square$

Teorema 2.12. (Desigualdades Martingales Discretas)

a) *Si* $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una submartingala, entonces*

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \in [\lambda, \mu]\right) \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\{\max\limits_{1\leq k\leq n} X_k\in[\lambda,\mu]\}} X_n^+ \mathrm{d}P$$

para todo $n = 1, \ldots$ *y* $\lambda > 0$. *En particular*

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}E(X_n^+).$$

b) *Si* $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una martingala y* $1 < p < \infty$, *entonces*

$$E\left(\max_{1\leq k\leq n} |X_k|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(|X_n|^p)$$

para todo $n = 1, \ldots$.

Demostración. a) Notemos $X = \max_{1\leq k\leq n} X_k$. Sea

$$A_k = \bigcap_{j=1}^{k-1}\{X_j < \lambda\} \cap \{X_k \geq \lambda\} \cap \{X \leq \mu\}.$$

Luego

$$A := \{X \in [\lambda, \mu]\} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Como $\lambda P(A_k) \leq \int_{A_k} X_k \mathrm{d}P$, entonces

$$\lambda P(A) = \lambda\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} E(\chi_{A_k} X_k).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\{X\in[\lambda,\mu]\}} X_n^+ \mathrm{d}P &\geq \sum_{k=1}^{n} E(X_n^+\chi_{A_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E(E(X_n^+\chi_{A_k}|\mathcal{F}_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E(\chi_{A_k}E(X_n^+|\mathcal{F}_k)) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} E(\chi_{A_k}E(X_n|\mathcal{F}_k)) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} E(\chi_{A_k}X_k) \quad \text{por ser una submartingala} \\
&\geq \lambda P(A),
\end{aligned}$$

como queríamos ver.

b) Por el Lema 2.11, $\{|X_n|, \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta una submartingala. Notemos igual que antes $X = \max_{1\leq k\leq n} |X_k|$ y sea $X_M = min\,(X, M)$.

Luego,

$$\begin{aligned}
E(\left(X^M\right)^p) &= -\int_0^\infty \lambda^p \mathrm{d}P^M(\lambda) \quad \text{para } P^M(\lambda) = P(X^M > \lambda) \\
&= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}P^M(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\
&= p\int_0^M \lambda^{p-1}P(\lambda < X \leq M)\mathrm{d}\lambda \\
&\leq p\int_0^M \lambda^{p-2}\int_{\{X\in[\lambda,M]\}} |X_n|\mathrm{d}P\mathrm{d}\lambda \\
&\leq p\int_{\{X\leq M\}} \left(\int_0^X \lambda^{p-2}\mathrm{d}\lambda\right)|X_n|\mathrm{d}P \\
&= \frac{p}{p-1}\int_{\{X\leq M\}} X^{p-1}|X_n|\mathrm{d}P \\
&\leq \frac{p}{p-1}\int (X^M)^{p-1}|X_n|\mathrm{d}P \\
&\leq \frac{p}{p-1}\left(\int_\Omega (X^M)^p\mathrm{d}P\right)^{1-1/p}\left(\int_\Omega |X_n|^p\mathrm{d}P\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Con lo cual,

$$E((X^M)^p) \;\leq\; \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(|X_n|^p).$$

Luego, como $X^M \xrightarrow[M\to\infty]{} X$ de forma creciente, pasando al límite, obtenemos la acotación deseada.

$\square$

Teorema 2.13. (Desigualdades Martingales) *Sea $\{X_t, F_t\}_{t\geq 0}$ un proceso estocástico con caminos continuos a.s.. Entonces*

(1) *Si $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es una submartingala, entonces*

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t} X_s \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}E(X_t^+) \quad \textit{para todo } \lambda > 0, t \geq 0.$$

(2) *Si $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala y $1 < p < \infty$, entonces*

$$E\left(\max_{0\leq s\leq t} |X_s|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(|X_t|^p) \quad \textit{para todo } t \geq 0.$$

Demostración. (1) Basta probar que

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t} X_s > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}E(X_t^+)$$

porque si $\lambda_n \nearrow \lambda$,

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t} X_s > \lambda_n\right) \longrightarrow P\left(\max_{0\leq s\leq t} X_s \geq \lambda\right)$$

y

$$\frac{1}{\lambda_n}E(X_t^+) \longrightarrow \frac{1}{\lambda}E(X_t^+).$$

Observar que por la continuidad a.s de los caminos muestrales

$$\max_{0\leq s\leq t} X_s = \sup_{\substack{0\leq q\leq t\\ q\in\mathbb{Q}}} X_q \quad \text{a.s.}$$

Además, si $\{Q_n\}$, $Q_n \subset [0,t]\cap\mathbb{Q}$, es una sucesión creciente de conjuntos finitos con $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = [0,t]\cap\mathbb{Q}$,

$$\left(\sup_{\substack{0\leq q\leq t\\ q\in\mathbb{Q}}} X_q > \lambda\right) = \bigcup_n \left(\max_{q\in Q_n} X_q > \lambda\right),$$

con lo que,

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t} X_s > \lambda\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\max_{q\in Q_n} X_q > \lambda\right).$$

Entonces hay que ver que

$$P\left(\max_{q\in Q_n} X_q > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}E(X_t^+).$$

Tomemos $Q_n = \{t_k\}_{k=0}^n$ con $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$. Como $\{X_{t_k}, \mathcal{F}_{t_k}\}_{k=0}^n$ es una submartingala discreta (se la puede extender fácilmente a todo $\mathbb{N}$ usando $X_m = X_{t_n} = X_t$ para $m \geq n$) usando la Desigualdad martingal discreta concluimos

$$P\left(\max_{0\leq k\leq n} X_{t_k} > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}E(X_t^+)$$

como queríamos ver.

(2) Como antes, por la continuidad de los caminos muestrales, sabemos que

$$\max_{0\leq s\leq t}|X_s| = \sup_{\substack{0\leq q\leq t\\ q\in\mathbb{Q}}}|X_q| \quad \text{a.s.}$$

Y si $\{Q_n\}$, $Q_n \subset [0,t]\cap\mathbb{Q}$, es nuevamente una sucesión creciente de conjuntos finitos con $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = [0,t]\cap\mathbb{Q}$, vale que

$$\max_{q\in Q_n}|X_q| \nearrow \sup_{\substack{0\leq q\leq t\\ q\in\mathbb{Q}}}|X_q|$$

con lo que

$$E\left(\max_{0\leq s\leq t}|X_s|^p\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(\max_{q\in Q_n}|X_q|^p\right).$$

Por lo tanto, basta probar que

$$E\left(\max_{q\in Q_n}|X_q|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(|X_t|^p).$$

Como $\{X_t,\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala $\{|X_t|,\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es una submartingala. Tomemos $Q_n = \{t_k\}_{k=0}^n$ con $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$. Luego $\{|X_{t_k}|,\mathcal{F}_{t_k}\}_{k=0}^n$ es una submartingala discreta con lo que usando la desigualdad martingal discreta queda probada nuestra desigualdad.

□

2.2. Movimiento Browniano. El concepto de movimiento Browniano se refiere, en esencia, a un movimiento aleatorio irregular continuo y lleva el nombre del botánico Robert Brown quien en 1828 lo observó en las partículas microscópicas de polen suspendidas en agua. Para definirlo matemáticamente consideraremos antes un movimiento análogo pero en un contexto discreto (unidimensional) lo cual justificará nuestra definición.

Caminos Aleatorios. Consideremos el reticulado unidimensional $\{m\Delta x |\, m\in\mathbb{Z}\}$ y una partícula que se desplaza por estos puntos partiendo en $t=0$ de $x=0$ y tal que en cada instante $n\Delta t$ se mueve a la izquierda o a la derecha una distancia Δx con probabilidad $1/2$. Tomemos entonces variables aleatorias X_i que den 1 si en el instante $i\Delta t$ la partícula se mueve a la derecha y -1 si se mueve a la izquierda. Luego las variables X_i son independientes entre si y

$$\begin{cases} P(X_i = 1) = 1/2 \\ P(X_i = -1) = 1/2 \end{cases} \text{para } i\geq 1$$

Luego, la posición de la partícula en el instante $t = n\Delta t$ está dada por

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i\Delta x.$$

Veamos el comportamiento asintótico de $X(t)$ cuando $\Delta t\to 0$ (con t fijo). Como

$$V(X(t)) = (\Delta x)^2 nV(X_1) = (\Delta x)^2 n = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}t$$

asumamos que $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = D$ constante. Entonces concluimos que

$$X(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \sqrt{n}\Delta x = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \sqrt{Dt} \longrightarrow \mathcal{N}(0, Dt).$$

Ahora sí definamos movimiento Browniano, para lo cual tomaremos $D = 1$.

Definición 2.14. Un movimiento Browniano (unidimensional) es un proceso estocástico $\{W_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ tal que

a) $W_0 = 0 \quad a.s.$
b) $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s) \quad \forall t \geq s \geq 0$
c) $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$

Observación 2.15. (1) Dado que cualquier tipo de movimiento *tiene* que ser continuo sería razonable pedirlo en la definición de movimiento Browniano pero esto no será necesario, dado que , como veremos en la subsección 2.2.2, sino es continuo tendrá una modificación continua (y algo más). Por lo tanto, siempre trabajaremos con esta hipótesis adicional de continuidad.
(2) El Teorema Central del Límite nuevamente motiva nuestra definición de movimiento Browniano pues cualquier suma de perturbaciones iid que afecten la posición de una partícula en movimiento resultará en una distribución normal.
(3) Observar que la condición c) en la definición implica que

$$\text{c}') \quad W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \text{ son independientes}$$

$\forall 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. También vale la vuelta, pero claro, con respecto a la filtración natural $\mathcal{F}_t^W$. Esto, aunque intuitivo, es más difícil de probar y no lo haremos aquí. (Ver [KA/SH, Capítulo 2, Problema 1.4]). Con todo, tenemos una definición "equivalente" que no recurre explícitamente a las filtraciones.
(4) Si $\{W_t, \mathcal{F}_t\}$ es un movimiento Browniano y $\mathcal{F}'_t$ es una filtración tal que $\mathcal{F}'_t \supset \mathcal{F}_t$ y $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}'_s \, \forall 0 \leq s \leq t$ entonces $\{W_t, \mathcal{F}'_t\}$ también es un movimiento Browniano.
(5) Diremos que la filtración $\mathcal{F}_t$ es una *filtración Browniana* si $\mathcal{F}_t$ contiene todos los eventos de medida nula de $\mathcal{F}$.

Observación 2.16. Notar que si $s < t$ entonces $W_t - W_s \sim \sqrt{t-s}N(0,1)$, con lo cual $(W_t - W_s)^2 \sim (t-s)\mathcal{X}_1^2$. Luego

$$E\left((W_t - W_s)^2\right) = t - s \tag{2.1}$$

$$Var\left((W_t - W_s)^2\right) = E\left((W_t - W_s)^2 - (t-s)\right) = 2(t-s)^2 \tag{2.2}$$

Proposición 2.17. *Si* $\{W_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ *es un movimiento Browniano entonces es una martingala.*

Demostración.

$$E(W_t|\mathcal{F}_s) = E(W_t - W_s + W_s|\mathcal{F}_s) = E(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) + W_s = W_s \quad a.s.$$

para $s \leq t$. □

Definición 2.18. Un movimiento Browniano m dimensional es un proceso estocástico $\{\mathbf{W}(t), \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ de dimensión m tal que

(1) $W_1(t), \ldots, W_m(t)$ son movimientos Brownianos unidimensionales.
(2) $W_1(t), \ldots, W_m(t)$ son procesos independientes, o sea, las σ-álgebras $\sigma(W_j(t) | \, t \geq 0)$ $1 \leq j \leq m$ son independientes.
(3) $\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$.

Observación 2.19. Si $W_1(t), \ldots, W_m(t)$ son m movimientos Brownianos independientes entonces $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), \ldots, W_m(t))$ es un movimiento Browniano respecto a $\mathcal{F}_t^{\mathbf{W}} := \sigma(\mathcal{F}_t^{W_j} | \, 1 \leq j \leq m)$. Nuevamente, no lo probaremos aquí.

2.2.1. Construcción de un Movimiento Browniano .

Para saber qué proponer para la construcción de un movimiento Browniano supongamos que tenemos uno e intentemos reescribirlo usando la normalidad de sus incrementos y un poco de álgebra lineal. Para ello tomemos particiones del intervalo $[0, 1]$:

$$P_n : \; 0 = t_0^n < \ldots < t_n^n = 1$$

tales que $P_n \subset P_{n+1}$ y $D := \bigcup P_n$ denso en $[0, 1]$. Sean entonces

$$S_n := \{v(t) \in L^2[0, 1] \, | \, v(t) \text{ es constante en } (t_{i-1}^n, t_i^n] \; \forall 1 \leq i \leq n\}$$

y tomemos $\{v^{(n)}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$v^{(1)}(t), \ldots, v^{(n)}(t) \text{ son base ortonormal de } S_n$$

con respecto al producto interno

$$< v(t), w(t) >= \int_0^1 v(t) w(t) \mathrm{d}t$$

de $L^2[0, 1]$.

Consideremos la siguiente "derivada discreta" de W_t

$$\xi^n(t) = \frac{W(t_i^n) - W(t_{i-1}^n)}{\Delta t_i^n} \text{ para } t_{i-1}^n < t \leq t_i^n.$$

(Observar que integrándola recuperamos $W(t)$ para $t = t_j^n$ $0 \leq j \leq n$.) Como $\xi^n \in S_n$ para cada $\omega \in \Omega$ podemos reescribirla

$$\xi^n(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i^n v^{(i)}(t)$$

con $A_i^n =< \xi^n(t), v^{(i)}(t) >$. Analicemos quienes son estos A_i^n.

Proposición 2.20. (1) *$\{A_i^n\}_{i=1}^n$ son variables $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes.*
(2) *$A_i^n = A_i^i$, o sea*

$$< \xi^n(t), v^{(i)}(t) >=< \xi^i(t), v^{(i)}(t) > \quad \forall n \geq i$$

(3) *$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, con $A_i := A_i^i$, es una sucesión de variables $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes.*

Demostración.

(1)

$$A_i^n = <\xi^n, v^{(i)}> = \int_0^1 \xi^n(t) v^{(i)}(t) \mathrm{d}t$$

$$\sum_{j=1}^n \xi^n(t_j^n) v^{(i)}(t_j^n) \Delta t_j^n = \sum_{j=1}^n \frac{W(t_j^n) - W(t_{j-1}^n)}{\Delta t_j^n} v^{(i)}(t_j^n) \Delta t_j^n$$

$$= \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{W(t_j^n) - W(t_{j-1}^n)}{\sqrt{\Delta t_j^n}}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} v^{(i)}(t_j^n) \sqrt{\Delta t_j^n}$$

Luego, como

$$(v^{(i)}(t_1^n)\sqrt{\Delta t_1^n}, \ldots, v^{(i)}(t_n^n)\sqrt{\Delta t_n^n}) \quad 1 \leq i \leq n$$

son vectores ortogonales tenemos que A_i^n $1 \leq i \leq n$ son variables

$$\mathcal{N}(0, \sum_{j=1}^n (v^{(i)}(t_j^n))^2 \Delta t_j^n) = \mathcal{N}(0, \int_0^1 (v^{(i)}(t))^2 \mathrm{d}t) = \mathcal{N}(0,1)$$

independientes como queríamos ver.

(2) Basta ver que

$$<\xi^{n+1}, v^{(i)}> = <\xi^n, v^{(i)}> \text{ para } n \geq i.$$

Sea j_o tal que $P_{n+1} - \{t_{j_0}^{n+1}\} = P_n$. Supongamos por comodidad $j_0 = n$. Así $t_j^{n+1} = t_j^n$ para todo $0 \leq j \leq n-1$ y $t_{n-1}^n < t_n^{n+1} < t_n^n$ por lo cual $v^{(i)}(t_n^{n+1}) = v^{(i)}(t_n^n)$. Luego

$$\begin{aligned}
<\xi^{n+1}, v^{(i)}> &= \int_0^1 \xi^{n+1}(t) v^{(i)}(t) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{W(t_j^{n+1}) - W(t_{j-1}^{n+1})}{\Delta t_j^{n+1}} v^{(i)}(t_j^{n+1}) \Delta t_j^{n+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{W(t_j^n) - W(t_{j-1}^n)}{\Delta t_j^n} v^{(i)}(t_j^n) \Delta t_j^n + \frac{W(t_n^{n+1}) - W(t_{n-1}^n)}{\cancel{\Delta t_n^{n+1}}} v^{(i)}(t_n^n) \cancel{\Delta t_n^{n+1}} \\
&\quad + \frac{W(t_n^n) - W(t_n^{n+1})}{\cancel{\Delta t_{n+1}^{n+1}}} v^{(i)}(t_n^n) \cancel{\Delta t_{n+1}^{n+1}} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{W(t_j^n) - W(t_{j-1}^n)}{\Delta t_j^n} v^{(i)}(t_j^n) \Delta t_j^n + (W(t_n^n) - W(t_{n-1}^n)) v^{(i)}(t_n^n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{W(t_j^n) - W(t_{j-1}^n)}{\Delta t_j^n} v^{(i)}(t_j^n) \Delta t_j^n \;\; = <\xi^n, v^{(i)}>
\end{aligned}$$

como queríamos ver.

(3) Consecuencia directa de (1) y (2).

$\square$

Luego, nos queda que

$$\xi^n(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i v^{(i)}(t) \tag{2.3}$$

y es natural preguntarse si la serie converge y da $\xi(t) := \dot{W}(t)$ la derivada del movimiento Browniano. La respuesta es negativa puesto que, como veremos en el Teorema 3.1, $W(t)$ es de variación infinita en cada intervalo[1]. Sin embargo a nuestros fines con 2.3 alcanzará.

Proposición 2.21.

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^t v^{(n)}(s)\mathrm{d}s \quad \forall\, t \in D.$$

Demostración. En verdad, para cada $t \in D$ la serie tendrá solo finitos sumandos. En efecto, sea $t \in D$ y digamos $t = t_{j_0}^{n_0}$. Luego, para $n \geq n_0$, como $P_n \supset P_{n_0}$, existe un j_n tal que $t = t_j^n$. Como $\xi^n(s) = \sum_{i=1}^n A_i v^{(i)}(s)$ integrando hasta $t_{j_n}^n$ tenemos que

$$W(t) = W(t_{j_n}^n) = \int_0^{t_{j_n}^n} \sum_{i=1}^{n} A_i v^{(i)}(s)\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{n} A_i \int_0^t v^{(i)}(s)\mathrm{d}s.$$

Como esto vale para todo $n \geq n_0$ la serie termina en n_0 y con esto terminamos la demostración. □

De esta proposición deducimos que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^t v^{(n)}(s)\mathrm{d}s$ fuese uniformemente convergente en $[0,1]$ *a.e* tendríamos, por continuidad, que

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^t v^{(n)}(s)\mathrm{d}s \quad a.e.$$

Efectivamente veremos que esto es así pero para una elección relativamente sencilla de $v^{(n)}$ para facilitar las cuentas. Para ello ver el Lema 2.25 y el Lema 2.26.

Luego hemos escrito al movimiento Browniano como una serie de funciones con coeficientes aleatorios y esto es útil porque nos dice cómo construir movimientos Brownianos en el intervalo $[0,1]$: Bastará tomar $\{A_n\}$ una sucesión iid de $\mathcal{N}(0,1)$ cualquiera (pues solo nos importa sus distribuciones para deducir las propiedades a), b) y c') que caracterizan al movimiento Browniano) y tomar $W(t) := \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^t v^{(n)}(s)\mathrm{d}s$. En la sección siguiente probaremos que esto efectivamente es así.

Construcción de Lévy-Ciesielski.

Tomaremos particiones P_k sencillas, dadas por los números diádicos de la siguiente forma:

$$P_k := \{\frac{i}{2^{n-1}} |\, 0 \leq i \leq 2^{n-1}\} \cup \{\frac{2i-1}{2^n} |\, 1 \leq i \leq k - 2^{n-1}\}$$

[1]Por esta razón hemos evitado trabajar directamente con ξ y su desarrollo en serie. (Se puede probar que $\{v^{(i)}\}$ es una base de $L^2[0,1]$.)

donde $2^{n-1} < k \leq 2^n$. Las $v^{(k)}$ determinadas por estas particiones tienen nombre (y notación propia) y las introduciremos en la siguiente definición.

Definición 2.22. Las funciones de *Haar* están dadas por

$$h_1(t) := 1 \quad \forall\, 0 \leq t \leq 1$$

y

$$h_k(t) := \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{para } \frac{k-2^{n-1}-1}{2^{n-1}} < t \leq \frac{k-2^{n-1}-\frac{1}{2}}{2^{n-1}} \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & \text{para } \frac{k-2^{n-1}-\frac{1}{2}}{2^{n-1}} < t \leq \frac{k-2^{n-1}}{2^{n-1}} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

para $2^{n-1} < k \leq 2^n$, $n \geq 1$. Además definimos las funciones de *Schauder* por

$$s_k(t) := \int_0^t h_k(s)\mathrm{d}s.$$

Proposición 2.23. *Las funciones $\{h_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ son ortonormales.*

Además forman una base de Hilbert de $L^2[0,1]$.

Demostración.

(1) Claramente $\int_0^1 h_k(t)\mathrm{d}t = 2^{n-1}(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}) = 1$ para $2^{n-1} < k \leq 2^n$. Además, si $l > k$ o bien tienen soportes disjuntos o bien h_k es constante en el soporte de h_l. En este último caso queda $\int_0^1 h_l(t)h_k(t)\mathrm{d}t = \pm 2^{\frac{(n-1)}{2}} \int_0^1 h_l(t)\mathrm{d}t = 0$.

(2) Veamos que si $f \in L^2[0,1]$ verifica $< f(t), h_k(t) >= 0\, \forall k$ entonces $f(t) = 0\, a.e.$. Si $k = 1$ tenemos $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1$. Si $k = 2$ nos queda $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\mathrm{d}t$ y por lo tanto ambos son nulos. Procediendo de la misma forma deducimos que $\int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} f(t)\mathrm{d}t = 0\, \forall 0 \leq i < 2^n$. Luego $\int_r^s f(t)\mathrm{d}t = 0$ para todo $0 \leq r \leq s \leq 1$ diádicos y por lo tanto para todo $0 \leq r \leq s \leq 1$. Luego

$$f(r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \int_0^r f(t)\mathrm{d}t = 0 \quad a.s.$$

como queríamos ver.

□

Observación 2.24. $s_1(t) = t$ y para $2^{n-1} < k \leq 2^n$ el gráfico de $s_k(t)$ es una carpita de altura $\frac{1}{2^n}2^{\frac{n-1}{2}} = 1/2^{\frac{n-1}{2}}$.

En los siguiente lemas (Lema 2.25 y 2.26) probaremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_k s_k(t)$ converge uniformemente en $[0,1]$ *a.s.*, y por ende es continua *a.s.*, donde $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de $\mathcal{N}(0,1)$ cualquiera definidos en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. (No necesitamos la independencia para esto).

Lema 2.25. *Sea $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión tal que*

$$|a_k| = O(k^{\delta}) \qquad \textit{cuando } k \to \infty$$

para algún $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$*. Luego, la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k s_k(t)$$

converge uniformemente para $0 \leq t \leq 1$*.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Notar que para $2^{n-1} < k \leq 2^n$ las funciones $s_k(t)$ tienen soportes disjuntos. Sea entonces

$$b_n := \max_{2^{n-1} < k \leq 2^n} |a_k| \leq C 2^{n\delta}.$$

Luego

$$\sum_{k > 2^m} |a_k||s_k(t)| = \sum_{n > m}^{\infty} \sum_{2^{n-1} < k \leq 2^n} |a_k||s_k(t)|$$

$$\leq \sum_{n > m}^{\infty} b_n \max_{\substack{2^{n-1} < k \leq 2^n \\ 0 \leq t \leq 1}} |s_k(t)| \leq C \sum_{n > m}^{\infty} \frac{2^{n\delta}}{2^{\frac{n+1}{2}}} < \varepsilon$$

para m suficientemente grande. □

Lema 2.26. *Sea* $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de normales* $\mathcal{N}(0,1)$*. Luego, para casi todo* ω

$$A_k(\omega) = O\left(\sqrt{\log k}\right) \quad \textit{cuando } k \to \infty.$$

Demostración. Para $x > 0$

$$P(|A_k| \geq x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \mathrm{d}s \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4}} \mathrm{d}s \leq C e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Luego, para $0 < y < 1$

$$P(|A_k| \geq \sqrt{-4 \log y}) \leq Cy.$$

Así tomando $y = \frac{1}{k^4}$

$$P(|A_k| \geq 4\sqrt{\log k}) \leq C \frac{1}{k^4}.$$

Como $\sum \frac{1}{k^4} < \infty$ por el Lema de Borel Cantelli $P(|A_k| \geq 4\sqrt{\log k}$ infinitas veces$) = 0$ o sea, para casi todo ω

$$|A_k| < 4\sqrt{\log k} \text{ para } k \geq k_0(\omega).$$

□

Lema 2.27. $\sum_{k=1}^{\infty} s_k(s) s_k(t) = s \wedge t = \min\{s,t\}$ *para todo* $0 \leq s, t \leq 1$*.*

Demostración. Sea, para $0 \leq s \leq 1$,

$$\phi_s(r) := \begin{cases} 1 & 0 \leq r \leq s \\ 0 & s < r \leq 1 \end{cases}$$

Luego

$$\int_0^1 \phi_s(r)\phi_t(r)\mathrm{d}r = s \wedge t$$

y como, por la Proposición 2.23, $\{h_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ es una base de Hilbert de $L^2[0,1]$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \phi_s(r)\phi_t(r)\mathrm{d}r &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \phi_s(r)h_k(r)\mathrm{d}r \int_0^1 \phi_r(r)h_k(r)\mathrm{d}r \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^s h_k(r)\mathrm{d}r \int_0^t h_k(r)\mathrm{d}r = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(s)s_k(t)\end{aligned}$$

con lo cual terminamos la demostración. □

Teorema 2.28. Existencia de un movimiento Browniano en $[0,1]$**.**
Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una sucesión de* $\mathcal{N}(0,1)$ *independientes entonces*

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k s_k(t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

define un movimiento Browniano continuo en $[0,1]$.

Demostración. Veamos que $W(t)$ verifica las condiciones a), b) y c') de la definición.

(1) Claramente $W(0) = 0$ *a.s.*. Veamos que $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0,1)$ para $0 \leq s \leq t \leq 1$. Lo probaremos utilizando su función característica. En efecto

$$\begin{aligned} E(e^{i\lambda(W(t)-W(s))}) &= E(e^{i\lambda \sum_{k=1}^{\infty} A_k(s_k(t)-s_k(s))}) \\ &= \lim_{n\to\infty} E(e^{i\lambda \sum_{k=1}^{n} A_k(s_k(t)-s_k(s))}) \quad \text{por continuidad} \\ &= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} E(e^{i\lambda A_k(s_k(t)-s_k(s))}) \quad \text{por independencia} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}(s_k(t)-s_k(s))^2} \quad \text{pues } A_k \sim \mathcal{N}(0,1) \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(s_k(t)-s_k(s))^2} \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(t)-2s_k(t)s_k(s)+s_k^2(s)} \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-2s+s)} \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)} \end{aligned}$$

Luego, por unicidad de las funciones características deducimos que $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ como queríamos ver.

(2) Veamos ahora la condición c'), o sea que

$$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1}) \text{ son independientes}$$

$\forall\, 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq 1$. Nuevamente usaremos funciones características[2]. Veamos que

$$E(e^{i\sum_{j=1}^m \lambda_j (W(t_j)-W(t_{j-1}))}) = \prod_{j=1}^m e^{-\frac{\lambda_j^2}{2}(t_j - t_{j-1})} = \prod_{j=1}^m E(e^{i\lambda_j (W(t_j)-W(t_{j-1}))}) \tag{2.4}$$

Una vez probado esto tendremos, por unicidad de las funciones características, que

$$F_{W(t_1),\ldots,W(t_m)-W(t_{m-1})}(x_1,\ldots,x_m) = F_{W(t_1)}(x_1)\ldots F_{W(t_m)-W(t_{m-1})}(x_m)$$

$\forall (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m$ por lo cual $W(t_1), \ldots W(t_m) - W(t_{m-1})$ serán independientes.

Probemos entonces 2.4 . Por simplicidad en la notación (y no por dificultad conceptual) lo haremos solo para $m = 2$.

$$\begin{aligned}
&E(e^{i[\lambda_1 W(t_1) + \lambda_2 (W(t_2) - W(t_1))]}) \\
&= E\Big(e^{i\left[\lambda_1 \sum_{k=1}^\infty A_k s_k(t_1) + \lambda_2 (\sum_{k=1}^\infty A_k s_k(t_2) - \sum_{k=1}^\infty A_k s_k(t_1))\right]}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} E\Big(e^{i\left[\lambda_1 \sum_{k=1}^n A_k s_k(t_1) + \lambda_2 (\sum_{k=1}^n A_k s_k(t_2) - \sum_{k=1}^n A_k s_k(t_1))\right]}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n E(e^{i[\lambda_1 A_k s_k(t_1) + \lambda_2 (A_k s_k(t_2) - A_k s_k(t_1))]}) \\
&= \prod_{k=1}^\infty e^{-\frac{1}{2}[\lambda_1 s_k(t_1) + \lambda_2 (s_k(t_2) - s_k(t_1))]^2} \\
&= \prod_{k=1}^\infty e^{-\frac{1}{2}[\lambda_1^2 s_k^2(t_1) + \lambda_2^2 (s_k(t_2) - s_k(t_1))^2 + \lambda_1\lambda_2 s_k(t_1)(s_k(t_2) - s_k(t_1))]} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\left[\lambda_1^2 \sum_{k=1}^\infty s_k^2(t_1) + \lambda_2^2 \sum_{k=1}^\infty (s_k(t_2) - s_k(t_1))^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \sum_{k=1}^\infty s_k(t_1)(s_k(t_2) - s_k(t_1))\right]} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(\lambda_1^2 t_1 + \lambda_2^2 (t_2 - t_1))}
\end{aligned}$$

como queríamos ver.

□

Teorema 2.29. Existencia de un movimiento Browniano en $[0,\infty)$.

Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tiene definido una sucesión de $\mathcal{N}(0,1)$ independientes entonces existe un movimiento Browniano en $[0,\infty)$ definido en el espacio.

Demostración. Como podemos reindexar las variables $\mathcal{N}(0,1)$ para obtener una sucesión de sucesiones de variables $\mathcal{N}(0,1)$ podemos entonces, gracias al Teorema 2.28, construir una sucesión $W^n(t)$ de movimientos Brownianos independientes. Luego, pegando los bordes inductivamente tenemos que

$$W(t) := W(n-1) + W^n(t-(n-1)) \quad \text{para } n-1 \leq t \leq n$$

[2] De hecho lo que haremos aquí generaliza lo hecho en (1).

es un movimiento Browniano en $[0,\infty)$. □

Observación 2.30. Usando un razonamiento similar podemos construir m movimientos Brownianos unidimensionales $W_j(t)\, 1 \leq j \leq m$ independientes. Luego $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), \ldots, W_m(t))$ es un movimiento Browniano m dimensional (respecto a la filtración $\mathcal{F}_t^{\mathbf{W}}$).

2.2.2. Continuidad del Movimiento Browniano.

Como mencionamos en la Observación 2.15 todo movimiento Browniano tiene una modificación continua. En efecto, la modificación verifica algo más fuerte: es uniformemente continua Hölder para cada exponente $\gamma < \frac{1}{2}$. Aquí probaremos este resultado.

Definición 2.31. Diremos que una función $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ es *(uniformemente) continua Hölder con exponente* γ si existe una constante K tal que

$$|f(s) - f(t)| \leq K|t - s|^{\gamma} \quad \forall\, s, t \in [0, T].$$

Necesitaremos del siguiente teorema general.

Teorema 2.32. Teorema de Kolmogorov Chentsov.

Sea $\{(\mathbf{X}_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in[0,T]}$ *un proceso estocástico tal que*

$$E(|\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_s|^{\beta}) \leq C|t - s|^{1+\alpha} \quad 0 \leq s, t \leq T$$

para $\alpha, \beta > 0, C \geq 0$*. Luego, existe una modificación continua* $\tilde{\mathbf{X}}_t$ *de* $\mathbf{X}_t$*, la cual para cada* $0 \leq \gamma \leq \frac{\alpha}{\beta}$ *es uniformemente continua Hölder con exponente* γ*, o sea que para casi todo* ω *existe* $K = K(\omega, \gamma, T)$ *tal que*

$$|\tilde{\mathbf{X}}_t(\omega) - \tilde{\mathbf{X}}_s(\omega)| \leq K|t - s|^{\gamma} \quad 0 \leq s, t \leq T$$

Demostración. Por simplicidad supondremos $T = 1$. Sea $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$.

(1) Sean

$$A_k := \bigcup_{i=1}^{2^k} \left\{ |\mathbf{X}_{i/2^k} - \mathbf{X}_{(i-1)/2^k}| > \frac{1}{2^{k\gamma}} \right\}$$

Luego

$$\begin{aligned} P(A_k) &\leq \sum_{i=1}^{2^k} P\left(|\mathbf{X}_{i/2^k} - \mathbf{X}_{(i-1)/2^k}| > \frac{1}{2^{k\gamma}} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{2^k} E(|\mathbf{X}_{i/2^k} - \mathbf{X}_{(i-1)/2^k}|^{\beta}) \left(\frac{1}{2^{k\gamma}} \right)^{-\beta} \\ &\leq C \sum_{i=1}^{2^k} \left(\frac{1}{2^k} \right)^{1+\alpha} \left(\frac{1}{2^{k\gamma}} \right)^{-\beta} \\ &= C \frac{1}{2^{k(\alpha - \gamma\beta)}} \end{aligned}$$

Luego, como $(\alpha-\gamma\beta)>0$ tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)<\infty$. Por lo que gracias al Lema de Borel Cantelli $P(A_k$ infinitas veces$)=0$, o sea que existe Ω^* con $P(\Omega^*)=1$ tal que para $\omega\in\Omega^*$

$$|\mathbf{X}_{i/2^k}(\omega)-\mathbf{X}_{(i-1)/2^k}(\omega)|\le\frac{1}{2^{k\gamma}}\quad\forall 1\le i\le 2^k$$

para $k\ge k(\omega)$. Luego, para $K_1=K_1(\omega)$ suficientemente grande

$$|\mathbf{X}_{i/2^k}(\omega)-\mathbf{X}_{(i-1)/2^k}(\omega)|\le\frac{K_1}{2^{k\gamma}}\quad\forall 1\le i\le 2^k \tag{2.5}$$

para $k\ge 1$.

(2) Veamos ahora que esta última desigualdad implica que $\mathbf{X}$ es continua Hölder sobre el conjunto D de los racionales diádicos en $[0,1]$. Sea $\omega\in\Omega^*$ y $t_1,t_2\in D$ $0<t_2-t_1<1$. Tomemos $k\ge1$ tal que

$$\frac{1}{2^k}\le t<\frac{1}{2^{k-1}}\quad \text{para } t:=t_2-t_1.$$

Entonces, como $\frac{1}{2^k}\le t$ podemos escribir a t_1 y a t_2 como

$$\begin{aligned} t_1&=\frac{i}{2^k}-\frac{1}{2^{p_1}}-\cdots-\frac{1}{2^{p_r}}\quad (k<p_1<\ldots<p_r)\\ t_2&=\frac{j}{2^k}+\frac{1}{2^{q_1}}+\cdots+\frac{1}{2^{q_s}}\quad (k<q_1<\ldots<q_s)\end{aligned}$$

con $i\le j$. Además como $t<\frac{1}{2^{k-1}}$ tenemos que $\frac{j-i}{2^k}<\frac{1}{2^{k-1}}$ por lo cual $j=i$ o $j=i+1$. Usando ahora la fórmula 2.5 tenemos que

$$|\mathbf{X}_{i/2^k}(\omega)-\mathbf{X}_{j/2^k}(\omega)|\le K_1\left|\frac{i-j}{2^k}\right|^{\gamma}\le K_1t^{\gamma}.$$

Además

$$|\mathbf{X}(\frac{i}{2^k}-\frac{1}{2^{p_1}}-\cdots-\frac{1}{2^{p_l}},\omega)-\mathbf{X}(\frac{i}{2^k}-\frac{1}{2^{p_1}}-\ldots\frac{1}{2^{p_{l-1}}},\omega)|\le K_1\left(\frac{1}{2^{p_l}}\right)^{\gamma}$$

para $l=1,\ldots,r$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}|\mathbf{X}_{t_1}(\omega)-\mathbf{X}_{i/2^k}(\omega)| &\le K_1\sum_{l=1}^{r}\left(\frac{1}{2^{p_l}}\right)^{\gamma}\\ &\le \frac{K_1}{2^{k\gamma}}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\gamma}}\right)^{l}\\ &\le K_2t^{\gamma}\end{aligned}$$

donde $K_2=K_2(\omega,\gamma)$. Similarmente deducimos

$$|\mathbf{X}_{t_2}(\omega)-\mathbf{X}_{j/2^k}(\omega)|\le K_2t^{\gamma}.$$

Luego sumando las estimaciones hechas, obtenemos

$$|\mathbf{X}_{t_1}(\omega)-\mathbf{X}_{t_2}(\omega)|\le\overbrace{(K_1+2K_2)}^{=:K}t^{\gamma} \tag{2.6}$$

como queríamos ver.

(3) Definamos ahora a $\tilde{\mathbf{X}}$. Para $\omega \notin \Omega^*$ tomemos $\tilde{\mathbf{X}}_t(\omega) = 0$. Para $\omega \in \Omega^*$, si $t \in D$ tomemos $\tilde{\mathbf{X}}_t(\omega) = \mathbf{X}_t(\omega)$ y así por la desigualdad 2.6 $\tilde{\mathbf{X}}_t(\omega)$ queda uniformemente continua en D, luego si $t \in [0,1] \setminus D$ podemos definir a $\tilde{\mathbf{X}}_t(\omega)$ de modo que quede continua en $[0,1]$. Por continuidad, entonces, nos queda para $\omega \in \Omega^*$

$$|\tilde{\mathbf{X}}_t(\omega) - \tilde{\mathbf{X}}_s(\omega)| \leq K|t-s|^\gamma \quad 0 \leq s,t \leq 1$$

como queríamos ver.

Para ver que $\tilde{\mathbf{X}}$ es una modificación de $\mathbf{X}$ observemos primero que para todo $\varepsilon > 0$

$$P(|\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_s| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_s|^\beta)}{\varepsilon^\beta} \leq C\varepsilon^{-\beta}|t-s|^{1+\alpha}$$

y así concluimos que $\mathbf{X}_s \underset{s\to t}{\longrightarrow} \mathbf{X}_t$ en probabilidad. Ahora sí, veamos que son una modificación de la otra. Sea $t \in [0,1]$. Podemos suponer $t \in [0,1] \setminus D$. Sea entonces $\{t_k\} \subset D$ tal que $t_k \to t$. Luego, por continuidad, tenemos que $\mathbf{X}_{t_k} = \tilde{\mathbf{X}}_{t_k} \to \tilde{\mathbf{X}}_t \, a.s.$ pero por lo recién visto $\mathbf{X}_{t_k} \to \mathbf{X}_t$ en probabilidad. Luego, concluimos que $\tilde{\mathbf{X}}_t = \mathbf{X}_t \, a.s.$ como queríamos ver.

Para terminar, observar que para cada $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$ hemos construido extensiones continuas $\tilde{\mathbf{X}}$, pero como son todas modificaciones entre si concluimos, por el Teorema 2.7, que son indistinguibles entre si y así concluimos nuestra demostración. □

Corolario 2.33. *Si* $\{\mathbf{W}_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ *es un movimiento Browniano entonces* $\mathbf{W}_t$ *tiene una modificación uniformemente continua Hölder en* $[0,T]$ *para cada* $\gamma < \frac{1}{2}$.

Demostración. Para $p \geq 1$,

$$E(|\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(s)|^{2p}) = \left(\sqrt{t-s}\right)^{2p} E\left(\left(\overbrace{\left|\frac{\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(s)}{\sqrt{t-s}}\right|^2}^{\sim \mathcal{X}^2_m}\right)^p\right) = C(m,p)(t-s)^p$$

Luego, por el Teorema de Kolmogorov-Chentsov, $\mathbf{W}(t)$ tiene una modificación uniformemente continua Hölder en $[0,T]$ para cada

$$0 < \gamma < \frac{p-1}{2p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}.$$

Como esto vale para cada $p \geq 1$, y como dos modificaciones continuas de $\mathbf{W}(t)$ son indistinguibles, concluimos la demostración. □

Gracias a este resultado, al trabajar con movimientos Brownianos, siempre podremos suponer la hipótesis de continuidad Hölder.

3. La Integral de Itô

Motivación. Queremos definir la integral estocástica

$$\int_0^T X \mathrm{d}W.$$

Recurramos para ello a distintas definiciones y veamos si podemos adaptarlas a nuestro interés.

Primeramente, consideremos el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de números reales. Si F es una función de distribución diferenciable (con derivada continua) entonces, si X es una función medible, la siguiente integral puede ser calculada con la ayuda de la función densidad

$$\int_0^t X(s)\mathrm{d}F(s) = \int_0^t X(s)f(s)\mathrm{d}s.$$

Caso contrario, esta integral puede ser calculada como una integral de Lebesgue-Stieltjes ver [WH/ZY, Sección 11.3.], por ejemplo, de ser X continua, quedaría

$$\int_0^t X\mathrm{d}F = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} X\left(\frac{(k-1)t}{n}\right) \cdot \left(F\left(\frac{kt}{n}\right) - F\left(\frac{(k-1)t}{n}\right)\right).$$

Esto se puede generalizar al caso de $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ un proceso estocástico con caminos $t \mapsto X_t(\omega)$ medibles. Sea $\{A_t\}_{t\in[0,+\infty)}$un proceso creciente (i.e. $A_0(\omega) = 0$ para $\omega \in \Omega$, y los caminos $t \mapsto A_t(\omega)$ son crecientes, continuos por derecha y $E(A_t) < \infty$ para todo $t \in [0, \infty)$). Luego, para cada $\omega \in \Omega$ podemos calcular la siguiente integral como una integral de Lebesgue-Stieltjes:

$$I_t(\omega) := \int_0^t X_s(\omega)\,\mathrm{d}A_s(\omega).$$

Se puede probar, bajo ciertas hipótesis sobre X_t que $I_t(.)$ es medible $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Luego I_t es un nuevo proceso estocástico. Este tipo de integral se puede generalizar para A_t con caminos de variación acotada en $[0, T]$.

Para definir nuestra integral podríamos intentar definirla para cada ω usando una función de densidad, pero $W_t(\omega)$ resulta no diferenciable. Entonces podríamos probar la definición de Lebesgue-Stieltjes pero tampoco funcionaría debido a que los caminos muestrales de W_t son de variación infinita en cada intervalo de $[0, T)$ (y por lo tanto no diferenciables en ningún punto) como dice el siguiente teorema:

Teorema 3.1. *Para cada $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$ y para casi todo ω, $t \mapsto \boldsymbol{W}(t, \omega)$ no es continua Hölder, con exponente γ, en ningún t.*

Luego, para casi todo ω, el camino muestral $t \mapsto \boldsymbol{W}(t, \omega)$ no es diferenciable y es de variación infinita en cada subintervalo.

Demostración. (Dvoretzky, Erdös, Kakutani) Alcanza con considerar W_t unidimensional y, por simplicidad, consideremos solamente los tiempos $0 \leq t < 1$.

Sea N tal que

$$N\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) > 1.$$

Sea

$$\begin{aligned} B &= \{w|\text{ existe un } 0 \leq s < 1 \text{ tq } W(t,\omega) \text{ es continua Hölder con} \\ &\quad\ \text{exponente } \gamma \text{ en } s\}. \end{aligned}$$

Veamos que $P(B) = 0$. Sea $\omega \in B$. Sea s tal que

$$|W(t,\omega) - W(s,\omega)| \leq K\,|t-s|^{\gamma} \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Para n suficientemente grande, o sea para $n \geq k$, sea $i = [ns] + 1$ y notar que para $j = i,\, i+1,\, \ldots,\, i+N-1$

$$\begin{aligned} \left|W(\frac{j}{n},\omega) - W(\frac{j+1}{n},\omega)\right| &\leq \left|W(s,\omega) - W(\frac{j}{n},\omega)\right| \\ &\quad + \left|W(s,\omega) - W(\frac{j+1}{n},\omega)\right| \\ &\leq K\left(\left|s - \frac{j}{n}\right|^{\gamma} + \left|s - \frac{j+1}{n}\right|^{\gamma}\right) \\ &\leq K2\frac{(N+1)^{\gamma}}{n^{\gamma}} \\ &= \frac{M}{n^{\gamma}} \end{aligned}$$

O sea, vimos que existe un M y un k tal que $\forall n \geq k$ existe un $1 \leq i \leq n$ tal que

$$\omega \in A^i_{M,n} := \left\{\omega \,|\, \left|W(\frac{j}{n},\omega) - W(\frac{j+1}{n},\omega)\right| \leq \frac{M}{n^{\gamma}} \text{ para } j = i,\, \ldots,\, i+N-1\right\}$$

O sea,

$$B \subset \bigcup_{M=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} A^i_{M,n}.$$

Veamos que este evento tiene probabilidad cero.

Para todo k y M:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{M,n}^{i}\right) &\leq \liminf_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{M,n}^{i}\right) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P\left(A_{M,n}^{i}\right) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} n\left(P\left(|W_{\frac{1}{n}}| \leq \frac{M}{n^{\gamma}}\right)\right)^{N} \end{aligned}$$

pues las variables aleatorias $W_{\frac{j+1}{n}} - W_{\frac{j}{n}}$ son independientes. Además

$$\begin{aligned} P\left(|W_{\frac{1}{n}}| \leq \frac{M}{n^{\gamma}}\right) &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{M}{n^{\gamma}}}^{\frac{M}{n^{\gamma}}} e^{-\frac{nx^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{M}{n^{\gamma-\frac{1}{2}}}}^{\frac{M}{n^{\gamma-\frac{1}{2}}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{C}{n^{\gamma-\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Luego,

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{M,n}^{i}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{C}{n^{\gamma-\frac{1}{2}}}\right)^{N} = 0$$

pues $N\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) > 1$. Luego

$$P\left(\bigcup_{M=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{M,n}^{i}\right) = 0$$

como queríamos ver. □

Interpretación. La idea de la demostración es que si

$$|W(t,\omega) - W(s,\omega)| \leq K\,|t-s|^{\gamma} \text{ para todo } t,$$

entonces

$$\left|W(\frac{j}{n},\omega) - W(\frac{j+1}{n},\omega)\right| \leq \frac{M}{n^{\gamma}}$$

para $n \gg 1$ y al menos N valores de j. Pero estos son eventos independientes de probabilidad pequeña (pues $\gamma > \frac{1}{2}$ y la variable tiene distribución $N(0,\frac{1}{n})$). La probabilidad de que se verifiquen todos al mismo tiempo es un número pequeño a una potencia N grande, y es, por lo tanto, un número muy pequeño.

Entonces, vemos que la integral estocástica es un *nuevo* tipo de integral, la cual, como veremos más adelante, dependerá fuertemente de las características propias de W_t como proceso y no por la forma de sus caminos que no sirven para definirla puntualmente en Ω. Empezaremos definiéndola para procesos simples y luego haremos un razonamiento por aproximación en $L^2(\Omega)$ para integrandos más generales. Estas aproximaciones en el caso de integrandos continuos (y algo más) serán las ya conocidas sumas de Riemann.

3.1. Sumas de Riemann. Antes de empezar con la definición general, veamos la definición de una integral particular

$$\int_0^T W \mathrm{d}W$$

la cual nos guiará en nuestro propósito.

Definición 3.2. (i) Llamaremos *partición* de $[0, T]$ a una colección finita de puntos en $[0, T]$:

$$P := \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = T\}$$

y denotaremos $|P| := \text{máx}_{1 \leq i \leq p} |t_i - t_{i-1}|$.

(ii) Para $0 \leq \lambda \leq 1$ y P una partición de $[0, T]$, sea

$$\tau_i := (1 - \lambda)t_{i-1} + \lambda t_i \quad (i = 1, \ldots, p).$$

Queremos averiguar qué pasa con la aproximación de Riemann

$$\sum_{i=1}^{p} W_{\tau_i}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

cuando $|P| \to 0$, con λ fijo.

Lema 3.3. ***(Variación Cuadrática)*** *Sean*

$$P^n = \{a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{p_n}^n = b\}$$

particiones del intervalo $[a, b]$, con $|P^n| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{p_n} (W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n})^2 \to b - a \tag{3.1}$$

en $L^2(\Omega)$ cuando $n \to \infty$.

Más en general, si $0 \leq \lambda \leq 1$ está fijo, entonces

$$\sum_{i=1}^{p_n} (W_{\tau_i^n} - W_{t_{i-1}^n})^2 \to \lambda(b - a)$$

en $L^2(\Omega)$.

Observación 3.4. La fórmula (3.1) juntamente con $E\left((\mathrm{d}W_t)^2\right) = \mathrm{d}t$, ver la fórmula (2.1), parcialmente justifican la siguiente idea heurística:

$$\mathrm{d}W_t = \sqrt{\mathrm{d}t}.$$

Demostración. Sea $Q_i^n = (W_{\tau_i^n} - W_{t_{i-1}^n})^2$ y $Q^n = \sum_{i=1}^{p_n} Q_i^n$. Por (2.1) y (2.2), $E(Q_i^n) = \tau_i^n - t_{i-1}^n = \lambda(t_i^n - t_{i-1}^n)$ y $Var(Q_i^n) = 2(\tau_i^n - t_{i-1}^n)^2 = 2\lambda^2(t_i^n - t_{i-1}^n)^2$. Luego

$$E(Q^n) \quad = \quad \lambda(b-a),$$

y por la independencia de las Q_i^n obtenemos

$$\begin{aligned} E((Q^n - \lambda(b-a))^2) &= Var(Q^n) \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} Var(Q_i^n) \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} 2\lambda^2 (t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \\ &\leq 2\lambda^2 |P_n|(b-a) \to 0, \quad \text{cuando } n \to \infty \end{aligned}$$

como queríamos ver. □

Observación. Usando la continuidad Hölder con exponente $\gamma < \frac{1}{2}$ vista en la sección previa podemos demostrar la variación infinita de los caminos muestrales de W_t mencionada en el Teorema 3.1.

Pasando a una subsucesión en el Lema previo, tenemos que existe una sucesión de particiones P^n, $|P^n| \to 0$ con

$$\sum_{i=1}^{p_n} (W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n})^2 \to b-a \quad \text{a.s}$$

Sea ω para el cual esto vale. Luego para $n \geq n_0$

$$\frac{b-a}{2} < K|P^n|^\gamma \sum_{i=1}^{p_n} |W(t_i^n, \omega) - W(t_{i-1}^n, \omega)|$$

con lo que

$$\sum_{i=1}^{p_n} |W(t_i^n, \omega) - W(t_{i-1}^n, \omega)| \to \infty \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

como queríamos ver.

Lema 3.5. *Sean P^n particiones del intervalo $[0,T]$, $|P^n| \to 0$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ fijo. Entonces, si*

$$R_n := \sum_{k=0}^{p_n} W_{\tau_i^n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n})$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{W_T^2}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T,$$

donde el límite es tomado en $L^2(\Omega)$.

En particular, el límite de las aproximaciones de Riemann depende de la elección de los puntos intermedios τ_i^n.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned}
R_n &:= \sum_{i=1}^{p_n} W_{\tau_i^n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n}) \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{p_n} W_{t_{i-1}^n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n})}_{=:A} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p_n}(W_{\tau_i^n} - W_{t_{i-1}^n})(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n})}_{=:B}
\end{aligned}$$

pero, haciendo partes en A,

$$\begin{aligned}
A &= W_T^2 - W_0^2 - \sum_{i=1}^{p_n} W_{t_i^n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n}) \\
&= W_T^2 - \sum_{i=0}^{p_n} W_{t_{i-1}^n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n}) - \sum_{i=1}^{p_n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n})^2.
\end{aligned}$$

Luego,

$$A = \frac{W_T^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p_n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n})^2,$$

con lo que, usando Lema 3.3, $A \to \dfrac{W_T^2}{2} - \dfrac{1}{2}T$.

Por otra parte,

$$B = \underbrace{\sum_{i=1}^{p_n}(W_{\tau_i^n} - W_{t_{i-1}^n})^2}_{=:B1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p_n}(W_{\tau_i^n} - W_{t_{i-1}^n})(W_{t_i^n} - W_{\tau_i^n})}_{=:B2},$$

donde $B1 \to \lambda T$.

Veamos que $B2 \to 0$.

Por independencia,

$$E\left((W_{\tau_i^n} - W_{t_{i-1}^n})(W_{t_i^n} - W_{\tau_i^n})\right) = E\left((W_{\tau_i^n} - W_{t_{i-1}^n})\right) E\left((W_{t_i^n} - W_{\tau_i^n})\right) = 0,$$

luego $E(B_2) = 0$.

Similarmente,

$$\begin{aligned}
&Var\left((W_{\tau_i^n} - W_{t_{i-1}^n})(W_{t_i^n} - W_{\tau_i^n})\right) = \\
&E\left(\left((W_{\tau_i^n} - W_{t_{i-1}^n})(W_{t_i^n} - W_{\tau_i^n})\right)^2\right) = \\
&\qquad E\left((W_{\tau_i^n} - W_{t_{i-1}^n})^2\right) E\left((W_{t_i^n} - W_{\tau_i^n})^2\right) = (\tau_i^n - t_{i-1}^n)(t_i^n - \tau_i^n),
\end{aligned}$$

pues son independientes de distribuciones $(\tau_i^n - t_{i-1}^n)\mathcal{X}_1^2$ y $(t_i^n - \tau_i^n)\mathcal{X}_1^2$ respectivamente. Luego, por independencia de los sumandos,

$$\begin{aligned} Var(B2) &= \sum_{i=1}^{p_n} (\tau_i^n - t_{i-1}^n)(t_i^n - \tau_i^n) \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} \lambda(1-\lambda)(t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \\ &\leq \lambda(1-\lambda)|P_n|T \to 0. \end{aligned}$$

Luego $B2 \to 0$, como queríamos ver.

Así, sumando los límites de A y B, concluimos la demostración. □

En la definición de nuestra integral, la integral de Itô, se utilizará la constante $\lambda = 0$, así

$$\int_0^T W \mathrm{d}W = \frac{W_T^2}{2} - \frac{T}{2}.$$

Esto no es lo que uno esperaría. Algo mucho más ameno sería tomar $\lambda = \frac{1}{2}$, para que quede

$$\int_0^T W \mathrm{d}W = \frac{W_T^2}{2}.$$

Sin embargo, el motivo por el cual se define así la integral pasa por otro lado. Si pensamos en la variable t como una variable temporal, sucede que en general los procesos G_t que integraremos dependerán del movimiento browniano W_t, y como a tiempo t_{i-1} no conocemos que pasa con W_t en $\tau_i^n = (1-\lambda)t_{i-1}^n + \lambda t_i^n$ si $\lambda > 0$, será mejor utilizar el valor conocido de $G_{t_{i-1}^n}$ en la aproximación, y de esta forma ciertas propiedades buenas valdrán que facilitarán la teoría de integración..

Visto ya este ejemplo sigamos con nuestra definición.

3.2. Construcción de la Integral de Itô.

Suposición general para esta sección:
Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad completo. Sea $\mathcal{F}_t$ una filtración Browniana asociada al movimiento Browniano $\mathbf{W}_t$ de dimensión m.

Recordando la idea de que las σ-álgebras contienen información, podemos expresar el hecho de que nuestro integrando X_t pueda depender del movimiento browniano W_t, diciendo que $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in I}$ sea un proceso estocástico. En realidad habrá más hipótesis sobre X_t, pero serán vistas sobre la marcha.

Definición 3.6. Un proceso estocástico $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in [0,T]}$ será llamado un *proceso simple* si existen $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = T$, $p \in \mathbb{N}$ y variables aleatorias Φ_i medibles

$\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ $i = 1, \dots, p$ y Φ_0 medible $\mathcal{F}_0$, todas acotadas de modo que $X_t(\omega)$ se pueda escribir como

$$X_t(\omega) = X(t,\omega) = \Phi_0(\omega) \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i(\omega) \cdot 1_{(t_{i-1},t_i]}(t).$$

Observación 3.7. Los caminos $X(.,\omega)$ del proceso simple X_t son funciones escalonadas continuas a izquierda.

Definición 3.8. Sea $\{X_t, \mathcal{F}_t\}$ un proceso simple. Definiremos la *integral estocástica* $I_t(X)$ para $t \in (t_k, t_{k+1}]$ como

$$I_t(X) := \int_0^t X_s \mathrm{d}W_s := \sum_{1 \le i \le k} \Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_{k+1}(W_t - W_{t_k})$$

o, más generalmente, para $t \in [0,T]$:

$$I_t(X) := \int_0^t X_s \mathrm{d}W_s := \sum_{1 \le i \le p} \Phi_i(W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t}).$$

Observación 3.9. $\{I_t(X), \mathcal{F}_t\}$ es un proceso estocástico.

Teorema 3.10. (Propiedades elementales de la integral estocástica) *Sea* $\{X_t, \mathcal{F}_t\}$ *un proceso simple. Entonces tenemos que*

(1) $\{I_t(X)\}_{t\in[0,T]}$ *es una martingala continua con respecto a* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$.
(2) $E\left(\left(\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s\right)^2\right) = E\left(\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s\right)$ *para* $t \in [0,T]$.

Demostración.

(1) La continuidad es evidente a partir de la continuidad de W_t. Veamos que $E(I_t(X)|\mathcal{F}_s) = I_s(X)$ para $t > s$. Sean $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $s \in (t_{l-1}, t_l]$ (si fuera $s = 0$ se procede igual) y supongamos sin pérdida de generalidad, $k > l$. Entonces

$$\begin{aligned}
&E(I_t(X)|\mathcal{F}_s) = \\
&\quad E\left(I_s(X) + \Phi_l(W_{t_l} - W_s) + \sum_{i=l+1}^{k-1} \Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_k(W_t - W_{t_{k-1}}) \middle| \mathcal{F}_s \right) \\
&\quad = I_s(X) + \underbrace{E\left(\Phi_l(W_{t_l} - W_s)\middle|\mathcal{F}_s\right)}_{=:A} + \underbrace{\sum_{i=l+1}^{k-1} E\left(\Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\middle|\mathcal{F}_s\right)}_{=:B} \\
&\qquad + \underbrace{E\left(\Phi_k(W_t - W_{t_{k-1}})\middle|\mathcal{F}_s\right)}_{=:C} = I_s(X) + A + B + C.
\end{aligned}$$

Veamos que $A = B = C = 0$. Haremos la cuenta en el caso de B solamente, los otros son similares. Sea $i \ge l+1$, luego, como $t_{i-1} \ge s$,

$$\begin{aligned}
E(\Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})|\mathcal{F}_s) &= E(E(\Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})|\mathcal{F}_{t_{i-1}})|\mathcal{F}_s) \\
&= E(\Phi_i E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|\mathcal{F}_{t_{i-1}})|\mathcal{F}_s) = 0,
\end{aligned}$$

luego $B=0$, como queríamos ver.

(2) Por simplicidad tomemos $t=t_k$. Luego

$$E\left(I_t^2(X)\right)=E\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\Phi_i\Phi_j\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)\left(W_{t_j}-W_{t_{j-1}}\right)\right).$$

Ahora, si $j\neq i$, digamos $j>i$, entonces $W_{t_j}-W_{t_{j-1}}$ es independiente de $\Phi_i\Phi_j\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)$. Luego

$$\begin{aligned}E&\left(\Phi_i\Phi_j\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)\left(W_{t_j}-W_{t_{j-1}}\right)\right)\\&=E\left(\Phi_i\Phi_j\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)\right)E\left(\left(W_{t_j}-W_{t_{j-1}}\right)\right)=0.\end{aligned}$$

Entonces, usando (2.1) de la Observación 2.16, tenemos

$$\begin{aligned}E\left(I_t(X)^2\right)=\sum_{i=1}^{k}E\left(\Phi_i^2(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})^2\right)&=\sum_{i=1}^{k}E\left(\Phi_i^2\right)E\left((W_{t_i}-W_{t_{i-1}})^2\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}E\left(\Phi_i^2\right)(t_i-t_{i-1})=E\left(\int_0^t X_s^2ds\right),\end{aligned}$$

como queríamos ver.

$\square$

El siguiente resultado lo utilizaremos más adelante, cuando definamos la integral estocástica respecto de varios movimientos brownianos independientes (o sea respecto de un movimiento browniano multidimensional).

Proposición 3.11. *Si $W_t,\tilde{W}_t$ son dos movimientos brownianos independientes definidos en $\mathcal{F}_t$ y $X_t,\tilde{X}_t$ son dos procesos simples entonces*

$$E(\int_0^t X_s\mathrm{d}W_s\int_0^t\tilde{X}_s\mathrm{d}\tilde{W}_s)=0\ \textit{para}\ t\in[0,T]$$

Demostración. Por simplicidad tomemos $t=t_k$. Luego

$$\begin{aligned}E(\int_0^t X_s\mathrm{d}W_s\int_0^t\tilde{X}_s\mathrm{d}\tilde{W}_s)&=E(\sum_{i=1}^{k}\Phi_i(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})\sum_{i=1}^{k}\tilde{\Phi}_i(\tilde{W}_{t_i}-\tilde{W}_{t_{i-1}}))\\&=\sum_{i,j=1}^{k}E(\Phi_i(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})\tilde{\Phi}_j(\tilde{W}_{t_j}-\tilde{W}_{t_{j-1}}))\end{aligned}$$

Analicemos los sumandos. Si $i\neq j$, digamos $j>i$, entonces $\tilde{W}_{t_j}-\tilde{W}_{t_{j-1}}$ queda independiente de $\Phi_i(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})\tilde{\Phi}_j$. Luego

$$E(\Phi_i(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})\tilde{\Phi}_j(\tilde{W}_{t_j}-\tilde{W}_{t_{j-1}}))=E(\Phi_i(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})\tilde{\Phi}_j)E(\tilde{W}_{t_j}-\tilde{W}_{t_{j-1}})=0.$$

Si en cambio $i = j$, como $\Phi_i \tilde{\Phi}_i$ es independiente de $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(\tilde{W}_{t_i} - \tilde{W}_{t_{i-1}})$ concluimos que

$$\begin{aligned} E(\Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\tilde{\Phi}_i(\tilde{W}_{t_i} - \tilde{W}_{t_{i-1}})) &= E(\Phi_i\tilde{\Phi}_i)E((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(\tilde{W}_{t_i} - \tilde{W}_{t_{i-1}})) \\ &= E(\Phi_i\tilde{\Phi}_i)E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})E(\tilde{W}_{t_i} - \tilde{W}_{t_{i-1}}) = 0. \end{aligned}$$

Luego $E(\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s \int_0^t \tilde{X}_s \mathrm{d}\tilde{W}_s) = 0$ como queríamos ver. □

Observación 3.12. (1) Se pueden definir integrales con límites generales:

$$\int_t^T X_s \mathrm{d}W_s := \int_0^T X_s \mathrm{d}W_s - \int_0^t X_s \mathrm{d}W_s \quad \text{para } t \leq T$$

(2) Linealidad de la integral estocástica. Sean X e Y procesos simples, y $a, b \in \mathbb{R}$, luego

$$I_t(aX + bY) = aI_t(X) + bI_t(Y).$$

Analicemos ahora, para qué tipo de procesos $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in I}$ definiremos nuestra integral estocástica. Dado que estamos usando procesos simples G_t para nuestras aproximaciones, éstas tendrán como valor límite a nuestro integrando X_t. Ahora, es fácil ver que los procesos G_t vistos como funciones

$$\begin{aligned} [0, \infty) \times \Omega &\to \mathbb{R} \\ (s, \omega) &\mapsto X_s(\omega) \end{aligned}$$

resultan medibles $\mathcal{B}([0, \infty) \otimes \mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Luego, de aquí concluimos que X_t también deberá ser medible $\mathcal{B}([0, \infty) \otimes \mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definición 3.13. Sea $\{(\mathbf{X}_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ un proceso estocástico. Diremos que este proceso es *medible* si la aplicación

$$\begin{aligned} [0, \infty) \times \Omega &\to \mathbb{R}^n \\ (s, \omega) &\mapsto \mathbf{X}_s(\omega) \end{aligned}$$

resulta medible $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Observación 3.14. Medibilidad de $\mathbf{X}_t$, en particular, implica que $\mathbf{X}(., \omega)$ sea medible $\mathcal{B}([0, \infty)) - \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ para todo $\omega \in \Omega$.

A la hora de hacer cuentas usaremos una noción de medibilidad un poco más sutil.

Definición 3.15. Sea $\{(\mathbf{X_t}, \mathcal{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ un proceso estocástico. Diremos que este proceso es *progresivamente medible* si para todo $t \geq 0$ la aplicación

$$\begin{aligned} [0, t] \times \Omega &\to \mathbb{R}^n \\ (s, \omega) &\mapsto \mathbf{X_s}(\omega) \end{aligned}$$

es medible $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{G}_t - \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Observación 3.16. (1) Todo proceso simple es progresivamente medible.
(2) Todo proceso progresivamente medible es medible.

(3) Si $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$es un proceso real progresivamente medible y $\int_0^t |X_s|\mathrm{d}s < \infty$ *a.s.* $\forall t > 0$, entonces la integral $\int_0^t X_s\mathrm{d}s$ es $\mathcal{G}_t$-medible para todo $t \in [0,\infty)$.

(4) Se puede probar que todo proceso medible X tiene una modificación progresivamente medible (Ver [CH/DO]).

El siguiente teorema muestra que la medibilidad progresiva es una generalización de continuidad lateral.

Teorema 3.17. *Si los caminos del proceso estocástico $\{(\mathbf{X}_t, \mathcal{G}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ son continuos a derecha (o a izquierda), entonces el proceso es progresivamente medible.*

Demostración. Supongamos $\mathbf{X}$ continuo a derecha. El otro caso sale igual. Sean $t > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $0 \leq s \leq t$ y

$$\mathbf{X}_0^m(\omega) := \mathbf{X}_0(\omega),$$

$$\mathbf{X}_s^m(\omega) := \mathbf{X}_{kt/m}(\omega) \quad \text{para } \frac{(k-1)t}{m} < s \leq \frac{kt}{m}.$$

Luego, los procesos $\mathbf{X}_s^m$ son medibles $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{G}_t - \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Por continuidad a derecha de $\mathbf{X}_t$ tenemos

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{X}_s^m(\omega) = \mathbf{X}_s(\omega) \quad \text{para todo } (s,\omega) \in [0,t]\times\Omega,$$

con lo que $\mathbf{X}_s$ es también medible $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{G}_t - \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Luego, hemos probado que el proceso $\mathbf{X}$ es progresivamente medible como queríamos ver. $\square$

Dadas las definiciones necesarias, definamos ya el espacio de procesos para los cuales definiremos nuestra integral.

Definición 3.18. Sea

$$\begin{aligned}\mathbb{L}^2[0,T] &:= L^2\left([0,T], \Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P\right)\\ &:= \Bigg\{\{(X_t,\mathcal{F}_t)\}_{t\in[0,T]} \text{ procesos a valores reales}\\ &\qquad |X_t \text{ es progresivamente medible, } E\left(\int_0^T X_t^2\mathrm{d}t\right) < \infty\Bigg\},\end{aligned}$$

junto con la norma

$$\|X\|_T^2 := E\left(\int_0^T X_t^2\mathrm{d}t\right)$$

En verdad, no es una norma sino una semi norma, pues si $\|X-Y\|_T^2 = 0$ entonces sólo podemos deducir $X = Y$ *a.s.* $\lambda\otimes P$. En tal caso diremos que X es *equivalente* al proceso Y.

La razón por la que elegimos esta norma es por la siguiente propiedad de los procesos simples (Teorema 3.10 ítem 2)

$$\|I(X)\|_{L_T}^2 := E\Bigg(\left(\int_0^T X_s\mathrm{d}W_s\right)^2\Bigg) = E\left(\int_0^T X_s^2\mathrm{d}s\right) = \|X\|_T^2,$$

por la cual la aplicación

$$X \mapsto I(X)$$

restringida a los procesos simples (para los únicos que la hemos definido), resulta una isometría, llamada la *isometría de Itô.* Esta isometría es la que nos va a permitir definir la integral estocástica en todo el espacio $\mathbb{L}^2[0,T]$ recién definido. Para ello primero veremos que todo proceso $X \in \mathbb{L}^2[0,T]$ puede ser aproximado por procesos simples, para luego definir la integral estocástica de X como el valor límite de las integrales simples, el cual existirá y será único por la completitud de $L^2(\Omega)$ y la isometría mencionada.

Observación. Similarmente se define $\mathbb{L}^p[0,T]$ para $p \geq 1$.

Teorema 3.19. *Dado $X \in \mathbb{L}^p[0,T]$ $p \geq 1$, existe una sucesión X^m de procesos simples con*

$$\lim_{m\to\infty} E\left(\int_0^T (X_s - X_s^m)^p \,\mathrm{d}s\right) = 0.$$

Demostración. (1) Sea $X \in \mathbb{L}^p[0,T]$ continuo y acotado.
Tomemos

$$X_t^m(\omega) := X_0(\omega) \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{m} X_{(i-1)T/m} \cdot 1_{((i-1)T/m,iT/m]}(t).$$

Luego $X_t^m(\omega) \xrightarrow{m\to\infty} X(\omega)$ para todo $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$. Y la convergencia deseada queda como consecuencia del teorema de convergencia dominada.

(2) Sea $X \in \mathbb{L}^p[0,T]$ ahora acotada nomas.
Sea $G_t(\omega) := \int_0^t X_s(\omega)\mathrm{d}s$, la cual, por la Observación 3.16 (3), es medible $\mathcal{F}_t$. Luego para $m \in \mathbb{N}$, m suficientemente grande tal que $t - 1/m \geq 0$, el proceso

$$\tilde{X}_t^m := \frac{G_t(\omega) - G_{t-1/m}(\omega)}{1/m}$$

es continuo y acotado. Luego, por el Teorema 3.17, resulta progresivamente medible, y así pertenece a $\mathbb{L}^p[0,T]$.
Por el teorema de Diferenciación de Lebesgue tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{X}_t^m(\omega) = X_t(\omega)$$

para $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$ salvo un conjunto de medida $\lambda \otimes P$ nula.
Luego, por el Teorema de convergencia mayorada,

$$E\left(\int_0^T \left(\tilde{X}_t^m - X_t\right)^p \mathrm{d}t\right) \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Con lo que, por (1), podemos elegir una sucesión $X^n := X^{m_n}$ de procesos simples con

$$E\left(\int_0^T |X_t^n - X_t|^p \,\mathrm{d}t\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(3) Sea ahora $X \in \mathbb{L}^p[0,T]$ cualquiera.

Definamos

$$\tilde{X}_t^m(\omega) := X_t(\omega) \cdot 1_{(|X_t| \leq m)}(\omega).$$

Estos procesos están acotados y como $\left|\tilde{X}_t^m\right| \leq |X_t|$, por el teorema de convergencia dominada

$$E\left(\int_0^T \left|\tilde{X}_t^m - X_t\right|^p \mathrm{d}t\right) \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Luego, por 2 podemos elegir una sucesión $X^n := X^{m_n}$ de procesos simples con

$$E\left(\int_0^T |X_t^n - X_t|^p \mathrm{d}t\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

como queríamos probar.

□

Definición 3.20. Sea $X \in \mathbb{L}^2[0,T]$ y $\{X^m\}$ una sucesión de procesos simples tales que $\|X - X^m\|_T \to 0$. Luego definimos la *integral estocástica* o la *integral de Itô* como

$$I_t(X) := \int_0^t X_s \mathrm{d}W_s := \lim_{m\to\infty} \int_0^t X_s^m \mathrm{d}W_s \quad \text{para } 0 \leq t \leq T,$$

donde el límite es tomado en $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$.

Proposición 3.21. *La integral estocástica está bien definida.*

Demostración. Por la isometría de Itô

$$\|I_t(X^m) - I_t(X^n)\|_{L_t} = \|I_t(X^m - X^n)\|_{L_t} = \|X^m - X^n\|_t \quad \text{para } 0 \leq t \leq T,$$

con lo cual $I_t(X^m)$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ y por lo tanto existe su límite $I_t(X)$ en el espacio.

Veamos ahora que el límite $I_t(X)$ es independiente de la sucesión aproximante. En efecto, si $X^m, Y^m \in \mathbb{L}^2[0,T]$, $m \geq 1$ son procesos simples con

$$\|X - X^m\|_T \to 0 \qquad\qquad \|X - Y^m\|_T \to 0,$$

y $I_t(X)$, $I_t'(X)$ son los límites en $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ de $I_t(X^m)$ y $I_t'(Y^m)$ respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}
\|I_t(X) - I_t'(X)\|_{L_t} &\leq \overbrace{\|I_t(X) - I_t(X^m)\|_{L_t}}^{A:=} + \overbrace{\|I_t'(X) - I_t(Y^m)\|_{L_t}}^{B:=} \\
&\quad + \|I_t(X^m) - I_t(Y^m)\|_{L_t} \\
&= A + B + \|X^m - Y^m\|_t \\
&\leq A + B + \|X^m - X\|_t + \|Y^m - X\|_t \xrightarrow{m\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Con lo cual $I_t(X) = I_t'(X)\, a.s.\, P$. □

3.3. Propiedades de la Integral.

Observación 3.22. $\{I_t(X), \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ es un proceso estocástico.

Teorema 3.23. *Sea* $X \in \mathbb{L}^2[0,T]$. *Luego*

(1) $\{I_t(X), \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ *es una martingala. En particular, vale que*
$$E(I_t(X)) = E(E(I_t(X)|\mathcal{F}_0)) = E(I_0(X)) = 0$$
para todo $t \in [0,T]$.

(2) $I_t(X)$ *tiene caminos muestrales continuos, más precisamente, existe una modificación de* $I_t(X)$, $J_t(X)$ *con caminos continuos a.s.* P.

Demostración. Sea $\{X^m\}$ una sucesión de procesos simples tales que $\|X - X^m\|_T \to 0$.

(1) Sean $s, t \in [0,T]$, $t > s$. Como la integral estocástica para procesos simples es una martingala, tenemos que $E\left(I_t(X^m)|\mathcal{F}_s\right) = I_s(X^m) \quad$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Osea
$$\int_A I_t(X^m)\mathrm{d}P = \int_A I_s(X^m)\mathrm{d}P \quad \text{para todo } A \in \mathcal{F}_s \text{ y } m \in \mathbb{N}.$$
Pero, como $I_t(X^m) \xrightarrow{m\to\infty} I_t(X)$ en $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, tenemos
$$\int_A I_t(X^m)\mathrm{d}P \xrightarrow{m\to\infty} \int_A I_t(X)\mathrm{d}P$$
y
$$\int_A I_s(X^m)\mathrm{d}P \xrightarrow{m\to\infty} \int_A I_s(X)\mathrm{d}P.$$
Entonces
$$\int_A I_t(X)\mathrm{d}P = \int_A I_s(X)\mathrm{d}P \quad \text{para todo } A \in \mathcal{F}_s.$$
Y como $I_s(X)$ es medible $\mathcal{F}_s$ tenemos que se verifica la identidad martingal: $E(I_t(X)|\mathcal{F}_s) = I_S(X) \quad a.s.\,P$.

(2) Como $I(X^m)$ son martingalas, $I(X^n) - I(X^m)$ también lo son, con lo cual $|I(X^m) - I(X^n)|^2$ es una submartingala. La desigualdad martingal (Ver Teorema 2.13) entonces implica
$$\begin{aligned}
P\left(\max_{0\le t\le T} |I_t(X^n) - I_t(X^m)| > \epsilon\right) &= P\left(\max_{0\le t\le T} |I_t(X^n) - I_t(X^m)|^2 > \epsilon^2\right) \\
&\le \frac{1}{\epsilon^2} E\left(|I_T(X^n) - I_T(X^m)|^2\right) \\
&= \frac{1}{\epsilon^2} E\left(\int_0^T |X_t^n - X_t^m|^2 \mathrm{d}t\right). \\
&= \frac{1}{\epsilon^2} \|X^n - X^m\|_T^2
\end{aligned}$$

Tomemos entonces $\epsilon = 1/k^2$. Entonces existe n_k tal que

$$\begin{aligned} P\left(\max_{0\leq t\leq T} |I_t(X^n) - I_t(X^m)| > \frac{1}{k^2}\right) &\leq k^4 \left\|X^n - X^m\right\|_T^2 \\ &\leq \frac{1}{k^3} \quad \text{para } m, n \geq n_k. \end{aligned}$$

Podemos asumir $n_{k+1} > n_k > \dots$. Sea

$$A_k := \left\{\max_{0\leq t\leq T} |I_t(X^{n_k}) - I_t(X^{n_{k+1}})| > \frac{1}{k^2}\right\}.$$

Luego

$$P(A_k) \leq \frac{1}{k^3}.$$

Por lo que, gracias al Lema de Borel Cantelli, $P(A_k \text{ infinitas veces}) = 0$, o sea que para casi todo ω

$$\max_{0\leq t\leq T} |I_t(X^{n_k}) - I_t(X^{n_{k+1}})| \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{para } k \geq k_0(\omega).$$

Luego $I_t(X^{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} J_t$ uniformemente en $[0,T]$ *a.s.*, y por lo tanto, J_t tiene caminos continuos *a.s.*. Pero como $I_t(X^{n_k}) \to I_t(X)$ en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, por unicidad *a.s.* del límite concluimos $I_t(X) = J_t$ *a.s.*, o sea que J_t no es más que una modificación de $I_t(X)$.

□

Propiedades 3.24. *Sean $X, Y \in \mathbb{L}^2[0,T]$. Luego*

a) $\|I_t(X)\|_{L_t}^2 = E\left(I_t(X)^2\right) = E\left(\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s\right) = \|X\|_t^2$ *para todo* $0 \leq t \leq T$.

b) *Linealidad de la integral estocástica.*

$$I_t(aX + bY) = aI_t(X) + bI_t(Y) \quad \textit{para } a, b \in \mathbb{R}.$$

Demostración. a) Si $\{X^m\}$ una sucesión de procesos simples tales que $\|X - X^m\|_T \to 0$, entonces $I_t(X^m) \to I_t(X)$ en $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Luego, por la continuidad de la norma y la correspondiente propiedad para procesos simples (Ver Teorema 3.10)

$$E\left(I_t(X)^2\right) = \lim_{m\to\infty} E\left(I_t(X^m)^2\right) = \lim_{m\to\infty} E\left(\int_0^t (X_s^m)^2 \mathrm{d}s\right) = E\left(\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s\right),$$

como queríamos ver.

b) Se prueba de forma similar al ítem anterior, usando las aproximaciones por procesos simples y la propiedad de linealidad ya vista para estos procesos.

□

Observación 3.25. La aplicación

$$X \mapsto I(X)$$

recién definida resulta ser una aplicación lineal continua del espacio $\mathbb{L}^2[0,T]$ al espacio de martingalas continuas en $[0,T]$ con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ que satisface

(1) Es una extensión de la integral estocástica definida para procesos simples.
(2) $E\left(I_t(X)^2\right) = E\left(\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s\right)$.

Además, esta aplicación es única salvo indistinguibilidad de las imágenes, o sea, si J es otra aplicación que verifica (1) y (2), entonces para todo $X \in \mathbb{L}^2[0,T]$, los procesos $I(X)$ y $J(X)$ son indistinguibles.

Demostración. (De la unicidad). Es básicamente una consecuencia de la continuidad de la aplicación y de la densidad de los procesos simples en $\mathbb{L}^2[0,T]$.

Supongamos J otra aplicación y sea $X \in \mathbb{L}^2[0,T]$. Sean X^m procesos simples tales que $X^m \to X$ en $\mathbb{L}^2[0,T]$. Luego

$$J_t(X) = J_t\left(\lim_{m\to\infty} X^m\right) = \lim_{m\to\infty} J_t(X^m) = \lim_{m\to\infty} I_t(X^m) = I_t(X) \quad \text{a.s. } P$$

para todo $t \in [0,T]$. Luego, como tanto $J_t(X)$ como $I_t(X)$ son procesos continuos, concluimos su indistinguibilidad por el Teorema 2.7. □

3.4. Generalización de la Integral Estocástica a Varias Variables.

Definición 3.26. Sea, para $p \geq 1$,

$$\mathbb{L}^p_{n\times m}[0,T] = \big\{(\mathbf{X}(t), \mathcal{F}_t)\}_{t\in[0,T]} \text{ procesos de dimensión } n\times m \\ \mid X_{i,j} \in \mathbb{L}^p[0,T]\big\}$$

Definición 3.27. Sea $\mathbf{X}_t \in \mathbb{L}^2_{n\times m}[0,T]$. Definimos la integral de Itô, con respecto a $\mathbf{W}_t$ (de dimensión m), como

$$\int_0^t \mathbf{X}(s)\mathrm{d}\mathbf{W}(s) := \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^m \int_0^t \mathbf{X}_{1,j}(s)\mathrm{d}W_j(s) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^m \int_0^t \mathbf{X}_{n,j}(s)\mathrm{d}W_j(s) \end{pmatrix} \qquad 0 \leq t \leq T,$$

donde los sumandos son integrales de Itô unidimensionales.

Proposición 3.28. (1) *Sea* $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^2_{1\times m}[0,T]$. *Luego, para* $j \neq l$,

$$E\left(\int_0^t X_j(s)\mathrm{d}W_j(s) \int_0^t X_l(s)\mathrm{d}W_l(s)\right) = 0.$$

(2) *Si* $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^2_{n\times m}[0,T]$ *entonces*

$$E\left(|\int_0^t \mathbf{X}(s)\mathrm{d}\mathbf{W}(s)|^2\right) = E\left(\int_0^t |\mathbf{X}(s)|^2 \mathrm{d}s\right) \text{ para todo } = 0 \leq t \leq T$$

donde $|\mathbf{X}(t)|^2 = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} X_{i,j}^2(t)$.

Demostración.

(1) Sean $\{Y^m\}$ y $\{Z^m\}$ dos sucesiones de procesos simples tales que $\|X_j - Y^m\|_{\mathbb{L}^2}$, $\|X_l - Z^m\|_{\mathbb{L}^2} \to 0$. Sabemos de la Proposición 3.11 que

$$E\left(\int_0^t Y^m(s)\mathrm{d}W_j(s)\int_0^t Z^m(s)\mathrm{d}W_l(s)\right) = 0.$$

Pero como

$$\int_0^t Y^m(s)\mathrm{d}W_j(s) \to \int_0^t X_j(s)\mathrm{d}W_j(s) \qquad \int_0^t Z^m(s)\mathrm{d}W_l(s) \to \int_0^t X_l(s)\mathrm{d}W_l(s)$$

en $L^2(\Omega)$ entonces

$$\int_0^t Y^m(s)\mathrm{d}W_j(s)\int_0^t Z^m(s)\mathrm{d}W_l(s) \to \int_0^t X_j(s)\mathrm{d}W_j(s)\int_0^t X_l(s)\mathrm{d}W_l(s)$$

en $L^1(\Omega)$, por lo cual

$$\begin{aligned} E&\left(\int_0^t X_j(s)\mathrm{d}W_j(s)\int_0^t X_l(s)\mathrm{d}W_l(s)\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} E\left(\int_0^t Y^m(s)\mathrm{d}W_j(s)\int_0^t Z^m(s)\mathrm{d}W_l(s)\right) = 0 \end{aligned}$$

como queríamos ver.

(2) Basta verlo para $n = 1$.

$$\begin{aligned} E\left(\left(\int_0^t \mathbf{X}(s)\mathrm{d}\mathbf{W}(s)\right)^2\right) &= E\left(\left(\sum_{j=1}^m \int_0^t X_j(s)\mathrm{d}W_j(s)\right)^2\right) \\ &= \sum_{j,l=1}^m E\left(\int_0^t X_j(s)\mathrm{d}W_j(s)\int_0^t X_l(s)\mathrm{d}W_l(s)\right) \\ &\quad \text{(por la parte (1))} \\ &= \sum_{j=1}^m E\left(\left(\int_0^t X_j(s)\mathrm{d}W_j(s)\right)^2\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \int_0^t X_j^2(s)\mathrm{d}s = \int_0^t |\mathbf{X}(s)|^2\mathrm{d}s \end{aligned}$$

como queríamos ver.

□

3.5. Sumas de Riemann y la Integral de Itô. En lo que sigue veremos algunos ejemplos de procesos $X_t \in \mathbb{L}^2[0,T]$ para los cuales $I_t(X)$ se lo puede obtener como límite de las sumas de Riemann. Esto, en particular, permitirá ver que las sumas de Riemann calculadas en el Lema 3.5 para el proceso $W_t \in \mathbb{L}^2[0,T]$, efectivamente corresponden a la integral de Itô definida hasta aquí..

Para este fin primero extenderemos nuestra definición de proceso simple para abarcar a procesos no acotados.

Definición 3.29. Un proceso estocástico $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ será llamado un *proceso simple* si existen $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = T$, $p \in \mathbb{N}$ y variables aleatorias Φ_i medibles $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ $i = 1, \ldots, p$ y Φ_0 medible $\mathcal{F}_0$ tales que $E(\Phi_i^2) < \infty$ $i = 0, 1, \ldots, p$ de modo que $X_t(\omega)$ se pueda escribir como

$$X_t(\omega) = X(t,\omega) = \Phi_0(\omega)\cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i(\omega)\cdot 1_{(t_{i-1},t_i]}(t).$$

Lema 3.30. *Si X es un proceso simple entonces $X \in \mathbb{L}^2[0,T]$ y*

$$I_t(X) = \int_0^t X_s \mathrm{d}W_s = \sum_{i=1}^{p} \Phi_i \left(W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}\right).$$

Demostración. Para ver que $X \in \mathbb{L}^2[0,T]$ observar que

$$E\left(\int_0^T X_t^2 \mathrm{d}t\right) = E\left(\sum_{i=1}^{p}\int_{(t_{i-1},t_i]} \Phi_i^2 \mathrm{d}t\right) = \sum_{i=1}^{p} E(\Phi_i^2)(t_i - t_{i-1}) < \infty.$$

Sean ahora

$$\Phi_i^m(\omega) = \Phi_i(\omega)\cdot 1_{(|\Phi_i|\le m)}(\omega)$$
$$X_t^m = X^m(t,\omega) = \Phi_0^m(\omega)\cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i^m(\omega)\cdot 1_{(t_{i-1},t_i]}(t).$$

X_t^m son procesos simples acotados y como $|X_t^m| \le |X_t|$, por el teorema de convergencia dominada

$$E\left(\int_0^T (X_t - X_t^m)^2 \mathrm{d}t\right) \to 0.$$

Luego $\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s = \lim_{m\to\infty}\int_0^t X_s^m \mathrm{d}W_s$ en $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Pero, para todo ω

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^t X_s^m \mathrm{d}W_s = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{p}\Phi_i^m(W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}) = \sum_{i=1}^{p}\Phi_i(W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}).$$

Luego,

$$\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s = \sum_{i=1}^{p}\Phi_i(W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}) \quad a.s.,$$

como queríamos probar. □

Teorema 3.31. *Sea $X \in \mathbb{L}^2[0,T]$. Si X es continuo y $E\left(\max_{0\le s\le T}|X_s|^2\right) < \infty$ entonces existe el límite de las sumas de Riemann para $\lambda = 0$ y coincide con la integral estocástica, osea, si $\tau_i = t_{i-1}$*

$$\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s = \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{p} X_{\tau_i}(W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}) \quad \text{para } 0 \le t \le T,$$

donde el límite es tomado en $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$.

Demostración. Dado que

$$\sum_{i=1}^{p} X_{\tau_i}(W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}) = \int_0^t X_s^P \mathrm{d}W_s,$$

donde X_t^P es el proceso simple

$$X_t^P(\omega) = X_0(\omega) \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{p} X_{t_{i-1}} \cdot 1_{(t_{i-1},t_i]}(t),$$

hay que ver que

$$\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s = \lim_{|P|\to 0} \int_0^t X_s^P \mathrm{d}W_s \quad \text{para } 0 \leq t \leq T.$$

Luego, por la continuidad de la aplicación integral, basta probar que

$$E\left(\int_0^T |X_t - X_t^P|^2 \mathrm{d}t\right) \to 0.$$

Por la continuidad tenemos $X_t^P(\omega) \xrightarrow[|P|\to 0]{} X_t(\omega)$ para todo $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$ y como X_t^P y X_t están mayoradas por $Y_t(\omega) = Y(\omega) = \max_{0\leq s\leq T} |X_s(\omega)|$ y $E\left(\int_0^T Y_t^2 \mathrm{d}t\right) = TE(Y^2) < \infty$ concluimos, por el teorema de convergencia mayorada, que

$$E\left(\int_0^T |X_t - X_t^P|^2 \mathrm{d}t\right) \to 0,$$

como queríamos ver. □

Corolario 3.32. *Sea $X \in \mathbb{L}^2[0,T]$ con caminos continuos. Si*

- *X está acotada ó*
- *X es una martingala con $E(X_T^2) < \infty$ entonces, si $\tau_i = t_{i-1}$*

$$\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{p} X_{\tau_i}(W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}) \quad \textit{para } 0 \leq t \leq T,$$

donde el límite es tomado en $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$.

Demostración. Basta ver que en ambos casos se verifica $E\left(\max_{0\leq s\leq T} |X_s|^2\right) < \infty$.

Si X está acotada es trivial. Si X es una martingala continua tenemos, por la desigualdad martingal (ver Teorema 2.13), que

$$E\left(\max_{0\leq s\leq T} |X_s|^2\right) \leq 2^2 E\left(|X_T|^2\right) < \infty,$$

como queríamos ver. □

Ejemplo 3.33. $W_t \in \mathbb{L}^2[0,T]$ puesto que es continua y $E\left(\int_0^T W_t^2 \mathrm{d}t\right) = \int_0^T E\left(W_t^2\right) \mathrm{d}t = \int_0^T t\mathrm{d}t = \frac{T^2}{2}$ y como además es una martingala con $E\left(W_T^2\right) = T < \infty$ entonces, por el Lema 3.5,

$$\begin{aligned}\int_0^T W_s \mathrm{d}W_s &= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^p W_{\tau_i}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \\ &= \frac{W_T^2}{2} - \frac{1}{2}T.\end{aligned}$$

como dijimos que íbamos a mostrar.

3.6. Extensión de la Integral de Itô a $\mathbb{M}(0,T)$. En las secciones siguientes necesitaremos integrar en un conjunto más amplio que $\mathbb{L}^2(0,T)$ que definimos ahora.

Definición 3.34. Sea

$$\mathbb{M}^2[0,T] := \Big\{ \{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in[0,T]} \text{ procesos a valores reales}$$
$$|X_t \text{ es progresivamente medible, } \int_0^T X_t^2 \mathrm{d}t < \infty \text{ a.s.} \Big\}$$

Es posible extender la integral a este espacio pero debido a la dificultad de este resultado no lo veremos aquí (Ver [FRIED] o [GI/SK]) . La extensión dice algo así:

Sea $X \in \mathbb{M}^2(0,T)$. Si $X^n \in \mathbb{M}(0,T)$ son procesos simples (no necesariamente en $\mathbb{L}^2(0,T)$) tales que

$$\int_0^T (X - X^n)^2 \mathrm{d}t \to 0 \quad \text{a.s.}$$

entonces existe el límite *en probabilidad* de las $\int_0^T X^n \mathrm{d}W$ y se define

$$\int_0^T X\mathrm{d}W := \lim_{n\to\infty} \int_0^T X^n \mathrm{d}W.$$

Esta extensión amplia consideradamente el conjunto de procesos X_t para los que $I_t(X)$ es el límite de sus sumas de Riemann ya que ahora, si $X_t \in \mathbb{M}^2(0,T)$ verifica tan solo ser continuo *a.s.* entonces fácilmente se ve que

$$\sum_{i=1}^p X_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \longrightarrow \int_0^T X_s \mathrm{d}W_s \quad \text{en probabilidad.}$$

4. La Fórmula de Itô

Suposición general para esta sección:
Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad completo. Sea $\mathcal{F}_t$ una filtración Browniana asociada al movimiento Browniano $\mathbf{W}_t$ de dimensión m.

Definición 4.1. Diremos que $\{X(t), \mathcal{F}_t)\}_{t\in[0,T]}$ es un *proceso de Itô* a valores reales si para todo $T \geq t \geq 0$ admite la representación

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + \int_0^t F(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \mathbf{G}(s)\mathrm{d}\mathbf{W}_s \\ &= X(0) + \int_0^t F(s)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^m \int_0^t G_j(s)\mathrm{d}W_j(s), \end{aligned}$$

donde $X(0)$ es medible $\mathcal{F}_0$, y $\{F(t)\}_{t\in[0,T]}$ y $\{\mathbf{G}(t)\}_{t\in[0,T]}$ (de dimensión m) son procesos progresivamente medibles tales que

$$\int_0^T |F(s)|\mathrm{d}s < \infty \qquad\qquad \int_0^T G_j^2(s)\mathrm{d}s < \infty \; 1 \leq j \leq m \quad a.s.$$

En tal caso usaremos la siguiente notación diferencial simbólica

$$\mathrm{d}X(t) = F(t)\mathrm{d}t + \mathbf{G}(t)\mathrm{d}\mathbf{W}(t).$$

Observación 4.2. Los procesos de Itô son continuos *a.s.*.

Si fuese $G_j(t) \in \mathbb{L}^2[0,T]$ la integral estocástica queda continua como vimos en el Teorema 3.23. Pero el resultado vale aún si $G_j(t) \in \mathbb{M}^2[0,T]$ (no lo veremos aquí). Con respecto a $\int_0^t F_s \mathrm{d}s$ la continuidad es un resultado ya conocido.

Notación 4.3. Sea X un proceso de Itô a valores reales e Y un proceso progresivamente medible. Notaremos

$$\int_0^T Y(s)\mathrm{d}X_s := \int_0^T Y(s)\cdot F(s)\mathrm{d}s + \int_0^T Y(s)\cdot \mathbf{G}(s)\mathrm{d}\mathbf{W}_s$$

si todas las integrales en la derecha están definidas.

Lema 4.4. Tres diferenciales estocásticos sencillos.

(i) $\mathrm{d}\left((W(t) - W(r))^2\right) = 2(W(t) - W(r))\mathrm{d}W + \mathrm{d}t \quad t \geq r$
(ii) $\mathrm{d}\left((t-r)(W(t) - W(r))\right) = (W(t) - W(r))\mathrm{d}t + (t-r)\mathrm{d}W \quad t \geq r$
(iii) *Si W_t $\tilde{W}_t$ son dos movimientos brownianos independientes definidos en $\mathcal{F}_t$ entonces, para $t \geq r$,*

$$\mathrm{d}\Big((W(t) - W(r))(\tilde{W}(t) - \tilde{W}(r))\Big) = (W(t) - W(r))\mathrm{d}\tilde{W} + (\tilde{W}(t) - \tilde{W}(r))\mathrm{d}W$$

Demostración.

(I)

$$2\int_r^t (W(s)-W(r))\mathrm{d}W + (t-r) =$$

$$2(\int_r^t W(s)\mathrm{d}W - \int_r^t W(r)\mathrm{d}W) + (t-r) =$$

$$W^2(t) - W^2(r) - 2(W(t)-W(r))W(r) = (W(t)-W(r))^2$$

(II) Sea $\tilde{W} = W(t) - W(r)$. Notar que

$$\begin{aligned}\int_r^t (s-r)\mathrm{d}W &= \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{p}(s_{i-1}-r)(W(s_i)-W(s_{i-1}))\\ &= \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{p}(s_{i-1}-r)(\tilde{W}(s_i)-\tilde{W}(s_{i-1}))\end{aligned}$$

donde el límite es tomado en $L^2(\Omega)$, pero tomando una subsucesión tenemos que el limite es puntual *a.s.*. Además, como $\tilde{W}(t)$ es continuo *a.s.*

$$\int_r^t \tilde{W}(s)\mathrm{d}s = \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{p}\tilde{W}(s_i)(s_i - s_{i-1}) \quad a.s..$$

Luego, sumando las igualdades, tenemos

$$\begin{aligned}&\int_r^t (s-r)\mathrm{d}W + \int_r^t \tilde{W}(s)\mathrm{d}s\\ &= \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{p}\tilde{W}(s_i)(s_i-s_{i-1}) + (s_{i-1}-r)(\tilde{W}(s_i)-\tilde{W}(s_{i-1}))\\ &= (t-s)(W(t)-W(r)) \quad a.s.\end{aligned}$$

como queríamos ver.

(III) Veámoslo primero para $r=0$, o sea que

$$\mathrm{d}(W\tilde{W}) = W\mathrm{d}\tilde{W} + \tilde{W}\mathrm{d}W.$$

Tenemos que

$$\int_0^t W\mathrm{d}\tilde{W} = \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{p} W(s_{i-1})(\tilde{W}(s_i)-\tilde{W}(s_{i-1}))$$

$$\int_0^t \tilde{W}\mathrm{d}W = \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{p} \tilde{W}(s_{i-1})(W(s_i)-W(s_{i-1})),$$

donde el límite es tomado en $L^2(\Omega)$. Luego,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t W \mathrm{d}\tilde{W} + \int_0^t \tilde{W} \mathrm{d}W \\
= & \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^p W(s_{i-1})(\tilde{W}(s_i) - \tilde{W}(s_{i-1})) + \sum_{i=1}^p \tilde{W}(s_{i-1})(W(s_i) - W(s_{i-1})) \\
= & \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^p W(s_{i-1})(\tilde{W}(s_i) - \tilde{W}(s_{i-1})) + \sum_{i=1}^p \tilde{W}(s_i)(W(s_i) - W(s_{i-1})) \\
& - \sum_{i=1}^p (\tilde{W}(s_i) - \tilde{W}(s_{i-1}))(W(s_i) - W(s_{i-1})) \\
= & W(t)\tilde{W}(t) - \lim_{|P|\to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^p (\tilde{W}(s_i) - \tilde{W}(s_{i-1}))(W(s_i) - W(s_{i-1}))}_{B:=}.
\end{aligned}$$

Veamos entonces que $B \to 0$.

Por independencia

$$\begin{aligned}
E&\Big((\tilde{W}(s_i) - \tilde{W}(s_{i-1}))(W(s_i) - W(s_{i-1}))\Big) \\
&= E(\tilde{W}(s_i) - \tilde{W}(s_{i-1}))E(W(s_i) - W(s_{i-1})) = 0,
\end{aligned}$$

luego $E(B) = 0$. Similarmente

$$\begin{aligned}
Var&\Big((\tilde{W}(s_i) - \tilde{W}(s_{i-1}))(W(s_i) - W(s_{i-1}))\Big) \\
&= E\Big(\big((\tilde{W}(s_i) - \tilde{W}(s_{i-1}))(W(s_i) - W(s_{i-1}))\big)^2\Big) \\
&= E\big((\tilde{W}(s_i) - \tilde{W}(s_{i-1}))^2\big)E\big((W(s_i) - W(s_{i-1}))^2\big) \\
&= (s_i - s_{i-1})^2.
\end{aligned}$$

Luego, por independencia de los sumandos

$$Var(B) = \sum_{i=1}^p (s_i - s_{i-1})^2 \leq |P|t \xrightarrow[|P|\to 0]{} 0.$$

Luego $B \to 0$ como queríamos ver.

Veamos ahora la cuenta para cualquier $r \geq 0$.

$$\begin{aligned}
&\int_r^t (W(s) - W(r))\mathrm{d}\tilde{W} + \int_r^t (\tilde{W}(t) - \tilde{W}(r))\mathrm{d}W \\
= & \int_r^t W(s)\mathrm{d}\tilde{W}(s) + \int_r^t \tilde{W}(s)\mathrm{d}W(s) - \int_r^t W(r)\mathrm{d}\tilde{W}(s) - \int_r^t \tilde{W}(r)\mathrm{d}\tilde{W}(s) \\
= & W(t)\tilde{W}(t) - W(s)\tilde{W}(s) - W(r)(\tilde{W}(t) - \tilde{W}(r)) - \tilde{W}(r)(W(t) - W(r)) \\
= & (W(t) - W(r))(\tilde{W}(t) - \tilde{W}(r))
\end{aligned}$$

□

Conclusión 4.5. Si $\mathbf{W}(t)$ es un movimiento Browniano de dimensión m definido en $\mathcal{F}_t$ entonces

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\left((W_i(t)-W_i(r))(W_j(t)-W_j(r))\right)\\ &\qquad\qquad\qquad = (W_i(t)-W_i(r))\mathrm{d}W_j(t)+(W_j(t)-W_i(r))\mathrm{d}W_i(t)+\delta_{i,j}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\forall\, 1 \leq i, j \leq m.$

Teorema 4.6. Regla del Producto o Fórmula de Integración por Partes.

Sean $X_1(t)$ y $X_2(t)$ procesos de Itô con

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_1 &= F_1\mathrm{d}t+\mathbf{G}_1\mathrm{d}\mathbf{W}\\ \mathrm{d}X_2 &= F_2\mathrm{d}t+\mathbf{G}_2\mathrm{d}\mathbf{W}\end{aligned}\qquad 0\leq t\leq T$$

Entonces

$$\mathrm{d}(X_1X_2)=X_2\mathrm{d}X_1+X_1\mathrm{d}X_2+\mathbf{G}_1\mathbf{G_2}\mathrm{d}t,$$

o sea

$$\int_r^t X_2(s)\mathrm{d}X_1(s)=X_1(t)X_2(t)-X_1(r)X_2(r)-\int_r^t X_1(s)\mathrm{d}X_2(s)-\int_r^t \mathbf{G_1}(s)\mathbf{G_2}(s)\mathrm{d}t.$$

$\forall\, 0\leq r\leq t\leq T.$

Demostración.

Caso 1. Supongamos por simplicidad $F_i(t)=F_i$, $\mathbf{G}_i(t)=\mathbf{G}_i$ en $(r,q]$ e igual a cero fuera, donde F_i, $\mathbf{G}_i$ son vectores aleatorios acotados independientes del tiempo y medibles $\mathcal{F}_r$ $(i=1,2)$. Luego

$$X_i(t)=X_i(r)+F_i\cdot(t-r)+\mathbf{G}_i\cdot(\mathbf{W}(t)-\mathbf{W}(r))\quad \text{para } q\geq t\geq r.$$

Luego

$$\begin{aligned}&\int_r^t X_2\mathrm{d}X_1+X_1\mathrm{d}X_2+\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2\mathrm{d}s\\
&= \int_r^t X_2F_1+X_1F_2\mathrm{d}s+\int_r^t X_2\mathbf{G}_1+X_1\mathbf{G}_2\mathrm{d}\mathbf{W}+\int_r^t\mathbf{G}_1\mathbf{G_2}\mathrm{d}s\\
&= \int_r^t\left[X_2(r)+F_2\cdot(s-r)+\mathbf{G}_2\cdot(\mathbf{W}(s)-\mathbf{W}(r))\right]F_1\\
&\quad+\left[X_1(r)+F_1\cdot(s-r)+\mathbf{G}_1\cdot(\mathbf{W}(s)-\mathbf{W}(r))\right]F_2\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_r^t\left[X_2(r)+F_2\cdot(s-r)+\mathbf{G}_2\cdot(\mathbf{W}(s)-\mathbf{W}(r))\right]\mathbf{G}_1\\
&\quad+\left[X_1(r)+F_1\cdot(s-r)+\mathbf{G}_1\cdot(\mathbf{W}(s)-\mathbf{W}(r))\right]\mathbf{G}_2\mathrm{d}\mathbf{W}(s)+\int_r^t\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
= \;& X_2(r)F_1 \cdot (t-r) + X_1(r)F_2 \cdot (t-r) + X_2(r)\mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(r)) \\
& + X_1(r)\mathbf{G}_2 \cdot (\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(r)) + F_1F_2 \cdot (t-r)^2
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
& + \int_r^t \mathbf{G}_2 \cdot (\mathbf{W}(s) - \mathbf{W}(r))F_1 \mathrm{d}s + \int_r^t \mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{W}(s) - \mathbf{W}(r))F_2 \mathrm{d}s \\
& + \int_r^t F_2 \cdot (s-r)\mathbf{G}_1 \mathrm{d}\mathbf{W}(s) + \int_r^t F_1 \cdot (s-r)\mathbf{G}_2 \mathrm{d}\mathbf{W}(s)
\end{aligned}
\right\} =: A
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
& + \int_r^t \mathbf{G}_2 \cdot (\mathbf{W}(s) - \mathbf{W}(r))\mathbf{G}_1 \mathrm{d}\mathbf{W}(s) \\
& + \int_r^t \mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{W}(s) - \mathbf{W}(r))\mathbf{G}_2 \mathrm{d}\mathbf{W}(s) + \int_r^t \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 \mathrm{d}s
\end{aligned}
\right\} =: B
$$

Analicemos A y B por separado.

$$
\begin{aligned}
A \;=\;& \int_r^t \sum_{i=1}^m G_2^i (W_i(s) - W_i(r))F_1 \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^m \int_r^t F_1 \cdot (s-r) G_2^i \mathrm{d}W_i(s) \\
& + \int_r^t \sum_{i=1}^m G_1^i (W_i(s) - W_i(r))F_2 \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^m \int_r^t F_2 \cdot (s-r) G_1^i \mathrm{d}W_i(s) \\
=\;& \sum_{i=1}^m (G_2^i F_1 + G_1^i \cdot F_2)[\int_r^t W_i(s) - W_i(r)\mathrm{d}s + \int_r^t (s-r)\mathrm{d}W_i(s)] \\
& \text{(por el Lema de recién)} \\
=\;& \sum_{i=1}^m (G_2^i F_1 + G_1^i \cdot F_2)[(t-r)(W_i(t) - W_i(r))] \\
=\;& F_1 \cdot (t-r)\mathbf{G}_2 \cdot (\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(r)) + F_2 \cdot (t-r)\mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(r))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B \;=\;& \int_r^t \left(\sum_{j=1}^m G_2^j (W_j(s) - W_j(r)) \right) \left(\sum_{i=1}^m G_1^i \mathrm{d}W_i(s) \right) + \\
& \int_r^t \left(\sum_{i=1}^m G_1^i (W_i(s) - W_i(r)) \right) \left(\sum_{j=1}^m G_2^j \mathrm{d}W_j(s) \right) + \int_r^t \sum_{i=1}^m G_1^i G_2^i \mathrm{d}t \\
=\;& \sum_{i,j=1}^m G_1^i G_2^j [\int_r^t (W_i(s) - W_i(r))\mathrm{d}W_j(s) \\
& + \int_r^t (W_j(s) - W_j(r))\mathrm{d}W_i(s) + \delta_{i,j}(t-r)] \\
& \text{(por la Conclusión recién vista)} \\
=\;& \sum_{i,j=1}^m G_1^i G_2^j (W_i(t) - W_i(r))(W_j(t) - W_j(r))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=1}^{m} G_1^i (W_i(t) - W_i(r)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} G_2^j (W_j(t) - W_j(r))\right) \\
&= \mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(r))\mathbf{G}_2 \cdot (\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(r))
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
&\int_r^t X_2 \mathrm{d}X_1 + X_1 \mathrm{d}X_2 + \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 \mathrm{d}s \\
&= X_2(r)F_1 \cdot (t-r) + X_1(r)F_2 \cdot (t-r) + X_2(r)\mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(r)) \\
&\quad + X_1(r)\mathbf{G}_2 \cdot (\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(r)) + F_1F_2 \cdot (t-r)^2 \\
&\quad + F_1 \cdot (t-r)\mathbf{G}_2 \cdot (\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(r)) + F_2 \cdot (t-r)\mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(r)) \\
&\quad + \mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(r))\mathbf{G}_2 \cdot (\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(r)) \\
&= X_1(t)X_2(t) - X_1(r)X_2(r)
\end{aligned}
$$

Caso 2. Si $F_i(t)$ y $\mathbf{G}_i(t)$ son procesos simples aplicamos el Caso 1 en cada intervalo $(t_{i-1}, t_i]$ donde $F_i(t)$ y $\mathbf{G}_i(t)$ son vectores aleatorios acotados constantes medibles $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$y sumamos las expresiones integrales resultantes.

Caso 3. En el caso general[3], elegimos procesos simples acotados $F_i^n \in \mathbb{L}^1[0,T]$, $G_i^{n,j} \in \mathbb{L}^2[0,T]$ $j = 1, \ldots, m$ con

$$
\|F_i^n - F_i\|_{\mathbb{L}^1} \to 0 \qquad \left\|G_i^{n,j} - G_i^j\right\|_{\mathbb{L}^2} \to 0 \; i = 1,2 \; j = 1, \ldots, m
$$

Sean entonces

$$
X_i^n(t) = X_i(0) + \int_0^t F_i^n(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \mathbf{G}_i^n \mathrm{d}\mathbf{W}(s) \quad i = 1,2.
$$

Usando el Caso 2 tenemos

$$
\int_r^t X_1^n \mathrm{d}X_2^n + X_2^n \mathrm{d}X_1^n + \mathbf{G}_1^n\mathbf{G}_2^n \mathrm{d}t = X_1^n(t)X_2^n(t) - X_1^n(r)X_2^n(r).
$$

Luego, pasando al límite[4] obtenemos la identidad buscada.

□

El siguiente lema nos servirá para probar la fórmula de Itô ya que lo probaremos para polinomios y luego usando el lema deduciremos el resultado general por aproximación.

Lema 4.7. *Sea $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. Luego existen $u_n : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$ polinomios tales que*

$$
u_n \to u \qquad \frac{\partial u_n}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad 1 \le i \le n
$$
$$
\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j} \to \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad 1 \le i,j \le n
$$

uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}^n \times [0,T]$.

[3]No tan general, por que trabajaremos en $\mathbb{L}^2[0,T]$ en lugar de $\mathbb{M}^2[0,T]$.

[4]Este paso al límite no lo justificamos debido a que no tenemos las herramientas necesarias para hacerlo, pero podemos notar que se utilizarán resultados (que no vimos) de paso al límite para la integral de procesos en $\mathbb{M}^2[0,T]$.

Demostración. Alcanza con probarlo para $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, sin embargo lo haremos bajo una hipótesis levemente más fuerte: $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ por el único fin de simplificar la notación de la demostración. La demostración está en el Apéndice A. $\square$

Teorema 4.8. Fórmula de Itô o Regla de la Cadena de Itô. *Sea X_t un proceso de Itô $0 \leq t \leq T$ con*

$$\mathrm{d}X_t = F_t \mathrm{d}t + \mathbf{G}_t \mathrm{d}\mathbf{W}_t.$$

Si $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,T])$ entonces $u(X_t,t)$ es un proceso de Itô y verifica

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(u(X_t,t)) &= \frac{\partial u}{\partial t}(X_t,t)\mathrm{d}t + \frac{\partial u}{\partial x}(X_t,t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t,t)\mathbf{G}_t^2 \mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial t}(X_t,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(X_{t,}t)F_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t,t)\mathbf{G}_t^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial u}{\partial x}(X_t,t)\mathbf{G}_t \mathrm{d}\mathbf{W},
\end{aligned}$$

o sea,

$$\begin{aligned}
u(X_t,t) - u(X_r,r) &= \int_r^t \frac{\partial u}{\partial t}(X_s,s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_s,s)\mathbf{G}_s \mathrm{d}s + \int_r^t \frac{\partial u}{\partial x}(X_s,s)\mathrm{d}X_s \\
&= \int_r^t \left(\frac{\partial u}{\partial t}(X_s,s) + \frac{\partial u}{\partial x}(X_{s,}s)F_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_s,s)\mathbf{G}_s^2\right)\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_r^t \frac{\partial u}{\partial x}(X_s,s)\mathbf{G}_s \mathrm{d}\mathbf{W}_s
\end{aligned}$$

Observación 4.9. Como X_t tiene caminos continuos *a.s.* entonces las funciones $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(X_t,t), \frac{\partial u}{\partial x}(X_t,t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t,t)$ son continuas y así las integrales en la fórmula de Itô están bien definidas.

Demostración. De la Fórmula de Itô.

Caso 1. Veamos que la fórmula es válida para polinomios en la variable x. Para ello veámoslo primero para polinomios $u(x,t) = x^m$, $m \geq 0$, o sea que

$$\mathrm{d}(X_t^m) = mX_t^{m-1}\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}m(m-1)X_t^{m-2}\mathbf{G}_t^2 \mathrm{d}t.$$

Esto es claro para $m = 0, 1$. Para $m = 2$ es consecuencia directa de la regla del producto. Usemos inducción. Supongamos que vale para m, entonces

$$\mathrm{d}(X_t^m) = mX_t^{m-1}F_t \mathrm{d}t + mX_t^{m-1}\mathbf{G}_t \mathrm{d}\mathbf{W}_t + \overbrace{\frac{1}{2}m(m-1)}^{a_m :=} X_t^{m-2}\mathbf{G}_t^2 \mathrm{d}t$$

luego, usando la regla del producto tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(X_t^{m+1}) &= \mathrm{d}(X_t^m X_t) \\
&= X_t \mathrm{d}(X_t^m) + X_t^m \mathrm{d}X_t + mX_t^{m-1}\mathbf{G}_t^2 \mathrm{d}t \\
&= X_t(mX_t^{m-1}\mathrm{d}X_t + a_m X_t^{m-2}\mathbf{G}_t^2 \mathrm{d}t) + X_t^m \mathrm{d}X_t + mX_t^{m-1}\mathbf{G}_t^2 \mathrm{d}t \\
&= (m+1)X_t^m \mathrm{d}X_t + a_{m+1}X_t^{m-1}\mathbf{G}_t^2 \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

pues $a_{m+1} = a_m + m$, con lo que queda probado.

Luego usando la linealidad de los procesos de Itô concluimos que la fórmula de Itô es válida para polinomios en la variable x como queríamos ver.

Caso 2. Veamos ahora que la fórmula es válida para $u(x,t)$ polinomio de dos variables.

Dada la linealidad ya mencionada alcanza con probarlo para funciones $u(x,t) = f(x)g(t)$ donde f y g son polinomios:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(u(X_t,t)) &= \mathrm{d}(f(X_t)g(t)) \\
& \text{(usando la regla del producto)} \\
&= f(X_t)dg(t) + g(t)\mathrm{d}f(X_t) \\
&= f(X_t)g'(t)\mathrm{d}t + g(t)\left(f'(X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\mathbf{G}_t^2\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(X_t,t)\mathrm{d}t + \frac{\partial u}{\partial x}(X_t,t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t,t)\mathbf{G}_t^2\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Con lo que queda probado.

Caso 3. Dado $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T])$ tomemos $u_n : \mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{R}$ polinomios como en el Lema 4.7 (con $n=1$). Por el caso 2 tenemos que

$$\begin{aligned}
u_n(X_t,t) - u_n(X_r,r) = \int_r^t \frac{\partial u_n}{\partial t}(X_s,s) + \frac{\partial u_n}{\partial x}(X_s,s)F_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(X_s,s)\mathbf{G}_s^2\mathrm{d}s \\
+ \int_r^t \frac{\partial u_n}{\partial x}(X_s,s)\mathbf{G}_s\mathrm{d}\mathbf{W}_s.
\end{aligned}$$

Luego, pasando al límite obtenemos la identidad deseada.

□

4.1. Fórmula de Itô Multidimensional.

Definición 4.10. Diremos que $\{\mathbf{X}(t),\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ es un proceso de Itô n-dimensional si $\mathbf{X} = (X_1,\dots,X_n)$ tiene como componentes procesos de Itô a valores reales, o sea si para todo $T \geq t \geq 0$ $\mathbf{X}(t)$ admite la representación

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(0) + \int_0^t \mathbf{F}(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \mathbf{G}(s)\mathrm{d}\mathbf{W}(s)$$

donde $\mathbf{X}(0)$ es medible $\mathcal{F}_0$ y $\{\mathbf{F}(t)\}_{t\in[0,T]}$ y $\{\mathbf{G}(t)\}_{t\in[0,T]}$ son procesos progresivamente medibles de dimensiones n y $n\times m$ respectivamente tales que

$$\int_0^T |F_i|\mathrm{d}s < \infty \qquad\qquad \int_0^T G_{i,j}^2\mathrm{d}s < \infty \quad a.s..$$

En tal caso usaremos la notación diferencial simbólica

$$\mathrm{d}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t)\mathrm{d}t + \mathbf{G}(t)\mathrm{d}\mathbf{W}(t).$$

Teorema 4.11. Fórmula de Itô Multidimensional. *Sea* $\mathbf{X}_t$ *un proceso de Itô n-dimensional con*

$$\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathrm{d}t + \mathbf{G}\mathrm{d}\mathbf{W}.$$

Si $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *entonces* $u(\mathbf{X}, t)$ *es un proceso de Itô a valores reales y verifica*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(u(\mathbf{X}, t)) &= \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{X}, t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{X}, t)\mathrm{d}X_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{X}, t)\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j\mathrm{d}t \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{X}, t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{X}, t)\mathrm{d}X_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{X}, t)\sum_{l=1}^{m} G_{i,l}G_{j,l}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Demostración. *Caso* 1. Veamos que la fórmula es válida para polinomios en la variable $\mathbf{x}$: $u(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x})$. Para ello usemos inducción en el número l de variables de las que dependerá u.

Analicemos entonces $l = 1$. En tal caso tenemos $u(\mathbf{x}) = u(x_k)$ para algún $1 \leq k \leq n$. Como X_k es un proceso de Itô unidimensional a valores reales con

$$\mathrm{d}X_k = F_k\mathrm{d}t + \mathbf{G}_k\mathrm{d}\mathbf{W} = F_k\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m} G_{k,j}\mathrm{d}W_j$$

entonces por la fórmula de Itô unidimensional

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(u(\mathbf{X})) = \mathrm{d}(u(X_k)) &= u'(X_k)\mathrm{d}X_k + \frac{1}{2}u''(X_k)\mathbf{G}_k^2\mathrm{d}t \\
&= \frac{\partial u}{\partial x_k}(\mathbf{X})\mathrm{d}X_k + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_k^2}(\mathbf{X})\mathbf{G}_k^2\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

como queríamos ver.

Supongamos que vale para $l < n$, o sea que se verifica la fórmula de Itô para polinomios en l variables. Veamos entonces que se verifica para polinomios en $l+1$ variables, pero por simplicidad en la notación supongamos que hablamos de las primeras $l+1$ variables, o sea que $u(\mathbf{x}) = u(x_1, \ldots, x_{l+1})$.

Trabajemos primero con funciones $u(\mathbf{x}) = u_1(x_1, \ldots, x_l)u_2(x_{l+1})$ donde u_1 y u_2 son polinomios. Tenemos que

$$\mathrm{d}(u_1(X_1, \ldots, X_l)) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(X_1, \ldots, X_l)\mathrm{d}X_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_j}(X_1, \ldots, X_l)\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}(u_2(X_{l+1})) = u_2'(X_{l+1})\mathrm{d}X_{l+1} + \frac{1}{2}u_2''(X_{l+1})\mathbf{G}_{l+1}^2\mathrm{d}t.$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(u(\mathbf{X}))\\
&= d(u_1(X_{1,}\dots,X_l)u_2(X_{l+1})) \quad \text{(usando la regla del producto)}\\
&= u_2(X_{l+1})\mathrm{d}(u_1(X_1,\dots,X_l)) + u_1(X_1,\dots,X_l)\mathrm{d}(u_2(X_{l+1}))\\
&\quad +\sum_{1=1}^{l}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}(X_1,\dots,X_l)\mathbf{G}_i u_2'(X_{l+1})\mathbf{G}_{l+1}\mathrm{d}t\\
&= u_2(X_{l+1})\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}(X_1,\dots,X_l)\mathrm{d}X_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i\partial x_j}(X_1,\dots,X_l)\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j\mathrm{d}t\right)\\
&\quad +u_1(X_1,\dots,X_l)\left(u_2'(X_{l+1})\mathrm{d}X_{l+1} + \frac{1}{2}u_2''(X_{l+1})\mathbf{G}_{l+1}^2\mathrm{d}t\right)\\
&\quad +\sum_{1=1}^{l}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}(X_1,\dots,X_l)u_2'(X_{l+1})\mathbf{G}_i\mathbf{G}_{l+1}\mathrm{d}t\\
&= \sum_{i=1}^{l}\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{X})\mathrm{d}X_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{X})\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j\mathrm{d}t + \frac{\partial u}{\partial x_{l+1}}(\mathbf{X})\mathrm{d}X_{l+1}\\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_{l+1}}(\mathbf{X})\mathbf{G}_{l+1}^2\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{l}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_{l+1}}(\mathbf{X})\mathbf{G}_i\mathbf{G}_{l+1}\mathrm{d}t\\
&= \sum_{i=1}^{l+1}\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{X})\mathrm{d}X_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{X})\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

como queríamos ver.

Luego, usando la linealidad de los procesos de Itô concluimos que la fórmula de Itô es válida para cualquier polinomio $u(\mathbf{x}) = u(x_1,\dots,x_{l+1})$ como queríamos ver.

Caso 2. Veamos ahora que la fórmula es válida para $u(\mathbf{x},t)$ polinomio de $n+1$ variables.

Procederemos igual que en la demostración de la fórmula de Itô unidimensional. Dada la linealidad alcanza con probarlo para funciones $u(\mathbf{x},t) = v(\mathbf{x})g(t)$ donde v y g son polinomios:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(u(\mathbf{X},t) &= \mathrm{d}(v(\mathbf{X})g(t))\\
&= v(\mathbf{X})\mathrm{d}g(t) + g(t)\mathrm{d}(v(\mathbf{X}))\\
&= v(\mathbf{X})g'(t)\mathrm{d}t + g(t)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{X})\mathrm{d}X_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{X})\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{X},t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{X},t)\mathrm{d}X_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathbf{X},t)\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

con lo que queda probado.

Caso 3. Dado $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ tomemos $u_n : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$ polinomios como en el Lema 4.7. Por el caso 2 tenemos que

$$u_n(\mathbf{X},t) - u_n(\mathbf{X},r) = \int_r^t \frac{\partial u_n}{\partial t}(\mathbf{X},s) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(\mathbf{X},s)F_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{X},s)\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j \mathrm{d}s$$

$$\int_r^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(\mathbf{X},s)\mathbf{G}_i \mathrm{d}\mathbf{W}_s.$$

Luego, pasando al límite obtenemos la identidad deseada.

□

Comentario. Cómo recordar la Fórmula de Itô Multidimensional.

Escribir

$$\mathrm{d}(u(\mathbf{X},t)) = \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\mathrm{d}X_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\mathrm{d}X_i\mathrm{d}X_j,$$

y luego simplificar el término $\mathrm{d}X_i\mathrm{d}X_j$ expandiéndolo y usando las siguientes identidades *formales*:

$$(\mathrm{d}t)^2 = 0 \qquad \mathrm{d}t\mathrm{d}W_i = 0 \qquad \mathrm{d}W_i\mathrm{d}W_j = \delta_{i,j}\mathrm{d}t$$

$(1 \leq i,j \leq m)$.

La teoría vista en este capítulo, en particular el Lema 4.4, da significado a todo esto.

5. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Suposición general para esta sección:
Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad completo. Sea $\mathcal{G}_t$ una filtración Browniana asociada al movimiento Browniano $\mathbf{W}_t$ de dimensión m. Sea $\mathcal{U}$ una σ-álgebra independiente de $\mathcal{G}_t$ y $\mathcal{F}_t$ la filtración P aumentada de $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{G}_t)$.
También usaremos funciones $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ medibles Borel (donde m coincide con la dimensión de $\mathbf{W}$).

Definición 5.1. Si $\{\mathbf{X}_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ es un proceso n dimensional progresivamente medible tal que

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{Z}$$
$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Z} + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}(s), s)\mathrm{d}s + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}(s), s)\mathrm{d}\mathbf{W} \quad a.s.$$

$\forall\, 0 \le t \le T$, donde $\mathbf{Z}$ es medible $\mathcal{U}$ y

$$\int_0^t |b_i(\mathbf{X}(s), s)|\mathrm{d}s < \infty \qquad \int_0^t B_{i,j}^2(\mathbf{X}(s), s)\mathrm{d}s < \infty \qquad a.s.$$

entonces diremos que $\mathbf{X}(t)$ es una *solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica*

$$\mathrm{d}\mathbf{X}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t), t)\mathrm{d}t + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t), t)\mathrm{d}\mathbf{W}$$
$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{Z}.$$

Observación 5.2. $\mathbf{X}$ es un proceso de Itô n dimensional y por lo tanto tiene caminos continuos $a.s.$.

Ejemplo 5.3. Tomemos $m = 1, n = 1$. Consideremos la ecuación.

$$\mathrm{d}X_t = \lambda X_t \mathrm{d}W_t$$
$$X_0 = 1.$$

Es natural pensar en $e^{\lambda W_t}$ pero la fórmula de Itô nos da un término no deseado: $\frac{\lambda^2}{2}e^{\lambda W_t}\mathrm{d}t$, lo cual podemos corregir tomando

$$X_t = e^{\lambda W_t} \cdot e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} = e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}.$$

En efecto la regla del producto nos da

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(X_t) &= \mathrm{d}(e^{\lambda W_t})e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} + \mathrm{d}(e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}})e^{\lambda W_t} \\
&= (e^{\lambda W_t}\lambda \mathrm{d}W_t + \frac{\lambda^2}{2}e^{\lambda W_t}\mathrm{d}t)e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} - \frac{\lambda^2}{2}e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}e^{\lambda W_t}\mathrm{d}t \\
&= \lambda X_t \mathrm{d}W_t
\end{aligned}$$

Además, tal solución será única (salvo indistinguibilidad) como consecuencia del Teorema de Existencia y Unicidad que veremos en la próxima sección.

Ejemplo 5.4. Generalicemos lo anterior. Sean ahora $m \geq 1, n = 1$. Consideremos la ecuación

$$\mathrm{d}X_t = \mathbf{g}(t)X_t\mathrm{d}\mathbf{W} = \sum_{j=1}^{m} g_j(t)X_t\mathrm{d}W_j$$
$$X_0 = Z$$

donde Z es una variable aleatoria medible $\mathcal{U}$ y $\mathbf{g}(t)$ es una función continua. Veamos que la solución es

$$X_t = Ze^{\int_0^t \mathbf{g}(s)\mathrm{d}\mathbf{W} - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{g}^2(s)\mathrm{d}s} = Ze^{\sum_{j=1}^m \int_0^t g_j(s)\mathrm{d}W_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \int_0^t g_j^2(s)\mathrm{d}s}$$

Sean $u(x,t) = e^{x - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{g}^2\mathrm{d}s}$ e $Y_t = \int_0^t \mathbf{g}\mathrm{d}\mathbf{W}$. Luego, usando Partes y la Fórmula de Itô[5] tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t &= \mathrm{d}(Zu(Y_t, t)) \\
&= Z\mathrm{d}(u(Y_{t,}, t)) \\
&= Z\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}Y_t + \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathbf{g}^2\mathrm{d}t\right) \\
&= X_t\mathbf{g}\mathrm{d}\mathbf{W} + X_t(-\frac{1}{2}\mathbf{g}^2\mathrm{d}t) + \frac{1}{2}X_t\mathbf{g}^2\mathrm{d}t \\
&= X_t\mathbf{g}\mathrm{d}\mathbf{W}
\end{aligned}$$

como queríamos ver. Además, si $E(Z^2) < \infty$ tendremos unicidad, como veremos más adelante.

Ejemplo 5.5. Similarmente se ve que la ecuación

$$\mathrm{d}X_t = d(t)X_t\mathrm{d}t + \mathbf{g}(t)X_t\mathrm{d}\mathbf{W}$$
$$X_0 = Z$$

(con $E(Z^2) < \infty$ y $d(t), \mathbf{g}(t)$ continuas) tiene como única solución

$$X_t = Ze^{\int_0^t \mathbf{g}(s)\mathrm{d}\mathbf{W} + \int_0^t d(s) - \frac{1}{2}\mathbf{g}^2(s)\mathrm{d}s}.$$

En lo que sigue probaremos un resultado general de existencia y unicidad de soluciones muy parecido al del caso determinista.

5.1. Un Teorema General de Existencia y Unicidad.

Para probar la unicidad utilizaremos el Lema de Gronwall que usamos en el caso determinista pero bajo hipótesis más generales.

Lema 5.6. Lema de Gronwall Generalizado. *Sean $f, \phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ funciones, f continua y no negativa, ϕ medible Borel, y sea $C_0 \in \mathbb{R}$ una constante. Si*

$$\phi(t) \leq C_0 + \int_0^t f\phi\mathrm{d}s \quad \forall\, 0 \leq t \leq T$$

entonces

$$\phi(t) \leq C_0 e^{\int_0^t f\mathrm{d}s} \quad \forall\, 0 \leq t \leq T.$$

[5] También sale aplicando Partes (de nuevo) como en el Ejemplo anterior.

Demostración. Sea $\Phi(t) = C_0 + \int_0^t f\phi \mathrm{d}s$. Luego $f\phi \leq f\Phi$ y si $g(t) = e^{-\int_0^t f \mathrm{d}s}$ entonces

$$f\phi g + \Phi g' \leq 0.$$

Luego

$$\int_0^t f\phi g + \Phi g' \mathrm{d}s \leq 0.$$

Pero

$$\begin{aligned}
\int_0^t \Phi g' \mathrm{d}s &= \int_0^t C_0 g' \mathrm{d}s + \int_0^t (\int_0^s f\phi \mathrm{d}u) g' \mathrm{d}s \\
&= C_0(g(t) - g(0)) + \int_0^t f\phi(\int_u^t g' \mathrm{d}s) \mathrm{d}u \\
&= C_0(g(t) - g(0)) + \int_0^t f\phi(g(t) - g(u)) \mathrm{d}u \\
&= C_0(g(t) - g(0)) + g(t) \int_0^t f\phi \mathrm{d}s - \int_0^t f\phi g \mathrm{d}s \\
&= \Phi(t)g(t) - \Phi(0)g(0) - \int_0^t f\phi g \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_0^t f\phi g + \Phi g' \mathrm{d}s = \Phi(t)g(t) - \Phi(0)g(0) = \Phi(t)e^{-\int_0^t f \mathrm{d}s} - C_0 \leq 0$$

Entonces

$$\phi(t) \leq \Phi(t) \leq C_0 e^{\int_0^t f \mathrm{d}s}$$

como queríamos ver. □

Lemita 5.7. *Si* $\mathbf{f} : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *medible entonces*

$$\left| \int_0^t \mathbf{f}(s) \mathrm{d}s \right|^{2p} \leq t^{2p-1} \int_0^t |\mathbf{f}(s)|^{2p} \mathrm{d}s.$$

Demostración.

$$\left| \int_0^t \mathbf{f}(s) \mathrm{d}s \right|^{2p} \leq \left(\int_0^t |\mathbf{f}(s)| \mathrm{d}s \right)^{2p}$$

$$\leq \left(\left(\int_0^t 1 \mathrm{d}s \right)^{\frac{2p-1}{2p}} \left(\int_0^t |\mathbf{f}(s)|^{2p} \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2p}} \right)^{2p} = t^{2p-1} \int_0^t |\mathbf{f}(s)|^{2p} \mathrm{d}s$$

□

Teorema 5.8. Existencia y Unicidad de Soluciones de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

Si $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ *y* $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ *son continuas con*

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}(\mathbf{x},t)-\mathbf{b}(\tilde{\mathbf{x}},t)| &\le L|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}| \\ |\mathbf{B}(\mathbf{x},t)-\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}},t)| &\le L|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}| \end{aligned} \quad \textit{para } 0\le t\le T,\ \mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}\in\mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}(\mathbf{x},t)| &\le L(1+|\mathbf{x}|) \\ |\mathbf{B}(\mathbf{x},t)| &\le L(1+|\mathbf{x}|) \end{aligned} \quad \textit{para } 0\le t\le T\,\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}\in\mathbb{R}^n$$

(donde $|\cdot|$ *denota la norma Euclídea de dimensión adecuada) para alguna constante* L *y* $\mathbf{Z}\in L^2_n(\Omega)$ *es medible* $\mathcal{U}$ *entonces existe una única solución fuerte* $\mathbf{X}(t)$ *en* $\mathbb{L}^2_n[0,T]$ *(salvo indistinguibilidad) de*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{X}(t) &= \mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)\mathrm{d}t+\mathbf{B}(\mathbf{X}(t),t)\mathrm{d}\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Demostración.

Existencia.

(1) Como en el caso determinista, la existencia de una solución será probada utilizando una sucesión recurrente:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^0(t) &= \mathbf{Z} \\ \mathbf{X}^{k+1}(t) &= \mathbf{Z}+\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^k(s),s)\mathrm{d}s+\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^k(s),s)\mathrm{d}\mathbf{W}. \end{aligned}$$

Veamos que $\mathbf{X}^k$ está bien definida y que $\mathbf{X}^k\in\mathbb{L}^2_n[0,T]\ \forall k\ge 1$. Usemos inducción. Para $k=0$ es trivial pues $\mathbf{Z}\in L^2_n(\Omega)$. Supongámoslo para k. Como $\mathbf{X}^k\in\mathbb{L}^2_n[0,T]$ y $|\mathbf{B}(\mathbf{X}^k(t),t)|^2\le L^2(1+|\mathbf{X}^k(t)|)^2$ entonces $\mathbf{B}(\mathbf{X}^k(t),t)\in\mathbb{L}^2_{n\times m}[0,T]$. Similarmente, como también $\mathbf{X}^k\in\mathbb{L}^1_n[0,T]$ y $|\mathbf{b}(\mathbf{X}^k(t),t)|\le L(1+|\mathbf{X}^k(t)|)$ entonces $\mathbf{b}(\mathbf{X}^k(t),t)\in\mathbb{L}^1_n[0,T]$. Luego $\mathbf{X}^{k+1}(t)$ está bien definido. Veamos que $\mathbf{X}^{k+1}(t)\in\mathbb{L}^2_n[0,T]$.

$$\begin{aligned} E(|\mathbf{X}^{k+1}(t)|^2) &\le 9E(|\mathbf{Z}|^2)+9E\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^k(s),s)\mathrm{d}s\right|^2\right) \\ &+9E\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^k(s),s)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2\right) \end{aligned}$$

Usando el Lemita 5.7 con $p=1$ en el segundo sumando,

$$\begin{aligned} E\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^k(s),s)\mathrm{d}s\right|^2\right) &\le E\left(T\int_0^T |\mathbf{b}(\mathbf{X}^k(s),s)|^2\mathrm{d}s\right) \\ &\le TL^2E\left(\int_0^T (1+|\mathbf{X}^k(s)|)^2\mathrm{d}s\right)\le 2TL^2(T+\left\|\mathbf{X}^k\right\|^2_{\mathbb{L}^2_n[0,T]}). \end{aligned}$$

Además,

$$E\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^k(s),s)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2\right) \leq E\left(\int_0^T |\mathbf{B}(\mathbf{X}^k(s),s)|^2\mathrm{d}s\right)$$
$$\leq L^2E\left(\int_0^T (1+|\mathbf{X}^k(s)|)^2\mathrm{d}s\right) \leq 2L^2(T+\left\|\mathbf{X}^k\right\|^2_{\mathbb{L}^2_n[0,T]}).$$

Luego

$$E(|\mathbf{X}^{k+1}(t)|) \leq 9E(|\mathbf{Z}|^2) + 9(2TL^2+2L^2)(T+\left\|\mathbf{X}^k\right\|^2_{\mathbb{L}^2_n[0,T]}).$$

Luego integrando en la variable t concluimos que $\mathbf{X}^{k+1} \in \mathbb{L}^2_n[0,T]$ como queríamos ver.

(2) Veamos que $\{\mathbf{X}^k\}$ converge a la solución de la ecuación estocástica. Empecemos probando que

$$d^k(t) := E(|\mathbf{X}^k(t) - \mathbf{X}^{k-1}(t)|^2) \leq \frac{(Mt)^k}{k!} \quad \forall k \geq 1$$

donde $M = M(L,T,E(|\mathbf{Z}|^2)$. Usaremos nuevamente inducción. Para $k=1$

$$\begin{aligned}
d^1(t) &= E(|\mathbf{X}^1(t) - \mathbf{Z}|^2) \\
&\leq 2E\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{Z},s)\mathrm{d}s\right|^2\right) + 2E\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{Z},s)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2\right) \\
&\leq 2TE\left(\int_0^t |\mathbf{b}(\mathbf{Z},s)|^2\mathrm{d}s\right) + 2E\left(\int_0^t |\mathbf{B}(\mathbf{Z},s)|^2\mathrm{d}s\right) \\
&\leq (2TL^2+2L^2)E\left(\int_0^t (1+|\mathbf{Z}|)^2\mathrm{d}s\right) \\
&\leq 4(T+1)L^2(1+E(|\mathbf{Z}|^2))t \\
&= Mt.
\end{aligned}$$

Supongámoslo cierto para k. Luego

$$\begin{aligned}
d^{k+1}(t) &= E(|\mathbf{X}^{k+1}(t)-\mathbf{X}^{k}(t)|^2)\\
&\leq 2E\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^k(s),s)-\mathbf{b}(\mathbf{X}^{k-1}(s),s)\mathrm{d}s\right|^2\right)\\
&\quad +2E\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^k(s),s)-\mathbf{B}(\mathbf{X}^{k-1}(s),s)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2\right)\\
&\leq 2TE\left(\int_0^t |\mathbf{b}(\mathbf{X}^k(s),s)-\mathbf{b}(\mathbf{X}^{k-1}(s),s)|^2\mathrm{d}s\right)+\\
&\quad 2E\left(\int_0^t |\mathbf{B}(\mathbf{X}^k(s),s)-\mathbf{B}(\mathbf{X}^{k-1}(s),s)|^2\mathrm{d}s\right)\\
&\leq (2TL^2+2L^2)E\left(\int_0^t |\mathbf{X}^k(s)-\mathbf{X}^{k-1}(s)|^2\mathrm{d}s\right)\\
&\leq 2(T+1)L^2\int_0^t \frac{M^k s^k}{k!}\mathrm{d}s\\
&\leq \frac{M^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!},
\end{aligned}$$

como queríamos ver.

(3) Gracias a esta acotación tenemos que para todo $0 \leq t \leq T$ $\{\mathbf{X}^k(t)\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Luego, sea $\mathbf{X}(t)$ su límite en $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Luego $\{\mathbf{X}(t), \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ es un proceso estocástico. Veamos ahora que $\mathbf{X}(t)$ tiene una modificación $\tilde{\mathbf{X}}(t)$ tal que $\mathbf{X}^k(t) \to \tilde{\mathbf{X}}(t)$ uniformemente en $[0,T]$ $a.s.$. Esto lo veremos probando que $\mathbf{X}^k(t)$ es uniformemente de Cauchy $a.s.$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{X}^k(t)-\mathbf{X}^{k-1}(t)|^2 \leq 2TL^2\int_0^T |\mathbf{X}^{k-1}(s)-\mathbf{X}^{k-2}(s)|^2\mathrm{d}s+\\
2\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^{k-1}(s),s)-\mathbf{B}(\mathbf{X}^{k-2}(s),s)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
E\left(\max_{0\leq t\leq T}|\mathbf{X}^k(t)-\mathbf{X}^{k-1}(t)|^2\right) \leq 2TL^2E\left(\int_0^T |\mathbf{X}^{k-1}(s)-\mathbf{X}^{k-2}(s)|^2\mathrm{d}s\right)\\
+2E\left(\max_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^{k-1}(s),s)-\mathbf{B}(\mathbf{X}^{k-2}(s),s)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad martingal (ver Teorema 2.13) tenemos que

$$
\begin{aligned}
&E\left(\max_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^{k-1}(s),s)-\mathbf{B}(\mathbf{X}^{k-2}(s),s)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2\right)\\
\le\ & \sum_{i=1}^n E\left(\max_{0\le t\le T}\left|\overbrace{\int_0^t \mathbf{B}_i(\mathbf{X}^{k-1}(s),s)-\mathbf{B}_i(\mathbf{X}^{k-2}(s),s)\mathrm{d}\mathbf{W}}^{\text{martingala}}\right|^2\right)\\
\le\ & \sum_{i=1}^n 4E\left(\left|\int_0^T \mathbf{B}_i(\mathbf{X}^{k-1}(s),s)-\mathbf{B}_i(\mathbf{X}^{k-2}(s),s)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2\right)\\
=\ & 4E\left(\left|\int_0^T \mathbf{B}(\mathbf{X}^{k-1}(s),s)-\mathbf{B}(\mathbf{X}^{k-2}(s),s)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2\right)\\
\le\ & 4L^2E\left(\int_0^T |\mathbf{X}^{k-1}(s)-\mathbf{X}^{k-2}(s)|^2\mathrm{d}s\right).
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
E\left(\max_{0\le t\le T}|\mathbf{X}^k(t)-\mathbf{X}^{k-1}(t)|^2\right) &\le (2TL^2+8L^2)E\left(\int_0^T |\mathbf{X}^{k-1}(s)-\mathbf{X}^{k-2}(s)|^2\mathrm{d}s\right)\\
&\le (2TL^2+8L^2)\int_0^T \frac{M^{k-1}s^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}s\\
&\le C\frac{M^kT^k}{k!},
\end{aligned}
$$

donde $C=C(T,L)$.

Luego

$$
\begin{aligned}
P\left(\overbrace{\max_{0\le t\le T}|\mathbf{X}^k(t)-\mathbf{X}^{k-1}(t)|\ge\frac{1}{k^2}}^{=:A_k}\right) &= P\left(\max_{0\le t\le T}|\mathbf{X}^k(t)-\mathbf{X}^{k-1}(t)|^2\ge\frac{1}{k^4}\right)\\
&\le k^4E\left(\max_{0\le t\le T}|\mathbf{X}^k(t)-\mathbf{X}^{k-1}(t)|^2\right)\le C\frac{k^4M^kT^k}{k!},
\end{aligned}
$$

y como $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^4M^kT^k}{k!}<\infty$ concluimos por el Lema de Borel Cantelli que $P(A_k$ infinitas veces$)=0$, o sea, que para casi todo ω

$$\max_{0\le t\le T}|\mathbf{X}^k(t)-\mathbf{X}^{k-1}(t)|<\frac{1}{k^2}\quad \text{para } k\ge k_0(\omega)$$

Luego $\mathbf{X}^k(t)\to\tilde{\mathbf{X}}(t)$ uniformemente en $[0,T]$ $a.s.$ y por lo tanto $\tilde{\mathbf{X}}(t)$ tiene caminos continuos $a.s.$. Como para todo $0\le t\le T$, $\mathbf{X}^k(t)\to\tilde{\mathbf{X}}(t)$ $a.s.$ tenemos que $\mathbf{X}(t)=\tilde{\mathbf{X}}(t)$ $a.s.$ como queríamos ver.

Supongamos entonces $\mathbf{X}(t)=\tilde{\mathbf{X}}(t)$. $\mathbf{X}(t)$ verifica entonces ser continuo y por lo tanto progresivamente medible. Luego, como $\mathbf{X}^k(t)\to\mathbf{X}(t)$ $a.s.$ $\forall t\in[0,t]$ concluimos que $\mathbf{X}^k(t,\omega)\to\mathbf{X}(t,\omega)$ $a.s.$ $\lambda\otimes P$.

(4) Veamos ahora que $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^2_n[0,T]$. Para ello veamos que $\mathbf{X}^k \to \mathbf{X}$ en $\mathbb{L}^2_n[0,T]$.

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{X}^k - \mathbf{X}^{k-1}\right\|_{\mathbb{L}^2_n[0,T]} &= E\left(\int_0^T |\mathbf{X}^k(s) - \mathbf{X}^{k-1}(s)|^2 \mathrm{d}s\right) \\ &\leq \int_0^t \frac{M^k s^k}{k!} \leq \frac{MT^{k+1}}{(k+1)!}.\end{aligned}$$

Luego tenemos que $\mathbf{X}_k$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{L}^2_n[0,T]$. Luego, sea $\tilde{\mathbf{X}}$ su límite en $\mathbb{L}^2_n[0,T]$. Como $\mathbf{X}^k(t,\omega) \to \mathbf{X}(t,\omega)$ *a.s.* $\lambda \otimes P$ concluimos que $\mathbf{X}(t,\omega) = \tilde{\mathbf{X}}(t,\omega)$ *a.s.* $\lambda \otimes P$.

(5) Veamos que $\mathbf{X}(t)$ verifica la ecuación diferencial estocástica. Sea

$$\mathbf{Y}(t) := \mathbf{Z} + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}(s), s)\mathrm{d}s + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}(s), s)\mathrm{d}\mathbf{W}$$

$\mathbf{Y}(t)$ está bien definida pues $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^2_n[0,T]$, $|\mathbf{B}(\mathbf{X}(t),t)|^2 \leq L^2(1 + |\mathbf{X}(t)|^2)$ y $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^1_n[0,T]$, $|\mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)| \leq L(1 + |\mathbf{X}(t)|)$.

Veamos que $\mathbf{X}^{k+1}(t) \to \mathbf{Y}(t)$ en $L^2_n(\Omega)$ $\forall\, 0 \leq t \leq T$.

$$\begin{aligned} E(|\mathbf{Y}(t) - \mathbf{X}^{k+1}(t)|^2) &\leq 2E\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}(s), s) - \mathbf{b}(\mathbf{X}^k(s), s)\mathrm{d}s\right|^2\right) \\ &\quad +2E\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}(s), s) - \mathbf{B}(\mathbf{X}^k(s), s)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2\right) \\ &\leq (2TL^2 + 2L^2)E\left(\int_0^t |\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}^k(s)|^2 \mathrm{d}s\right) \\ &\leq 2(T+1)L^2 \left\|\mathbf{X} - \mathbf{X}^k\right\|_{\mathbb{L}^2_n[0,T]} \to 0 \end{aligned}$$

Luego, como $\mathbf{X}^{k+1}(t) \to \mathbf{X}(t)$ en $L^2_n(\Omega)$ tenemos que $\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y}(t)$ *a.s.* $\forall\, 0 \leq t \leq T$ o sea que

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Z} + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}(s), s)\mathrm{d}s + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}(s), s)\mathrm{d}\mathbf{W} \quad a.s.$$

$\forall\, 0 \leq t \leq T$, como queríamos ver.

Unicidad.

Supongamos $\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}} \in \mathbb{L}^2_n[0,T]$ soluciones de la ecuación estocástica. Luego

$$\mathbf{X}(t) - \tilde{\mathbf{X}}(t) = \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}(s), s) - \mathbf{b}(\tilde{\mathbf{X}}(s), s)\mathrm{d}s + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}(s), s) - \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{X}}(s), s)\mathrm{d}\mathbf{W}$$

Luego

$$\begin{aligned} E(|\mathbf{X}(t)-\tilde{\mathbf{X}}(t)|^2) &\leq 2E\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}(s),s)-\mathbf{b}(\tilde{\mathbf{X}}(s),s)\mathrm{d}s\right|^2\right) \\ &\quad +2E\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}(s),s)-\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{X}}(s),s)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2\right) \\ &\leq (2TL^2+2L^2)\int_0^t E(|\mathbf{X}(t)-\tilde{\mathbf{X}}(t)|^2)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Entonces, si tomamos $\phi(t) := E(|\mathbf{X}(t)-\tilde{\mathbf{X}}(t)|^2)$ y $C := 2TL^2+2L^2$ tenemos que

$$\phi(t) \leq C\int_0^t \phi(s)\mathrm{d}s.$$

Luego, por el Lema de Gronwall tenemos que $\phi \equiv 0$. Luego $\tilde{\mathbf{X}}$ es una modificación de $\mathbf{X}$, pero como ambos procesos son continuos *a.s.* concluimos por el Teorema 2.7 que $\tilde{\mathbf{X}}$ y $\mathbf{X}$ son indistinguibles como queríamos ver. □

Observación 5.9. La primera hipótesis sobre $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ y $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ en el Teorema de Existencia y Unicidad implica la segunda aunque con otra constante L. Pues, por ejemplo, si $|\mathbf{b}(\mathbf{x},t)-\mathbf{b}(\tilde{\mathbf{x}},t)| \leq L|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}| \quad \forall(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^n\times[0,T]$ entonces

$$|\mathbf{b}(\mathbf{x},t) \leq |\mathbf{b}(\mathbf{0},t)|+|\mathbf{b}(\mathbf{x},t)-\mathbf{b}(\mathbf{0},t)| \leq |\mathbf{b}(\mathbf{0},t)|+L|\mathbf{x}| \leq C(1+|\mathbf{x}|).$$

5.2. Propiedades de las Soluciones.

Empezaremos con un resultado de estimación de los momentos de las soluciones de las ecuaciones estocásticas, pero para ello necesitaremos de estimaciones de los momentos de la integral estocástica, lo cual veremos ahora.

Estimación de los Momentos de la Integral Estocástica. Antes unos lemas.

Lema 5.10. *Sea $v : [0,b] \to \mathbb{R}$ integrable $v(t) > 0$ para $t > 0$. Sea $A \in \mathbb{R}$ una constante. Si*

$$v(t) \leq A\left(\int_0^t v(s)\mathrm{d}s\right)^{(p-1)/p} \qquad \forall t\in[0,b]$$

entonces

$$v(t) \leq \frac{A^P t^{p-1}}{p^{p-1}} \quad \forall t\in[0,b].$$

Demostración. Veámoslo primero para $v(t)$ continua. Sea $f(t) := \int_0^t v(s)\mathrm{d}s$. Luego, como $v(t)$ es continua, tenemos

$$\begin{gathered} f'(t) \leq Af(t)^{(p-1)/p} \quad \forall t\in(0,b) \\ f(0)=0. \end{gathered}$$

Luego

$$\int_0^t \frac{f'(s)}{f(s)^{(p-1)/p}}\mathrm{d}s \leq \int_0^t A\mathrm{d}s = At.$$

$$\int_0^t \frac{f'(s)}{f(s)^{(p-1)/p}}\mathrm{d}s = \int_0^{f(t)} \frac{\mathrm{d}u}{u^{(p-1)/p}} = pu^{1/p}\Big|_0^{f(t)} = pf(t)^{1/p}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} pf(t)^{1/p} &\leq At \\ f(t) &\leq \left(\frac{At}{p}\right)^p. \end{aligned}$$

Luego

$$v(t) = f'(t) \leq Af(t)^{(p-1)/p} \leq A\left(\frac{At}{p}\right)^{(p-1)} = \frac{A^p t^{p-1}}{p^{p-1}}$$

como queríamos ver.

Veámoslo ahora en general. Sea $w(t) := \left(\int_0^t v(s)\mathrm{d}s\right)^{(p-1)/p}$. Luego integrando la inecuación

$$\begin{aligned} w(t)^{p/(p-1)} &= \int_0^t v(s)\mathrm{d}s \leq A\int_0^t w(s)\mathrm{d}s \\ w(t) &\leq A^{(p-1)/p}\left(\int_0^t w(s)\mathrm{d}s\right)^{(p-1)/p} \end{aligned}$$

entonces, como $w(t)$ es continua tenemos, por lo visto recién, que

$$w(t) \leq \frac{\left(A^{(p-1)/p}\right)^p t^{p-1}}{p^{p-1}} \leq \frac{A^{p-1}t^{p-1}}{p^{p-1}}.$$

Luego

$$v(t) \leq Aw(t) \leq \frac{A^p t^{p-1}}{p^{p-1}}$$

como queríamos ver. □

Lemita 5.11. *Si $\{G(t)\}_{t\in[0,T]}$ es un proceso simple (acotado) entonces*

$$X_t := \int_0^t G_s \mathrm{d}W_s \in \mathbb{L}^q[0,T]$$

para todo $q \geq 1$.

Demostración. Basta probarlo para $G(t,\omega) = G(\omega)1_{(r,p]}(t)$ donde G es medible $\mathcal{F}_r$ y acotado ($|G| \leq M$). Luego

$$X_t = G\cdot(W_{p\wedge t} - W_r) \quad \text{para } t \geq r.$$

Luego

$$E\left(\int_0^T |X_s|^q \mathrm{d}s\right) \leq M^q \left[\int_r^p E(|W_s - W_r|^q)\mathrm{d}s + \int_p^T E(|W_p - W_r|^q)\mathrm{d}s\right]$$
$$= M^q \left[\int_r^p (\sqrt{s-r})^q E\left(\left|\frac{W_s - W_r}{\sqrt{s-r}}\right|^q\right)\mathrm{d}s + \int_p^T (\sqrt{p-r})^q E\left(\left|\frac{W_p - W_r}{\sqrt{p-r}}\right|^q\right)\mathrm{d}s\right]$$
$$= M^q \left(E(|Y|^q)\frac{(p-r)^{q/2+1}}{q/2+1} + E(|Y|^q)(T-p)(\sqrt{p-r})^q\right)$$

donde $Y \sim N(0,1)$, como queríamos ver. □

Proposición 5.12. *Si* $\mathbf{G} \in \mathbb{L}^{2p}_{n\times m}[0,T]$ *con* $p \geq 1$ *entonces*

$$E\left(\left|\int_0^t \mathbf{G}(s)\mathrm{d}\mathbf{W}(s)\right|^{2p}\right) \leq Ct^{p-1}E\left(\int_0^t |\mathbf{G}(s)|^{2p}\mathrm{d}s\right)$$

donde $C = C(n,m,p)$.

Demostración. Si $p = 1$ es consecuencia directa de la Proposición 3.28. Veámoslo entonces para $p > 1$.

Caso 1. $G_t \in \mathbb{L}^{2p}[0,T]$ proceso simple (acotado).

Sea $X_t = \int_0^t G_s \mathrm{d}W_s$. Luego, por la fórmula de Itô, para $u(x,t) = |x|^{2p}$ tenemos que

$$|X_t|^{2p} = |X_t|^{2p} - |X_0|^{2p} = \int_0^t 2p|X_s|^{2p-2}X_sG_s\mathrm{d}W_s$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t 2p(2p-1)|X_s|^{2p-2}G_s^2\mathrm{d}s.$$

Veamos que $E\left(\int_0^t 2p|X_s|^{2p-2}X_sG_s\mathrm{d}W_s\right) = 0$. Por el Teorema 3.23 (1), basta ver que $|X_t|^{2p-2}X_tG_t \in \mathbb{L}^2[0,T]$. En efecto

$$E\left(\int_0^T |X_s|^{2(2p-1)}G_s^2\mathrm{d}t\right)$$
$$\leq \left(E\left(\int_0^T |X_s|^{\frac{2(2p-1)p}{p-1}}\mathrm{d}t\right)\right)^{1-1/p}\left(E\left(\int_0^T |G_t|^{2p}\mathrm{d}t\right)\right)^{1/p} < \infty$$

pues $X_t \in \mathbb{L}^q[0,T]$ $\forall q \geq 1$, por el Lemita 5.11.

Por otro lado

$$E\left(\int_0^t p(2p-1)|X_s|^{2p-2}G_s^2\mathrm{d}s\right)$$
$$\leq p(2p-1)\left(E\left(\int_0^t |X_s|^{2p}\mathrm{d}s\right)\right)^{1-1/p}\left(E\left(\int_0^t |G_s|^{2p}\mathrm{d}s\right)\right)^{1/p}.$$

Luego

$$E(|X_t|^{2p}) \leq p(2p-1)\left(E\left(\int_0^t |G_s|^{2p}\mathrm{d}s\right)\right)^{1/p}\left(\int_0^t E(|X_s|^{2p})\mathrm{d}s\right)^{1-1/p}.$$

Luego, si tomamos $v(r) = E(|X_r|^{2p})$ y $A = p(2p-1)\left(E\left(\int_0^t |G_s|^{2p}\mathrm{d}s\right)\right)^{1/p}$ tenemos que

$$v(r) \leq A\left(\int_0^r v(s)\mathrm{d}s\right)^{1-1/p}$$

$\forall r \in [0,t]$ y aplicando el Lema 5.10, nos queda

$$v(r) \leq \frac{A^p r^{p-1}}{p^{p-1}}$$

$\forall r \in [0,t]$ en particular

$$v(t) \leq \frac{A^p t^{p-1}}{p^{p-1}}$$

o sea,

$$E(|X_t|^{2p}) \leq \underbrace{p(2p-1)^p}_{=:C(p)} t^{p-1} E\left(\int_0^t |G_s|^{2p}\mathrm{d}s\right)$$

como queríamos ver.

Caso 2. $G \in \mathbb{L}^{2p}[0,T]$.
Sea $\{G^k\}$ una sucesión de procesos simples con

$$\lim_{k\to\infty} E\left(\int_0^T |G_s - G_s^k|^{2p}\mathrm{d}s\right) = 0.$$

Existe por el Teorema 3.19. Sean $X_t^k := \int_0^t G_s^k \mathrm{d}W_s$. Luego, por el Caso 1,

$$E(|X_t^k|^{2p}) \leq C(p)t^{p-1}E\left(\int_0^t |G_s^k|^{2p}\mathrm{d}s\right). \tag{5.1}$$

Veamos que $X_t^k \to X_t$ en $L^{2p}(\Omega)$. Dado que $G^k - G^l$ son procesos simples, tenemos que

$$E(|X_t^k - X_t^l|^{2p}) \leq C(p)t^{p-1}E\left(\int_0^t |G_s^k - G_s^l|^{2p}\mathrm{d}s\right).$$

Luego $\{X_t^k\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^{2p}(\Omega)$. Pero $X_t^k \to X_t$ en $L^2(\Omega)$ pues

$$\lim_{k\to\infty} E\left(\int_0^t |G_s - G_s^k|^2\mathrm{d}s\right) \leq t^{1-1/p}\lim_{k\to\infty}\left(E\left(\int_0^t |G_s - G_s^k|^{2p}\mathrm{d}s\right)\right)^{1/p} = 0$$

Luego $X_t^k \to X_t$ en $L^{2p}(\Omega)$.

Tenemos entonces que $E(|X_t^k|^{2p}) \to E(|X_t|^{2p})$, y como además $E\left(\int_0^t |G_s^k|^{2p}\mathrm{d}s\right) \to E\left(\int_0^t |G_s|^{2p}\mathrm{d}s\right)$ concluimos, pasando al límite en (5.1), que

$$E(|X_t|^{2p}) \leq C(p)t^{p-1}E\left(\int_0^t |G_s|^{2p}\mathrm{d}s\right)$$

como queríamos ver.

Caso 3. $\mathbf{G} \in \mathbb{L}^{2p}_{n\times m}[0,T]$.

$$\begin{aligned}
E\left(\left|\int_0^t \mathbf{G}(s)\mathrm{d}\mathbf{W}(s)\right|^{2p}\right) &= E\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\int_0^t \mathbf{G}_i(s)\mathrm{d}\mathbf{W}(s)\right|^2\right)^p\right)\\
&\leq m^{2p}E\left(\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}\left|\int_0^t G_{i,j}(s)\mathrm{d}W_j(s)\right|^2\right)^p\right)\\
&\leq m^{3p}n^p\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}E\left(\left|\int_0^t G_{i,j}(s)\mathrm{d}W_j(s)\right|^{2p}\right)\\
\text{(Usando el Caso 2)}\quad &\leq m^{3p}n^p\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}C(p)t^{p-1}E\left(\int_0^t |G_{i,j}(s)|^{2p}\mathrm{d}s\right)\\
&= \underbrace{m^{3p}n^pC(p)}_{=:C(n,m,p)}t^{p-1}E\left(\int_0^t \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}|G_{i,j}(s)|^{2p}\mathrm{d}s\right)\\
&\leq C(n,m,p)t^{p-1}E\left(\int_0^t \left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}|G_{i,j}(s)|^2\right)^p\mathrm{d}s\right)\\
&= C(n,m,p)t^{p-1}E\left(\int_0^t |\mathbf{G}(s)|^{2p}\mathrm{d}s\right)
\end{aligned}$$

□

4.2 Continuación: Propiedades de las Soluciones.

Lemita 5.13. *Sean* $\{a_i\}_{i=1}^k$ *números reales no negativos. Entonces*

$$(a_1+\cdots+a_k)^q \leq 2^q a_1^q + 2^{2q}a_2^q + \cdots + 2^{kq}a_k^q.$$

Demostración. Usemos inducción en k. Supongámoslo cierto para k sumandos y probémoslo para $k+1$.

$$\begin{aligned}
(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1})^q &\leq 2^q a_1^q + 2^q(a_2+\cdots+a_k)^q\\
&\leq 2^q a_1^q + 2^q(2^q a_2^q+\cdots+2^{(k-1)q}a_k^q)\\
&\leq 2^q a_1^q + 2^{2q}a_2^q+\cdots+2^{kq}a_k^q
\end{aligned}$$

como queríamos ver. $\square$

Teorema 5.14. Estimación de los Momentos de las Soluciones.

Si $\mathbf{B}(\mathbf{x},t), \mathbf{b}(\mathbf{x},t), \mathbf{Z}$ *satisfacen las hipótesis del Teorema de Existencia y Unicidad y además*

$$\mathbf{Z} \in L^{2p}(\Omega) \quad \textit{para algún } p \geq 1$$

entonces la solución $\mathbf{X}(t)$ *de*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{X} &= \mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)\mathrm{d}t + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t),t)\mathrm{d}\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{Z} \end{aligned}$$

verifica las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned} E(|\mathbf{X}(t)|^{2p}) &\leq De^{Dt^p}(1 + E(|\mathbf{Z}|^{2p})) \\ E(|\mathbf{X}(t) - \mathbf{Z}|^{2p}) &\leq Dt^p e^{Dt^p}(1 + E(|\mathbf{Z}|^{2p})) \end{aligned}$$

donde $D = D(L,T,n,m,p)$.

Demostración.

(1) Nuevamente consideremos la sucesión recurrente:

$$\mathbf{X}^0(t) = \mathbf{Z}$$

$$\mathbf{X}^{k+1}(t) = \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^k(s),s)\mathrm{d}s + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^k(s),s)\mathrm{d}\mathbf{W}$$

Por lo visto en la demostración de Existencia y Unicidad sabemos que $\mathbf{X}^k$ está bien definido y $\mathbf{X}^k \in \mathbb{L}_n^2[0,T]\ \forall 0 \leq t \leq T$. Además sabemos que $\mathbf{X}^k(t) \to \mathbf{X}(t)$ en $L_n^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ donde $\mathbf{X} \in \mathbb{L}_n^2[0,T]$ es solución de la ecuación.

Empecemos viendo que

$$d^k := E(|\mathbf{X}^k(t) - \mathbf{X}^{k-1}(t)|^{2p}) \leq \frac{M^k t^{kp}}{k!}(1 + E(|\mathbf{Z}|^{2p})) \quad \forall k \geq 1$$

donde $M = M(L,T,n,m,p)$. Usemos inducción. Para $k = 1$

$$\begin{aligned} d^1(t) &= E(|\mathbf{X}^1(t) - \mathbf{Z}|^{2p}) \\ &\leq 2^{2p}E\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{Z},s)\mathrm{d}s\right|^{2p}\right) + 2^{2p}E\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{Z},s)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^{2p}\right) \end{aligned}$$

Por el Lemita 5.7 tenemos

$$\begin{aligned} E\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{Z},s)\mathrm{d}s\right|^{2p}\right) &\leq t^{2p-1}E\left(\int_0^t |\mathbf{b}(\mathbf{Z},s)|^{2p}\mathrm{d}s\right) \\ &\leq t^{2p-1}L^{2p}E\left(\int_0^t (1 + |\mathbf{Z}|)^{2p}\mathrm{d}s\right) \leq t^{2p}L^{2p}E((1 + |\mathbf{Z}|)^{2p}) \end{aligned}$$

Además, por la Proposición 5.12

$$E\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{Z},s)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^{2p}\right) \leq Ct^{p-1}E\left(\int_0^t |\mathbf{B}(\mathbf{Z},s)|^{2p}\mathrm{d}s\right)$$
$$Ct^{p-1}L^{2p}E\left(\int_0^t (1+|\mathbf{Z}|)^{2p}\mathrm{d}s\right) \leq Ct^pL^{2p}E((1+|\mathbf{Z}|)^{2p})$$

Luego

$$\begin{aligned} d^1(t) &\leq 2^{2p}L^{2p}(t^{2p}+Ct^p)E((1+|\mathbf{Z}|)^{2p}) \\ &\leq 2^{2p}L^{2p}(T^p+C)2^{2p}t^p(1+E(|\mathbf{Z}|^{2p})) \\ &= Mt^p(1+E(|\mathbf{Z}|^{2p})) \end{aligned}$$

Supongámoslo cierto para k. Luego

$$\begin{aligned} d^{k+1}(t) &= E\left(\left|\mathbf{X}^{k+1}(t)-\mathbf{X}^k(t)\right|^{2p}\right) \\ &\leq 2^{2p}E\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^k(s),s)-\mathbf{b}(\mathbf{X}^{k-1}(s),s)\mathrm{d}s\right|^{2p}\right) \\ &\quad +2^{2p}E\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^k(s),s)-\mathbf{B}(\mathbf{X}^{k-1}(s),s)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^{2p}\right) \\ &\leq 2^{2p}t^{2p-1}E\left(\int_0^t |\mathbf{b}(\mathbf{X}^k(s),s)-\mathbf{b}(\mathbf{X}^{k-1}(s),s)|^{2p}\mathrm{d}s\right) \\ &\quad +2^{2p}Ct^{p-1}E\left(\int_0^t |\mathbf{B}(\mathbf{X}^k(s),s)-\mathbf{B}(\mathbf{X}^{k-1}(s),s)|^{2p}\mathrm{d}s\right) \\ &\leq 2^{2p}L^{2p}(t^{2p-1}+Ct^{p-1})E\left(\int_0^t |\mathbf{X}^k(s)-\mathbf{X}^{k-1}(s)|^{2p}\mathrm{d}s\right) \\ &\leq 2^{2p}L^{2p}(T^P+C)t^{p-1}\int_0^t \frac{M^k s^{kp}}{k!}(1+E(|\mathbf{Z}|^{2p}))\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{M^{k+1}t^{p-1}}{k!}\frac{t^{kp+1}}{kp+1}(1+E(|\mathbf{Z}|^{2p})) \\ &\leq \frac{M^{k+1}t^{(k+1)p}}{(k+1)!}(1+E(|\mathbf{Z}|^{2p})) \end{aligned}$$

como queríamos ver.

(2) Gracias a esta desigualdad tenemos que para todo $0 \leq t \leq T$ $\{\mathbf{X}^k(t)\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^{2p}_n(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$. Luego, como $\mathbf{X}^k(t) \to \mathbf{X}(t)$ en $L^2_n(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ concluimos que $\mathbf{X}^k(t) \to \mathbf{X}(t)$ en $L^{2p}_n(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ $\forall 0 \leq t \leq T$.

Ahora si veamos las estimaciones. Por el Lemita 5.13 tenemos que

$$\begin{aligned} E(|\mathbf{X}^k(t)-\mathbf{Z}|^{2p}) &\leq 2^{2p}E(|\mathbf{X}^1(t)-\mathbf{Z}|^{2p})+\cdots+2^{2kp}E(|\mathbf{X}^k(t)-\mathbf{X}^{k-1}(t)|^{2p}) \\ &\leq (2^{2p}Mt^p+\cdots+\frac{(2^{2p}Mt^p)^k}{k!})(1+E(|\mathbf{Z}|^{2p})) \\ &\leq (e^{2^{2p}Mt^p}-1)(1+E(|\mathbf{Z}|^{2p})) \\ &\leq Dt^pe^{Dt^p}(1+E(|\mathbf{Z}|^{2p})) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} E(|\mathbf{X}(t)-\mathbf{Z}|^{2p}) = \lim_{k\to\infty} E(|\mathbf{X}^k(t)-\mathbf{Z}|^{2p}) &\leq (e^{Dt^p}-1)(1+E(|\mathbf{Z}|^{2p})) \\ &\leq Dt^pe^{Dt^p}(1+E(|\mathbf{Z}|^{2p})) \end{aligned}$$

y así probamos una estimación, la otra se deduce fácilmente a partir de esta pues

$$\begin{aligned} E(|\mathbf{X}(t)|^{2p}) &\leq 2^{2p}E(|\mathbf{X}(t)-\mathbf{Z}|^{2p})+2^{2p}E(|\mathbf{Z}|^{2p}) \\ &\leq 2^{2p}(e^{Dt^p}-1)(1+E(|\mathbf{Z}|^{2p}))+2^{2p}E(|\mathbf{Z}|^{2p}) \\ &\leq 2^{2p}e^{Dt^p}(1+E(|\mathbf{Z}|^{2p})) \end{aligned}$$

como queríamos ver.

□

Corolario 5.15. *Para todo $0\leq s\leq t\leq T$*

$$E(|\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}(s)|^{2p}) \leq C(t-s)^p(1+E(|\mathbf{Z}|^{2p}))$$

donde $C=C(L,T,n,m,p)$.

Demostración. Sea $s\in[0,T]$. Observar que para $t\geq s$ $\mathbf{X}(t)$ es solución de

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{X} &= \mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)\mathrm{d}t+\mathbf{B}(\mathbf{X}(t),t)\mathrm{d}\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(s) &= \mathbf{X}(s) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{X}(s)$ verifica $E(|\mathbf{X}(s)|^2)<\infty$ y es medible $\mathcal{F}_s$ con $\mathcal{F}_s$ independiente de $\mathcal{H}_t := \sigma(\mathbf{W}(r)-\mathbf{W}(s)|\, t\geq r\geq s)$. (Además $\mathcal{F}_t$ coincide con la filtración P aumentada de $\sigma(\mathcal{F}_s,\mathcal{H}_t)$.) Luego, como además $E(|\mathbf{X}(s)|^{2p})<\infty$ tenemos que, por el Teorema 5.14,

$$\begin{aligned} E(|\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}(s)|^{2p}) &\leq D(t-s)^pe^{D(t-s)^p}(1+E(|\mathbf{X}(s)|^{2p}) \\ &\leq D(t-s)^pe^{DT^p}\left(1+De^{Ds^p}(1+E(|\mathbf{Z}|^{2p}))\right) \\ &\leq \underbrace{De^{DT^p}(1+De^{DT^p})}_{=:C}(t-s)^p(1+E(|\mathbf{Z}|^{2p})) \end{aligned}$$

como queríamos ver □

Corolario 5.16. *Si $\mathbf{Z}\in L^{2p}_n(\Omega)$ con $p>1$ entonces $\forall\, 0<\gamma<\frac{p-1}{2p}$ $\mathbf{X}(t)$ es uniformemente continua Hölder con exponente γ.*

En particular si $\mathbf{Z}\in L^{2p}_n(\Omega)\,\forall\, p>1$ entonces $\forall\, 0<\gamma<\frac{1}{2}$ $\mathbf{X}(t)$ es uniformemente continua Hölder con exponente γ.

Demostración. Consecuencia directa del Corolario previo y del Teorema de Kolmogorov (Teorema 2.32). □

Teorema 5.17. Dependencia de los Parámetros en las Soluciones.

Sean $\mathbf{B}(\mathbf{x},t), \mathbf{b}(\mathbf{x},t), \mathbf{Z}$ *y* $\mathbf{B}^k(\mathbf{x},t), \mathbf{b}^k(\mathbf{x},t), \mathbf{Z}^k$ *para* $k \geq 1$ *como en el Teorema de Existencia y Unicidad, con la misma constante* L*. Sean* $\mathbf{X}(t), \mathbf{X}^k(t)$ $k \geq 1$ *las soluciones de*

$$\begin{array}{cc} \mathrm{d}\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)\mathrm{d}t + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t),t)\mathrm{d}\mathbf{W} & \mathrm{d}\mathbf{X} = \mathbf{b}^k(\mathbf{X}(t),t)\mathrm{d}t + \mathbf{B}^k(\mathbf{X}(t),t)\mathrm{d}\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{Z} & \mathbf{X}(0) = \mathbf{Z}^k \end{array}$$

respectivamente. Luego, si

$$\lim_{k\to\infty} E(|\mathbf{Z}^k - \mathbf{Z}|^2) = 0$$

y $\forall (\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$

$$\mathbf{b}^k(\mathbf{x},t) \to \mathbf{b}(\mathbf{x},t) \quad \mathbf{B}^k(\mathbf{x},t) \to \mathbf{B}(\mathbf{x},t)$$

entonces

$$\lim_{k\to\infty} E\left(\max_{0\leq t\leq T} |\mathbf{X}^k(t) - \mathbf{X}(t)|^2\right) = 0.$$

Demostración. (1) Si $0 \leq s,t \leq T$

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}^k(s)|^2 &\leq 9|\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^k|^2 + 9\left|\int_0^s \mathbf{b}(\mathbf{X}(r),r) - \mathbf{b}^k(\mathbf{X}^k(r),r)\mathrm{d}r\right|^2 \\ &\quad +9\left|\int_0^s \mathbf{B}(\mathbf{X}(r),r) - \mathbf{B}^k(\mathbf{X}^k(r),r)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2 \\ &\leq 9|\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^k|^2 + 9T\int_0^t |\mathbf{b}(\mathbf{X}(r),r) - \mathbf{b}^k(\mathbf{X}^k(r),r)|^2\mathrm{d}r \\ &\quad +9\left|\int_0^s \mathbf{B}(\mathbf{X}(r),r) - \mathbf{B}^k(\mathbf{X}^k(r),r)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} E\left(\max_{0\leq s\leq t} |\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}^k(s)|^2\right) &\leq 9E(|\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^k|^2) \\ &\quad +9TE\left(\int_0^t |\mathbf{b}(\mathbf{X}(r),r) - \mathbf{b}^k(\mathbf{X}^k(r),r)|^2\mathrm{d}r\right) \\ &\quad +9E\left(\max_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s \mathbf{B}(\mathbf{X}(r),r) - \mathbf{B}^k(\mathbf{X}^k(r),r)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2\right) \end{aligned}$$

Trabajemos un poco el último sumando. Usando la desigualdad martingal (ver Teorema 2.13) tenemos que

$$
\begin{aligned}
& E\left(\max_{0\le s\le t}\left|\int_0^s \mathbf{B}(\mathbf{X}(r),r)-\mathbf{B}^k(\mathbf{X}^k(r),r)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2\right)\\
\le\ & \sum_{i=1}^n E\left(\max_{0\le s\le t}\left|\overbrace{\int_0^t \mathbf{B}_i(\mathbf{X}(r),r)-\mathbf{B}_i^k(\mathbf{X}^k(r),r)\mathrm{d}\mathbf{W}}^{\text{martingala}}\right|^2\right)\\
\le\ & \sum_{i=1}^n 4E\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}_i(\mathbf{X}(r),r)-\mathbf{B}_i^k(\mathbf{X}^k(r),r)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2\right)\\
=\ & 4E\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}(r),r)-\mathbf{B}^k(\mathbf{X}^k(r),r)\mathrm{d}\mathbf{W}\right|^2\right)\\
=\ & 4E\left(\int_0^t |\mathbf{B}(\mathbf{X}(r),r)-\mathbf{B}^k(\mathbf{X}^k(r),r)|^2\mathrm{d}r\right).
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
E\left(\max_{0\le s\le t}|\mathbf{X}(s)-\mathbf{X}^k(s)|^2\right) \le\ & 9E(|\mathbf{Z}-\mathbf{Z}^k|^2)\\
& +9TE\left(\int_0^t |\mathbf{b}(\mathbf{X}(r),r)-\mathbf{b}^k(\mathbf{X}^k(r),r)|^2\mathrm{d}r\right)\\
& 36E\left(\int_0^t |\mathbf{B}(\mathbf{X}(r),r)-\mathbf{B}^k(\mathbf{X}^k(r),r)|^2\mathrm{d}r\right).
\end{aligned}
$$

(2) Por otro lado

$$
\begin{aligned}
& E\left(\int_0^t |\mathbf{b}(\mathbf{X}(r),r)-\mathbf{b}^k(\mathbf{X}^k(r),r)|^2\mathrm{d}r\right)\\
\le\ & \overbrace{2\,E\left(\int_0^T |\mathbf{b}(\mathbf{X}(r),r)-\mathbf{b}^k(\mathbf{X}(r),r)|^2\mathrm{d}r\right)}^{=:A_k}\\
& +2E\left(\int_0^t |\mathbf{b}^k(\mathbf{X}(r),r)-\mathbf{b}^k(\mathbf{X}^k(r),r)|^2\mathrm{d}r\right)\\
\le\ & 2A_k+2L^2E\left(\int_0^t |\mathbf{X}(r)-\mathbf{X}^k(r)|^2\mathrm{d}r\right)\\
\le\ & 2A_k+2L^2\int_0^t E\left(\max_{0\le s\le r}|\mathbf{X}(s)-\mathbf{X}^k(s)|^2\right)\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

y similarmente obtenemos que

$$\begin{aligned}
& E\left(\int_0^t |\mathbf{B}(\mathbf{X}(r),r)-\mathbf{B}^k(\mathbf{X}^k(r),r)|^2 \mathrm{d}r\right) \\
\leq\ & 2\,\overbrace{E\left(\int_0^T |\mathbf{B}(\mathbf{X}(r),r)-\mathbf{B}^k(\mathbf{X}(r),r)|^2 \mathrm{d}r\right)}^{=:B_k} \\
& +2L^2\int_0^t E\left(\max_{0\leq s\leq r}|\mathbf{X}(s)-\mathbf{X}^k(s)|^2\right)\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
& E\left(\max_{0\leq s\leq t}|\mathbf{X}(s)-\mathbf{X}^k(s)|^2\right) \\
\leq\ & 9E(|\mathbf{Z}-\mathbf{Z}^k|^2)+18TA_k+72B_k \\
& +\overbrace{(18TL^2+72L^2)}^{=:C}\int_0^t E\left(\max_{0\leq s\leq r}|\mathbf{X}(s)-\mathbf{X}^k(s)|^2\right)\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

Luego, si tomamos $v(t) := E\left(\max_{0\leq s\leq t}|\mathbf{X}(s)-\mathbf{X}^k(s)|^2\right)$ y $D_k := 9E(|\mathbf{Z}-\mathbf{Z}^k|^2)+18TA_k+72B_k$ tenemos que

$$v(t) \ \leq\ D_k + C\int_0^t v(r)\mathrm{d}r$$

y entonces, por el Lema de Gronwall, concluimos que

$$E\left(\max_{0\leq s\leq T}|\mathbf{X}(s)-\mathbf{X}^k(s)|^2\right) = v(T)\leq D_k e^{CT}.$$

(3) Para finalizar la demostración basta entonces ver que $D_k \to 0$.

Sabemos que $E(|\mathbf{Z}-\mathbf{Z}^k|^2)\to 0$ por hipótesis. Veamos que $A_k \to 0$. Por hipótesis $\mathbf{b}^k(\mathbf{x},t)\to\mathbf{b}(\mathbf{x},t)\,\forall \mathbf{x},t$. Luego $|\mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)-\mathbf{b}^k(\mathbf{X}(t),t)|^2\to 0\,\forall(\omega,t)\in\Omega\times[0,T]$. Además

$$\begin{aligned}
|\mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)-\mathbf{b}^k(\mathbf{X}(t),t)|^2 &\leq 2|\mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)|^2+2|\mathbf{b}^k(\mathbf{X}(t),t)|^2 \\
&\leq 4L^2(1+|\mathbf{X}(t)|)^2
\end{aligned}$$

$\forall k\geq 1$, donde $E\left(\int_0^t(1+|\mathbf{X}(t)|)^2\mathrm{d}t\right)<\infty$. Luego, por el Teorema de Convergencia Mayorada

$$A_k = E\left(\int_0^T |\mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)-\mathbf{b}^k(\mathbf{X}(t),t)|^2\mathrm{d}t\right)\to 0.$$

Similarmente se prueba que $B_k\to 0$. Luego $D_k\to 0$ como queríamos ver.

$\square$

5.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas Lineales.

Definición 5.18. Diremos que la ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t), t)\mathrm{d}t + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t), t)\mathrm{d}\mathbf{W}$$

es lineal si los coeficientes $\mathbf{b}$ y $\mathbf{B}$ verifican que

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{x}$$

para $\mathbf{c} : [0,T] \to \mathbb{R}^n, \mathbf{D} : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ y

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{x}$$

para $\mathbf{E} : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbf{G} : [0,T] \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times m})$[6].

Si $c \equiv 0$ y $E \equiv 0$ diremos además que la ecuación lineal es *homogénea.*

Observación 5.19. Si la ecuación lineal

$$\mathrm{d}\mathbf{X} = (\mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{X}(t))\mathrm{d}t + (\mathbf{E}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{X})\mathrm{d}\mathbf{W}$$
$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{Z}$$

con $\mathbf{Z}$ medible $\mathcal{U}$ verifica que sus coeficientes $\mathbf{c}(t), \mathbf{D}(t), \mathbf{E}(t), \mathbf{F}(t)$ son continuos y $E(|\mathbf{Z}|^2) < \infty$ entonces, por el Teorema de Existencia y Unicidad, tiene una única solución.

En lo que sigue, y ya para ir terminando, deduciremos las soluciones generales de un conjunto amplio de ecuaciones estocásticas lineales.

5.3.1. Variación de Constantes.

Problema 5.20. Consideremos la ecuación lineal no homogénea

$$\mathrm{d}\mathbf{X} = (\mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{X}(t))\mathrm{d}t + \mathbf{E}(t)\mathrm{d}\mathbf{W}$$
$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{Z}$$

con coeficientes continuos y $\mathbf{Z}$ medible $\mathcal{U}$.

Si pensamos formalmente a $\mathbf{c}(t) + \mathbf{E}(t)\frac{\mathrm{d}\mathbf{W}}{\mathrm{d}t}$ como el término no homogéneo de un sistema lineal ordinario el método de Variación de Constantes nos da el candidato

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\left(\mathbf{Z} + \int_0^t \mathbf{\Phi}(s)^{-1}(\mathbf{c}(s)\mathrm{d}s + \mathbf{E}(s)\mathrm{d}\mathbf{W})\right)$$

donde $\mathbf{\Phi}(t)$ es la matriz fundamental del sistema

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{D}(t)\mathbf{X}(t)$$

con $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$.

[6] $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times m})$ es el espacio de funciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$.

Veamos que efectivamente es solución. Como $\Phi_{i,j}(t)$ no tiene diferencial Browniano la fórmula de Partes, adaptada al caso de una matriz por un vector se simplifica y nos da que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{X}(t) &= \mathrm{d}(\mathbf{\Phi}(t))\left(\mathbf{Z}+\int_0^t \mathbf{\Phi}(s)^{-1}(\mathbf{c}(s)\mathrm{d}s+\mathbf{E}(s)\mathrm{d}\mathbf{W})\right)\\
&\quad+\mathbf{\Phi}(t)\mathrm{d}\left(\mathbf{Z}+\int_0^t \mathbf{\Phi}(s)^{-1}(\mathbf{c}(s)\mathrm{d}s+\mathbf{E}(s)\mathrm{d}\mathbf{W})\right)\\
&= \mathbf{D}(t)\mathbf{\Phi}(t)\mathrm{d}t\left(\mathbf{Z}+\int_0^t \mathbf{\Phi}(s)^{-1}(\mathbf{c}(s)\mathrm{d}s+\mathbf{E}(s)\mathrm{d}\mathbf{W})\right)\\
&\quad+\mathbf{\Phi}(t)(\mathbf{\Phi}(t)^{-1}\mathbf{c}(t)\mathrm{d}t+\mathbf{\Phi}(t)^{-1}\mathbf{E}(t\mathrm{d}\mathbf{W})\\
&= \mathbf{D}(t)\mathbf{X}(t)\mathrm{d}t+\mathbf{c}(t)\mathrm{d}t+\mathbf{E}(t)\mathrm{d}\mathbf{W}
\end{aligned}$$

como queríamos ver.

Si fuese $\mathbf{F}\not\equiv 0$ no nos serviría un razonamiento análogo puesto que $\mathbf{\Phi}$ ahora tendría diferencial Browniano y entonces la Fórmula de Partes se complicaría. Veremos, sin embargo, para $n=1$, que podremos encontrar una solución utilizando el método de Variación de Constantes en el contexto estocástico.

Problema 5.21. Sean $n=1, m\geq 1$ y consideremos la ecuación

$$\mathrm{d}X_t=(c(t)+d(t)X_t)\mathrm{d}t+(\mathbf{e}(t)+\mathbf{g}(t)X_t)\mathrm{d}\mathbf{W}$$
$$X_o=Z$$

con coeficientes continuos y Z medible $\mathcal{U}$. Busquemos entonces una solución de la forma

$$X_t=X_t^{(1)}X_t^{(2)}$$

donde

$$\mathrm{d}X_t^{(1)}=d(t)X_t^{(1)}(t)\mathrm{d}t+\mathbf{g}(t)X_t^{(1)}(t)\mathrm{d}\mathbf{W}$$
$$X_0^{(1)}=1.$$

Digamos que

$$\mathrm{d}X_t^{(2)}=A(t)\mathrm{d}t+\mathbf{B}(t)\mathrm{d}\mathbf{W}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t &= X_t^{(2)}\mathrm{d}X_t^{(1)}+X_t^{(1)}\mathrm{d}X_t^{(2)}+\mathbf{g}(t)\mathbf{B}(t)X_t^{(1)}\mathrm{d}t\\
&= d(t)X_t\mathrm{d}t+\mathbf{g}(t)X_t\mathrm{d}\mathbf{W}+X_t^{(1)}(A(t)\mathrm{d}t+\mathbf{B}(t)\mathrm{d}\mathbf{W})+\mathbf{g}(t)\mathbf{B}(t)X_t^{(1)}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Basta entonces pedir que

$$X_t^{(1)}(A(t)\mathrm{d}t+\mathbf{B}(t)\mathrm{d}\mathbf{W})+\mathbf{g}(t)\mathbf{B}(t)X_t^{(1)}\mathrm{d}t=c(t)\mathrm{d}t+\mathbf{e}(t)\mathrm{d}\mathbf{W}.$$

Tomemos entonces

$$\mathbf{B}(t)=(X_t^{(1)})^{-1}\mathbf{e}(t)$$
$$A(t)=(X_t^{(1)})^{-1}(c(t)-\mathbf{g}(t)\mathbf{e}(t)).$$

Observar que esto es posible pues (como vimos en el Ejemplo 5.5) $X_t^{(1)} = e^{\int_0^t \mathbf{g}(s)\mathrm{d}\mathbf{W} + \int_0^t d(s) - \frac{1}{2}\mathbf{g}^2(s)\mathrm{d}s}$. Luego, para que además se satisfaga la condición inicial tomemos

$$X_t^{(2)} = Z + \int_0^t (X_s^{(1)})^{-1}(c(s) - \mathbf{g}(s)\mathbf{e}(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (X_s^{(1)})^{-1}\mathbf{e}(s)\mathrm{d}\mathbf{W}$$

y con esto queda expresada de forma explícita la solución de nuestra ecuación.

Fin.

6. Apéndice A

Notación 6.1. Sea $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$ tal que $|\mathbf{i}| = \sum_{j=1}^n i_j = m$. Notaremos

$$f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}(\mathbf{x})$$

Notación 6.2. Sean $f_n, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f_n converge a f uniformemente sobre compactos notaremos

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{O}} f.$$

En este apéndice nuestro objetivo será probar el siguiente resultado.

Teorema 6.3. *Sea $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$. Luego existen $Q_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polinomios tales que para todo $\mathbf{i}$ tal que $|\mathbf{i}| \leq m$*

$$Q_n^{(\mathbf{i})} \xrightarrow{\mathcal{O}} f^{(\mathbf{i})}.$$

Para este fin nos servirá probarlo primero para $f \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$ y luego analizar el caso general. La demostración (para $f \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$) consistirá esencialmente en:

- Considerar las convoluciones $f * K_\varepsilon$, donde K_ε son aproximaciones de la identidad, y ver que $(f * K_\varepsilon)^{(\mathbf{i})}$ convergen uniformemente a $f^{(\mathbf{i})}$.
- Tomar $P_n(\mathbf{x})$ polinomios tales que $P_n(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathcal{O}} K(\mathbf{x})$.
- Considerar las funciones $Q_n = f * (P_n)_\varepsilon$ y ver que estos son polinomios tales que $Q_n^{(\mathbf{i})} \xrightarrow{\mathcal{O}} (f * K_\varepsilon)^{(\mathbf{i})}$.

Luego, la demostración saldrá como un simple proceso diagonal.

Empecemos entonces a trabajar con las convoluciones.

Teorema 6.4. *Si $f \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$ y K es localmente integrable entonces $f * K \in C^m(\mathbb{R}^n)$ y*

$$(f * K)^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x}) = (f^{(\mathbf{i})} * K)(\mathbf{x}) \quad \textit{para } |\mathbf{i}| \leq m.$$

Demostración. Sea $R > 0$ tal que $\operatorname{sop} f \subset B_R(0)$. Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$(f * K)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{t})K(\mathbf{x} - \mathbf{t})\mathrm{d}\mathbf{t} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{t})K(\mathbf{t})\mathrm{d}\mathbf{t} = \int_{B_M(0)} f(\mathbf{x} - \mathbf{t})K(\mathbf{t})\mathrm{d}\mathbf{t}$$

donde $M = |\mathbf{x}| + R$.

Veamos ahora que $f * K$ es continua. Sea $\varepsilon > 0$. Para $M > |\mathbf{x}| + R$ y $|\mathbf{h}| < M - |\mathbf{x}| - R$,

$$|(f * K)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (f * K)(\mathbf{x})| =$$

$$\left| \int_{B_M(0)} f(\mathbf{x} + \mathbf{h} - \mathbf{t})K(\mathbf{t})\mathrm{d}\mathbf{t} - \int_{B_M(0)} f(\mathbf{x} - \mathbf{t})K(\mathbf{t})\mathrm{d}\mathbf{t} \right| \leq$$

$$\int_{B_M(0)} |f(\mathbf{x} + \mathbf{h} - \mathbf{t}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{t})||K(\mathbf{t})|\mathrm{d}\mathbf{t} = \bigstar$$

Como f tiene soporte compacto y es continua es uniformemente continua. Luego para $\mathbf{h}$ pequeño $|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}-\mathbf{t})-f(\mathbf{x}-\mathbf{t})|<\varepsilon/\|K\|_{L^1(B_M(0))}$ $\forall\mathbf{t}$ con lo cual

$$\bigstar \leq \frac{\varepsilon}{\|K\|_{L^1(B_M(0))}}\int_{B_M(0)}|K(\mathbf{t})|\mathrm{d}\mathbf{t}\leq\varepsilon.$$

Luego, hemos probado que $f*K$ es continua.

Veamos ahora la existencia de las derivadas parciales. Empecemos con $m=1$. Sea $\mathbf{i}=\mathbf{e}_i$ con $1\leq i\leq n$. Tomemos $\mathbf{h}=h\mathbf{e}_i$. Sea $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ y $\varepsilon>0$. Luego, para $M>|\mathbf{x}|+R$ y $|h|<M-|\mathbf{x}|-R$

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(f*K)(\mathbf{x}+\mathbf{h})-(f*K)(\mathbf{x})}{h}-(f^{(\mathbf{i})}*K)(\mathbf{x})\right|\\ &\qquad=\left|\int_{B_M(0)}\frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{h}-\mathbf{t})-f(\mathbf{x}-\mathbf{t})}{h}K(\mathbf{t})\mathrm{d}\mathbf{t}-\int_{B_M(0)}f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x}-\mathbf{t})K(\mathbf{t})\mathrm{d}\mathbf{t}\right|\\ &\qquad\qquad=\left|\int_{B_M(0)}\left(f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x}+\mathbf{h}'-\mathbf{t})-f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x}-\mathbf{t})\right)K(\mathbf{t})\mathrm{d}\mathbf{t}\right|=\bigstar\end{aligned}$$

por el teorema del valor medio, donde $\mathbf{h}'=h'\mathbf{e}_i$ con h' entre 0 y h. Como $f^{(\mathbf{i})}$ es continua y tiene soporte compacto es uniformemente continua. Luego, para h pequeño $\left|f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x}+\mathbf{h}-\mathbf{t})-f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x}-\mathbf{t})\right|<\varepsilon/\|K\|_{L^1(B_M(0))}$ $\forall\mathbf{t}$ con lo cual

$$\bigstar \leq \frac{\varepsilon}{\|K\|_{L^1(B_M(0))}}\int_{B_M(0)}|K(\mathbf{t})|\mathrm{d}\mathbf{t}\leq\varepsilon.$$

Luego, hemos probado que existen las derivadas parciales para $m=1$ y que

$$(f*K)^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x})=(f^{(\mathbf{i})}*K)(\mathbf{x}).$$

La continuidad de éstas se la obtiene similarmente a lo hecho para $(f*K)$.

La demostración para cualquier m se la obtiene por inducción utilizando el resultado para $m=1$. $\square$

Recordemos la notación $K_\varepsilon(\mathbf{x})=\varepsilon^{-n}K(\mathbf{x}/\varepsilon)$. Para ver que las $f_\varepsilon(\mathbf{x})=f*K_\varepsilon$ convergen de la forma deseada a nuestra f utilizaremos el siguiente resultado general de aproximación, cuya demostración se puede encontrar (en una versión apenas distinta) en [WH/ZY, Teorema (9.8)].

Lema 6.5. *Sea $f_\varepsilon=f*K_\varepsilon$, donde $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uniformemente continua, $K\in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\int_{\mathbb{R}^n}K=1$. Entonces f_ε converge uniformemente a f cuando $\varepsilon\to0$.*

Teorema 6.6. *Sea $f_\varepsilon=f*K_\varepsilon$, donde $f\in C_0^m(\mathbb{R}^n)$, $K\in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\int_{\mathbb{R}^n}K=1$. Entonces, para $|\mathbf{i}|\leq m$, $f_\varepsilon^{(\mathbf{i})}$ converge uniformemente a $f^{(\mathbf{i})}$ cuando $\varepsilon\to0$.*

Demostración. Por el Teorema 6.4 tenemos que $f_\varepsilon^{(\mathbf{i})}=f^{(\mathbf{i})}*K_\varepsilon$ y como $f^{(\mathbf{i})}\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y es uniformemente continua por ser $f^{(\mathbf{i})}\in C_0(\mathbb{R}^n)$ entonces, por el Lema previo, $f_\varepsilon^{(\mathbf{i})}$ converge uniformemente a f cuando $\varepsilon\to0$, como queríamos ver. $\square$

Proposición 6.7. *Existen $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $P_n(\mathbf{x})$ polinomios tales que $\int_{\mathbb{R}^n} K = 1$ y $P_n \xrightarrow{\mathcal{O}} K$.*

Demostración. Tomemos

$$K(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-|\mathbf{x}|^2}$$

que ya sabemos que verifica $\int_{\mathbb{R}^n} K = 1$.Veamos la existencia de los polinomios.

Como $g_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!} \xrightarrow{\mathcal{O}} e^x$, entonces

$$P_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^{n/2}} g_n(-|\mathbf{x}|^2) \xrightarrow{\mathcal{O}} \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-|\mathbf{x}|^2} = K(\mathbf{x}).$$

Pero $P_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^{n/2}} g_n(-\mathbf{x}_1^2 - \cdots - \mathbf{x}_n^2)$ son polinomios (de grado $2n$). Luego, hemos concluido la demostración. $\square$

Proposición 6.8. *Si $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ y $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un polinomio de grado m entonces $(f * P)(\mathbf{x})$ también es un polinomio de grado menor o igual a m.*

Demostración. Sea

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{|\mathbf{i}|=0 \\ \mathbf{i} \in \mathbb{N}^{\mathbf{n}}}}^{m} a_i \mathbf{x}^{\mathbf{i}} \quad \text{donde } \mathbf{x}^{\mathbf{i}} = \mathbf{x}_1^{\mathbf{i}_1} \ldots \mathbf{x}_n^{\mathbf{i}_n}.$$

Dado que

$$(f * P)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{t}) P(\mathbf{x} - \mathbf{t}) \mathrm{d}\mathbf{t},$$

escribamos entonces para $\mathbf{t}$ fijo a $P(\mathbf{x} - \mathbf{t})$ en términos de la variable $\mathbf{x}$. Como

$$\left. \frac{\partial^{\mathbf{i}} P(\mathbf{x} - \mathbf{t})}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{i}}} \right|_{\mathbf{x}=0} = \left(\frac{\partial^{\mathbf{i}} P}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{i}}} \right) (-\mathbf{t}) = P^{(\mathbf{i})}(-\mathbf{t})$$

y $P(\mathbf{x} - \mathbf{t})$ es un polinomio de grado m, tenemos que

$$P(\mathbf{x} - \mathbf{t}) = \sum_{|\mathbf{i}|=0}^{m} \frac{P^{(\mathbf{i})}(-\mathbf{t})}{\mathbf{i}!} \mathbf{x}^{\mathbf{i}} \quad \text{donde } \mathbf{i}! = \mathbf{i}_1! \ldots . \mathbf{i}_n!.$$

Luego

$$(f * P)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{t}) \sum_{|\mathbf{i}|=0}^{m} \frac{P^{(\mathbf{i})}(-\mathbf{t})}{\mathbf{i}!} \mathbf{x}^{\mathbf{i}} \mathrm{d}\mathbf{t} = \sum_{|\mathbf{i}|=0}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{t}) \frac{P^{(\mathbf{i})}(-\mathbf{t})}{\mathbf{i}!} \mathrm{d}\mathbf{t} \right) \mathbf{x}^{\mathbf{i}}$$

es un polinomio de grado menor o igual a m, como queríamos ver. $\square$

Teorema 6.9. *Sea $f \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$. Luego existen $Q_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polinomios tales que para todo $\mathbf{i}$ tal que $|\mathbf{i}| \leq m$*

$$Q_n^{(\mathbf{i})} \xrightarrow{\mathcal{O}} f^{(\mathbf{i})}.$$

Demostración. Sean $K(\mathbf{x}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $P_n(\mathbf{x})$ polinomios como en la Proposición 6.7, o sea tales que $\int_{\mathbb{R}^n} K = 1$ y $P_n \xrightarrow{\mathcal{O}} K$.

Para probar nuestro teorema probaremos el siguiente enunciado equivalente: Dado un compacto $\bar{B}_R(0) \supset \operatorname{sop} f$ existen $Q_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polinomios tales que para todo $\mathbf{i}$, $|\mathbf{i}| \leq m$

$$Q_n^{(\mathbf{i})} \text{ convergen uniformente a } f^{(\mathbf{i})} \text{ en } \bar{B}_R(0).$$

Sea entonces $\varepsilon_0 > 0$. Por el Teorema 6.6 sabemos que $f_\varepsilon = f * K_\varepsilon$ verifica que

$$\left\| f^{(\mathbf{i})} - f_\varepsilon^{(\mathbf{i})} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Tomemos entonces $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left\| f^{(\mathbf{i})} - f_\varepsilon^{(\mathbf{i})} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \forall \mathbf{i},\ |\mathbf{i}| \leq m.$$

Construyamos ahora el polinomio Q_n tal que $Q_n^{(\mathbf{i})}$ aproxima a $f_\varepsilon^{(\mathbf{i})}$. Por el Teorema 6.4 tenemos para $\mathbf{x} \in \bar{B}_R(0)$

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x}) = (f^{(\mathbf{i})} * K_\varepsilon)(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{t}) K_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{t}) \mathrm{d}\mathbf{t} = \int_{\mathbb{R}^n} f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x} - \mathbf{t}) K_\varepsilon(\mathbf{t}) \mathrm{d}\mathbf{t} \\ &= \int_{B_{2R}(0)} f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x} - \mathbf{t}) K_\varepsilon(\mathbf{t}) \mathrm{d}\mathbf{t} = \int_{B_{2R}(0)} f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x} - \mathbf{t}) \varepsilon^{-n} K(\mathbf{t}/\varepsilon) \mathrm{d}\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Tomemos entonces n tal que

$$\varepsilon^{-n} \left| K(\mathbf{x}) - P_n(\mathbf{x}) \right| < \frac{\varepsilon_0}{2M} \quad \text{en } \bar{B}_{2R/\varepsilon}(0),$$

donde M es cota de $\left\| f^{(\mathbf{i})} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ para todo $\mathbf{i}$ tal que $|\mathbf{i}| \leq m$.

Consideremos entonces

$$Q_n(\mathbf{x}) = (f * P_\varepsilon^n)(\mathbf{x})$$

donde $P^n(\mathbf{x}) = P_n(\mathbf{x})$. Por la Proposición 6.8 $Q_n(\mathbf{x})$ resulta un polinomio. Veamos que verifica

$$\left\| f^{(\mathbf{i})} - Q_n^{(\mathbf{i})} \right\|_{L^\infty(\bar{B}_R(0))} \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{para todo } \mathbf{i} \text{ tal que } |\mathbf{i}| \leq m.$$

Por el teorema 6.4, como P_ε^n es localmente integrable, tenemos para $\mathbf{x} \in \bar{B}_R(0)$

$$\begin{aligned} Q_n^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x}) = (f^{(\mathbf{i})} * P_\varepsilon^n)(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{t}) P_\varepsilon^n(\mathbf{x} - \mathbf{t}) \mathrm{d}\mathbf{t} \\ &= \int_{B_{2R}(0)} f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x} - \mathbf{t}) P_\varepsilon^n(\mathbf{t}) \mathrm{d}\mathbf{t} = \int_{B_{2R}(0)} f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x} - \mathbf{t}) \varepsilon^{-n} P^n(\mathbf{t}/\varepsilon) \mathrm{d}\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Luego, para $\mathbf{x} \in \bar{B}_R(0)$ y cualquier $\mathbf{i}$ tal que $|\mathbf{i}| \leq m$,

$$\begin{aligned}\left|f_\varepsilon^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x}) - Q_n^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x})\right| &= \left|\int_{B_{2R}(0)} f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x}-\mathbf{t})\varepsilon^{-n}\left(K(\mathbf{t}/\varepsilon) - P^n(\mathbf{t}/\varepsilon)\right)\mathrm{d}\mathbf{t}\right| \\ &\leq \int_{B_{2R}(0)} \left|f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x}-\mathbf{t})\right| \frac{\varepsilon_0}{2M}\mathrm{d}\mathbf{t} \leq \frac{\varepsilon_0}{2M}\left\|f^{(\mathbf{i})}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\varepsilon_0}{2}.\end{aligned}$$

Luego $\left\|f_\varepsilon^{(\mathbf{i})} - Q_n^{(\mathbf{i})}\right\|_{L^\infty(\bar{B}_R(0))} \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ para todo $\mathbf{i}$ tal que $|\mathbf{i}| \leq m$, como queríamos ver.

Luego, para todo $\mathbf{i}$, $|\mathbf{i}| \leq m$

$$\left\|f^{(\mathbf{i})} - Q_n^{(\mathbf{i})}\right\|_{L^\infty(\bar{B}_R(0))} \leq \left\|f^{(\mathbf{i})} - f_\varepsilon^{(\mathbf{i})}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \left\|f_\varepsilon^{(\mathbf{i})} - Q_n^{(\mathbf{i})}\right\|_{L^\infty(\bar{B}_R(0))} < \varepsilon_0,$$

lo cual culmina nuestra demostración. □

Visto ya el resultado para $f \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$ veamos la demostración del caso general.

Demostración. del Teorema 6.3.

Igual que en la demostración anterior, alcanza con probar que dado un compacto $\bar{B}_R(0)$ existen polinomios $Q_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que para todo $\mathbf{i}$, $|\mathbf{i}| \leq m$

$$Q_n^{(\mathbf{i})} \text{ converge uniformemente a } f^{(\mathbf{i})} \text{ en } \bar{B}_R(0).$$

Para ello tomemos $\chi_R \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi_R(\mathbf{x}) = 1$ en $B_{R+1}(0)$. Luego $g := f \cdot \chi_R \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto existen $Q_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polinomios tales que

$$Q_n^{(\mathbf{i})} \text{ converge uniformente a } g^{(\mathbf{i})} \text{ en } \bar{B}_R(0).$$

Pero como $f^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x}) = g^{(\mathbf{i})}(\mathbf{x})$ en $\bar{B}_R(0)\,\forall \mathbf{i}$, $|\mathbf{i}| \leq m$, concluimos la demostración. □

Referencias

[EVANS] L. C. Evans, *An Introduction to Stochastic Differential Equations*.

[KO/KO] R. Korn, E. Korn, *Option Pricing and Portfolio Optimization: Modern Methods of Financial Mathematics*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 31, AMS, 2000.

[KA/SH] I Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus,* Springer, 1991.

[WH/ZY] R. L. Wheeden, A. Zygmund, *Measure and Integral,* 1977.

[CH/DO] K. L. Chung, J. L. Doob, *Fields, optionality and measurability,* American Journal of Mathematics 87, 1965, 397-424.

[FRIED] A. Friedman, *Stochastic Differential Equations and Applications, Vol. 1 y 2,* Academic Press.

[GI/SK] I. I. Gihman, A. V. Skorohod, *Stochastic Differential Equations,* Springer, 1972.