



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Nudos virtuales e invariantes

Pablo Azcurra

Director: Matías Graña

11/04/2008

Índice general

0.1. Introducción	4
Capítulo 1. Nudos	7
1.1. Nudos clásicos	7
1.2. Código de Gauss	8
1.3. Diagramas de Gauss	10
1.4. Nudos virtuales	12
Capítulo 2. Invariantes	17
2.1. Grupo fundamental	17
2.2. Quandles	20
2.3. Cociclos	25
2.4. El polinomio de Jones y el corchete de Kauffman	30
Capítulo 3. El nudo de Kishino y nuevos invariantes	43
3.1. Nudo de Kishino	43
3.2. Extensión del polinomio de Jones	43
Capítulo 4. Programas para la clasificación de nudos virtuales	47
4.1. Programas	47
4.2. Datos obtenidos	54
Bibliografía	57

0.1. Introducción

En la primer parte de este trabajo realizamos un repaso sobre la teoría de nudos clásicos. Usualmente estos objetos se definen como inyecciones de \mathbf{S}^1 en el espacio \mathbb{R}^3 , las cuales tienen distintas maneras de ser representadas. La primera de ellas, los *diagramas planares* o simplemente *diagramas*, nos da una idea gráfica bastante clara de lo que uno puede llegar a entender por un nudo, y nos permite definir lo que llamaremos: **movimientos de Reidemeister**. Estos movimientos nos otorgan un primer método para identificar cuándo dos diagramas representan en verdad el mismo elemento [GPV]. Las otras representaciones de nudos con las que trabajamos son los códigos de Gauss y diagramas de Gauss.

Lamentablemente estas representaciones no establecen una relación uno a uno con los nudos; es decir, hay muchos códigos que son distintos pero que representan en realidad al mismo objeto, y lo mismo ocurre con los diagramas planares y de Gauss. Esto genera en el conjunto de códigos (y diagramas) una relación de equivalencia: dos códigos (diagramas) son equivalentes si representan al mismo nudo.

En el caso de los diagramas planares, los movimientos de Reidemeister determinan cuáles son esas relaciones, pero esto genera un método muy poco práctico ya que se basa exclusivamente en dibujos y esto no nos permite armar programas para que una computadora trabaje con ellos. En nuestro trabajo son los códigos de Gauss los que nos otorgan ese beneficio.

El problema central en la teoría de nudos es justamente determinar las clases de equivalencia para estas representaciones. En función a esto surgen los invariantes de nudos, funciones que asignan a cada elemento de una misma clase el mismo resultado. En el capítulo 2 mostramos algunos de los invariantes más conocidos.

Entre estos invariantes podríamos destacar los *quandles*, presentados por primera vez por *David Joyce* en [J], ya que se consiguen a partir de un algoritmo relativamente simple y alcanzan una buena eficacia en la clasificación de códigos de nudos clásicos. Más aún, en el último capítulo de este trabajo mostramos cómo creamos un programa, empleando el lenguaje de programación Python, para clasificar este tipo de códigos. En este programa utilizamos un invariante que toma a los quandles como punto de partida y mejora finalmente sus resultados: el *quandle 2-cociclo* [AG, GT].

Para los nudos clásicos existen una gran cantidad de invariantes. Presentamos, además de los dos que ya mencionamos, algunos otros: el grupo fundamental, el polinomio de Jones y una extensión de estos polinomios que dejamos para el capítulo 3 [J, KS]. (Ver también el survey [AM])

El objeto central de esta tesis es el estudio de los *nudos virtuales*. Los nudos virtuales son introducidos por *L. H. Kauffman* en [Ka1] como una extensión de los diagramas planares que antes mencionamos. Esta extensión se genera cuando aceptamos en estos diagramas un nuevo tipo de cruce: los *cruces virtuales* (que aquí presentamos en la Figura 1.7). En el segundo capítulo, veremos que los invariantes mencionados pueden ser utilizados para la clasificación de nudos virtuales, ya que los nuevos cruces virtuales no presentan ninguna dificultad para ellos.

Existen también algunos invariantes completos para nudos clásicos, entre los cuales mostramos el **group system** [E, W]. La desventaja que tiene este invariante, como el resto de los invariantes completos, es que si bien no es muy difícil de calcular, resulta demasiado complejo a la hora de comparar los resultados que nos brinda y establecer así las relaciones entre los objetos estudiados. En particular, saber si un

nudo es trivial a partir de su “group system” requiere resolver el problema de la palabra para grupos, problema que es irresoluble para un grupo general.

Siguiendo con los nudos clásicos, mucho se ha trabajado ya con ellos y con buenos resultados. Hoste, Thistlethwait y Weeks consiguieron clasificar nudos clásicos primos de hasta 16 cruces utilizando para esto el paquete de programas `knotscape` [HTW]. De esta manera pudieron ver que existen 1701936 de estos nudos, 491328 alternados y 1210608 no alternados.

En el capítulo 3 presentamos un ejemplo de nudo virtual: el **nudo de Kishino** [D, KS], el cual motiva un nuevo invariante que puede verse como una extensión del polinomio de Jones, o más precisamente del corchete de Kauffman, agregando a los diagramas N copias paralelas del mismo.

Por otro lado, el estudio de este nudo nos alerta sobre un problema que se hace presente en los quandles y quandles 2-cociclos a la hora de trabajar con nudos virtuales. Si bien estos invariantes han sido buenas herramientas de clasificación en el caso clásico, aún queda por verse qué tan buenos son para trabajar con nudos virtuales. En el último capítulo vemos cómo desarrollamos algunos programas con el objetivo de generar códigos de Gauss que representen a todos los nudos virtuales de hasta 5 cruces clásicos y clasificarlos usando el invariante quandle 2-cociclo.

El objetivo final de este trabajo es analizar qué tan efectivos son estos invariantes si trabajamos ahora con nudos virtuales. Los programas del capítulo 4 sirven para nudos virtuales, y de hecho presentamos en el mismo los resultados de correr estos programas sobre los nudos virtuales de 5 cruces (o menos). Como ya dijimos, una forma de representar a los nudos es mediante los llamados códigos de Gauss, que son secuencias numéricas cuya longitud depende de la cantidad de cruces clásicos que tenga el nudo. Un problema interesante que se nos presentó fue el de generar un algoritmo eficiente que nos permita construir la menor cantidad posible de códigos del mismo nudo. Para realizar esto fue fundamental el aporte de los trabajos de [S] y [CRSMS], quienes elaboraron algoritmos para generar códigos de diagramas de cuerdas, los cuales son muy similares a nuestros diagramas de Gauss.

CAPÍTULO 1

Nudos

Comenzaremos este trabajo dando algunas ideas y definiciones básicas de la teoría de nudos.

1.1. Nudos clásicos

La primer imagen que uno puede tener de un nudo es la siguiente: tomamos un trozo de cuerda, la doblamos, torcemos y manipulamos a nuestro antojo y finalmente unimos sus extremos de forma tal que no sea posible identificar donde está el punto de la unión, esa figura tridimensional que nos queda formada es lo que llamamos un nudo. Si movemos esa cuerda, sin cortarla, y deformamos el dibujo que teníamos, obtenemos otro nudo pero equivalente al anterior.

DEFINICIÓN 1.1. Un **nudo** es una inyección continua de \mathcal{S}^1 en el espacio \mathbb{R}^3 .

En el conjunto de todos los nudos definimos una relación de equivalencia: dos nudos f y g son *isotópicamente equivalentes* si existe una isotopía entre ellos, es decir, si existe una función $H : \mathcal{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua para la cual $H_t(x) = H(x, t)$ es un nudo para todo $t \in [0, 1]$, $H_0 = f$ y $H_1 = g$. De esta manera nos queda todo el conjunto dividido en clases.

Cuando un nudo es isotópico a uno dado por una función lineal a trozos (poligonal) se lo denomina nudo *manso*. A los nudos que no son mansos los llamamos *salvajes*. Podríamos decir entonces que los nudos mansos son aquellos que podemos identificar con los nudos reales. Son justamente estos los nudos que vamos a considerar en este trabajo.

Un *lazo* es la unión disjunta de finitos nudos o, dicho de otra manera, la imagen de finitas copias de \mathcal{S}^1 en \mathbb{R}^3 por una función continua e inyectiva. A cada una de las copias de \mathcal{S}^1 las llamamos componentes del lazo.

Vamos a representar nudos y lazos graficamente usando proyecciones sobre un plano, las cuales llamaremos *diagramas*. En estas proyecciones no aceptamos puntos triples ni puntos de tangencia y en los puntos dobles al arco que pasa por debajo lo dibujamos cortado. A las componentes conexas del diagrama vamos a llamarlas *arcos* y a los puntos dobles *cruces* (ver Figura 1.1).

OBSERVACIÓN 1.2. Vamos a hacer los dibujos con curvas, por más que nuestros nudos puedan ser representados por poligonales. Nos permitimos optar por este tipo de gráficos ya que sabemos que una curva puede ser aproximada por una poligonal de segmentos muy cortos.

Las clases de equivalencia que mencionamos antes pueden verse reflejadas en estos diagramas por los llamados movimientos de Reidemeister (ver Figura 1.2). Estos movimientos son pensados dentro de un pequeño dominio, fuera de este el diagrama permanece igual.

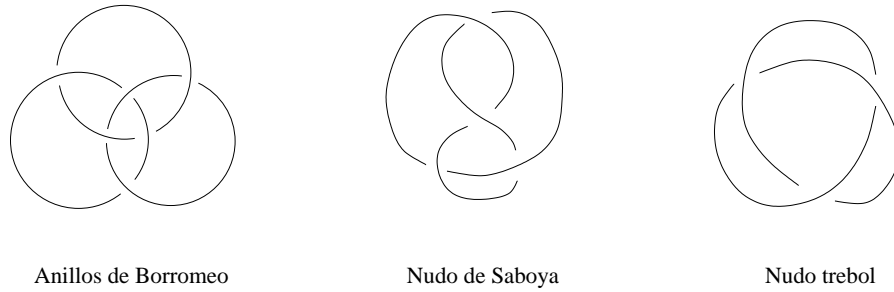


FIGURA 1.1. Algunos diagramas

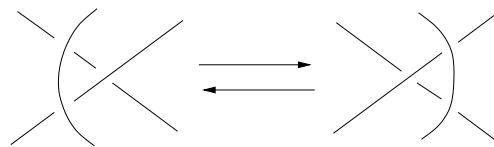


FIGURA 1.2. Movimientos de Reidemeister

TEOREMA 1.3. (*Reidemeister*)(Ver $[\mathbf{K}]$): *Dos diagramas son equivalentes si y solo si uno es obtenido a partir del otro por una secuencia finita de movimientos de Reidemeister y de isotopías de diagramas.*

Entendemos por isotopía de diagramas D y D' una isotopía lineal a trozos $H : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ en la cual $H(D, 1) = D'$.

1.2. Código de Gauss

El código de Gauss de un nudo es una tira de etiquetas que guardan la información necesaria como para poder construirlo. Para crear este código tenemos que definir una orientación en el nudo, elegir un punto en uno de sus arcos como punto de partida y luego enumerar los distintos cruces.

Una vez que tenemos esto empezamos a copiar en una línea los números correspondientes a cada cruce, siempre siguiendo la orientación del nudo, y agregándole

a su derecha el dato que nos dice si estamos pasando por debajo (u) o por arriba (o) del cruce (ver Figura 1.3).

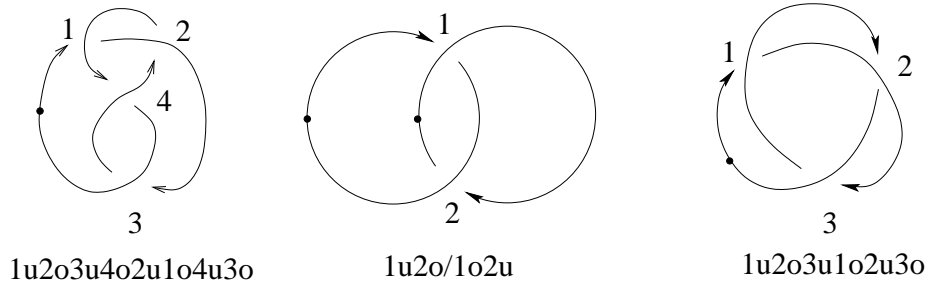


FIGURA 1.3. Algunos diagramas con sus códigos de Gauss

Si tenemos un lazo con más de una componente usamos / para identificar los distintos tramos (como se ve en el segundo diagrama de la Figura 1.3).

Como puede verse cada uno de los cruces aparece dos veces en el código ya que al recorrer el nudo pasamos dos veces por cada uno de ellos, una vez por arriba y otra por abajo. Otra cosa que podemos observar es que este código no siempre distingue un nudo de su imagen en el espejo, donde la imagen en el espejo la obtenemos intercambiando los arcos en cada cruce (el de arriba abajo y viceversa). Esto no es un problema menor ya que en general un nudo no es isotópico a su imagen en el espejo (un ejemplo es el nudo trébol), pero esto podremos verlo con más detalle cuando definamos algunos invariantes.

Una manera de solucionar esta ambigüedad es definiendo un signo en cada cruce según la siguiente convención: manteniendo siempre el arco superior apuntando para arriba, si el arco inferior cruza de derecha a izquierda el cruce es positivo, si cruza de izquierda a derecha es negativo. Este dato podemos agregarlo en nuestro código (ver Figura 1.4).

Así como definimos el diagrama de un nudo como la proyección a un plano en la cual informamos cuál es el arco que pasa por arriba y cuál el que pasa por debajo de cada cruce, definimos la sombra de un nudo también como la proyección a un plano, sin puntos triples ni puntos de tangencia, pero sin ninguna información sobre cómo se comportan los arcos en los cruces.

Por lo tanto diremos que la sombra de un código de Gauss es simplemente la tira de números que indica por qué cruces estamos pasando. Por ejemplo, la sombra del trébol tiene código 123123.

Ahora veamos que pasa si pensamos las cosas al revés, es decir, si primero creamos un código y después intentamos construir un diagrama que represente a ese código. Al hacer esto nos daremos cuenta que no siempre es posible encontrar tal diagrama, aún si miramos solamente las sombras. Por ejemplo: para el código 1212 no hay ninguna sombra que le corresponda.

Podemos entonces separar a los códigos de Gauss en dos grupos: los códigos que provienen de algún diagrama, a estos los llamaremos *códigos planares*, y los que no pueden ser representados de tal forma. A la hora de determinar cuáles son los códigos planares el primer criterio que encontramos es el que sigue de esta definición.

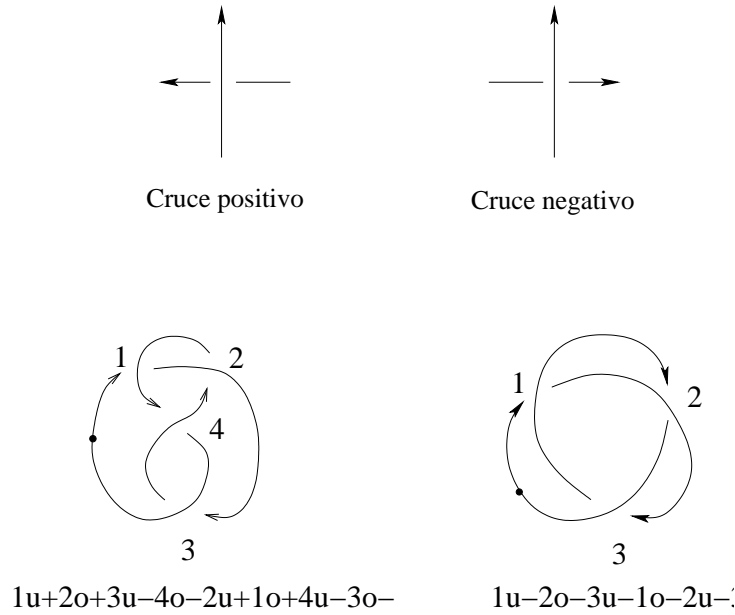


FIGURA 1.4. Signos de los cruces

DEFINICIÓN 1.4. Un código de Gauss de una sola componente se llama **evenly intersticed** (con intermedios pares) si hay un número par de etiquetas entre las dos apariciones de cada etiqueta.

(Aclaración: en este caso al hablar de etiquetas estamos refiriéndonos únicamente a los números que indican los cruces del diagrama, es decir que podríamos mirar solamente la sombra del código.)

PROPOSICIÓN 1.5. *Todo código planar de Gauss de una componente es evenly intersticed.*

DEMOSTRACIÓN. es un resultado directo del teorema de la curva de Jordan. \square

Esta condición de planaridad no es suficiente, por ejemplo el código 1234534125 es evenly intersticed pero no es planar. Pero por otro lado nos alcanza para afirmar que el código 1212 no es planar.

1.3. Diagramas de Gauss

El diagrama de Gauss de un nudo es un gráfico que contiene la misma información que ya trabajamos en los códigos de Gauss, pero en este caso esos datos están ubicados directamente sobre la circunferencia. Esto nos puede otorgar una idea más clara de cómo fue la inmersión que dio origen a tal nudo.

El diagrama de Gauss consiste entonces en una circunferencia orientada en sentido antihorario en la que también tomamos un punto de partida, el cual identificamos con el punto de partida que ya tomamos en el diagrama original, y sobre la cual marcamos la preimagen de cada uno de los cruces. Al igual que en el código de Gauss cada cruce aparece dos veces.

Cada par de estas preimágenes que corresponden a un mismo cruce las representamos unidas por una flecha, la cual tiene su cola apoyada sobre la preimagen superior del cruce y apunta hacia la preimagen inferior. Por último se le asigna a cada flecha el signo correspondiente al cruce que representa.

Podemos ver algunos ejemplos en la Figura 1.5.

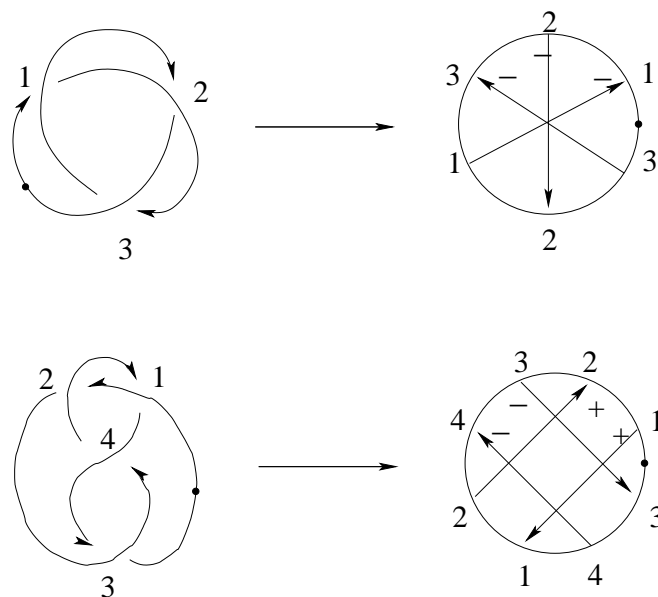


FIGURA 1.5. Ejemplos de diagramas de Gauss

En la Figura 1.6 vemos cómo afectan los movimientos de Reidemeister a los diagramas de Gauss. En estos diagramas $\varepsilon = \pm 1$ e indica cuál es el signo del cruce.

En estos diagramas la orientación de los arcos determinan cómo quedan ubicados los extremos de las flechas sobre la circunferencia, mientras que el sentido en el cual apunta cada flecha está determinado por cual es el arco que pasa por arriba del cruce. Esto ocasiona que cada movimiento de Reidemeister se divida en varios casos.

Los gráficos I y II corresponden el primer y segundo movimiento y las dos figuras del gráfico III corresponden al tercer movimiento. Este último se divide en 8 casos pero acá solo mostramos estos dos, ya que los otros seis pueden ser construidos a partir de los que estamos mostrando en esta figura [GPV, O]. Con esto queremos decir que cualquier secuencia de movimientos de Reidemeister realizados en los diagramas de Gauss puede ser remplazada por una secuencia de los movimientos que aparecen en la Figura 1.6.

Como dijimos antes los diagramas de Gauss contienen la misma información que los códigos, por lo que volvemos a tener el problema de que no cualquier diagrama de Gauss se corresponde efectivamente con un nudo. Acá es donde entran en juego los nudos virtuales.

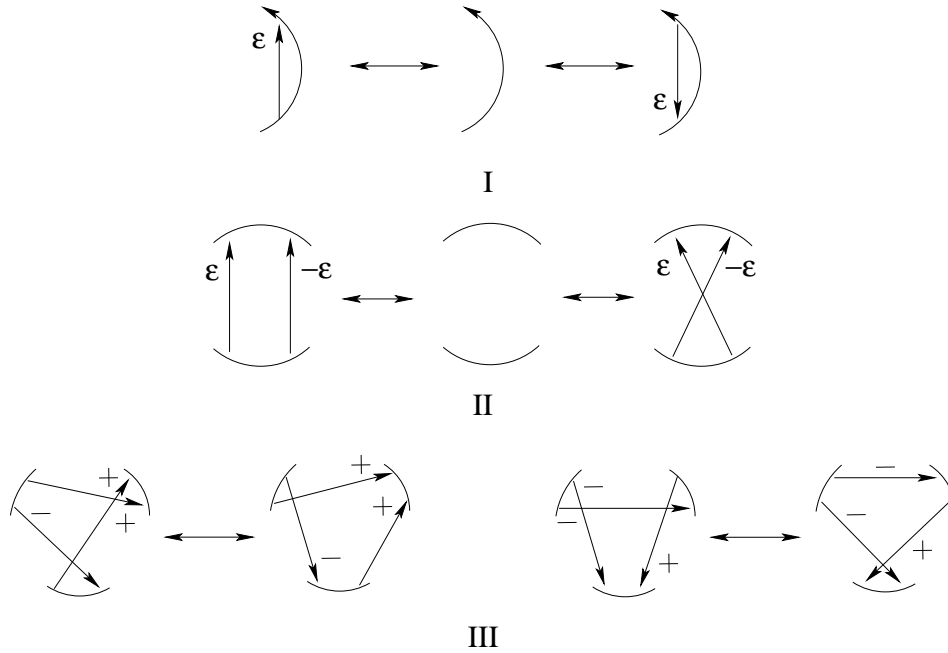


FIGURA 1.6. Movimientos de Reidemeister en los diagramas de Gauss

La teoría de nudos virtuales lo que hace es trabajar con el conjunto de todos los códigos (o diagramas) de Gauss, sean o no planares, y asociarlos bajo una relación de equivalencia que generaliza la idea anterior.

1.4. Nudos virtuales

Los nudos virtuales son nudos para los cuales los diagramas que los representan aceptan un nuevo tipo de cruce, a estos cruces vamos a dibujarlos decorados con una circunferencia (ver Figura 1.7).

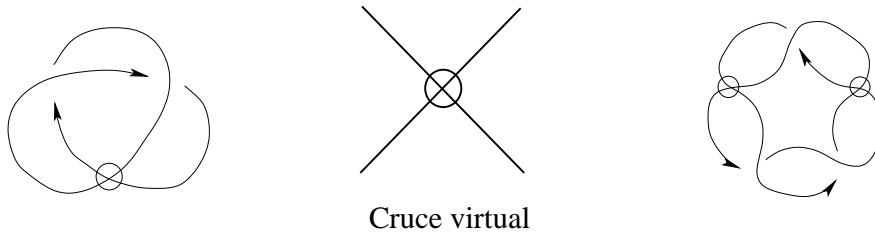


FIGURA 1.7. Nudos virtuales

Estos nuevos cruces aparecen en casos como estos: si intentamos hacer el diagrama de la sombra del nudo representado por el código 1212 nos vemos en la obligación de realizar un nuevo cruce que no aparece en dicho código (primer diagrama de la figura 1.7), ese es el cruce del que estábamos hablando y lo llamaremos

cruce virtual. Está claro que estos cruces son completamente distintos a los anteriores. Más aun, podríamos decir que un cruce virtual es un cruce que en realidad no está ahí.

Por lo tanto, se construye el código de Gauss de un diagrama virtual de la misma manera que antes, pero en este caso los cruces virtuales son ignorados (Figura 1.8).

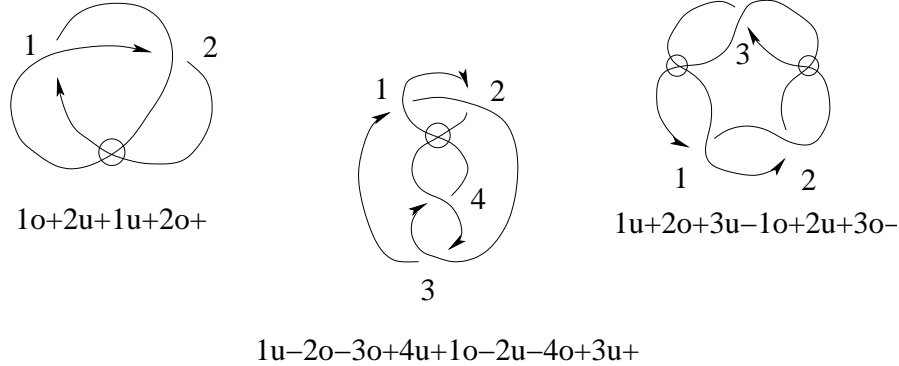


FIGURA 1.8. Códigos de Gauss para nudos virtuales

Según [FKM], cuando tenemos el diagrama de un nudo virtual podemos interpretarlo como el movimiento de una partícula en el espacio con una trayectoria que ocasionalmente desaparece y luego reaparece en algún otro lugar, conectando el punto donde desaparece y el punto donde reaparece con una manija en el espacio.

Como dijimos antes, esto generaliza la teoría clásica de nudos para trabajar con objetos que se identifican con los códigos de Gauss, aunque no sean necesariamente códigos planares. Por supuesto, miramos estos objetos bajo una equivalencia que extiende la isotopía clásica de nudos.

Para definir esta nueva relación de equivalencia, vamos a agregar a los movimientos de Reidemeister otros que involucran cruces virtuales. Estos nuevos movimientos se llaman *movimientos virtuales* (ver Figura 1.9).

Dos diagramas de nudos virtuales son equivalentes si están relacionados por una secuencia de movimientos de Reidemeister y movimientos virtuales. Definimos entonces un nudo virtual como una clase de equivalencia de los códigos de Gauss bajo los movimientos que recién mencionamos.

OBSERVACIÓN 1.6. Los movimientos que se muestran en la Figura 1.10 están prohibidos. Si uno permite estos dos movimientos obtiene la teoría trivial, es decir que todo nudo virtual puede ser desanudado completamente. Si uno permite uno solo de estos movimientos obtiene una teoría que Kauffman llama "*nudos soldados*" y que por el momento, carecen de interés.

OBSERVACIÓN 1.7. Los movimientos virtuales no modifican el código de Gauss. Por lo tanto tenemos que

Un código de Gauss define un diagrama de un lazo virtual con sus movimientos virtuales.

OBSERVACIÓN 1.8. Si un arco no contiene ningún cruce clásico puede ser trasladado a cualquier parte del diagrama, manteniendo fijos los extremos, usando una secuencia de movimientos virtuales.

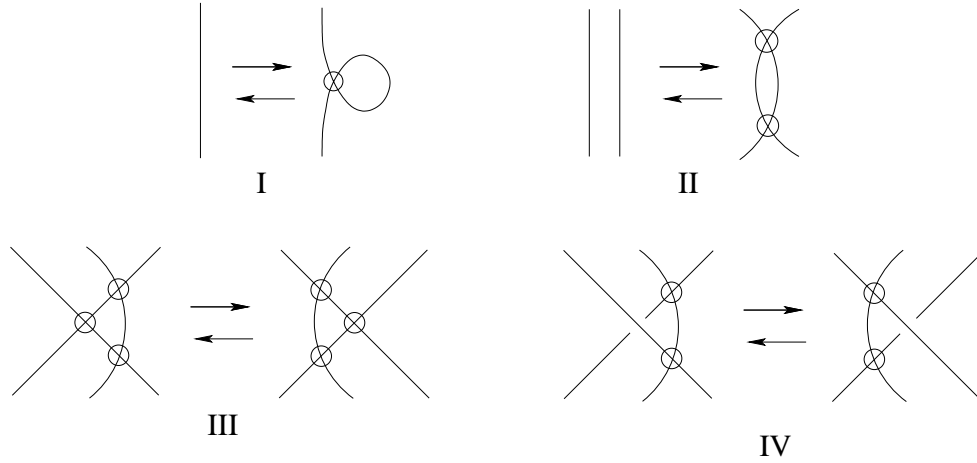


FIGURA 1.9. Movimientos virtuales

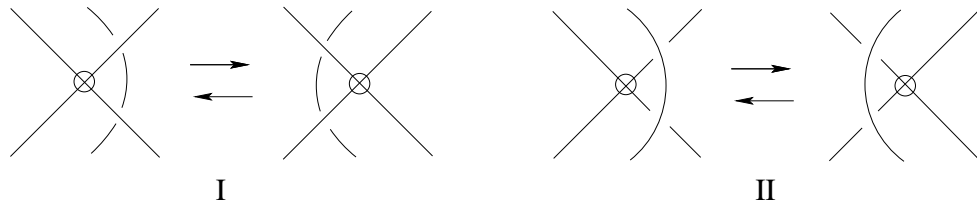


FIGURA 1.10. Movimientos prohibidos

Kauffman y Manturov muestran en [KM] una interpretación geométrica de los nudos virtuales en la cual puede verse por qué se eligen estos movimientos virtuales como válidos. La idea de este trabajo es pensar a los movimientos de Reidemeister y virtuales como la lista completa de las proyecciones sobre un plano de los nudos inmersos en una superficie engrosada con género g (la cual nombramos $S_g \times I$). En estos diagramas los cruces virtuales aparecen cuando al proyectar la figura se superponen dos arcos de distintas superficies.

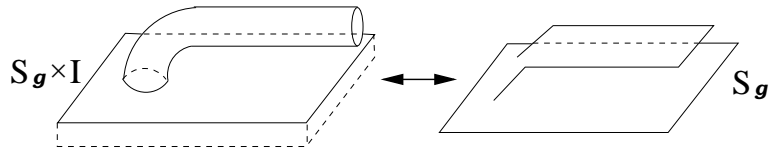


FIGURA 1.11. Representación de una superficie engrosada

Por una cuestión de comodidad a la hora de graficar, vamos a representar a las superficies engrosadas directamente como superficies, y a las manijas que determinan el género g , como porciones de otras superficies que se desprenden de la anterior como se puede ver en la Figura 1.11. De esta manera mostramos en las Figuras 1.12 y 1.13 cómo se generan los movimientos virtuales I y IV a partir de

las proyecciones que mencionamos antes.

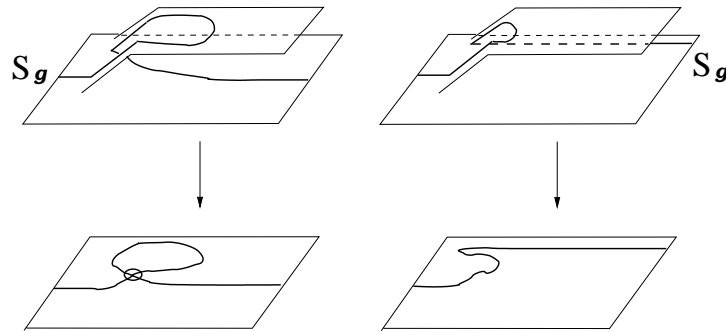


FIGURA 1.12. Movimiento virtual I

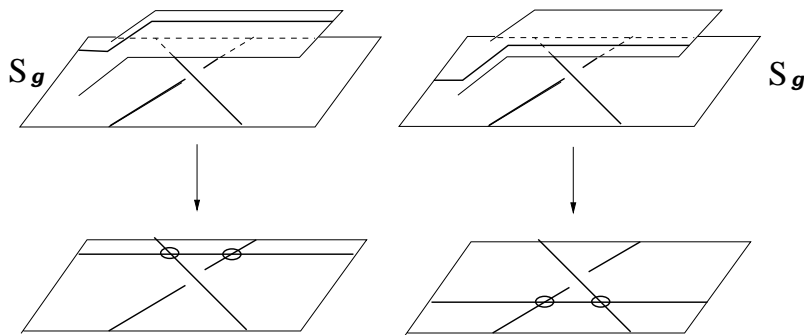


FIGURA 1.13. Movimiento virtual IV

Los diagramas de nudos clásicos pueden ser vistos entonces como diagramas virtuales y por medio de los movimientos de la figura 1.9 pueden generarse en ellos algunos cruces virtuales. Al tener estos otros movimientos en juego, además de los de Reidemeister, estamos planteando una nueva equivalencia que podría diferir con la anterior.

Lo que podría pasar es que dos diagramas que antes no eran equivalentes ahora sí lo sean, ya que tenemos más movimientos para trabajar.

El siguiente resultado es el que nos asegura que esto en realidad no ocurre.

TEOREMA 1.9. *Si dos nudos clásicos son equivalentes como nudos virtuales, lo son también como nudos clásicos.*

La demostración de este teorema la daremos después de ver el invariante del grupo fundamental.

Más adelante también trataremos con detalle el nudo de *Kishino* que presentamos en la Figura 1.14.

Este es un ejemplo de un nudo que a simple vista parece fácil de desanudar pero en realidad no lo es. Más aun, se pudo demostrar que el nudo de *Kishino* no es trivial. Una de las demostraciones puede verse en [KS] y [D] y será trabajada en el capítulo 3.

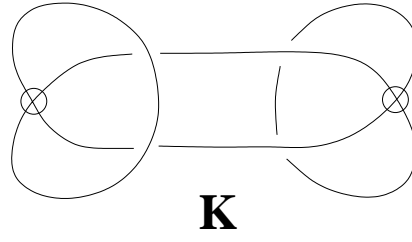


FIGURA 1.14. Nudo de Kishino

Invariantes

El problema principal que se nos plantea en la teoría de nudos es el de encontrar las clases de equivalencia de estos diagramas, es decir, encontrar los grupos de diagramas que son isotópicos entre sí. Este es un trabajo extremadamente complicado de resolver si solo conocemos los movimientos de Reidemeister. Es aquí donde entran en juego los invariantes de nudos: un **invariante** es una función que parte del conjunto de todos los diagramas de nudos y lazos, y que asigna a todos los diagramas de una misma clase de equivalencia el mismo valor.

2.1. Grupo fundamental

El *grupo fundamental* de un nudo clásico es el grupo fundamental de su complemento en \mathbb{R}^3 (o en \mathbf{S}^3). Comentaremos ahora algunos resultados que nos permiten dar presentaciones de estos grupos con cierta facilidad.

Dado un diagrama \mathbf{D} podemos obtener una presentación de su grupo fundamental si tomamos un generador por cada uno de sus arcos junto con una relación que definimos en los cruces (ver Figura 2.1).

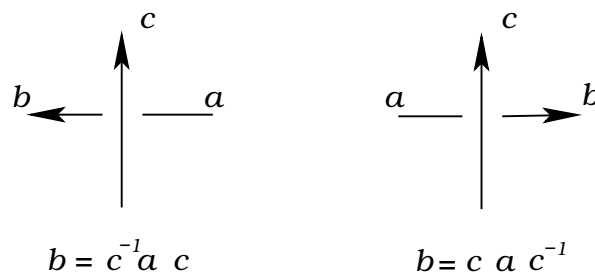


FIGURA 2.1. Relación en los cruces para el grupo fundamental

Llamemos entonces $G(\mathbf{D})$ a este grupo. Es fácil ver que este grupo es invariante bajo los movimientos de Reidemeister.

Esta manera de presentar el grupo fundamental de un nudo se conoce como *Wirtinger presentation*.

La misma construcción podemos hacer a partir de los diagrama de Gauss. Solo tenemos que tener en cuenta que los arcos que tomábamos antes como generadores del grupo ahora aparecen en la circunferencia entre dos puntas consecutivas de flechas, pues recordemos que al pasar por una punta de flecha estamos pasando en realidad por debajo de un cruce .

Por lo tanto en un diagrama de Gauss lo que hacemos es dividir la circunferencia en tantos arcos como flechas tenga, cada uno de estos arcos es un generador de nuestro grupo, y definimos las relaciones entre los arcos como se muestra en la figura 2.2.

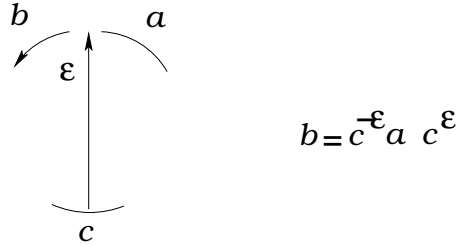


FIGURA 2.2. Relación de los arcos del diagrama de Gauss

Kauffman define en [Ka1] el grupo fundamental de un nudo virtual a partir de sus diagramas de la misma manera, con un generador por cada arco y una relación por cada cruce clásico.

Tengamos en cuenta que los cruces virtuales no dividen arcos. Es decir que en un diagrama virtual un arco tiene su origen en la parte inferior de un cruce clásico y termina también en la parte inferior de un cruce clásico, que podría ser el mismo, por más que en su recorrido atraviere algún cruce virtual.

Por lo tanto los cruces virtuales no agregan generadores ni relaciones en el grupo, y como puede verse en la figura 1.9 ninguno de los movimientos virtuales modifican ni los cruces ni los arcos. Esto nos dice que el grupo fundamental es también un invariante para nudos virtuales.

En la figura 2.3 vemos un nudo virtual que tiene un grupo fundamental trivial (entendemos por grupo fundamental trivial al grupo cíclico infinito) por más que no se trate efectivamente del nudo trivial.

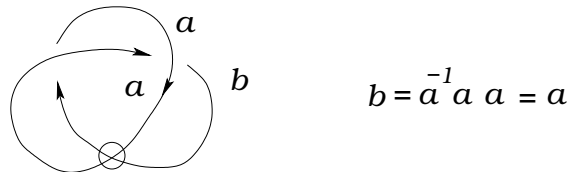


FIGURA 2.3. Ejemplo de un nudo virtual con grupo fundamental trivial

Esto nos puede dar una idea de lo poco efectivo que puede ser un invariante, aun en un diagrama que a simple vista parece muy simple.

En el caso del grupo fundamental [GPV] y [Ka1] muestran que se puede mejorar este invariante y construir uno nuevo, el *group system*. Veamos cómo se logra este nuevo resultado si nos basamos en los diagramas de gauss.

Dado un diagrama de Gauss tomamos un generador m correspondiente a uno de sus arcos (*meridiano*), ahora recorremos la circunferencia a partir de este arco y escribimos a^ε cuando pasemos por la punta de una flecha de signo ε y que tenga

su cola apoyada sobre el arco que identificamos con el generador a , este elemento recibe el nombre de *longitud*. En la figura 2.4 mostramos un ejemplo para un nudo de 5 cruces.

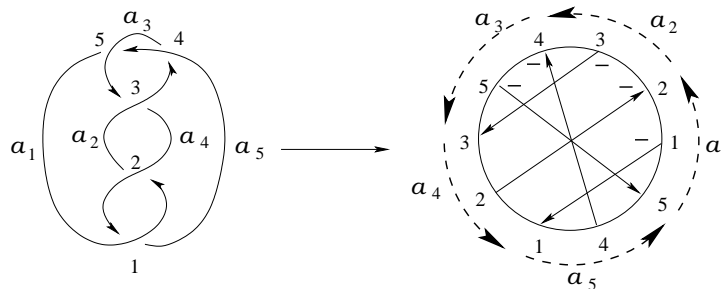


FIGURA 2.4. $m = a_1$, $l = a_4^{-1} a_5^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1}$

LEMA 2.1. *Dado un diagrama de nudo \mathbf{D} , si (m_i, l_i) con $i = 1, 2$ son dos pares de meridiano y longitud de $\mathbf{G}(\mathbf{D})$ existe $a \in \mathbf{G}(\mathbf{D})$ para el cual el isomorfismo $\phi : \mathbf{G}(\mathbf{D}) \rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{D})$, $\phi(x) = a x a^{-1}$ cumple:*

$$\phi(m_1) = m_2 \quad , \quad \phi(l_1) = l_2$$

DEMOSTRACIÓN. Para probar esto basta con ver que se cumple para dos meridianos correspondientes a arcos consecutivos del diagrama.

Llamaremos a_1, a_2, \dots, a_n a los arcos del diagrama y $k : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ a la función que asigna a cada $i < n$ el orden correspondiente al arco que se encuentra en la cola de la flecha con punta entre a_i y a_{i+1} , mientras que $k(n)$ es el orden del arco que se encuentra en la cola de la flecha con punta entre a_n y a_1 . Tenemos entonces que para cada $i = 1, \dots, n - 1$ se cumple la relación

$$a_{i+1} = a_{k(i)}^{-\varepsilon} a_i a_{k(i)}^{\varepsilon}$$

Llamamos ahora $m_1 = a_1$ y $m_2 = a_2$. Por lo dicho anteriormente sabemos que $m_2 = a_{k(1)}^{-\varepsilon} m_1 a_{k(1)}^{\varepsilon}$ y que la expresión de las longitudes es

$$l_1 = a_{k(1)}^{\varepsilon_1} a_{k(2)}^{\varepsilon_2} \dots a_{k(n)}^{\varepsilon_n} \quad , \quad l_2 = a_{k(2)}^{\varepsilon_2} \dots a_{k(n)}^{\varepsilon_n} a_{k(1)}^{\varepsilon_1}$$

Por lo tanto las longitudes también son conjugadas por $a_{k(i)}^{\varepsilon}$.

El morfismo $\phi(x) = a_{k(i)}^{-\varepsilon} x a_{k(i)}^{\varepsilon}$ cumple lo pedido. \square

El *group system* de un nudo es su grupo fundamental junto con la clase de subgrupos que son conjugados del subgrupo $\langle m, l \rangle$ generado por un meridiano y su longitud. El lema anterior nos asegura que esos subgrupos no dependen de la elección del meridiano.

El siguiente teorema nos asegura que el group system es un invariante completo. Su demostración es consecuencia de los resultados que pueden verse en el capítulo 6 de [W] (ver también [E] y [BZ]).

TEOREMA 2.2. *Dos nudos \mathbf{K} y \mathbf{K}' son equivalentes si y solo si para cada elección de diagramas \mathbf{D} y \mathbf{D}' y meridianos m y m' , de \mathbf{K} y \mathbf{K}' respectivamente, existe un isomorfismo $\phi : \mathbf{G}(\mathbf{D}) \rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{D}')$, con $\phi(m) = m'$ y $\phi(l) = l'$.*

Ahora sí estamos en condiciones de probar el teorema 1.9.

DEMOSTRACIÓN. (1.9)

Como ya vimos, el group system puede extenderse a nudos virtuales ya que los movimientos virtuales no modifican el diagrama de Gauss. Recordemos también que éste es un invariante completo para nudos clásicos.

Por lo tanto si \mathbf{D} y \mathbf{D}' son dos diagramas clásicos virtualmente equivalentes sabemos que $\mathcal{G}(\mathbf{D}) = \mathcal{G}(\mathbf{D}')$, entonces \mathbf{D} y \mathbf{D}' son equivalentes como nudos clásicos. \square

Este resultado nos permite afirmar que todo invariante de nudos virtuales es también invariante de nudos clásicos, y que todo invariante de nudos clásicos puede extenderse a nudos virtuales, aunque no siempre sea fácil encontrar una extensión natural.

2.2. Quandles

DEFINICIÓN 2.3. Un **Quandle** es un conjunto \mathcal{Q} con un producto

$*$: $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}$ que cumple tres axiomas:

1. $a * a = a$ para todo $a \in \mathcal{Q}$
2. para cada par de elementos a, b del quandle existe un único $c \in \mathcal{Q}$ tal que $a = c * b$
3. $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ para todo $a, b, c \in \mathcal{Q}$

Un **Rack** es un conjunto con un producto $*$ que cumple solo los axiomas 2 y 3.

Un morfismo de quandles es una aplicación $f : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}'$ entre dos quandles que verifica: $f(a * b) = f(a) *' f(b)$.

Veamos algunos ejemplos:

- Un conjunto $\mathcal{X} \neq \emptyset$ con la operación $a * b = a$ para todo $a, b \in \mathcal{X}$ define un quandle, llamado quandle trivial.
- Dado un grupo \mathcal{G} , llamamos \mathcal{G}_x a la clase de conjugación de x en \mathcal{G} para algún $x \in \mathcal{G}$. Entonces \mathcal{G}_x define un quandle con el producto

$$a * b = b^{-1}ab$$

De la misma manera se puede tomar una unión de clases de conjugación. En particular, \mathcal{G} es un quandle con este producto.

- **Quandle libre**: sea \mathcal{X} un conjunto y $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ el grupo libre generado por \mathcal{X} . Se define entonces el *quandle libre* de \mathcal{X} como el conjunto \mathcal{Q} formado por la unión de las clases de conjugación de los elementos de \mathcal{X} en $\mathcal{F}(\mathcal{X})$. Es decir que los elementos de \mathcal{Q} son todos de la forma $a * b_1^{\varepsilon_1} * \dots * b_n^{\varepsilon_n}$ con $a, b_1, \dots, b_n \in \mathcal{X}$, $n \geq 0$, $\varepsilon_i = \pm 1$ y $*$ la operación del quandle definida en el punto anterior.

Este quandle libre verifica que para cualquier quandle \mathcal{P} , toda función $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}$ se extiende de forma natural a un morfismo de quandles \hat{f}

que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ i \downarrow & \nearrow f & \\ \mathcal{Q} & & \end{array}$$

Donde $i : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Q}$ es la inclusión.

- Otro ejemplo importante es el *quandle de Alexander*: dado un módulo A sobre el anillo de polinomios de Laurent $L_p = \mathbb{Z}_p[t, t^{-1}]$, A es un quandle con la operación:

$$a * b = ta + (1 - t)b$$

En estos caso suele ser común tomar $A = \mathbb{Z}_p[t]/f(t)$ para algún primo p y un polinomio $f(t)$ de grado d .

- Para un entero $n > 2$ se define en \mathbb{Z}_n el siguiente producto:

$$i * j = 2j - i \pmod{n}$$

este producto genera un quandle llamado el *quandle diedral* y se lo denota \mathbf{R}_n . Este quandle puede verse también como un caso particular de quandle de Alexander si tomamos $\mathbf{R}_n = \mathbb{Z}_n[t]/(1 + t)$.

Un quandle finito ($\mathcal{Q} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$) puede ser representado por una matriz cuadrada \mathbf{M} con tantas filas como elementos del quandle y que tiene en el lugar $\mathbf{M}[i, j]$ al elemento $x_i * x_j$. Por ejemplo el quandle \mathbf{R}_5 está representado por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Los axiomas del quandle nos adelantan algunas propiedades que deben cumplir estas matrices:

- En la diagonal deben aparecer todos los elementos ordenados (en nuestro ejemplo 1,2,3,4,5).
- Cada columna debe ser una permutación de los elementos del quandle.
- Para cada terna i, j, k se debe cumplir

$$M[M[i, j], k] = M[M[i, k], M[j, k]]$$

Esta manera de representar los quandles nos puede ser útil a la hora de trabajar con ellos.

OBSERVACIÓN 2.4. La segunda condición en la definición de un quandle nos permite construir un nuevo producto que llamaremos *producto inverso* del quandle:

$$\bar{*} : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}$$

Este nuevo producto está definido por la relación: $a \bar{*} b = c \Leftrightarrow c * b = a$.

Ambas operaciones generan, para cada $b \in \mathcal{Q}$, funciones biyectivas en \mathcal{Q} :

$$*_b(x) = x * b$$

$$\bar{*}_b(x) = x \bar{*} b$$

donde una es inversa de la otra.

OBSERVACIÓN 2.5. El conjunto \mathcal{Q} con el producto $\bar{*}$ forman un quandle llamado *quandle dual* de \mathcal{Q} . Este hecho se desprende directamente de la definición de $\bar{*}$ y de las relaciones que cumple $*$.

Como ejemplo mostraremos cómo es que $\bar{*}$ cumple el tercer axioma:

$$\begin{aligned} (a \bar{*} c) \bar{*} (b \bar{*} c) &= f \\ a \bar{*} c &= f * (b \bar{*} c) \\ a &= (f * (b \bar{*} c)) * c \\ a &= (f * c) * ((b \bar{*} c) * c) \\ a &= (f * c) * b \\ a \bar{*} b &= f * c \\ (a \bar{*} b) \bar{*} c &= f \end{aligned}$$

También puede verse que los dos productos pueden distribuirse uno en el otro. Es decir:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} (a * b) \bar{*} c &= (a \bar{*} c) * (b \bar{*} c) \\ (a \bar{*} b) * c &= (a * c) \bar{*} (b * c) \end{aligned}$$

A continuación, y antes de ver cómo es que un quandle define un invariante, vamos a desarrollar un último ejemplo.

Sea $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^3$ un poliedro regular con vértices $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ y centrado en 0. Para cada $1 \leq i \leq n$ se define \mathbf{T}_i como la función lineal que fija x_i y rota su plano ortogonal en un ángulo de $2\pi/r$, donde r es el grado del vértice (número de aristas que inciden en él). Ver Figura 2.5.

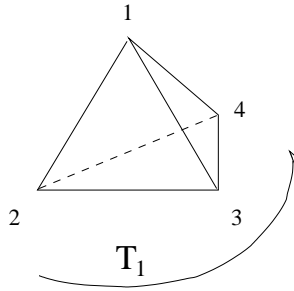


FIGURA 2.5. Quandle Tetraedro

$(X, *)$ define un cuandle con el producto $x_i * x_j = \mathbf{T}_j(x_i)$.

De la misma manera puede verse cómo las caras del poliedro definen un quandle análogo al anterior. Este es isomorfo al quandle dado por los vértices del poliedro dual.

2.2.1. Quandles y nudos. Los quandles fueron introducidos por primera vez por David Joyce en [J], donde muestra cómo a cada nudo clásico le es asignado su *quandle fundamental* (similar a la presentación de Wirtinger del grupo fundamental). Este quandle fundamental genera un invariante completo pero difícil de manejar.

Presentamos aquí un invariante íntimamente relacionado con el quandle fundamental que tiene la ventaja de ser explícitamente calculable. Más aun, en el último capítulo de este trabajo damos una idea de cómo armamos una serie de programas que nos permitieron, entre otras cosas, aplicar este invariante en nudos virtuales de hasta 5 cruces.

Dados un quandle finito \mathcal{Q} y un diagrama orientado de nudo D decimos que una aplicación $\mathcal{C} : R \rightarrow \mathcal{Q}$, donde R representa al conjunto de arcos orientados del diagrama, es un coloreo de D si se cumple la siguiente relación en cada cruce del diagrama (Figura 2.6).

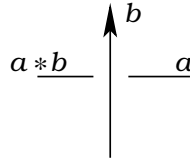


FIGURA 2.6. Relación en los arcos de un cruce

Es decir, el valor asignado al arco inferior izquierdo del cruce es igual al producto de los valores asignados al arco inferior derecho por el superior. Esta asignación depende de la orientación del arco superior y no de los arcos inferiores.

Se puede comprobar que cada vez que tenemos un diagrama coloreado con un quandle y realizamos alguno de los movimientos de Reidemester, ese coloreo nos determina un nuevo, y único, coloreo en el nuevo diagrama como puede apreciarse en la Figura 2.7.

- En estos diagramas la asignación de colores puede cambiar si cambia la orientación de los arcos superiores, pero se sigue manteniendo la misma relación. Dado un coloreo nos queda determinado un único coloreo después de aplicar el movimiento.
- En el diagrama (II) hay dos arcos que se cruzan por debajo de a para convertirse en el arco c , por lo cual esos dos arcos tienen que estar coloreados por la solución de la ecuación $c = x * a$, la cual es única.
- Los diagramas (III) y (IV) corresponden al tercer movimiento. En (III) usamos el producto inverso $\bar{*}$ para probar la relación, la cual se desprende de una de las igualdades que mencionamos en (2.6).
- Como dijimos en el capítulo anterior, el tercer movimiento de Reidemester se divide en ocho casos si contemplamos todas las orientaciones de los arcos y las posibilidades en los cruces de cuál es el arco superior y cuáles los inferiores, pero el trabajo de Östlund [O] nos garantiza que es suficiente verificar el invariante para los dos gráficos que mostramos, ya que el resto puede construirse con secuencias de los movimientos de esta figura.

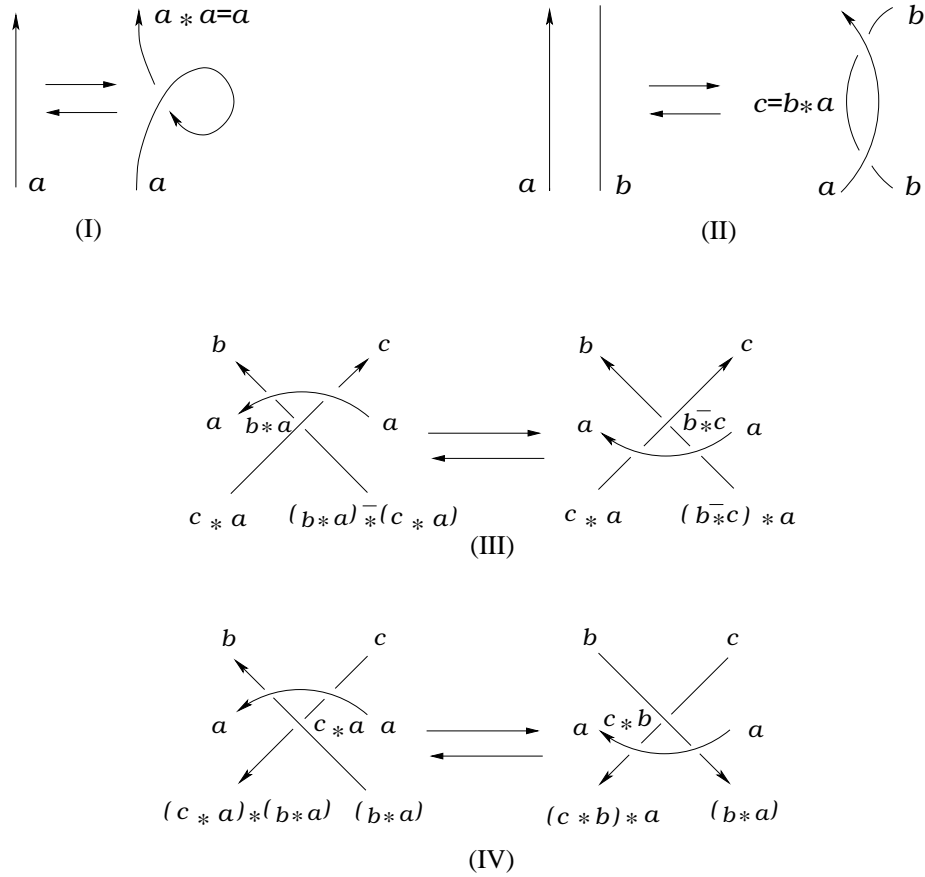


FIGURA 2.7

Con esto tenemos que si D y D' son dos diagramas equivalentes de un nudo, para cada coloreo \mathcal{C} del diagrama D existe un único coloreo \mathcal{C}' del diagrama D' . Por lo tanto, para un quandle fijo \mathcal{Q} , si contamos la cantidad de coloreos que se pueden realizar con este quandle a un diagrama, esa cantidad se repite en cada diagrama equivalente.

Esta es lo que nos permite definir nuestro invariante.

DEFINICIÓN 2.7. Dado un nudo \mathbf{K} y un quandle \mathcal{Q} , definimos

$$I_{\mathcal{Q}}(\mathbf{K}) = \#\{\text{coloreos de } \mathbf{D}\}$$

para algún diagrama \mathbf{D} . Por las observaciones anteriores, $I_{\mathcal{Q}}(\mathbf{K})$ no depende del diagrama elegido.

OBSERVACIÓN 2.8. Para cada quandle y cada diagrama existen por lo menos $\#\mathcal{Q}$ coloreos distintos. Son aquellos que le asignan el mismo elemento a todos los arcos del diagrama, a estos coloreos se los conoce como coloreos triviales.

EJEMPLO 2.9. Si tomamos el quandle dihedral \mathbf{R}_3 (\mathbb{Z}_3 con la operación $i * j = 2j - i \pmod{3}$) podemos asignar al diagrama de nudo trebol un valor distinto en cada uno de sus arcos. Esto muestra que el nudo trebol no es equivalente al nudo trivial ya que para el nudo trivial solo tenemos los coloreos triviales.

Ahora bien, este invariante se extiende a los casos virtuales de la misma forma que el grupo fundamental. Es decir, los cruces virtuales son omitidos a la hora de separar en el diagrama los distintos arcos y asignarle a cada uno de ellos un elemento del quandle. Los cruces virtuales tampoco agregan ninguna relación entre estos elementos.

Por lo tanto vemos que la asignación de colores no sufre ningún cambio luego de un movimiento virtual ya que en estos los cruces clásicos y los arcos no se modifican. Tenemos entonces que si \mathbf{K} es un nudo virtual, la aplicación definida antes:

$$\mathbf{I}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{K}) = \#\{\text{coloreos de } \mathbf{D}\},$$

donde \mathbf{D} es algún diagrama de \mathbf{K} , es también un invariante virtual.

2.3. Cociclos

DEFINICIÓN 2.10. Dado un rack \mathcal{Q} y un grupo abeliano \mathbf{A} , escrito aditivamente, se define el grupo de cocadenas $\mathcal{C}^n = \mathcal{C}^n(\mathcal{Q}, \mathbf{A})$ como el grupo abeliano de morfismos $f : FA(\mathcal{Q}^n) \rightarrow \mathbf{A}$ del grupo abeliano libre generado por las n -uplas de elementos de \mathcal{Q} al grupo abeliano \mathbf{A} .

Para estas cocadenas se definen los morfismos de coborde $\delta : \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}^{n+1}$ como:

$$\delta(f)(q_0, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^i (f(q_0 * q_i, \dots, q_{i-1} * q_i, q_{i+1}, \dots, q_n) - f(q_0, \dots, \hat{q}_i, \dots, q_n))$$

OBSERVACIÓN 2.11. Las sumas no comienzan desde el 0 dado que estos dos términos se cancelan entre sí.

LEMA 2.12. *Los grupos \mathcal{C}^n junto con los morfismos de coborde δ forman una cocadena de complejos.*

$$\dots \rightarrow \mathcal{C}^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathcal{C}^n \xrightarrow{\delta^n} \mathcal{C}^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \dots$$

(En los casos que consideremos necesario le agregaremos un índice a cada morfismo δ)

DEMOSTRACIÓN. Solo tenemos que mostrar que $\delta \circ \delta = 0$

Para esto vamos a escribir al morfismo $\delta^n(f) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \delta_i^n(f)$, donde

$$\delta_i^n(f) = f(q_0 * q_i, \dots, q_{i-1} * q_i, q_{i+1}, \dots, q_n) - f(q_0, \dots, \hat{q}_i, \dots, q_n)$$

Y probaremos a continuación que estos morfismos cumplen la igualdad:

$$\delta_j^{n+1} \delta_i^n = \delta_i^{n+1} \delta_{j-1}^n \quad \text{para todo } 1 \leq i < j \leq n+1$$

$$\begin{aligned}
& \delta_j^{n+1} (\delta_i^n (f))(q_0, \dots, q_{n+1}) = \\
= & \delta_i^n (f)(q_0 * q_j, \dots, q_{j-1} * q_j, q_{j+1}, \dots, q_{n+1}) - \delta_i^n (f)(q_0, \dots, \widehat{q_j}, \dots, q_{n+1}) \\
= & f((q_0 * q_j) * (q_i * q_j), \dots, (q_{i-1} * q_j) * (q_i * q_j), q_{i+1} * q_j, \dots, q_{j-1} * q_j, q_{j+1}, \dots, q_{n+1}) \\
& - f(q_0 * q_j, \dots, \widehat{q_i * q_j}, \dots, q_{j-1} * q_j, q_{j+1}, \dots, q_{n+1}) \\
& - f(q_0 * q_i, \dots, q_{i-1} * q_i, q_{i+1}, \dots, \widehat{q_j}, \dots, q_{n+1}) + f(q_0, \dots, \widehat{q_i}, \dots, \widehat{q_j}, \dots, q_{n+1}) \\
= & f((q_0 * q_i) * q_j, \dots, (q_{i-1} * q_i) * q_j, q_{i+1} * q_j, \dots, q_{j-1} * q_j, q_{j+1}, \dots, q_{n+1}) \\
& - f(q_0 * q_i, \dots, q_{i-1} * q_i, q_{i+1}, \dots, \widehat{q_j}, \dots, q_{n+1}) \\
& - f(q_0 * q_j, \dots, \widehat{q_i * q_j}, \dots, q_{j-1} * q_j, q_{j+1}, \dots, q_{n+1}) + f(q_0, \dots, \widehat{q_i}, \dots, \widehat{q_j}, \dots, q_{n+1}) \\
= & \delta_{j-1}^n (f)(q_0 * q_i, \dots, q_{i-1} * q_i, q_{i+1}, \dots, q_{n+1}) - \delta_{j-1}^n (f)(q_0, \dots, \widehat{q_i}, \dots, q_{n+1}) \\
& = \delta_i^{n+1} (\delta_{j-1}^n (f))(q_0, \dots, q_{n+1})
\end{aligned}$$

Ahora sí estamos en condiciones de probar lo que queríamos:

$$\begin{aligned}
\delta^{n+1} \delta^n (f) &= \delta^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i \delta_i^n (f) \right) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \delta_j^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i \delta_i^n (f) \right) \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} \delta_j^{n+1} \delta_i^n (f) + \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} (-1)^{i+j} \delta_j^{n+1} \delta_i^n (f) \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} \delta_i^{n+1} \delta_{j-1}^n (f) + \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} (-1)^{i+j} \delta_j^{n+1} \delta_i^n (f) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

A la cohomología del complejo anterior se la llama *rack cohomology group* y se escribe $H_{rack}^n(\mathcal{Q}, \mathbf{A})$. A los cociclos y cobordes se los representa con $Z_{rack}^n(\mathcal{Q}, \mathbf{A})$ y $B_{rack}^n(\mathcal{Q}, \mathbf{A})$ respectivamente.

Por lo tanto, tenemos ya definidos los grupos:

$$\begin{aligned}
H_{rack}^n(\mathcal{Q}, \mathbf{A}) &= \ker(\delta^n) / \text{im}(\delta^{n-1}) \\
Z_{rack}^n(\mathcal{Q}, \mathbf{A}) &= \ker(\delta^n) = \{n - \text{cociclos}\} \\
B_{rack}^n(\mathcal{Q}, \mathbf{A}) &= \text{im}(\delta^{n-1}) = \{n - \text{cobordes}\}
\end{aligned}$$

Ahora bien, como estamos interesados en trabajar con un quandle en lugar de un rack, vamos a restringir los cociclos y cobordes a aquellas funciones que se comporten bien con el axioma 1 ($a * a = a$).

Veamos primero qué ocurre en dimensión 2:

$$f \in \mathcal{C}^1 \implies \delta f(a, b) = f(a) - f(a * b)$$

Por lo tanto tenemos que $f(a, a) = 0$ para toda $f \in \text{Im}(\delta)$.

Definimos entonces

$$P^n = \{f \in \mathcal{C}^n / f(\bar{x}) = 0 \text{ para todo } \bar{x} \text{ tal que } x_i = x_{i+1} \text{ para algún } i\}$$

LEMA 2.13. Si $f \in P^n \implies \delta f \in P^{n+1}$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in P^n$ y $\bar{x} \in \mathcal{Q}^n$ con $x_i = x_{i+1}$, comenzaremos las sumas de 0 para contemplar la posibilidad de que i valga 0:

$$\begin{aligned} \delta f(\underbrace{x_0, \dots, x_n}_{x_i = x_{i+1}}) &= \sum_{j=0}^{j=n} (-1)^{j-1} \underbrace{f(x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)}_{j \neq i, i+1 \implies f(x)=0} + \\ &\sum_{j=0}^{j=n} (-1)^j \underbrace{f(x_0 * x_j, \dots, x_{j-1} * x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{j \neq i, i+1 \implies f(x)=0} \\ &= \underbrace{(-1)^{i-1} f(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) + (-1)^i f(x_0, \dots, x_{i+1}, \dots, x_n)}_{=0} + \\ &\quad (-1)^i f(\dots, x_{i-1} * x_i, \underbrace{x_{i+1}}_{=x_i}, \dots) + (-1)^{i+1} f(\dots, \underbrace{x_i * x_{i+1}}_{x_i}, x_{i+2}, \dots) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $f \in P^{n+1}$. □

Nos quedamos entonces con los cociclos $Z^n = Z_{rack}^n \cap P^n$ y los cobordes $B^n = B_{rack}^n \cap P^n$, con los cuales definimos los grupos de cohomología

$$H_{\mathcal{Q}}^n(\mathcal{Q}, \mathbf{A}) = H^n(\mathcal{Q}, \mathbf{A}) = Z^n / B^n$$

A este grupo lo llamaremos *quandle cohomology group*, y a las $f \in Z^n$ *quandle n-cociclo* o simplemente *cociclo*.

EJEMPLO 2.14. Si φ es un 2-cociclo ,

$$\delta\varphi(x, y, z) = 0 \text{ para todo } x, y, z \in \mathcal{Q}.$$

De esta igualdad se desprende la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \varphi(x, z) - \varphi(x, y) - \varphi(x * y, z) + \varphi(x * z, y * z) &= 0 \\ \varphi(x, z) + \varphi(x * z, y * z) &= \varphi(x, y) + \varphi(x * y, z) \end{aligned}$$

De la misma manera se puede ver que si φ es un 3-cociclo

$$\varphi(x, y, z) + \varphi(x * z, y * z, w) + \varphi(x, z, w) = \varphi(x * y, z, w) + \varphi(x, y, w) + \varphi(x * w, y * w, z * w)$$

A continuación veremos cómo los *2-cociclos* generan un nuevo invariante que extiende el invariante de quandles.

2.3.1. Invariante quandle 2-cociclo. Sean \mathcal{Q} un quandle finito, \mathbf{A} un grupo abeliano, escrito multiplicativamente, y $\varphi : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbf{A}$ un 2-cociclo.

Esto quiere decir que φ verifica las igualdades:

$$(2.15) \quad \varphi(x, z) \varphi(x * z, y * z) = \varphi(x, y) \varphi(x * y, z)$$

$$(2.16) \quad \varphi(x, x) = 1$$

para todo $x, y, z \in \mathcal{Q}$.

Dado un coloreo \mathcal{C} de un diagrama \mathbf{D} con el quandle \mathcal{Q} le asignamos un peso $\mathbf{B}(\mathcal{C}, \tau)$ a cada uno de los cruces τ del diagrama definido de esta manera

$$\mathbf{B}(\mathcal{C}, \tau) = \varphi(a_\tau, b_\tau)^{\epsilon(\tau)}$$

donde (a_τ, b_τ) son los colores de los arcos inferior derecho y superior y $\epsilon(\tau)$ es el signo del cruce τ como se puede ver en la Figura 2.8.

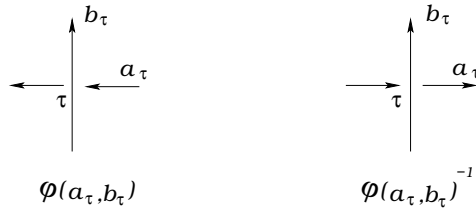


FIGURA 2.8. Peso en los cruces

DEFINICIÓN 2.17. La suma formal en el anillo $\mathbb{Z}[\mathbf{A}]$

$$(2.18) \quad \Phi(\mathbf{D}, \mathcal{Q}, \varphi) = \sum_{\text{coloreos } \mathcal{C}} \prod_{\text{cruces } \tau} \mathbf{B}(\mathcal{C}, \tau)$$

se llama *invariante quandle 2-cociclo*, y es un invariante.

OBSERVACIÓN 2.19. La condición de que \mathcal{Q} sea finito es necesaria para garantizar que la suma tenga sentido.

Para probar que $\Phi(\mathbf{D}, \mathcal{Q}, \varphi)$ es efectivamente un invariante de nudos basta ver que el producto de los pesos $\mathbf{B}(\mathcal{C}, \tau)$ para los cruces que aparecen en los diagramas de los movimientos de Reidemeister son iguales a ambos lados. Miremos entonces qué pasa con los gráficos de la Figura 2.7:

- Gráfico (I): el resultado es 1 a ambos lados por la igualdad (2.16) del 2-cociclo .
- Gráfico (II): $1 = \varphi(b, a) \varphi(b, a)^{-1}$ (independientemente de la orientación de los arcos inferiores).
- Gráfico (III): de los cuatro diagramas que estamos analizando este es el único que presenta una complicación. Por un lado tenemos el producto

$$\varphi(b, a)^{-1} \varphi(c, a)^{-1} \varphi((b * a) \bar{*} (c * a), c * a)$$

y por el otro

$$\varphi(b \bar{*} c, c) \varphi(c, a)^{-1} \varphi(b \bar{*} c, a)^{-1}.$$

Como el factor $\varphi(c, a)^{-1}$ se repite a ambos lados podemos eliminarlo y nos queda entonces por probar la igualdad:

$$\varphi(b, a)^{-1} \varphi((b * a) \bar{*} (c * a), c * a) = \varphi(b \bar{*} c, c) \varphi(b \bar{*} c, a)^{-1}$$

o lo que es lo mismo:

$$\varphi(b \bar{*} c, a) \varphi((b * a) \bar{*} (c * a), c * a) = \varphi(b \bar{*} c, c) \varphi(b, a)$$

$$\varphi(b \bar{*} c, a) \varphi((b \bar{*} c) * a, c * a) = \varphi(b \bar{*} c, c) \varphi(b, a).$$

Ahora bien, si hacemos las sustituciones $x = b \bar{*} c$ $y = c$ $z = a$, y observamos que $b = (b \bar{*} c) * c = x * y$ nos queda la igualdad 2.15 del 2-cociclo

$$\varphi(x, z) \varphi(x * z, y * z) = \varphi(x, y) \varphi(x * y, z).$$

- Gráfico (IV): a la izquierda tenemos $\varphi(b, a)^{-1} \varphi(c, a) \varphi(c * a, b * a)$ y a la derecha $\varphi(c, b) \varphi(c * b, a) \varphi(b, a)^{-1}$, una vez más encontramos un factor que se repite, en este caso es $\varphi(b, a)^{-1}$. Al eliminarlo nos queda escrita nuevamente la igualdad 2.15 del 2-cociclo.

Recordamos nuevamente que no es necesario verificar las igualdades para el resto de los movimientos de Reidemeister que se pueden presentar.

OBSERVACIÓN 2.20. Este invariante extiende el invariante que cuenta los coloreos de \mathbf{D} con el quandle \mathcal{Q} ya que si definimos la aplicación $\varepsilon : \mathbb{Z}[\mathbf{A}] \rightarrow \mathbb{Z}$ como

$$\varepsilon\left(\sum_{a \in \mathbf{A}} n_a a\right) = \sum_{a \in \mathbf{A}} n_a \quad ,$$

entonces $\varepsilon(\Phi(\mathbf{D}, \mathcal{Q}, f))$ nos da como resultado esa cantidad de coloreos.

Más aún, la siguiente proposición nos muestra todo un conjunto de 2-cociclos para los cuales la suma formal (2.18) que definimos nos devuelve la cantidad de coloreos del quandle.

PROPOSICIÓN 2.21. *Si el 2-cociclo φ es un coborde, la suma (2.18) es igual al número de coloreos del diagrama con los elementos del quandle \mathcal{Q} .*

DEMOSTRACIÓN. Si φ es un coborde, $\delta(\psi) = \varphi$ para algún $\psi \in \mathcal{C}^1$, es decir $\varphi(x, y) = \psi(x) \psi(x * y)^{-1}$.

Una vez que tenemos coloreado el diagrama, podemos pensar a los pesos de los cruces como pesos en los extremos de cada arco. Estos pesos también dependerán del signo de los cruces que se encuentren en los extremos del arco. El origen de un arco en un cruce positivo tendrá peso $\psi(x * y)^{-1}$, y el extremo final $\psi(x)$. Para los cruces negativos se define algo similar (ver Figura 2.9)

Como a cada arco le corresponde un único color $x \in \mathcal{Q}$, la Figura 2.9 nos muestra que el origen de dicho arco tiene asignado el peso $\psi(x)$ y el extremo final $\psi(x)^{-1}$. Podemos ver entonces que, independientemente de los signos de los cruces que lo afectan, los pesos de los extremos se cancelan entre sí. \square

PROPOSICIÓN 2.22. *Si φ y φ' son dos 2-cociclos cohomólogos (es decir que $\varphi = \varphi' \cdot \delta.\psi$ para algún $\psi \in \mathcal{C}^1$), entonces $\Phi(\mathbf{D}, \mathcal{Q}, \varphi) = \Phi(\mathbf{D}, \mathcal{Q}, \varphi')$ para todo diagrama \mathbf{D} y quandle finito \mathcal{Q} .*

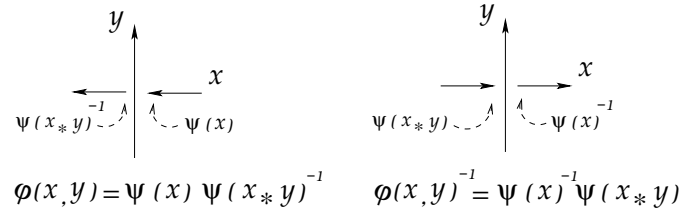


FIGURA 2.9. Peso en los arcos

DEMOSTRACIÓN. La demostración es la misma que para la proposición anterior. En este caso la relación que tenemos que considerar es

$$\varphi(x, y) = \varphi'(x, y) \psi(x) \psi(x * y)^{-1}$$

□

El invariante quandle 2-cociclo está bien definido para los nudos virtuales. Esto puede chequearse del mismo modo que lo hicimos para el invariante anterior. Una vez más cabe aclarar que los cruces virtuales no intervienen en la suma 2.18.

2.4. El polinomio de Jones y el corchete de Kauffman

En 1984 V. Jones descubrió este invariante que asocia a cada nudo un polinomio de Laurent (es decir un polinomio que puede tener potencias positivas y negativas). Este hecho tuvo gran repercusión en el mundo científico, tanto que lo hizo merecedor de la medalla Fields en el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Kyoto en 1990.

Una forma simple de definirlo es a partir de otro polinomio que se le parece bastante: el *corchete de Kauffman*.

DEFINICIÓN 2.23. El *corchete de Kauffman* es una función del espacio de diagramas no orientados al anillo de polinomios de Laurent con coeficientes enteros en una variable.

Esta aplicación asigna a cada diagrama \mathbf{D} un polinomio $\langle \mathbf{D} \rangle \in \mathbb{Z}[A^{-1}, A]$ a partir de las siguientes reglas:

1. Si llamamos \bigcirc al nudo trivial, $\langle \bigcirc \rangle = 1$
2. $\langle \mathbf{D} \cup \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle \mathbf{D} \rangle$
3. $\langle \mathbf{D} \rangle = A \langle \mathbf{D}_1 \rangle + A^{-1} \langle \mathbf{D}_2 \rangle$

En donde \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 representan al diagrama \mathbf{D} luego de haber deshecho uno de sus cruces como se muestra en la Figura 2.10. En esta última igualdad el cambio del diagrama se realiza solo en un pequeño entorno que contiene al cruce, fuera de este el diagrama permanece igual.

$$\begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \langle \diagdown \diagup \rangle \end{array} = \mathbf{A} \begin{array}{c} \mathbf{D}_1 \\ \langle \frown \rangle \end{array} \begin{array}{c} \langle \smile \rangle \end{array} + \mathbf{A}^{-1} \begin{array}{c} \mathbf{D}_2 \\ \langle \smile \smile \rangle \end{array}$$

FIGURA 2.10

Como la propiedad 3 deshace un cruce para generar dos diagramas nuevos, el corchete de Kauffman de un nudo de n cruces se calcula como la suma de 2^n diagramas triviales \bigcirc . Por otra parte las propiedades 1 y 2 nos dicen cómo calcular el corchete de Kauffman de un lazo de m componentes y sin cruces:

$$\begin{aligned}
 \langle \bigcirc \bigcirc \rangle &= (-A^{-2} - A^2) \langle \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \\
 \langle \bigcirc \bigcirc \bigcirc \rangle &= (-A^{-2} - A^2) \langle \bigcirc \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2)^2 \\
 \langle \underbrace{\bigcirc \bigcirc \dots \bigcirc}_m \rangle &= (-A^{-2} - A^2)^{m-1}
 \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 2.24. De ser necesario podemos definir el corchete de Kauffman del vacío como $(-A^{-2} - A^2)^{-1}$.

El corchete de Kauffman no es un invariante de nudos ya que puede modificarse luego de realizar movimientos de Reidemeister en el diagrama. Para ser más precisos, este polinomio cambia con el primer movimiento de Reidemeister pero no con los otros dos.

Este hecho queda expresado en los lemas que mostramos a continuación:

LEMA 2.25. Si un diagrama es afectado por un movimiento de Reidemeister de tipo I su corchete de Kauffman se modifica de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} \langle \text{Reidemeister I} \rangle \end{array} = -\mathbf{A}^3 \begin{array}{c} \langle \text{Cableado} \rangle \end{array} \qquad \begin{array}{c} \langle \text{Reidemeister I} \rangle \end{array} = -\mathbf{A}^3 \begin{array}{c} \langle \text{Cableado} \rangle \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Ver Figura 2.11.

□

Este lema será usado con frecuencia a la hora de calcular los corchetes como podrá verse en el ejemplo de la Figura 2.13.

LEMA 2.26. Si un diagrama es afectado por un movimiento de Reidemeister de tipo II o III su corchete de Kauffman no se modifica.

DEMOSTRACIÓN. En la Figura 2.12 puede verse la demostración para el movimiento II.

□

$$\begin{aligned}
\langle \text{diagrama 1} \rangle &= \mathbf{A} \langle \text{diagrama 2} \rangle + \mathbf{A}^{-1} \langle \text{diagrama 3} \rangle \\
&= (\mathbf{A}(-\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^2) + \mathbf{A}^{-1}) \langle \text{diagrama 3} \rangle = -\mathbf{A}^3 \langle \text{diagrama 3} \rangle \\
\langle \text{diagrama 4} \rangle &= \mathbf{A} \langle \text{diagrama 5} \rangle + \mathbf{A}^{-1} \langle \text{diagrama 6} \rangle \\
&= (\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}(-\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^2)) \langle \text{diagrama 5} \rangle = -\mathbf{A}^3 \langle \text{diagrama 5} \rangle
\end{aligned}$$

FIGURA 2.11. Corchete de Kauffman en el movimiento I

$$\begin{aligned}
\langle \text{diagrama 7} \rangle &= \mathbf{A} \langle \text{diagrama 8} \rangle + \mathbf{A}^{-1} \langle \text{diagrama 9} \rangle \\
&= \mathbf{A}(-\mathbf{A}^3) \langle \text{diagrama 10} \rangle + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} \langle \text{diagrama 11} \rangle + \mathbf{A}^{-1} \langle \text{diagrama 12} \rangle) \\
&= (-\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^{-2}) \langle \text{diagrama 10} \rangle + \mathbf{I} \langle \text{diagrama 11} \rangle = \langle \text{diagrama 11} \rangle
\end{aligned}$$

FIGURA 2.12. Corchete de Kauffman en el movimiento II

La relación de equivalencia que se origina al usar solo el segundo y el tercer movimiento de Reidemeister se denomina *isotopía regular*, por lo tanto el corchete de Kauffman es un invariante para la isotopía regular.

En la figura 2.13 desarrollamos el corchete de Kauffman del trébol.

Veamos ahora cómo a partir del corchete de Kauffman podemos obtener un invariante de nudos. Para esto volveremos a trabajar con nudos orientados en donde, recordemos, tenemos definido un signo para cada cruce.

DEFINICIÓN 2.27. En un diagrama orientado \mathbf{D} llamamos $w(\mathbf{D})$ a la suma de los signos de sus cruces (positivo=1 y negativo=-1).

Es fácil ver que $w(\mathbf{D})$ no cambia con los movimientos II y III pero sí con el primero, donde aparece (o desaparece) un 1 o un -1. A $w(\mathbf{D})$ lo llamamos el *writhe* de \mathbf{D} .

También podemos observar que los signos de los cruces no se modifican si cambiamos la orientación, con lo cual tampoco se modifica el writhe del diagrama.

$$\begin{aligned}
 \langle \text{trefoil} \rangle &= A \langle \text{trefoil with crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil with crossing} \rangle \\
 &= A(-A^3) \langle \text{infinity} \rangle + A^{-1}(A \langle \text{trefoil with crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil with crossing} \rangle) \\
 &= [-A^4(-A^3) + (-A^3) + A^{-2}(-A^3)] \langle \text{circle} \rangle \\
 &= A^7 - A^3 - A^5
 \end{aligned}$$

FIGURA 2.13. Corchete de Kauffman para el trébol

TEOREMA 2.28. *El polinomio $f_{\mathbf{D}}(A) = (-A)^{-3w(\mathbf{D})} \langle \mathbf{D} \rangle$ es un invariante de nudos orientados.*

DEMOSTRACIÓN. Como ya vimos, ni el corchete de Kauffman ni el writhe cambian con el segundo y tercer movimiento, por lo tanto solo queda ver que este polinomio es invariante para el primer movimiento (ver Figura 2.14).

$$\begin{aligned}
 (-A)^{-3w(\text{arrow})} \langle \text{arrow} \rangle &= (-A)^{-3w(\text{arrow})} (-A)^3 \langle \text{cup} \rangle \\
 &= (-A)^{-3} [w(\text{cup}) + 1] (-A)^3 \langle \text{cup} \rangle \\
 &= (-A)^{-3w(\text{cup})} (-A)^{-3} (-A)^3 \langle \text{cup} \rangle \\
 &= (-A)^{-3w(\text{cup})} \langle \text{cup} \rangle
 \end{aligned}$$

$$(-A)^{-3w(\text{arrow})} \langle \text{arrow} \rangle = (-A)^{-3w(\text{cup})} \langle \text{cup} \rangle$$

FIGURA 2.14

Lo mismo ocurre si el cruce del movimiento es negativo. Esto prueba que es efectivamente un invariante. □

EJEMPLO 2.29. Ya que calculamos en la Figura 2.13 el corchete de Kauffman del nudo trébol con cruces negativos usémoslo para calcular ahora su polinomio.

Recordemos que el corchete de Kauffman nos dio $A^7 - A^3 - A^{-5}$ y que su writhe es -3 sea cual sea la orientación que elijamos.

Entonces tenemos que

$$f_{\mathbf{D}}(A) = (-A)^9(A^7 - A^3 - A^{-5}) = -A^{16} + A^{12} + A^4$$

Vale la pena observar que este polinomio puede ser presentado directamente como el resultado de una sumatoria si lo desarrollamos de esta otra manera:

Llamamos \mathbf{D}_+ al diagrama \mathbf{D} en el cual destacamos un cruce positivo y \mathbf{D}_- al mismo diagrama pero destacando un cruce negativo. Ese cruce puede ser eliminado de dos maneras distintas para formar otros dos diagramas que llamaremos \mathbf{D}_0 y \mathbf{D}_∞ .

\mathbf{D}_0 es el diagrama orientado que resulta al eliminar ese cruce de manera suave y \mathbf{D}_∞ el diagrama no orientado que obtenemos al eliminar ese cruce de la otra manera posible (Ver Figura 2.15). Nombraremos a esto el *alisado* de un cruce.

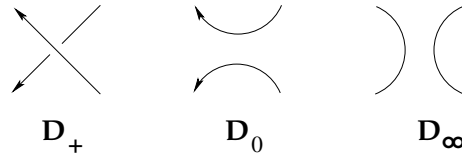


FIGURA 2.15

En \mathbf{D}_∞ nos queda un diagrama no orientado ya que estamos uniendo los arcos del cruce de una manera no compatible con su orientación. En este caso el diagrama que obtenemos lo podemos pensar con una orientación local en los cruces restantes y realizar el mismo procedimiento en cada uno de ellos.

Si consideramos ahora un factor $-A^{-3}$ por cada cruce positivo y $-A^3$ por cada cruce negativo, junto con la propiedad 3 que se muestra en la Figura 2.10 a partir de la cual desarrollamos el corchete de Kauffman, nos quedan establecidas las relaciones:

$$f_{\mathbf{D}_+} = -A^{-2}f_{\mathbf{D}_0} - A^{-4}f_{\mathbf{D}_\infty} \quad f_{\mathbf{D}_-} = -A^2f_{\mathbf{D}_0} - A^4f_{\mathbf{D}_\infty}$$

Tenemos entonces dos posibles formas de alisar un cruce, cada una de ellas acompañada con un factor que puede ser $-A^{-2}$, $-A^{-4}$, $-A^2$ o $-A^4$ dependiendo del signo del cruce y del tipo de alisado.

Llamamos un *estado* \mathcal{S} de \mathbf{D} al lazo obtenido luego de elegir un alisado para cada cruce y $\langle \mathbf{D}/\mathcal{S} \rangle$ al resultado de multiplicar los factores correspondientes a cada alisado del estado \mathcal{S} . Como cada cruce permite dos alisados distintos, podemos afirmar que un nudo de n cruces genera 2^n estados.

Con todo esto el polinomio $f_{\mathbf{D}}(A)$ nos queda:

$$f_{\mathbf{D}}(A) = \sum_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{D}/\mathcal{S} \rangle d^{\|\mathcal{S}\|-1},$$

en donde $d = -A^2 - A^{-2}$ y $\|\mathcal{S}\|$ representa la cantidad de componentes triviales del lazo resultante para el estado \mathcal{S} , mientras que la suma recorre todos los posibles estados del diagrama.

En la Figura 2.16 calculamos una vez más el polinomio del nudo trébol pero esta vez lo hacemos usando los alisados de los cruces.

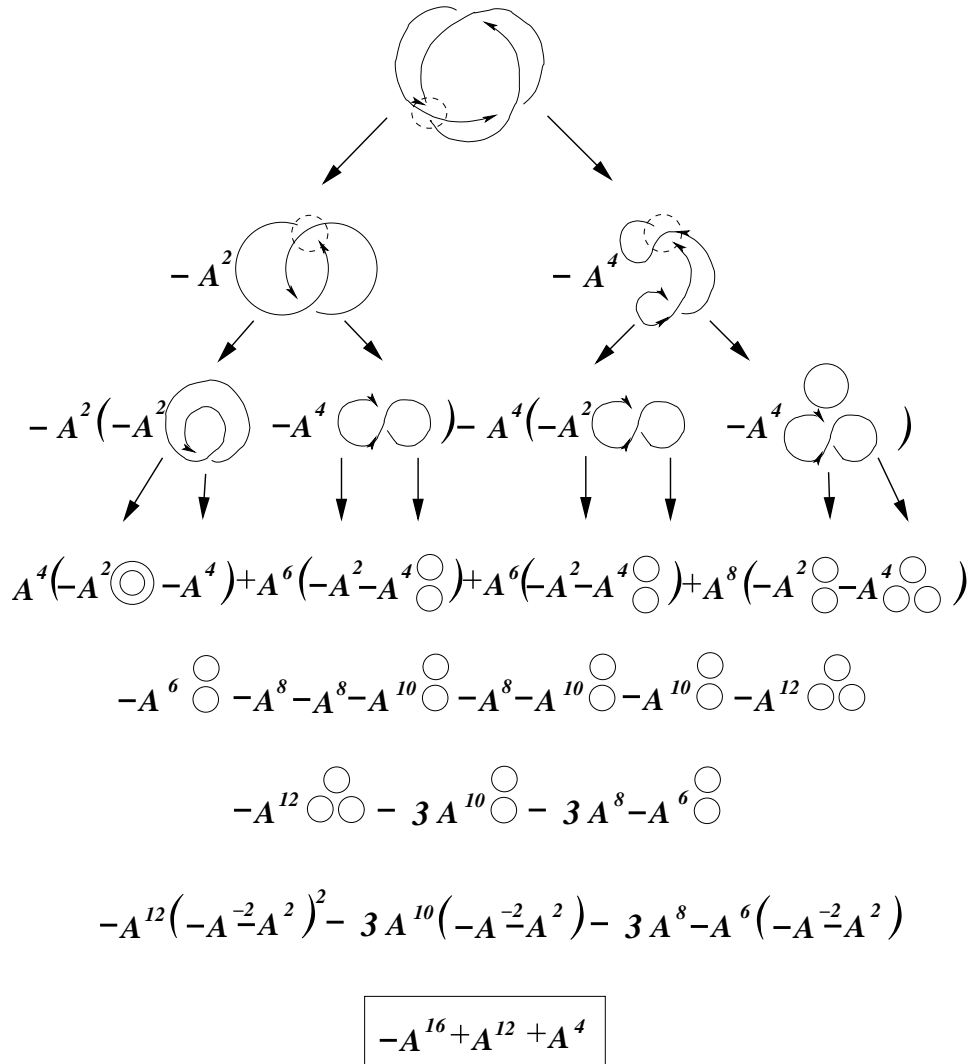


FIGURA 2.16

En este ejemplo puede verse que para los tres cruces del nudo trébol nos quedaron 8 estados de los cuales 3 de ellos generaron el nudo trivial, 4 generaron el lazo de dos componentes triviales y uno solo el de tres componentes.

Este resultado nos permite afirmar que $f_{\mathbf{D}}(A) \in \mathbb{Z}[A^2, A^{-2}]$.

Ahora sí estamos en condiciones de definir el *polinomio de Jones*.

DEFINICIÓN 2.30. El polinomio de Jones de un nudo orientado \mathbf{K} es el polinomio de Laurent en $t^{1/2}$ con coeficientes enteros dado por

$$V_{\mathbf{K}}(t) = f_{\mathbf{D}}(t^{-1/4})$$

donde \mathbf{D} es algún diagrama orientado del nudo.

Para terminar con nuestro ejemplo del nudo trébol con cruces negativos podemos ver ahora cómo nos queda su polinomio de Jones:

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{K}}(t) &= f_{\mathbf{D}}(t^{-1/4}) \\ V_{\mathbf{K}}(t) &= -(t^{-1/4})^{16} + (t^{-1/4})^{12} + (t^{-1/4})^4 \\ V_{\mathbf{K}}(t) &= -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1} \end{aligned}$$

Hemos dado entonces una definición del polinomio de Jones que nos permite calcularlo de manera bastante simple, aunque históricamente la primer definición de este invariante fue la de un polinomio que cumple dos axiomas:

1. $V_{\bigcirc}(t) = 1$
2. $t^{-1}V_{\mathbf{K}_+} - tV_{\mathbf{K}_-} = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{\mathbf{K}_0}$

Donde \mathbf{K}_+ , \mathbf{K}_- y \mathbf{K}_0 son tres nudos orientados iguales salvo en la vecindad de un cruce como se muestra en la Figura 2.17.

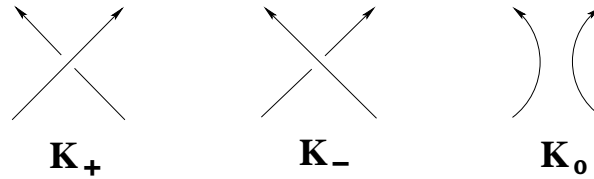


FIGURA 2.17

Un resultado importante al cual se pudo arribar usando estos polinomios fue la prueba de algunas de las conjeturas de Tait sobre nudos clásicos alternados. Para citarlas en este trabajo definiremos antes esta clase de nudos.

DEFINICIÓN 2.31. Un diagrama \mathbf{D} se dice alternado si al recorrerlo a partir de cualquier punto y en cualquiera de las dos direcciones sus cruces son atravesados por arriba y por abajo en forma alternada. Un nudo \mathbf{K} se dice alternado si tiene algún diagrama alternado.

Como ejemplos de nudos alternados podemos nombrar dos con los cuales ya hemos estado trabajado: el nudo trébol y el nudo de Saboya.

La primera de las conjeturas de Tait afirma que un diagrama alternado reducido (sin cruces superfluos) tiene la menor cantidad de cruces para el nudo que representa y la segunda nos dice que dos diagramas alternados reducidos de un nudo dado tienen el mismo writhe.

Ambas conjeturas fueron probadas de manera casi simultanea por Kauffman, Murasugi y Thistlethwaite, todos ellos en el año 1987. Como ya dijimos antes, estas pruebas están basadas en algunas propiedades que tienen los polinomios de Jones.

Estamos entonces en condiciones de afirmar que todo diagrama alternado reducido corresponde a un nudo no trivial.

Nosotros reproduciremos en este trabajo la demostración realizada por Kauffman en [Ka3] de la primera de las conjeturas. Una vez más necesitamos introducir antes algunas ideas. Cada vez que tenemos el diagrama de un nudo podemos ver que ese diagrama separa la superficie del plano en distintas regiones, entre las cuales aparece una región que se extiende al infinito. Vamos a etiquetar cada una de esas regiones con A o A^{-1} según una regla que marcamos en los cruces del diagrama y que aquí mostramos en la Figura 2.18.

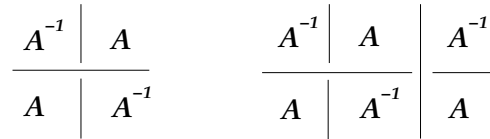


FIGURA 2.18

Esta regla nos dice que si rotamos los arcos del cruce en sentido antihorario hasta que cada arco se superponga con el siguiente, ponemos una A en las regiones que fueron barridas por el arco superior y una A^{-1} en las otras.

OBSERVACIÓN 2.32. El etiquetado de las regiones del diagrama podemos hacerla únicamente cuando el diagrama es alternado, ya que eso nos garantiza que todos los cruces adyacentes a una región le asignan la misma etiqueta, como se muestra en el segundo diagrama de la Figura 2.18.

A partir de esto vamos a generar otro camino para desarrollar el corchete de Kauffman, camino en el cual volvemos a mirar los alisados de cruces que tomamos para armar el polinomio $f_D(A)$. En este caso vamos a observar que los alisados posibles pueden unir las regiones etiquetadas con A o las etiquetadas con A^{-1} . Y son justamente esas las etiquetas que aparecen cuando desarmamos un cruce usando la regla (3) de la definición del corchete. Ver Figura 2.19.

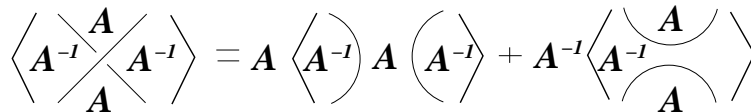


FIGURA 2.19

Definimos entonces para cada estado S de un diagrama D el producto

$$\langle D/S \rangle = A^i A^{-j}$$

donde i es el número de alisados que unieron regiones A y j el número de alisados que unieron regiones A^{-1} . De esta manera podemos obtener el corchete de Kauffman a partir de la sumatoria:

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \sum_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{D}/\mathcal{S} \rangle d^{|\mathcal{S}|-1}.$$

Una vez más la sumatoria recorre todos los posibles estados \mathcal{S} del diagrama. Como antes, $|\mathcal{S}|$ es la cantidad de componentes de \mathcal{S} y $d = -(A^2 + A^{-2})$.

PROPOSICIÓN 2.33. *Sea \mathbf{D} el diagrama de un nudo alternado y reducido en el cual etiquetamos las regiones que genera como se indica en la figura 2.18. Entonces el grado máximo que alcanza el polinomio $\langle \mathbf{D} \rangle$ es $v + 2j - 2$, donde v representa la cantidad de cruces del diagrama y j la cantidad de regiones etiquetadas con A^{-1} . Además el coeficiente del término de mayor grado es $(-1)^{j-1}$.*

Bajo las mismas hipótesis, la menor potencia de $\langle \mathbf{D} \rangle$ es $-v - 2i + 2$, donde i representa la cantidad de regiones etiquetadas con A , y el coeficiente de ese término es $(-1)^{i-1}$.

DEMOSTRACIÓN. Antes de comenzar con la demostración vamos a aclarar con mayor precisión a qué nos referimos cuando hablamos de diagramas irreducibles. Un diagrama es irreducible si no podemos realizar en él movimientos de tipo I o similares a éste. En la Figura 2.20 vemos qué aspecto puede llegar a tener un diagrama no irreducible.

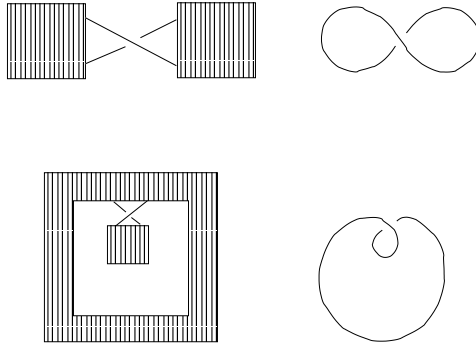


FIGURA 2.20. Ejemplos de diagramas no irreducibles.

En estos ejemplos vemos que existe por lo menos un cruce para el cual dos de las cuatro regiones que se conectan son en realidad la misma región. Un diagrama es irreducible cuando no tiene ningún cruce de este tipo.

Llamemos \mathcal{S} al estado que se obtiene al alisar los cruces de forma tal de unir siempre las regiones etiquetadas con A . De esta manera obtenemos un lazo trivial de j componentes que determina $j + 1$ regiones. De estas regiones, j están etiquetadas con A^{-1} y una con A (Figura 2.21). Nos queda para este estado: $\langle \mathbf{D}/\mathcal{S} \rangle = A^v$ y $|\mathcal{S}| = j$.

Por lo tanto, en el desarrollo del corchete de Kauffman $\langle \mathbf{D} \rangle$, uno de los términos es de la forma

$$\langle \mathbf{D}/\mathcal{S} \rangle d^{\|\mathcal{S}\|-1} = A^v(-A^2 - A^{-2})^{j-1},$$

el cual tiene como grado máximo $v + 2j - 2$ y como coeficiente principal $(-1)^{j-1}$. A continuación vamos a ver que cualquier otro estado del diagrama genera potencias de menor grado.

Sea \mathcal{S}' cualquier otro estado de \mathbf{D} , la diferencia entre este estado y \mathcal{S} es que \mathcal{S}' tiene algunos cruces que fueron alisados en la otra dirección. Podemos entonces construir el estado \mathcal{S}' a partir de \mathcal{S} solo intercambiando los alisados de ese subconjunto de cruces.

Sea $\mathcal{S}(0), \mathcal{S}(1), \dots, \mathcal{S}(n)$ una secuencia de estados para la cual $\mathcal{S} = \mathcal{S}(0)$, $\mathcal{S}' = \mathcal{S}(n)$ y para cada k , $\mathcal{S}(k+1)$ se obtiene a partir de $\mathcal{S}(k)$ cambiando uno de los alisados que une regiones A por el alisado inverso. Al efectuar este cambio de alisado en un cruce, aparece un factor A^{-1} en $\langle \mathbf{D}/\mathcal{S}(k+1) \rangle$ donde antes teníamos un factor A , es decir, se cumple la relación $\langle \mathbf{D}/\mathcal{S}(k) \rangle A^{-2} = \langle \mathbf{D}/\mathcal{S}(k+1) \rangle$.

Solo nos queda por ver de qué manera se modifica la cantidad de componentes del lazo al pasar del alisado $\mathcal{S}(k)$ a $\mathcal{S}(k+1)$. Cuando se invierte uno de los alisados que une regiones A del diagrama, pueden suceder dos cosas:

- se unen dos regiones distintas etiquetadas con A^{-1} . En este caso

$$\|\mathcal{S}(k+1)\| = \|\mathcal{S}(k)\| - 1.$$

- se vuelve a unir una misma región etiquetada con A^{-1} . En este caso

$$\|\mathcal{S}(k+1)\| = \|\mathcal{S}(k)\| + 1.$$

Esto no puede ocurrir al pasar de $\mathcal{S}(0)$ a $\mathcal{S}(1)$ debido a que \mathbf{D} es un diagrama irreducible. Ver Figura 2.21

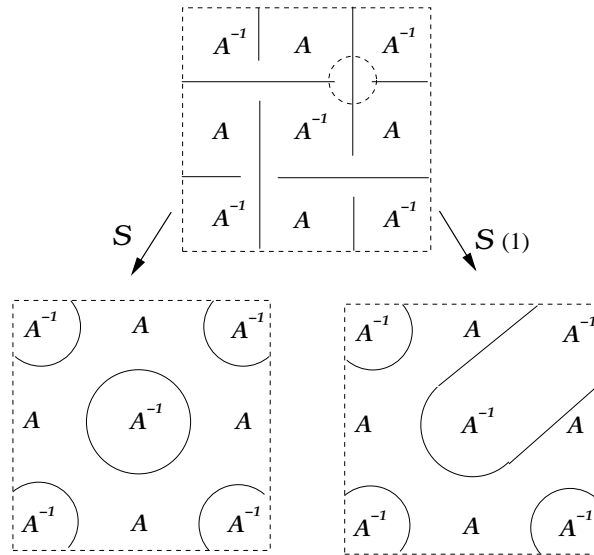


FIGURA 2.21

En ambos casos, vemos que en cada paso el grado máximo nunca aumenta, y que en el primer paso decrece. Tenemos entonces que el grado máximo del corchete de Kauffman se alcanza una sola vez, al tomar el alisado \mathcal{S} , y el coeficiente de ese término es $(-1)^{j-1}$.

La demostración para el grado mínimo se realiza de manera similar. \square

TEOREMA 2.34. *Dos diagramas irreducibles alternados de un mismo nudo tienen el mismo número de cruces.*

DEMOSTRACIÓN. Llamamos grado total de \mathbf{D} ($gt(\mathbf{D})$) a la diferencia entre los grados máximo y mínimo de $\langle \mathbf{D} \rangle$.

Es fácil ver que como $f_D(A) = (-A)^{-3w(\mathbf{D})} \langle \mathbf{D} \rangle$ es un invariante, también lo es $gt(\mathbf{D})$.

Por la proposición anterior

$$gt(\mathbf{D}) = [v + 2j - 2] - [-v - 2i + 2] = 2v + 2(j + i) - 4$$

donde $j + i$ cuenta la cantidad de regiones del diagrama. Usando la característica de Euler de la esfera, puede verse que $i + j = v + 2$. Entonces:

$$gt(\mathbf{D}) = 2v + 2(v + 2) - 4 = 4v.$$

\square

Este resultado nos alcanza para justificar, como dijimos hace un rato, que un diagrama alternado irreducible corresponde a un nudo no trivial. Pero para completar la prueba de la primer conjetura de Tait debemos enunciar un resultado más, el cual no demostraremos, que es una extensión de la proposición 2.33.

PROPOSICIÓN 2.35. *Para todo diagrama \mathbf{D} de un nudo, no necesariamente alternado, se cumple la desigualdad:*

$$gt(\mathbf{D}) \leq 4v$$

Como sabemos que $gt(\mathbf{D})$ es invariante, la menor cantidad de vértices de un nudo alternado se alcanza en los diagramas alternados e irreducibles.

OBSERVACIÓN 2.36. Si trabajamos ahora con los polinomios de Jones ($V_{\mathbf{K}}(t) = f_{\mathbf{D}}(t^{-1/4})$) podemos observar que, si \mathbf{K} es un nudos alternado, el grado total de este polinomio coincide directamente con la cantidad de cruces de un diagrama alternado e irreducible.

Por último, antes de ver cómo trabajar con estos polinomios cuando estudiemos a los nudos virtuales, mostraremos otra buena propiedad que se desprende de este invariante.

PROPOSICIÓN 2.37. *Si llamamos \mathbf{K}_e a la imagen en el espejo del nudo \mathbf{K} se cumple que*

$$V_{\mathbf{K}_e}(t) = V_{\mathbf{K}}(t^{-1})$$

DEMOSTRACIÓN. Este resultado se desprende directamente del hecho de que $w(\mathbf{K}_e) = -w(\mathbf{K})$ y de ver cómo se comporta el corchete de Kauffman en un cruce con respecto a su imagen en el espejo (ver Figura 2.22).

\square

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagrama con cruce} \rangle &= \mathbf{A} \langle \text{Diagrama con arco} \rangle + \mathbf{A}^{-1} \langle \text{Diagrama con arco invertido} \rangle \\
 \langle \text{Diagrama con cruce} \rangle &= \mathbf{A} \langle \text{Diagrama con arco invertido} \rangle + \mathbf{A}^{-1} \langle \text{Diagrama con arco} \rangle
 \end{aligned}$$

FIGURA 2.22

Por lo tanto para que un nudo sea *anfiqueiral* (un nudo es *anfiqueiral* cuando es equivalente a su imagen en el espejo) es necesario que su polinomio de Jones sea invariante por la transformación que manda t en t^{-1} , digamos que sea 'simétrico'. Esto nos garantiza que, como dijimos en el capítulo anterior, el nudo trébol no es anfiqueiral.

2.4.1. Polinomio de Jones para nudos virtuales. Ahora vamos a extender este invariante al conjunto de lazos virtuales siguiendo el mismo espíritu que se vio en los invariantes anteriores. Para esto vamos a dar antes una definición: decimos que un diagrama es *puramente virtual* cuando sus cruces son todos virtuales. Podemos ver cómo a partir de los movimientos virtuales I, II y III (Ver Figura 1.9) un diagrama puramente virtual es equivalente a una colección disjunta de círculos en el plano.

Se construye el polinomio de Jones de un diagrama virtual de la misma manera que en el caso clásico, es decir que los cruces virtuales una vez más van a ser omitidos.

Este polinomio ya vimos que es invariante para los movimientos de Reidemeister y ahora podemos ver que también lo es para los movimientos virtuales, ya que en ellos los cruces clásicos no se modifican. Por lo tanto al desarrollar el corchete de Kauffman del diagrama los cruces clásicos son eliminados y quedan solamente diagramas puramente virtuales, que como dijimos antes pueden convertirse en una colección de círculos disjuntos.

El nudo de Kishino y nuevos invariantes

3.1. Nudo de Kishino

El nudo de Kishino ya fue presentado en la página 16 donde adelantamos que se trataba de un nudo virtual no trivial pero que no era fácil de detectar. Justamente los invariantes que hemos desarrollado en el capítulo anterior no diferencian a este nudo del nudo sin cruces.

Por ejemplo, si calculamos el grupo fundamental del nudo de Kishino, obtenemos el grupo fundamental trivial \mathbb{Z} .

En realidad esto es producto de un problema que tienen tanto el grupo fundamental como los quandles al trabajar con lazos virtuales, y es que no detectan uno de los movimientos prohibidos que presentamos en la Figura 1.10 de la página 14. Ver Figura 3.1.

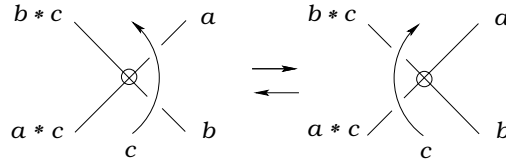


FIGURA 3.1

Y precisamente el nudo de Kishino puede desanudarse completamente si aplicamos este movimiento (ver Figura 3.2).

Esto hace que los invariantes mencionados pierdan mucha de su eficacia al trabajar con nudos virtuales, ya que este mismo problema se puede repetir en otros casos.

Toshimasa Kishino junto con Shin Satoh pudieron demostrar que este nudo no es trivial. Para esto usaron una extensión del polinomio de Jones que contaremos a continuación.

3.2. Extensión del polinomio de Jones

Dado un nudo virtual \mathbf{K} podemos modificarlo y generar un nuevo lazo virtual que llamaremos \mathbf{K}_N , para algún $N \in \mathbb{N}$. Este lazo lo construiremos a partir de un diagrama \mathbf{D} del nudo.

Lo que vamos a hacer es agregar N copias paralelas de \mathbf{D} en el diagrama, para lo cual debemos respetar dos condiciones:

1. Los cruces clásicos que se originan al agregar las N copias mantienen la condición arriba-abajo del cruce original.

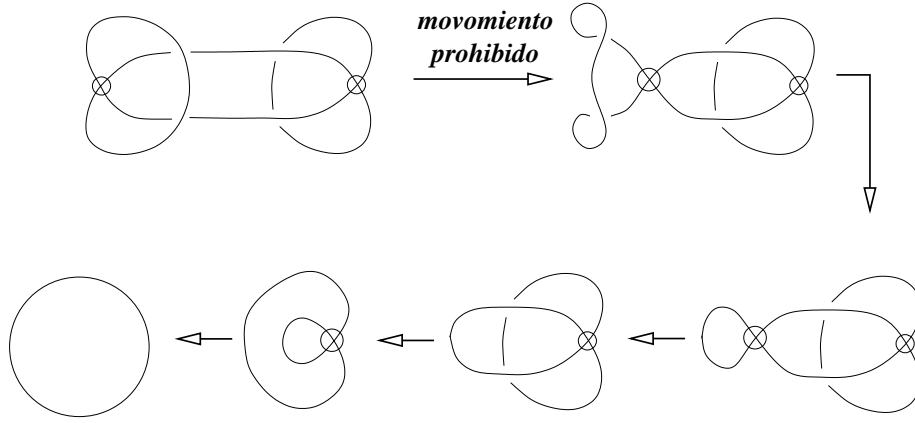


FIGURA 3.2

En la Figura 3.3 mostramos cómo queda este nuevo diagrama si miramos un cruce clásico y uno virtual.

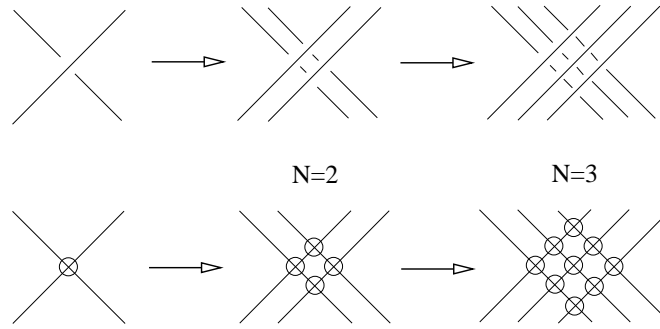


FIGURA 3.3

2. Agregamos $w(\mathbf{D})$ vueltas completas de las N cuerdas del diagrama \mathbf{D}_N . En la Figura 3.4 puede verse un ejemplo con un cruce positivo.

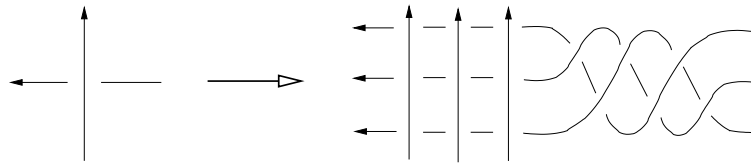


FIGURA 3.4

Si el signo es negativo, la vuelta es en sentido contrario.

A continuación comentaremos por qué es necesario pedir esta segunda regla en la construcción de \mathbf{D}_N .

Al agregar las N copias de \mathbf{D} en el diagrama podemos ver que estos nuevos cruces que aparecen no afectan los movimientos de Reidemeister II y III. Con esto queremos decir que cualquiera de estos movimientos que se realice en \mathbf{D} puede reproducirse en \mathbf{D}_N mediante una secuencia del mismo movimiento.

Donde sí se presentan problemas es en el primer movimiento.

Si realizamos un movimiento del tipo I en un diagrama ya multiplicado podemos ver cómo esos nuevos arcos terminan enroscándose (en la Figura 3.5 se muestra este hecho para el caso positivo). Por otra parte este es el único movimiento que modifica el writhe del nudo.



FIGURA 3.5

Como además estas vueltas que mencionamos pueden ser trasladadas a cualquier parte del nudo usando los movimientos de Reidemeister II y III y los movimientos virtuales, estamos en condiciones de afirmar que la construcción de \mathbf{K}_N no depende de la elección del diagrama \mathbf{D} ni de la elección del arco en el cual realicemos las vueltas.

Definimos entonces el polinomio N -strand bracket de \mathbf{K} como el corchete de Kauffman de \mathbf{D}_N (para algún diagrama \mathbf{D}) y lo notamos $\langle \mathbf{K} \rangle_N$. Es decir:

$$\langle \mathbf{K} \rangle_N = \langle \mathbf{D}_N \rangle$$

El N -strand bracket cumple con los siguientes resultados:

$$i \quad \langle \bigcirc \rangle_N = (-A^{-2} - A^2)^{N-1}$$

$$ii \quad \langle \bigcirc \cup \mathbf{K} \rangle_N = (-A^{-2} - A^2)^{N-1} \langle \mathbf{K} \rangle_N$$

En la Figura 3.3 puede verse cómo aumenta la cantidad de cruces de un diagrama cuando agregamos las copias del mismo. Un diagrama \mathbf{K} de n cruces clásicos genera un \mathbf{K}_2 de $4n$ cruces y un \mathbf{K}_3 con $9n$ cruces. Con lo cual la cantidad de pasos para calcular el N -strand bracket aumenta considerablemente incluso para valores chicos como 2 y 3.

Ahora recordemos la definición del polinomio $f_{\mathbf{D}}(A) = (-A)^{-3w(\mathbf{D})} \langle \mathbf{D} \rangle$, el cual es un invariante de nudos y da origen al polinomio de Jones reemplazando $A^2 = t^{\frac{1}{2}}$.

Ahora bien, si el nudo de Kishino (\mathbf{KI}) fuese el nudo trivial, se tendría que cumplir:

$$f_{\mathbf{KI}_N}(A) = (-A^{-2} - A^2)^{N-1}$$

Pero Kishino y Satoh mostraron en [KS] que esto se cumple para $N = 1$ y $N = 2$, pero no para $N = 3$.

Es decir que:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{KI}_1}(A) &= f_{\mathbf{KI}}(A) = 1 \\ f_{\mathbf{KI}_2}(A) &= (-A^{-2} - A^2) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{KI}_3}(A) &= 92 + 78(A^2 + A^{-2}) + 68(A^4 + A^{-4}) + 44(A^6 + A^{-6}) \\ &\quad - 14(A^8 + A^{-8}) - 2(A^{10} + A^{-10}) - 27(A^{12} + A^{-12}) \\ &\quad - 38(A^{14} + A^{-14}) - 43(A^{16} + A^{-16}) - 42(A^{18} + A^{-18}) \\ &\quad - 32(A^{20} + A^{-20}) - 28(A^{22} + A^{-22}) - 19(A^{24} + A^{-24}) \\ &\quad - 10(A^{26} + A^{-26}) - 5(A^{28} + A^{-28}) - 2(A^{30} + A^{-30}) \\ &\quad - (A^{32} + A^{-32}) + (A^{36} + A^{-36}) \end{aligned}$$

Esto nos dice entonces que el nudo de Kishino no es trivial.

Tomando lo hecho por Kishino y Satoh, H.A.Dye muestra en [D] dos familias infinitas de nudos virtuales no triviales que no son detectados por el corchete de Kauffman ni por el 2-strand bracket pero si por el 3-strand bracket.

Programas para la clasificación de nudos virtuales

4.1. Programas

En esta sección contaremos cómo fue que encaramos la clasificación de nudos virtuales de hasta 5 cruces clásicos, usando para esto el lenguaje de programación Python.

Es claro que no tenemos ningún nudo con un solo cruce clásico, ya que de ser así este nudo puede ser desanudado completamente aplicando una combinación adecuada de movimientos virtuales y de Reidemeister. Por lo tanto, nos preocuparemos por mirar nudos de 2 a 5 cruces.

Primero veremos cómo fue que generamos los códigos de Gauss de los nudos de 5 cruces, la misma idea fue también aplicada para generar el resto de los códigos.

Primero construimos los códigos de las sombras de los nudos, es decir, códigos en donde sólo aparecen los cruces pero no la información acerca de si estamos pasando por arriba o por debajo ni tampoco los signos de cada uno de ellos.

OBSERVACIÓN 4.1. Por comodidad en la programación enumeraremos los cruces empezando por el 0 en lugar de empezar por el 1.

Estos códigos contienen 10 lugares en los cuales ubicamos los números del 0 al 4, cada uno de ellos repetidos dos veces. Tengamos en cuenta que los cruces virtuales no aparecen en los códigos.

La primer condición que vamos a cumplir es no poner el mismo cruce en dos lugares consecutivos ya que esto representa un lazo que puede ser desanudado con el primer movimiento de Reidemeister.

La segunda condición es empezar a recorrer el nudo desde el cruce 0, con lo cual ya tenemos que el primer dígito de cada código va a ser el 0 y, por la condición que pedimos antes, el segundo y el último no. Nos quedan entonces por ubicar otros 9 dígitos respetando la primer condición.

La tercer y última condición es enumerar los cruces siempre en sentido ascendente, esto quiere decir que cada vez que aparezca un nuevo número en el código tiene que ser el siguiente al mayor que haya aparecido hasta ese momento (no puede aparecer un 2 si no apareció ningún 1, ningún 3 si no hay ningún 2, etc).

En la Figura 4.1 puede verse el mismo nudo con una permutación en la enumeración de los cruces, según nuestras reglas nos quedamos con la distribución de la izquierda por más que las dos empiecen con 0.

Por lo tanto tenemos que todos los códigos van a comenzar con los cruces 0 y 1, en ese orden, y que el siguiente solo puede ser el 0 ó el 2.

OBSERVACIÓN 4.2. Si los nudos fueran clásicos, el tercer dígito tendría que ser un 2, por lo visto en la proposición 1.5, pero como esto no ocurre con los nudos virtuales tenemos que considerar la posibilidad de que sea un 1.

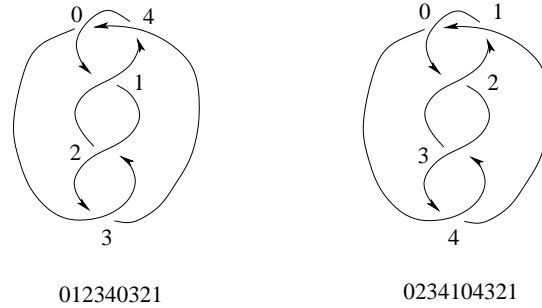


FIGURA 4.1

Teniendo en cuenta estas restricciones armamos un programa que nos dio como resultado un conjunto de 293 códigos, pero al generar los códigos de esta manera no estamos contemplando las posibles rotaciones del diagrama. Por ejemplo, si empezamos a enumerar los códigos del nudo de la figura 4.1 a partir del cruce que, en el diagrama de la derecha, llamamos 2, obtenemos el código '0123104234' que, obviamente, representa el mismo nudo que '0123403214'.

Este problema fue abordado por Joe Sawada en [S] quien consiguió un eficiente algoritmo para construir códigos de diagramas de cuerdas. Para poder reproducir las ideas de este trabajo es necesario dar antes algunas definiciones.

Un *diagrama de cuerdas* es un conjunto de $2n$ puntos sobre una circunferencia orientada (en sentido antihorario) unidos de a pares por n cuerdas (ver Figura 4.2). Dos diagramas de cuerdas son isomorfos si uno de ellos puede obtenerse a partir de una rotación del otro.

Un *collar* de longitud n es la clase de equivalencia de todas las cadenas de n caracteres sobre un alfabeto de tamaño k , tomando todas las rotaciones como equivalentes. Identificamos cada clase con su representante, que es el menor de los elementos puestos en orden alfabético. Por ejemplo, el conjunto de todos los collares binarios de longitud 4 es $\{0000, 0001, 0011, 0101, 0111, 1111\}$.

También llamaremos *palabra de Lyndon* a los collares no periódicos y *precollar* a una cadena que sea el prefijo de un collar.

EJEMPLO 4.3. Presentamos algunos ejemplos en los que seguimos usando el alfabeto binario:

00101001 no es un collar ya que no es el menor elemento de su clase.
 00100101 si es collar.
 001001 es collar pero no palabra de Lyndon.
 00101 es una palabra de Lyndon.
 0010 es un precollar.
 0100 no es un precollar.

Para representar los diagramas de cuerdas podemos usar los diagramas y códigos de Gauss (Figura 4.2 (a)), de esta manera tenemos collares de $2n$ caracteres con símbolos de 1 a n en su alfabeto. El problema que plantea Sawada es que no existe todavía ningún algoritmo eficiente para generar los representantes más pequeños de las cadenas para un alfabeto arbitrariamente grande. Es por eso que vamos a usar una nueva representación de estos diagramas.

Lo que hacemos entonces es etiquetar los extremos de las cuerdas con sus respectivas longitudes, donde la longitud es la distancia que separa a cada extremo del otro extremo de la misma cuerda, siempre siguiendo el sentido antihorario de rotación. Es decir, la longitud de una cuerda que empieza en el lugar i y termina en el lugar j es $(j - i) \bmod(2n)$ (Figura 4.2 (b)). Por lo tanto, en un diagrama de n cuerdas los extremos de cada cuerda deben sumar $2n$.

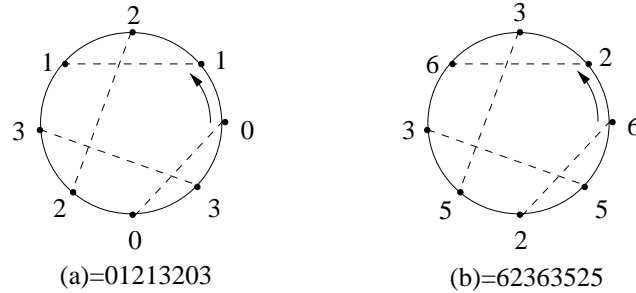


FIGURA 4.2. Dos representaciones del mismo diagrama

Tenemos entonces códigos de $2n$ caracteres pero ahora con con símbolos de 1 a $2n - 1$ en su alfabeto.

El programa para generar estos códigos se basa en el algoritmo recursivo de Ruskey para la generación de collares (ver [S] y [CRSMS]). La idea general de este algoritmo es generar un precollar de longitud $t - 1$ para después agregarle todos los posibles valores que lo extiendan a un precollar de longitud t .

Para lograr esto recurre al Teorema 2.1 de [CRSMS], el cual afirma que si $\alpha = a_1a_2\dots a_{t-1}$ es un precollar, basta ver que $a_{t-p} \leq a_t$ para que $\alpha = a_1a_2\dots a_t$ también lo sea, donde p es la longitud del prefijo más largo de α que sea en sí mismo una palabra de Lyndon. A este valor se lo denomina $lyn(\alpha)$ y su definición formal es:

$$lyn(\alpha) = \max\{1 \leq p \leq n/a_1a_2\dots a_p \text{ es una palabra de Lyndon}\}$$

EJEMPLO 4.4. Si tomamos $\alpha = 001010010$, $lyn(\alpha) = 5$.

Podemos observar también que si $\alpha = a_1a_2\dots a_n$ es una palabra de Lyndon, $lyn(\alpha) = n$.

Tengamos en cuenta que nosotros no queremos generar todos los collares posibles, sino aquellos que representen un diagrama de cuerdas.

Como vamos a usar los códigos de la figura 4.2(b), los caracteres vienen dados de a pares: si tenemos el valor j en la posición a_t , también tiene que aparecer $2n - j$ en la posición a_{t+j} . Es por eso que en nuestro programa cuando tenemos armado un precollar, en lugar de agregarle un caracter le agregamos una cuerda, o lo que es lo mismo, dos caracteres (en los lugares t y $t + j$).

Por otro lado, como ya dijimos al comienzo de este capítulo, no vamos a generar códigos de Gauss en los que aparezca el mismo cruce en dos lugares consecutivos. Si traducimos esta idea a los códigos que estamos generando ahora, las longitudes de las cuerdas del diagrama tienen que ser ≥ 2 . Esto nos lleva a hacer una pequeña

modificación en el programa que nos presenta Sawada: tomando al 2 como el menor valor posible que pueden tomar los caracteres del código.

De esta manera conseguimos un programa que nos genera 36 códigos (se muestran en la tabla 1), lo cual nos representa un gran beneficio comparado con los 293 códigos que conseguíamos con nuestro primer programa. Sobre todo teniendo en cuenta que, como veremos a continuación, cada uno de estos códigos se reproduce generando lo que más adelante llamaremos códigos completos. Cada código genera hasta 1024 códigos completos.

2 cuerdas:	2222
3 cuerdas:	234234, 333333
4 cuerdas:	22662266, 23635256, 24633455, 24642464, 34453445, 35353535, 44444444
5 cuerdas:	2288238278, 2288333777, 2288342786, 2288423867, 2288522885, 2383737278, 2384733677, 2384742686, 2385723857, 2483467268, 2484463667, 2484562685, 2485268258, 2485363757, 2486362784, 2584445666, 2584535675, 2585345756, 2585525855, 2586335774, 2586425864, 2683447466, 2683537475, 2783347736, 2783527835, 3357733577, 3457463567, 3467363747, 3557445566, 3557535575, 3647446466, 3647536475, 3737373737, 4555645556, 4564645646, 5555555555

CUADRO 1. Códigos para diagramas de 2 a 5 cuerdas

Una vez que tenemos armados estos códigos usamos un programa simple para conseguir los códigos de Gauss correspondientes, con los cuales vamos a seguir trabajando.

EJEMPLO 4.5.

Código de cuerdas 2288238278 \Rightarrow Código de Gauss 0101232434

Código de cuerdas 2383737278 \Rightarrow Código de Gauss 0102132434

Para ingresar los datos que nos indican si estamos pasando por arriba o por debajo de cada cruce agregamos una nueva condición: vamos a suponer que empezamos a recorrer nuestro nudo desde el arco que pasa por arriba del cruce 0 (como se ve en el nudo de la izquierda de la Figura 4.1). A partir de ahí, cuando pasemos por debajo de un cruce vamos a escribir su número con signo negativo (ver Figura 4.3).

OBSERVACIÓN 4.6. El segundo 0 indica que estamos pasando por debajo de ese cruce.

Para generar los códigos en los cuales empezamos a recorrer el nudo por el arco que pasa por debajo del 0, hacemos rotar el código de Gauss hasta que comience por el segundo 0 y realizamos el mismo trabajo.

Por ejemplo, el código 0123403214 nos genera 2^4 nuevos códigos, luego lo rotamos hasta que nos queda 0321401234 el cual nos genera otros 2^4 nuevos códigos. Esto lo hacemos con cada uno de los códigos de Gauss con excepción del último que fue generado por el programa ya que este es el único que no cambia con esta rotación (código 0123401234).

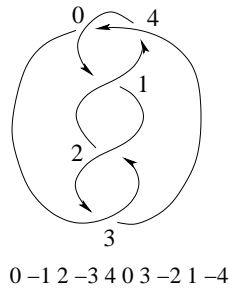


FIGURA 4.3

De esta manera la cantidad de códigos a clasificar aumentó a un total de $36 * 2^4 + 35 * 2^4 = 1136$.

Por último, agregamos los signos de cada uno de los cruces y para esto no nos queda más que contemplar todas las combinaciones de 1 y -1 en los 5 casos. Lo que hacemos entonces es un programa que genere vectores de 5 coordenadas con 1 y -1 (Figura 4.4).

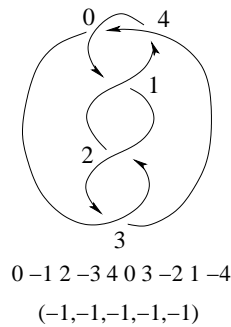


FIGURA 4.4

Nos quedan entonces $1136 * 2^5 = 36352$ códigos de 5 cruces, bastante menos si los comparamos con los 150016 que nos hubiesen quedado con el otro armado de códigos.

Como indicamos antes, vamos a respetar las mismas normas para elaborar los códigos de los nudos de 2, 3 y 4 cruces.

Ahora bien, cuando miramos los nudos de dos cruces vemos que el único código de Gauss que podemos formar es el 0101 que, como ya dijimos en el capítulo 1, no representa un código planar por no ser *evenly intersticed*. Y si consideramos las posibles combinaciones de signos llegamos a la conclusión de que los únicos nudos virtuales no triviales que podemos armar son los de códigos 0-1 0 1 con signos en los cruces (1,1) o (-1,-1), lo que representa un nudo y su imagen en el espejo.

La proposición 2.37 nos dice que el nudo representado por 0-1 0 1 y (1,1) no es anfiqueiral ya que su polinomio de Jones es

$$\mathbf{V}_{\mathbf{K}}(t) = t^{5/2} - t^{3/2} - t$$

Estamos entonces en condiciones de afirmar que existen dos nudos virtuales de dos cruces y ninguno clásico.

Los resultados para nudos de 3 y 4 cruces fueron:

$$\begin{aligned} \text{códigos de 3 cruces} &= 96 \\ \text{códigos de 4 cruces} &= 1664 \end{aligned}$$

Nos queda por ver entonces como funciona el invariante quandle 2-cociclo a la hora de detectar nudos virtuales de 3 a 5 cruces. Recordemos que para esto debemos mirar primero el diagrama de cada nudo, elegir un quandle y contabilizar todas las posibles formas de colorear el diagrama colocando un elemento del quandle a cada arco respetando la relación en los cruces que presentamos en la Figura 2.6 de la página 23.

Por lo tanto, nuestro próximo objetivo fue enumerar los arcos y construir los cruces de cada uno de los códigos. A los arcos los vamos a enumerar empezando por el que pasa por arriba del cruce 0, ese será el arco 0, y siguiendo la orientación que definimos en los cruces. Observemos que este arco, al igual que los otros 4, termina cuando pasamos por debajo de algún cruce.

Para almacenar estos nuevos datos construimos un vector en el que indicamos cuál es el arco en el que estamos parados mientras vamos recorriendo el nudo guiándonos por el código de los cruces.

Por ejemplo, en la Figura 4.5 nos quedan formados los códigos de cruces y arcos:

<i>cruces</i>	0	-1	2	-3	4	0	3	-2	1	-4
<i>arcos</i>	0	1	1	2	2	3	3	4	4	0

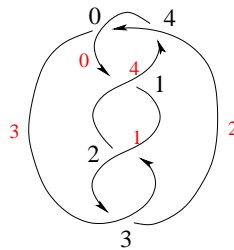


FIGURA 4.5. Enumeración de los arcos del diagrama

Ahora sí, estamos en condiciones de armar los cruces de cada uno de los nudos.

Vamos a representar estos cruces con una terna (a, b, c) en donde b simboliza el arco superior (siempre apuntando hacia arriba), a el arco de la izquierda y c el de la derecha. Para hacer esto, tomamos el arco que pasa por arriba del cruce, luego buscamos cuáles son los que pasan por debajo, y por último vemos el signo del cruce para saber en qué orden ubicamos los arcos inferiores. En la figura 4.6 pueden verse los dos casos posibles.

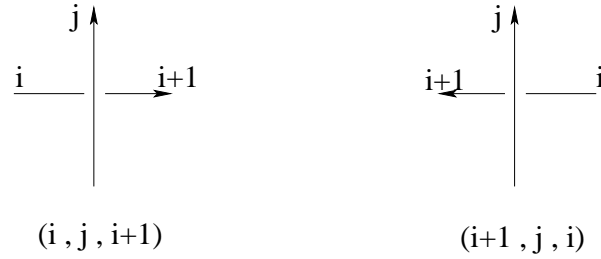


FIGURA 4.6. Cruces

Por ejemplo, en el código anterior el arco que pasa por arriba del cruce 1 es el 4, y los que pasan por debajo son los arcos 0 y 1, en ese orden si miramos su ubicación en el código, y como el signo del cruce es -1 la terna nos queda $(0, 4, 1)$.

De esta manera, si llamamos $Q(a)$, $Q(b)$ y $Q(c)$ a los valores del quandle asignados a a , b y c respectivamente, el producto del quandle debe cumplir la relación $Q(a) = Q(c) * Q(b)$, o lo que es lo mismo, $Q(a) * Q(b) = Q(c)$.

Con los cruces de los códigos ya armados, seleccionamos una serie de quandles con los cuales vamos a colorearlos. Los quandles que elegimos son los que figuran en la tabla ubicada al final de este trabajo.

Para cada uno de ellos nos construimos la matriz asociada y la matriz de la aplicación inversa, con lo cual las acciones del quandle nos quedan definidas como

$$a * b = Q_{a,b} \quad , \quad a \bar{*} b = \bar{Q}_{a,b}$$

donde Q representa la matriz del quandle y \bar{Q} la del inverso.

Una vez que elegimos los quandles tenemos que colorear los arcos de una manera económica. Lo que hicimos primero es asignarle un color al arco central del primer cruce y otro, posiblemente el mismo, al arco de la derecha, esto ya determina el color del arco izquierdo. Tenemos con esto dos o tres arcos con su color asignado (si alguno de los arcos se repite en el cruce solo estamos coloreando dos).

Luego recorremos el resto de los cruces, y cada vez que el arco central y alguno de los otros dos sean arcos ya coloreados nos queda determinado el color del arco restante. Si luego de recorrer los cruces queda algún arco sin colorear, le asignamos un color arbitrariamente y volvemos a recorrerlos para seguir coloreando.

Con este procedimiento le estamos asignando colores a dos arcos (o a uno solo en el caso que se repita el mismo arco en el primer cruce) y a tantos arcos más como sea necesario.

Una vez que tenemos los cruces con sus colores asignados verificamos si todos ellos cumplen con la relación $Q(a) = Q(c) * Q(b)$, de no ser así descartamos esa combinación. Finalmente contamos cuántos coloreos quedaron en cada nudo.

En la mayoría de los casos los únicos coloreos que sobreviven son los triviales, es decir que para un quandle de n elementos la mayoría de los códigos permiten n coloreos.

Para armar en cada quandle la función del 2-cociclo, construimos una matriz de tres columnas; las dos primeras presentan todos los posibles pares ordenados de elementos del quandle mientras que la imagen del cociclo se lee en cada fila.

Con esto queremos decir que, por ejemplo, la fila (x, y, z) representa $\varphi(x, y) = z$, donde φ es el nombre de la función del cociclo.

Los cociclos con los que trabajamos son todos a valores en \mathbb{Z}_n , por lo que el peso en cada cruce (a, b, c) con signo ε del diagrama es: $\varepsilon \varphi(Q(c), Q(b))$.

Una vez sumados estos pesos cambiamos el coloreo, manteniendo el mismo quandle, y volvemos a sumar. Finalmente para amar la suma formal en $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$ contamos cuántas veces aparece cada resultado y guardamos estos datos en forma vectorial.

Por ejemplo, en $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_4]$ un vector $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ indica que salió a_1 veces el 0, a_2 veces el 1, etc.

4.2. Datos obtenidos

Para analizar la eficacia de nuestros programas nos basamos en los resultados obtenidos por Jeremy Green y Dror Bar-Natan, quienes realizaron una clasificación de estos nudos. Esos resultados pueden consultarse en:

<http://www.math.toronto.edu/~drorbn/Students/GreenJ/>

Al hacer correr los programas pudimos observar que este invariante es muy bueno si trabajamos con nudos clásicos pero pierde eficacia en los nudos virtuales.

Antes de continuar con los resultados obtenidos, debemos aclarar que los códigos de 5 cruces incluyen también códigos de nudos que pueden ser reducidos por movimientos de Reidemeister y movimientos virtuales a nudos de menos cruces. Por ejemplo, si lo pensamos al revés, el código del nudo trébol puede fácilmente convertirse en un código de 5 cruces si realizamos en el un movimiento de Reidemeister de tipo II. Claro está que esto mismo ocurre con los códigos de 3 y 4 cruces.

Es por eso que cuando hablemos de la clasificación de códigos de n cruces, vamos a estar clasificando en realidad nudos de hasta n cruces.

Para los códigos de tres cruces quedaron identificados solo tres grupos de códigos no triviales: dos de ellos corresponden a los nudos trébol (uno y su imagen en el espejo), mientras que los códigos del tercer grupo representan todos al mismo nudo (y su imagen del espejo). Este nudo es el que se muestra en la Figura 4.7.

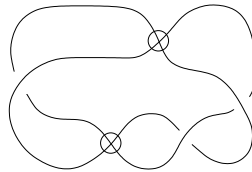


FIGURA 4.7

El trabajo de Green/Bar-Natan nos muestra que, efectivamente, hay un único nudo clásico no trivial de hasta tres cruces, el trébol, el cual no es anfiqueiral. Pero también podemos ver que existen otros 15 nudos virtuales de los cuales nuestros programas solo detectaron uno.

Por otro lado, ese nudo virtual que detectamos tampoco es anfiqueiral, pero este hecho no quedó reflejado en nuestros datos. Mientras que para el trébol nos quedaron bien separadas las dos clases.

Se sabe que para 4 cruces existe un solo nudo clásico, el nudo de Saboya (o “del ocho”), que nosotros presentamos en la Figura 1.1 de la página 8. Este nudo es un ejemplo de nudo anfiqueiral y fue detectado por nuestros programas.

Al igual que pasó con el nudo trébol, los códigos de esta clase de equivalencia quedaron bien separados del resto.

Pero aparte de esta clase de equivalencia nos quedaron otros 10 grupos de nudos que no son triviales y que son distintos al de Saboya, cuando en realidad el trabajo de Green/Bar-Natan nos dice que existen otros 334 nudos no triviales. Por lo tanto, los grupos que tenemos puedan refinarse aún más y también es probable que algunos de los códigos que hasta ahora nos quedaron como triviales en realidad no lo sean.

Nudos clásicos de 5 cruces hay sólo dos (Figura 4.8), ambos no anfiqueirales, y fueron detectados por nuestros invariantes. Al igual que en el trébol quedaron bien separadas las clases de equivalencia de las imágenes espejadas de cada uno de ellos.

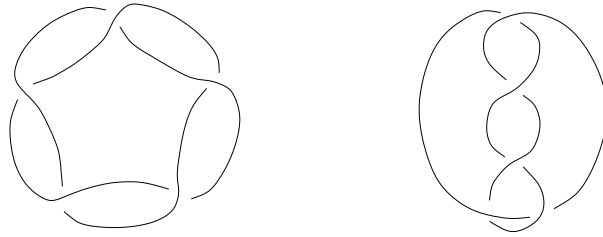


FIGURA 4.8. Nudos clásicos de 5 cruces

Aparte de estas clases detectamos otros 20 grupos no triviales, cuando los datos previos nos adelantaban que los nudos de hasta 5 cruces eran 9575.

En la tabla que se muestra a continuación podemos ver los resultados de cada cociclo aplicado a cada uno de los conjuntos de códigos. En la última fila aparece el resumen final de los resultados que antes comentamos.

quandle	códigos de 3 cruces		códigos de 4 cruces		códigos de 5 cruces	
	detectados	grupos	detectados	grupos	detectados	grupos
afin- $F9$	0	0	4	1	50	2
tetra	2	1	52	2	1432	2
cubo	2	2	24	3	848	4
dodeca	2	2	24	3	780	8
ico	2	1	52	2	1434	4
exten-cubo	0	0	8	1	268	2
exten-dodec	0	0	8	2	220	3
$S4-2[1][1]$	8	1	98	1	3392	1
$S4-3[1]$	2	1	52	2	1432	2
$S5-2[1][1][1]$	8	1	96	1	3392	1
$S5-22[1]$	8	1	128	2	3712	2
$S5-3[1][1]$	2	1	52	2	1434	4
$S5-32$	0	0	4	1	52	6
$S5-4[1]$	2	2	72	3	2017	4
$S6-2[1][1][1][1]$	8	1	96	1	3392	1
$S6-222$	8	1	96	1	3392	1
Finales	8	3	188	11	5240	24

En las columnas encabezadas con la palabra “**detectados**” contamos la cantidad de códigos que el invariante detecto como no triviales, y en las columnas encabezadas con “**grupos**” contamos en cuantos grupos quedaron separados estos códigos.

Los quandles elegidos para este trabajo fueron:

- Afin- $F9$: quandle de Alexander $\mathbb{Z}_3[t]/t^2 + 1$.
Tetra : quandle generado por las rotaciones de las caras del tetraedro.
(isomorfo a $A4 - 3[1]$).
Cubo : generado por las rotaciones de las caras del cubo.
(isomorfo a $S4 - 4$)
Dodeca : generado por las rotaciones de las caras del dodecaedro.
(Isomorfo a una de las clases de $A5 - 5$)
Ico : generado por las rotaciones de las caras del icosaedro.
(isomorfo a la clase de conjugación de $A5$ por un 3-ciclo)
 $S4 - 2[1][1]$: clases de conjugación de $S4$ generada por una transposición.
 $S4 - 3[1]$: clases de conjugación de $S4$ generada por un 3-ciclo.

Lo mismo para las distintas clases de conjugacion de $S5$ y $S6$. Mientras que exten-cubo y exten-dodec son extensiones del cubo y el dodecaedro que duplican la cantidad de elementos de cada uno.

Bibliografía

- [AG] Nicolás Andruskiewitsch y Matías Graña, *From racks to pointed Hopf algebras*, Advances in Mathematics 178 (2003) pp. 177-243.
- [AM] J.A. Ayala Molina, *Introducción a los invariantes polinómicos de nudos*, texto presentado en el XII encuentro de geometría y sus aplicaciones (jun. 2002), <http://www.matematicas.unal.edu.co/~huerfano/nudos.pdf>
- [BZ] Gerhard Burde y Heiner Zieschang, *Knots*, de Gruyter Studies in Mathematics, de Gruyter, Berlin 1985.
- [CRSMS] K. Cattell, F. Ruskey, J. Sawada, C.R. Miers y Serra, *Fast algorithms to generate necklaces, unlabeled necklaces, and irreducible polynomials over $GF(2)$* , J. Algorithms, 37 (2000), pp. 267-282.
- [CJKLS] J. Scott Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford y m. Saito, *Quandle Cohomology and State-sum Invariants of Knotted Curves and Surfaces*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 355, No 10, 2003 , pp. 3947-3989
- [D] H. A. Dye, *Virtual knots undetected by 1 and 2-strand bracket polynomials*, arXiv:math.GT/0402308 (Feb 2004)
- [E] Michael Eisermann, *Homological characterization of the unknot*, Journal of Pure and Applied Algebra 177 (2003), pp. 131-157.
- [FKM] R. Fenn, L. H. Kauffman y V. O. Manturov, *Virtual Knot Theory-Unsolved Problems*, arXiv:math.GT/0405428 (May 2004)
- [GPV] Mikhail Goussarov, Michael Polyak y Oleg Viro (2000) *Finite type invariants of classical and virtual knots*, Topology 39, pp. 1045-1068.
- [GT] Matías Graña y Vladimir Turaev, *Knot theory for self-indexed graphs*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 357, No. 2, pp. 535-553.
- [HTW] J. Hoste, m. Thistlethwaite y J. Weeks, *The first 1701936 knots*, Math. Intelligencer 20 No. 4 (1998) pp. 33-48.
- [J] David Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, Journal of Pure and Applied Algebra 23 (1982) pp. 37-65.
- [K] Christian Kassel, *Quantum Groups*, Ed: Springer-Verlag.
- [KM] L. H. Kauffman y V. O. Manturov, *Virtual Knots and Links*, arXiv:math.GT/0502014 v2 (May 2005)
- [KS] Toshimasa Kishino y Shin Satho, *A note on non-classical virtual knots*, Journal of knot Theory and its Ramifications. Vol. 13. No. 7 (2004) pp. 845-856. World Scientific Publishing Company.
- [Ka1] L.H. Kauffman, *Virtual Knot Theory*, European J. Comb.(1999) Vol. 20, pp. 663-690.
- [Ka2] L.H.Kauffman, *Quantum Computing and the Jones Polynomial*, arXiv:math.QA/0105255 (May 2001).
- [Ka3] L.H. Kauffman, *State models and the jones polynomial*, Topology 26 (1987) pp. 395-407.
- [O] Olof Petter Östlund, *Invariants of knot diagrams and relations among Reidemeister moves*, Preprint, arXiv:math/0005108, May. 2000
- [S] Joe Sawada, *A fast algorithm for generating nonisomorphic chord diagrams*, SIAM Journal on Discrete Mathematics. Vol 15, N°4 pp. 546-561.
- [St] A. Stoimenow, *Tait's conjectures and odd crossing number amphicheiral knots*, arXiv:0704.1941v1 [math.GT] 16 Apr 2007.
- [W] F. Waldhausen *On irreducible 3-manifold which are sufficiently large*, The annals of Mathematics, 2nd Ser. Vol. 87, no. 1 (Jan., 1986), pp. 56-88.