UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Estudio y Aplicaciones de Black Scholes

Carlos Héctor Daniel Alliera

Director: Dr. Pablo Amster

Fecha de Inicio: Octubre de 2006.

Presentación: Buenos Aires, Abril de 2007.

0.1. Introducción

En este trabajo se hace un estudio de la Fórmula de Black Scholes, la cual es muy importante en la economía moderna ya que dicha fórmula se utiliza, entre otras cosas, para valuar determinados bienes y/o activos financieros (que en el trabajo denominaremos *Derivados* ú *Opciones*) a través del tiempo, por ejemplo, en el caso de las acciones de una sociedad anónima.
Si bien a principios del Siglo XX existían modelos para valuar derivados, éstos contaban con numerosos errores que provocaban importantes diferencias entre el valor calculado por el modelo y el real; La Fórmula de Black Scholes, fue toda una innovación, para muchos, la razón del crecimiento de las finanzas a partir de 1973, fecha en que fue publicada por Fischer Black (1938-1995, para muchos, el mentor de los actuales mercados de derivados) y Myron Scholes (ganador del premio Nobel de Economía en 1997 con Robert Merton quien también colaboró en el desarrollo de la fórmula que les valió esta distinción, por ello muchas veces vamos a encontrar a la fórmula con el nombre de Black Scholes Merton).
Este análisis es fundamentalmente matemático, pero enmarcado en la utilidad financiera que esta fórmula tiene; a lo largo de la presente tesis veremos primero conceptos introductorios para ubicarnos en el tema y comprender los conceptos posteriores. Luego veremos de dónde se obtiene esta fórmula, la naturaleza de la misma y de las variables que la componen, haremos un estudio basado en el comportamiento de los precios en los distintos bienes a comercializar relacionado siempre desde la visión de la Fórmula de Black Scholes (BS).
Algo que vale la pena notar, es la versatilidad de la fórmula, puede adaptarse a los distintos contratos que condicionen la forma de comercializar el ó los bienes en cuestión, y también en base a las condiciones de mercado se puede conseguir información de la fórmula BS la cual es muy útil, sobre todo en el caso de las empresas, para tomar decisiones posteriores, este tipo de análisis se verá cuando estudiemos las formas de derivar la fórmula BS y obtengamos los parámetros que aportan la información ne-

cesaria.
También observaremos como se generaliza el modelo de BS en varias dimensiones, es decir al tener ya no uno, sino un conjunto de bienes a comercializar.
Los precios a veces pueden ser alterados de manera sorpresiva por diversas causas, pero haciendo unas ligeras modificaciones a la fórmula de BS podremos considerar estos imprevistos, como veremos más adelante.
Por último se mostrarán algunos ejemplos más de aplicaciones de la fórmula, si bien surge a partir de la necesidad de valuar eficientemente diversos activos, y ese es su objetivo primordial, se han hecho experimentos que utilizan fuertemente BS en otros campos de las finanzas; entre éstos destaca, desde mi punto de vista, el que se hizo en México durante la última década del Siglo XX, usando BS para determinar el valor de empresas endeudadas.
Ahora espero que el buen lector disfrute de este trabajo.

Agradecimientos .

Fundamentalmente a Lidia, cuya aparición en mi vida es invaluable (quedé enganchado con las opciones).
A los amigos de fierro: Guillermo, Lucas, Miguel y Roberto (en orden alfabético).
A Pablo Amster por su paciencia y por haberme dado la posibilidad de estudiar este tema tan interesante.
A mis viejos, que por ellos he llegado a este punto, infinitas gracias.
A quienes me dieron una mano: Diego Rial, Juan Carlos Bressan y Elisita.
A aquellos compañeros con los que compartí buenos momentos en alguna o varias materias y seguro me olvido de alguien si empiezo a mencionar.

Índice general

Capítulo 1

Los Conceptos Necesarios

1.1. Introducción

Para comprender el entorno del que surge y en el que se aplica el modelo de Black Scholes, debemos conocer primero ciertos conceptos matemáticos, con el fin de entender de manera abstracta las fórmulas del modelo, y financieros para comprender sus aplicaciones; aquí serán desarrollados varios de los conceptos básicos que se enuncian en este trabajo.

1.2. Conceptos Matemáticos y Financieros elementales

1.2.1. Los tipos de Interés

Siempre es necesario estimar la variación fija de los valores a través del tiempo, para eso están las **Tasas de Interés**. Según el tipo de transacción que se acuerde existen tipos de interés más apropiados, por ejemplo:

1. **Interés Simple** en este caso la fórmula viene dada por:

$$V = V_0(1+r)^t$$

Donde V representa el valor de un depósito de valor inicial V_0 transcurrido un tiempo t y r es la tasa de interés anual.

2. También existe el llamado **Interés Compuesto** para el que V, V_0 y t tienen las mismas condiciones que para el interés simple, una tasa r de interés compuesto n veces al año, en este caso la fórmula es:

$$V = V_0(1 + \frac{r}{n})^{nt}$$

3. Por último, entre los tipos de interés más utilizados en las finanzas modernas está el **Interés Continuo**, en este caso, en lugar de ir calculando como varía el valor de un cierto activo durante las etapas que dure el ejercicio (por ejemplo meses, cada mes transcurrido hace variar el interés, y esto hace cambiar el valor del activo lo que se denomina una **Capitalización**) se dice que calculamos en interés para un período *discreto* de tiempo; en este caso el tiempo se considera continuo, el valor del interés en un tiempo t_0 será diferente al valor en un tiempo posterior $t_0 + \Delta t$, por chica que sea la variación Δt, este tipo de interés se comporta como una función continua como ya veremos en la fórmula; V, V_0 y t bajo las mismas condiciones que para los anteriores, y una tasa r de interés anual, se calcula de la siguiente forma:

$$V = V_0 e^{rt}$$

Observación: El interés continuo puede verse como el interés compuesto para $n \to \infty$, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} V_0(1 + \frac{r}{n})^{nt} = V_0 e^{rt}$$

Resulta cómodo tomar interés continuo en lugar del compuesto para un valor de n ”grande”.

Tasa anual de pago de un activo: r es la tasa anual continua de beneficio de un activo S de precio inicial S_0 (en tiempo t_0) y de precio S_t en un instante posterior t:

$$r = \frac{1}{t - t_0} \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$$

1.2.2. Las distribuciones de probabilidad

Los precios tienen un componente de incertidumbre o indeterminación, por esa razón se dice que cumplen un modelo *estocástico*, esto es un factor probabilistico que representa la incertidumbre en el valor del mismo a futuro, podría ser que suba o que baje, si este factor no existiera los precios variarían únicamente por la tasa de interés, sabríamos de antemano hasta donde pueden subir o bajar en cierto momento de tiempo, así, no existiría la compra-venta de acciones por ejemplo, no existiría el riesgo de perder dinero.
Muchas veces los precios de ciertos bienes varían por acontecimientos políticos, económicos y/o humanitarios que no pueden ser considerados de antemano: guerras (por ejemplo el caso del petróleo en el caso de Irak en estos días), golpes de estado, catástrofes climáticas, crisis financieras (como las que sufrieron las bolsas de Indonesia, México y Turquía durante los '90),etc.
Generalmente entre las distribuciones más aplicadas en las finanzas destacan:

1. La distribución Binomial: Una de las más conocidas distribuciones discretas, es usada en los modelos de grafos binomiales, para tiempos de ejecución de opciones discretos, y en problemas de elección entre valores equiprobables.
   La densidad para una variable aleatoria X de distribución binomial de variables n (número de experimentos) y probabilidad de éxito q es
   $$p_X(x) = \binom{n}{x} q^x (1-q)^{n-x}$$
   y
   $$X \sim Bi(n,q) \qquad 0 \leq q \leq 1$$
   $$E(X) = nq \qquad V(X) = np(1-q)$$

2. La distribución Normal: Esta distribución es un pilar de la teoría de probabilidades, su uso en aproximaciones por el Teorema Central

del Límite la destaca; una variable aleatoria X tiene distribución Normal de media 0 y varanza 1 si:
Su densidad viene dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Y se la nota

$$X \sim N(0,1)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(X) = \mu \qquad V(X) = \sigma^2$$

3. La distribución Lognormal: Puede ocurir que ciertos modelos sean representados por variables cuyos logaritmos son normales, es decir

$$\ln(X) \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow X \sim LN(\mu, \sigma)$$

Donde la densidad de X viene dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma})^2}$$

$$E(X) = e^{\mu+\sigma^2/2} \qquad V(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

4. La distribución Poisson: Esta distribución es muy útil para considerar la ocurrencia o no de eventos y cuantas veces se producen, la densidad viene dada por:

$$p_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$E(X) = V(X) = \lambda \qquad X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

5. La distribución Gamma: También es de mucha importancia estadística, su densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^\alpha} e^{-\frac{x}{\lambda}} x^{\alpha-1} I_{(0,+\infty)(x)}$$

Para una v.a $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda),\ \alpha > 0,\ \lambda > 0$

$$E(X) = \alpha\lambda \qquad V(X) = \alpha\lambda^2$$

En la familia de las Gamma destaca la distribución **Chi-cuadrado** con n grados de libertad si $X \sim \chi_n^2 = \Gamma(n/2, 2)$, y además, si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ v.a.i.i.d $Y_i \sim N(0,1)$ $\forall i$ vale que

$$\sum_{i=1}^{k} Y_i^2 \sim \chi_n^2$$

Existen los llamados **Procesos de Poisson** en los cuales se observa en un intervalo de tiempo la concreción o no de determinados eventos, la cual tiene distribución de Poisson, la particularidad en este caso, es que al intervalo inicial se lo puede dividir en subintervalos disjuntos, y el proceso de cada subintervalo es independiente de los otros subintervalos, cada uno también es un proceso de Poisson, dado que la probabilidad de observar el suceso en un subintervalo, es la misma que en cualquier otro subintervalo.
Ahora veamos un par de conceptos matemáticos que serán de mucha utilidad:

Ecuación Estocástica: Ecuación diferencial tal que

$$\frac{dS}{dt} = F(S(t), t) + \omega(t)$$

donde $\omega(t)$ es un término probabilístico, también visto como una "perturbación" de la ecuación diferencial $dS = F(S(t), t)$.

El lema de Itô. 1.3 *Esta es la versión estocástica del Teorema Fundamental del Cálculo, sea S un proceso de Wiener (o Movimiento Browniano), es decir*

$$dS = S - S_0 = \mu S \underbrace{(t - t_0)}_{dt} + \sigma S dz \quad (1)$$

Donde $dz \sim N(0, dt)$ ($dt = t - t_0$, es un intervalo de tiempo), S es solución de la ecuación estocástica (1). Entonces, el lema para una función $G = G(S(t), t) \in C^2$, donde $dG(S,t) = G(S,t) - G(S_0, t_0)$ dice que

$$dG(S,t) = \frac{\partial G}{\partial S}(S_0, t_0)dS + \frac{\partial G}{\partial t}(S_0, t_0)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(S_0, t_0)(dS)^2$$

La Ecuación del Calor. 1.4 *En el próximo capítulo veremos como pasar de una ecuación estocástica a una ecuación diferencial tipo $Forward$ (con condiciones de contorno y una condición inicial sobre la variable espacial, que en nuestro esquema representará la variable S). Dicha ecuación se enuncia de la siguiente manera:*

$$u(x,t) = \begin{cases} \triangle_x u = \frac{\partial u}{\partial t}, \ en \ \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u(x,0) = u_0(0) \end{cases}$$

Donde $u \in C^2$ para $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in C^1$ para $t \in (0,T]$ (eventualmente $T \in \mathbb{R}$ ó $T = +\infty$) y un operador Laplaciano $\triangle_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.
En nuestro caso, en principio, bastará considerar el sistema para $n = 1$.
Una manera de resolver esta ecuación usa la Transformada de Fourier*:*

$$\mathfrak{F}(f) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

De esta manera: Como sabemos que $\triangle_x u - u_t = 0 \Rightarrow \mathfrak{F}(\triangle_x u - u_t)(\xi) = 0$

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi,t) + 4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi,t) = 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{u_0} \end{cases}$$

Ahora llamemos

$$\dot{v} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$$

Así

$$\dot{v} + 4\pi^2|x|^2 v = 0 \Leftrightarrow \frac{\dot{v}}{v} = -4\pi^2|x|^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v(x,t) = C(x)e^{-4\pi^2|x|^2 t} \\ v(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_0(x) = C(x)1 \Rightarrow v(x,t) = u_0(x)e^{-4\pi^2|x|^2 t}$$

Luego

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u_0}(\xi)e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}$$

por lo tanto, aplicando Antitransformada[1]*, haciendo las cuentas necesarias y propiedades de la integración:*

$$u(x,t) = \overline{\mathfrak{F}}(\hat{u_0}(\xi)e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} u_0(s) e^{-\frac{|x-s|^2}{4t}} ds$$

1.5. Aplicaciones y definiciones Financieras

Ahora veremos los conceptos financieros más utilizados a través del trabajo, enunciamos los siguientes:

Opción: Es un contrato entre 2 partes, un *tenedor* quien tiene derecho a comprar (si la opción es una *Call*) o a vender (si es una *Put*) a la otra parte denominada *escritor*, un activo determinado (*subyacente*) en un momento de expiración futuro T a un cierto precio K (*Strike*), cuando este activo finalmente se compra o vende, según el tipo de acuerdo, se dice que la opción ha sido **Ejercida**.

Tipos de Opciones:

- Europeas: La opción no se ejerce hasta el día de expiración (también llamado de *Rescate* en estos casos), éstas serán de principal estudio en este trabajo.
- Americanas: La opción puede ejercerse en cualquier momento hasta la fecha de Vencimiento.
- Opciones con barrera: Son aquellas que dependen de si el activo alcanza un determinado valor *barrera*, como las *Knock-out* que dejan de valer sólo si la barrera se alcanza, o las *Knock-in* que tienen valor sólo si se alcanza la barrera, también están las *CAP* que son europeas, pero si la barrera se alcanza, la ejecución es obligatoria.

[1] La fórmula de la antitransformada es: $\overline{\mathfrak{F}}(f) = \check{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi i x\xi}dx$ e implica que: $\overline{\mathfrak{F}}(\hat{f}) = \mathfrak{F}(\check{f}) = f$

- Si bien las anteriores son las más conocidas, en base a variaciones, surgieron otros tipos de opciones (asiáticas, Bermuda, arco iris, con barrera, etc.) presentan cambios en las formalidades del contrato, fechas de ejecución, tipos de subyacentes entre otros.
- Basket Options: Son opciones sobre una canasta (un conjunto) de activos.

Cartera: Conjunto de opciones a comercializar, por ejemplo acciones y bonos.

Portfolio: Es un vector $\pi \in \mathbb{R}^n$ (n es un número natural) en el que cada coordenada i representa la cantidad opciones del tipo i que se tienen y que van a ser comercializadas. Dado un vector de precios $S(t) = (S_1(t), S_2(t), ..., S_n(t))$ que detalla los precios de cada security en un instante t, se dice que el *Valor de un portfolio en el instante t* es el producto interno[2] $< \pi, S(t) >$.

Activos: Son bienes comercializables en los mercados financieros, se dividen en tangibles (objetos) e intangibles (valores o "securities"), por lo general, son objetos primarios.

Mercados: Son los lugares donde se realizan las transacciones financieras y están divididos en distintas áreas, según los activos que allí se comercialicen hay mercados de:

- Activos Intangibles:
  1. Valores: donde se compran y venden las acciones de las sociedades anónimas

[2]Dados 2 vectores $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\quad w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ ambos en $\mathbb{R}^n$, se define el **producto interno** entre v y w como

$$< v, w >= v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$$

2. Cambio: Para comprar o vender moneda extranjera.
3. Bonos: Son los dedicados a la comercialización de estos activos, generalmente emitidos por los gobiernos de distintos países. (La Bolsa de Valores por lo general agrupa en un mismo ámbito a estos mercados)

- Activos Tangibles (o Físicos):
  Commodities: Orientados a la comercialización en particular de ciertos productos (oro, petróleo, cereales, ganado, lácteos, metales, etc.)

Subyacente: En un determinado mercado, así se denomina a los activos que en él pueden comercializarse, por ejemplo 100 acciones de la empresa XX S.A. son un subyacente del Mercado de Valores porque allí se comercializan, pero no es subyacente del mercado de Ganado. El valor de estos bienes en cierto instante t se denotará $S_t = S(t)$.

Derivado: Es un bien cuyo valor depende otros anteriores, los subyacentes. Por ejemplo, las opciones son derivados.

Contrato por adelantado: Es un acuerdo entre 2 partes, donde una de ellas, el *tenedor* de la opción, tiene derecho a venderle a la otra (si es una opción *Put*) o a comprarle (si es una opción *Call*), cierto bien (subyacente) en un momento futuro llamado de *Expiración* o *Fecha de Vencimiento* (denotado por T), la decisión de llevar a cabo la transacción por parte del tenedor se denomina *opción*, y ésta se *ejecuta* cuando el tenedor concreta la operación. También está el denominado *Tamaño* del contrato que es el número de acciones del subyacente reflejadas en el contrato.

Arbitraje: Es una operación que asegura ganancias sin asumir riesgos (por ejemplo, ganar dinero sin haber invertido antes), no existen en los mercados eficientes. En este concepto se asume una operación financiera libre de riesgo que asegura una ganancia o *retorno*, una buena aproximación al mismo son las ganancias que aseguran los bonos emitidos por el gobierno o el de un depósito bancario.

Dividendos: Es la cifra de dinero, fija o variable, que pagan muchos activos, la misma es cobrada por el poseedor del activo, en este caso también suele decirse que estos activos son *rentables*. El pago de dividendos altera el valor del activo porque el compromiso de pago forma parte del activo, lo que implica que al hacerse efectivo el pago, el valor del activo baja. En precios futuros pactados, los dividendos tienen una fórmula de descuento. Según el interés estipulado pueden calcularse de manera discreta o continua.

Apalancamiento: Es una técnica de inversión mediante la cual se aumenta el potencial de rentabilidad de la inversión, a costa de un aumento considerable del riesgo. Se puede dar básicamente de dos formas: tomando dinero prestado del mercado y comprando acciones con ese dinero prestado, o mediante la utilización de instrumentos derivados, que exigen la integración de un pequeño volumen financiero para asumir posiciones de riesgo muy superiores. Un Fondo Mutuo que utiliza apalancamiento puede perder todo su patrimonio y quedar en deuda con el mercado o lograr retornos muy superiores al promedio.

Otros elementos financieros:

- Precio del Ejercicio(K): También llamado *Strike*, es el valor al que el subyacente debe ser comprado al momento en que la opción se ejerce.
- Fecha del contrato: Cuando se ejecuta la opción y/o finaliza el acuerdo.
- Tipo de contrato: Decidir si la opción será europea, americana o de otro tipo.
- Prima del contrato: Es el valor que se paga por el mismo.

Esta es una de las primeras aplicaciones matemáticas para destacar:

Versión financiera del lema de Itô 1.6 *Consideremos a S como el precio de la opción y supongamos que tiene variación continua, entonces:*

$$dS = S - S_0 = \mu S(t - t_0) + \sigma S dz$$

para S_0 el precio inicial, μ la tasa de retorno y σ es la volatilidad (que mide la desviación standar de los retornos).

PayOff: Se define como la diferencia entre el valor en cada fase (si es un diagrama binomial), o terminal de la opción y el valor del ejercicio, su fórmula viene dada por:
Si es una opción call:

$$\text{máx}\{S(t) - K, 0\} = (S(t) - K)^+$$

y si es una opción put:

$$\text{máx}\{K - S(t), 0\} = (K - S(t))^+$$

Ambos payoff calculados para un cierto tiempo $t \leq T$. Para ampliar este concepto, veamos la aplicación del *payoff* en el **Valor de la Opción**; como hay que diferenciar entre tipos de opciones Call y Put, veremos lo que ocurre para europeas y americanas, aunque por su simpleza, nos dedicaremos más a las primeras, como siempre T representa el Tiempo de Expiración de la opción.

- Para una Call:

$$C_t = \text{máx}\,\{S_t - K, 0\}, \quad para \begin{cases} t = T, \; Si\ es\ europea \\ 0 \leq t \leq T, \; Si\ es\ americana \end{cases}$$

- Y para una Put:

$$P_t = \text{máx}\,\{K - S_t, 0\}, \quad para \begin{cases} t = T, \; Si\ es\ europea \\ 0 \leq t \leq T, \; Si\ es\ americana \end{cases}$$

Así se obtiene la **Paridad Put-Call Europea** ya que conociendo las fórmulas para hallar el valor de las opciones, tenemos la relación que existe entre ambas, viene dada por una fórmula que permite un fácil despeje de una de las variables si se conoce el valor de la otra, y es la siguiente:

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Donde r es la tasa de interés anual y t el momento actual.

El proceso de Wiener en los Precios. 1.7 *Vamos a considerar un proceso de Wiener z (z es un caso particular de un proceso estocástico), definido en un intervalo $[t_0, T]$, donde:*

1. $z(0) = 0$

2. $\forall t$, $\forall x \geq 0$, *la variable aleatoria* $z(t+x) - z(t)$ *es independiente de* $z(y)$ *para cualquier* $0 \leq y \leq t$

3. $\forall t$, $\forall x \geq 0$, $z(t+x) - z(t) \sim N(0, \sqrt{a})$ *Este proceso z caracteriza la distribución de probabilidad de los precios a futuro de un determinado activo; es la estructura que relaciona el precio actual de un activo con sus probables precios futuros. El proceso establece que los pagos futuros de un activo siguen una distribución normal, y la desviación típica, o volatilidad, puede estimarse con datos del pasado.*

Hipótesis: Se supone que la tasa de pagos de un activo entre el instante actual t_0 y un instante posterior $t_0 + \Delta t$ tiene una distribución normal con media $\mu\Delta t$ y varianza $\sigma^2\Delta t$. S es el precio de un activo que es solución de la ecuación

$$\begin{cases} dS_t = \mu S(t - t_0) + \sigma S dz \\ S(0) = S_0 > 0 \end{cases}$$

donde S_t es el precio de un activo S en el instante t; si S es un proceso de Wiener de media μ y varianza σ, entonces la tasa de pago de S entre un instante t_1 y otro posterior t_2 se calcula así:

$$X = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln\left(\frac{S_{t_1}}{S_{t_2}}\right)$$

de esta manera

$$X \sim N\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t_2 - t_1), \sigma\sqrt{t_2 - t_1})\right)$$

Asi se pueden obtener algunos resultados

Ejemplo: La probabilidad que la tasa de pago X sea mayor a un porcentaje x es:

$$P(|X| \geq x) = F_X\left(\frac{-x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right) + F_X\left(-\frac{x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)$$

y la probabilidad que una opción call sea rentable:

$$P(S_T \geq K) = N\left(\underbrace{\frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (t_2 - t_1)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}}}_{d_1}\right)$$

(Para simplificar la notación llamamos d_1 a esa compleja expresión y N a F_X, para enunciar la Fórmula de Black Scholes, donde

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(s-\mu)^2} ds$$

y por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

además, tomaremos $t_1 = t$ y $t_2 = T$)[3]

[3] Por lo general, en el resto del trabajo tomaremos $S_{t_2} = K$ donde K es el strike o precio del ejercicio

Capítulo 2

La Fórmula de Black Scholes

2.1. Introducción

Ahora veremos cuál es la fórmula de Black Scholes, comprendiendo primero quiénes son las variables que en ella intervienen; también consideraremos los distintos tipos de opciones: las *calls* y las *puts*.
Además existe una sección dedicada a la volatilidad, la cual presenta una complejidad extra para calcularla o estimarla, donde se muestra una fórmula que bajo ciertas condiciones puede ser una buena estimación de la misma.
Por último nos referimos a la naturaleza del precio de la opción, la log-normalidad y de donde se deriva.

2.2. El valor de las distintas opciones

Esta fórmula calcula el valor teórico de una opción put o call europea utilizando los siguientes parámetros:

- t es el tiempo transcurrido ($t \in [0, T]$ donde T es la fecha de vencimiento).
- S es el precio actual del activo (subyacente).
- r es la tasa anual de interés.
- K es el precio de ejercicio de la opción.

- σ es la volatilidad del subyacente.

Con estas variables se define la fórmula para determinar el valor de una opción según su naturaleza, C_t para el caso de una *Call* y P_t si estamos hablando de una *Put*

$$\boxed{\begin{array}{l} C_t = N(d_1)S_t - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \\ \\ P_t = -N(-d_1)S_t - Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) \end{array}}$$

donde usamos para abreviar:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

2.2.1. Algunos detalles iniciales

Se puede observar que la variable μ desapareció de la fórmula final de Black Scholes, esta variable que representa la tasa de retorno, es afectada por la preferencia de riesgo, esto implica que la fórmula conlleva un "riesgo neutro".

2.2.2. De dónde se deriva la fórmula?

Vamos a ver una demostración clásica de la fórmula con elementos de matemática financiera.
Recordemos que la variación instantánea del precio tiene una componente de incertidumbre `dz`:

$$dS = \mu S dt + \sigma S \mathtt{dz} \qquad \mathbf{(1)}$$

este modelo representa el precio de un activo "con riesgo". Cabe recalcar que el precio tanto de un derivado como del subyacente contienen este término estocástico de riesgo o incertidumbre. Nos proponemos eliminar la componente estocástica determinada por `dz`.
Consideremos la función $G(S,t)$ que representa el valor de una opción a través del tiempo t con precio inicial S, a los efectos de la demostración, no importa si esta opción es call o put. En este caso se construye un portfolio de la siguiente manera, lo que se denomina una estrategia de *Hedging*:

$$\pi = \begin{cases} -\Delta, \ \textit{unidades de activo subyacente (por ejemplo, acciones)} \\ \\ 1, \ \textit{derivado (que es la opcion antes mencionada)} \end{cases}$$

el valor del portfolio lo caracterizamos como un producto interno de $\mathbb{R}^2$ de esta manera:

$$\Pi = \pi.(S,G) = (-\Delta, 1).(S,G) = -\Delta S + G$$

así que tomando diferencias instantáneas de tiempo a ambos lados:

$$d\Pi = -\Delta dS + dG$$

y considerando, por el lema de Itô, la siguiente igualdad:

$$dG(S,t) = \frac{\partial G}{\partial S}(S_0,t_0)dS + \frac{\partial G}{\partial t}(S_0,t_0)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(S_0,t_0)(dS)^2$$

y que además $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ reemplazo las anteriores expresiones en la fórmula:

$$d\Pi = -\Delta(\mu S dt + \sigma S dz) + \frac{\partial G}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dz) + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(\mu S dt + \sigma S dz)^2$$

ahora hay que agrupar los términos que tienen dz y procurar que se cancelen (para eso está la Δ, que es la variable de la ecuación cuyo valor cumple dicha cancelación), antes veamos una propiedad que va a simplificar las cuentas.

Propiedad 2.2.1 *Si* $dz \sim \sqrt{dt}N(0,1) \Rightarrow dz^2 \sim dt\Gamma(\frac{1}{2},2)$

$$E(dz^2) = E(\Gamma(\frac{1}{2},2))dt = 1dt = dt$$

$$V(dz^2) = (dt)^2 V(\Gamma(\frac{1}{2},2)) = 2(dt)^2 \sim o((dt)^2)$$

o sea que para intervalos de tiempo cortos, esta variable aleatoria tiene varianza casi 0, por lo tanto vamos a considerarla[1] igual que su esperanza, de esta forma:

$$\lim_{t\to 0}(dz)^2 = dt$$

Así también, si desarrollamos $dS^2 = \sigma^2 S^2 dz^2 + o(dt^{3/2})$

$$\lim_{t\to 0}(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$$

Con todo esto tenemos:

$$d\Pi = \sigma S\left(\frac{\partial G}{\partial S} - \Delta\right)dz + \left(\mu S\frac{\partial G}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} + \frac{\partial G}{\partial t} - \mu\Delta S\right)dt$$

Como queremos eliminar el término que multiplica a dz tomamos

$$\Delta = \frac{\partial G}{\partial S}$$

Obteniendo así:

$$d\Pi = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} + \frac{\partial G}{\partial t}\right)dt$$

De este modo obtuvimos una *cartera libre de riesgo*, en este caso utilizando el concepto de arbitraje podremos calcular la tasa r libre de riesgo para este modelo cuya fórmula está dada por:

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = rdt$$

[1]Esta demostración se basa en aproximaciones, eliminando términos pequeños o insignificantes, pero vale aclarar que si hacemos una demostración más rigurosa, y mas larga, obtendremos el mismo resultado.

Lo cual nos dice que:

$$d\Pi = \Pi r dt = \Pi\left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} + \frac{\partial G}{\partial t}\right) dt$$

y retomando la definición del valor de nuestra cartera ahora libre de riesgo $\Pi = G - S\frac{\partial G}{\partial S}$ reemplazamos y dividimos la expresión por dt reacomodando los términos un poco:

$$\boxed{rG = rS\frac{\partial G}{\partial S} + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 G}{\partial S^2}}$$

Nos da la ecuación de Black Scholes. En la próxima sección veremos como se relaciona este resultado con lo que vimos en **2.1**

2.3. Cómo llegar al valor de la opción

Vamos a ver como se deduce la fórmula para calcular el valor de la opción Call Europea, para una Put Europea el razonamiento es similar, igual podemos obtenerlo del valor de la Call usando la paridad put-call.

2.3.1. Las condiciones de contorno

Veremos estas condiciones en un *contrato forward* ya que fijaremos una condición inicial para S.

$$\begin{cases} C(S,T) = \text{máx}\{S-K, 0\},\ condicion\ final\ (t=T) \\ C(0,T) = 0,\ condicion\ inicial \\ \text{lím}_{S\to\infty} C(S,t) = S - Ke^{-r(T-t)},\ condicion\ en\ el\ infinito \\ rC = rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \qquad (2) \end{cases}$$

Ya vemos que este sistema depende de muchas variables, repasemos:

- σ es la volatilidad.

- r es la tasa libre de riesgo.
- T es el vencimiento.
- K es el precio del ejercicio (el valor al que se va a comercializar en tiempo T el activo S)

Los cambios de variable necesarios para llegar a la solución

Ahora haremos un par de cambios de variables para que quede una expresión más sencilla de manejar:

$$S = Ke^x, \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \qquad C(S,t) = KV(x,\tau)$$

Así obtenemos $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$ (comparar con la hipótesis de la página **17**)
Calculamos ahora las derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = -\frac{2}{K\sigma^2}\frac{\partial C}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{K}\frac{\partial C}{\partial S}S,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{K}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}S^2 + \frac{\partial C}{\partial S}S\right) = \frac{1}{K}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}S^2 + \frac{\partial V}{\partial x}$$

Ahora la condición inicial queda:
$V(x,0) = \frac{1}{K}C(S,T) = \frac{1}{K}\max\{S-K,0\} = \max\{e^x - 1, 0\}$
Para reemplazar las nuevas variables en la fórmula hay que usar regla de la cadena y algunos resultados previos:

$$\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S}, \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial S} = 0, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2$$

Ahora viendo las condiciones de contorno:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial V}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S}K\frac{\partial V}{\partial x} = e^{-x}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{1}{S}\left(-e^{-x}\frac{\partial V}{\partial x} + e^{-x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = \frac{e^{-2x}}{K}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

Ahora estamos en condiciones de ir reemplazando:
En (2):

$$rKV = -\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\frac{e^{-2x}}{K}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)\sigma^2 K^2 e^{-2x} + re^{-x}\frac{\partial V}{\partial x}Ke^x$$

Podemos dividir a ambos lados por K, entonces:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{2r}{\sigma^2}\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{2r}{\sigma^2} = \frac{\partial V}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\frac{2r}{\sigma^2} - 1)\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{2r}{\sigma^2} = \frac{\partial V}{\partial \tau}$$

Y ahora reemplazamos para las condiciones de contorno de la Call europea:

$$C(S,T) = KV(x(S,T), \quad \tau(S,T)) = KV(x,0)$$

$$\text{máx}\{S-K,0\} = \text{máx}\{Ke^x - K, 0\} = K\,\text{máx}\{(e^x-1),0\} \Rightarrow$$

$$V(x,0) = \text{máx}\{(e^x-1),0\}$$

Como $\text{lím}_{x\to-\infty} e^x = 0$ entonces:

$$C(0,t) = K\lim_{x\to-\infty} V(x,\tau) = 0$$

Además tenemos que:

$$\lim_{S\to\infty} C(S,T) = K\lim_{x\to\infty} V(x,\tau) = Ke^x - Ke^{-r(T-t)} = Ke^x - Ke^{-\tau\frac{2r}{\sigma^2}}$$

Consideremos, para simplificar la notación

$$\lambda = \frac{2r}{\sigma^2} - 1$$

Entonces el sistema con las nuevas variables queda:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\lambda - 1)\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda V = \frac{\partial V}{\partial \tau} \\ \\ V(x,0) = \text{máx}\{(e^x-1),0\} \\ \text{lím}_{x\to-\infty} V(x,\tau) = 0 \\ \text{lím}_{x\to\infty} V(x,\tau) = e^x - e^{-\tau\lambda} \end{cases}$$

Ahora esta nueva ecuación con condiciones iniciales (Forward) tiene un único parámetro λ. Para eliminar términos de menor orden haremos un nuevo cambio de variable:

$$V(x,\tau) = e^{ax+b\tau}u(x,\tau)$$

Reescribimos todo ahora en función de este cambio de variables:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = e^{ax+b\tau}bu(x,\tau) + e^{ax+b\tau}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} = e^{ax+b\tau}\left(bu(x,\tau) + \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = e^{ax+b\tau}au(x,\tau) + e^{ax+b\tau}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} = e^{ax+b\tau}\left(au(x,\tau) + \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = e^{ax+b\tau}a\left(au(x,\tau) + \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right) + e^{ax+b\tau}\left(a\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}\right) =$$

$$= e^{ax+b\tau}\left(a^2u(x,\tau) + 2a\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}\right)$$

Ahora dividimos a ambos lados de la igualdad que conseguimos con las nuevas variables por $e^{ax+b\tau}$ obteniendo:

$$\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\lambda-1)\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda V}{e^{ax+b\tau}} = \left(a^2u + 2a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + (\lambda-1)\left(au + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \lambda u =$$

$$= bu + \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

Ordenando según las derivadas parciales de u:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda-1)\frac{\partial u}{\partial x} + 2a\frac{\partial u}{\partial x} + a^2u + (\lambda-1)au - \lambda u - bu = \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

Como a y b eran arbitrarios, podemos elegirlos de manera conveniente:

$$a = \frac{1-\lambda}{2} \Rightarrow \lambda - 1 + 2a = 0$$

$$b = a^2 + \lambda a - a - \lambda = (a+\lambda)(a-1) = -\frac{1-\lambda}{2}\frac{1-\lambda}{2} =$$

$$= -\frac{(1-\lambda)^2}{4} \Rightarrow a^2 + \lambda a - a - \lambda - b = 0$$

Así nos queda la famosa ecuación del Calor con condiciones iniciales (3) y las de contorno (4) y (5):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \\ u(x,0) = \max\left\{\frac{(e^x-1)}{e^{\frac{1-\lambda}{2}}}, 0\right\} = \max\left\{e^{\frac{\lambda+1}{2}x} - e^{\frac{\lambda-1}{2}x}, 0\right\} \ (3) \\ lim_{x\to-\infty} u(x,\tau) = 0 \ (4) \\ lim_{x\to\infty} u(x,\tau) = lim_{x\to\infty} \frac{(e^x - e^{\tau\lambda})}{e^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)x - \frac{1}{4}(\lambda-1)^2\tau}} = \infty \ (5) \end{cases}$$

$u(x,0)$ se puede reescribir considerando la condición:

$$e^{\frac{\lambda+1}{2}x} - e^{\frac{\lambda-1}{2}x} > 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda+1}{2}x - \frac{\lambda-1}{2}x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

En definitiva, la podemos expresar así:

$$u(x,0) = u_0 = \begin{cases} e^{\frac{\lambda+1}{2}x} - e^{\frac{\lambda-1}{2}x} & si \ x \geq 0 \\ 0 & si \ x \leq 0 \end{cases}$$

La Ecuación del Calor tiene solución conocida, y varias maneras de calcularla, la misma está dada por

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-(x-s)^2} ds$$

Reconstrucción del problema original y obtención de la Fórmula

En la fórmula de $u(x,\tau)$, las variables x y τ quedan fijas, así que se puede hacer un cambio de variables más:

$$y = \frac{s-x}{2\tau}, \qquad ds = \sqrt{2\tau}dy$$

quedando así

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\underbrace{y + \sqrt{2\tau}x}_{s}) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy =$$

(Sabemos que $u_0(S) = 0$ si $S < 0$, así que en realidad no integramos en todo $\mathbb{R}$, sino que en el intervalo $[-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}, +\infty)$ entonces la expresión anterior queda:)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} u_0(y + \sqrt{2\tau}x) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy =$$

Y observando la fórmula de u_0 podemos separar la integral en 2 términos:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)(x+\sqrt{2\tau})y} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)(x+\sqrt{2\tau})y} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}y} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)\sqrt{2\tau}y} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= A_1 - A_2$$

Ahora calculo cada integral por separado

$$A_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}y} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}y - \frac{1}{2}y^2} dy$$

Primero completo cuadrados en el exponente a integrar, notemos que:

$$(y - (\lambda+1)\sqrt{\frac{\tau}{2}})^2 = y^2 - (\lambda+1)\sqrt{2\tau}y + (\lambda+1)^2\frac{\tau}{2}$$

Si sumo y resto $(\lambda+1)^2\frac{\tau}{2}$ en el exponente, completo cuadrado y sale otro término afuera:

$$A_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x + \frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau})^2} dy$$

Ahora hago otro cambio de variable:

$$\omega = y - \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}, \qquad d\omega = dy$$

y ahora nos queda una nueva expresión de la integral:

$$A_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} d\omega =$$

$$= e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} d\omega}_{(*)}$$

Observemos que el término representado con $(*)$ es la simétrica de la función de distribución N de una variable Normal donde, si llamamos:

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}$$

y usando la igualdad propia de la función de distribución:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_1} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} d\omega = N(d_1)$$

Así,

$$A_1 = e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau} N(d_1)$$

Y como el cálculo de A_2 es idéntico al de A_1, salvo que en todo proceso se debe cambiar $\lambda+1$ por $\lambda-1$ obtenemos:

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\lambda-1)\sqrt{2\tau}$$

$$A_2 = e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x+\frac{1}{4}(\lambda-1)^2\tau} N(d_2)$$

Ahora recuperemos esta fórmula, para simplificar notación defino $w(x,\tau)$:

$$w(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)x-\frac{1}{4}(\lambda-1)^2\tau} u(x,\tau) =$$

$$e^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)x-\frac{1}{4}(\lambda-1)^2\tau}(A_1 - A_2) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)x-\frac{1}{4}(\lambda-1)^2\tau} e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau} N(d_1) -$$

$$- e^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)x-\frac{1}{4}(\lambda-1)^2\tau} e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x+\frac{1}{4}(\lambda-1)^2\tau} N(d_2) =$$

$$= e^x N(d_1) - e^{\lambda\tau} N(d_2)$$

Ahora invertimos los anteriores cambios de variables que hicimos para recuperar la "vieja" fórmula:

$$\lambda = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma}, \quad x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), \quad \tau = \frac{1}{2\sigma^2(T-t)}, \quad C = Kw(x,\tau)$$

Finalmente obtenemos la denominada **Fórmula de Black Scholes**:

$$C(S,t) = SN(d_1) - KN(d_2)$$

Y además:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Resolviendo la fórmula de Black Scholes para el caso de una opción Call Europea. Conociendo esto, ahora si queremos obtener la fórmula para una Put Europea, utilizo la igualdad Put-Call:

$$C + Ke^{-r(T-t)} - S = P$$

$$P(S,t) = S(N(d_1) - 1) - KN(d_2) + Ke^{-r(T-t)}$$

Y usando la propiedad de la distribución normal $1 - N(x) = N(-x)$ y reescribiendo un poco:

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)} - S(N(-d_1)) - KN(d_2) =$$

$$= -Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S(N(-d_1))$$

2.4. La Volatilidad

Esta variable es definida como ”La razón de cambio en el precio de un activo subyacente”, como la tasa de interés, representa una tasa de retorno, pero difiere de la tasa de interés en el hecho que el interés acumula una tasa positiva, mientras que σ representa una combinación de retornos positivos y negativos.
Por ejemplo, si invertimos dinero a una tasa de interés fija, éste con el tiempo se incrementará, sin embargo, si invertimos en un activo subyacente (por ejemplo n acciones de una sociedad anónima) cuya $\sigma \neq 0$, el valor del activo puede subir o bajar, es decir, hay riego de perder dinero en el futuro.
Sin embargo, la volatilidad no nos informa acerca del movimiento que tendrán los precios, ya que la estructura de éstos, hemos visto que, si bien depende de la volatilidad, es un tanto más compleja (1).
La volatilidad mide la incertidumbre acerca del precio futuro del activo. En teoría, la volatilidad se calcula continuamente, para valuar las opciones, tal como se dan los cambios en el valor de S. Black Scholes asume σ constante, esto implica una previa estimación estadística de σ, por ejemplo medir el comportamiento de los precios en los últimos meses y usar estimadores de varianza.
También existen variaciones del modelo en las cuales σ puede tomar un rango de valores como ocurre en el modelo de *Black Scholes Barenblatt*. Sin embargo, hacer esa suposición puede acarrear errores indeseables entre el precio teórico que devuelve el modelo y el obtenido en la realidad, hecho habitual cuando S_0 y K son muy diferentes. En estos casos conviene hacer mejores aproximaciones de σ.
La **Volatilidad implícita** asume el modelo de BS pero con σ como parámetro libre, fijando S y t, con estos supuestos se puede despejar σ obteniendo para ésta una fórmula que depende de los otros parámetros del modelo de BS (esto supone que la volatilidad está ”incluida” en el precio).

2.4.1. La Fórmula de Dupire

Hablando de aproximaciones para la volatilidad, en 1994 se conoció esta fórmula determinística que permite despejar σ.
Asumiendo la Fórmula de Black Scholes como verdadera y conociendo los valores de mercado de las distintas opciones podemos despejar σ esto se denomina *Problema Inverso* y es la esencia de la demostración de Dupire que vamos a ver.
Consideremos de esta manera el precio de un derivado $C(S,t,T,K)$ como una función que depende del precio del subyacente, del tiempo transcurrido, la fecha de vencimiento y del precio del ejercicio cumpliendo, además la ecuación de BS:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + r\frac{\partial C}{\partial S}S - rC = 0 \\ \\ C(S,T,T,K) = \max\{S-K,0\} \end{cases}$$

Derivando ahora con respecto al strike, y reescribiendo:

$$G(S,t,T,K) = \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(S,t,T,K)$$

Nos queda el nuevo sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + r\frac{\partial G}{\partial S}S - rG = 0 \\ \\ G(S,T,T,K) = \delta(S-K) \end{cases}$$

donde δ la delta de Dirac y sea L un operador diferencial tal que:

$$L(S,\frac{\partial}{\partial S}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}\sigma^2(S,t)S^2 + r\frac{\partial}{\partial S}S - r$$

quedándonos así:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t} + LG = 0 \\ \\ G(S,T,T,K) = \delta(S-K) \end{cases}$$

Ahora consideremos la ecuación diferencial dual[2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial G^*}{\partial T} = L^* G^* \\ \\ G^*(S,T,T,K) = \delta(S-K) \end{cases}$$

En la cual

$$L^*(K, \frac{\partial}{\partial K}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial K^2}\sigma^2(T,K)K^2 + r\frac{\partial}{\partial K}K - r$$

Y siendo G^* su solución, se puede ver que

$$G^* \equiv G$$

Demostración: Usamos las fórmulas de identidad de Green, tomamos:

$$u(X,\alpha) = G(X,\alpha,K,T)$$

$$v(X,\alpha) = G^*(X,\alpha,K,T)$$

Ahora hacemos $vL - uL^*$ y así obtener la identidad deseada:

$$vL(X, \frac{\partial}{\partial X}) - uL^*(X, \frac{\partial}{\partial X}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial X}\left(v\sigma^2X^2\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial X} - u\frac{1}{2}\sigma^2X^2\frac{\partial v}{\partial X} - uv\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma^2 X^2}{\partial X} + rXuv\right)$$

Ahora despejamos convenientemente e integramos

$$\int v(X,T-\epsilon)G(X,T-\epsilon,T,K)dX = \int u(X,t+\epsilon)G^*(S,t,t+\epsilon,X)dX \qquad \epsilon > 0$$

Entonces

$$v(K,T) = u(S,t) \Rightarrow G^* \equiv G$$

Q.E.D.

Ahora si integramos por partes dos veces obtenemos la ecuación de Dupire:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2(T,K)K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK\frac{\partial C}{\partial K} = \frac{\partial C}{\partial T} \\ \\ C(S_0,t_0,T=t_0,K) = \text{máx}\{S_0-K,0\} \end{cases}$$

[2]La idea es considerar la función G primero fijando las variables T y K, y luego tomar el dual de G (G^*) como la función que fija las otras variables: S y t

Despejando ahora si la volatilidad:

$$\sigma(T,K) = \sqrt{2\frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK\frac{\partial C}{\partial K}}{K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}}$$

Observación 1: No siempre se puede utilizar esta fórmula, suele ser muy inestable ya que propaga demasiado los errores de redondeo, por lo que se requeriría una alta precisión de dígitos, sobre todo trabajando con cifras pequeñas.

Observación 2: Para el caso con dividendos en toda la demostración debemos cambiar r por $r(t) - D(t)$ y obtendremos:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\frac{\partial C}{\partial T} - (r(t) - D(t))(C - K\frac{\partial C}{\partial K})}{\frac{K^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}}$$

Una equivalencia para la fórmula de Dupire

El precio de una Call Europea puede escribirse como:

$$C(S_t,t,T,K) = \int_{-\infty}^{\infty} p(S_t,t,T,K)(S-K)^+ dS_T$$

donde $p(S_t,t,x,S_x)$ es la densidad de probabilidad de transición de la ecuación del precio **(1)**. Notar que

$$\frac{\partial C}{\partial K} = \int_K^{\infty} p(S_t,t,T,K) dS_T$$

y que

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = p$$

Considerando el caso multi-dimensional (ya que va a servir para analizar la fórmula de Dupire en ese caso), si queremos comprar w unidades de activo con strike K, se puede ver también que C_w verifica la ecuación de Euler:

$$K\frac{\partial C_w}{\partial K} + w\frac{\partial C}{\partial w} = C_w$$

porque también

$$C_w = E((wS_T - K)^+)$$

es el valor esperado para esta opción. Ahora derivemos la fórmula de Euler con respecto a K y w y asociemos:

$$K\frac{\partial^2 C_w}{\partial K^2} + w\frac{\partial^2 C}{\partial w \partial K} = 0$$

$$K\frac{\partial^2 C_w}{\partial w \partial K} + w\frac{\partial^2 C}{\partial w^2} = 0$$

Luego,

$$K\frac{\partial^2 C_w}{\partial K^2} = w\frac{\partial^2 C_w}{\partial w^2}$$

Entonces una manera de escribir la fórmula de Dupire en este caso será:

$$\frac{\partial C_w}{\partial T} = \mu w\frac{\partial C_w}{\partial w} + 1/2\sigma^2 w^2\frac{\partial^2 C_w}{\partial w^2}$$

Que dependen ahora las derivadas de la cantidad de activo que queremos adquirir en la opción.

2.5. La lognormalidad de la fórmula

Para aplicar la fórmula debemos considerar la naturaleza de los parámetros, en particular su comportamiento con el paso del tiempo. El caso de S, el valor del subyacente se hace necesario saber qué distribución tiene, si bien en el mundo real hay ligeras diferencias con los enunciados teóricos, una buena aproximación nos dará buenos resultados.
En el afán de investigar en los mercados cómo se comporta S, muchas teorías llegaron a la conclusión de que el precio del subyacente tiene distribución normal, lo cual es imposible, dado que la distribución normal es simétrica, al analizar las variaciones de S en un árbol, suponiendo que el activo tenga en principio un valor de \$25, si en un primer período puede subir a \$75 o mantenerse en \$25, también debería considerarse la posibilidad de que su valor baje a $-\$25$, lo cual es imposible dado que

un activo subyacente no puede tener un valor negativo.
En este hecho radica la hipótesis de log-normalidad de la variable S ($S \sim LN(\mu,\sigma) \Leftrightarrow ln(S) \sim N(\mu,\sigma)$). Esto aporta mayor seriedad al análisis del precio del subyacente ya que una distribución log-normal permite subas de precios ilimitadas y caídas del mismo sólo hasta 0
En relación al precio de las acciones, si suponemos un comportamiento lognormal del subyacente, hay que tener en cuenta los siguientes parámetros:

1. El rendimiento esperado de las acciones (μ): Es la rentabilidad media anual obtenida por los inversores en un período de tiempo corto.

2. La volatilidad del precio de las acciones (σ).

Supongamos que la evolución de la cotización de la acción S_t a través del tiempo se rige según la siguiente ecuación estocástica:

$$\begin{cases} dx_t = \mu x_t dt + \sigma x_t dz_t, & 0 \leq t \leq T \\ & (1) \\ x_0 = S_0 \end{cases}$$

De dónde sale la "lognormalidad"?

Se sabe que $S_t = S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma z_t}$, $0 \leq t \leq T$ es la solución única de la ecuación estocástica anterior, en este caso, si $\mu = 0$ entonces S_t es una martingala con respecto a la $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}_t$ para el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t, P)$.
Ahora si tomamos logaritmo natural a ambos lados de la fórmula-solución:

$$ln(S_t) = ln(S_0) + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma z_t = b(t) + \sigma z_t$$

y

$$F_{ln(S_t)}(y) = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(u-b(t))^2}{2t\sigma^2}} du, \qquad \sigma > 0$$

Esto indica que $ln(S_t) \sim N(b(t), t\sigma^2)$.
Observemos además que e^{-rt} y S_t son procesos de Itô con respecto a z,

aplicando integración por partes se obtiene:

$$dS_t = e^{-rt}S_t(r-\mu)dt + e^{-rt}S_t\sigma dz_t$$

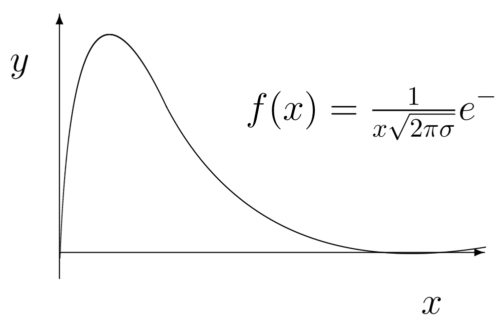
con condición inicial S_0.

Propiedad: Bajo la hipótesis de log-normalidad, la media y la varianza de $ln(S_T)$ donde S_T en el valor de la acciones en un tiempo futuro T son:

$$E(ln(S_T)) = ln(S) + \left(\mu - \sigma^2/2\right) \qquad V(ln(S_T)) = \sigma^2 T$$

Lo cual implica que:

$$E(S_T) = Se^{\mu T} \qquad V(S_T) = Se^{\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1)$$



$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{ln(x)-\mu}{2\sigma^2}} I_{(0,+\infty)}$$

Además, la rentabilidad compuesta continua viene definida por:

$$ln(S_T/S) \sim N\left((\mu - \sigma^2/2)T, \sigma\sqrt{T}\right)$$

Capítulo 3

Conceptos derivados de la Ecuación de BS

3.1. Introducción

Aquí veremos la importancia de las estrategias, que podemos verlas como el valor de una cartera o portfolio y cómo podemos ver algunos conceptos relacionados con las opciones europeas desde el punto de vista de las estrategias. Pera ello también incluimos algunos conceptos más que son inherentes al tema principal de este capítulo.

3.2. Estrategias Autofinanciadas

Definición 3.2.1 *Sea* $(M_t)_{t>0}$ *un proceso estocástico a valores reales, definido sobre una base estocástica* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t, P)$ *tal que* $\forall \quad t \in \mathbb{R}_+$ *se verifica:*

1. $E(|M_t|) < \infty$
2. $E((M_s - M_t)I_A) = 0 \; \forall \quad A \in \mathcal{A}_t, \; \forall \quad 0 \leq t \leq s$

Se dice entonces que $(M_t)_{t>0}$ *es una* **Martingala**

Uno de los ejemplos más conocidos de martingala es el siguiente:

Definición 3.2.2 *Sea $(W_t)_{t>0}$ un proceso estocástico a valores reales, definido sobre una base estocástica $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t, P)$ se dice entonces que $(W_t)_{t>0}$ es un* **Movimiento Browniano** *(ó* **Proceso de Wiener***) si se verifica:*

1. $W_0 = 0$
2. $\forall$ *par (s,t), de números no negativos tales que $0 \leq t \leq s$, la variable aleatoria $W_s - W_t$ es independiente de la $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}_t$*
3. $\forall$ *par (s,t), de números no negativos tales que $t < s$, la variable aleatoria $W_s - W_t$ tiene como función de densidad*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi(s-t))^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{2(s-t)}}$$

Definición 3.2.3 *Una* **Estrategia**

$$\phi : [0,T] \to \mathbb{R}^2,\ \phi = (H_t^0, H_t),\ 0 \leq t \leq T$$

es un proceso estocástico medible en el cual H_t^0 y H_t dan la cantidad de activo sin riesgo y con riesgo que hay en la cartera en un momento t. Así el valor de la cartera siguiendo la estrategia ϕ en el momento t es: $V_t(\phi) = H_t^0 B_t + H_t S_t$

Definición 3.2.4 *Una estrategia $\phi = (H_t^0, H_t),\ 0 \leq t \leq T$ es* **Autofinanciada** *si se cumplen:*

1. $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < \infty$ *c.t.p.*
2. $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t (H_s^0 r e^{rs} + H_s^2 \mu S_s) ds + \int_0^t H_s \mu S_s \sigma dz_s$ *c.t.p.* $0 \leq t \leq T$

Definición 3.2.5 *Un proceso $H_t, 0 \leq t \leq T$, es* **Previsible** *simple si existen tiempos $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ y variables aleatorias acotadas $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ tal que Y_0 es $\mathcal{F}_0$-medible, Y_1 es $\mathcal{F}_{t_1}$-medible, . . ., Y_{n-1} es $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$-medible y $H_t = Y_i$ si $t_i < t \leq t_{i+1}, i = 0, 1, ..., n-1$ y*

H_0 constante. Por tanto $H_t, \quad 0 \leq t \leq T$, es acotado, continuo por la izquierda (CI) y constante a trozos. La σ-álgebra previsible en $\Omega \times [0,T]$ es (por definición) la generada por los procesos previsibles simples. Un proceso $H_t, \quad 0 \leq t \leq T$, se dice que es previsible si es medible con la σ-álgebra previsible.

Proposición 3.2.1 *Sea $\phi = (H_t^0, H_t),\ 0 \leq t \leq T$ una estrategia que cumple:*
$\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < \infty$ c.t.p. (es 1) de la definición anterior)es autofinanciada (o sea, verifica 2) también) si:

$$e^{-rt} V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_s d(e^{-rs} S_s)$$

c.t.p. $0 \leq t \leq T$

Vale aclarar que

$$\int_0^t H_s d(e^{-rs} S_s) = \int_0^t H_s e^{-rs} S_s (\mu - r) ds + \int_0^t \sigma H_s e^{-rs} S_s dz_s, \qquad 0 \leq t \leq T$$

3.2.1. Teorema de Girsanov

Teorema 3.2.1 *Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t, P)$, $(\mathcal{A}_t)_{0 \leq t \leq T}$, $z = (z_t, \mathcal{A}_t)$ un proceso de Wiener, $(\theta_t, \mathcal{A}_t)_{0 \leq t \leq T}$ un proceso estocástico medible tal que $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ y tal que el proceso estocástico*

$$k_t = e^{-\int_0^t \theta_s dz_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds}$$

es una martingala respecto a $(\mathcal{A}_t)_{0 \leq t \leq T}$ (Para que eso ocurra basta con ver que $E(e^{\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds}) < \infty$). Entonces $E(k_T) = 1$, $z_t^* = z_t + \int_0^t \theta_s ds$ es un proceso de Wiener con respecto a $(\mathcal{A}_t)_{0 \leq t \leq T}$[1]

[1]En este caso también se redefine una probabilidad P^* en función de P: $P^*(A) = \int_A k_T dP$, $A \in \mathcal{A}$.

Invariancia de la solución según Girsanov

Proposición 3.2.2 *El precio de un activo con riesgo S_t está definido sobre el escenario I ($(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $(\mathcal{A}_t)_{0\leq t\leq T}$, $z = (z_t, \mathcal{A}_t)$ siendo S_t la única solución de (1)), se hace un cambio de variable:*

$$\theta_t = \frac{\mu - r}{\sigma} = \rho$$

Ahora tenemos un nuevo escenario II: $(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$, $k_T = e^{-\rho z_T - \frac{1}{2}T\rho^2}$, $z_t^* = z_t + t\rho$, con todo esto, ocurre que ahora S_t es solución del problema:

$$\begin{cases} dx_t = rx_t dt + \sigma x_t dz*_t, & 0 \leq t \leq T \\ \\ x_0 = S_0 \end{cases}$$

Por esta razón se dice que el precio de un activo es **Invariante por Girsanov**.

Proposición 3.2.3 *Sea $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$ una estrategia autofinanciada, si realizamos el cambio*

$$\theta_t = \frac{\mu - r}{\sigma} = \rho$$

se obtiene $dP^* = k_T dP$, $z*_t = z_t + t\rho$, definida sobre el escenario I, entonces:

1. $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < \infty$ *c.t.p.*
2. $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t (H_s^0 r e^{rs} + H_s^2 \mu S_s) ds + \int_0^t H_s \mu S_s \sigma dz_s^*$ *c.t.p.* $0 \leq t \leq T$

Demostración: 1)Se debe a que P y P^* son medidas equivalentes.
2)$\int_0^t S_u H_u dz_u + \int_0^t S_u H_u \rho ds = \int_0^t S_u H_u dz_u^*$ de donde

$$\int_0^t S_u H_u \sigma dz_u + \int_0^t S_u H_u \mu ds = \int_0^t S_u H_u r ds + \int_0^t S_u H_u \sigma dz_u^*$$

ecuación que junto a la hipótesis 2) de **3.1.4** nos da 2). O sea que definir una estrategia autofinanciada para un escenario I es lo mismo que hacerlo para un escenario II.

Proposición 3.2.4 *Nos volvemos a situar en el escenario I, realizamos el cambio de Girsanov* $\theta_t = \frac{\mu - r}{\sigma} = \rho$ *y se obtiene el escenario II como antes, sabemos que* $S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma z_t^*}$ *que cumple:*

$$S_t = S_0 + \int_0^t r S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dz_s^*, \qquad 0 \leq t \leq T$$

Entonces S_t *y* e^{-rt} *son procesos de Itô en el escenario II, así:*

$$e^{-rt} S_t = S_0 + \int_0^t (-r S_s e^{rs} + r S_s e^{-rs}) ds + \int_0^t \sigma e^{-rs} S_s dz_s^* = S_0 + \int_0^t \tilde{S} \sigma dz_s^*$$

$$\tilde{S} = e^{-(\sigma^2/2)t + \sigma dz_t^*} S_0$$

Entonces $\tilde{S}_t$ *es una martingala respecto a* $(\mathcal{A}_t)_{0 \leq t \leq T}$ *con probabilidad* P^**.*

3.3. Precio de las opciones

Definición 3.3.1 *Una estrategia*

$$\phi : [0, T] \to \mathbb{R}^2, \ \phi = (H_t^0, H_t), \ 0 \leq t \leq T$$

es **Admisible** *si es autofinanciada y* H_t^0 *y* $\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi) = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t$ *para cada* $0 \leq t \leq T$ *de cuadrado integrable con respecto a* P^**, con* $dP^* = k_T dP$*,* $k_T = e^{-\rho dz_T - (1/2)T\rho^2}$*,* $\rho = \frac{\mu - r}{\sigma}$*.*

Definición 3.3.2 *Sea h una opción europea. Se dice que h es* **Simulable** *si existe una estrategia admisible* $\phi = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ *tal que* $\tilde{V}_T(\phi) = h$ *(también se dice que* ϕ *simula a h).*
$0 \leq t \leq T$ *de cuadrado integrable con respecto a* P^**, con* $dP^* = k_T dP$*,* $k_T = e^{-\rho dz_T - (1/2)T\rho^2}$*,* $\rho = \frac{\mu - r}{\sigma}$*.*

Observación: Notemos que si la opción europea h es simulable, entonces es de cuadrado integrable respecto a P^*, o sea $E^*(h^2) = \int_0^T h^2 dP^* < \infty$. En el caso de una call europea, $h = \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+$ $\Rightarrow E^*(h^2) < \infty$ porque $E^*(S_T^2) < \infty$ y $h^2 \leq S_T^2$.

Teorema 3.3.1 *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad y $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtración de este espacio continua por la derecha*[2] *tal que cada $\mathcal{F}_t$ tiene los eventos P-nulos de $\mathcal{F}$.*
A la familia de martingalas cuadrado integrable respecto a $(\mathcal{F}t)_{0\leq t\leq T}$ y respecto a P la designaremos por M_T.
Si $(x_t, \mathcal{F}t)_{0\leq t\leq T}$ es un elemento de M_T, existe un único (salvo equivalencia estocástica) proceso estocástico creciente y previsible, $X_t, \quad 0 \leq t \leq T$ tal que $\forall t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x_t^2 = m_t + X_t$, P-c.s., $(m_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ es una martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y P. Además si $t \geq s$, se tiene que $E[(x_t - x_s)2|\mathcal{F}_t] = E[X_t - X_s|\mathcal{F}_s]$, P-c.s.

Teorema 3.3.2 *Sea h una opción europea de cuadrado integrable con respecto a la medida P^*. Entonces h es simulable y el valor al instante t de toda cartera simulante ϕ es $V_t(\phi) = E^*(e^{-r(T-t)}h\,|\mathcal{A}_t)$*

Demostración: Sea $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$ tal que $\tilde{V}_T(\phi) = h$, se sabe que $\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u$ y que $\int_0^t H_s\tilde{S}_s dz_s + \int_0^t H_s\tilde{S}_s\rho ds = \int_0^t H_s\tilde{S}_s dz_s^*$ donde $z_t^* = z_t + t\rho$. De esta forma

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \sigma H_s\tilde{S}_s dz_s^*$$

En el contexto $(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, z_t^* se tiene que

$$E^*[(\int_0^T \sigma H_s\tilde{S}_s dz_s^*)^2] = E*[(\int_0^T \sigma^2 H_s^2\tilde{S}_s^2 dds] < \infty$$

, ya que $\tilde{V}_t(\phi)$ es cuadrado integrable respecto a P^*. Por tanto, $\tilde{V}_t(\phi)$, $0 \leq t \leq T$, es martingala respecto a $(\mathcal{A}_t)_{0\leq t\leq T}$ y respecto a P^*. De esta forma, $\tilde{V}_t(\phi) = E^*[\tilde{V}_T(\phi)|\mathcal{A}_t]$ y $Vt(f) = E^*[e^{-rT+rt}h|Ft]$. Probemos ahora la existencia de ϕ (estrategia admisible con $V_T(\phi) = h$). Se define el proceso $M_t = E^*[e^{-rT}h|\mathcal{A}_t]$, $0 \leq t \leq T$. Entonces M_t, $0 \leq t \leq T$, es una martingala respecto a $(\mathcal{A}_t)_{0\leq t\leq T}$ y respecto a P^*, de cuadrado integrable respecto a P^* (es de cuadrado integrable respecto a P^* por la

[2] filtración del espacio continua por la derecha quiere decir que ($\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s, t \geq 0$)

desigualdad de Doob (Si $(\xi_t)_{0\leq t\leq T}$ es martingala respecto a $(\mathcal{A}_t)_{0\leq t\leq T}$ y respecto a P, entonces $E[\sup_{0\leq t\leq T}|\xi_t|^2] = 4E[|\xi_T|^2]$).
Por el teorema **3.3.1** de representación de martingalas, existe un proceso $(a_s, \mathcal{A}_s)_{0\leq t\leq T}$ con $E^*[\int_0^T a_s^2 ds] < \infty$ y tal que $M_t = M_0 + \int_0^t a_s dz_s^*$,c.s.,$0 \leq t \leq T$.
Tomamos $H_t = \frac{a_t}{\sigma}\tilde{S}_t$, $H_t^0 = M_t - H_t\tilde{S}_t$ y $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$. Entonces ϕ es estrategia autofinanciada y $V_T(\phi) = h$ y $\tilde{V}_t(\phi)$ es positivo y cuadrado integrable respecto a P^*.

Observación: Supongamos que $h = f(S_T)$ para f una función $f \in C^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces

$$V_t = E^*(e^{-r(T-t)}f(S_T)|\mathcal{A}_t) = F(t, S_t)$$

c.s $0 \leq t \leq T$. Donde

$$F(t, x) = E^*(e^{-r(T-t)}f(xe^{r(T-t)}e^{\sigma(z_T^* - z_t^*) - (\sigma^2/2)(T-t)})$$

Esto es válido porque:

1. $S_t = S_0 e^{(r-(\sigma^2/2)t)+\sigma z_t^*}$
2. S_t es $\mathcal{A}_t$-medible respecto de P^* y $z_T^* - z_t^*$ es independiente de $\mathcal{A}_t$
3. Sea $(\Omega, \mathcal{A}_1, P)$ espacio de probabilidad, ψ una variable aleatoria de ese espacio, $\mathcal{B} \in \mathcal{A}_1$ la $\sigma-$álgebra de Borel, Y medible Borel con valores en el espacio medible $(E, \mathcal{E})$, ξ una v.a en el mismo espacio, independiente de $\mathcal{B}$, con valores a un espacio medible $(M, \mathcal{M})$ y ϕ una función boreliana positiva, o acotada, definida en $(E \times M, \mathcal{E} \otimes \mathcal{M})$. Entonces $\varphi(x) = E(\phi(x, \xi))$, $x \in E$ es de Borel en $(E, \mathcal{E})$ y $\varphi(\psi) = E(\phi(\psi, \xi)\,|\mathcal{B})$

Además, respecto a P^*, $(z_T^* - z_t^*) \sim N(0, T-t)$ entonces:

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f(xe^{(r-(\sigma^2/2))}e^{\sigma\sqrt{T-t}}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$$

Casos Particulares Caso Call: $f(x) = (x - K)^+ \Rightarrow h = f(S_T)$, sabemos que $\frac{z_T^* - z_t^*}{T-t} \sim N(0,1)$, se tiene que

$$F(x,t) = xN(d_1(x,t)) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2(x,t))$$

Donde $d_1(x,t) = \frac{\ln(\frac{x}{K} + (r+\sigma^2/2)(T-t))}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d_2(x,t) = d_1(x,t) - \sigma\sqrt{T-t}$, y N la función normal; en este caso, se puede ver que vale: $V_t = F(t, S_t)$, $0 \le t \le T$.
Caso Put: $f(x) = (K - x)^+ \Rightarrow h = f(S_T)$, sabemos que $\frac{z_T^* - z_t^*}{T-t} \sim N(0,1)$, se tiene que

$$F(x,t) = -xN(-d_1(x,t)) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_2(x,t))$$

en este caso, se puede ver que vale: $V_t = F(t, S_t)$, $0 \le t \le T$.

3.3.1. La Cobertura en el precio de las opciones

Sea h una opción europea de cuadrado integrable, $h = f(S_T)$, $f \ge 0$, entonces para cualquier ϕ simulante h se tiene que $\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt}F(t, S_t)$. Supongamos ahora f regular tal que $F \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0,T])$, se pone

$$\tilde{F}(x,t) = e^{-rt}F(x, e^{rt})$$

entonces obtenemos la fórmula:

$$\tilde{V}_t(\phi) = \tilde{F}(S_t, t) = \tilde{F}(S_0, 0) + \int_0^t \tilde{F}_x(u, \tilde{S}_u)\sigma\tilde{S}_u dz_u^* = \tilde{V}_0(\phi) + \int_0^t \sigma\tilde{S}_u H_u dz_u^*$$

Esto sugiere esta construcción: Para h en las mismas condiciones,

$$H_t = \tilde{F}_x(t, \tilde{S}_t) = F_x(t, S_t), \qquad H_t^0 = \tilde{F}_x(t, \tilde{S}_t) - H_t\tilde{S}_t$$

Es una estrategia admisible que simula h, para el caso $f(x) = (x - K)^+$ (call) obtenemos:

$$H_t = N(d_1(x,t)), \qquad H_t^0 = e^{-rt}F_x(t, S_t) - N(d_1(x,t))\tilde{S}_t$$

Y para una put:

$$H_t = -N(-d_1(x,t)), \qquad H_t^0 = e^{-rt}F_x(t, S_t) + N(-d_1(x,t))\tilde{S}_t$$

Capítulo 4

Las Variaciones del modelo

4.1. Introducción

En este capítulo se ven algunos conceptos que se desprenden de la fórmula de BS (la importancia de las derivadas en las distintas variables de la fórmula: las "griegas" y la información que éstas aportan) así como algunas aplicaciones interesantes: en dividendos, divisas, inflación, opciones con barrera, etc. Por último veremos la ecuación de Black Scholes Barenblatt que nos da una manera de aplicar el modelo aproximando la volatilidad.

4.2. Opciones con barrera

En las finanzas, muchas veces, se toman decisiones en base al comportamiento de ciertos bienes en el futuro, y así tomar o no la decisión de invertir, comprar, vender, etc. A nuestro efecto, por ejemplo importa conocer la probabilidad que cierto activo supere cierto valor en un determinado momento durante la vida de la opción, o sea:

$$P(\max_{0\leq t\leq T}\{S_t \geq s\}), \qquad (1)$$

Donde como siempre S_t es el precio del activo en un momento t y T es el momento en que expira la opción.
Ya sabemos que en los precios hay un factor de incertidumbre, lo que

se busca con el cálculo de probabilidad es cuantificar esa incertidumbre para estimar su evolución en el tiempo que dura la opción.
Para ello consideramos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, donde Ω es el espacio muestral, $\mathcal{A}$ una σ-álgebra con todos los eventos posibles y $S_t : \Omega \to \mathbb{R}$, la variable aleatoria, $t \in [0, T]$, el tiempo continuo o discreto y $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ la función de probabilidad.
Calcular (1) equivale a buscar la distribución de

$$X_T = \max_{0 \leq t \leq T} \{S_t \geq s\}$$

Se sabe que

$$dS = S_{t_2} - S_{t_1} = \mu(t_2 - t_1) + \sigma(z(t_2) - z(t_1))$$

donde $z(t)$ es un proceso de Wiener que verifica:

1. $z(t)$ es continua como función de t.
2. Para $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \ldots \leq t_n$ las variables aleatorias
$$z(t_1), z(t_2), z(t_3), \ldots, z(t_n)$$
son independientes.
3. Los incrementos son homogéneos y tienen distribución normal
$$z(t) - z(s) \sim N(0, t - s)$$

Ahora consideremos (X_n) v.a.i.i.d $N(0, 1)$, podemos construir la variable $z(t)$ de la siguiente manera:

$$z(t) = \frac{t}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n - 1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{sen(kt)}{t} X_k$$

Veamos dos generalizaciones básicas del movimiento browniano:

Difusiones

Una *Difusión* X_t es la solución de una ecuación diferencial estocástica del estilo:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_u)du + \int_0^t \sigma(X_s)dz_s$$

donde vale lo siguiente:

- $\int_0^t \sigma(X_s)dz_s = \lim_{\delta\to 0} \sum \sigma(X_{s_{i-1}})(z_{s_i} - z_{s_{i-1}})$ para una partición del intervalo $[0,t]$ tal que $s_0 = 0 \leq s_1 \leq s_2 \ldots \leq s_{n-1} \leq t = s_n$ donde $\delta = \max_{0\leq i\leq n} s_i - s_{i-1}$.
- $E\big(\int_0^t \sigma(X_s)dz_s\big) = 0$.
- Como hay teoremas de existencia y unicidad, si a y σ son constantes vale que:

  $$X_t = at + \sigma z_t$$

  Es una *Difusión con tendencia*.

Observación: Recordemos que $e^{at+\sigma z_t}$ es el modelo de precio de las acciones en Black Scholes, donde la volatilidad σ se toma fija.
Las difusiones, además, conservan la continuidad de las trayectorias, pero no las propiedades de incrementos independientes y homogéneos.
Ahora vamos a usar el lema de Itô para hallar la solución del problema con barrera:
Consideremos la función

$$B(x) = P(\max_{0\leq t\leq T}\{S_t \geq x\})$$

que verifica:

$$\begin{cases} \mathfrak{L}B(x) = 1/2\sigma^2(x)B''(x) + a(x)B'(x) = 0 \\ \\ B(x_0) = 1 \end{cases}$$

Donde x_0 es algún mínimo valor que puede alcanzar el activo (podría ser

$x_0 = 0$).
Y como nos interesa el caso en que a y σ son constantes:

$$B(x) = e^{-\frac{2a}{\sigma^2}(x-x_0)}$$

4.3. Black Scholes en el caso del pago de dividendos

Las opciones europeas sobre acciones que pagan dividendos son valoradas sustituyendo el precio de la acción menos el valor actual del dividendo en Black-Scholes. Sólo deben incluirse los dividendos con vencimiento a lo largo de la vida de la opción, además el dividendo debería ser la reducción esperada en el precio esperado de la acción. Veamos un ejemplo de una opción europea sobre una opción que paga dividendos:

- Dividendos dentro de 3 y 6 meses: \$2
- El precio actual de la acción es $S(0) = \$100$, strike \$90, la fecha del ejercicio es $T = 9$ meses.
- $r = 10\,\%$ es la tasa libre de riesgo y $\sigma = 0,25$ anual la volatilidad.

La idea es reemplazar en la fórmula de BS el precio de S por S menos los dividendos actualizados ($\tilde{S}$):

$$\tilde{S} = S - \sum_{i=1}^{n} D_i e^{-rt_i}$$

En nuestro ejemplo tenemos:

$$\tilde{S} = 100 - 2e^{-0,1\times 0,25} - 2e^{-0,1\times 0,5} \cong 96,147$$

Ahora usamos la fórmula de BS, con todos los datos previos y en el lugar de S ponemos $\tilde{S}$ obteniendo como valor de la opción: $c = \$15,6465$

4.3.1. Dividendos continuos

En cada uno de los siguientes casos tomamos la misma distribución de probabilidad para el precio de una acción en el momento T:

- La acción parte del precio $S_0 = S(0)$ y proporciona una rentabilidad por dividendos q
- La acción parte del precio $S(0)e^{-qT}$, y no proporciona ingresos por dividendos.

Observemos que podemos valorar opciones europeas reduciendo el precio de la acción a $S(0)e^{-qT}$ y tratándolas como si no hubiera dividendos.
Las fórmulas de valoración para dividendos continuos son las siguientes:
Para una Call

$$C_T = S(0)e^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

Para una Put

$$P_T = Ke^{-rT}N(-d_2) - S(0)e^{-qT}N(-d_1) \qquad (*)$$

donde

$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

4.4. Opciones sobre Indices

Se plantea la situación de utilizar opciones para asegurar el valor de la cartera, para ello habría que modificar convenientemente la fórmula BS, para lo cual se usan las mismas fórmulas definidas en (*), considerando ahora q =tasa de rentabilidad esperada por dividendos media durante la vida de la opción, S_0 es el nivel actual del índice.

Ejemplo: Valorar una put europea con los siguientes datos:

- Rentabilidad por dividendo de las acciones del índice:5 %
- El valor del índice es $S(0) = \$100$, strike \$95, la fecha del ejercicio es $T = 6$ meses.

- $r = 10\,\%$ es la tasa libre de riesgo y $\sigma = 20\,\%$ anual la volatilidad.

$$p = 95e^{-0{,}05\times 1/2}N(-\frac{0,0513 + (0,05 + (0,04)/2)1/2}{0{,}2\times\sqrt{2}/2})$$
$$-100e^{-0{,}1\times 1/2}N(-\frac{0,0513 + (0,05 - (0,04)/2)1/2}{0{,}2\times\sqrt{2}/2}) \cong$$
$$\cong 92,6544N(-0,610) - 95,123N(-0,469) \approx 2{,}4648$$

4.4.1. El caso de las divisas

Una divisa es un activo que proporciona una rentabilidad continua por dividendos igual a r_f. Estas opciones se negocian en la Bolsa de Filadelfia (PHLX) y en mercados no organizados. Estas opciones son utilizadas por las empresas para comprar un seguro cuando están expuestos al riesgo de tipos de cambio.

- Sea r_f el tipo de interés de la divisa.
- Cuando una empresa compra una unidad de divisa tiene una inversión de $\$S(0)$.
- La rentabilidad de invertir al tipo de interés de la divisa es $\$r_fS(0)$
- La divisa aporta una rentabilidad a la tasa r_f, similar a los dividendos de la acciones.

En este caso también podemos usar la fórmula para una opción sobre una acción que paga dividendos continuos donde ahora $S(0)$ es el actual tipo de cambio y $q = r_f$. Y las fórmulas son las mismas que en (*).

Ejemplo: Vamos a valorar la opción de compra europea a 4 meses sobre dólares:

- Tipo de cambio Euro/dolar: 0,911

- Precio del ejercicio: $K = 0{,}925$
- Tipo libre de Riesgo zona euro: 4 %*
- Tipo libre de Riesgo zona EEUU: 5,5 %*
- Volatilidad Tipo de cambio: 20 %

* Considerar razón mensual

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{0{,}911}{0{,}925} + (0{,}06 + \frac{0{,}04}{2}))}{0{,}2 \times 2} = 2{,}662$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{0{,}911}{0{,}925} + (0{,}06 - \frac{0{,}04}{2}))}{0{,}2 \times 2} = 2{,}460$$

El caso de la call:

$$C = S_0 e^{-r_f T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$C = 0{,}911 e^{-0{,}16} N(2{,}662) - 0{,}925 e^{-0{,}22} N(2{,}460) = 0{,}036$$

Y para una put:

$$P = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} N(-d_1)$$

$$P = 0{,}925 e^{-0{,}22}(1 - N(2{,}460)) - 0{,}911 e^{-0{,}16}(1 - N(2{,}662)) = 0{,}0021$$

O sea que el precio de una opción call europea de compra de dólares es de casi 4 centavos de euro, y el de una put no llega al centavo de euro.

4.5. El entorno de Black Scholes-Parámetros de Sensibilidad

La Fórmula de Feynman-Kac Dicha fórmula establece que, dado $x \in U$ donde $\partial U \in C^2$ vale que

$$u(x) = E(\int_0^{t_x} f(\mathbf{X}(t)) e^{-\int_0^t c(\mathbf{X}(s))ds} dt)$$

para $\mathbf{X} = \mathbf{W} + x$ es un proceso de Wiener que empieza en x, y t_x es el primer momento en que se alcanza ∂U y una función u que verifica:

$$\begin{cases} -1/2\Delta u + cu = f \text{ } en \text{ } U \\ u(x) = 0 \text{ } en \text{ } \partial U \end{cases}$$

4.5.1. Una Fórmula general del precio de las opciones

Además de los activos con riesgo cuya evolución de precio viene dada por: $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz$
Definimos como **Cash** al activo sin riesgo que cumple:

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt \\ \qquad\qquad\qquad \Rightarrow S_t = e^{rt} \\ S_0 = 1 \end{cases}$$

Donde r es su rendimiento o ganancia. Suponiendo la ausencia de arbitraje se calcula la Prima de riesgo θ como:

$$\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

Consideremos también el payoff en función del tiempo como

$$p(S_t) = \text{máx}\{S_t - K, 0\}$$

La idea es el precio del derivado que paga $p(S_T)$ en la fecha de vencimiento. Usando Feynmann-Kac se define:

$$G(0, S_0) = E(e^{-\int_t^T r(s)ds} p(S_T))$$

Más en general:

$$G(t, S_t) = \int e^{-r(T-t)} p(T) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} p\left(S_t e^{y\sigma\sqrt{T-t} - (1/2\sigma^2 - r)(T-t)} \right) dy$$

Lo cual en el caso de una call europea obtenemos con el payoff antes definido:

$$C_t = C(t, S_t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

que es la fórmula que nos de BS para una opción de este tipo.
O sea que una opción call puede verse como una función $G(t, S_t, r, \sigma, T, K)$ Donde T y K son parámetros fijados de la opción. Como el precio y el portfolio dependen de estos parámetros es necesario ver como varían según la variación de los parámetros, para ello se analizan las siguientes derivadas para una call europea (consideramos $G = C$):

$\Delta = \frac{\partial G}{\partial S} = N(d_1)$	$\gamma = \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} N'(d_1)$
$\theta = \frac{\partial G}{\partial T} = \frac{S\sigma}{2\sqrt{T}} N'(d_1) + Ke^{-rT} r N(d_1)$	$\nu = \frac{\partial G}{\partial \sigma} = S\sqrt{T} N'(d_2)$
$\rho = \frac{\partial G}{\partial r} = TKe^{-rT} N(d_1)$	$\lambda = \frac{\partial G}{\partial K} = -e^{-rT} N'(d_1)$

Así, el precio de una call es una función creciente en todos los parámetros, salvo en el precio del ejercicio.
Los parámetros definidos en el cuadro son las **Sensibilidades del precio**.

4.5.2. Las características de cada parámetro

La delta Δ:

1. Indica como varía el precio de la opción en función del valor del subyacente.
2. Indica la probabilidad de que la opción sea ejercida.
3. Es el equivalente en el subyacente, de la opción.
4. La cartera se dice **Insensible a pequeñas variaciones en el precio del activo subyacente** si se puede asegurar una $\Delta \sim 0$, lo que es considerado **delta neutra**.

5. Como ya vimos en el Capítulo 2, esta Δ es la utilizada en la estrategia de hedging usada allí (compárense las fórmulas, son las mismas).

La gamma γ:

1. Mide la sensibilidad de la delta en función de las variaciones en el valor del subyacente.
2. Es la **Curvatura** de la opción.
3. Se suele expresar en porcentaje o en número de deltas.
4. Si $\gamma \sim 0$ (se dice **gamma neutral**), la cartera es poco sensible a importantes cambios en el precio del subyacente.
5. En el caso $\Delta \sim 0$, el signo de gamma determina el efecto de las variaciones del precio del subyacente en el precio del derivado.

La theta θ:

1. Mide la sensibilidad de la prima en el paso del tiempo.
2. Se hace negativa cuando el efecto de los intereses supera a las posibilidades de ganancia en el futuro.
3. Cuando $\theta > 0$ indica que al pasar el tiempo, la opción tiende a perder valor.
4. Si $|\theta|$ es grande, entonces Δ o γ han de ser grandes.
5. Si $\Delta = \gamma = 0$, θ indica que el valor de la opción va a crecer al tipo del interés sin riesgo.

Observación 1: En función de estas variables, la fórmula de Black Scholes se puede escribir así:

$$\theta + rs\delta + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \gamma = rG$$

Observación 2: Ya se puede ver claramente que estos parámetros no son independientes entre sí y que sus interrelaciones sirven se análisis.

La vega ν: [1]

1. Mide la sensibilidad de la prima sujeta a la variación de la volatilidad en el mercado.
2. Siempre $\nu > 0$ y a mayor σ, mayor valor toma la prima.
3. $\nu = 0$ en una posición del subyacente y en contratos de futuros.
4. La ν se puede modificar sumándole una posición de una cartera negociada: Si ν es la vega de una cartera, y ν^* la de una opción ya negociada, se hace un portfolio tomando la posición $-\frac{\nu}{\nu^*}$ en dicha opción, a esta cartera se la denomina **vega neutral**.
5. Este parámetro al ser medible, nos indica que comprar un activo, puede verse como "comprar su volatilidad".
6. Las carteras, por lo general, no pueden ser vega y gamma neutrales.

La rho ρ:

1. Mide la sensibilidad de la prima sujeta a la variación del interés sin riesgo r.
2. Como estas variaciones afectan mínimamente al precio del activo, este parámetro es menos interesante.

La elasticidad λ:

1. Mide la sensibilidad de la prima sujeta a la variación del precio del ejercicio, o strike K.
2. En el caso de una opción call, siempre cumple $\lambda < 0$

[1] Si bien lleva ese nombre, se la representa con la letra griega nu: ν

Las sensibilidades de las sensibilidades

Las sensibilidades introducidas en el apartado anterior son útiles para la mayor parte de transacciones financieras, por lo tanto es necesario ver cómo las afectan el paso del tiempo y las variaciones en el precio del subyacente. Dichas sensibilidades son derivadas de orden superior de la fórmula de Black Scholes, entre las que destacan:

1. Speed: Mide la variación de la gamma según el precio del subyacente, en el caso de una call europea,

$$Speed = \frac{\partial \gamma}{\partial S} = -\frac{d_1 + \sigma\sqrt{T}}{S}\gamma$$

2. Charm: Mide la sensibilidad de la delta según la fecha de vencimiento suponiendo que el precio no cambia, en el caso call europea:

$$Charm = \frac{\partial \Delta}{\partial T} = \frac{2rT - d_1\sigma\sqrt{T}}{2\sigma T\sqrt{T}}\frac{e^{-d_2^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

   La importancia reside en que con el paso del tiempo, si el mercado no varía, obligaría a rebalancear a una cartera delta neutral.

3. Colour: Mide la variación de la gamma según la fecha de vencimiento, suponiendo que el precio no cambia, en este caso:

$$Colour = \frac{\partial \gamma}{\partial T} = -\frac{\sigma + (ln(K/S) + (r + \sigma^2/2)T)d_1}{2\sigma^2 T^2 S}\frac{e^{-d_2^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Observación 1: Si los coeficientes dependen del tiempo, el teorema sigue valiendo a condición de sustituir:

$$\Sigma^2 = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma^2(s)ds \qquad R = \frac{1}{T-t}\int_t^T r(s)ds$$

Observación 2: Se define como la **Cartera de cobertura** a la que se compone con $N(d_2)$ partes de activo con riesgo y el resto $Cash$

4.6. La Ecuación de Black Scholes Barenblatt

Habíamos hablado ya de lo complejo que es el problema del cálculo preciso de la volatilidad en la fórmula de BS, muchas veces para simplificar cálculos engorrosos, se la asumía fija siempre y cuando no tuviera variaciones abruptas.
Existe una clase de ecuaciones que describen la dinámica de las tasas de interés *forward* en términos de la evolución de procesos de difusión en varias dimensiones. En dicho modelo, la tasa $r(t,u) \quad u,t \geq 0$ que ahora la vemos como una función, cumple la siguiente igualdad estocástica:

$$dr(t,u) = \left(\frac{\partial}{\partial u}r(t,u) + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t,u)\int_0^u \sigma_i(t,s)ds\right)dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t,u)dz_i(t)$$

Donde $Z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t))$ es un proceso de Wiener n-dimensional y las σ_i son ciertas funciones que describen la volatilidad del mercado, consideremos:

$$A = -\frac{\partial}{\partial u}, \qquad \sigma_t(u) = (\sigma_1(t,u), \sigma_2(t,u), \ldots, \sigma_n(t,u))$$

, y

$$c(\sigma_t)(u) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t,u)\int_0^u \sigma_i(t,s)ds$$

así

$$dr(t,u) = (-Ar(t,u) + c(\sigma_t)(u))dt + \sigma_t(u)\cdot Z(t), \quad r(0,u) \in H$$

H es un espacio de Hilbert separable de funciones en $\mathbb{R}^+$ (por ejemplo, $H = L^2(\mathbb{R}^+)$ ó $H = H^1(\mathbb{R}^+)$).
Con el proceso $r(t,u)$ podemos calcular el precio de un bono en tiempo t y vencimiento T:

$$B(t) = e^{-\int_0^{T-t} r(t,u)du}$$

En el caso de opciones europeas tomamos la función de payoff $F : H \to \mathbb{R}$ y la curva de parámetro t: $r(t,u) = r_t(u) = x(u)$, así el precio de una opción con vencimiento T es la siguiente esperanza condicional:

$$V(t,x) = E\left(e^{-\int_t^T u(s,0)ds} F(r_T)\middle| r_t(u) = x(u)\right) \qquad (1)$$

De esta manera, para flujos de caja w_i en tiempos $T_1 < T_2 < \ldots < T_n = T$:

$$F(y) = \left(K - \sum_{i=1}^{n} w_i e^{\int_0^{T_i - T} y(u)du}\right)^+$$

Para un strike K. La función V dada por Feynman-Kac (1) satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} < \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sigma_i(t), \sigma_i(t) > + < c(\sigma_t) - Ax, \frac{\partial V}{\partial x} > -x(0)V = 0 \\ \\ V(T,x) = F(x) \qquad (t,x) \in [0,T] \times H \end{cases}$$

Donde $< \cdot, \cdot >$ es el producto interno en H, obtenemos así la ecuación de Black Scholes en varias dimensiones.

Ahora veamos este problema, supongamos que no se puede determinar con exactitud la volatilidad σ, sólo sabemos que existe un conjunto $\Omega = Im(\sigma) \subset H$. En el caso de una opción europea, de payoff $F(r_T)$ que depende de la curva determinada por la tasa de interés *forward* con vencimiento T, en el caso de una call, donde $C(t) = V(t, r_t)$, usando una estrategia de *hedging*, obtenemos que V es solución de la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - < Ax, \frac{\partial V}{\partial x} > + \mathcal{H}(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial V}{\partial x}) - x(0)^+ V = 0 \qquad en\ (0,T) \times H \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (2) \\ V(T,x) = F(x) \qquad en\ H \end{cases}$$

donde

$$\mathcal{H}(g, M) = \sup_{\sigma \in \Omega} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} < M\sigma_i, \sigma_i > + < c(\sigma_i), \frac{\partial V}{\partial x} > \right\}$$

Para $g \in H$ una función y $M \in S(H)$ (conjunto de operadores autoadjuntos de H).

La fórmula mostrada en (2) es la denominada **Ecuación de Black Scholes Barenlatt** para el caso de varias dimensiones.
En el caso de una dimensión, se toma la volatilidad variable en función del tiempo de esta forma: σ_t, donde

$$0 < \sigma_1 < \sigma_t < \sigma_2 < \infty \qquad t \in [0, T]$$

introduciendo la función,

$$U(x) = \begin{cases} \sigma_1 & si \quad x < 0 \\ \sigma_2 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Y sea $V(t,x)$ la solución de la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) \frac{\partial V}{\partial x^2} - rV = 0 \\ V(T,x) = f(x) \end{cases}$$

donde $f(x)$ es la función del payoff tal que $f(S_T) = \max\{S_T - K, 0\}$.

4.7. El Modelo de Bachelier

En 1900 L. Bachelier fue el primero en describir el precio de las acciones mediante el movimiento browniano, llegando a asignar precios a opciones de aquella época en Francia y comparando con el mercado real.
El Movimiento Browniano Geométrico es la única solución de $dS = \mu S_t dt + \sigma S_t dz_t$, con condición inicial S_0 y subyace en todo el modelo de Black Scholes.
El modelo que desarrolló consiste de un activo sin riesgo B_t, $t \leq T$ (podemos considerar un bono, una cuenta bancaria), y un activo con riesgo $S_t = S_0 + \mu t + \sigma z_t$ (una acción de precio S_t), donde z_t es un movimiento browniano en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, con T la fecha de expiración de la opción.
Habíamos visto que el precio de una opción call europea es:

$$C_0 = N\left(\frac{ln(S_0/K) + T(r + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}}\right) S_0 - Ke^{-rT} N\left(\frac{ln(S_0/K) + T(r - \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

En particular, para $S_0 = K$ y $r = 0$ vale

$$C_0 = S_0\left(N(\sigma\sqrt{T}/2) - N(-\sigma\sqrt{T}/2)\right)$$

y además para $T \sim 0 \Rightarrow C_0 \sim K\sigma\sqrt{T/2\pi}$
El precio de una call europea es $f(S_T) = (S_T - K)^+$ viene dado según el modelo de Bachelier es:

$$C_0 = (S_0 - K)N(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}) + \sigma\sqrt{T}N'(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}})$$

Observación: Si $S_0 = K \Rightarrow C_0 = \sigma\sqrt{T/2\pi}$ Continuando con el modelo de Bachelier, armamos una estrategia autofinanciada[2] $\phi = (H_t^0, H_t)$ de valor inicial V_0 que replica a $f(S_T) = (S(T) - K)^+$ (es decir $V(T) = f(S_T)$). Entonces se prueba que:

$$H_t = N\left(\frac{S(t) - K}{\sigma\sqrt{T - t}}\right)$$

y

$$H_t^0 = -KN\left(\frac{S(t) - K}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) + \sigma\sqrt{T - t}N'\left(\frac{S(t) - K}{\sigma\sqrt{T - t}}\right)$$

Y en el caso de una put, se prueba de manera similar: el payoff viene dado por $g(S_T) = (K - S(T))^+$ y su precio $P_0 = -S_0N(-d_1)e^{-rT}N(-d_2)$ y como el modelo es completo, y por la paridad put-call existe una estrategia $\phi = (H_t^0, H_t)$ para la cual:

$$H_t = N\left(\frac{ln(S(t)/K) + (T - t)(r + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right)$$

y

$$H_t^0 = -\frac{K}{B_0}e^{-rt}N\left(\frac{ln(S(t)/K) + (T - t)(r + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right),$$

(Compárese con lo obtenido según el modelo de Bachelier). El precio de una opción *call* europea C_0, ya sea en el modelo BS o de Bachelier proviene de fórmulas estocásticas generales en donde se observó el caso $t = 0$.

[2]Ver Capítulo 3

La fórmula de BS (también llamada de Black Scholes Merton) marcó un hito en el mundo de las finanzas al incorporar los procesos estocásticos al análisis matemático financiero, sin embargo, la fórmula presenta algunas imperfecciones, por ejemplo, el caso de lo que ya estudiamos al tratar de estimar la volatilidad.
El trabajo de Bachelier fue reconocido por muchos estudiosos, en 1944, Itô se inspiró en su trabajo para introducir su cálculo estocástico y movimiento browniano geométrico asignando, en finanzas, definitivamente el valor $S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma z_t}$ al precio de la acción.
En 1965 P.A. Samuelson estudió la conexión entre el movimiento browniano geométrico y la economía, dichos estudios le valieron en 1970 el premio Nobel de Economía.
En 1973 Fischer Black y Myron Scholes utilizaron el movimiento Browniano geométrico para asignar precio a las opciones, estudio que fue continuado con nuevas investigaciones y variantes posteriores por parte de Myron Scholes ahora junto a Robert Merton lo que les valió el Premio Nobel de Economía en 1997.

Capítulo 5

Black Scholes multivariado

5.1. Introducción

En los mercados modernos se hace necesario calcular muchos valores a la vez con fórmulas y modelos precisos y rápidos. La versatilidad de la fórmula de Black Scholes permite su aplicación en variados campos del mundo de las finanzas.
El problema que podía existir en el caso de la valuación de opciones, surgía cuando la opción tiene más de un $payoff$. La teoría matemática no presenta complicaciones al respecto de resolver este problema, la complicación nace cuando en la práctica se intenta recurrir a modelos numéricos que aproximen resultados, sobre todo para aplicar en computación. Dichos algoritmos funcionan bastante bien en una dimensión, pero la complejidad en más dimensiones los hace lentos (sobre todo cuando se trata de integrar numéricamente en más de una dimensión) y por lo tanto sería mejor evitarlos.
La fórmula de Black Scholes es muy utilizada en finanzas hoy día, si bien en la práctica la suposición de que la volatilidad es determinística no se satisface en la realidad, hubo estudiosos que obtuvieron equivalencias y aproximaciones de esta fórmula unidimensional, para el caso multidimensional.
Dichas fórmulas son rápidas y fáciles de implementar, en todas se considera el payoff del tipo Europeo, cuando se hable de una *Combinación*

Lineal de Activos pueden ser *paquetes* o "Canastas" de opciones, opciones "*spread*" (opciones sobre la diferencia entre dos opciones, o indices), y otras variedades de opciones como las "Arco Iris", Asiáticas, etc.
En esta unidad también veremos fórmulas derivadas que consideran las posibles subas o bajas en el valor esperado de la opción como si observaramos su árbol binomial.

5.2. La Ecuación Multidimensional de Black Scholes

Para una *European Basket Option* compuesta por n activos $S = (S_1, S_2, ..., S_n)$ tipo *Call* cuyo precio viene dado por $C(S, r, T, K, \sigma)$ debe ser solución de la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial C}{\partial T} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(r - D_i)}_{\mu_i} S_i \frac{\partial C}{\partial S_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} S_i S_j{}^{1} \frac{\partial^2 C}{\partial S_i \partial S_j} = 0$$

Donde $a_{ij} = 1/2\Sigma\Sigma^t$, [2] Σ es la matriz de volatilidades, también para cada activo de la canasta S_i tenemos los dividendos que aporta, lo cual para el vector (toda la canasta) S existe un vector de dividendos $D = (D_1, D_2, ..., D_n)$, r, T y K como en el caso univariado. Esta el la **Ecuación de Black Scholes Multidimensional** (BSM)

5.3. La estimación de la volatilidad en el caso Multivariado

Convenientemente, vamos a suponer $|\mu_j(t, S)| \leq C$ y $|\sigma_{ij}(t, S)| \leq C$ para una constante $C > 0$, además sea la matriz $A = (a_{ij}) = \frac{1}{2}\Sigma\Sigma^t$ que satisface esta condición:

$$\exists k, K > 0$$

[1] luego vamos a considerar $\mu_i = \mu_i(S, t)$ y $a_{ij} = a_{ij}(S, t)$

[2] Σ^t representa la matriz **Transpuesta** de Σ

tales que

$$\forall \quad y \in \mathbb{R}^n \quad k|y|^2 \leq \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(t,S) y_i y_j \leq K|y|^2$$

Consideremos el caso *basket option* europea, con un vector de pesos $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$, $w_i > 0$ tales que el *basket price* viene dado por

$$B = \sum_{i=1}^{n} w_i S_i$$

con un strike K a pagarse en la fecha T, de esta manera, la fórmula del precio viene dada por:

$$P(S(t), t, K, T) = e^{-\int_t^T \mu_i(u)du} E_t \left[(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K)^+ \right]$$

Para el cual el precio de una call europea:

$$C = e^{\int_t^T \mu_i(u)du} P = E_t \left[(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K)^+ \right]$$

Donde E_t denota el valor esperado en el momento t.
Ahora nos interesa ver cómo generalizamos la ecuación de Dupire en el caso multivariado, para eso, veamos una propiedad:

Propiedad 5.3.1 *Sea la matriz de volatilidades una función localmente integrable $\Sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Sigma = \Sigma(t)$, entonces C (el precio de una opción call europea multivariada) satisface:*

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i \frac{\partial C}{\partial w_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_i w_j \frac{\partial^2 C}{\partial w_i \partial w_j}$$

donde $A = (a) = \frac{1}{2} \Sigma \Sigma^t$.

Demostración: El precio de la *call basket option* también se expresa así:

$$C(S(t),t,K,T) = \int_{\mathbb{R}^n} p(S(t),t,x,T)(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i - K)^+ dx$$

Considerando $x = S(T)$, $p(t,S(t),\tau,S(\tau))$ es la función de probabilidad asociada al proceso estocástico definido para cada coordenada (activo de la canasta) por:

$$dS = S_i \mu_i dt + S_i \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dz_i$$

entonces C cumple la ecuación multidimensional de Black Scholes, a diferencia de lo que ocurría en una dimensión, no es aplicable en este caso la teoría de ecuaciones parabólicas, si bien bajo el cambio de variables

$$\tau = T - t \qquad X_i = ln(S_i)$$

transformamos la ecuación de BSM en una ecuación parabólica. Ahora definimos el siguiente conjunto:

$$\Omega_w = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \Big/ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq K \right\}$$

entonces:

$$C(S(t),t,K,T) = \int_{\Omega_w} p(S(t),t,x,T)(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i - K) dx \qquad (*)$$

Notemos que C es homogénea de grado 1 en las variables $(w_1, w_2, ..., w_n, K)$ y cumple la ecuación de Euler:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C}{\partial w_i} + K \frac{\partial C}{\partial K} = C$$

Sería conveniente calcular (*) como una integral sobre una región independiente de w, por eso, introducimos el siguiente cambio de variable:

$$B = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \quad Q_i = \frac{w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}$$

para $1 \leq i \leq n-1$, $\quad Q = (Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1}) \quad Q \in \Delta_n$ se define

$$\Delta_n = \{Q \in \mathbb{R}e^{n-1} : Q_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n-1} Q_i \leq 1\}$$

es un poliedro de $n-1$ dimensiones. De este modo, definimos

$$S(T) := S(Q, B) = \left(\frac{Q_1 B}{w_1}, ..., \frac{Q_{n-1} B}{w_{n-1}}, \frac{(1 - \sum_{i=1}^{n-1} Q_i) B}{w_n}\right)$$

Si hacemos un cambio de variables:

$$(S_1(T), S_2(T), ..., S_n(T)) \longmapsto (Q_1, ..., Q_{n-1}, B)$$

Cuyo jacobiano es:

$$\mathbf{J} = det \begin{pmatrix} \frac{B}{w_1} & 0 & \dots & \frac{Q_1}{w_1} \\ 0 & \frac{B}{w_2} & \dots & \frac{Q_2}{w_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-B}{w_n} & \frac{-B}{w_n} & \dots & \frac{(1 - \sum_{i=1}^{n-1} Q_i)}{w_n} \end{pmatrix} = \frac{B^{n-1}}{w_1 w_2 ... w_n}$$

Obteniendo así

$$C(S(t), t, K, T) = \int_K^\infty \int_{\Delta_n} p(S(t), t, S(Q, B), T)(B - K) \frac{B^{n-1}}{w_1 w_2 ... w_n} dQ dB$$

De esta manera, por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -\int_K^\infty \int_{\Delta_n} p(S(t), t, S(Q, B), T) \frac{B^{n-1}}{w_1 w_2 ... w_n} dQ dB$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \int_{\Delta_n} p(S(t), t, S(Q, B), T) \frac{K^{n-1}}{w_1 w_2 ... w_n} dQ dB$$

Ahora volvemos a escribir todo en función de las coordenadas de $S(T)$ de esta forma:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \frac{1}{|w|} \int_{\Omega_w} p(S(t), t, S(T), T) dS = \frac{1}{|w|} P\left(B(T) = K \middle| S(t)\right)$$

Cabe aclarar que todo el análisis depende del vector de pesos w; la última igualdad relaciona la derivada segunda de C con respecto al strike K con la integral de la densidad sobre el conjunto Ω_w antes definido. La segunda igualdad surge de aplicar propiedades de la probabilidad de que la canasta B valga K en la fecha de vencimiento T, dado que el vector de precios vale $S(t)$ en tiempo t. Sin embargo esta relación no aporta información acerca de una fórmula multidimensional que generalice la ecuación de Dupire, por ello realizaremos los siguientes cálculos:

$$w_i \frac{\partial C}{\partial w_i} = \quad (**)$$

$$= -\int_K^\infty \int_{\Delta_n} \frac{\partial p}{\partial S_i(T)}(S(t), t, S(Q,B), T)(B-K)\frac{Q_i B}{w_i}\frac{B^{n-1}}{w_1 w_2 \ldots w_n} dQdB -$$

$$-\int_K^\infty \int_{\Delta_n} p(S(t), t, S(Q,B), T)(B-K)\frac{B^{n-1}}{w_1 w_2 \ldots w_n} dQdB \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Dicha igualdad la podemos extender si consideramos $Q_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} Q_i$, entonces

$$\sum_{i=1}^n \mu_i w_i \frac{\partial C}{\partial w_i} = -\int_{H_w} \sum_{i=1}^n \mu_i (S_i(T)\frac{\partial p}{\partial S_i(T)} + p)(\sum_{i=1}^n w_i S_i(T) - K)dS(T) =$$

$$= -\int_{H_w} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial S_i(T)}(\mu_i S_i(T) p)(\sum_{i=1}^n w_i S_i(T) - K)dS(T)$$

Ahora usaremos que p cumple la siguiente ecuación (Fokker-Planck[3]):

$$\frac{\partial p}{\partial T} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial S_i}(\mu_i S_i p) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial S_i \partial S_j}(a_{ij} S_i S_j p) = 0$$

Así se obtiene

$$\sum_{i=1}^n \mu_i w_i \frac{\partial C}{\partial w_i} =$$

[3]Esta ecuación sirve para describir la evolución de la función de densidad de posición y velocidad de una partícula a través del tiempo, en n dimensiones refiere a n partículas, muy utilizada en física

$$= \int_{H_w} \frac{\partial p}{\partial T} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial S_i(T)\partial S_j(T)}(a_{ij}S_i(T)S_j(T)p)(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K)dS(T)$$

Ahora, como hicimos en el Capítulo 2, hallaremos la derivada de C con respecto a T:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \int_{H_w} \frac{\partial p}{\partial T}(S_t, t, S_T, T)(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K)dS(T)$$

y así,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i \frac{\partial C}{\partial w_i} =$$

$$= \frac{\partial C}{\partial T} + \int_{H_w} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial S_i(T)\partial S_j(T)}(a_{ij}S_i(T)S_j(T)p)(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K)dS(T)$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia y usando el hecho que la integral sobre ∂H_w se anula, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i \frac{\partial C}{\partial w_i} = \frac{\partial C}{\partial T} - \int_{H_w} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial S_j(T)}(a_{ij}S_i(T)S_j(T)p)w_i dS(T)$$

Y como la normal exterior a Ω_w esta dada por $\frac{-w}{|w|}$ obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i \frac{\partial C}{\partial w_i} = \frac{\partial C}{\partial T} - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega_w} a_{ij}S_i(T)S_j(T)p(S_t, t, S_T, T)\frac{w_i w_j}{|w|}ds$$

Integrando por partes luego de un cambio de variables en (**) tambien se deduce que

$$\frac{\partial C}{\partial w_i} = \int_{\Omega_w} p(S_t, t, S_T, T)S_i(T)dS(T)$$

Así

$$w_i w_j \frac{\partial^2 C}{\partial w_i \partial w_j} =$$

$$= -\int_K^\infty \int_{\Delta_n} \frac{\partial p}{\partial S_j(T)}(S_t, t, S(Q,B), T)Q_iB\frac{Q_jB}{w_j}\frac{B^{n-1}}{w_1...w_n}dQdB-$$
$$-(1+\delta_{ij})\int_K^\infty \int_{\Delta_n} p(S_t, t, S(Q,B), T)Q_iB\frac{B^{n-1}}{w_1...w_n}dQdB$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Como antes, usamos que

$$\frac{\partial}{\partial S_j(T)}(pS_i(T)S_j(T)) = \frac{\partial}{\partial S_j(T)}S_i(T)S_j(T) + p(1+\delta_{ij})S_i(T)$$

, entonces deducimos que:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial w_{ij}} = \frac{1}{|w|}\int_{\Omega_w} pS_i(T)S_j(T)ds$$

Entonces, si la matriz (a_{ij}) depende sólo del tiempo t obtenemos:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \sum_{i=1}^n \mu_i w_i \frac{\partial C}{\partial w_i} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}w_iw_j\frac{\partial^2 C}{\partial w_i \partial w_j} \qquad (***)$$

Es la fórmula de Dupire en este caso.

Observación: No siempre se puede despejar la volatilidad en este caso como en una dimensión, primero que como se puede ver en la demostración necesitamos que la matriz $(a_{ij}) = \Sigma\Sigma^t$ dependa sólo del tiempo. Tampoco se puede hacer un despeje sencillo, ya que es una ecuación vectorial, y las matrices que intervienen en el cálculo no necesariamente serán inversibles para obtener una fórmula cerrada de (a_{ij}), pero siempre la podemos expresar como en (***).

5.4. Un Análisis Alternativo

Existen generalizaciones de la fórmula de Black Scholes en varias dimensiones, la que vamos a estudiar introduce una combinación con la estructura del modelo binomial.

Dados n activos $S_1, S_2, ...S_n$ cuyos modelos de precio continuo vienen dados por

$$\frac{dS_i}{S_i} = \underbrace{(r - q_i)}_{\mu_i} dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dz_j(t), \qquad 1 \leq i \leq n \qquad (1)$$

Con valores iniciales $S_1(0), S_2(0), ...S_n(0)$, una tasa de interés r, una matriz de volatilidades (σ_{ij}), q_i son los dividendos del activo i y $z_1, z_2, ..., z_n$ son procesos de Wiener independientes.
En las basket options, se considera un vector de *pesos*

$$w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$$

de esta manera, K es el precio del ejercicio y el payoff en la fecha de vencimiento T es

$$\mathbf{S} = \max\,(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K, 0) = (\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K)^+$$

Muchas teorías, por lo general consideran $w_i \geq 0$[4] $\forall \quad 1 \leq i \leq n$ Según lo visto en (1), $S_i(T)$ viene dado de la siguiente manera:

$$S_i(T) = S_i(0) \exp\left[\left(r - q_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2\right)T + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} z_j(T)\right]$$

Además en tiempo T, el valor esperado está dado por:

$$p = e^{-rT} E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K\right)^+\right)$$

es decir, el precio se calcula mediante la tasa de interés y la esperanza del payoff. Ahora formemos la siguiente variable aleatoria:

$$X = \sum_{i=0}^{n} \delta_i x_i e^{G_i\sqrt{T} - Var(G_i T/2)}$$

[4]a estos pesos w_i también se los denomina *Flujos de Caja*

Donde $\delta_i = \pm 1$, $x_i > 0$, $\forall \quad 0 \leq i \leq 1$, $G = (G_0, G_1, ...G_n) \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual implica que $E(G_i) = 0, \forall i$ y Σ es la matriz de covarianzas:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{00} & \sigma_{01} & \ldots & \sigma_{0n} \\ \sigma_{10} & \sigma_{11} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n0} & \sigma_{n1} & \ldots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Donde $\sigma_{ij} = Cov(G_i, G_j)$.
En el caso de la canasta de opciones $\delta_i = sg(w_i)$, $x_i = S_i(0)e^{-}q_iT$ y la matriz de covarianzas esta dada por: $\Sigma_{ij} = (\sigma\sigma^t)_{ij}$ El strike price K está representado en X de la siguiente forma como "stock cero": $\delta_0 = -1$, $x_0 = Ke^{-rT}$, y $\Sigma_{i0} = \Sigma_{0j} = 0 \; \forall i, j$

5.4.1. El caso del precio "En baja"

Observando el modelo binomial vamos a adaptar un poco su esquema y notación para el caso multivariado, primero tomamos un vector u [5] $\in \mathbb{R}^{n+1}$, un valor $d \in \mathbb{R}$ ambos arbitrarios para definir:

$$p_* = \sup_{u,d} E(XI_{<u,G>\leq d})$$

Donde $<,>$ es el producto interno de $\mathbb{R}^{n+1}$, entonces vale lo siguiente:

$$p_* = \sup_{u,d} E(XI_{<u,G>\leq d}) = \sup_{d\in\mathbb{R}} \sup_{u\in\mathbb{R}^{n+1}} E(E(X| < u, G >)I_{<u,G>\leq d})$$

[5] una complicación que tiene este modelo es la necesidad de conocer los posibles factores de suba de cada opción (cada componente u_i) en un cálculo computacional, la consideración de todas las posibles combinaciones puede hacer engorroso el cálculo

$$= \sup_{d\in\mathbb{R}} \sup_{u\in\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{i=0}^{n} \delta_i x_i E\Bigg(e^{\frac{Cov(G_i,<u,G_i>)}{<u,\Sigma u>}<u,G_i>\sqrt{T}-\frac{Cov^2(G_i,<u,G_i>)}{<u,\Sigma u>}T/2} I_{<u,G>\leq d}\Bigg)$$

$$= \sup_{d\in\mathbb{R}} \sup_{<u,\Sigma u>=1} \sum_{i=0}^{n} \delta_i x_i E\Bigg(exp\Bigg(Cov(G_i,<u,G_i>)<u,G_i>\sqrt{T}-$$

$$Cov^2(G_i,<u,G_i>)T/2\Bigg) I_{<u,G>\leq d}\Bigg)$$

$$= \sup_{d\in\mathbb{R}} \sup_{<u,\Sigma u>=1} \sum_{i=0}^{n} \delta_i x_i N\Bigg(d+(\Sigma u)_i\sqrt{T}\Bigg)$$

Donde $N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}}ds$ es la función de distribución de una variable $N(0,1)$, Σ es una matriz simétrica ya que la covarianza es simétrica, podemos considerar lo siguiente:

$$C = D\Sigma D$$

Para $D\in\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ tal que:

$$D=(d_{ij})=\begin{cases} 1/\sigma_{ii} & i=j, \quad \sigma_i\neq 0 \\ 0 & caso \quad contrario \end{cases}$$

De esta forma C también es una matriz semidefinida positiva, vamos a notar $\sqrt{C}$ como la "raíz cuadrada" de la matriz C, esto implica que $C=\sqrt{C}\sqrt{C}^t$.
Esto implica que para D inversible, vale $\Sigma = D^{-1}\sqrt{C}\sqrt{C}^t D^{-1}$, de esta manera tomamos una nueva variable definida así $v = D^{-1}\sqrt{C}^t u$ Ahora en (1) tomo una nueva función:

$$\mathfrak{L}(v,d)=\sum_{i=0}^{n}\delta_i x_i N\Bigg(d+\sigma_i\Bigg((\sqrt{C}v)_i\sqrt{T}\Bigg) - \lambda(||v||-1)$$

Donde λ es el multiplicador de Lagrange para la restricción

$$||v|| = 1$$

Bajo estas condiciones vale que

$$p_* = \sum_{i=0}^{n} \delta_i x_i N\bigg(d^* + \sigma_i\bigg((\sqrt{C}v^*)_i\sqrt{T}\bigg)$$

Para d^* y v^* que son solución del siguiente sistema:

$$(1)\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} \delta_i x_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(d^*+\sigma_i((\sqrt{C}v^*)_i)\sqrt{T}}{2}) = 0 \qquad (2) \\ \sum_{i=0}^{n} \delta_i x_i \sigma_i \sqrt{C}_{ij} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(d^*+\sigma_i((\sqrt{C}v^*)_i)\sqrt{T}}{2})\sqrt{T} - \lambda v_j \\ \qquad\qquad j = 0, 1, ..., n \quad (3) \\ ||v^*|| = 1 \qquad (4) \end{cases}$$

Este análisis es útil para el uso en computación, a nuestro efecto necesitamos que $d^* < \infty$. Observemos que además es necesario que C sea no singular para esta definición, pero podría ocurrir que C tenga filas y columnas de ceros, en ese caso se define C como la matriz que resulta de sacarle a C las filas y columnas nulas, esto equivale a reducir a la matriz Σ bajo esta condición:

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ik} - \sigma_{kj} + \sigma_{kk} =$$

$$= Cov(G_i, G_j) - Cov(G_i, G_k) - Cov(G_k, G_j) + Cov(G_k, G_k)$$
$$= Cov(G_i + G_k, G_j, G_k) \neq 0, \quad \forall i, j, k = 0, 1, ...n$$

Esto se puede conseguir relativamente fácil, tomando $n + 1$ variables aleatorias $N(0, \sigma)$ no correlacionadas.

Obtención de la fórmula

Debemos obtener las derivadas parciales con respecto al precio de cada opción:

$$\frac{\partial p_*}{\partial x_i} = \delta_i N\bigg(d + \sigma_i\bigg((\sqrt{C}v)_i\sqrt{T}\bigg)\bigg)$$

sus volatilidades:

$$\frac{\partial p_*}{\partial \sigma_i} = \delta_i x_i (\sqrt{C}v^*)_i N'\bigg(d + \sigma_i(\sqrt{C}v)_i\sqrt{T}\bigg)\sqrt{T}$$

Sus coeficientes de correlación:

$$\frac{\partial p_*}{\partial \rho_{ij}} = \delta_i x_i \sigma_i \delta_j x_j \sigma_j \frac{N'\Big(d^* + \sigma_i(\sqrt{C}v^*)_i\sqrt{T}\Big) N'\Big(d^* + \sigma_j(\sqrt{C}v^*)_j\sqrt{T}\Big)}{\sum_{k=0}^{n} \delta_k x_k \sigma_k (\sqrt{C}v^*)_k N'\Big(d^* + \sigma_k(\sqrt{C}v^*)_k\sqrt{T}\Big)} \sqrt{T}$$

y el tiempo de vencimiento:

$$\frac{\partial p_*}{\partial T} = \frac{1}{2\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{n} \delta_k x_k \sigma_k (\sqrt{C}v^*)_k N'\Big(d^* + \sigma_k(\sqrt{C}v^*)_k\sqrt{T}\Big)$$

y como se cumplen las condiciones en (1), vale que:

$$\frac{\partial p_*}{\partial x_i} = \frac{\partial p_*}{\partial x_i} + \frac{\partial p_*}{\partial d}\frac{\partial d}{\partial x_i} + < \nabla_v p_*, \frac{\partial v}{\partial x_i} >= \frac{\partial p_*}{\partial x_i} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial ||v^*||^2}{\partial x_i}$$

Considerando ahora C cuadrada, inversible y simétrica:

$$\frac{\partial \sqrt{C}_{kl}}{\partial \rho_{ij}} = \frac{1}{2}(\Delta_{ik}\sqrt{C}^{-1}_{jl} + \Delta_{jk}\sqrt{C}^{-1}_{il})$$

Donde Δ es la delta de Dirac.[6] y entonces,

$$\frac{\partial p_*}{\partial \rho_{ij}} = \frac{\sqrt{T}}{2}(\delta_i x_i \sigma_i n_i \sqrt{T}))(\sqrt{C}^{-1}v^*)_j + \delta_j x_j \sigma_j n_j (\sqrt{C}^{-1}v^*)_i$$

Donde $n_i = N'(d^* + \sigma_i(\sqrt{C}v^*)_i$ Y por (2) se tiene que:

$$\delta_i x_i \sigma_i n_i = \frac{\lambda}{\sqrt{T}}(\sqrt{C}^{-1}v^*)_i$$

Luego por (2) y (4):

$$\lambda = \sum_{i=0}^{n} \delta_i x_i \sigma_i n_i (\sqrt{C}^{-1}v^*)_i\sqrt{T}$$

[6]

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

nos da le fórmula del multiplicador de Lagrange en este caso.
Por esta razón vale la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:
Calculando la derivada segunda de p^* se obtiene:

$$\frac{\partial^2 p_*}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\delta_i \delta_j n_i n_j}{\sum_{k=0}^{n} \delta_k x_k \sigma_k n_k (\sqrt{C}^{-1} v^*)_k \sqrt{T}}$$

Y así,

$$-\frac{\partial p_*}{\partial T} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \Sigma_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 p_*}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

5.4.2. El caso del precio "En suba"

Primero consideremos esta propiedad para variables aleatorias:

Propiedad 5.4.1 *Sea X una v.a., entonces vale que*

$$\sup_{0\leq Y\leq 1} E(XY) = E(\max(X,0)) = \sup_{X=Z_1-Z_2 Z_1\geq 0 Z_2\geq 0} E(Z_1)$$

Para Y, Z_1 y Z_2 v.a.

Además vamos a considerar lo siguiente:

$$\sigma_i^k = \sqrt{Cov(G_i+G_k, G_i-G_k)} = \sqrt{V(G_i) - 2Cov(G_i,G_k) + V(G_k)}$$

$$\mathfrak{E}_k = \{i/\sigma_i^k \neq 0\}, \quad (\mathfrak{E}_k \neq \emptyset)$$

Y tomamos $\tilde{x_k} = |\sum_{i\notin \mathfrak{E}_k} \delta_i x_i|$, y $\tilde{\delta_k} = sgn(\sum_{i\notin\mathfrak{E}_k} \delta_i x_i)$, sin pérdida de generalidad, suponemos $\tilde{x_k} > 0$.
Ahora tomamos reales $(\eta_i^k)_{i\in\mathfrak{E}_k}$ tales que $\sum_{i\in\mathfrak{E}_k} \eta_i^k = -\tilde{\delta_k}$ para reescribir X así:

$$X = \sum_{i\in\mathfrak{E}_k} \delta_i x_i e^{G_i\sqrt{T}-Var(G_iT/2)} - \eta_i^k \tilde{x}_i e^{G_i\sqrt{T}-Var(G_iT/2)}$$

$$= \left(\sum_{i\in\mathfrak{E}_k} \delta_i x_i e^{G_i\sqrt{T}-Var(G_iT/2)} - \eta_i^k \tilde{x}_i e^{G_i\sqrt{T}-Var(G_iT/2)} \right)^+$$

$$-\left(\sum_{i\in\mathfrak{E}_k} \delta_i x_i e^{G_i\sqrt{T}-Var(G_iT/2)} - \eta_i^k \tilde{x}_i e^{G_i\sqrt{T}-Var(G_iT/2)} \right)^-$$

Entonces por lo visto en la propiedad 1.1, podemos tomar

$$Z_1 = \sum_{i\in\mathfrak{E}_k} \delta_i x_i e^{G_i\sqrt{T}-Var(G_iT/2)} - \eta_i^k \tilde{x}_i e^{G_i\sqrt{T}-Var(G_iT/2)}$$

Donde también $\sum_{i\in\mathfrak{E}_k} \eta_i^k = -\tilde{\delta_k}$ y $\eta_i^k \delta_k > 0$ $\forall i \in \mathfrak{E}_k$, $\quad k = 0, 1, \ldots, n$ como no todos los $\tilde{\delta_k}$ tienen el mismo signo, el conjunto de η^k es no vacío para cada k. Con todo esto calculamos el valor esperado p^* en este caso:

$$p^* = \min_{0\le k\le n} \inf_{\{\sum_{i\in\mathfrak{E}_k} \eta_i^k = -\tilde{\delta_k}\}} E\left(\sum_{i\in\mathfrak{E}_k} \left(\delta_i x_i e^{G_i\sqrt{T}-Var(G_iT/2)} - \eta_i^k \tilde{x}_i e^{G_i\sqrt{T}-Var(G_iT/2} \right)^+ \right)$$

$$= \min_{0\le k\le n} \inf_{\{\sum_{i\in\mathfrak{E}_k} \eta_i^k = -\tilde{\delta_k}\}} \sum_{i\in\mathfrak{E}_k} \Bigg(\delta_i x_i N\left(\frac{\delta_i}{\sigma_i^k\sqrt{T}} \ln\left(\frac{\delta_i x_i}{\eta_i^k \tilde{x_k}}\right) + \frac{\delta_i \sigma_i^k \sqrt{T}}{2} \right) -$$

$$-\eta_i^k \tilde{x}_i N\left(\frac{\delta_i}{\sigma_i^k\sqrt{T}} \ln\left(\frac{\delta_i x_i}{\eta_i^k \tilde{x_k}}\right) - \frac{\delta_i \sigma_i^k \sqrt{T}}{2} \right) \Bigg)$$

Ahora formamos

$$\mathfrak{L}(\eta^k) = \sum_{i\in\mathfrak{E}_k} \Bigg(\delta_i x_i N\left(\frac{\delta_i}{\sigma_i^k\sqrt{T}} \ln\left(\frac{\delta_i x_i}{\eta_i^k \tilde{x_k}}\right) + \frac{\delta_i \sigma_i^k \sqrt{T}}{2} \right) -$$

$$-\eta_i^k \tilde{x}_i N\left(\frac{\delta_i}{\sigma_i^k\sqrt{T}} \ln\left(\frac{\delta_i x_i}{\eta_i^k \tilde{x_k}}\right) - \frac{\delta_i \sigma_i^k \sqrt{T}}{2} \right) - \lambda\left(\sum_{i\in\mathfrak{E}_k} \eta_i^k + \tilde{\delta}_i \right)$$

Donde las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta_i^k} = -\tilde{x}_k N\left(\frac{\delta_i}{\sigma_i^k\sqrt{T}} \ln\left(\frac{\delta_i x_i}{\eta_i^k \tilde{x_k}}\right) - \frac{\delta_i \sigma_i^k \sqrt{T}}{2} \right) - \lambda = 0$$

Por lo tanto, ahora tenemos este sistema:

$$\begin{cases} \frac{\delta_i}{\sigma_i^k\sqrt{T}}\ln\left(\frac{\delta_i x_i}{\eta_i^k \tilde{x_k}}\right) - \frac{\delta_i\sigma_i^k\sqrt{T}}{2} = \frac{\delta_j}{\sigma_j^k\sqrt{T}}\ln\left(\frac{\delta_j x_j}{\eta_j^k \tilde{x_k}}\right) - \frac{\delta_j\sigma_j^k\sqrt{T}}{2} = d^k \\ \sum_{i\in\mathfrak{E}_k}\eta_i^k = -\tilde{\delta_k} \\ \eta_i^k\delta_k > 0 \quad i\in\mathfrak{E}_k \end{cases}$$

Resolviendo para los η_i^k queda:

$$\sum_{i=0}^{n}\delta_i x_i e^{-\delta_i\sigma_i^k\sqrt{T}d^k-(\sigma_i^k)^2T/2} = 0$$

Lo que implica que:

$$p^* = \min_{0\le k\le n}\sum_{i=0}^{n}\delta_i x_i N\big(d^k + \delta_i\sigma_i^k\sqrt{T}\big)$$

llamaremos k^* al entero que realiza este mínimo.

Análisis mediante derivadas parciales en este caso

Como en el caso del precio én baja'veremos que fórmula obtenemos derivando, cabe resaltar que si bien la función mín es derivable en casi todo punto, los siguientes resultados se van a considerar válidos salvo en un conjunto de medida 0:

$$\frac{\partial p^*}{\partial x_i} = \delta_i N\left(d^{k^*} + \delta_i\sigma_i^{k^*}\sqrt{T}\right)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial \sigma_i} = x_i\frac{\sigma_i - \sigma_{k^*}\rho_{ik^*}}{\sigma_i^{k^*}}N'\left(d^{k^*} + \delta_i\sigma_i^{k^*}\sqrt{T}\right)\sqrt{T}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial \rho_{ij}} = -\Delta_{jk^*}x_i\frac{\sigma_i\sigma_{k^*}\rho_{ik^*}}{\sigma_i^{k^*}}N'\left(d^{k^*} + \delta_i\sigma_i^{k^*}\sqrt{T}\right)\sqrt{T}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial T} = \frac{1}{2\sqrt{T}}\sum_{l=0}^{n}x_l\sigma_l^{k^*}N'\left(d^{k^*} + \delta_l\sigma_l^{k^*}\sqrt{T}\right) \quad \textit{con la convencion } 0/0 = 0$$

Ahora calculamos la derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 p^*}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} \Delta_{ij} \frac{N'(d^{k^*} + \delta_i \sigma_i^{k^*} \sqrt{T})}{x_i \sigma_i^{k^*} \sqrt{T}} \; si \; i \in \mathfrak{E}_k \\ 0 \; \forall j \; si \; i \notin \mathfrak{E}_k \end{cases}$$

Y así obtenemos para p^* la siguiente ecuación diferencial:

$$-\frac{\partial p^*}{\partial T} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \Sigma_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 p^*}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

5.4.3. La relación entre p^* y p_*

Proposición: Si para todo $i, j = 0, 1, \ldots, n$,

$$(5) \; \Sigma_{ij} = \delta_i \delta_j \sigma_i \sigma_j$$

entonces,

$$p^* = p_*$$

Demostración: Recordemos que para cualquier k:

$$p_* = \sup_{d^k \in \mathbb{R}} \sup_{<u, \Sigma^k u> = 1} \sum_{i=0}^{n} \delta_i x_i N\left(d^k + (\Sigma^k u)_i \sqrt{T} \right)$$

si consideramos la libertad de elegir entre diferentes matrices de covarianza Σ^k, entonces, para toda k:

$$(6) \quad \sup_{<u, \Sigma^k u> = 1} \sum_{i=0}^{n} \delta_i x_i N\left(d^k + (\Sigma^k u)_i \sqrt{T} \right) \leq p_* \leq$$

$$^* \leq \sum_{i=0}^{n} \delta_i x_i N\big(d^k + \delta_i \sigma_i^k \sqrt{T} \big)$$

Elegimos k tal que $\sigma_k = \min_{0 \leq i \leq n} \sigma_i$, notar que bajo este supuesto vale que $\Sigma = (\delta_i \sigma_i - \delta_k \sigma_k)(\delta_j \sigma_j - \delta_k \sigma_k)$ Aunque no todos los δ_i tienen el mismo signo, podemos definir un vector u:

$$u_i = \frac{sgn(\delta_i \sigma_i - \delta_k \sigma_k)}{\sum_{j=0}^{n} |\delta_j \sigma_j - \delta_k \sigma_k|} \; 0 \leq i \leq n$$

Se puede ver que $< u, \Sigma^k u >= 1$ y además, de la manera que elegimos k: $(\Sigma^k u)_i = \delta_i\sigma_i - \delta_k\sigma_k = \delta_i|\delta_i\sigma_i - \delta_k\sigma_k| = \delta_i\sigma_i^k$ con lo que obtenemos, por (6):

$$p^* = p_*$$

Q.E.D.

Por el contrario, si la condición (5) no se verifica, p^* y p_* serán diferentes, pero igualmente se puede estimar su diferencia de la siguiente manera:

$$0 \leq p^* - p_* \leq \sqrt{\frac{2T}{\pi}} \min_{0\leq k\leq n} \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\sigma_i^k \right)$$

Demostración:

$$p^* - p_* \leq \min_{0\leq k\leq n} \sum_{i=0}^{n} \delta_i x_i N\left(d^k + \delta_i\sigma_i^k\sqrt{T} \right) - \max_{0\leq k\leq n} \sum_{i=0}^{n} \delta_i x_i N\left(d^k + (\Sigma^k u)_i\sqrt{T} \right) \leq$$

$$\min_{0\leq k\leq n} \sum_{i=0}^{n} \delta_i x_i \left(N(d^k + \delta_i\sigma_i^k\sqrt{T}) - N(d^k + (\Sigma^k u)_i\sqrt{T}) \right)$$

Y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|(\Sigma^k u)_i| = \left| \sum_{l=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \Sigma_{lj}^k u_j \Delta_{il} \right| \leq \sqrt{\sum_{l=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \Sigma_{lj}^k u_j u_l} \sqrt{\sum_{l=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \Sigma_{lj}^k \Delta_{il}\Delta_{ij}} = \sigma_i^k$$

Donde $\Delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y 0 en otro caso, esto implica:

$$p^* - p_* \leq \min_{0\leq k\leq n} \sum_{i=0}^{n} x_i ||N'||_\infty \left(\sigma_i^k - (\Sigma^k u)_i \right) \sqrt{T} \leq 2\sqrt{T}||N'||_\infty \min_{0\leq k\leq n} \sum_{i=0}^{n} x_i\sigma_i^k$$

Donde $||N'||_\infty = \max_{x\in\mathbb{R}} N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2T}}$

5.4.4. Derivadas parciales (las "griegas") en el caso de las 'Basket Options'(canasta de opciones)

Recordemos la fórmula del valor esperado como

$$p = e^{-rT} E(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K)^+)$$

entonces calculamos:

$$\Delta_i = \frac{\partial p}{\partial S_i(0)} = |w_i| e^{-q_i T} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\kappa = \frac{\partial p}{\partial K}$$

$$(Vega) \quad \nu_i = V_i = \frac{\partial p}{\partial \sigma_i}$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial^2 p}{\partial S_i(0) \partial S_j(0)} = |w_i||w_j| e^{-(q_i+q_j)T} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\chi_{ij} = \frac{\partial p}{\partial \rho_{ij}}$$

Consideremos que en todos los casos p puede ser p^* o p_*.
Utilizando estimadores de Monte Carlo, se puede aproximarar numéricamente Γ_{ij} teniendo la estimación de χ:

$$\hat{\Gamma_{ij}} = \frac{\hat{\chi_{ij}}}{x_i x_j \sigma_i \sigma_j T} \quad i \neq j$$

$$\hat{\Gamma_{ii}} = \frac{1}{x_i^2 \sigma_i^2 T} \big(\sigma_i \hat{V_i} - \sum_{j \neq i} \rho_{ij} \hat{\chi_{ij}} \big)$$

Consideremos la siguiente propiedad de la función normal multivariada:

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left(\frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2} z^t \Sigma^{-1} z) \right) =$$

$$= (1 + \Delta_{ij}) \frac{\partial}{\partial \Sigma_{ij}} \left(\frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2} z^t \Sigma^{-1} z) \right)$$

Donde como siempre Σ es simétrica definida positiva. Por ello, si $i \neq j$ vale lo siguiente:

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{x_i x_j} \frac{\partial p}{\partial \Sigma_{ij}} = \frac{1}{x_i x_j \sigma_i \sigma_j T} \frac{\partial p}{\partial \rho_{ij}}$$

y además:

$$\Gamma_{ii} = \frac{2}{x_i^2} \frac{\partial p}{\partial \Sigma_{ii}} = \frac{1}{x_i^2 \sigma_i T} \big(\frac{\partial p}{\partial \sigma_i} - \sum_{j \neq i} \frac{\rho_{ij}}{\sigma_i} \frac{\partial p}{\partial \rho_{ij}} \big)$$

Capítulo 6

El modelo Discontinuo

6.1. Introducción

En esta unidad se estudia el modelo discontinuo, que es una variación del modelo clásico de BS que ya hemos desarrollado, no siempre los precios se comportan de una manera previsible, puede ocurrir que por diversas causas éstos presenten variaciones sorpresivas y abruptas; corrigiendo convenientemente el modelo de BS, podemos amparar estas variaciones y conocer su naturaleza lo cual pasamos a detallar.

6.2. Modelo Black Scholes para los mercados financieros a tiempo Discontinuo

Esta es una variación del modelo continuo que estuvimos estudiando en los capítulos anteriores, dicho modelo de precios caracterizado por procesos de Wiener, presenta importantes diferencias con la realidad, y una de esas diferencias reside en que el modelo clásico no prevé variaciones abruptas de los precios que suelen darse ocasionalmente, para ello tenemos el modelo Discontinuo, o de Salto que considera la dinámica de precios en función de dos componentes:

- Componente Normal: Es un Proceso de Wiener para valores relativos, es lo que estuvimos explicando anteriormente.

- Componente Anormal: Consiste en variaciones repentinas del precio producidas por la información instantánea que nos llega, dichos cambios provocan discontinuidades en el comportamiento de los precios. Dichos cambios se producen en contadas ocasiones.

El modelo Continuo ha sido corregido agregándole una componente de "salto" que contempla los posibles cambios, cuya aparición son un proceso de Poisson, dado que si consideramos una distribución de cambio X que determina la variación (por ejemplo, $X = 0{,}95$ indica una caída del $5\,\%$), la probabilidad de que haya cambio es λ, v.g. un cambio esperado al año, X no tiene una distribución determinada, ya que depende del activo. Si hay más de un salto, todos tendrán la misma distribución, lo cual no implica que sean iguales.
El modelo discontinuo viene dado por:

$$\boxed{\tfrac{dS}{S} = (\mu - \lambda c)dt + \sigma dz + dq}$$

donde
$c = E(X-1), \qquad \beta^2 = G(X-1), \qquad dq \sim \mathcal{P}(\lambda dt)$
G como siempre, representa el valor del activo.

6.2.1. El precio de las opciones en el caso Discontinuo

El análisis que sigue es muy similar al que corresponde al modelo continuo con procesos de Wiener, recordemos que el modelo discontinuo tiene este aspecto:

$$dS = S(\mu - \lambda c)dt + S\sigma dz + Sdq$$

elevando al cuadrado ambas expresiones:

$$(dS)^2 = S^2(\mu - \lambda c)^2 \underbrace{(dt)^2}_{\sim 0} + S^2\sigma^2 \underbrace{(dz)^2}_{\sim dt} + S^2(dq)^2 +$$

$$+2S^2(\mu - \lambda c)\sigma \underbrace{dtdz}_{\sim 0} + 2S^2\sigma dzdq + 2S^2(\mu - \lambda c)dtdq$$

Ya hemos visto estas equivalencias que destacamos en el Capítulo 2, vemos 2 términos cuyo valor es casi 0, y el tercero que marcamos con una llave ($dtdz$), reemplazamos su valor por dt:

$$(dS)^2 \cong S^2\sigma^2 dt + S^2(dq)^2 + 2S^2\sigma dzdq + 2S^2(\mu - \lambda c)dtdq$$

Procediendo de manera muy parecida al Cap. 2, tomamos esperanzas y varianzas de los productos para simplificar más la expresión:

$$E(dq) = E(X-1)E(\mathcal{P}(\lambda dt)) = c\lambda dt$$

$$G(dq) = \beta^2\lambda dt + c^2\lambda dt + \beta^2\lambda^2(dt)^2 \approx (\beta^2 + c^2)\lambda dt$$

$$E(dtdq) = dtE(dq) = dt\lambda dtc = \lambda c(dt)^2 \approx o((dt)^2)$$

$$G(dtdq) = (dt)^2 G(dq) \approx (\beta^2 + c^2)\lambda(dt)^3 \approx o((dt)^3)$$

Por lo tanto podemos reemplazar considerando que $\lim_{dt\to 0} dtdq = 0$ Asimismo,

$$E(dzdq) = E(dz)E(dq) = 0\lambda dtc = 0$$

$$G(dzdq) = (dt)^2(\beta^2 + c^2)\lambda + 0V(dq) + c^2\lambda^2(dt)^2 dt \approx o((dt)^2)$$

Reemplazamos $\lim_{dt\to 0} dzdq = 0$

Observación: Para valores de $dt \sim 0$ (muy chicos), la probabilidad de que haya más de un salto es una $o((dt)^2)$, o sea que la distribución de Poisson sólo toma 2 valores, 0 ó 1:

$$P(1) = \lambda dt \qquad P(0) = 1 - \lambda dt$$

$(dq)^2$ también es un proceso de Poisson con igual distribución tal que si hay un evento, tomara el valor $(X-1)^2$.
Con todo esto nos queda:

$$(dS)^2 \cong S^2\sigma^2 dt + S^2(dq)^2$$

Ahora buscaremos el valor de $G(S,t)$, el precio de una opción derivada de S, como antes, comenzamos usando el lema de Itô:

$$dG(S,t) = \frac{\partial G}{\partial S}dS + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(S^2\sigma^2 dt + S^2(dq)^2) =$$

$$= \frac{\partial G}{\partial S}(S(\mu - \lambda c)dt + S\sigma dz + Sdq) + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(S^2\sigma^2 dt + S^2(dq)^2)$$

Ahora reescribimos así:

$$dG(S,t) = (\frac{\partial G}{\partial S}S(\mu - \lambda c) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}S^2\sigma^2)dt +$$

$$+\frac{\partial G}{\partial S}S\sigma dz + \frac{\partial G}{\partial S}Sdq + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}S^2(dq)^2$$

dq y $(dq)^2$ son procesos de Poisson, entonces una combinación lineal de ambos también es un proceso de Poisson, en particular

$$\frac{\partial G}{\partial S}Sdq + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}S^2(dq)^2$$

por lo visto anteriormente toma los siguientes valores:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial S}S(X-1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}S^2(X-1)^2 & \textit{si hay salto} \\ \\ 0 & \textit{caso contrario} \end{cases}$$

Este proceso de Poisson, que denotamos por dq_G es el **salto asociado al precio de la opción**. También consideremos lo siguiente, la esperanza de este proceso es igual a la diferencia entre el precio de la opción para el subyacente en el salto, o sea:

$$c_G = E(dq_G) = E(G(S,t) - G(SX,t))$$

Si sumamos y restamos c_G al término determinístico, y dividiendo la expresión por G:

$$\frac{dG}{G} = (\mu_G - \lambda c_G)dt + \sigma_G dz + dq_G$$

Esto implica que una variación en la opción se produce sí y sólo sí hay una variación en el subyacente.
Los coeficientes del precio del derivado son estos:

$$\mu_G = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(S,t) + (\mu - c\lambda)S\frac{\partial G}{\partial S}(S,t)}{G(S,t)} +$$

$$+\frac{\frac{\partial G}{\partial t}(S,t) + \lambda E(G(S,t) - G(SX,t))}{G(S,t}$$

$$\sigma_G = \frac{\frac{\partial G}{\partial S}(S,t)\sigma S}{G(S,t)}$$

6.3. La Cartera libre de riesgo en el Modelo Discontinuo

Supongamos que queremos construir una cartera para este modelo, la idea es armar una combinación entre el precio de las opciones derivadas del subyacente S y la cantidad del mismo, ó *Stock*, donde las primeras combinan precios estables, con variaciones repentinas también podemos agregar a la cartera activos libres de riesgo (inversión a tasa libre de riesgo, bonos, cuentas bancarias, etc.) cuyas componentes estocásticas valen 0, así como sus saltos, y su componente determinística es rdt.
Habíamos visto que haciendo una deducción conveniente, se podía eliminar la componente estocástica en el modelo BS continuo, en el caso discontinuo hay 2 componentes estocásticas, la que se suma es el proceso de Poisson dq y que por lo general no puede ser eliminada, las componentes de salto del activo (depende de $X-1$) y de la opción (depende de $X-1$ y de $(X-1)^2$) impiden que exista una cartera libre de riesgo para opciones y subyacente, por lo tanto no podemos determinar el precio de la opción por la vía antes vista.

6.3.1. El caso de la cartera con $\sigma_G = 0$

Como antes, podemos eliminar la componente estocástica dz tomando otra vez una cantidad $\frac{\partial G}{\partial S}$ de activo. El caso de $\sigma_G = 0$ no implica, a diferencia del modelo clásico, una cartera libre de riesgo. Sin embargo, aunque la componente de salto no puede ser completamente eliminada, si se cancela el término de $X-1$:

$$\Pi = G - \frac{\partial G}{\partial S}S \qquad \Rightarrow \qquad d\Pi = dG - \frac{\partial G}{\partial S}dS$$

$$d\Pi = \frac{\partial G}{\partial S}(S(\mu_G - \lambda c_G)dt + S\sigma_G dz + Sdq_G) + \frac{\partial G}{\partial t}dt +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(S^2\sigma_G^2 dt + S^2(dq_G)^2) - \frac{\partial G}{\partial S}(S(\mu_G - \lambda c_G)dt + S\sigma_G dz + Sdq_G)$$

Nos queda:

$$d\Pi = \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(S^2\sigma_G^2 dt + S^2(dq_G)^2)$$

Observación: Notar que sólo "sobrevive" $(dq_G)^2$, por lo tanto, los saltos en esta cartera serán de la forma $(X-1)^2$, es decir positivos por lo tanto tendrán el mismo sentido.

6.4. El precio de un derivado

Construimos una cartera donde el único riesgo es la llegada de un hecho que haga variar sensiblemente el precio de la misma, lo cual ocurre de manera aislada y con baja frecuencia, de no producirse esta alteración, la tasa esperada de la cartera será r.

Para ello se puede armar reemplazando en la cartera, la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} + (r - \lambda c)\frac{\partial G}{\partial S}S - \frac{\partial G}{\partial \tau} - rG + \lambda E(G(SX,\tau) - G(S,\tau)) = 0 \qquad (1)$$

Para $\tau = T - t$ es el tiempo que resta hasta el vencimiento.

Y para una call europea, tenemos las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{cases} G(0,\tau) = 0 \\ \\ G(S,0) = \max\{0, S-K\} \end{cases}$$

Notar que si $\lambda = 0$ el esquema se reduce al modelo BS clásico, sin saltos.

Demostración: Veremos que la solución expresada es válida en el modelo con saltos de manera general, es decir, sin conocer la distribución de X.

Sean $X_0, X_1, X_2, ..., X_n$ v.a.i.i.d, tal que $X_0 = 1$ donde $X_i \sim X, \quad \forall i$, entonces, la solución de la ecuación es la siguiente:

$$G(S,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^i}{n!} E(C(SX_i e^{-\lambda\tau c}, \tau, K, \sigma^2, r))$$

Donde C es la función que cumple la ecuación de BS que ya hemos estudiado.
Sabiendo que

$$P_{X_i}(\lambda\tau) = \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^i}{i!}$$

es la función de densidad puntual de una distribución Poisson $\mathcal{P}(\lambda\tau)$, los X_i representan los saltos esperados, de esta forma, la ecuación con saltos viene dada como la esperanza de la solución de BS, con una variación en la valuación del activo. Ahora vemos porqué verifica la fórmula.
Definimos

$$V_i = SX_i e^{-\lambda\tau c}$$

reescribimos

$$G(S,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(\lambda\tau) E(C(SX_i e^{-\lambda\tau c}, \tau, K, \sigma^2, r))$$

y usando (1) comenzamos primero por hallar derivadas parciales:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial V_n}\frac{\partial V_n}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial V_n} X_n e^{-\lambda\tau c}$$

Y como P_i no depende de S:

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(\lambda\tau) E(\frac{\partial C}{\partial V_n} X_n e^{-\lambda\tau c}) \Rightarrow \quad S\frac{\partial G}{\partial S} = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(\lambda\tau) E(\frac{\partial C}{\partial V_n} V_n)$$

Lo mismo para la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(\lambda\tau) E(\frac{\partial^2 C}{\partial V_n^2}(X_n e^{-\lambda\tau c})^2) \Rightarrow \quad S^2\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(\lambda\tau) E(\frac{\partial^2 C}{\partial V_n^2} V_n^2)$$

Ahora hallar la derivada respecto de τ es más complicado, dado que es una variable de C, P_n y V_n:

$$P_0 = e^{-\lambda\tau} \Rightarrow \frac{\partial P_0}{\partial \tau} = -\lambda e^{-\lambda\tau}$$

Para el caso $i > 0$:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \tau} = \frac{-\lambda e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^i}{i!} + \frac{\lambda i e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^{i-1}}{i!} = -\lambda P_i + \lambda P_{i-1}$$

Luego, se sabe que $C(V_n(\tau), \tau, ...)$, usando la Regla de la Cadena, la derivada en este caso la notamos así:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial C}{\partial V_i}\frac{\partial V_i}{\partial \tau} + C'_\tau{}^{1} = -\frac{\partial C}{\partial V_i} S X_i \lambda c e^{-\lambda c \tau} + C'_\tau$$

Ahora si calculamos la derivada de G sobre τ:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = -\lambda \sum_{i=0}^{\infty} P_i E(C(V_i, \tau, ...)) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} P_{i-1} E(C(V_i, \tau, ...)) -$$

$$-\lambda c \sum_{i=0}^{\infty} P_i E(\frac{\partial C}{\partial V_i} V_i) + 2 \sum_{i=0}^{\infty} P_i E(C'_\tau) - \lambda G +$$

$$+\lambda \sum_{i=0}^{\infty} P_i E(C(V_{i+1}, \tau, ...)) - \lambda c S \frac{\partial G}{\partial S}$$

Y la esperanza del salto se puede escribir como:

$$E(G(SX, \tau)) = E(\sum_{i=0}^{\infty} P_i X E(C(V_i, \tau, ...))) = E(\sum_{i=0}^{\infty} P_i E(C(V_{i+1}, \tau, ...)))$$

La ecuación finalmente queda:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} P_i(\lambda\tau) E(\frac{\partial^2 C}{\partial V_i^2} V_i^2)}_{(1)} + \underbrace{r \sum_{i=0}^{\infty} P_i(\lambda\tau) E(\frac{\partial C}{\partial V_i} V_i)}_{(2)} - \underbrace{\lambda c S \frac{\partial G}{\partial S}}_{(3)} - \underbrace{rG}_{(4)} +$$

[1] El primer término es la derivada con respecto a τ de la primera variable de C, V_i, C'_τ es la derivada de C con respecto a su segunda variable τ

$$\underbrace{\lambda G}_{(5)} + \underbrace{\lambda c S \frac{\partial G}{\partial S}}_{(6)} - \underbrace{\lambda \sum_{i=0}^{\infty} P_i E(C(V_{i+1}, \tau, ...))}_{(7)} - \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} P_i E(C'_\tau)}_{(8)} =$$

$$= \underbrace{\lambda E(G(S,\tau))}_{(9)} - \underbrace{\lambda E(\sum_{i=0}^{\infty} P_i E(C(V_{i+1}, \tau, ...)))}_{(10)}$$

Observar que (3) y (6), (5) y (9) y (7) y (10) se cancelan; en (1), $\frac{1}{2}\sigma^2$ puede introducirse dentro de la esperanza, al igual que r en (2), mientras que (4) se puede escribir así:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i E(rC(V_i, \tau, ...))$$

Si ahora calculamos (1)+(2)+(4)+(8), y usando propiedades de la esperanza, obtenemos:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i E(\frac{1}{2}\sigma^2 V_i^2 \frac{\partial^2 C}{\partial V_i^2} + rV_i \frac{\partial C}{\partial V_i} - rC - C'_\tau)$$

Dado que C es solución de BS para sus variables, vale que:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V_i^2 \frac{\partial^2 C}{\partial V_i^2} + rV_i \frac{\partial C}{\partial V_i} - rC - C'_\tau = 0$$

Q.E.D

6.4.1. Soluciones para distribuciones particulares de X

Caso $X \equiv 0$

Este caso ilustra la posibilidad de un único salto, que podría provocar la ruina total (hacer que en cierto momento $t > 0$, $S_t \approx 0$). Dada su naturaleza, importan solamente los casos $n = 0$ y $n = 1$. Las X_i son potencias de $X \equiv 0$:

$$X_0 = 1 \qquad X_1 = 0, \qquad c = E(X - 1) = -1$$

La solución de la ecuación según la fórmula, es:

$$G(S,\tau) = e^{-\lambda\tau} E(C(Se^{\lambda\tau}, \tau, ...)) + \underbrace{P_1 E(C(0, ...))}_{=0} =$$

$$= E(e^{-\lambda\tau} C(Se^{\lambda\tau}, \tau, K, \sigma^2, r)) = e^{-\lambda\tau} C(Se^{\lambda\tau}, \tau, K, \sigma^2, r)$$

Porque a lo que le aplicamos E no depende de $X = 1$.
Ahora recordemos algunos conceptos que vimos en la fórmula tradicional de BS:

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \qquad d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

vamos a considerar d_1 y d_2 como funciones de $(S, \tau, K, \sigma^2, r)$ y aplicaremos estas funciones convenientemente:

$$d_1(Se^{\lambda\tau}, \tau, K, \sigma^2, r) = \frac{\ln(\frac{Se^{\lambda\tau}}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + \lambda\tau + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} =$$

$$= \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \lambda + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1(S, \tau, K, \sigma^2, r + \lambda)$$

Análogamente:

$$d_2(Se^{\lambda\tau}, \tau, K, \sigma^2, r) = d_2(S, \tau, K, \sigma^2, r + \lambda)$$

reescribimos ahora la fórmula:

$$e^{-\lambda\tau} C(Se^{\lambda\tau}, \tau, K, \sigma^2, r) =$$

$$= e^{\lambda\tau} Se^{\lambda\tau} N(d_1(Se^{\lambda\tau}, \tau, K, \sigma^2, r)) - e^{-\lambda\tau} Ke^{-\lambda\tau} N(d_2(Se^{\lambda\tau}, \tau, K, \sigma^2, r)) =$$

$$= SN(d_1(S, \tau, K, \sigma^2, r + \lambda)) - Ke^{(r+\lambda)\tau} N(d_2(S, \tau, K, \sigma^2, r + \lambda)) =$$

$$= C(S, \tau, K, \sigma^2, r + \lambda)$$

Así concluimos que el valor de una opción sobre un subyacente con riesgo de ruina total es igual al que daría la fórmula de BS con una tasa libre de riesgo $r+\lambda$, y viendo la fórmula de BS como función de r, notamos que es creciente, por lo tanto el valor en este caso será más alto ya que $\lambda > 0$, esto es razonable: a riesgo mayor, más ganancias.

Caso $X \sim LN(\mu, \sigma)$

Este caso se emplea mucho, ya que es razonable suponer que los saltos tienen dicha distribución.
Sabemos que

$$c = E(X-1) \Rightarrow c+1 = E(X) \Rightarrow \underbrace{\ln(c+1)}_{\gamma} = \ln(E(X))$$

, y también definimos

$$\delta^2 = V(\ln(X))$$

Ahora podemos considerar X_n como el producto de n lognormales:

$$X_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i = Y_1 \cdot Y_2 \cdot ... \cdot Y_n$$

entonces:

$$\ln(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i) \sim N(E(\sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i)), V(\sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i)))$$

por lo tanto, $X_n \sim LN$ y también se verifica que:

$$V(\ln(X_n)) = n\delta^2$$

Además

$$E(X_n) = \prod_{i=1}^{n} E(Y_i) = (c+1)^n = (e^{\gamma})^n = e^{n\gamma}$$

De esta manera, se define una volatilidad corregida por saltos,

$$\nu_n = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{\tau}$$

una tasa libre de riesgo también corregida,

$$r_n = r - c\lambda + \frac{n\delta}{\tau}$$

también una esperanza de saltos corregida,

$$\tilde{\lambda} = \lambda(1 + c)$$

Con todo esto, para el caso X lognormal, la solución será de la forma:

$$G(S,\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^i}{i!} E(C(SX_i)e^{-\lambda c\tau}, \tau, K, \sigma^2, r) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\tilde{\lambda}\tau}(\tilde{\lambda}\tau)^i}{i!} E(C(S, \tau, K, \nu_i, r_i))$$

De esta manera, el valor de la opción $G(S,\tau)$ es una suma pesada de los precios de las opciones, bajo la condición de una cierta cantidad de saltos en cada caso, para una distribución $\mathcal{P}(\tilde{\lambda}\tau)$.

Capítulo 7

Otras Aplicaciones

7.1. Introducción

Aquí veremos algunas aplicaciones extras del modelo de BS, el cálculo en primas bancarias, y la información que dan las derivadas delta y gamma que ya hemos visto en el Capítulo 4, ésta vez con una aplicación determinada para los proyectos de inversión, y por último la opción de abandono, cuando conviene abandonar una opción antes que ésta se haya ejecutado.
Entre las aplicaciones de la fórmula de BS, ajenas a la aplicación tradicional, destacó la experiencia de valuar empresas que aplicaron en México durante la última década del siglo XX, lo cual demuestra la actualidad y versatilidad de la fórmula que este trabajo estudia.

7.2. El uso para calcular primas

El Banco Santander de Madrid en abril de 1995 armó un grupo interdisciplinario entre los que hay varios matemáticos encargado de hacer previsiones y estimaciones sobre negocios futuros, de esta manera estudian aquellos riesgos que provocan cambios en los resultados materiales de las operaciones financieras.
Los modelos matemáticos para derivados financieros no intentan predecir precios futuros, sino establecer relaciones entre bonos, activos y letras de

cambio con los derivados.

Ejemplo Supongamos que una empresa A tiene que comprar una cantidad de activo S dentro de un año y quiere fijar el precio que va a pagar en un año el día de hoy.
¿El *precio justo* sería el precio futuro esperado?.
Respuesta: No porque sin ningún riesgo un intermediario B podría comprar la cantidad pedida de S hoy con un préstamo, almacenarla y entregarla dentro de un año: el *precio justo* sería que B cargue a la empresa A los gastos del costo del préstamo más el del almacenamiento, más una comisión. En realidad, no depende del precio futuro si no del tipo del préstamo.
Supongamos ahora que en realidad A quiere la *opción* de comprar cierta cantidad de activo S a un determinado precio al momento de vencimiento T (llamado también *strike*, que caracterizaremos con K), la opción sería: *si en un año el precio del bien es menor al strike, A compra en el mercado*. De esta manera B no debería comprar toda la cantidad hoy, ya que la empresa A podría comprar por su cuenta, en ese caso, B debería vender a un precio desfavorable en el futuro.
La idea para B es tener una estrategia de *Hedging* (o Gestión Dinámica) de S, de esta manera:
Sea $K = S_T$ el precio del bien dentro de un año,

$$\begin{cases} E > K, \ B \textit{ se queda con el } 100\,\% \textit{ del bien} \\ E < K, \ A \textit{ le compra el total a } B \end{cases}$$

La estrategia puede plantearse así: sea $\beta(t)$ la cantidad de S que tiene B en el momento t, la cual es proporcional a la probabilidad de tener que quedarse con el total de S al final del ejercicio.

En cada momento B debe observar el precio del activo S:

$$\beta(t) = \begin{cases} *Si\ sube\ en\ el\ momento\ t,\ B\ compra\ mas\ activo \\ \ ya\ que\ es\ probable\ que\ venda\ todo\ al\ final \\ *Si\ baja\ en\ el\ momento\ t,\ B\ debe \\ \ deshacerse\ de\ parte\ del\ deposito \end{cases}$$

Como B tiene que comprar activo S "caro" y venderlo "barato", esta estrategia de *hedging* siempre le cuesta dinero, la idea es cargar a la empresa con este coste por el derecho de tener la opción, esta carga se denomina la $Prima$ de la Opción.
Black Scholes determina un precio por la prima y formaliza la estrategia, el detalle relevante es que la prima no depende del precio futuro del bien, sino del tipo de préstamo y de la volatilidad en el precio de S.
Ahora planteemos la fórmula de la prima Pr, sabiendo que S_t es el precio del bien y $\beta(t)$ la proporción almacenada ambos en el momento t, suponemos que los gastos de almacenamiento y el tipo de préstamo son 0 para simplificar cuentas:

$$Pr = \beta(0)S_0 + \sum_{i=\Delta t}^{T}(\beta(i) - \beta(i-\Delta t))S_i - KI_{\{S_T>K\}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{T-\Delta t} \beta(i)(S_{i+\Delta t} - S_{it}) + (S_T - K)I_{\{S_T>K\}}$$

Tomamos intervalos de tiempo Δt tales que existe un natural n para el que $T = n\Delta t$; I es la función indicadora[1].
Para B es conveniente que al cumplirse el año, se cumpla $\beta(T) = I_{\{S_T>E\}}$, es decir, que disponga de activo S dado que el precio en ese momento, es superior al strike, por lo tanto A va a comprarle a B.
Considerando que la prima es una constante, tomo esperanza a ambos

[1]

$$I_{\{S_T>K\}} = \begin{cases} 1\ si\ S_T > K \\ 0\ sino \end{cases}$$

lados:

$$Pr(T) = \sum_{i=0}^{T-\Delta t} \beta(i) E(S_{i+\Delta t} - S_{it}) + E((S_T - K) I_{\{S_T > K\}})$$

también tengamos en cuenta que la prima en función del tiempo t, se puede calcular así:

$$Pr(t) = E((S_t - K)^+)$$

Ahora si consideramos la variable tiempo t, se puede definir una estrategia de hedging para la prima en cualquier tiempo t, la fórmula de $Feynman - Kac$ (Ver **4.5**) establece una relación entre ecuaciones diferenciales estocásticas y esperanzas:

$$\beta(t) = \frac{\partial Pr_t}{\partial S_t}$$

7.2.1. Los modelos Delta-Gamma

La fórmula de Black Scholes inicialmente utilizada para la valoración de opciones financieras se ha aplicado con éxito en proyectos de inversión real.
El modelo Delta-Gamma, inspirado en la fórmula BS se utiliza para concederle al inversor la información necesaria para tomar decisiones en los proyectos de inversión del sector real.
Según el Doctor Juan Mascareñas [2] la posibilidad de realizar un proyecto de inversión se parece mucho a la opción para comprar una acción; ambos implican el derecho, pero no la obligación de adquirir un activo pagando una suma de dinero en cierto momento.
La importancia que ha ido adquiriendo el análisis de opciones reside en que se considera que el flujo de caja descontado basado en proyecciones a futuro asume que las opciones tienen un comportamiento predeterminado que prescinde de los cambios posteriores, esta es la metodología más utilizada en el análisis de finanzas para proyectos de inversión.

[2]Mascareñas, Juan. (1998). Las Decisiones de Inversión como Opciones Reales: Un enfoque conceptual. Documento de Trabajo nº 9805. Universidad Complutense. Madrid, España.

Un problema que se presenta en el análisis de proyectos, es que el modelo podría sobrevalorarlos (Ver más adelante, en **7.4** donde se detalla un problema similar en la valuación de empresas), para eso los estudios sobre opciones han desarrollado métodos para minimizar este defecto y dar así una información confiable al inversor.
Recordemos que:

$$C = SN(d_1) - Ie^{-rT}N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{I}) + (r + 1/2\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

La aplicación de BS para el caso de las inversiones, considera ahora este papel para las variables:

Variable	Valuación de opciones	Proyecto
S	Precio del activo subyacente	Valor presente del proyecto
I	Precio del ejercicio	Monto de la Inversión
r	Tasa de interés	Valor del dinero en el tiempo
σ	Volatilidad del precio del activo	Volatilidad del flujo de caja del proyecto
T	Tiempo hasta el vencimiento	Tiempo que se puede diferir la decisión de inversión

El flujo de caja descontado está representado por el valor presente del proyecto S, la metodología del flujo de caja plantea la decisión como el problema de "ahora o nunca", si S es menor al monto de inversión requerido (I), entonces el valor presente neto, del proyecto $VPN = S - I$ será negativo, en este caso, la decisión correcta sería rechazar el proyecto, caso contrario, $VPN > 0$ ya que $S > I$, entonces se avanza con el proyecto de inversión.

Este enfoque del "ahora o nunca", nos permite desechar proyectos que, en principio, no son rentables, pero como la teoría de flujos de caja descontado no toma consideración sobre cambios futuros, el método va a ignorar condiciones posteriores que podría hacer rentable el proyecto, como los cambios en los costos o en la volatilidad de los ingresos.
Los modelos de análisis deben hacerse más flexibles ya que en estos días, una inversión no se hace de una vez, sino que puede diferirse en el tiempo, también es importante la volatilidad de los bienes que el proyecto produzca, estos factores pueden hacer más rentable en el futuro a un proyecto que sería rechazado con el modelo tradicional si tiene baja rentabilidad actual.
Lo interesante de valorar a un proyecto como una opción es que el modelo permite estudiar la incertidumbre del entorno que podría favorecer al proyecto y así tomar la opción de realizar la inversión. Con el modelo de BS utilizamos la volatilidad como el factor de incertidumbre futura y el tiempo que podemos diferir la inversión.

El marco metodológico

Consideremos ahora el VPN_q como sugiere Timothy Luehrmann cuya fórmula incluye la expresión de la tasa libre de riesgo a la cual se invierten los activos no utilizados en el proyecto; el VPN_q es una relación costo-beneficio "más fina" entre los rendimientos del proyecto y la inversión inicial requerida, consideremos que la relación costo-beneficio tradicional se basa en que el valor de la inversión se descuenta por el tiempo de vida de la opción. Veamos un ejemplo sencillo:
Sea un proyecto que requiere una inversión de $I = \$100$, los flujos de caja descontados a hoy son de $S = \$90 \Rightarrow VPN = -\$10$, según la relación costo-beneficio tradicional, la proporción ρ sería

$$\rho = \frac{Valor\ Presente\ de\ los\ flujos\ del\ proyecto}{Monto\ de\ la\ inversion} = \frac{S}{I} = \frac{90}{100} = 0{,}9$$

Por lo que puede verse la lógica costo-beneficio es muy simple, ya que se plantean estas situaciones:

$$\rho \begin{cases} \geq 1 \Rightarrow VPN \geq 0 \Rightarrow \textit{se acepta el proyecto} \\ \leq 1 \Rightarrow \ VPN \leq 0 \Rightarrow \textit{se rechaza el proyecto} \end{cases}$$

Con los datos obtenidos, este proyecto debería rechazarse. Supongamos ahora más condiciones:

- El proyecto puede ejecutarse dentro de 3 años: $T = 3$ años
- La volatilidad de sus ingresos es de un 40 %: $\sigma = 0{,}4$
- Los recursos que se invertirían en el proyecto pueden fijarse a una tasa libre de riesgo del 5 %: $r = 5\,\%$

Insertando estas variables en la fórmula de BS:

$$d_1 = 15,13469, \qquad d_2 = 11,5346 \Rightarrow C = \$25{,}86 > -\$10 = VPN$$

El valor que obtuvimos considerando las condiciones es muy superior al obtenido al principio, ahora si este proyecto conviene ser aceptado, aunque hay que esperar 3 años a que ”rinda sus frutos” ya que si bien actualmente no es rentable, cumplido ese plazo hay altas probabilidades que deje ganancias.
Esta situación se produce al considerar el tiempo de espera T en la valoración del proyecto debe bajar el valor de la inversión a futuro, ya que los recursos no invertidos en el proyecto, se invierten a la tasa libra de riesgo.
Ahora planteemos la fórmula de VPN_q [3]

$$VPN_q = \frac{Valor\ Presente\ de\ los\ flujos\ del\ proyecto}{(Monto\ de\ la\ inversion)e^{-rT}} =$$

$$= \frac{S}{Ie^{-rT}} = \frac{90}{86} = 1{,}04$$

[3] La metodología de estas proporciones fue introducida por Timothy Luehrman detallada en su artículo ”Investment Opportunities as Real Options: Getting Started on the Numbers” publicado en el HBR en Julio de 1998.

Este resultado es coherente con los datos aportados por la fórmula de BS, quiere decir que es conveniente esperar para tomar la decisión hasta que mejoren las condiciones, y así evaluar mejor el impacto en la variación del precio de la opción en el proyecto, así como la volatilidad en el mismo.

El Sistema de cuadrantes para medir el impacto de las opciones en los proyectos de inversión

Con lo visto anteriormente, volcamos los datos en una tabla[4] para tener un plan de acción

Se ejerce la opción	No se ejerce la opción
(1)$VPN > 0$ y $VPN_q > 1$ Se puede ejercer la opción ahora	(3) $VPN < 0$ y $VPN_q < 1$
(2)$VPN < 0$ y $VPN_q > 1$ y σ alta, conviene mantener la opción y revaluarla con el tiempo hasta que se verifique $VPN > 0$	(4) $VPN < 0$ y $VPN_q < 1$

Con este esquema podemos descartar opciones que, aunque en principio sean rentables, dicha rentabilidad es insignificante a futuro si el entorno se hace desfavorable, así como para esperar en aquellos casos con baja rentabilidad en el inicio, pero con condiciones para mejorar en el futuro.

La Sensibilidad a variaciones en el valor presente del modelo Delta-Gamma

El δ de una opción según la fórmula de BS se determina así

$$\delta = N(d_1), \quad d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{I}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

En la fórmula de BS, a mayor volatilidad tenemos mayor δ, por lo tanto, en opciones de compra existe una relación directa entre δ y el valor del

[4] Adaptado de Timothy A. Luehrman "Capital Projects as Real Options: An Introduction", HBS 1995.

activo subyacente S.
También podemos decir que δ es la probabilidad de cambio de precio del activo subyacente ya que según Black-Scholes $S.N(d_1)$ es el valor esperado del activo subyacente durante la vida de la opción.
Este esquema nos permite saber como los cambios futuros en el valor del proyecto pueden afectar elprecio en la opción, en el ejemplo anterior el valor de la opción era de \$25,86 y $\delta = 65{,}94\,\%$, esto implica que un cambio de \$1 en el valor presente del proyecto provocaría un cambio positivo de \$0,6594 en la prima de nuestra opción de compra.
El δ es muy utilizado en las finanzas, según el esquema de Luehrmann, la información que nos da δ es la siguiente:

- $\delta = 100\,\%$ El valor de la opción cambia de la misma manera que el activo subyacente o valor presente del proyecto y probablemente será ejercida.

- $\delta = 50\,\%$ Un cambio en el precio del activo subyacente o valor presente del proyecto causa la mitad de cambio en el precio de la opción, la probabilidad de ejercer o abandonar son exactamente las mismas.

- $\delta = 0\,\%$ La opción no presenta ninguna sensibilidad a cambios de valor del activo subyacente por consiguiente es muy poco probable ejercer la opción.

El defecto principal de δ es que no es estable a través del tiempo, no podemos aceptar o desechar una opción según el valor del δ ya que la volatilidad cambia durante el tiempo de vigencia de la opción, la sensibilidad del δ se relaciona con el valor del activo subyacente S. Para resolver uno, debemos saber el valor del otro como vemos en la fórmula, para solucionar esto, se introduce la Gamma (γ), así definida:

$$\gamma = \frac{N(d_1)}{S\sigma\sqrt{t}}$$

Para nuestro ejemplo, teníamos $\delta = 0{,}6594\,\%$, calculamos $\gamma = 0{,}0106\,\%$ entonces si el valor presente del proyecto se incrementa en \$1, el δ subiría

a: $\delta = 0{,}6594 + 1 \times 0{,}0106 \cong 0{,}699$ lo que produce un cambio de \$0,699 en el precio de la prima de la opción de compra por cada \$1 que aumente el valor presente del proyecto.
Con γ se deben leer estos datos:

- $\gamma < 1\,\%$ demuestra poca sensibilidad del delta a cambios en el precio del activo subyacente

- $1\,\% \leq \gamma \leq 10\,\%$ se considera que es un valor moderado

- $\gamma > 10\,\%$ se considera un valor "agresivo" de γ ya que tiene alta sensibilidad al δ, y por ende, al precio del subyacente S.

Ahora podemos reescribir el sistema de cuadrantes para proyectos de inversión según el modelo Delta-Gamma:

Se ejerce la opción	No se ejerce la opción
(1)$VPN > 0$ y $VPN_q > 1$ Se puede ejercer la opción ahora, o esperar un poco. $\delta \approx 100\,\%$ y $\gamma > 10\,\%$	(3) $VPN < 0$ y $VPN_q < 1$ y σ alta, se recomienda administración proactiva, si no mejora, se descarta, $\delta < 50\,\%$ y $\gamma > 1\,\%$
(2)$VPN < 0$ y $VPN_q > 1$ y σ alta, conviene mantener la opción y revaluarla con el tiempo hasta que se verifique (1). $\delta > 50\,\%$ y $\gamma > 1\,\%$	(4) $VPN < 0$ y $VPN_q < 1$, σ baja, $\delta < 50\,\%$ y $\gamma < 1\,\%$

En conclusión, los factores Delta-Gamma complementan la metodología preexistente optimizándola de tal manera que logran una perspectiva mejor para el inversor a la hora de decidir ante un proyecto. Además, la incorporación de la volatilidad en el esquema permite "darle una chance" al proyecto de mejorar su rentabilidad, ya que si estamos en la situación

(3), podemos esperar un tiempo prudencial (tiempo en que se puede diferir la decisión) hasta llegar a una situación como (1) ó (2).

7.3. La opción de abandono

Vamos a ver el siguiente ejemplo sugerido por el Dr. Jorge del Aguila, del Instituto Argentino de Ejecutivos en Finanzas (IAEF); supongamos que una empresa X de transporte fluvial está interesada en comprar un *ferry* de alta velocidad para realizar viajes entre Tigre y La Plata con la Capital Federal. La empresa tiene 2 cotizaciones finales, una ofrece un barco europeo de marca internacionalmente conocida a \$7 millones, la otra es de un barco proveniente de China de marca desconocida a $\$6,5$ millones.
Los especialistas en finanzas estiman una probabilidad del 40 % de que la demanda de servicios sea alta, el valor esperado del proyecto según las tablas **7.1** y **7.2** será:

$$VE(PVFCF) = 0,4{,}8,5 + 0,6{,}5,45 = 6,67$$

en condiciones así, el valor actual neto del proyecto (VAN) será: $(\$6,67 - \$7)$ millones $= -\$0,33$ millones negativo en el caso del barco europeo y de $(\$6,67 - \$6,5)$ millones $= \$0,17$ millones positivo en el caso del barco oriental.
Aunque se podría ganar más con el barco chino, su calidad no está asegurada, a diferencia del proveniente de Europa con el que se podría recuperar gran parte de lo invertido, y esperar hasta el segundo año para considerar las ganancias. La empresa tratará de analizar la factibilidad del proyecto europeo
Observemos los escenarios posibles en función de la demanda:

Tabla 7.1: Escenario con demanda alta (40 %)

Detalle	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Valor Continuo
Ingresos por Ventas		5000	5600	6320	7200	8272	
Costos variables		-2500	-2800	-3160	-3600	-4100	
Costos fijos		-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	
EBIT		1500	1800	2160	2600	3172	
Depreciación		500	500	500	500	500	
Imp. a las Ganancias (35 %)		-525	-630	-756	-910	-1110	
Capex		-30	-40	-50	-55	-60	
Variación Cap. de Trabajo		-20	-30	-40	-40	-40	
Ingresos/ Egresos varios		-275	-214	-142	-77	-5	
Free Cash Flow		**1150**	**1386**	**1672**	**2018**	**2457**	**8000**
Factor de descuento(15 %)	1,2	1,3	1,5	1,7	2	2	
PV		1000	1048	1099	1154	1222	3977
PV Free Cash Flow	9500	**8500**	7452	6353	5199	3977	0

Tabla 7.2: Escenario con demanda baja (60 %)

Detalle	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Valor Continuo
PV		-450	750	900	900	900	2000
PV Free Cash Flow	5000	**5450**	4700	3800	2900	2000	

Si el negocio anda mal el primer año, la empresa podrá vender el barco a $\$6,1$ millones en vez de quedarse con un negocio que sólo costará $\$4,5$.

En términos de opciones, la compañía tiene una acción que vale 6,8 millones y en un año puede valer entre 5,45 y 8,5 millones y una opción de venta (o de **abandono**) con un precio de ejercicio de 6,1 millones con un año de plazo.
Para hacer éste análisis primero debemos calcular el valor del negocio hoy, al valor sin flexibilidad (calculado con DCF) el valor del *put* (el valor de la opción real de abandono), dicho valor se puede calcular mediante el modelo binomial, o usando Black-Scholes, y los datos son los siguientes:

1. Precio del ejercicio: \$6.1 millones (K)
2. Tasa de interés libre de riesgo anual: 7 % (r)
3. Precio del activo subyacente: \$6.8 millones (S)
4. Tiempo de expiración de la opción: 1 año (T)
5. Volatilidad (es dato): 0.2235 (σ^2)

Ahora usando la fórmula de BS obtenemos:

$$d_1 = \frac{ln(6{,}8/6{,}1) + 0{,}07 \times 1}{0{,}2235\sqrt{1}} + 1/2 \times 0{,}2235\sqrt{1} \cong 0{,}9108$$

$$d_2 = 0{,}9108 - 0{,}2235\sqrt{1} = 0{,}6873$$

$$p = 6{,}1e^{0{,}07\times 1}N(-0{,}6873) - 6{,}5N(-0{,}9108) = 6{,}1e^{0{,}07\times 1}0{,}245 - 6{,}50{,}18 = 0{,}17$$

Como el valor de p está en millones: $p =$ \$170000 siendo éste el valor de la opción de abandono.

7.4. La Experiencia de México

7.4.1. Black-Scholes para valuar empresas

Entre los años 1991 y 2000, se hizo una investigación en México que muestra la aplicación empírica de Black Scholes a un grupo de empresas

que cotizan en la Bolsa de Comercio de ese país.
Si bien la ecuación de Black Scholes surge de la valuación de opciones, también se la ha utilizado para valuar empresas como ocurre en este caso utilizando información pública. El método de valuación de empresas más utilizado es el llamado Modelo de Flujo de Efectivo Disponible, no suele usarse Black Scholes por su complejidad de aplicación, y también porque se lo considera únicamente valido para valuar opciones, cuesta comprender su lógica en el análisis empresarial.
El razonamiento de Robert Merton (Premio nobel de Economía, 1997) explica este análisis:
Como opción de compra se toma la deuda de una empresa, de esta manera a la fecha de vencimiento de la deuda puede ocurrir alguna de las siguientes situaciones:

- Si el valor de la empresa es mayor a la deuda los acreedores no ejercen su opción,

- Caso contrario, los acreedores ejercen su opción de compra y adquieren la empresa.

Se asevera también que las acciones comunes pueden ser vistas como opciones de compra que retienen los activos de una empresa para pagar su deuda. Aún así, el temor que existe en aplicar este método a la valuación de empresas, más allá de su mencionada complejidad, es la posibilidad que altere el real valor de las empresas, en esta investigación justamente se trata de encontrar cuáles serían las razones que provocarían esta perturbación y si éstas residen en el modelo, o hay motivos externos como el comportamiento de las variables del entorno económico, o las particularidades del sector, etc.
Algunos analistas señalaron algunas virtudes así como fallas en éste método:

1. Destaca por la escasa diferencia entre el valor de mercado de la opción y el precio de la misma calculado con el modelo.

2. Tiene un sesgo estadístico menor que otros modelos, según Abreu en sus investigaciones (1999) es un modelo eficiente.

3. Sin embargo una debilidad del modelo es que podría sobrestimar los valores dado que supone la distribución normal de los rendimientos de los valores, así como la estimación estadística de la volatilidad está sujeta a errores.

Se analizó también la aplicación del modelo para evaluar inversiones a largo plazo de la empresa, varios investigadores concluyeron que minimiza los riesgos y optimiza las oportunidades. Así, la opción no necesariamente se puede ejercer en la fecha de vencimiento, sino en el momento más conveniente para invertir. De esta manera, valorar una inversión usando opciones reales (como abandono, retraso, cambio en el uso de activos para flexibilizar el análisis, etc.) equivale a valorar el proyecto utilizando escenarios alternativos con probabilidades.
Con todo, éste modelo ha sido considerado más confiable y completo que otros, como los de Valor en Libros, Valor en Mercado, Precio-Beneficio, etc. Porque el valor de los activos operativos de una empresa se puede considerar semejante al precio de la acción, el tiempo que tarda la empresa en tomar una decisión es semejante al tiempo de vencimiento de la opción de compra, la incertidumbre acerca del valor de los activos operativos, se puede estimar mediante la varianza de los retornos en acción.
Al tratar de minimizar los defectos del modelo, surgieron versiones corregidas que por lo general tienen una alta complejidad para su aplicación, por ejemplo la de Mascareñas en el año 2000 que calcula el valor de la empresa y la emisión de bonos especiales que sea equivalente a todas las emisiones de deuda que actualmente tenga la empresa utilizando la media ponderada de los vencimientos de flujos de caja.

7.4.2. El análisis contingente

Este análisis se utiliza para determinar el precio de un valor cuyo resultado depende de los precios de otros valores y nace de la fórmula de

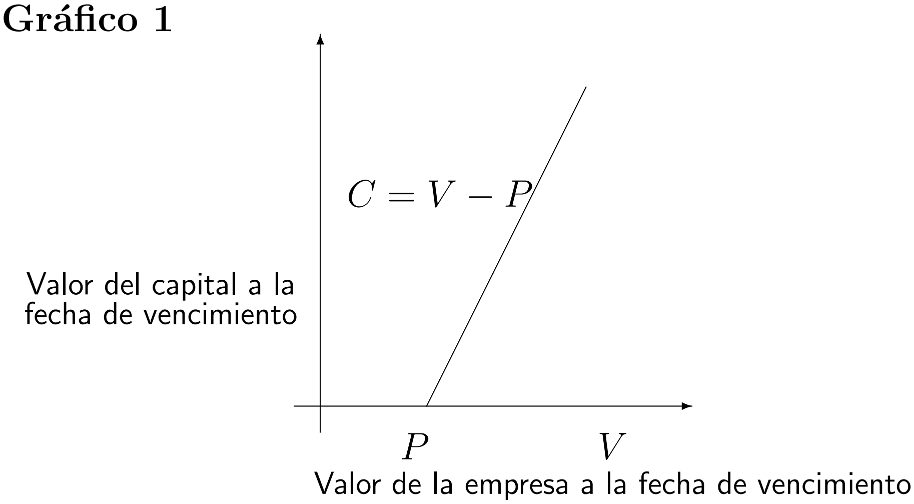
Black-Scholes. Según Merton, las deudas corporativas se pueden considerar combinaciones simples de contratos de opciones, y así establecer el precio de las acciones.

Ejemplo: Pasivos corporativos como opciones: Consideremos una empresa que tiene sólo 2 fuentes de financiamiento: Capital (C) y una deuda cupón cero (D) (estos títulos no pagan intereses en toda su vida, sino en el momento que se amortiza el capital) de esta manera el capital no percibe dividendos y la empresa no puede emitir nuevos valores además de la deuda pendiente. En síntesis el valor de la empresa (V) viene dado como:

$$V = D + C$$

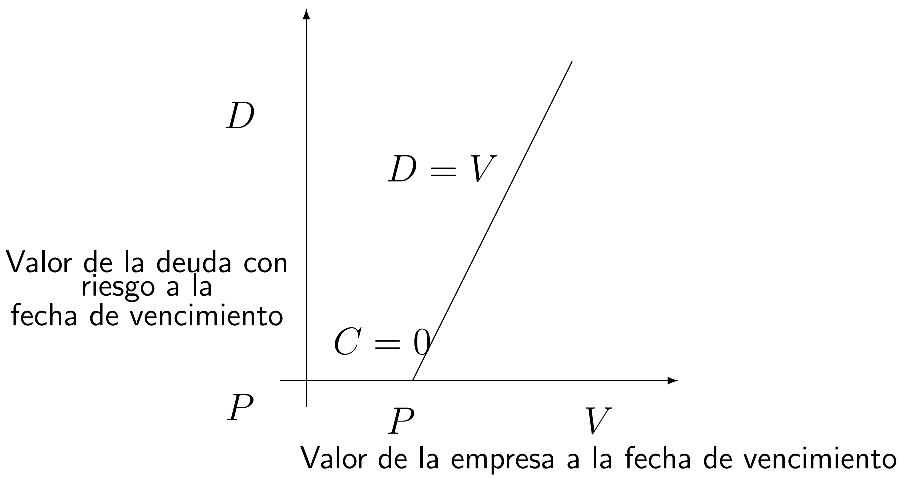
Ahora consideremos P como el valor del ejercicio, la situación, gráficamente, es la siguiente:

Gráfico 1



En el Gráfico 1 vemos que si a la fecha de vencimiento de la deuda es mayor al principal, $V > P$ entonces la deuda puede ser pagada, $D = P$ y el capital será $V - P$.

Gráfico 2



En el Gráfico 2 observamos que si a la fecha de vencimiento el valor de la empresa es menor al principal, $V < P$ entonces el capital puede perder su valor, $C = 0$, y es mejor entregar la empresa a los acreedores que pagar la deuda, en este caso vale $D = V$.

El valor de la empresa

Según Merton el activo subyacente sobre el que son suscritas las deudas corporativas (recordemos que se las considera como opciones), la deuda principal P es el precio del ejercicio. Cuando vence la deuda es la fecha en que expira la opción. De esta forma, las variables de la fórmula de Black Scholes se toman así:

Variable	Valuación de opciones	Valuación de empresas
C	Precio de la opción	Valor de la empresa
S	Precio del activo subyacente	Valor presente de los flujos de efectivo
P	Precio del ejercicio	Valor futuro de la deuda
r	Tasa de interés	Tasa libre de riesgo
σ	Volatilidad del precio del activo	Volatilidad de los flujos de efectivos o de las acciones
T	Tiempo hasta el vencimiento	Tiempo de la proyección

La experiencia en México

- C = Valor de la empresa.
- S = Valor actual de los activos a 1991 = U$S 1971 millones.
- r = Tasa libre de riesgo a 28 días = 12 %.
- P = Valor actual del pasivo = U$S 625 millones.
- σ = Desviación estándar de la tasa anual de rendimiento de la acción, o volatilidad de la acción = 15 %.
- T = Vencimiento de la acción = 3 años (o sea, a 1994).

El valor de la opción de compra de la empresa a 1991 calculado con este modelo fue de U$S 1553, como el capital contable a la fecha de la venta era de U$S 1346 millones $S - P$, el valor de la opción de compra resultó mayor en U$S 187 mill., con esto se llegó a la conclusión que el valor de la opción calculado con este modelo no depende del rendimiento esperado de la inversión, así también, el valor resultante de AHMSA representaba solamente el 10 % de su capital confiable, o sea, muy por debajo de lo que realmente valía la empresa.

Tiempo después se hizo otra investigación; en 1998 notaron que el trabajo realizado en 1994 era muy estático, sólo tomaba los datos de un solo año por lo que el potencial de crecimiento de la compañía era ignorado, tomaba el valor actual del pasivo, en lugar de tomar el pasivo en el vencimiento, tomando así un pasivo más bajo. Con estos detalles en cuenta, se modificaron los parámetros:

- C = Valor de la opción de compra de AHMSA.
- S = Valor actual de los flujos futuros reales = \$ 25.391.471.
- r = Cetes a 91 días.
- X = Valor futuro de la deuda como bono cupón cero usando una tasa de 51,21 % =\$ 62.290.000.
- σ = Volatilidad del precio de la acción = 31,57 %.
- T = Período de la proyección = 7 años.

Así se obtuvo después de aplicar el modelo:

$$C = \frac{\$15{,}170{,}000}{388375} = \$39{,}06$$

donde el denominador es en número de acciones; este valor supera al que se obtuvo en diciembre de 1996 que era de \$ 16,50. Esto indica que tenemos una sobre valuación de la acción.

7.4.3. Ventajas y Desventajas del modelo

Ventajas	Desventajas
*Permite introducir un factor de riesgo en la valuación coherente con las características del mercado	*Al calcular el valor a largo plazo, no conviene suponer varianza y dividendos constantes
*Es útil para valuar empresas con alto apalancamiento	*Para empresas de bajo apalancamiento no es un modelo significativo
*Es altamente volátil, lo que hace al modelo altamente aplicable en ciertos mercados	*Tiene una complejidad que lo hace difícil de comprender

7.4.4. Variables del modelo para valuar empresas

- C = Valor de la empresa (en miles de pesos).
- S = Valor actual de los activos (en miles de pesos).
- X = Valor actual del pasivo (en miles de pesos).

- r = Tasa de interés libre de riesgo anual Cetes a 28 días (en %).
- σ = Volatilidad de la acción (en %).
- T = Tiempo de vencimiento (Vto. de la deuda).
- N(d_t) = Función de densidad bajo la curva normal, N(0,1).

Este modelo considera al pasivo como un bono cupón cero, por ello, no se toma el valor del pasivo actual, sino el valor futuro usando una tasa de costo de pasivo para cada empresa, el plazo de vencimiento se toma de 3 años, lo cual se ajusta en este caso a la economía mexicana, ya que las empresas de ese país se endeudan a mediano plazo, infrecuentemente

se endeudan a largo plazo.
Aplicando la fórmula del interés compuesto:

$$M = C(1+i)^n$$

donde M representa el valor del pasivo a futuro, C es el valor actual de la deuda, i es el costo del pasivo y n representa el plazo de vencimiento medido en años.
La tasa libre de riesgo se calcula así:

$$r = \frac{1 + Tasa\ nominal\ de\ Cetes}{1 + Tasa\ de\ Inflacion} - 1$$

Y la fórmula de Black Scholes:

$$C = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r + 1/2\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

, y

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

7.4.5. Características de la muestra

Se obtuvieron datos de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) acerca de 71 empresas que allí cotizan, también se obtuvo información de bancos proveniente de la Comisión Nacional Bancaria y Valores considerando los cambios en la economía, se tomaron datos anuales y el análisis se tomó como período de estudio desde 1991 hasta 2000, para hacer un análisis ordenado, se clasificó las empresas por sectores.

Aplicación de Black Scholes en la muestra

Usando el modelo explicado en **7.4**, se calculó el valor de las empresas tomando los datos de variables financieras de los boletines publicados

anualmente por la BMV. Lo que se descubrió usando el modelo es que Black Scholes suele arrojar valores más altos que el precio de mercado, lo cual puede tomarse como una sobre valuación de la empresa, esto se debe a que el modelo considera entre sus variables el valor actual del activo, que en el caso de estas empresas suele ser muy grande, también la volatilidad influye, México es considerado un país financieramente inestable (recordemos el "Efecto Tequila", la crisis financiera que tuvo influencia en la economía mundial en 1995) así que como el riesgo suele ser muy alto, los valores resultantes del modelo serán elevados, el apalancamiento si es considerado en el modelo también afecta la valuación, ya que aquellas empresas con alto apalancamiento transfieren el valor del acreedor al accionista.
Los resultados arrojados según el rubro, fueron los siguientes:

Sector	Correlación Black Scholes / Valor de mercado
Alimentos, Bebida y Tabaco	0,6774
Comercio	0,5468
Comunicación y Transportes	0,5099
Construcción	0,0055
Controladoras	-0,3084
Metalúrgica, Minería y Siderurgia	0,7196
Química y Celulosa	0,4392
Servicios Financieros	0,6291
Otros servicios	0,7185

Aquellos sectores que muestran una correlación superior al 50 % ($> 0,50$) indicarían que Black Scholes es un buen modelo para valuar esos sectores. Por el contrario, donde la correlación es inferior al 50 %, éste modelo no sería aconsejable, para valuar las empresas de ese sector.

La prueba de hipótesis

La investigación se hizo en base a una hipótesis,
H_1: Existe una diferencia significativa entre los valores calculados para empresas que cotizan en la Bolsa de Valores de México entre 1991 y 2000 con Black Scholes y el precio de mercado de las mismas para el mismo período.
También se enuncia la hipótesis nula:
H_0: La media de los valores calculados por Black Scholes no es diferente a la media de los valores de mercado, de las empresas de la muestra.

Se aplicó la prueba t de diferencia de muestras con un 95 % de confianza, obteniendo los siguientes resultados:

Sector	t calculada	Valor crítico de t	Decisión estadística
Alimentos, Bebida y Tabaco	5,16	1.8331	Se rechaza H_0
Comercio	0,462	1.8331	No se puede rechazar H_0
Comunicación y Transportes	-0,733	1.8331	No se puede rechazar H_0
Construcción	4.797	1.8331	Se rechaza H_0
Controladoras	4,623	1.8331	Se rechaza H_0
Metalúrgica, Minería y Siderurgia	13,68	1.8331	Se rechaza H_0
Química y Celulosa	-1,88	1.8331	Se rechaza H_0
Servicios Financieros	7,68	2.35	Se rechaza H_0
Otros servicios	1,67	2.35	No se puede rechazar H_0

El cuadro demuestra que para 6 sectores el modelo de Black Scholes arroja resultados diferentes a los valores de mercado, y para otros 3 los valores de mercado son altos y equiparables a los de Black Scholes.
En el caso de AHMSA, donde el modelo de Black Scholes arrojó un valor

por acción de \$39,06 contra los \$16,50 del precio de mercado, se pensaba que el error surgió por no considerar el gran potencial de utilidades que tenía esta empresa, sin embargo AHMSA se declaró en suspensión de pagos en 1998, por lo cual, se deduce que Black Scholes sobre estimó la valuación de AHMSA.
La correlación existente en 6 de los 9 rubros de empresas entre BS y los valores de mercado, indica que el modelo es adecuado para valuar empresas, sin que esto sea contundente.
Una característica que destaca del modelo es que privilegia el valor de la empresa cuando el riesgo es elevado. Por lo tanto hay que tener cuidado al aplicar este modelo considerando el apalancamiento y la inversión fija de cada empresa, ya que estas variables afectan el análisis.

BIBLIOGRAFIA

- Margalef Roig, Juan; Miret Artes, Salvador. ”*Cálculo estocástico aplicado a las finanzas: Precio de las opciones según el modelo Black Scholes Merton y algunas generalizaciones*”, Instituto de Matemáticas y Física Fundamental (IMAFF), Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC), Madrid, 2001.

- Carrillo Menéndez, Santiago. ”*Más Allá De Black Scholes*”, Doctorado en Finanzas, Valencia, 2002.

- Kampel, Guido. ”*Derivados: Modelos Continuos y Discontinuos*”, Tesis de Licenciatura, Buenos Aires, 2002.

- Luehrmann. ”*Análisis de Opciones Reales: Un enfoque Delta Gamma para la Evaluación de Proyectos de Inversión Real*”, 2004.

- Wilmott, Paul; Howison, Sam; Dewynne, Jeff. ”*The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*”. Cambridge University Press, 1995

- López Dumrauf, Guillermo. ”*Opciones Reales*”. Buenos Aires, 2003.

- Saavegra García, María Luisa. ”*Aplicación Empírica del Modelo de Black y Scholes en México: 1991−2000*”,UNAM, México DF, 2005.

- Carmona, René; Durrleman, Valdo. ”*Generalizing Black-Scholes formula to multivariate contingent*”, Department of Operations Research and Financial Engineering, Princeton University, Princeton, 1995.

- Evans,Lawrence C. ”*An introduction to Stochastic Differential Equations version 1.2*”, UC Berkeley, 1998

- Armerin,Fredrik. ”*Stochastic Volatility: A Gentle Introduction*”, Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden

- Kelome, Djivede; Swiech, Andrzej. "*Viscosity Solutions of Infinite Dimensional BLACK-SCHOLES-BARENBLATT Equation*", School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, 2000
- Meyer, Gunter. "*The Black Scholes Barenblatt Equation for Options with Uncertain Volatility and its Application to Static Hedging*",School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, 2004
- Bouchouev, Ilia; Isakov, Victor. "*Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in finantial markets*", Wichita State University-Koch Industries, 1999
- Amster, Pablo; De Nápoli, Pablo. "*Dupire´s Equation for Several Assets*"
- Perotti, Estrella. "*Lecturas sobre derivados: La hipótesis Lognormal del Modelo de Black Scholes*", Depto de Capacitación y desarrollo de Mercados, Bolsa de Comercio de Rosario.
- Sukhomlin, Nikolay. "*Simetría y nuevas soluciones de la ecuación de Black Scholes*" Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XI, No. 2 (2004)
- Prahbu, N. U. "*Stochastic Processes*" The Macmillan Company. 1965
- Yashima, Hisao Fujita. "*Corso di Processi Stocastici*". Università degli Studi di Torino, 2002.