UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Sobre la no racionalidad de algunas funciones hipergeométricas bivariadas

Tesis de Licenciatura

Silvia María Adduci

Directora: Dra. Alicia Dickenstein

Julio de 2004

A modo de agradecimiento

Era septiembre de 2002 y yo era una estudiante tranquila, que ya había empezado a acumular finales en la cuenta de deudas. Ni siquiera sabía que la UBA daba becas para estudiantes cuando un día en el bar escuché por casualidad que estaba por cerrar la inscripción a las Becas Estímulo. Enseguida averigüé qué había que hacer para anotarse, y puse manos a la obra. Lo primero era tener un director. Así que fui a ver a Alicia Dickenstein y le conté la situación, agregando que yo siempre había querido hacer teoría de números. Y Alicia no sólo aceptó dirigirme, sino que hasta tuvo la delicadeza de encontrarme un tema de tesis que le había interesado a un teorista de números argentino que trabajaba en Texas, Fernando Rodriguez Villegas.

Mi vida ya no volvió a ser igual (¡gracias a Dios!). Lo próximo que hizo mi directora fue avisarme de unos cursos de verano que había en el IMPA, en Río de Janeiro, y sugerirme que fuera. Y allí me fui, sola, todo el verano de 2003. A la vuelta me enteré de que me habían dado la beca, y cuando me quise acordar ya estaba aplicando para hacer el doctorado con Fernando Rodriquez Villegas. Y desde entonces no paré. Terminé de cursar las materias que me faltaban, aprobé los 10 finales que había acumulado (7 de los cuales preparé en 5 meses), y escribí la tesis. Pero nada de esto hubiera sido posible si no fuera por el apoyo constante e incondicional de todas las personas que me rodean. Empezando por Alicia, que no escatimó esfuerzos ni trabajo, y que me tuvo paciencia cuando descuidaba la tesis por dar finales. Y siguiendo por mi familia y mis amigos, que me aguantaron cuando ni yo misma me aguantaba; me alentaron y ayudaron siempre. No quiero nombrar a nadie porque seguro quedarían muchos sin nombrar, pero merece una mención especial la ayuda que recibí de mi amigo Daniel Perrucci (quien además de enseñarme a usar el Latex me organizó las correlatividades de la carrera), de Silvia Lassalle, que me ayudó también con el Latex con una paciencia encomiable, y de Enrique Tobis, que me ayudó con la presentación.

No tengo palabras para agradecer todo lo que he recibido. Solo la esperanza de poder devolverlo algún día.

Índice

Introducción

I Las funciones hipergeométricas

A principios del siglo XIX, Gauss publicó *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, [7] donde ofrece un estudio riguroso de series e introduce las funciones hipergeométricas. La *función hipergeométrica de Gauss* es

$$F(a,b,c;x) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

donde a, b, c son parámetros.
Más tarde Kummer [11] probó que la función hipergeométrica de Gauss es solución de la *ecuación diferencial hipergeométrica:*

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [c - (a+b+1)x]\frac{dy}{dx} - aby = 0.$$

En general, decimos que ψ es una *función hipergeométrica* si puede escribirse en serie de potencias en la forma $\psi(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ con coeficientes a_n *hipergeométricos,* esto es, el cociente de D'Alambert $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es una función racional de n.
Una de las razones del interés por las funciones hipergeométricas es que casi todas las funciones elementales son hipergeométricas o se obtienen simplemente a partir de ellas. Estas funciones tienen numerosas aplicaciones en astronomía y otras áreas. Para más detalles históricos sobre las funciones hipergeométricas y su teoría clásica, ver [16] y [1].

Nuestro estudio se concentra en funciones hipergeométricas de dos variables: una serie de potencias bivariada ψ

$$\psi(x,y) = \sum_{m,n\geq 0} F(m,n) x^m y^n$$

se dice *hipergeométrica* si los coeficientes $F(m,n)$ son *términos hipergeométricos,* es decir, los cocientes

$$R(m,n) := \frac{F(m+1,n)}{F(m,n)} \quad \text{y} \quad S(m,n) := \frac{F(m,n+1)}{F(m,n)}$$

son funciones racionales de m y de n, *i.e:* existen polinomios bivariados P_1, P_2, Q_1, Q_2 tales que

$$R(m,n) = \frac{P_1(m,n)}{Q_1(m,n)} \quad \text{y} \quad S(m,n) = \frac{P_2(m,n)}{Q_2(m,n)}$$

Por supuesto, esto impone compatibilidades entre los polinomios P_1, P_2, Q_1, Q_2 y se traduce en ecuaciones diferenciales satisfechas por ψ, que describimos en el capítulo 7.

II La conjetura

En [2] se hace un estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales A-hipergeométricos en el sentido de Gelfand, Kapranov y Zelevinsky [9] que admiten funciones racionales "interesantes". Las singularidades de estos sistemas están descritas por ceros de discriminantes de caras [9] y un estudio preciso de la combinatoria de estos discriminantes impone severas restricciones a las configuraciones que admiten soluciones racionales con polos en el discriminante de la configuración total [2]. En este estudio, queda sin embargo una delgada pero difícil brecha entre los resultados generales probados y la conjetura establecida por los autores de que sólo los sistemas A-hipergeométricos asociados a configuraciones de Cayley admiten tales soluciones racionales, que corresponde a configuraciones "con muchas simetrías".
Una vez despojadas las funciones A-hipergeométricas de las A-homogeneidades, las configuraciones de codimensión 2 dan lugar a series hipergeométricas bivariadas.

El caso abierto más sencillo de la conjetura (y el que nos ocupa en este trabajo) es que para cualquier elección de enteros coprimos p, q y k natural, la siguiente función hipergeométrica no es una función racional:

$$\psi(x,y) = \sum_{m,n\geq 0} F(m,n) x^m y^n$$

donde $F(m,n) = F(p)F(q)$, con $F(p) := \frac{[p(m+n+k)-1]!}{(mp)!(np)!}$. Es decir, la función ψ que nos ocupa es :

$$\psi(x,y) = \sum_{m,n\geq 0} \frac{[p(m+n+k)-1]!}{(mp)!(np)!} \frac{[q(m+n+k)-1]!}{(mq)!(nq)!} x^m y^n \tag{1}$$

Una forma de encarar el problema sería asociar a ψ una función de una variable por algún "procedimiento racional" y restringirse así al estudio de la no racionalidad de esta funcion univariada. Por ejemplo, si probamos que $\psi(x,x)$ no es racional, la cuestión estaría cerrada. Observemos sin embargo que las elecciones obvias $\psi(x,0)$ y $\psi(0,y)$ sí son funciones racionales. Esto lo probaremos más adelante (ver capítulo 6).

Durante el XIV Congreso Latinoamericano de Álgebra; en 2001 en Córdoba, Argentina, los autores de [2] le plantearon este problema a Maxim Kontsevich. El interesante comentario de Kontsevich fue que en matemática es raro demostrar que una cosa *no* es otra, que lo normal es demostrar "igualdades". Esto sugiere tratar de conjeturar alguna forma más explícita para ψ, que implique trivialmente la no racionalidad. Para plantear tal forma explícita, nuevamente, es necesario describir las posibles singularidades, pero el estudio de discriminantes en codimensión dos realizado en [6] provee expresiones concretas que describimos en el capítulo 7.

III La tesis

El objetivo de este trabajo es aportar nuevas herramientas para el estudio de la racionalidad (o no) de series hipergeométricas bivariadas.
Este trabajo está desarrollado en dos partes.

Primera parte: Los cinco algoritmos

En los primeros cinco capítulos exponemos resultados del libro $A = B$, de Petkovsek, Wilf, y Zeilberger [13], el cual trata (de manera muy amena) sobre demostraciones de identidades combinatorias por computadora. Estudiamos cómo podrían estas herramientas aplicarse a nuestro problema. El libro se basa en cinco algoritmos fundamentales, de los cuales ofrecemos un sucinto resumen. La idea que subyace desde el primer capítulo del libro es la de evitar todo razonamiento humano innecesario, dejando las cosas mecánicas para las máquinas. Una ilustración de este hecho es la frase introductoria del primer capítulo:

El objetivo final de la matemática es eliminar toda necesidad de inteligencia humana. (Alfred N. Whitehead).

La idea del libro es (en palabras de Donald Knuth, en el prólogo) que ciencia es todo aquello que entendemos lo suficiente como para explicarle a una computadora; y todo lo demás que hacemos los matemáticos es arte. Pero con estos avances en demostraciones por computadora, se está logrando que el arte pase al rango de ciencia: no hace falta ser un superdotado o un genio para llegar a algunos resultados brillantes, hay procedimientos mecánicos que las computadoras siguen sistemáticamente para obtenerlos. La ciencia avanza siempre que el arte se convierte en ciencia, y el arte también crece.

En varias partes del libro hay frases del estilo de la siguiente, que aparece en el capítulo 2, página 24:

"... esta fue una demostración usando funciones generatrices, otra de las herramientas populares usadas por la especie Homo Sapiens para demostrar identidades antes de la era de las computadoras".

Si bien el objetivo principal del libro es mostrar cómo los descubrimientos y las demostraciones de identidades hipergeométricas han sido automatizados, no es un texo sobre computación, sino que el foco prinicipal es la matemática que subyace a toda la parte computacional. Automatizar los descubrimientos y las pruebas no es algo obvio ni inmediato, y conlleva mucho desarrollo teórico.

La historia de las demostraciones automáticas es muy curiosa. En los años 40 había en EE.UU. una monja muy buena en matemática, y su congregación la trasladó a estudiar. La hermana presentó su tesis, se doctoró, y se volvió a su convento sin bombo ni platillos. En su momento nadie le dio mayor importancia a su trabajo. Recién 32 años después, en 1978, su obra fue desenterrada por uno de los autores de $A = B$ y toda la teoría que presenta el libro se basa en la tesis de aquella hermana ignota. Para más detalles ver el algoritmo 1, de la hermana Celina Fasenmyer. A mí personalmente me movilizó bastante conocer esta historia, porque yo, antes de estudiar matemática, fui carmelita descalza durante cuatro años y medio, y cuando Alicia me dio el libro aún no lo sabía.

Segunda parte: Otras opciones

En los capítulos 6,7 y 8, ofrecemos un pantallazo breve sobre otras técnicas de otros libros y papers que pueden ser útiles para demostrar la conjetura. Las hay de áreas muy distintas (como Combinatoria y Ecuaciones diferenciales) y de diferentes niveles de complejidad. Todas proponen caminos abiertos a la investigación. Por último, jugamos con el caso $p = q = 1$ mostrando varias demostraciones diferentes que ilustran cómo se podría trabajar para otros valores de los parámetros.

Capítulo 1

Algoritmo de Celina Fasenmyer

Como dijéramos en la introducción, este algoritmo es el padre intelectual de los métodos computacionales que se usan hoy. Fue desarrollado por la Hna. María Celina Fasenmyer en su tesis de doctorado, presentada en 1946 en la Universidad de Michigan.

Celina Fasenmyer nació en Crown, Pennsylvania (EE.UU.), el 4 de octubre de 1906. Su madre murió cuando ella tenía un año y su padre se volvió a casar tres años después. Celina terminó el colegio en 1923, a los 17 años, y no fue a la universidad, sino que se dedicó a la enseñanza durante diez años. Cuando tenía 20, en 1926, se fundó en Pennsylvania el Mercyhurst College, regenteado por las Hermanas de la Misericordia, una congregación católica irlandesa, y Celina estudió allí hasta que en 1933, a los 27 años, se graduó e ingresó en la congregación, convirtiéndose en la hermana María Celina.

Las hermanas de la Misericordia se dedicaban a obras sociales, como cuidar enfermos y ancianos en hospitales y orfanatos, y le daban mucha importancia a la educación de las monjas. En 1933 trasladaron a la Hna. Celina a enseñar en el St. Justin School y a estudiar en la Universidad de Pittsburgh, donde se graduó en 1937. Su principal área fue matemática y la segunda fue física. En 1942 Celina retomó sus estudios: la comunidad la envió a la Universidad de Michigan para el doctorado, que hizo bajo la dirección de Earl Rainville. Presentó su tesis en 1946.

En ella muestra cómo pueden encontrarse relaciones de recurrencia satisfechas por términos hipergeométricos en una forma totalmente mecánica y algorítmica. Después de su tesis, sólo publicó dos papers, en los que desarrolla aún más su método, y lo explica a una audiencia un poco más amplia. El primero, *Algunos polinomios*

Figure 1.1: *Hna. María Celina Fasenmyer*

hipergeométricos generalizados, apareció en el Boletín de la American Mathematical Society, en 1947. El segundo, *Sobre relaciones de recurrencia*, fue publicado por el American Mathematical Monthly en 1949. Ninguno de sus papers causó gran interés en su momento, y Celina regresó al Mercyhurst College, donde siguió enseñando matemática hasta su retiro, sin volver a desarrollar trabajos de investigación. Y eso fue todo. Su obra pasó desapercibida. Recién en 1978, Doron Zeilberger (un profesor de la Universidad de Pennsylvania) se dio cuenta de la importancia de los descubrimientos de la Hna. Celina, y usó sus métodos para probar identidades combinatorias. Otro profesor de la misma universidad, Herbert Wilf, leyó el paper de Zeilberger, y dice:

"Recuerdo haber sentido que me estaba conectando con un universo paralelo, que siempre había existido pero que había estado escondido, y que yo estaba a punto de averiguar qué criaturas habitaban en él".

Wilf y Zeilberger se pusieron a trabajar sobre los métodos de la Hna. Celina, perfeccionándolos y aumentándolos, y desarrollaron lo que hoy se llama "Teoría de WZ", reconociéndola siempre como su pionera.

En 1994, Wilf logró encontrar a la Hna. Celina, que vivía en una casa de retiro de su congregación, y la invitó a una conferencia de matemática discreta, a modo de homenaje. Cuando Wilf presentó a la audiencia de distinguidos matemáticos a la pequeña monja de 87 años, que simplemente agradeció al profesor Wilf por su invitación, y reconoció haber hecho todo aquel trabajo, todos los matemáticos se emocionaron. Dice Wilf que "no había un ojo seco en toda la casa". Celina falleció dos años después.

Pasemos ahora a su algoritmo.

I Para qué sirve

Dada una suma hipergeométrica $f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(n,k)$, el algoritmo sirve para encontrar una relación de recurrencia para $f(n)$. Esto es, poder escribir a $f(n)$ como suma de una cantidad constante y finita de términos anteriores:

$$f(n) = \sum_{k=1}^{N} c_k f(n-k)$$

donde $c_k = c_k(n)$ y N es el orden de la recurrencia. Notemos que una vez hallada la recurrencia, es mucho más simple buscar una fórmula cerrada para $f(n)$, y contamos para ello con distintos métodos, como por ejemplo los de ecuaciones diferenciales. Para hallar una recurrencia para $f(n)$, Celina propone hallar primero una recurrencia en n para $F(n,k)$, ya que en caso de obtenerla, pasar a una para $f(n)$ es inmediato: supongamos por ejemplo que $F(n,k)$ verifica

$$a_n F(n,k) + b_n F(n+1,k) + c_n F(n,k+1) + d_n F(n+1,k+1) = 0$$

donde los a_i, b_j dependen de n y *no* de k (hipótesis fundamental). Entonces sumando ambos miembros sobre $k \in \mathbb{Z}$ obtenemos

$$a_n f(n) + b_n f(n+1) + c_n f(n) + d_n f(n+1) = 0$$

$$f(n+1) = -\frac{(a_n + c_n)}{(b_n + d_n)} f(n)$$

(siempre que se pueda dividir por el denominador), que es la recurrencia buscada para $f(n)$.

II Un ejemplo

La hermana Celina dedicó su tesis de doctorado a desarrollar su algoritmo. Aquí sólo pretendemos ilustrar brevemente cómo funciona con el siguiente ejemplo.

Sea f la siguiente función con dominio en $\mathbb{N}$:

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

es decir, con la notación de arriba,

$$F(n,k) = k\binom{n}{k}$$

Buscamos una recurrencia en n para $F(n,k)$, por ejemplo de la forma:

$$a_n F(n,k) + b_n F(n+1,k) + c_n F(n,k+1) + d_n F(n+1,k+1) = 0$$

<u>Paso 1</u>

Lo primero que hacemos es dividir toda la expresión anterior por $F(n,k)$, obteniendo

$$a_n + b_n \frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} + c_n \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} + d_n \frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)} = 0$$

Es decir,

$$a_n + b_n \frac{\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} + c_n \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} + d_n \frac{\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = 0$$

y simplificando obtenemos la siguiente expresión, donde sólo vemos funciones racionales en n y en k

$$a_n + b_n \frac{n+1}{n+1-k} + c_n \frac{n-k}{k} + d_n \frac{n+1}{k} = 0$$

<u>Paso 2</u>

Tomamos denominador común en la última expresión, y en el numerador recolectamos las potencias de k:

$$a_n k(n+1-k) + b_n k(n+1) + c_n(n+1-k)(n-k) + d_n(n+1-k)(n+1) = 0$$

$$k^2[c_n - a_n] + k[n(a_n + b_n - 2c_n - d_n) + a_n + b_n - c_n - d_n] + [c_n(n^2+n) + d_n(n^2+2n+1)] = 0$$

$$k^2[c_n - a_n] + k[n(a_n + b_n - 2c_n - d_n) + (a_n + b_n - c_n - d_n)] + [n^2(c_n + d_n) + n(c_n + 2d_n) + d_n] = 0$$

Entonces, tenemos un polinomio en k que tiene que ser nulo, luego todos sus coeficientes tienen que serlo. Aquí es fundamental que las incógnitas a_n, b_n, c_n, d_n no dependan de k, ya que eso nos permite garantizar cuáles son los coeficientes del polinomio. Entonces, igualando a cero obtenemos el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_n - a_n & = & 0 \\ n(a_n + b_n - 2c_n - d_n) + (a_n + b_n - c_n - d_n) & = & 0 \\ n^2(c_n + d_n) + n(c_n + 2d_n) + d_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Lo cual, agrupando en a_n, b_n, c_n, d_n se lee:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_n - c_n & = & 0 \\ a_n(n+1) + b_n(n+1) + c_n(-2n-1) + d_n(-n-1) & = & 0 \\ c_n(n^2+n) + d_n(n^2+2n+1) & = & 0 \end{array}\right.$$

Es decir, (a_n, b_n, c_n, d_n) es solución del sistema homogéneo asociado a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ n+1 & n+1 & -(2n+1) & -(n+1) \\ 0 & 0 & n(n+1) & (n+1)^2 \end{pmatrix}$$

Este sistema claramente tiene solución no trivial por tener más incógnitas que ecuaciones. De hecho el subespacio de soluciones está generado por

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_n & = & -(1+\frac{1}{n}) \\ b_n & = & 0 \\ c_n & = & -(1+\frac{1}{n}) \\ d_n & = & 1 \end{array}\right.$$

<u>Paso 3</u>

Ahora sustituimos en nuestra expresión inicial y obtenemos

$$-(1+\frac{1}{n})F(n,k) - (1+\frac{1}{n})F(n,k+1) + F(n+1,k+1) = 0$$

sumamos sobre k :

$$-(1+\frac{1}{n})f(n)-(1+\frac{1}{n})f(n)+f(n+1)=0$$

es decir

$$f(n+1)=2\frac{n+1}{n}f(n)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}k\binom{n+1}{k}=2\frac{n+1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$$

y ahora es fácil encontrar una fórmula cerrada para $f(n)$, ya que inductivamente

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 2\tfrac{n+1}{n}f(n) \\ &= 2\tfrac{n+1}{n}2\tfrac{n}{n-1}f(n-1) \\ &= 2\tfrac{n+1}{n}2\tfrac{n}{n-1}2\tfrac{n-1}{n-2}f(n-2) \\ &= \dots \\ &= (n+1)2^n \end{aligned}$$

El ejemplo es muy sencillo y en Álgebra I aprendimos a llegar al mismo resultado usando inducción, pero sirve para ilustrar cómo funciona el algoritmo diseñado por la Hna. Celina.

El programa de Maple para este algoritmo está en el paquete `EKHAD`, que está disponible en `http://www.math.temple.edu/~zeilberg/programs.html` Para usarlo hay que llamarlo con el comando `celine(f,ii,jj);` donde `f` es el sumando $F(n,k)$ y `ii,jj` son los tamaños de la recurrencia que estamos buscando (para más detalles consultar $A=B$).

Veamos qué pasa con el ejemplo anterior en Maple:

```
>celine(k*n!/(k!*(n-k)!),1,1);
> nF(n-1,k-1)n-(n-1)F(n,k)+nF(n-1,k)==0
```

La recurrencia obtenida en segundos con Maple es exactamente la misma que obtuvimos antes: en la escritura hay un desfasaje (donde nosotros teníamos n aquí aparece $n+1$ y lo mismo con k) y un denominador común n eliminado.

III Cómo puede utilizarse para nuestro objetivo

Este algoritmo está muy relacionado con los dos siguientes (Zeilberger, Hyper); por eso se verá mejor su utilidad después de analizarlos.

e

Capítulo 2

Algoritmo de Zeilberger

Doron Zeilberger es un matemático israelí-estadounidense nacido en 1950. Fue él quien en 1978 desenterró la obra de la Hna. Celina y descubrió todo su valor. Es uno de los autores del libro $A = B$ y actualmente trabaja en la Rutgers University (EE.UU.).

Su home page es: `http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/`

Sobre su algoritmo:

I Para qué sirve

Este algoritmo sirve para lo mismo que el de la Hna. Celina Fasenmyer: dada $f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(n,k)$ con $F(n,k)$ hipergeométricos, buscamos una recurrencia para $f(n)$. Pero este método nos ofrece una alternativa mucho más rápida. Igual que en el de la Hna. Celina, primero vamos a buscar una recurrencia para $F(n,k)$ pero de manera telescópica: si existiera alguna función G "razonable" tal que

$$F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k),$$

sumando ambos miembros sobre $k \in \mathbb{Z}$, tendríamos

$$f(n) = 0.$$

Esto es mucho pedir, pero a veces, lo que sí se puede hallar es una G que verifique

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k) \tag{2.1}$$

Una manera útil de anotar lo anterior es usando los operadores shift y de diferencias, que definimos a continuación.
Sean $F(n,k), G(n,k)$ dos funciones en dos variables. Se definen:
Operadores shift:

$$N(F)(n,k) = F(n+1,k) \quad \text{y} \quad K(G)(n,k) = G(n,k+1)$$

Operadores en diferencias:

$$\begin{array}{rcl} \Delta F_k(n) &=& F(n+1,k) - F(n,k) \\ &=& N(F)(n,k) - F(n,k) \\ &=& (N-1)(F)(n,k) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} \Delta G_n(k) &=& G(n,k+1) - G(n,k) \\ &=& K(G)(n,k) - G(n,k) \\ &=& (K-1)(G)(n,k) \end{array}$$

Con esta notación, (2.1) puede escribirse en las siguientes formas:

$$(N-1)(F) = (K-1)(G)$$

$$\Delta F_k(n) = \Delta G_n(k)$$

Ahora, sumando otra vez sobre sobre $k \in \mathbb{Z}$ ambos miembros de (2.1), obtenemos $f(n+1) - f(n) = 0$, de donde se deduce que f es constante. Esto todavía es mucho esperar, pero hay algo que sí podemos probar, algo que sucede en general, sólo necesitamos tomar un operador de diferencias más general. El algoritmo de Zeilberger produce, dados $F(n,k)$ términos hipergeométricos, una recurrencia de la forma

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n) F(n+j,k) = G(n,k+1) - G(n,k) \tag{2.2}$$

donde los $a_j \in \mathbb{Q}[x]$ y el cociente $R(n,k) = \frac{G(n,k)}{F(n,k)}$ es una función racional en n y en k. Con esto ya encontramos la recurrencia para $f(n)$, porque al ser los a_j independientes de k, cuando sumamos ambos miembros sobre $k \in \mathbb{Z}$ obtenemos

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n) f(n+j) = 0$$

II Cómo puede utilizarse para nuestro objetivo

Como dijimos en el algoritmo anterior, se entenderá mejor la utilidad de este método después de analizar el siguiente.

Capítulo 3

Algoritmo Hyper

Este algoritmo fue diseñado por Petkovsek, el autor esloveno de $A = B$.

I Para qué sirve

Básicamente este método sirve para reconocer cuándo una relación de recurrencia con coeficientes polinomiales tiene una forma cerrada, donde por *forma cerrada* entendemos que la cantidad de sumandos sea constante, que no dependa de ningún parámetro ni variable.

Así como el algoritmo de Zeilberger nos devuelve, a partir de una suma indefinida $f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(n,k)$, una recurrencia para f de coeficientes polinomiales, el algoritmo Hyper cierra totalmente este problema: si la recurrencia hallada por Zeilberger tiene por solución una $f(n)$ que se escribe como combinación lineal de un número fijo de términos hipergeométricos en n, el algoritmo Hyper encuentra esa solución $f(n)$. Si no existe una tal solución, el algoritmo responde negativamente.

II Cómo puede utilizarse para nuestro objetivo

Si pensamos a ψ como función de una variable, es decir, para y fijo, $\Psi(x) := \psi(x,y)$ resulta $\Psi(x) = \sum_{k\geq 0} f(k)x^k$ con $f(k) = \sum_{n\geq 0} F(k,n)y^n$. Observemos que $\Psi(x)$ puede o no ser hipergeométrica, ($\frac{f(k+1)}{f(k)}$ puede o no ser racional) pero $f(k)$ siempre es hipergeométrica ya que $\frac{F(k,n+1)y^{n+1}}{F(n,k)y^n} = \frac{F(k,n+1)y}{F(n,k)}$ es racional en las variables n, k por serlo F (y es constante con respecto s n y k).

Para acomodarnos a la notación de los algoritmos anteriores, cambiemos n por k. Es decir, escribamos:

$$f(n) = \sum_{k\geq 0} F(n,k)y^k$$

Entonces, con los algoritmos de Celina y de Zeilberger, podemos buscar una recurrencia para $f(n)$, y luego una forma cerrada. En caso de tener éxito, resultaría

$$\psi(x,y) = \sum_{n\geq 0} f(n)x^n$$

donde $f(n) = f(n,y)$. Esta forma de escribir a $\psi(x,y)$ puede resultar mucho más manejable para trabajar sobre la conjetura que nos interesa.

III Ejemplos

Como dato curioso mencionamos a continuación algunas sucesiones conocidas que no admiten forma cerrada hipergeométrica:

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3$
2. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{k}$
3. El número de desarreglos o *derangements* en n elementos. Es decir, la cantidad de permutaciones del grupo S_n que no dejan fijo ningún elemento: $D_n := \#\{\sigma \in S_n : \sigma(j) \neq j \,\forall 1 \leq j \leq n\}$
4. El número de involuciones en n elementos, $i(n) := \#\{\sigma \in S_n : \sigma^2 = \sigma\}$
5. El coeficiente central del trinomio, *i.e:* el coeficiente de x^n en la expansión de $(1 + x + x^2)^n$.

Todo esto está probado en $A = B$ usando el algoritmo Hyper.

Capítulo 4

Algoritmo Gosper

Este algoritmo fue diseñado por R. W. Gosper Jr.

I Para qué sirve

El algoritmo Gosper es uno de los puntos culminantes en la historia de la "computarización" del problema de la forma cerrada para sumatorias.
La cuestión que este método propone resolver es análoga a la de la integral: dada

$$H(x) = \int_a^x f(t)dt$$

con f continua, buscamos una forma simple para H, donde por *forma simple* entendemos cualquier función que se pueda obtener a partir de las funciones elementales: polinomiales, trigonométricas, exponenciales. Notemos que este problema está resuelto. Ver [14].

Nuestro problema se parece a éste, pero en el caso discreto. En vez de una integral, tenemos una suma de la forma

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} t_k$$

donde los t_k son términos hipergeométricos. Notemos que la cantidad de sumandos en S_n no está fija, sino que depende de n. Buscamos una forma cerrada para S_n, particularmente estamos buscando una *forma cerrada hipergeométrica*, *i.e:* queremos escribir a S_n como combinación lineal de r términos hipergeométricos, donde r no dependa de ninguna variable ni parámetro. Notemos que en la analogía con el problema de la integral, S_n juega el rol de primitiva, pero en lugar de integrar su derivada, lo que hacemos es sumar sus diferencias, ya que

$$t_k = S_{k+1} - S_k.$$

Antes nos preguntábamos: "dada f continua, ¿existe F tal que $F' = f$?".

Ahora la pregunta es:

dados $(t_k)_k$ términos hipergeométricos, ¿existen $(z_k)_k$ términos hipergeométricos tales que $t_k = z_{k+1} - z_k$?

Afirmamos que para resolver nuestro problema basta con hallar una tal sucesión $(z_k)_k$: si la hallamos, entonces podemos escribir

$$z_n = z_{n-1} + t_{n-1} = (zn - 2 + tn - 2) + tn - 1 = ... = z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} t_k$$

de lo cual resulta que $z_n = z_0 + S_n$, es decir, $S_n = z_n - c$ ($c = z_0$ constante).

El algoritmo Gosper resuelve totalmente este problema, ya sea positiva o negativamente: si existen los términos hipergeométricos $(z_k)_k$, el algoritmo los encuentra, y si no existen, lo confirma. En caso de que existan, decimos que $(t_k)_k$ es *sumable gosper*.

II Cómo puede utilizarse para nuestro objetivo

Para pobar que $\psi(x, y)$ no es racional, bastaría verlo por ejemplo en la diagonal:

$$\psi(x, x) = \sum_{m,n\geq 0} F(m, n)x^{m+n} = \sum_{N\geq 0} A_N x^N$$

donde $A_N = \sum_{m=0}^{N} F(m, N - m)$. Si Gosper devuelve una forma cerrada para los A_N, podemos aplicar los métodos que estudiaremos en la segunda parte.

III Cómo funciona el algoritmo

(1) Si existe $(z_n)_n$ sucesión de términos hipergeométricos tal que

$$t_n = z_{n+1} - z_n \tag{4.1}$$

entonces $\frac{z_n}{t_n}$es racional en n, ya que

$$\frac{z_n}{t_n} = \frac{z_n}{z_{n+1} - z_n} = \frac{1}{\frac{z_{n+1}}{z_n} - 1}$$

y $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ es racional por ser $(z_n)_n$ términos hipergeométricos.

Luego existe $y(n)$ racional tal que $z_n = t_n y(n)$. Reemplazando en (4.1) obtenemos:

$$t_n = t_{n+1}y(n+1) - t_n y(n)$$

luego

$$\frac{t_{n+1}}{t_n}y(n+1) - y(n) = 1$$

y llamando

$$r(n) = \frac{t_{n+1}}{t_n}$$

queda

$$r(n)y(n+1) - y(n) = 1 \tag{4.2}$$

Como resolver (4.1) es equivalente a resolver (4.2), hemos reducido el problema de hallar z_n hipergeométricos al de hallar $y(n)$ racional. El próximo paso será volver a reducir el problema, esta vez a hallar $x(n)$ polinómica.

(2) Afirmamos que, dada $r(n)$ racional, es posible (más aún, es algorítmico), hallar polinomios a, b, c en n con $(a(n) : b(n+h)) = 1 \ \forall h \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$r(n) = \frac{a(n)}{b(n)} \frac{c(n+1)}{c(n)} \tag{4.3}$$

Enseguida veremos cómo encontrar estos polinomios a, b, c, pero primero veamos para qué nos van a servir.

(3) Supongamos que tenemos la función $y(n)$ del paso *1*, y supongamos que $\exists x(n)$ una función racional tal que podemos escribir a $y(n)$ en la forma

$$y(n) = \frac{b(n-1)}{c(n)}x(n) \tag{4.4}$$

es decir, $x(n) = y(n)\frac{c(n)}{b(n-1)}$ (racional en n), donde b y c son como antes. Entonces sucede un milagro y $x(n)$ resulta ser un polinomio. Este milagro está probado en $A = B$ y obviamos aquí la prueba.

El punto al que queremos llegar es que reemplazando (4.3) y (4.4) en (4.2) obtenemos

$$\frac{a(n)c(n+1)}{b(n)c(n)}\frac{b(n)}{c(n+1)}x(n+1) - \frac{b(n-1)}{c(n)}x(n) = 1$$

simplificando

$$\frac{a(n)}{c(n)}x(n+1) - \frac{b(n-1)}{c(n)}x(n) = 1$$

es decir, $x(n)$ verifica la ecuación:

$$a(n)x(n+1) - b(n-1)x(n) = c(n) \tag{4.5}$$

Otra vez, hallar $x(n)$ que resuelva esta ecuación es equivalente a hallar la $y(n)$ del paso *1*. Es decir que hemos reducido nuestro problema original de encontrar soluciones hipergeométricas a uno más sencillo de hallar soluciones polinómicas.

Entonces necesitamos hallar los polinomios a, b, c y x.

(4) Cómo hallar los a, b, c

Recordemos que $r(n) = \frac{t_{n+1}}{t_n}$ es racional (por ser t_n términos hipergeométricos) luego $r(n)$ se escribe en la forma $r(n) = \gamma\frac{f(n)}{g(n)}$ donde $f, g \in K[n]$ con K algún cuerpo, f, g son mónicos y $(f : g) = 1$. Esta última suposición no es ninguna restricción, ya que si f, g no fueran coprimos, multiplicamos y dividimos por $(f : g)$ y obtenemos polinomios coprimos. Notemos además que $(f : g)$ siempre puede encontrarse de manera algorítmica con el método de Euclides.

Si $(f(n) : f(n+h)) = 1 \, \forall h \in \mathbb{N}$ ya estamos: $a = \gamma f$, $b = g$, $c = 1$.

Si no, definamos $d_h := (f(n) : g(n+h))$ para $h \in \mathbb{N}$ tal que $deg(d_h) \geq 1$ y notemos:

$$\begin{cases} f(n) &=& f_1(n)d_h(n) \\ g(n) &=& g_1(n)d_h(n-h)\,. \end{cases}$$

Entonces,

$$r(n) = \gamma \frac{f_1(n)}{g_1(n)} \frac{d_h(n)}{d_h(n-h)}$$

Si $(f_1(n) : g_1(n+h)) = 1 \, \forall h \in \mathbb{N}$, llevamos $\frac{d_h(n)}{d_h(n-h)}$ a la forma $\frac{c(n+1)}{c(n)}$ multiplicando y dividiendo por los factores que faltan:

$$\frac{d_h(n)}{d_h(n-h)} = \frac{d_h(n)}{d_h(n-1)} \frac{d_h(n-1)}{d_h(n-2)} \frac{d_h(n-2)}{d_h(n-3)} \cdots \frac{d_h(n-h+1)}{d_h(n-h)}$$

y se concluye llamando $c(n)$ all producto en el denominador; $a = \gamma f_1$, $b = g_1$.

Si $\exists\, h \in \mathbb{N}$ tal que $f_1(n)$ y $g_1(n+h)$ no son coprimos, calculamos el *mcd* y repetimos el proceso anterior.

<u>Afirmación</u>

Este proceso termina en un número finito de pasos.

Lo que sucede es lo siguiente. Los eventuales valores de h para los cuales $f(n)$ y $g(n+h)$ no son coprimos forman un conjunto finito. Esto se ve claro cuando se calcula la resultante entre $f(n)$ y $g(n+h)$ pensados como polinomios en la variable n. Recordemos que la *resultante* de dos polinomios P, Q es el producto de los valores que alcanza P en las raíces de Q, y que no hace falta conocer las raíces de Q para poder calcular la resultante, sino que se calcula por medio de un determinante. El punto aquí es que

$$R(h) = res(f(n), g(n+h), n)$$

es un polinomio en la variable h que se anula si y sólo si $f(n)$ y $g(n+h)$ tienen alguna raíz en común, $i.e$: si no son coprimos. Pero un polinomio no nulo no puede tener infinitas raíces, y $R(h)$ es no nulo, ya que $R(0) \neq 0$, pues $(f(n) : g(n)) = 1$. Entonces, los únicos valores de $h \in \mathbb{N}$ para los cuales $f(n)$ y $g(n+h)$ no son coprimos, forman un conjunto finito y eventualmente vacío, el conjunto de raíces de $R(h)$.

Sobre cómo hallar las raíces de R, notemos que sólo nos interesan las raíces naturales, y la forma de encontrarlas depende totalmente de cuál sea el cuerpo K donde estamos trabajando. Esta parte es muy interesante pero se va un poco del tema del algoritmo Gosper, por eso ha sido desarrollada aparte en el apéndice.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el siguiente:

`Algoritmo para hallar` a, b, c

`Paso 1`

Se escribe $r(n) = \gamma \frac{f(n)}{g(n)}$ con $f, g \in K[x]$ mónicos coprimos, $\gamma \in K$

`Paso 2`

Se calcula $R(h) = res(f(n), g(n+h), n)$ y $0 < h_1, h_2, \cdots < h_N$ las raíces naturales de R. (Ver apéndice.)

`Paso 3`

Se definen

$$\begin{cases} f_1(n) & := \frac{f(n)}{(f(n):g(n+h_1))} \\ g_1(n) & := \frac{g(n)}{(f(n-h_1):g(n))} \end{cases}$$

y para $2 \leq j \leq N$

$$\begin{cases} f_j(n) & := \frac{f_{j-1}(n)}{(f_{j-1}(n):g_{j-1}(n+h_j))} \\ g_j(n) & := \frac{g_{j-1}(n)}{(f_{j-1}(n-h_j):g_{j-1}(n))} \end{cases}.$$

`Paso 4`

Se concluye definiendo

$$\begin{cases} a(n) & := \gamma f_N(n) \\ b(n) & := g_N(n) \\ c(n) & := \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{i} (f_{i-1}(n-h_j) : g_{i-1}(n)) \end{cases}$$

donde $f_0 := f$ y $g_0 = g$.

Teorema 1 *Si K es un cuerpo de característica cero y $r(n)$ es una función racional no nula; los polinomios a, b, c calculados con el algoritmo anterior verifican:*

$$\begin{array}{rl} i) & r(n) = \frac{a(n)c(n+1)}{b(n)c(n)} \\ ii) & b, c \text{ son mónicos y } (a(n) : b(n+h)) = 1 \ \forall h \in \mathbb{N}_0 \\ iii) & (a(n) : c(n)) = 1 \text{ y } (b(n) : c(n+1)) = 1 \\ iv) & a, b, c \text{ son los únicos polinomios que verifican } i), ii), iii). \end{array}$$

La demostración de este teorema se encuentra en detalle y muy clara en el libro $A = B$ [13] páginas 82 y 83.

(5) Cómo hallar $x(n)$

Recordemos que lo que buscamos es, si existe, un polinomio no nulo $x(n) \in K[n]$ que verifique (4.5):

$$a(n)x(n+1) - b(n-1)x(n) = c(n).$$

La idea básica es sencilla: supongamos que tuviéramos una cota d para el grado de $x(n)$. En tal caso, podríamos escribir $x(n) = \sum_{i=0}^{d} x_i n^i$ donde $x_i \in K$ son $d+1$ incógnitas. Como (4.5) es lineal en $x(n)$, si reemplazamos en (4.5) $x(n)$ por $\sum_{i=0}^{d} x_i n^i$ y evaluamos en $d+1$ valores cómodos de n, obtenemos un sistema lineal de $d+1$ ecuaciones con $d+1$ incógnitas, que puede o no tener solución. Esta es una de las causas por las que podemos detectar si una sucesión *no* es sumable gosper: si el sistema lineal al que llegamos aquí no tiene solución.

Entonces todo el problema se reduce a acotar el grado de $x(n)$. Para ello introducimos algunas definiciones y notación: sea $P(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i x^i$ con $P \neq 0$ y $deg(P) = N$ (i.e:$\alpha_N \neq 0$). Se nota:

$lc(P)$	$:=$	α_N	(el coeficiente principal)
$lm(P)$	$:=$	x^N	(el monomio de mayor grado)
$lt(P)$	$:=$	$\alpha_n x^N$	(el producto $lc(P)lm(P)$)

Además, si llamamos $A = deg(a)$, $B = deg(b)$, $C = deg(c)$ y escribimos

$$\begin{array}{lcl} a(n) & = & \sum_{i=0}^{A} a_i n^i \\ b(n-1) & = & \sum_{i=0}^{B} b_i n^i \\ c(n) & = & \sum_{i=0}^{C} c_i n^i \end{array}$$

podemos reemplazar en (4.5) y obtener

$$\sum_{i=0}^{A} a_i n^i \sum_{i=0}^{d} x_i (n+1)^i - \sum_{i=0}^{B} b_i n^i \sum_{i=0}^{d} x_i n^i = \sum_{i=0}^{C} c_i n^i \tag{4.6}$$

Notemos que, en el lado izquierdo,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{lt}(a(n)x(n+1)) & = & a_A x_d n^{A+d} \\ \mathrm{lt}(b(n-1)x(n)) & = & b_B x_d n^{B+d} \end{array} \right.$$

Entonces, hay dos casos para analizar, según los lt del miembro izquierdo de (4.6) se cancelen o no. Analizamos primero el caso en que no se cancelan, que es más sencillo.

<u>Caso 1</u>: $deg(a) \neq deg(b) \vee lc(a) \neq lc(b)$

Al no cancelarse los lt del miembro izquierdo, el grado en ese lado sigue siendo d+máx{deg$a(n)$, deg$b(n)$}. Como el grado en el miembro derecho es deg$c(n) = C$, tenemos que

$$d = \text{deg}c(n) - máx\{\text{deg}a(n), \text{deg}b(n)\}$$

es decir,

$$d = C - máx\{A, B\} \tag{4.7}$$

con lo cual ya tenemos un candidato a grado de $x(n)$. Observemos que d podría ser negativo, de manera que no podría ser el grado de ningún polinomio, con lo cual otra vez estaríamos llegando a un caso en el que no hay solución. Es decir, el Gosper nos confirma que nuestra sucesión original t_n no es sumable gosper.

<u>Caso 2</u>: $deg(a) = deg(b) \wedge lc(a) = lc(b)$ ($i.e.$:A=B $\wedge a_A = b_B$)

En este caso se cancelan los lt del miembro izquierdo, y otra vez tenemos dos casos para considerar, según se cancelen o no los términos de grado máximo que quedan en el lado izquierdo después de la cancelación, es decir, los términos de grado $A + d - 1$ (recordemos que A=B).

En definitiva, separamos en casos según sean iguales o no lt$(a(n)x(n+1) - a_A x_d n^{A+d})$ y lt$(b(n-1)x(n) - b_B x_d n^{B+d})$.
Como antes, analizamos primero el caso en que no son iguales por ser más sencillo.

<u>(2.i)</u>: al no haber más cancelación que la de los lt, el grado del lado izquierdo es $d + A - 1$, y como en el lado derecho es C, obtenemos

$$d = C - A + 1 \tag{4.8}$$

(2.ii): en el lado izquierdo de (4.5) (o de(4.6), que es lo mismo) se cancelan los coeficientes de n^{A+d} y de n^{A+d-1}. Veamos quiénes son estos coeficientes.
Recordemos que (4.5) es

$$a(n)x(n+1) - b(n-1)x(n) = c(n)$$

y que

$$\begin{array}{rcl} x(n+1) & = & \sum_{i=0}^{d} x_i(n+1)^i \;=\; x_d(n+1)^d + x_{d-1}(n+1)^{d-1} + \cdots + x_1(n+1) + x_0 \\ a(n)x(n+1) & = & \sum_{i=0}^{A} a_i n^i \sum_{i=0}^{d} x_i(n+1)^i \\ b(n-1) & = & \sum_{i=0}^{B} b_i n^i \\ b(n-1)x(n) & = & \sum_{i=0}^{B} b_i n^i \sum_{i=0}^{d} x_i n^i \end{array}$$

es decir

$$\begin{array}{rcl} x(n+1) & = & n^d x_d + n^{d-1}(\binom{d}{d-1}x_d + x_{d-1}) + O(n^{A+d-2}) \\ a(n)x(n+1) & = & n^{A+d} a_A x_d n^{A+d} + n^{A+d-1}[a_A(dx_d + x_{d-1}) + a_{A-1}x_d] + O(n^{A+d-2}) \\ b(n-1)x(n) & = & n^{A+d} a_A x_d n^{A+d} + n^{A+d-1}(b_{A-1}x_d + b_A x_{d-1}) + O(n^{A+d-2}) \end{array}$$

y comparando las dos últimas expresiones, como el coeficientede n^{A+d-1} tiene que coincidir, obtenemos:

$$[a_A(dx_d + x_{d-1}) + a_{A-1}x_d] = (b_{B-1}x_d + b_B x_{d-1})$$

es decir,

$$a_A d x_d + a_A x_{d-1} + a_{A-1}x_d - b_{B-1}x_d - b_B x_{d-1} = 0$$

pero recordemos que $a_A = b_B$, con lo cual

$$x_d(a_A d + a_{A-1} - b_{B-1}) = 0$$

y como $x_d \neq 0$ (por ser $x(n) \neq 0$), y $a_A \neq 0$ (por ser $a(n) \neq 0$) concluímos que

$$d = \frac{b_{B-1} - a_{A-1}}{a_A} \tag{4.9}$$

Finalmente hemos podido decir exactamente quién es d en cada caso. Recordemos que, como ya dijimos, lo que buscamos es el grado de un polinomio, por ende no todos los valores de d hallados nos van a servir.

En caso de que el valor de d sea mayor o igual que cero, podemos plantear las ecuaciones lineales de las que habláramos al principio y encontrar $x(n)$ o decidir que no existe.

En caso de que el valor de d sea menor que cero, como ese no es el grado de ningún polinomio, concluímos que no existe tal $x(n)$, luego el problema original no tiene solución y t_n no es sumable gosper.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el siguiente

`Algoritmo para hallar` $x(n)$ `o para decidir que no existe`

`Paso 1`

Si $\deg(a) \neq \deg(b) \vee \operatorname{lc}(a) \neq \operatorname{lc}(b)$, se define $D := \{\deg c(n) - \max\{\deg a(n), \deg b(n)\}\}$

Si $\deg(a) = \deg(b) \wedge \operatorname{lc}(a) = \operatorname{lc}(b)$, se define $D := \{\deg c(n) - \deg a(n) + 1, \frac{b_{B-1} - a_{A-1}}{a_A}\}$

`Paso 2`

Se calcula $D \cap \mathbb{N}$.

Si $D \cap \mathbb{N} = \emptyset$ el algoritmo termina: no existe solución $x(n)$.

Si $D \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ se calcula $d := \max D$ y se continúa con el `paso 3`.

`Paso 3`

Se plantea un polinomio de grado d que verifique (4.5), se evalúa en $d+1$ valores arbitrarios de n y se resuelve el sistema lineal cuyas incógnitas son los $d+1$ coeficientes del polinomio.

Si el sistema tiene solución, hemos hallado $x(n)$.

Si el sistema no tiene solución, no existe $x(n)$.

IV El algoritmo Gosper

Finalmente, enunciemos los pasos a seguir para implementar Gosper:

`input` Una sucesión de términos hipergeométricos $(t_n)_n$

`output` Una sucesión de términos hipergeométricos $(z_n)_n$ tales que $t_n = z_{n+1} - z_n$, si existe. Si no existe, $\sum_{k=0}^{n-1} t_k$.

<u>`Paso 1`</u>

Se define $r(n) = \frac{t_{n+1}}{t_n}$

<u>`Paso 2`</u>

Se escribe $r(n) = \frac{a(n)}{b(n)} \frac{c(n+1)}{c(n)}$ con a, b, c polinomios tales que $(a(n) : b(n+h)) = 1 \, \forall h \in \mathbb{N}_0$. (Para ello se aplica el algoritmo ya comentado.)

<u>`Paso 3`</u>

Se aplica el algoritmo visto para hallar un polinomio no nulo $x(n)$ que verifique $\frac{a(n)}{c(n)} x(n+1) - \frac{b(n-1)}{c(n)} x(n) = 1$.
Si un tal polinomio no existe, el algoritmo termina y no existe la sucesión hipergeométrica $(z_n)_n$ buscada.
Si existe, se define $y(n) := \frac{b(n-1)}{c(n)} x(n)$.

<u>`Paso 4`</u>

Se concluye definiendo $z_n := y(n) t_n$ y notando que $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} t_k$ admite una forma cerrada hipergeométrica dada por $S_n = z_n - z_0$

V Un par de ejemplos simples

<u>*(i)* $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} k!$ no admite forma cerrada hipergeométrica</u>

En este caso, $t_n = n!$, luego $r(n) = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$ con lo cual $a(n) = n+1$, $b(n) = c(n) = 1$. No necesitamos el algoritmo para calcular a, b, c porque se ven a simple vista y cumplen las hipótesis. Y como tenemos un teorema de unicidad, no hay que preocuparse más.
La ecuación (4.5), $a(n)x(n+1) - b(n-1)x(n) = c(n)$ se traduce como

$$(n+1)x(n+1) - x(n) = 1$$

que no tiene solución, ya que el lado derecho tiene grado 0 en n mientras que el izquierdo tiene grado mayor o igual a uno.
Usando el algoritmo que vimos para hallar (si existe) $x(n)$, tenemos deg$a = A = 1$, deg$b = B =$deg$c = C = 0$,con lo cual nos hubiéramos encontrado en el caso 1: deg$a \neq$ deg$b$. Luego el candidato a grado de $x(n)$ hubiera sido 4.7 $d =$ C- máx{A,B}, es decir, $d = 0 - 1$, que no es admisible como grado de un polinomio no nulo.

Implementado en Maple es:

```
>T:=k!;
```

$$T := k!$$

```
>Gosper(T,k);
```

$$\sum_{k=0}^{n-1} k!$$

Esta es la respuesta que da Maple cuando la sucesión del input no es sumable Gosper.

(ii) $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} kk!$ sí admite forma cerrada hipergeométrica

Acá $t_n = nn!$, luego $r(n) = \frac{(n+1)(n+1)!}{nn!} = \frac{(n+1)^2}{n}$

$$r(n) = \frac{a(n)}{b(n)} \frac{c(n+1)}{c(n)}$$

se escribe como

$$r(n) = \frac{n+1}{1} \frac{n+1}{n}$$

con lo cual $a(n) = n + 1$, $b(n) = 1$, $c(n) = n$ verifican todas las hipótesis.
La ecuación (4.5), $a(n)x(n+1) - b(n-1)x(n) = c(n)$ se traduce como

$$(n+1)x(n+1) - x(n) = n$$

y estamos otra vez en el caso 1, pero ahora deg$c = 1$, de donde, por 4.7 tenemos que $d = 1 - 1 = 0$.
Luego si existe $x(n)$, es un polinomio constante. De hecho $x(n) = 1$ es solución.
Ya estamos en el último paso de Gosper. Ahora definimos $z_n = \frac{b(n-1)}{c(n)} t_n = \frac{1}{n} nn! = n!$ y verificamos que

$$z_{n+1} - z_n = t_n$$

$$(n+1)! - n! = n![(n+1) - 1] = n!n = t_n$$

luego n! es sumable gosper y su suma admite una forma cerrada hipergeométrica, que es de la forma $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} kk! = S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} - z_k = z_n - z_0 = n! - 1$ es decir,

$$\sum_{k=0}^{n-1} kk! = n! - 1$$

Implemetado en Maple es:

```
>T:=k*k!;
```

$$T := kk!$$

```
>Gosper(T,k);
```

$$k!$$

Esta es la respuesta que da maple cuando la sucesión del input es Gosper sumable: responde con el término general de la sucesión hipergeométrica $(z_k)_k$ que buscábamos. En este ejemplo es, como ya vimos, $z_k = k!$.

<u>Observación</u>

Nótese otra vez la analogía con el caso de la integral: $\int e^{x^2} dx$ no puede expresarse en términos de las funciones elementales, mientras que $\int xe^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} + constante$ sí lo es.

-

Capítulo 5

Algoritmo WZ

Este algoritmo es obra de Doron Zeilberger y Herbert Wilf. Wilf trabaja en la University of Pennsylvania, en EE.UU. Él fue quien que se interesó por el trabajo de Zeilberger y se ocupó de rastrear y encontrar a la Hna. Celina, y de presentarla a la comunidad matemática. Su home page es: `http://www.cis.upenn.edu/~ wilf/`

Sobre el algoritmo:

I Para qué sirve

Este método sirve para probar identidades combinatorias **ya conocidas o conjeturadas**, es decir, trabaja a partir de una conjetura. Si llamamos f a la suma

$$f(n) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(n,k)$$

(siempre con $F(n,k)$ hipergeométricos) y si existe una función $r(n)$ tal que conjeturemos $f(n) = r(n)$, entonces el algoritmo WZ puede darnos una respuesta que cierre el problema. Este algoritmo funciona a partir del anterior, el algoritmo Gosper, en la siguiente forma.

Primero, normalizamos la conjetura: si $r(n) \neq 0\,\forall n$, renombramos $F(n,k) := \frac{F(n,k)}{r(n)}$, con lo cual, nuestra conjetura se transforma en

$$f(n) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(n,k) = 1\,(\forall n) \tag{5.1}$$

Una forma de probar que $f(n) = \textit{constante}$ es ver que

$$f(n+1) - f(n) = 0\,(\forall n) \tag{5.2}$$

Y una forma de demostrar esto último es hallando una función G que verifique:

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k) \tag{5.3}$$

(cf. algoritmo de Zeilberger), pues en tal caso, sumando sobre todos los valores de $k \in \mathbb{Z}$ obtenemos (5.2). Un par de funciones (F, G) que verifica (5.3) se llama *par WZ*.

Notemos que si para cada n fijo llamamos

$$t_k = F(n+1,k) - F(n,k)$$

el problema de hallar G se convierte en un problema del tipo que resuelve el algoritmo Gosper: hallar una recurrencia de primer orden para t_k.

Si existen $(z_k)_k$ términos hirpergeométricos tales que $t_k = z_{k+1} - z_k$, Gosper los encuentra, y si no existen, Gosper responde que no hay solución. Como esto lo hacemos para cada n fijo, podemos llamar

$$G(n,k) = z_k$$

Vimos en Gosper que $\frac{z_k}{t_k}$ es racional, luego $G(n,k)/F(n,k)$ también lo es: $\frac{z_k}{t_k} = \frac{G(n,k)}{F(n+1,k)-F(n,k)}$ pero $F(n+1,k) - F(n,k) = h(n,k)F(n,k)$ con h una función racional ya que como $F(n,k)$ es hipergeométrica, $\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} = h(n,k)$ con h racional. Despejando obtenemos $F(n+1,k) - F(n,k) = [h(n,k) - 1]F(n,k)$ y volviendo a llamar h a $h-1$ (que sigue siendo racional), obtenemos el resultado buscado, lo usamos para obtener

$$\frac{z_k}{t_k} = \frac{G(n,k)}{h(n,k)F(n,k)}$$

de donde se deduce que

$$R(n,k) := \frac{G(n,k)}{F(n,k)}$$

es una función racional en. Esta función R se llama *certificado de WZ*, y se obtiene, (como acabamos de ver), a partir del algoritmo Gosper.

El algoritmo WZ funciona a partir de este certificado, o sea que para tener éxito con WZ es preciso haber tenido éxito primero con Gosper.

II Cómo puede utilizarse para nuestro objetivo

1. Primero, pensemos a la función $\psi(x,y)$ como función de una variable evaluando en la diagonal:

$$\begin{aligned}\psi(x,x) &= \sum_{m,n\geq 0} F(m,n)x^{m+n}\\ &= \sum_{N\geq 0} A_N x^N\end{aligned}$$

   donde $A_N = \sum_{m=0}^{N} F(m, N-m)$.

2. Supongamos que tuviéramos una conjetura del estilo $\psi(x,x) = \frac{P(x)}{Q(x)^{\frac{1}{2}}}$ con $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ coprimos, con deg$Q \geq 1$. Demostrar esta conjetura bastaría para demostrar que $\psi(x,x)$ no es racional. Sobre la conjetura en sí hablaremos más adelante, (capítulo 8), pero supongamos que $Q(0) \neq 0$.

3. Trabajamos con la función racional que conjeturamos.

   Llamemos $\varphi(x) := \frac{P(x)}{Q(x)^{\frac{1}{2}}}$ y calculemos su desarrollo en serie de potencias (en algún radio de convergencia que siempre es positivo):

$$\varphi(x) = \sum_{N\geq 0} B_N x^N$$

   donde $B_N = \frac{\varphi^{(N)}(x)}{N!}$

4. Ahora, probar la conjetura $\psi(x,x) = \varphi(x)$ se reduce a probar que ambas series de potencias son iguales, y como esto se prueba coeficiente a coeficiente, lo que bastaría demostrar es la igualdad $A_N = B_N \, \forall N$.

   Y acá es donde aplicamos WZ, ya que ésta no es más que una identidad combinatoria: $\sum_{m=0}^{N} F(m, N-m) = B_N$.

III Cómo funciona el algoritmo

Sean $f(n) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(n,k)$ y $r(n)$ tales que se conjetura que $f(n) = r(n)$.

`Paso 1`

Normalizar: se redefine $F(n,k) := \frac{F(n,k)}{r(n)}$.
Ahora la conjetura es $\sum_{k\in\mathbb{Z}} F(n,k) = 1$

`Paso 2`

Para cada n fijo se define $t_k = F(n+1,k) - F(n,k)$ y se aplica Gosper a t_k.

Si Gosper responde que no hay solución, WZ fracasa.

Si Gosper responde con $(z_k)_k$, entonces $f(n)$ es constante.

$t_k = z_{k+1} - z_k$ y llamamos $G(n,k) = z_k$ y (F,G) es un par WZ. El certificado de WZ es la función $R(n,k) = G(n,k)/F(n,k)$

Evaluamos $f(n)$ en cualquier valor de n. Si da 1 ya está, si da alguna otra constante γ, entonces $f(n) = \gamma r(n)$

IV Un ejemplo

Veamos cómo WZ prueba la conocida identidad combinatoria

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Primero normalizamos y obtenemos $F(n,k) = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$
Ahora aplicamos Gosper a $t_k = F(n+1,k) - F(n,k)$, es decir,

$$t_k = \frac{\binom{n+1}{k}^2}{\binom{2n+2}{n+1}} - \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$$

Implementamos en Maple: ponemos
$\mathtt{U} = F(n,k) = \frac{n!^2}{(k!(n-k)!)^2}\frac{n!^2}{(2n)!}$ y $\mathtt{T} = t_k = F(n+1,k) - F(n,k)$.

```
> U:=(n!)^4/(k!)^2*(n-k)!*(n-k)!*(2n)!   ;
```

$$\frac{n!^4}{k!^2(n-k)!^2(2n)!}$$

```
> T:=subs(n=n+1,U)-U  ;
```

$$T := \frac{(n+1)!^4}{k!^2(n+1-k)!^2(2n+2)!} - \frac{n!^4}{k!^2(n-k)!^2(2n)!}$$

```
> Gosper(T,n);
```

$$-\frac{2(-n+k-1)^2(2n+1)\left(\frac{(n+1)!^4}{k!^2(n+1-k)!^2(2n+2)!} - \frac{n!^4}{k!^2(n-k)!^2(2n)!}\right)}{3n^3+7n^2+5n+1-8n^2k-12nk+4k^2n+2k^2-4k}$$

Aquí con Gosper concluímos que $\sum_{k=0}^{n} F(n,k) = cte$. Para ver que la constante es 1, evaluamos en $n = 0$: $\sum_{k=0}^{0} F(0,k) = F(0,0) = \frac{\binom{0}{0}^2}{\binom{2.0}{0}} = 1$ lo cual concluye la demostración.

La implementación en Maple con el algoritmo WZ es:

```
> U:=(n!)^4/(k!)^2*(n-k)!*(n-k)!*(2n)!;
```

$$\frac{n!^4}{k!^2(n-k)!^2(2n)!}$$

```
> w:=WZMethod(U,1,n,k,certif);
```

$$w := \left[\frac{n!^4}{k!^2(n-k)!^2(2n)!}, -\frac{(-3n-3+2k)k^2\left(\frac{(n+1)!^4}{k!^2(n+1-k)!^2(2n+2)!} - \frac{n!^4}{k!^2(n-k)!^2(2n)!}\right)}{3n^3+7n^2+5n+1-8n^2k-12nk+4k^2n+2k^2-4k}\right.$$

El output da el certificado de WZ, y la existencia de este certificado nos garantiza que nuestra conjetura es verdadera.

Capítulo 6

La asintótica

Antes que nada, recordemos que dadas dos sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ decimos que $(b_n)_n$ es la *asintótica* de $(a_n)_n$ (notación: $a_n \sim b_n$) si $lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = cte. \neq 0$.
Por ejemplo, la célebre *fórmula de Stirling* es $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2n\pi}$.

En este capítulo mostramos algunos resultados del libro *Combinatorics and Commutative Algebra*, de Stanley [18], sobre series de potencias de funciones racionales en una variable; buscando aplicaciones para nuestro problema. Stanley muestra cómo es la asintótica de los coeficientes de una tal serie, bajo ciertas condiciones. La utilidad de los resultados de Stanley para nuestro trabajo es inmediata. Pensemos a ψ como función de una variable y supongamos que podemos probar que se encuentra bajo las las condiciones de Stanley y que la asintótica de sus coeficintes *no* es como la que Stanley demuestra para funciones racionales. Entonces habremos probado que ψ no es racional.

Veamos entonces dos resultados del libro de Stanley.

Teorema 2 *Sean $a_1, ...a_d$ números complejos, con $d \geq 1$ y $a_d \neq 0$.*
Sea $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ una función, y sea φ la función generatriz de la sucesión $(f(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$, es decir:

$$\varphi(x) = \sum_{n\geq 0} f(n)x^n$$

Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *$\varphi(x)$ es racional. Más aún, existen polinomios $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ con $Q(x) = 1 + \sum_{i=1}^{d} a_i x^i$ ($a_d \neq 0$) y deg(P) $< d$ tales que $\varphi(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.*

2. $$\sum_{i=0}^{d} a_i f(n+d-i) = 0$$
   $\forall n \in \mathbb{N}_0$ $(a_0 := 1)$

3. $f(n) = \sum_{i=1}^{d} P_i(n)\gamma_i^n \, \forall n \in \mathbb{N}_0$
   donde $\prod_{j=1}^{s}(1 - x\gamma_j)^{d_j} = Q(x)$ *y* $P_i \in \mathbb{C}[n]$, $degP_i < d_i$.

Idea de la demostración: Definamos los siguientes $\mathbb{C}$-espacios vectoriales:

V_1 := {f :N→ $\mathbb{C}$ funciones que verifican (1)}
V_2 := {f :N→ $\mathbb{C}$ funciones que verifican (2)}
V_3 := {f :N→ $\mathbb{C}$ funciones que verifican (3)}
V_4 := {f :N→ $\mathbb{C}$ funciones tq su generatriz es $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{s} \frac{g_i(x)}{(1-x\gamma_i)^{d_i}}$
con $g_i \in \mathbb{C}[x]$, deg $g_i \leq d_i$, γ_i y d_i como en (3)}

Se puede probar que:

1)estos cuatro espacios tienen dimensión d (como $\mathbb{C}$-espacios vectoriales).

2)$V_4 \subseteq V_3$, $V_4 \subseteq V_1 \subseteq V_2$.

Probando 1) y 2) se concluye que los cuatro subespacios son iguales.

Por ejemplo, probar que $V_1 \subseteq V_2$ se reduce a notar que en la igualdad de (ii), ($\sum_{i=0}^{d} a_i f(n+d-i) = 0$) el lado iquierdo es el coeficiente de x^{d+n} en la expansión de $Q(x)\varphi(x)$; y que ese coeficiente es nulo por ser $\varphi(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *i.e:* $Q(x)\varphi(x) = P(x)$ con deg$P \leq d$.

Probar que $V_4 \subseteq V_1$ es simplemente escribir

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 0} f(n)x^n = \sum_{i=0}^{s} \frac{g_i(x)}{(1-x\gamma_i)^{d_i}}$$

y como la última sumatoria es finita, es una función racional que verifica todas las condiciones de (i).

Demostrar que $dim_{\mathbb{C}} V_1 = d$ es sencillamente escribir $Q(x)\varphi(x) = P(x)$ y como $deg(P) \leq d-1$ hay d coeficientes libres para elegir. (*i.e:* $\{\ 1, x, x^2, \ldots x^{d-1}\ \}$ es una base de V_1 como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.)

$\square$

Observación

Este teorema nos da una serie de equivalencias para φ racional pero de la forma $\varphi(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con deg$P$ <deg$Q$. Esto no es ninguna restricción, ya que si fuera deg$P$ $\geq$deg$Q$, con el algoritmo de división encontramos los únicos $L, R \in \mathbb{C}[x]$ con deg$R$ <deg$Q$ (o $R = 0$) tales que $P(x) = Q(x)L(x) + R(x)$, *i.e:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

De manera que $\varphi(x) = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ y como L es un polinomio, reemplazamos φ por $\varphi - L$ y aplicamos el teorema con la salvedad de que (iii) no vale $\forall n$ sino para n suficientemente grande. Esto está probado en el libro, incluso a partir de qué valor de n vale (iii). Omitimos aquí la demostración por ser muy técnica y algo tediosa.

Corolario 3 *Sean $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $d \in \mathbb{N}_0$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe $P \in \mathbb{C}[x]$, degP $\leq d$ tal que*

$$\sum_{n \geq 0} f(n)x^n = \frac{P(x)}{(1-x)^{d+1}}$$

2.

$$\sum_{i=0}^{d+1} (-1)^i \binom{d+1}{i} f(n+i) = 0$$

   $\forall n \in \mathbb{N}_0$. *(En cálculo de diferencias finitas, esta condición se nota $\Delta^{d+1} f(n) = 0$.)*

3. *$f(n)$ es un polinomio en n de grado menor o igual que d. Más aún, degf $= d \Longleftrightarrow P(1) \neq 0$. En tal caso, lc(P)=$\frac{P(1)}{d!}$.*

Demostración: Es un caso particular del teorema 2: $Q(x) = (1-x)^{d+1}$ Como las única raíz de Q es 1, la escritura de (iii) del teorema 2 resulta $f(n) = P(n) \, \forall n \in \mathbb{N}_0$ con deg $P < d + 1$.

$\square$

Entonces, dada una función racional $\varphi(x) = \sum_{n\geq 0} f(n)x^n$, para todo n suficientemente grande vale que

$$f(n) = \lambda^n \sum_{i=1}^{r} P_i(n)(\frac{1}{\lambda\alpha_i})^n$$

donde $\lambda = \text{máx}_{1\leq i\leq r}\frac{1}{|\alpha_i|}$.
Llamemos $\beta_i := \frac{1}{\lambda\alpha_i}$. Entonces, por definición de λ, $|\beta_i| \leq 1\,\forall i$. Luego existe algún $1 \leq j \leq r-1$ tal que

$$\begin{cases} |\beta_i| < 1 & 1 \leq i \leq j \\ |\beta_i| = 1 & j+1 \leq i \leq r \end{cases}$$

De lo cual se deduce claramente que $lím_{n\to\infty}\beta_i^n = 0 \ \ \forall\, 1 \leq i \leq j$

Ahora, como $f(n) = \lambda^n \sum_{i=1}^{r} P_i(n)\beta_i^n$ obtenemos que la asintótica de $f(n)$ es:

$$f(n) \sim \lambda^n \sum_{i=j+1}^{r} P_i(n)\beta_i^n \tag{6.1}$$

En el caso particular del corolario (3), en que el denominador tiene una única raíz; o más en general, en el caso en que el denominador tenga una única raíz de módulo mínimo, la asintótica es:

$$f(n) \sim \lambda^n P(n) \tag{6.2}$$

(juntamos en λ el producto de constantes $\lambda\beta$.)

Aplicaciones

Veamos cómo se aplica todo lo anterior a nuestra función ψ.

$\psi(x,0)$ es racional

Se deduce inmediatamente del teorema anterior y de su corolario. Primero veamos cómo es $\psi(x,0)$.

$$\begin{array}{lcl} \psi(x,0) & = & \sum_{m,n\geq 0} F(m,n)x^m 0^n \\ & = & \sum_{m\geq 0} F(m,0)x^m \,(\text{sólo sobrevive el término de}\, n=0) \\ F(m,0) & = & \frac{[p(m+0+k)-1]!}{(mp)!(0.p)!}\frac{[q(m+0+k)-1]!}{(mq)!(0.q)!} \\ & = & \frac{(pm+pk-1)!}{(pm)!}\frac{(qm+qk-1)!}{(qm)!} \text{ simplificando factoriales queda :} \\ & = & [(pm+pk-1)(pm+pk-2)...(pm+1)][(qm+qk-1)...(qm+1)] \end{array}$$

Es decir que $F(m,0)$ un polinomio en m.

Ahora notemos $\psi(x,0)=\varphi(x)$ y $F(m,0)=f(m)$ y estamos en las hipótesis del corolario de Stanley: $f(m)$ es un polinomio digamos de grado s, luego $\varphi(x)=\frac{P(x)}{(1-x)^{d+1}}$ donde $s\leq d$ y $\deg P\leq d$. En particular hemos probado que $\psi(x,0)$ es racional.

Hay otra forma de ver que $\psi(x,0)$ es racional que resulta interesante en sí misma, razón por la cual la mostramos a continuación. Mantenemos la notación: $\psi(x,0)=\varphi(x)$, y $F(m,0)=f(m)$. Como ya probamos que $f(m)$ es un polinomio, escribamos $f(m)=\sum_{i=0}^{s}a_i m^i$. Es decir,

$$\begin{array}{rcl}\varphi(x) & = & \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{s}a_i m^i\right)x^m \\ & = & \sum_{i=0}^{s}a_i\left(\sum_{m\geq 0}m^i x^m\right)\end{array}$$

Ahora veamos que para cada valor de $0\leq i\leq s$, $\sum_{m\geq 0}m^i x^m$ es racional. Como la suma de funciones racionales es racional, con esto queda probado que $\psi(x,0)$ es racional. Entonces, veamos primero qué pasa para algunos valores de i :

$$\begin{array}{rlcl} i=0: & \sum_{m\geq 0}x^m & = & \frac{1}{1-x} \\ i=1: & \sum_{m\geq 0}mx^m & = & x\sum_{m\geq 0}mx^{m-1} \\ & & = & x\left(\sum_{m\geq 0}x^m\right)' \\ & & = & \frac{x}{(1-x)^2}\end{array}$$

Para $i=2$ reemplazamos $m^2x^m=m(m-1)x^m+mx^m$ y resulta:

$$\begin{array}{rcl}\sum_{m\geq 0}m^2x^m & = & \sum_{m\geq 0}m(m-1)x^m+\sum_{m\geq 0}mx^m \\ & = & x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)''+x\left(\frac{1}{1-x}\right)' \\ & = & \frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}\end{array}$$

Observemos que $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(j)}=\frac{j!}{(1-x)^{j+1}}$ es racional. Luego basta ver que $\sum_{m\geq 0}m^i x^m$ se escribe como combinación polinomial de las derivadas de $\frac{1}{1-x}$. Razonando por inducción en i, ya lo vimos para $i=0,1,2$. Sea $i\geq 3$. Lo que queremos hacer es reemplazar el término $m^i x^m$ por alguna expresión que involucre un término de la forma $m(m-1)(m-2)\ldots(m-(i-1))x^m$. Para ello, simplemente desarrollamos

$$\begin{array}{rcl}m(m-1)(m-2)\ldots(m-(i-1)) & = & \sum_{l=0}^{i}s_l m^l \\ & = & m^i+\sum_{l=0}^{i-1}s_l m^l\end{array}$$

donde s_l son (salvo signo) los polinomios simétricos elementales en i variables evaluados en $0,1,\ldots,i-1$. Ahora despejamos m^i :

$$m^i = m(m-1)(m-2)\dots(m-(i-1)) - \sum_{l=0}^{i-1} s_l m^l$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{m\geq 0} m^i x^m &= x^i \textstyle\sum_{m\geq 0} m(m-1)...(m-i+1))x^{(m-i)} - \textstyle\sum_{m\geq 0}\left(\textstyle\sum_{l=0}^{i-1} s_l m^l\right) x^m \\ &= x^i \left(\tfrac{1}{1-x}\right)^{(i)} - \textstyle\sum_{l=0}^{i-1} s_l x^l \textstyle\sum_{m\geq 0} m^l x^{m-l}\end{aligned}$$

y usando inducción global concluimos que $\sum_{m\geq 0} m^i x^m$ efectivamente se escribe en términos de las derivadas de $\frac{1}{1-x}$. Hemos probado que $\psi(x,0)$ es racional.

$\psi(x,y)$ **no es racional para** $p = q = 1$

Llamemos $\varphi(x) := \psi(x,x)$. Entonces

$$\varphi(x) = \sum_{m,n\geq 0} F(m,n)x^{m+n}$$

$$= \sum_{n\geq 0}\sum_{m=0}^{n} F(m,n-m)x^n$$

Es decir que en la notación de Stanley, $f(n) = \sum_{m=0}^{n} F(m,n-m)$. Recordemos que

$$\psi(x,y) = \sum_{m,n\geq 0} \frac{[p(m+n+k)-1]!}{(mp)!(np)!}\frac{[q(m+n+k)-1]!}{(mq)!(nq)!}x^m y^n$$

luego

$$\varphi(x) = \sum_{n\geq 0}\sum_{m=0}^{n} \frac{[p(n+k)-1]!}{(mp)![(n-m)p]!}\frac{[q(n+k)-1]!}{(mq)![(n-m)q]!}x^n$$

y

$$f(n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{[p(n+k)-1]!}{(mp)![(n-m)p]!}\frac{[q(n+k)-1]!}{(mq)![(n-m)q]!}$$

Analicemos el caso $p = q = k = 1$. Resulta

$$f(n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{[(n+1)-1]!}{m!(n-m)!} \frac{[(n+1)-1]!}{m!(n-m)!}$$

es decir

$$f(n) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}\binom{n}{m} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}^2$$

pero hemos probado (con el algoritmo WZ) que $\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}^2 = \binom{2n}{n}$, luego

$$f(n) = \binom{2n}{n}.$$

Ahora estudiemos la asintótica de $f(n)$. Aplicando la citada fórmula de Stirling resulta:

$$\frac{(2n)!}{n!^2} \sim \frac{e^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{(e^{-n}(n)^n\sqrt{2\pi n})^2} = \frac{2^{2n}\sqrt{\pi n}}{\pi n}$$

es decir,

$$f(n) \sim 4^n n^{-\frac{1}{2}}$$

que no es de la forma probada por Stanley, $\lambda^n P(n)$ con P polinomio.

Con lo cual hemos probado que, en el caso $p = q = k = 1$, ψ no es racional. $\square$

Veamos ahora en qué se modifica todo lo anterior si mantenemos $p = q = 1$ pero dejamos libre el parámetro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

En este caso, tenemos

$$f(n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{[(n+k)-1]!}{m!(n-m)!} \frac{[(n+k)-1]!}{m!(n-m)!}$$

Notemos que

$$\frac{(n+k-1)!}{m!(n-m)!} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)n!}{m!(n-m)!} = (n+1)_{k-1}\binom{n}{m}$$

donde $(n+1)_{k-1}$ es el *símbolo de Pochammer:* para $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ se define:

$$\begin{aligned} (\alpha)_n &:= \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n-1) \\ &= \textstyle\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i) \\ &= \textstyle\prod_{i=1}^{n}(\alpha-1+i) \end{aligned}$$

Algunas propiedades del símbolo de Pochammer se verán en el capítulo 8. Ahora nos interesa que $(n+1)_{k-1}$ es un polinomio (de grado $k-1$) en n.

Continuemos:

$$\begin{array}{rcc} f(n) & = & \sum_{m=0}^{n}[(n+1)_{k-1}\binom{n}{m}]^2 \\ & = & (n+1)_{k-1}^2\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}^2 \\ & = & (n+1)_{k-1}^2\binom{2n}{n} \\ & \sim & (n+1)_{k-1}^2 4^n n^{-\frac{1}{2}}. \end{array}$$

y como el símbolo de Pochammer es un polinomio en n, la asintótica de $f(n)$ no puede ser de la forma probada por Stanley ($\lambda^n P(n)$ con P polinomio) por lo cual concluimos que ψ no es racional para el caso $p = q = 1$, para cualquier valor de $k \in \mathbb{N}$.

-

Capítulo 7

El sistema de Horn

En este capítulo analizaremos un sistema hipergeométrico de ecuaciones diferenciales del cual ψ es solución, viendo cómo esto puede ser útil para nuestro objetivo.

Así como en la primera parte definimos el operador en diferencias (capítulo 2), ahora necesitamos definir un *operador diferencial*.

Sea f una función escalar de n variables, $f = f(x_1, \ldots, x_n)$. Para cada $1 \leq i \leq n$ se nota

$$\theta_i(f) = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Por ejemplo, $\theta(x^m) = mx^m$.

Observemos que $\theta^2(x^m) = m^2 x^m$ y en general, $\theta^N(x^m) = m^N x^m$.

También notamos $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ por ejemplo:

$$f(x, y) = x^m + y^n \implies \theta(f)(x, y) = (mx^m, ny^n).$$

En el caso bivariado se definen, para $i = 1, 2$; los *operadores hipergeométricos* u *operadores de Horn* como

$$\begin{aligned} H_1 &= Q_1(\theta) - x_1 P_1(\theta), \\ H_2 &= Q_2(\theta) - x_2 P_2(\theta). \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde P_i, Q_i son polinomios bivariados que se factorizan como producto de formas lineales y satisfacen las *condiciones de compatibilidad:*

$$R_1(s + e_2) R_2(s) = R_2(s + e_1) R_1(s), \tag{7.2}$$

donde $R_i(s) = \frac{P_i(s)}{Q_i(s+e_i)}$ y $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
Por ejemplo veamos que los siguientes polinomios verifican (7.2) (que son producto de formas lineales es evidente).

$$\begin{cases} P_1(x_1,x_2) &=& (x_1+x_2)^2 \\ P_2(x_1,x_2) &=& (x_1+x_2)^2 \\ Q_1(x_1,x_2) &=& x_1^2 \\ Q_2(x_1,x_2) &=& x_2^2 \end{cases}$$

Expandimos R_i :

$$R_1(x_1,x_2) = \frac{P_1(x_1,x_2)}{Q_1(x_1+1,x_2)} \quad \text{y} \quad R_2(x_1,x_2) = \frac{P_2(x_1,x_2)}{Q_2(x_1,x_2+1)}$$

reemplazamos en (7.2):

$$\frac{P_1(x_1,x_2+1)}{Q_1(x_1+1,x_2+1)}\frac{P_2(x_1,x_2)}{Q_2(x_1,x_2+1)} = \frac{P_2(x_1+1,x_2)}{Q_2(x_1+1,x_2+1)}\frac{P_1(x_1,x_2)}{Q_1(x_1+1,x_2)}$$

lo cual es inmediato.
Es decir que los polinomios del ejemplo están en las hipótesis de Horn. Ahora veamos lo que se obtiene al aplicarles los operadores hipergeométricos.

$$\begin{cases} H_1 &=& Q_1(\theta) - x_1P_1(\theta) &=& \theta_1^2 - x_1(\theta_1+\theta_2)^2 \\ H_2 &=& Q_2(\theta) - x_2P_2(\theta) &=& \theta_2^2 + x_2(\theta_1+\theta_2)^2 \end{cases}$$

Por ejemplo, para $p = q = 1$, usando la traducción entre sistemas A-hipergeométricos y sistemas de Horn en [2, §5] la serie ψ en (1) satisface precisamente el sistema de Horn con

$$\begin{cases} P_i(x_1,x_2) &=& (x_1+x_2+k)^2 \\ Q_i(x_1,x_2) &=& x_i^2 \end{cases}$$

donde k es el otro parámetro de ψ. Para estos polinomios P_i, Q_i, la serie ψ satisface:

$$\begin{cases} H_1(\psi) &=& Q_1(\theta(\psi)) - x_1P_1(\theta(\psi)) &=& 0 \\ H_2(\psi) &=& Q_2(\theta(\psi)) - x_2P_2(\theta(\psi)) &=& 0 \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} H_1(\psi) &=& \theta_1^2(\psi) - x_1(\theta_1+\theta_2+k)^2(\psi) &=& 0 \\ H_2(\psi) &=& \theta_2^2(\psi) - x_2(\theta_1+\theta_2+k)^2(\psi) &=& 0 \end{cases} \tag{7.3}$$

Verifiquemos que, cuando $p = q = 1$, ψ efectivamente satisface el sistema de Horn (7.3). Por las simetrías del sistema y de ψ, basta chequear que es solución de la primera ecuación. Como

$$\psi(x,y) = \sum_{m,n\geq 0} F(m,n)x^m y^n,$$

es inmediato ver que
$\theta_1(\psi) = \sum_{m,n\geq 0} F(m,n)mx^m y^n$
$\theta_1^2(\psi) = \sum_{m,n\geq 0} F(m,n)m^2 x^m y^n$
$(\theta_1+\theta_2)(\psi) = \sum_{m,n\geq 0} F(m,n)(m+n)x^m y^n$
$\theta_1\theta_2(\psi) = \theta_1(\sum_{m,n\geq 0} F(m,n)nx^m y^n) = \sum_{m,n\geq 0} F(m,n)mnx^m y^n$
en particular, $\theta_1\theta_2(\psi) = \theta_2\theta_1(\psi)$
$(\theta_1+\theta_2)^2(\psi) = \sum_{m,n\geq 0} F(m,n)(m+n)^2 x^m y^n$
$(\theta_1+\theta_2+k)^2(\psi) = [(\theta_1+\theta_2)^2 + 2k(\theta_1+\theta_2) + k^2](\psi)$
$= \sum_{m,n\geq 0}[(m+n)^2 + 2k(m+n) + k^2]x^m y^n$
$= \sum_{m,n\geq 0}(m+n+k)^2 x^m y^n$

Entonces,

$$H_1(\psi) = \theta_1^2(\psi) - x_1(\theta_1(\psi) + \theta_2(\psi) + k)^2$$

se traduce como

$$H_1(\theta)(\psi) = \sum_{m,n\geq 0} F(m,n)m^2 x^m y^n - \sum_{m,n\geq 0} F(m,n)(m+n+k)^2 x^{m+1} y^n$$

con lo cual, para ver que

$$H_1(\theta)(\psi) = 0$$

basta probar que los coeficientes de estas dos series coinciden; es decir, queremos ver que siempre vale:

$$F(m+1,n)(m+1)^2 = F(m,n)(m+n+k)^2.$$

i.e.:

$$R(m,n) = \frac{F(m+1,n)}{F(m,n)} = \left(\frac{m+n+k}{m+1}\right)^2$$

Ahora recordemos que para $p = q = 1$, los coeficientes de ψ son $F(m,n) = \left(\frac{(m+n+k-1)!}{m!n!}\right)^2$, lo que implica que

$$R(m,n) = \left(\frac{(m+n+k)!}{(m+1)!n!}\frac{m!n!}{(m+n+k-1)!}\right)^2$$

que es lo que queríamos verificar.

En el paper "Elimination in codimension two", de 2001, Alicia Dickenstein y Bernd Sturmfels [6] han probado que el discriminante del sistema hipergeométrico puede expresarse como

$$\Delta_{pq}(x,y) = Res(f_{pq}(x,y,t), g_{pq}(x,y,t), y),$$

donde

$$f_{pq} = x(t+1)^{p+q} - (-1)^{p+q}t^{p+q}$$
$$g_{pq} = y(t+1)^{p+q} - (-1)^{p+q}$$

Es decir que de existir polinomios coprimos $P, Q \in \mathbb{Q}[x,y]$ tales que

$$\psi(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)^s} \tag{7.4}$$

entonces $Q = \Delta_{pq}$.

Por ejemplo, para el caso $p = q = 1$ `Maple` nos muestra que:

```
>f11:=x*(t+1)2-t2;
```

$$f_{11} := x(t+1)2 - t2$$

```
>g11:=y*(t+1)2-1;
```

$$g_{11} := y(t+1)2 - 1$$

```
>r11:=resultant(f11,g11,t);
```

$$r_{11} := -2y + y2 - 2yx + x2 - 2x + 1$$

Evaluando en la diagonal se obtiene

```
>r11x:=subs(y=x,q11);
```

$$q_{11}x := -4x + 1$$

En el capítulo 8 mostramos que, efectivamente, para $p = q = k = 1$,

$\psi(x,x) = \frac{1}{(1-4x)^{\frac{1}{2}}}$. Es decir, en la notación de (7.4), $P = 1$ $s = \frac{1}{2}$, lo cual demuestra que en este caso ψ no es una función racional, de acuerdo a la conjetura.

Una forma de probar que ψ no puede ser racional para p, q, k arbitrarios sería por lo tanto mostrar que ψ es de la forma (7.4) con $s \notin \mathbb{Z}$. Es posible demostrar que si $\psi(x,x)$ admite una escritura de esta forma, entonces $\deg(P) - s\deg(Q) < 0$, con lo cual, teniendo el denominador $Q = \Delta_{pq}$ uno podría tantear posibles valores fraccionarios (no enteros) para s, acotando así el grado de los posibles P. Esto permitiría tener una conjetura a quien aplicarle el algoritmo WZ, discutido en el capítulo 4. Si para algún valor no entero de s y para algún P el algoritmo nos responde que efectivamente $\psi(x,x) = \frac{P(x,x)}{Q(x,x)^s}$ entonces habremos probado que $\psi(x,x)$ no es racional (ver capítulo 8).

Sería muy útil en este sentido buscar una forma de generalizar esta idea que permita tener una demostración global para todos los valores de p, q, k.

Capítulo 8

Un caso particular

Proposición 4

$$p = q = k = 1 \Longrightarrow \psi(x,x) = \frac{1}{(1-4x)^{-\frac{1}{2}}}$$

Demostración: (1) En primer lugar, recordemos (ver capítulo 6) que en el caso $p = q = k = 1$ $\psi(x,x)$ es:

$$\psi(x,x) = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n$$

(2) En segundo lugar, consideremos la función

$$\varphi(x) := (1-4x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Veamos su desarrollo en serie de potencias para luego poder comparar sus coeficientes con los de ψ. Sabemos que

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} t^n$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \binom{\alpha}{n} & := & \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \\ & = & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n+1)} \end{array}$$

Reemplazando $t = -4x$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} (1-4x)^{-\frac{1}{2}} &= \textstyle\sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\frac{1}{2}-n+1)}(-4x)^n \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})(-1)^n 4^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2}-n)} x^n \end{aligned}$$

Recordemos algunas propiedades básicas de la función *Gamma*:

$$\begin{cases} \Gamma(n) &= (n-1)! \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \\ \Gamma(\alpha) &= (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \ \ \forall \alpha \in \mathrm{Dom}(\Gamma) \\ \Gamma(\frac{1}{2}) &= \pi^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Entonces,

$$\varphi(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}(-1)^n 4^n}{n!\Gamma(\frac{1}{2}-n)} x^n$$

(3) El tercer y último paso será comparar los coeficientes de ambas series de potencias:

$$\psi(x,x) = \varphi(x) \Leftrightarrow \binom{2n}{n} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}(-1)^n 4^n}{n!\Gamma(\frac{1}{2}-n)} \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Es decir, que todo se reduce a probar que la siguiente igualdad vale $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{(2n)!}{n!} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}(-1)^n 4^n}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}$$

Primero trabajemos con el miembro izquierdo agrupando pares e impares:

$$\begin{aligned} (2n)! &= (2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)...2.1 \\ &= 2.n(2n-1)2(n-1)(2n-3)2(n-2)...2.1 \\ &= 2^n n! \textstyle\prod_{i=1}^n (2i-1) \\ \tfrac{(2n)!}{n!} &= 2^n \textstyle\prod_{i=1}^n (2i-1) \\ &= 2^n 2^n \textstyle\prod_{i=1}^n (i-\frac{1}{2}) \\ &= 4^n \textstyle\prod_{i=1}^n (i-\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{(2n)!}{n!} = 4^n(-1)^n \prod_{i=1}^n (\frac{1}{2}-i)$$

Luego para ver que los coeficientes de la serie de potencias de $\varphi(x)$ coinciden con los de $\psi(x,x)$ basta ver que

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)} = \prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{2}-i)$$

Para ello recordemos el símbolo de Pochammer (cap.6) y veamos algunas de sus propiedades básicas:

$$(\alpha)_n := \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n-1)$$

$$\begin{cases} (1)_n &= n! \\ (m)_n &= \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!} \quad \forall m \in \mathbb{N} \\ (\alpha)_n &= \frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)} \quad \forall \alpha \notin \mathbb{Z}_{\leq 0} \end{cases}$$

Entonces para nuestro caso, llamando $\alpha = \frac{1}{2} - n$ tenemos que

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} = (\alpha)_n = \prod_{i=1}^{n}(\alpha-1+i) = \prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{2}-n-1+i)$$

Si ahora llamamos $-i := -n-1+i$ obtenemos

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)} = \prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{2}-i)$$

lo cual concluye la demostración. $\square$

Cómo se prueba lo mismo computacionalmente

Recordemos que la conjetura original era

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 &= \frac{(-4)^n\Gamma(\frac{1}{2})}{n!\Gamma(-\frac{1}{2}-n)} \\ &= \frac{(-1)^n 4^n}{n!}(\frac{1}{2}-n)_n \end{aligned}$$

Siguiendo la notación de Gosper y WZ:

$$\begin{cases} \varphi(n) &:= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 \\ F(n,k) &= \binom{n}{k}^2 \text{(es claramente hipergeométrica)} \\ r(n) &= \frac{(-1)^n 4^n}{n!}(\frac{1}{2}-n)_n \end{cases}$$

Ahora apliquemos el algoritmo Gosper:

Paso 1: normalizar

Renombramos $F(n,k) := \frac{F(n,k)}{r(n)}$, es decir,

$$F(n,k) = \frac{\binom{n}{k}^2(-1)^n n!}{4^n(\frac{1}{2}-n)_n}.$$

Ahora queremos probar que $\varphi(n) = 1$ ∀n∈ $\mathbb{Z}$.

Paso 2: certificado de WZ

Para obtener el cerfificado $R(n,k)$ usamos el Gosper con $t_k = F(n+1,k) - F(n,k)$:

$$t_k = \frac{\binom{n+1}{k}^2(-1)^(n+1)(n+1)!}{4^{n+1}(\frac{1}{2}-(n+1))_{n+1}} - \frac{\binom{n}{k}^2(-1)^n n!}{4^n(\frac{1}{2}-n)_n}$$

Para implementar en Maple volvemos a la notación anterior, escribiendo en términos de la función *Gamma* en vez del símbolo de Pochammer. Es decir, cambiamos $(\frac{1}{2}-n)_n$ por $\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma-\frac{1}{2}-n}$. Entonces el dato para poner en Maple es:

$$t_k = \frac{\binom{n+1}{k}^2(-1)^(n+1)(n+1)!}{4^{n+1}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma-\frac{1}{2}-n-1}} - \frac{\binom{n}{k}^2(-1)^n n!}{4^n\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma-\frac{1}{2}-n}}$$

$$t_k = \frac{\binom{n+1}{k}^2(-1)^(n+1)(n+1)!\Gamma(-\frac{3}{2}-n)}{4^{n+1}\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{\binom{n}{k}^2(-1)^n n!\Gamma(-\frac{3}{2}-n)}{4^n\Gamma(\frac{1}{2})}$$

A partir de aquí pasamos a Maple y terminamos como en el capítulo 5.

Proyecto de trabajo

Una idea que tenemos y en la que esperamos poder trabajar más adelante es la de estudiar qué pasaría para otros valores de p,q,k. Conjeturar la $\varphi(x)$ tal que $\varphi(x) = \psi(x,x)$ y hacer lo mismo que hicimos aquí : hallar el desarrollo en serie de Taylor de $\varphi(x)$ y comparar los coeficientes, usando WZ (que trabaja con conjeturas de identidades combinatorias) o Gosper.

-

Apéndice 1
Sobre las raíces enteras de un polinomio

Sea K un cuerpo y sea $P \in K[x]$. Nos interesan los ceros de P en $\mathbb{Z}$. Todo depende fuertemente de cuál sea el cuerpo K en el que trabajamos.

Si $K = \mathbb{Q}$ el problema se resuelve, por ejemplo, con el criterio de Gauss. De un polinomio en $\mathbb{Q}[x]$ pasamos fácilmente a uno en $\mathbb{Z}[x]$ (con las mismas raíces) vía la cancelación del denominador común de los coeficientes. Y una vez en $\mathbb{Z}[x]$, las únicas posibles raíces enteras del polinomio son los divisores del término independiente. Es claro que podemos suponer que éste término no es nulo, ya que en caso de serlo, tenemos que cero es raíz de multiplicidad m, luego sacando factor común x^m obtenemos un polinomio que se anula en las mismas raíces no nulas que el original y que no se anula en cero, por lo tanto su término constante es no nulo.

Existe un algoritmo aún más eficiente usando métodos p-ádicos en [L].

Si $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ el problema se cierra, por ejemplo, acotando el intervalo al que pertenecen las raíces reales, y evaluando en los finitos puntos enteros que pertenecen a ese intervalo.

Sobre cómo acotar el intervalo, Gentile prueba en [8] pág. 67 que si $P(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ y si $x_0 \in \mathbb{R}$ es raíz de P, entonces $|x_0| \leq \max\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\}$. Observemos que Gentile está usando polinomios mónicos, pero esto no restringe la generalidad, ya que como estamos en $\mathbb{C}$, siempre podemos, dado un polinomio no nulo, dividir por el coeficiente principal y obtener un polinomio mónico con las mismas raíces.

Existe otro resultado similar a éste pero con una cota diferente. Bajo las mismas hipótesis, $|x_0| \leq 1 + \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|$.

Esta cota no es mejor ni peor, sino que depende del polinomio en cuestión. Por ejemplo, si $P(x) = x + 2$, la primera cota es $\max\{1, 2\} = 2$ mientras que la segunda es $1 + \max\{2\} = 1 + 2 = 3$, luego la primera cota es mejor.
Pero si $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, la primera cota es $\max\{1, \sum_{i=0}^{3} 1\} = 4$ mientras que la segunda es $1 + \max\{1\} = 2$, con lo cual la mejor cota es la segunda.

Como dijimos, la primera cota está demostrada en [8]. La segunda, figura como ejercicio en [3] (chap.2, sec.1, ej.10). Veamos una prueba.

Proposición 5 *Sea $P \in \mathbb{C}[x]$ mónico, $P = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$.*
Si $x_0 \in \mathbb{R}$ es una raíz de P, entonces $|x_0| \leq B$, donde $B := 1 + \max_{0\leq i\leq n-1}|a_i|$

Demostración: Queremos ver que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0 \Rightarrow |x| \leq B$. Por contrarrecíproco, probemos que $\forall x \in \mathbb{R}, |x| > B \Rightarrow |P(x)| > 0$ en dos pasos:

1. $|x| > k \Rightarrow |P(x)| > k^n - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| k^i$ ($\forall k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$)
2. $B^n - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| B^i \geq 0$

Uniendo ambos resultados obtenemos $|x| > B \Rightarrow |P(x)| > B^n - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| B^i \geq 0$.
Por inducción en n :

$$\begin{aligned} \underline{n=1} \quad &\Rightarrow \quad P(x) = x + a_0 \\ &\Rightarrow \quad |P(x)| \geq |x| - |a_0| > k - |a_0| \end{aligned}$$

<u>Paso inductivo</u> Supongamos que vale para $n - 1$, veamos que vale para n.

$$\begin{aligned} |P(x)| &= |x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0| \\ &\geq |x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x| - |a_0| \\ &= |x||x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1| - |a_0| \\ &> k(k^{n-1} - \textstyle\sum_{i=0}^{n-2} |a_{i+1}| k^i) - |a_0| \text{ (hipótesis inductiva)} \\ &= k^n - \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| k^i \end{aligned}$$

Llamemos $\tilde{P}(x) := x^n - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| x^i$. Queremos ver que $P(B) > 0$.

$$\tilde{P}(B) = B^n - |a_{n-1}|B^{n-1} - \cdots - |a_2|B^2 - |a_1|B^1 - |a_0|$$

Vamos acotando por pasos. Antes recordemos que

$$B = 1 + \text{máx}_{0\leq i\leq n-1}|a_i|$$
$$\Rightarrow |a_0| < B \text{ y } |a_i| + 1 < B\,\forall 1 \leq i \leq n-1$$

Paso 1

$|a_0| < B \Rightarrow -|a_1|B - |a_0| > -|a_1|B - B = -B(|a_1|+1) \Rightarrow \tilde{P}(B) > B^n - |a_{n_1}|B^{n-1} - \cdots - |a_2|B^2 - B(|a_1|+1)$

Paso 2

$|a_1| + 1 < B \Rightarrow -B(|a_1|+1) > -B^2 \Rightarrow \tilde{P}(B) > B^n - |a_{n_1}|B^{n-1} - \cdots - |a_3|B^3 - B^2(|a_2|+1)$

Paso 3

$|a_2| + 1 < B \Rightarrow -B^2(|a_2|+1) > -B^3 \Rightarrow \tilde{P}(B) > B^n - |a_{n_1}|B^{n-1} - \cdots - B^3(|a_3|+1)$

$\ldots$

Paso $n-1$

$|a_{n-2}| + 1 < B \Rightarrow -B^{n-2}(|a_{n-2}|+1) > -B^{n-1} \Rightarrow \tilde{P}(B) > B^n - B^{n-1}(|a_{n_1}|+1)$

Paso n

$|a_{n-1}| + 1 < B \Rightarrow -B^{n-1}(|a_{n-1}|+1) > -B^n \Rightarrow \tilde{P}(B) > B^n - B^n = 0$

$\Longrightarrow \tilde{P}(B) > 0$

□

Con esto queda cerrado el problema de hallar las raíces enteras de cualquier polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$. Si trabajamos en un cuerpo de característica $p > 0$, las eventuales raíces enteras se encuentran simplemente evaluando el polinomio en los finitos restos módulo p.

-

Apéndice 2
Sobre el dominio de convergencia

Si bien no ha sido el tema central de este trabajo, es de notar que el dominio de convergencia de ψ contiene siempre un abierto no vacío alrededor del origen. Esto podría deducirse a partir de resultados generales de la teoría de D-módulos y del hecho de que ψ es una solución formal del sistema de Horn (ver [10] pág. 295-296). Gelfand, Kapranov y Zelevinsky afirman que el citado sistema es holónomo regular, pero aún no se ha publicado ninguna demostración de este hecho.

Veamos un ejemplo, una vez más para el caso $p = q = k = 1$:

$$\psi(x,y) = \sum_{m,n\geq 0} \binom{m+n}{m}^2 x^m y^n$$

donde x, y son variables complejas. Si $x = 0$ o bien $y = 0$ queda una serie de una variable que converge cuando la variable tiene módulo menor que uno:

$$\psi(0,y) = \sum_{n\geq 0} \binom{n}{0} y^n = \sum_{n\geq 0} y^n$$

Supongamos $xy \neq 0$ y separemos el análisis en dos casos según sea $|x| \leq |y|$ o $|y| \leq |x|$ (es claro que son casos simétricos.)

En la región $|x| \leq |y|$ podemos escribir $y = \lambda x$ con $|\lambda| \leq 1$ ($\lambda = \frac{y}{x}$.) Entonces para todo par $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x| \leq |y|\}$ tenemos que

$$\psi(x,y) = \psi(x,\lambda x) = \sum_{m,n\geq 0} \binom{m+n}{m}^2 x^{m+n} \lambda^m$$

luego (ver capítulo 6)

$$\begin{aligned} |\psi(x,y)| &\leq \textstyle\sum_{m,n\geq 0} \binom{m+n}{m}^2 |x|^{m+n} \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} |x|^n \end{aligned}$$

Esta última expresión es una serie de potencias de una variable real ($|x| \in \mathbb{R}$). Analizamos el cociente de D'Alambert de los coeficientes:

$$\begin{aligned} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \frac{n!^2}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \\ &= 2\frac{2n+1}{n+1} \end{aligned}$$

Es decir que $\mathit{lím}_{n\to\infty} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = 4$ con lo cual, el radio de convergencia de $\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} |x|^n$ es $\frac{1}{4}$. Esto significa que siempre que $|x| < \frac{1}{4}$, tendremos que $\psi(x, \lambda x)$ converge para todo valor de $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1$.

Como la cuenta que acabamos de hacer es simétrica en x y en y, tenemos que lo mismo vale para $\psi(\lambda x, x)$. Es decir, hemos probado que, ya sea que estemos en la región $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x| \leq |y|\}$ o en $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |y| \leq |x|\}$ podemos garantizar convergencia absoluta para $|x| < \frac{1}{4}$ y $|y| < \frac{1}{4}$.

Para p, q, k arbitrarios creemos poder conjeturar que hay convergencia absoluta siempre que $|x|$ y $|y|$ sean menores que $1/(p+q)^{(p+q)}$, pero la demostración previa no se generaliza de manera trivial.

Referencias

[1] George E. Andrews, Richard Askey, Ranjan Roy; Special Functions. Cambridge University Press, 1999

[2] E.Cattani, A.Dickenstein, B.Sturmfels, Rational Hypergeometric Functions. Compositio Mathematica 128, 217-240, 2001.

[3] David Cox, John Little, Donal O'Shea; Using algebraic geometry; Springer, 1998

[4] F. Chyzak, Fonctions holomorphes en calcul formel, Thse de 3me. Cycle, disponible en: http://www-rocq.inria.fr/algo/chyzak.

[5] A. Dickenstein, Hypergeometric functions with integer homogeneities, en: Proc. Meeting on Complex Analysis (June -July 1998), Eds. F.Norguet- S. Ofman, International Press, por aparecer.

[6] A. Dickenstein, Bernd Sturmels; Elimination theory in codimension two; Journal of symbolic computation, (2002), 34, 119-135

[7] Johann Carl Friedrich Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam. Comment. Soc. Regiae Sci. Götingen (1812)

[8] Enzo R. Gentile, Anillo de polinomios. Matemática universitaria - Editorial Docencia, 1980

[9] I.M. Gel'fand, M.M. Kapranov, A.V.Zelevinsky, Hypergeometric functions and toral manifolds.Functional Analysis and its Applications 23 (1989) 94–106.

[10] I.M. Gel'fand, M.M. Kapranov, A.V.Zelevinsky; Discriminants, resultants, and multidimensional determinants. Birkhäuser. 1994

[11] Ernst Eduard Kummer. Über die hypergeometrische Rehie $F(a, b, c, x)$. J. fur Math.,15,1836

[12] R. Loos, Computing rational zeros of integral polynomials by p-adic expansion, SIAM J. Comp. 12 (1983), 286-293

[13] M. Petkovsek, H. Wilf, D. Zeilberger: A=B, A. K. Peters Ltd., 1996.

[14] Robert H. Risch, The solution of the problem of integration in finite terms, Boletín de la American Mathematical Society, 76 (1970), 605-608.

[15] T. Sadykov, On the Horn system of partial differential equations and series of hypergeometric type. Math. Scandinavica. 91, no. 1, 127-149, 2002.

[16] Lucy Joan Slater. Generalized hypergeometric functions. Cambridge University Press, 1966

[17] M. Saito, B. Sturmfels, N. Takayama: Groebner deformations of hypergeometric differential equations. Algorithms and Computations in Mathematics, Volume 6, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000.

[18] R. Stanley: Combinatorics and Commutative Algebra, 2nd. Edition, Progress in Mathematics 41, Birkhuser, Boston, 1996.