# Conjuntos Inconmensurables

Carolina Alejandra Mosquera

Director: Carlos Cabrelli

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Marzo 2009

# Índice general

# Agradecimientos

A mi papá, mi mamá, mi hermana y mis abuelos por su cariño, por apoyarme y alentarme a lo largo de toda esta carrera, por alegrarse por mis logros y por entender mis ausencias durante las épocas de exámenes.

A Lean por su amor, por su ayuda, por su paciencia, por alentarme, por contenerme en todo momento y estar siempre a mi lado, por ser mi cable a tierra.

A Carlos Cabrelli por dirigirme en esta tesis, por el tiempo dedicado, por entender mis tiempos, por festejar mis logros por más pequeños que sean, por el ser el responsable de mi gusto por el Análisis Armónico y por su guía académica no sólo durante el desarrollo de esta tesis si no también durante los últimos años.

Al grupo de Análisis Armónico por dejar integrarme y empezar a conocerlos, en especial a Magui y a Vicky. Quiero agredecer también a Ursula Molter por el cariño con el que siempre me trata.

A mis amigos y compañeros por todos los apuntes que me prestaron, por las horas de estudio juntos, por las charlas por teléfono casi interminables y por los todos los momentos compartidos dentro y fuera de la facu. En particular a: Ani, Mer, Lau B, Magui, Nico, Dany, Pabli, Pau, Vicky, Isa, Kari, Juli, Pablo T, David, Georgi, Lau N., Eze M., Sol, Ana F., Manu M., Manu C., Marce, Eze E., Lucas.

A Teresa Krick por brindarnos tan amablemente su ayuda técnica.

A mis coordinadores y compañeros del CBC por el tiempo compartido, en especial quiero agradecerle a Alicia Scarfiello por los momentos compartidos y por el cariño que me demuestra cada vez que la veo.

# Capítulo 1

# Introducción

Los resultados que desarrollaremos en esta tesis se ubican en el contexto de la Teoría Geométrica de la Medida, en particular en el problema de la dimensión.

La teoría de la dimensión, iniciada por Hausdorff en 1919, en su seminal artículo [4], define para cada número real no negativo $s$, una medida $s-$dimensional $\mathcal{H}^s$.

La propiedad básica es que para cada conjunto $E$ del espacio euclideo existe un número real $d \geq 0$ tal que la medida $\mathcal{H}^s$ es infinita para valores de $s$ menores que $d$ y es cero para valores mayores que $d$. El conjunto $E$ se dice en ese caso que tiene dimensión de Hausdorff $d$ y lo notamos con $d = \dim_H(E)$.

Si $d = \dim_H(E)$ y $0 < \mathcal{H}^d(E) < +\infty$ se dice que $E$ es un $d$-set. Si por el contrario $\mathcal{H}^d(E)$ es cero o infinito, el conjunto $E$ no es tipicamente un conjunto $d$-dimensional, pese a que su dimensión de Hausdorff es $d$.

Una forma de solucionar este problema podría ser utilizar otra definición de dimensión. En esta dirección Tricot [13], introduce las medidas packing donde los cubrimientos de las medidas de Hausdorff son reemplazados por empaquetados por bolas disjuntas.

La noción de dimensión obtenida a partir de estas nuevas medidas es en cierta forma dual a la dimensión de Hausdorff y no resuelve el problema de la no-dimensionalidad.

Otra posible estrategia es utilizar la generalización definida por Hausdorff de las medidas s-dimensionales. Hausdorff extendió la teoría reemplazando en la definición de medida $\mathcal{H}^s$ la función $h(x) = x^s$ por una función arbitraria $h$ que está definida en los reales no negativos, que en cero vale cero, creciente y continua por derecha, es decir lo que se define como función dimensión. La medida obtenida en este caso, que llamaremos $\mathcal{H}^h$, se denomina $h$-dimensional. Un conjunto con la propiedad de que su medida $h$-dimensional es positiva y finita se denomina un $h$-set y $h$ se denomina la función dimensión exacta, para el conjunto $E$.

La pregunta que surge es si esta teoría alcanza, en el sentido de si todo conjunto de un espacio métrico $X$ es un $h$-set para alguna función dimensión $h$.

Varios autores, en particular el mismo Hausdorff, dieron ejemplos de $h$-sets con función dimensión $h$ distinta de una potencia. En particular se sabe que dada cualquier función dimensión $h$ siempre existe un $h$-set para esa función $h$. Ver para esto, por ejemplo [11].

En esta tesis se estudiará la pregunta recíproca en el caso euclideo, es decir, si cada conjunto del espacio euclideo es un conjunto $h$-dimensional para alguna función dimensión $h$.

Mostraremos primero dos ejemplos construidos por E. Best en 1939 [1] de conjuntos inconmensurables, es decir, conjuntos $E$ para los cuales $\mathcal{H}^h(E)$ es cero o infinito para cualquier función dimensión $h$.

Luego se estudiará el conjunto de los números de Liouville

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \forall n \in \mathbb{N} \text{ existen } p, q \in \mathbb{Z} \text{ con } q > 1 \text{ tal que } \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

Siguiendo el desarrollo de Olsen ([7], [8]), mostraremos que $\mathbb{L}$ es inconmensurable. Más aún, mostraremos cuál es el “punto de corte exacto” en el cual la medida de Hausdorff $\mathcal{H}^h(\mathbb{L})$ pasa de infinito a cero, clasificando las funciones dimensión en dos clases $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_\infty$ de forma tal que la medida es cero para $h$ en el primer conjunto y es infinito para $h$ en el segundo.

Posteriormente se estudiará un resultado más general, debido a Elekes y Keleti [3], que muestra que el conjunto de Liouville $\mathbb{L}$ tiene medida cero o no $\sigma$-finita no sólo para las medidas $h$-dimensionales sino también para cada medida de Borel de $\mathbb{R}$ invariante por traslaciones.

# Capítulo 2

# Definiciones y Notaciones

La medida de Hausdorff proporciona un camino natural para medir el volumen $t$-dimensional de un conjunto. Estas ideas fueron introducidas por C. Carathéodory en 1914 y luego generalizadas por F. Hausdorff en 1919. La idea de definir una medida para extender la noción de longitud de un intervalo para conjuntos más complicados se remonta a la década de 1980.

Carathéodory se interesó en la siguiente cuestión: ¿Cuál es la "medida" natural de un conjunto de $\mathbb{R}^n$?

Denotemos con $\text{diám}(E) = |E|$ para todo $E \subset \mathbb{R}^n$.

Para $\delta > 0$, definimos la $\delta-$ **aproximación** de la medida de un conjunto $E$ de $\mathbb{R}^n$ por:

$$\mathcal{H}_\delta(E) = \text{ínf}\left\{\sum_i |E_i| : E \subset \bigcup_{i\geq 1} E_i,\ |E_i| < \delta\right\},$$

es decir, miramos todos los cubrimientos de $E$ por conjuntos de diámetro menor que $\delta$ y minimizamos la suma de sus diámetros. La **longitud** (o medida en $\mathbb{R}$) $\mathcal{H}(E)$ de $E$ es ahora definida por:

$$\mathcal{H}(E) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}_\delta(E).$$

Hausdorff extendió la idea en el caso $m-$ dimensional.

La medida $m$-dimensional se basa en la suma

$$\sum_i |E_i|^m,$$

de diámetros de los conjuntos $E_i$ a la $m-$ésima potencia.

Sea ahora $X$ un espacio métrico (Hausdorff trabajó en realidad en $\mathbb{R}^n$), y $t \geq 0$ un número real arbitrario positivo. Sea $E \subset X$ un subconjunto y $\delta > 0$.

La $\delta$-aproximación de la medida de Hausdorff $t$-dimensional $\mathcal{H}^t_\delta(E)$ de $E$ se define por:

$$\mathcal{H}^t_\delta(E) = \text{ínf}\left\{\sum_i |E_i|^t : E \subset \bigcup_{i\geq 1} E_i,\ |E_i| < \delta\right\},$$

y la **medida de Hausdorff $t$-dimensional** de $E$, que la notamos con $\mathcal{H}^t(E)$, se define por:

$$\mathcal{H}^t(E) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^t_\delta(E).$$

Se puede ver que para cada conjunto $E$ existe un único valor $t = dim(E)$, para el cual la medida de Hausdorff $\mathcal{H}^t(E)$ “salta” de infinito a cero, *i.e.*,

$$\mathcal{H}^t(E) = \begin{cases} \infty & \text{para } t < dim(E), \\ 0 & \text{para } t > dim(E). \end{cases}$$

El número $\dim(E)$ se llama **dimensión de Hausdorff** de $E$.

Listemos ahora algunas propiedades principales de la medida de Hausdorff y de la dimensión de Hausdorff que luego usaremos:

1. Si $f$ es una similaridad en $\mathbb{R}^n$, *i.e.*, $|f(x) - f(y)| = r|x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces $\mathcal{H}^t(f(E)) = r^t\mathcal{H}^t(E)$ para todo $E \subset \mathbb{R}^n$.

2. La dimensión de Hausdorff es monótona: si $E \subset F$, entonces $\dim(E) \leq \dim(F)$.

3. $\dim(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \dim(E_n)$.

4. Si $E$ es un subconjunto numerable de $\mathbb{R}^n$, entonces $\dim(E) = 0$.

5. Los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tienen la ”dimensión correcta”: Si $G$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ entonces $\dim(G) = n$.

6. En el espacio euclideo $n$-dimensional $\mathbb{R}^n$, la medida de Hausdorff $n$-dimensional es proporcional a la medida de Lebesgue $n$-dimensional.

Como ejemplo probemos ahora que la dimensión de Hausdorff de $C$ = Cantor $1/3$ es $\frac{log2}{log3}$. Para esto consideremos dos similaridades:

$$f_1(x) = \frac{x}{3} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}.$$

Tenemos entonces que

$$C = f_1(C) \cup f_2(C) = \frac{1}{3}C \cup \left(\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}\right).$$

Como $f_1(C)$ y $f_2(C)$ son disjuntos y $\mathcal{H}^t$ es una medida, obtenemos

$$\mathcal{H}^t(C) = \mathcal{H}^t(f_1(C)) + \mathcal{H}^t(f_2(C)).$$

Por otro lado tenemos que

$$\mathcal{H}^t(f_1(C)) = \frac{1}{3^t}\mathcal{H}^t(C) \quad \text{y} \quad \mathcal{H}^t(f_2(C)) = \frac{1}{3^t}\mathcal{H}^t(C).$$

Entonces resulta

$$\mathcal{H}^t(C) = \frac{1}{3^t}\mathcal{H}^t(C) + \frac{1}{3^t}\mathcal{H}^t(C) = 2\frac{1}{3^t}\mathcal{H}^t(C),$$

de lo que se tiene que $1 = 2\frac{1}{3^t}$, es decir, $t = \frac{log2}{log3}$.

Así deducimos que la dimensión de Hausdorff de $C$ es igual a $\frac{log2}{log3}$.

Lo anterior es sólo un razonamiento heurístico que sólo está justificado si $\mathcal{H}^t(C)$ es finito y positivo; pero esto es así: se puede probar que si $t = \dim(C) = \frac{log2}{log3}$ entonces $\mathcal{H}^t(C) = 1$.

En el anterior ejemplo, entonces, la medida de Hausdorff $\mathcal{H}^t(C)$ con $t = \dim(C)$ es finita y positiva, pero no siempre ocurre esto.

Una posible forma de solucionar este problema es utilizar la generalización definida por Hausdorff de las medidas $t$-dimensionales.

Hausdorff extendió la teoría reemplazando en la definición de la medida $\mathcal{H}^t$ la función $h(x) = x^t$ por otro tipo de funciones definidas en los reales no negativos, que en cero valen cero, crecientes y continuas por derecha que son llamadas **funciones dimensión**.

Para una función dimensión $h$ definimos la **medida h-dimensional de Hausdorff** $\mathcal{H}^h$ como sigue. Para $E \subset X$ y $\delta > 0$ escribimos

$$\mathcal{H}^h_\delta(E) = \text{ínf}\left\{\sum_i h(|E_i|) : E \subset \bigcup_{i\geq 1} E_i,\ |E_i| < \delta\right\}.$$

La medida $h$-dimensional de Hausdorff $\mathcal{H}^h(E)$ de $E$ es entonces definida por

$$\mathcal{H}^h(E) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^h_\delta(E).$$

Un conjunto con la propiedad que su medida $h-$dimensional es positiva y finita se denomina un **h-set** y $h$ se denomina la **función dimensión exacta** para el conjunto $E$.

Así, por ejemplo, la función $h(r) = r^t$ con $t = \dfrac{log2}{log3}$ es la función dimensión exacta del Cantor $1/3$.

Otro ejemplo es el siguiente:

Un camino browninano $X$ tiene, con probabilidad 1, dimensión de Hausdorff 2 sin embargo su medida de Hausdorff 2-dimensional es cero. En este caso la función dimensión $x^2$ requiere una corrección logarítmica para obtener un $h$-set. La función dimensión exacta viene dada por

$$h(r) = \begin{cases} r^2 log\left(\frac{1}{r}\right) logloglog\left(\frac{1}{r}\right) & \text{para } n = 2, \\ r^2 loglog\left(\frac{1}{r}\right) & \text{para } n \geq 3. \end{cases}$$

Una vez dada la definición de medida de Hausdorff $h$-dimensional con $h$ una función dimensión y desarrollada esta teoría, una pregunta que surge es si esta teoría alcanza, en el sentido de si todo conjunto es un $h$-set para alguna función dimensión $h$.

Varios autores (en particular el mismo Hausdorff) dieron ejemplos de $h$-sets con función dimensión $h$ distinta de una potencia. En particular se sabe que dada cualquier función dimensión $h$, siempre existe un $h$-set para esa función $h$. Ver por ejemplo [11].

Interesa entonces la pregunta recíproca, es decir, si cada conjunto es un conjunto $h$-dimensional para alguna función dimensión $h$.

En 1939 E. Best [1], construyó el primer ejemplo de un conjunto acotado $E$ tal que para cada función dimensión $h$, se tiene que $\mathcal{H}^h(E)$ es cero o infinito. Un conjunto con esta propiedad lo llamaremos **inconmensurable** o también inmedible.

Una pregunta más interesante es si existen conjuntos inconmensurables tales que para toda función dimensión $h$, su medida Hausdorff $h$ es cero o no $\sigma$-finita. En el capítulo 5 mostraremos que el conjunto de Liouville tiene esta propiedad.

Más adelante, en el último capítulo, daremos una demostración debida a Elekes y Keleti que prueba un resultado más fuerte. Se verá que el conjunto de Liouville tiene medida cero o no $\sigma$-finita para toda medida de Borel de $\mathbb{R}$ invariante por traslaciones, esto incluye en particular a las medidas $h$-packing. Esto da una noción de inconmensurabilidad más general.

La importancia de esta prueba es que da un método para construir otros ejemplos de conjuntos inconmensurables en este sentido fuerte, ya que no se conocen muchos ejemplos en la literatura.

# Capítulo 3

# Primeros ejemplos en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$

En este capítulo nos dedicaremos a mostrar los dos ejemplos desarrollados por E. Best en 1939 [1] de conjuntos inconmensurables, es decir, tales que su medida de Hausdorff generalizada es cero o infinito.

Trabajaremos con $\lambda(t)$ una función de variable real $t$, definida en algún intervalo $0 \leq t \leq t_0$, continua, cóncava, estrictamente creciente y tal que $\lambda(0) = 0$. (Es decir $\lambda$ es una función dimensión cóncava.)

Vamos a contruir primero el ejemplo en $\mathbb{R}^2$.

Tomemos un conjunto cerrado $B \subset [0, 1]$. Luego consideremos para cada $r \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_r = \left\{\frac{1}{r}\right\} \times B$ y para $r = 0$ definamos $A_0 = \{0\} \times B$. Cada $A_r$ es cerrado. Definamos $A = \bigcup_{r=0}^{\infty} A_r$. Entonces resulta que

$$\begin{aligned}
\text{Si } \mathcal{H}^\lambda(A_r) &= 0 \text{ entonces } \mathcal{H}^\lambda(A) = 0. \\
\text{Si } \mathcal{H}^\lambda(A_r) &> 0 \text{ entonces } \mathcal{H}^\lambda(A) = \infty.
\end{aligned}$$

Veamos la anterior afirmación.

Sean $A_r$ y $A'_r$ con $r \neq r'$. Supongamos que $\dfrac{1}{r'} < \dfrac{1}{r}$.

Dado $\rho > 0$, si $U_n = U(A'_r, \rho)$ es un $\rho$-cubrimiento de $A'_r$, entonces (usando la similaridad entre $A_r$ y $A'_r$) la traslación del cubrimiento $U_n$ en $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r'} > 0$, al que llamamos $\{\widetilde{U_n}\}$, es cubrimiento de $A_r$ tal que $|U_n| = |\widetilde{U_n}|$ para todo $n$.

Observemos además que hay una biyección entre $U_n$ y $\{\widetilde{U_n}\}$ por lo que $\#U_n = \#\{\widetilde{U_n}\}$.

Entonces ínf $\sum_{\{U_n\}} \lambda(d_n) = \text{ínf} \sum_{\{\widetilde{U_n}\}} \lambda(\widetilde{d_n})$; de lo que resulta que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^\lambda(A_r) &= \lim_{\rho\to 0} \text{ínf} \sum_{U(A_r,\rho)} \lambda(d_n) \\
&= \lim_{\rho\to 0} \text{ínf} \sum_{U(A'_r,\rho)} \lambda(\widetilde{d_n}) \\
&= \mathcal{H}^\lambda(A'_r).
\end{aligned}$$

Es decir, $\mathcal{H}^\lambda(A_r) = \mathcal{H}^\lambda(A_{r'})$ para todos $r, r'$.

Luego, si $\mathcal{H}^\lambda(A_r) = 0$ para algún $r$, entonces $\mathcal{H}^\lambda(A_r) = 0$ para todo $r$; entonces

$$\mathcal{H}^\lambda(A) = \mathcal{H}^\lambda\left(\bigcup_{r=0}^{\infty} A_r\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{H}^\lambda(A_r) = 0.$$

Si $\mathcal{H}^\lambda(A_r) = \alpha > 0$ para algún $r$ entonces $\mathcal{H}^\lambda(A_r) = \alpha$ para todo $r$; entonces

$$\mathcal{H}^\lambda(A) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{H}^\lambda(A_r) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha = \infty.$$

Luego el conjunto $A$ es inconmensurable.

Observemos que en el anterior ejemplo no usamos que $\lambda$ sea cóncava por lo que dicho ejemplo sirve para cualquier función dimensión.

Notemos además que éste es un ejemplo de un conjunto en $\mathbb{R}^2$ que resulta de medida de Hausdorff cero o infinita para cualquier función dimensión $h$ y de medida $\sigma$-finita. En los siguientes capítulos nos dedicaremos a un ejemplo de un conjunto que para toda función dimensión $h$ resulta de medida de Hausdorff $h$-dimensional o bien cero o bien no $\sigma$-finita.

Pasemos ahora al ejemplo en $\mathbb{R}$.

Hausdorff demostró que si definimos en forma análoga al Cantor $\frac{1}{3}$, el Cantor $\xi$, $C_\xi$, con $\xi < \dfrac{1}{2}$ (sacando en un primer paso del intervalo $[0, 1]$ una longitud de $1-2\xi$ del centro del intervalo, y luego sacando una medida proporcional a $1-2\xi$ de cada uno de los centros de los dos intervalos del primer paso, y así sucesivamente), entonces $\mathcal{H}^\lambda(C_\xi) = 1$, donde $\lambda(t) = t^\alpha$ y $\alpha = \dfrac{-log2}{log\xi}$.

Es fácil probar que si queremos reducir este conjunto $C_\xi$ de manera uniforme a un intervalo de longitud $d$ entonces su medida es $d^\alpha$ con la misma función dimensión.

En efecto, sabemos que $\mathcal{H}^\lambda(C_\xi) = 1$ donde $\lambda(t) = t^\alpha$ y $\alpha = \dfrac{-log2}{log\xi}$. Si llamamos $C_\xi^d$ a la reducción del $C_\xi$ a un intervalo de longitud $d$, entonces resultará que $\mathcal{H}^\lambda(C_\xi^d) = d^\alpha$, $\lambda(t) = t^\alpha$ y $\alpha = \dfrac{-log2}{log\xi}$. En efecto, por definición es

$$\mathcal{H}_\rho^\lambda(C_\xi) = \text{ínf} \sum_{U(C_\xi,\rho)} \lambda(d_r) \quad \text{y} \quad \mathcal{H}^\lambda(C_\xi) = \lim_{\rho\to 0} \mathcal{H}_\rho^\lambda(C_\xi),$$

(análogamente para $C_\xi^d$).

Escribamos $U_r = U(C_\xi, \rho)$. Si las esferas $U_r$ tienen diámetro $d_r$ entonces para $C_\xi^d$ tenemos $U(C_\xi^d, \rho) = U_r^d$, donde notamos con $U_r^d$ a las esferas de diámetro $dd_r$.

De la definición de $\lambda$ tenemos que

$$\lambda(dd_r) = (dd_r)^\alpha = d^\alpha d_r^\alpha = d^\alpha \lambda(d_r).$$

Así,

$$\begin{aligned} \sum_{U(C_\xi^d,\rho)} \lambda(dd_r) &= \sum_{U(C_\xi,\rho)} d^\alpha \lambda(d_r) \\ &= d^\alpha \sum_{U(C_\xi,\rho)} \lambda(d_r). \end{aligned}$$

Tomando ínfimo,

$$\mathcal{H}^\lambda(C_\xi^d) = d^\alpha \mathcal{H}^\lambda(C_\xi) \quad \text{y} \quad \lim_{\rho\to 0} \mathcal{H}_\rho^\lambda(C_\xi^d) = d^\alpha \lim_{\rho\to 0} \mathcal{H}_\rho^\lambda(C_\xi).$$

Luego,

$$\mathcal{H}^\lambda(C_\xi^d) = d^\alpha \mathcal{H}^\lambda(C_\xi) = d^\alpha.$$

Para $r \in \mathbb{N}$ consideremos ahora el intervalo $\left(\dfrac{1}{r+1}, \dfrac{1}{r}\right)$ en $\mathbb{R}$. Construyamos sobre éste el conjunto considerado antes para $d = \frac{1}{r(r+1)}$ y llamésmolo $E_r$.

Resulta que su medida es $\left(\dfrac{1}{r(r+1)}\right)^{\frac{-log2}{log\xi}}$. Esto se debe a que la longitud del intervalo $\left(\dfrac{1}{r+1}, \dfrac{1}{r}\right)$ es $d = \frac{1}{r(r+1)}$ y $\alpha = \frac{-log2}{log\xi}$.

Agregando el origen para que sea un conjunto cerrado, definamos

$$E = \bigcup_{r=1}^{\infty} E_r.$$

Entonces, como $E_r \cap E_{r'} = \emptyset$ si $r \neq r'$ pues $\left(\frac{1}{r+1}, \frac{1}{r}\right) \bigcap \left(\frac{1}{r'+1}, \frac{1}{r'}\right) = \emptyset$ y $E_r \subset \left(\frac{1}{r+1}, \frac{1}{r}\right)$ y $E_{r'} \subset \left(\frac{1}{r'+1}, \frac{1}{r'}\right)$, tenemos que $E$ es medible y

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathcal{H}^{\lambda}(E_r) = \mathcal{H}^{\lambda}\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} E_r\right) = \mathcal{H}^{\lambda}(E).$$

Consideremos la función dimensión $\lambda(t) = t^{\alpha}$, entonces tenemos que

$$\mathcal{H}^{\alpha}(E) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathcal{H}^{\alpha}(E_r) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{1}{r(r+1)}\right]^{\frac{-log2}{log\xi}}.$$

Si elegimos $\xi$ tal que $\frac{-log2}{log\xi} \leq \frac{1}{2}$, esto es, tal que $\xi \leq \frac{1}{4}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\alpha}(E) &= \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{1}{r(r+1)}\right]^{\frac{-log2}{log\xi}} \\ &\geq \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{1}{r(r+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+1} \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

luego $\mathcal{H}^{\alpha}(E) = +\infty$.

Ahora probaremos que si tomamos cualquier función dimensión $h(t)$ entonces $\mathcal{H}^{h}(E) = 0$ o $\mathcal{H}^{h}(E) = \infty$.

Por ser $h$ una función dimensión, tenemos dos casos a considerar:

(i) $\liminf_{t\to 0} \frac{h(t)}{t^{\alpha}} = k$, donde $0 < k \leq +\infty$

(ii) $\liminf_{t\to 0} \frac{h(t)}{t^{\alpha}} = 0$.

Para el primer caso, notemos $\lambda(t) = t^{\alpha}$. Entonces resulta que, como $\mathcal{H}^{\lambda}(E) = +\infty$, también es $\mathcal{H}^{h}(E) = +\infty$. En efecto, por (i) tenemos que $\liminf_{t\to 0} \frac{h(t)}{t^{\alpha}} = k$, donde $0 < k \leq +\infty$; entonces dado $0 < \varepsilon < k$, existe un

$\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$ entonces $k - \varepsilon < \dfrac{h(t)}{t^\alpha}$, es decir, $t^\alpha(k-\varepsilon) < h(t)$. Recordemos que teníamos

$$\mathcal{H}^h(E) = \lim_{\rho\to 0}\mathcal{H}^h_\rho(E) = \lim_{\rho\to 0}\inf\sum_{U(E,\rho)} h(d_r).$$

De la definición de $U(E,\rho)$ eran $d_r < \rho$ y como luego vamos a tomar límite en $\rho \to 0$, podemos suponer que $d_r$ son suficientemente chicos. Entonces $h(d_r) > (d_r)^\alpha(k-\varepsilon.)$ Así tenemos que

$$\sum_{U(E,\rho)} h(d_r) > \left(\sum_{U(E,\rho)} d_r^\alpha\right)(k-\varepsilon).$$

Resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^h_\rho(E) &= \inf\sum_{U(E,\rho)} h(d_r)\\ &\geq \inf\left(\sum_{U(E,\rho)}(d_r)^\alpha\right)(k-\varepsilon)\\ &= (k-\varepsilon)\mathcal{H}^\lambda_\rho E).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^h(E) &= \lim_{\rho\to 0}\mathcal{H}^h_\rho(E)\\ &\geq (k-\varepsilon)\lim_{\rho\to 0}\mathcal{H}^\lambda_\rho E\\ &= (k-\varepsilon)\mathcal{H}^\lambda(E).\end{aligned}$$

Como $(k-\varepsilon) > 0$ y $\mathcal{H}^\lambda(E) = +\infty$, entonces $\mathcal{H}^h(E) = +\infty$.

El caso (ii) lo miraremos con más detalle.

Como $\lim\inf_{t\to 0}\dfrac{h(t)}{t^\alpha} = 0$, entonces existe una sucesión $t_1, t_2, \cdots$ tal que $\dfrac{h(t_r)}{t_r{}^\alpha} < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, tal que $\{t_n\}$ es decreciente y $t_n \to 0$.

Podemos cubrir a $E_r$ con $2^n$ intervalos de longitud $\dfrac{\xi^n}{r(r+1)}$ donde se tiene que $\dfrac{2^n\xi^{n\alpha}}{[r(r+1)]^\alpha} = \dfrac{1}{[r(r+1)]^\alpha}$ o sea $2^n\xi^{n\alpha} = 1$, para $\alpha = \dfrac{-log2}{log\xi}$.

Además siempre podemos seleccionar una subsucesión $s_1, s_2, \cdots$ de la sucesión $t_1, t_2, \cdots$ tal que

$$\begin{aligned}
\xi^{n_1+1} &\leq s_1 < \xi^{n_1}\\
\xi^{n_2+1} &\leq s_2 < \xi^{n_2}\\
&\vdots\\
\xi^{n_p+1} &\leq s_p < \xi^{n_p}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

La necesidad de seleccionar una subsucesión viene por el hecho de que puede encontrarse más de un $t_p$ entre cualquier $\xi^n$ y $\xi^{n+1}$.

Para calcular $\mathcal{H}^h(E)$, por definición, debemos considerar primero $\mathcal{H}^h_\rho(E_r) = \text{ínf} \sum_{U(E_r,\rho)} h(d_n)$, donde escribimos $U(E_r,\rho) = \{U_n\}$ con $\{U_n\}$ colección de esferas de diámetro $d_n < \rho$. En este caso, las esferas de la definición son intervalos de igual longitud y los diámetros $d_n$ de las esferas son ahora las longitudes de los intervalos.

Tomemos $\rho = \xi^{n_p+1}$. Cubrimos $E_r$ con $2^{n_p+1}$ intervalos de longitud $\dfrac{\xi^{n_p+1}}{r(r+1)}$. Observemos que la longitud de los intervalos es

$$d_n = \frac{\xi^{n_p+1}}{r(r+1)} < \frac{\xi^{n_p+1}}{2} < \xi^{n_p+1} = \rho.$$

Entonces usando que $h$ es creciente por ser función dimensión, que hay $2^{n_p+1}$ intervalos en $U(E_r,\rho)$ y que $\xi^{n_p+1} \leq s_p < \xi^{n_p}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{U(E_r,\rho)} h(d_n) &\leq \sum_{U(E_r,\rho)} h(\xi^{n_p+1})\\
&= 2^{n_p+1} h(\xi^{n_p+1})\\
&\leq 2^{n_p+1} h(s_p).
\end{aligned}$$

Como $s_p = t_j$ para algún $j$ y teníamos para la sucesión $\{t_n\}$ que $\dfrac{h(t_j)}{t_j^\alpha} < \varepsilon$, entonces $\dfrac{h(s_p)}{s_p^\alpha} < \varepsilon$, por lo que

$$h(s_p) < \varepsilon s_p^\alpha < \varepsilon(\xi^{n_p})^\alpha.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^h_\rho(E_r) &\leq \sum_{U(E_r,\rho)} h(d_n) \\
&\leq 2^{n_p+1}\varepsilon\xi^{n_p\alpha} \\
&= 2\varepsilon(2^{n_p}\xi^{\alpha n_p}) \\
&= 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

pues $(2^{n_p}\xi^{\alpha n_p}) = 1$. Entonces $\mathcal{H}^h(E_r) = \text{lím}_{\rho\to 0}(\mathcal{H}^h_\rho(E_r)) = 0$, pues $\varepsilon$ era arbitrario.

Luego,

$$\mathcal{H}^h(E) = \mathcal{H}^h\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} E_r\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathcal{H}^h(E_r) = 0.$$

# Capítulo 4

# Números de Liouville

En este capítulo nos dedicaremos a un conjunto de números irracionales con el cual trabajaremos a lo largo de los siguientes dos capítulos caracterizando su medida de Hausdorff generalizada. Es el **Conjunto de los Números de Liouville** al que definimos de la siguiente manera:

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ existen enteros } p \text{ y } q \text{ con } q > 1 \text{ tal que } \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

Por ejemplo, $z = \sum_1^\infty \dfrac{1}{10^{k!}}$ es un número de Liouville (tomando $q = 10^{n!}$).

Recordemos que decíamos que un número $z$ es **algebraico** si satisface una ecuación de la forma

$$a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0$$

con $a_i$ enteros y no todos nulos. El grado de un número algebraico $z$ es el mínimo exponente entero $n$ tal que $z$ satisface una ecuación entera de grado $n$. Por ejemplo, cualquier número racional es algebraico de grado 1, $\sqrt{2}$ es algebraico de grado 2, y $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es algebraico de grado 4.

Decimos que un numero real es **trascendente** si no es algebraico.

Probaremos que los números de Liouville son trascendentes. Para ello, siguiendo lo desarrollado por Oxtoby [9], usaremos el siguiente lema.

**Lema 4.1.** *Para todo número real algebraico $z$ de grado $n > 1$ existe un entero positivo $M$ tal que*

$$\left| z - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Mq^n}$$

*para todos enteros $p$ y $q$ con $q > 0$.*

*Demostración.* Como $z$ es un número algebraico de grado $n$, existe un polinomio $f$ de grado $n$ con coeficientes enteros tal que $f(z) = 0$.

Sea $M$ un entero positivo tal que $|f'(x)| \leq M$ para $|z - x| \leq 1$. Entonces por el Teorema del valor medio,

$$|f(x)| = |f(z) - f(x)| \leq M|z - x| \text{ para } |z - x| \leq 1. \tag{4.1}$$

Consideremos ahora dos enteros $p$ y $q$ con $q > 0$. Queremos ver que

$$\left|z - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^n}.$$

Esto es claramente cierto si $|z - \frac{p}{q}| > 1$, entonces asumamos que $|z - \frac{p}{q}| \leq 1$. Entonces, por (4.1),

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M\left|z - \frac{p}{q}\right|$$

y entonces

$$\left|q^n f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq Mq^n\left|z - \frac{p}{q}\right|. \tag{4.2}$$

La ecuación $f(x) = 0$ no tiene raíces racionales (pues si no $z$ sería solución de grado menor que n).Además, $q^n f(\frac{p}{q})$ es un número entero. Ahora, como el miembro izquierdo de (4.2) es mayor o igual que 1, entonces

$$|z - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{Mq^n}.$$

La igualdad no puede valer porque $z$ es irracional. $\square$

**Teorema 4.2.** *Todo número de Liouville es trascendente.*

*Demostración.* Supongamos que existe un número de Liouville $z$ que es algebraico, de grado n. Como $z$ es irracional debe ser $n > 1$. Por lema 4.1, existe un entero positivo $M$ tal que

$$\left|z - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^n} \tag{4.3}$$

para cualesquiera $p$ y $q$ enteros con $q > 0$.

Elijamos un entero positivo $k$ tal que $2^k \geq 2^n M$. Como $z$ es un número de Liouville, existen enteros $p$ y $q$, con $q > 1$, tales que

$$\left|z - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k}. \tag{4.4}$$

De (4.3) y (4.4), tenemos que $\frac{1}{q^k} > \frac{1}{Mq^n}$. Así, $M > q^{k-n} \geq 2^{k-n} \geq M$, lo cual es una contradicción.

Luego, $z$ es trascendente para cualquier número de Liouville $z$.

□

De la definición del conjunto de los números de Liouville, podemos escribir

$$\mathbb{L} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n, \tag{4.5}$$

donde $G_n = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \left( \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right)$.

$G_n$ es unión de intervalos abiertos. Además incluye a todos los números de la forma $\frac{p}{q}$ con $q \geq 2$, entonces $\mathbb{Q} \subset G_n$. Entonces tenemos que $G_n$ es un conjunto abierto denso y su complemento es nunca denso.

Como, por (4.5),

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{L} = \mathbb{Q} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus G_n),$$

se obtiene que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{L}$ es un conjunto de primera categoría. Luego el Teorema de Baire implica que existen números de Liouville en cualquier intervalo (en particular, hay números trascendentes en cualquier intervalo).

Otra característica del conjunto de los números de Liouville es que $\dim_H(\mathbb{L}) = 0$. Para demostrarlo hagamos antes algunas observaciones.

De (4.5), tenemos que $\mathbb{L} \subset G_n$ para todo $n \geq 1$. Para $q = 2, 3, \ldots$ sean

$$G_{n,q} = \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \left( \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right).$$

Para cualesquiera dos enteros positivos $m$ y $n$ tenemos

$$\mathbb{L} \cap (-m, m) \subset G_n \cap (-m, m) = \bigcup_{q=2}^{\infty} \left[ G_{n,q} \cap (-m, m) \right] \subset \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-mq}^{mq} \left( \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right).$$

Entonces $\mathbb{L} \cap (-m, m)$ puede ser cubierto por una sucesión de intervalos donde sus medidas sumadas dan, para $n > 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{q=2}^{\infty}\sum_{p=-mq}^{mq}\frac{2}{q^n} &= \sum_{q=2}^{\infty}(2mq+1)\frac{2}{q^n} \\
&\leq \sum_{q=2}^{\infty}(4mq+q)\frac{1}{q^n} \\
&= (4m+1)\sum_{q=2}^{\infty}\frac{1}{q^{n-1}} \\
&\leq (4m+1)\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{n-1}}\,dx \\
&= \frac{4m+1}{n-2}.
\end{aligned}$$

**Teorema 4.3.** *El conjunto* $\mathbb{L}$ *de los números de Liouville tiene medida de Hausdorff* $s$*-dimensional cero, para todo* $s > 0$.

*Demostración.* De la definición de la medida de Hausdorff $s$-dimensional, para demostrar lo que queremos, es suficiente encontrar para cada $\varepsilon > 0$ y para cada entero positivo $m$, una sucesión de intervalos $I_n$ tal que

$$\mathbb{L}\cap(-m,m)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\,,\ \sum_{n=1}^{\infty}|I_n|^s<\varepsilon\,,\ \text{ y } |I_n|<\varepsilon.$$

Para cada entero $n$ tenemos que

$$\mathbb{L}\cap(-m,m)\subset\bigcup_{q=2}^{\infty}\bigcup_{p=-mq}^{mq}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right).$$

Ahora elijamos $n$ tal que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon,\ \ ns>2,\ \ \frac{(2m+1)2^s}{ns-2}<\varepsilon.$$

Entonces cada uno de los intervalos $\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right)$ tiene longitud $\frac{2}{q^n}\leq\frac{2}{2^n}<\varepsilon$, y además tenemos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=-mq}^{mq} \left(\frac{2}{q^n}\right)^s \\
= & \sum_{q=2}^{\infty} \frac{(2mq+1)2^s}{q^{ns}} \\
\leq & (2m+1)2^s \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^{ns-1}} \\
\leq & (2m+1)2^s \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{ns-1}}\, dx \\
= & \frac{(2m+1)2^s}{ns-2} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos. □

**Corolario 4.4.** $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{L}) = 0$.

Del resultado del Teorema anterior tenemos entonces que la función $h(x) = x^s$ no da para el conjunto $\mathbb{L}$ una medida $h$-dimensional ni positiva ni finita. Observando esto es natural preguntarse si el conjunto $\mathbb{L}$ tiene una función dimensión exacta. Esta pregunta se responde fácilmente usando las propiedades de invarianza por traslaciones del Conjunto de los números de Liouville.

**Proposición 4.5.** *Si $E$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $E+m = E$ para todo número entero $m$ y $\mu$ es una medida en $\mathbb{R}$ invariante por traslaciones entonces*

$$\mu(E) \in \{0, \infty\}.$$

*En particular, si $h$ es una función dimensión, entonces $H^h(\mathbb{L}) \in \{0, \infty\}$.*

*Demostración.* Si $\mu(E) = 0$ listo.

Supongamos que $\mu(E) > 0$.

Como $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(E \cap [n, n+1)) = \mu(E) > 0$, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\mu(E \cap [n_0, n_0+1)) > 0$.

Usando la invarianza por traslaciones de $\mu$ y el hecho de que $E + m = E$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, concluimos que para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\mu(E \cap [n_0, n_0+1)) &= \mu((E \cap [n_0, n_0+1)) + (n - n_0)) \\
&= \mu((E + (n - n_0)) \cap ([n_0, n_0+1) + (n - n_0))) \\
&= \mu(E \cap [n, n+1)).
\end{aligned}$$

Entonces
$$\mu(E) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(E \cap [n, n+1)) = \infty.$$
Luego, $\mu(E) \in \{0, +\infty\}$.

Veamos por último que el conjunto de los Números de Liouville cumple que $\mathbb{L} + m = \mathbb{L}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Como $m \in \mathbb{Z}$, alcanza con ver una inclusión para tener la igualdad. Sea $m \in \mathbb{Z}$. Veamos que $\mathbb{L} + m \subset \mathbb{L}$.

Si $x \in \mathbb{L} + m$ entonces $x = y + m$ para algún $y \in \mathbb{L}$. Ahora, como $y \in \mathbb{L}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, existen enteros $p$ y $q$ con $q > 1$ tales que $\left|y - \frac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^n}$. Entonces tenemos que
$$\left|y - \frac{p}{q}\right| = \left|y + m = \frac{p}{q} - m\right| = \left|(y + m) - \left(\frac{p + mq}{q}\right)\right| < \frac{1}{q^n},$$
es decir, $x \in \mathbb{L}$. □

En vista de esta Proposición es interesante buscar el "punto de corte exacto" para el cual la medida de Hausdorff $h$-dimensional de $\mathbb{L}$ salta de infinito a cero. Esto lo desarrollaremos en el capítulo 5.

Existen otras formas de definir el conjunto de los números de Liouville. Una que mencionaremos es usando la noción de medida de irracionalidad desarrollada, por ejemplo, por Jonathan Sondow [12]. Sólo daremos la definición pues no nos manejaremos en este trabajo usando este enfoque.

**Definición 4.6.** *Una* ***medida de irracionalidad*** *es una función $f(q, \lambda)$ de un número natural $q$ y un número real positivo $\lambda$, que toma valores en los reales positivos y es decreciente tanto en $q$ como en $\lambda$.*

*Dado un número irracional $\alpha$, si existe $\lambda > 0$ con la propiedad de que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo $q(\varepsilon)$ tal que*
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > f(q, \lambda + \varepsilon) \text{ para } p \text{ y } q \text{ enteros con } q \geq q(\varepsilon),$$
*denotamos con $\lambda(\alpha)$ al menor de los $\lambda$ y decimos que $\alpha$ tiene medida de irracionalidad $f(q, \lambda(\alpha))$.*

**Definición 4.7.** *Si $\alpha$ tiene medida de irracionalidad $f(q, \mu) = \dfrac{1}{q^\mu}$ para algún $\mu = \mu(\alpha)$, entonces $\mu(\alpha) \in [2, +\infty)$ se llama el* ***exponente de irracionalidad*** *(o también, abusando de la terminología, la medida de irracionalidad) de $\alpha$. Por lo contrario, si tal $\mu$ no existe, escribimos $\mu(\alpha) = \infty$ y decimos que $\alpha$ es un número de Liouville.*

# Capítulo 5

# Medida Generalizada de Hausdorff del Conjunto de Liouville

En este capítulo, como ya anunciamos en el capítulo 4, nos dedicaremos a tratar de encontrar el ”punto de corte exacto”para el cual la medida de Hausdorff $h$-dimensional del conjunto $\mathbb{L}$ salta de infinito a cero. Además daremos una caracterización completa de todas las medidas de Hausdorff $\mathcal{H}^h(\mathbb{L})$ de $\mathbb{L}$ sin asumir nada acerca de la función dimensión $h$. Para ello seguiremos lo desarrollado por L. Olsen ([7], [8]).

Empecemos con una definición.

**Definición 5.1.** *Para una función dimensión $h$, se define la función $\Gamma_h$ de la siguiente manera:*

$$\Gamma_h(r) = \operatorname*{ínf}_{0<s\leq r} r\frac{h(s)}{s}.$$

Enunciaremos ahora el principal resultado de este capítulo.

**Teorema 5.2.** *Sea $h$ una función dimensión cualquiera. Entonces:*

1. *Si* $\limsup_{r\searrow 0} \dfrac{\Gamma_h(r)}{r^t} = 0$ *para algún* $t > 0$ *entonces* $\mathcal{H}^h(\mathbb{L}) = 0$.

2. *Si* $\limsup_{r\searrow 0} \dfrac{\Gamma_h(r)}{r^t} > 0$ *para todo* $t > 0$ *entonces el conjunto* $\mathbb{L}$ *no tiene medida* $\mathcal{H}^h$ $\sigma$*-finita.*

Para demostrar este teorema necesitaremos primero enunciar y demostrar otros resultados.

**Teorema 5.3.** *Sea h una función dimensión.*

1. *Si* $\limsup_{r\searrow 0} \dfrac{h(r)}{r^t} = 0$ *para algún* $t > 0$ *entonces* $\mathcal{H}^h(\mathbb{L}) = 0$.
2. *Si* $\limsup_{r\searrow 0} \dfrac{h(r)}{r^t} > 0$ *para todo* $t > 0$ *y la función* $r \longmapsto \dfrac{h(r)}{r}$ *es decreciente en un entorno del cero, entonces* $\mathcal{H}^h(\mathbb{L}) = \infty$.

Antes de dedicarnos a la demostración del Teorema 5.3, observemos que éste está relacionado con el Teorema de Jarnik de 1931 ([5]).

Para un entero positivo $n$ definimos el conjunto $n$-ésimo de Jarnik $\mathbb{L}_n$ por:

$$\mathbb{L}_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \text{ existen enteros } p, q \text{ con } q > 1 : \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

Observar que $(\mathbb{L}_n)_n$ es una sucesión decreciente de conjuntos con $\mathbb{L} = \bigcap_n \mathbb{L}_n$. Jarnik calculó el "punto de corte exacto"para el cual la medida de Hausdorff de $\mathbb{L}_n$ salta de infinito a cero. Si $h$ es una función dimensión tal que la función $r \longmapsto \dfrac{h(r)}{r}$ es decreciente, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^h(\mathbb{L}_n) &= 0 \text{ si y sólo si } \int_1^\infty h(2x^{-n})x\,dx < \infty \\ \mathcal{H}^h(\mathbb{L}_n) &= \infty \text{ si y sólo si } \int_1^\infty h(2x^{-n})x\,dx = \infty. \end{aligned}$$

Sin embargo, esto no nos alcanza para probar la parte (2) del Teorema 5.3. De hecho, consideremos la siguiente condición:

$$\liminf_{r\searrow 0} \frac{h(r)}{r^t} > 0 \text{ para todo } t > 0. \tag{5.1}$$

Es fácil ver que la condición (5.1) implica que $\int_1^\infty h(2x^{-n})x\,dx = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y el Teorema de Jarnik muestra entonces que

$$\mathcal{H}^h(\mathbb{L}_n) = \infty \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Por supuesto, en general, no es verdad que si $(E_n)_n$ es una sucesión decreciente de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{H}^h(E_n) = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces esto implique que $\mathcal{H}^h\left(\bigcap_n E_n\right) = \infty$; y la conclusión de (2) del Teorema 5.3, es decir que $\mathcal{H}^h\left(\bigcap_n \mathbb{L}_n\right) = \infty$, por lo tanto no se desprende de (5.2).

Por lo tanto aún suponiendo que vale la condición (5.1), que es mucho más fuerte que la que se tiene como hipótesis en (2), el Teorema de Jarnik no nos permite demostrar la parte (2) del Teorema 5.3. El análisis de la medida de $\mathbb{L} = \bigcap_n \mathbb{L}_n$ va a requerir algunos argumentos un poco más delicados.

Luego de esta observación dediquémosnos a la demostración del Teorema 5.3. Observemos que la parte (1) del Teorema no da ningún resultado nuevo, éste no es más que otra forma de decir que la dimensión de Hausdorff de $\mathbb{L}$ es cero (resultado que ya probamos en el cuarto capítulo). Lo que debemos demostrar entonces es la parte (2). Para ello observemos que alcanza con ver que, bajo las hipótesis, $\mathcal{H}^h(\mathbb{L} \cap I) = \infty$ para todo intervalo abierto no vacío $I$.

Los pasos a seguir para la demostración serán los siguientes: primero probaremos que si $\mathcal{H}^h(\mathbb{L} \cap J) = \infty$ para algún intervalo abierto y no vacío $J$, entonces $\mathcal{H}^h(\mathbb{L} \cap I) = \infty$ para todo intervalo abierto no vacío $I$. Luego probaremos que $\mathcal{H}^h(\mathbb{L} \cap (0,3)) = \infty$. Para esto necesitaremos algunos resultados previos.

**Definición 5.4.** *Para una función dimensión h y un número real positivo s, definimos*

$$\underline{d}_h(s) = \liminf_{r \searrow 0} \frac{h(sr)}{h(r)} \qquad \overline{d}_h(s) = \limsup_{r \searrow 0} \frac{h(sr)}{h(r)}.$$

**Lema 5.5.** *Sea h una función dimensión y sea $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ una similitud con radio s, es decir, $|f(x) - f(y)| = s|x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^d$. Luego,*

$$\underline{d}_h(s)\mathcal{H}^h(E) \leq \mathcal{H}^h(f(E)) \leq \overline{d}_h(s)\mathcal{H}^h(E) \text{ para todo } E \subset \mathbb{R}^d.$$

*Demostración.* Sea $\delta > 0$ y sea $\{E_i\}_i$ un cubrimiento de $E$ con $|E_i| < \delta$, entonces, como $E \subset \bigcup_i E_i$, tenemos que $f(E) \subset \bigcup_i f(E_i)$. Además $|f(E_i)| = s|E_i| < s\delta$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_i h(|f(E_i)|) &= \sum_i \frac{h(s|E_i|)}{h(|E_i|)} h(|E_i|) \\ &\geq \underline{d}_h(s) \sum_i h(|E_i|) \\ &\geq \mathcal{H}^h_\delta(E). \end{aligned}$$

Así,

$$\underline{d}_h(s)\mathcal{H}^h_\delta(E) \leq \sum_i h(|f(E_i)|), \tag{5.3}$$

para todo $\delta$-cubrimiento de $E$, es decir, para todo $s\delta$-cubrimiento de $f(E)$.

Así obtenemos que

$$\underline{d}_h(s)\mathcal{H}^h_\delta(E) \leq \mathcal{H}^h_{s\delta}(f(E)).$$

Entonces tomando límite cuando $\delta$ tiende a cero se obtiene que

$$\underline{d}_h(s)\mathcal{H}^h(E) \leq \mathcal{H}^h(f(E)).$$

Además de la anterior cuenta también tenemos que

$$\mathcal{H}^h_{s\delta}(f(E)) \leq \overline{d}_h(s) \sum_i h(|E_i|), \tag{5.4}$$

para todo $\delta$-cubrimiento de $E$.

Observemos que si $\overline{d}_h(s) = 0$ o $\overline{d}_h(s) = +\infty$ la desigualdad que queremos se obtiene trivialmente.

Si $0 < \overline{d}_h(s) < +\infty$, entonces de (5.4) obtenemos que

$$\frac{1}{\overline{d}_h(s)} \mathcal{H}^h_{s\delta}(f(E)) \leq \mathcal{H}^h_{\delta}(E).$$

Por último tomando límite cuando $\delta$ tiende a cero se obtiene la otra desigualdad que queríamos.

□

**Proposición 5.6.** *Sea $h$ una función dimensión y supongamos que la función $r \longmapsto \dfrac{h(r)}{r}$ es decreciente en un entorno del cero. Si $\mathcal{H}^h(\mathbb{L} \cap J) = \infty$ para algún intervalo abierto no vacío $J$, entonces $\mathcal{H}^h(\mathbb{L} \cap I) = \infty$ para todo intervalo abierto no vacío $I$.*

*Demostración.* Sea $I$ un intervalo abierto no vacío.

Podemos elegir enteros $n$ y $m$ con $n \geq 1$ tales que $f(J) \subset I$ donde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función $f(x) = \frac{1}{n}x + m$. En efecto, escribamos $J = (a, b)$ e $I = (c, d)$. Si $|J| \geq |I|$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{|J|}{n} \leq \frac{1}{2}|I|$ tomando $n \geq 2\dfrac{|J|}{|I|}$. Consideremos ahora $\frac{J}{n} = \left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right)$.

Si $\frac{a}{n} > d$ tomamos $m = \left[\frac{a}{n} - c\right]$.

Si $\frac{a}{n} > \dfrac{c+d}{2}$ tomamos $m = \left[\frac{a}{n} - c\right]$

Si $\frac{a}{n} < \dfrac{c+d}{2}$ tomamos $m = 0$.

Entonces tenemos que $\frac{1}{n}J + m \subset I$.

Análogamente se demuestra si $|J| \leq |I|$.

Usando las características que tiene el conjunto de los números de Liouville se puede ver que $\frac{1}{n}\mathbb{L} + m \subset \mathbb{L}$ para todos $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Este lo demostraremos al final para no perder el hilo de la demostración.

Usando lo anterior tenemos que $f(\mathbb{L} \cap J) \subset \mathbb{L} \cap I$. Esta inclusión y el lema 5.5 implican que

$$\underline{d}_h \left(\frac{1}{n}\right) \mathcal{H}^h(\mathbb{L} \cap J) \leq \mathcal{H}^h(f(\mathbb{L} \cap J)) \leq \mathcal{H}^h(\mathbb{L} \cap I), \tag{5.5}$$

usando que $f(x) = \frac{1}{n}x + m$ es una similaridad con $s = \frac{1}{n}$ y que $f(\mathbb{L} \cap J) \subset \mathbb{L} \cap I$. Ahora, como la función $r \longrightarrow \dfrac{h(r)}{r}$ es decreciente en un entorno del cero, tenemos que $\dfrac{h(\frac{r}{n})}{\frac{r}{n}} \geq \dfrac{h(r)}{r}$ para todo $r > 0$ suficientemente chico; de lo que deducimos

$$\underline{d}_h \left(\frac{1}{n}\right) = \liminf_{r \searrow 0} \frac{h(\frac{r}{n})}{h(r)} \geq \frac{1}{n} > 0. \tag{5.6}$$

Luego, de (5.5) y (5.6) resulta

$$\mathcal{H}^h(\mathbb{L} \cap I) \geq \underline{d}_h \left(\frac{1}{n}\right) \mathcal{H}^h(\mathbb{L} \cap J) \geq \frac{1}{n}\infty = \infty,$$

que era lo que queríamos demostrar.

Para terminar con la demostración de la proposición veamos que $\frac{1}{m}\mathbb{L} + n \subset \mathbb{L}$ para todos $n \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. Ya habíamos visto en el capítulo 4 que $\mathbb{L} + n = \mathbb{L}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, con lo que sólo resta ver que $\frac{1}{m}\mathbb{L} \subset \mathbb{L}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Sea $m \geq 1$ natural. Sea $x \in \mathbb{L}$ queremos ver que $\frac{x}{m} \in \mathbb{L}$. Si $x \in \mathbb{L}$ existen $q_n, p_n$ enteros con $q_n > 1$ tales que $\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{q_n^n}$.

Consideremos $\{q_n\}_{n\geq 1}$. Afirmamos que

1. $\{q_n\}_{n\geq 1}$ no está acotada superiormente, por lo que existe una subsucesión $\{q_{n_j}\}_j$ tal que $q_{n_j} \longrightarrow +\infty$.
2. Basta ver la condición de Liouville para $\frac{x}{m}$ para $(n_j)_{j\geq 1}$.

Entonces, dado $n_j$ con $j \geq 1$ queremos ver que existen $q \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\left|\frac{x}{m} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n_j}}.$$

Como $x \in \mathbb{L}$, tomando $n = 2n_j$, sabemos que existen $p_{2n_j}$ y $q_{2n_j}$ enteros con $q_{2n_j} \geq 1$ tales que $\left|x - \dfrac{p_{2n_j}}{q_{2n_j}}\right| < \dfrac{1}{q_{2n_j}^{2n_j}}$, entonces

$$\left|\frac{x}{m} - \frac{p_{2n_j}}{mq_{2n_j}}\right| < \frac{1}{mq_{2n_j}^{2n_j}}. \tag{5.7}$$

Ahora, como $q_{n_j} \longrightarrow +\infty$, existe un $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q_{n_j} \geq m$ para todo $j \geq j_0$. Entonces

$$q_{2n_j} \geq m \geq m^{(\frac{2n_j-1}{2n_j})} \geq m^{(\frac{n_j-1}{n_j})}.$$

Por lo tanto, $q_{2n_j}^2 \geq q_{2n_j} m^{\frac{n_j-1}{n_j}}$. Se obtiene de lo anterior

$$\begin{aligned} (q_{2n_j}^2)^{n_j} &\geq \left( q_{2n_j} m^{\frac{n_j-1}{n_j}} \right)^{n_j} \\ &= q_{2n_j}^{n_j} m^{n_j-1}. \end{aligned}$$

Esto pasa si y sólo si $q_{2n_j}^{2n_j} \geq \dfrac{(q_{2n_j} m)^{n_j}}{m}$ y esto si y sólo si $m q_{2n_j}^{2n_j} \geq (q_{2n_j} m)^{n_j}$. Luego, de (5.7), tenemos que

$$\left| \frac{x}{m} - \frac{p_{2n_j}}{m q_{2n_j}} \right| < \frac{1}{(m q_{2n_j})^{n_j}}.$$

Para finalizar veamos (1) y (2).

(1) Queremos ver que $(q_n)_{n \geq 1}$ no está acotada superiormente.

Supongamos que no sucede, entonces existiría un $x \in \mathbb{L}$ tal que $(q_n)$ (asociada a $x$) es tal que existe $M > 0$ con $q_n \leq M$ para todo $n \geq 1$. Como $q_1 = 1$ y $(q_n)$ es creciente, existen finitos $q_n' s$ (pues $q_n \leq M$). Llamémoslos $\{q_1, \ldots, q_m\}$ con $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_m$. Ahora, dado $n \geq 1$ existe un $1 \leq j \leq m$ tal que $q_n = q_j$, entonces

$$\left| x - \frac{p_n}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^n} \leq \left( \frac{1}{q_1} \right)^n.$$

Asociemos para cada $j$ los $n's$ tales que $q_n = q_j$. Notemos que existe $j$ tal que tiene asociados infinitos valores de $n$ pues $\mathbb{N}$ es infinito y $\#\{1, \ldots, m\} = m$.

Supongamos que $j = 1$. Entonces existe una subseción de $\{q_n\}$: $\{q_{n_k}\}_{k \geq 1}$ con $q_{n_k} = q_1$ para todo $k \geq 1$. Así, como $q_1 > 1$,

$$\left| x - \frac{p_{n_k}}{q_1} \right| < \frac{1}{q_1^{n_k}} \longrightarrow 0.$$

Luego, tendríamos que $p_{n_k} \longrightarrow x q_1$. Pero, como $q_1 \in \mathbb{N}$ y $p_{n_k} \in \mathbb{Z}$, tendríamos que $x \in \mathbb{Z}$ lo cual es un absurdo.

Así, $(q_n)$ no está acotada superiormente.

(2) Veamos ahora que alcanza con ver que se cumple la condición de Liouville para $\frac{x}{m}$ para $(n_k)_{k \geq 1}$, una subsucesión de $(n)_{n \geq 1}$.

Supongamos que para todo $k \geq 1$, dado $n_k$, existe $p_{n_k} \in \mathbb{Z}, q_{n_k} \geq 1$ tales que

$$\left|\frac{x}{m} - \frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right| < \frac{1}{(q_{n_k})^{n_k}}.$$

Sea $n \geq 1$ cualquiera fijo y supongamos que $n$ no cumple la condición de Liouville para $\frac{x}{m}$, entonces tendríamos que

$$\left|\frac{x}{m} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^n}$$

para todo $p \in \mathbb{Z}$ y para todo $q \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{q^n} \leq \left|\frac{x}{m} - \frac{p}{q}\right| \leq \left|\frac{x}{m} - \frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right| + \left|\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} - \frac{p}{q}\right|$$

De lo que se deduce que

$$\frac{1}{q^n} \leq \left|\frac{x}{m} - \frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right| + \left|\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} - \frac{p}{q}\right|,$$

si y sólo si,

$$\frac{1}{q^n} - \left|\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} - \frac{p}{q}\right| \leq \left|\frac{x}{m} - \frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right|.$$

Ahora, como $q_{n_k} \longrightarrow \infty$, entonces existe un $k_0 \geq 1$ tal que $\dfrac{1}{(q_{n_{k_0}})^{n_{k_0}}} \leq \dfrac{1}{q_n} - \left|\dfrac{p_{n_{k_0}}}{q_{n_{k_0}}} - \frac{p}{q}\right|$, con lo que tendríamos, de lo anterior, que $\left|\frac{x}{m} - \dfrac{p_{n_{k_0}}}{q_{n_{k_0}}}\right| \geq \dfrac{1}{(q_{n_{k_0}})^{n_{k_0}}}$ lo cual es absurdo.

Esto completa la demostración de la proposición. $\square$

Dediquémosnos ahora a la demostrar el Teorema 5.3.

*Demostración.* del Teorema 5.3

Por lo que observamos antes sólo tenemos que ver la parte (2) y esto se reduce por los anteriores resultados a mostrar que $\mathcal{H}^h(\mathbb{L} \cap (0,3)) = \infty$.

Sea $h$ una función dimensión tal que $\limsup_{r \searrow 0} \dfrac{h(r)}{r^t} > 0$ para todo $t > 0$ y tal que la función $r \longmapsto \dfrac{h(r)}{r}$ es decreciente en un entorno del cero. Como $\limsup_{r \searrow 0} \dfrac{h(r)}{r^t} > 0$ para todo $t > 0$, tenemos para todo $t > 0$,

$$\limsup_{r \searrow 0} \frac{h(r)}{r^t} = \limsup_{r \searrow 0} \frac{1}{r^{t/2}} \frac{h(r)}{r^{t/2}} = \infty. \tag{5.8}$$

Supongamos, para obtener luego una contradicción, que $\mathcal{H}^h(\mathbb{L} \cap (0,3)) < \infty$.

Como $h$ es continua por derecha con $h(0) = 0$, obtenemos que $\mathcal{H}^h(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $\mathcal{H}^h(\mathbb{Q}) = 0$. De esto se deduce que $\mathcal{H}^h((\mathbb{L} \cup \mathbb{Q}) \cap (0,3)) < \infty$. Por lo tanto podemos elegir un número real $c > 1$ tal que

$$\mathcal{H}^h((\mathbb{L} \cup \mathbb{Q}) \cap (0,3)) < c.$$

De (5.8), podemos encontrar un $r_0 > 0$ tal que

$$\frac{h(r_0)}{r_0} \geq 32c. \tag{5.9}$$

Además, como

$$\mathcal{H}^h_{r_0}((\mathbb{L} \cup \mathbb{Q}) \cap (0,3)) \leq \mathcal{H}^h((\mathbb{L} \cup \mathbb{Q}) \cap (0,3)) < c < \infty,$$

existe un cubrimiento numerable $(E_i)_i$ de $(\mathbb{L} \cup \mathbb{Q}) \cap (0,3)$ de intervalos de diámetro menor o igual que $r_0$ tal que

$$\sum_i h(|E_i|) \leq c. \tag{5.10}$$

Lo que vamos a construir ahora es una sucesión de conjuntos $C_1, C_2, \ldots\ldots$ tales que

$$\bigcap_n C_n \neq \emptyset \tag{5.11}$$

$$\bigcap_n C_n \subset (\mathbb{L} \cup \mathbb{Q}) \cap (0,3) \tag{5.12}$$

$$\left(\bigcap_n C_n\right) \cap \left(\bigcup_i E_i\right) = \emptyset. \tag{5.13}$$

Como $(\mathbb{L} \cup \mathbb{Q}) \cap (0,3) \subset \bigcup_i E_i$, tendremos la contradicción que queríamos pues por (5.11), existe $x \in \bigcap_n C_n$ y por (5.12), $x \in \bigcup_i E_i$, lo cual contradice (5.13).

Lo que haremos ahora es construir los conjuntos $C_1, C_2, \ldots\ldots$. Esta construcción se divide en cuatro pasos. Comencemos dando notación que después usaremos.

Para un entero positivo $n$ escribiremos con $\mathbb{N}^n$ a la familia de las $n$-uplas de naturales, i.e., $\mathbb{N}^n = \{p_1 p_2 \ldots p_n : p_i \in \mathbb{N}\}$.

Primero construiremos una sucesión auxiliar de enteros positivos $(q_n)_n$. Luego usando esta sucesión construiremos conjuntos $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ e $I_p$ en $\mathbb{R}$ para $p \in \Pi_n$ con $\Pi_n \subset \mathbb{N}^n$. Luego, construiremos conjuntos $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ con $\Gamma_n \subset \Pi_n$ y por último los conjuntos $C_1, C_2, \ldots$.

1. Construcción de los enteros $q_1, q_2, \ldots$.

   Sea $c = 128C$.

   De (5.8), se puede ver que existe una sucesión $(r_n)_n$ con $r_n > 0$ tal que $r_n \to 0$ y tal que

$$\frac{h(r_n)}{r_n^{\frac{1}{2n}}} \geq 1 \tag{5.14}$$

$$r_n \leq \left(1 - \frac{1}{2^{1/n}}\right)^n \tag{5.15}$$

$$r_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{r_{n-1}}{c}\right)^{2n}. \tag{5.16}$$

   Para obtener (5.15), observar que $\left(1 - \dfrac{1}{2^{1/n}}\right) \longrightarrow 0$.

   Ahora contruiremos inductivamente la sucesión $(q_n)_{n\geq 1}$ de enteros positivos tal que las siguientes condiciones se satisfacen para todo $n \geq 2$.

(I.1n) $q_n \geq (cq_{n-1}^{n-1})^2$.

(I.2n) $\dfrac{1}{2q_n^n} \leq r_n \leq \dfrac{1}{q_n^n}$.

   Para $n = 1$, tenemos que $q_1 = 1$.

   Para el paso inductivo, asumamos que $n \geq 2$ y que los enteros $q_1, \ldots, q_{n-1}$ fueron construídos de forma tal que $q_j$ cumple las condiciones (I.1j) y (II.2j) para $j \in \{2, \ldots, n-1\}$.

   Observemos que, como de (5.15), tenemos que

$${r_n}^{1/n} \leq \left(1 - \frac{1}{2^{1/n}}\right),$$

   entonces

$$\left|\frac{1}{(2r_n)^{1/n}}, \frac{1}{r_n^{1/n}}\right| = \frac{1}{r_n^{1/n}}\left(1 - \frac{1}{2^{1/n}}\right) \geq 1.$$

   Entonces existe un entero $q_n$ con

$$\frac{1}{(2r_n)^{1/n}} \leq q_n \leq \frac{1}{r_n^{1/n}}. \tag{5.17}$$

   Tenemos de (5.17) que (I.2n) se cumple.

   Veamos ahora que la condición (I.1n) se cumple. Para ello dividamos la demostración en dos casos.

Caso 1: $n = 2$.

En este caso (5.16) y el hecho de que $r_1 < 1$ (lo que se tiene por (5.15)) implican que

$$q_2 \geq \frac{1}{(2r_2)^{1/2}} \geq \left(\frac{c}{r_1}\right)^2 \geq c^2 = (cq_1^1)^2.$$

En efecto, de (5.16) para $n = 2$ tenemos que $r_2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{c}\right)^4$ si y sólo si $\frac{1}{(2r_2)^{1/2}} \geq \left(\frac{c}{r_1}\right)^2$. Además como $r_1 < 1$, obtenemos que $\left(\frac{c}{r_1}\right)^2 \geq c^2 = (cq_1^1)^2$.

Por último de (I.22) se deduce que $q_2 \geq \frac{1}{(2r_2)^{1/2}}$.

Caso 2: $n \geq 3$.

Para este caso, (5.16), (5.17) y la hipótesis inductiva (I.1(n-1)) implican que

$$q_n \geq \frac{1}{(2r_n)^{1/n}} \geq \left(\frac{c}{r_{n-1}}\right)^2 \geq (cq_{n-1}(n-1))^2.$$

Esto completa el paso inductivo en la construcción de los enteros $q_1, q_2, \ldots$.

2. Construcción de los conjuntos $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ y de $I_p$.

   Para $n, p \in \mathbb{N}$ definimos los conjuntos $\Sigma_{n,p} \subset \mathbb{N}, \Sigma_n \subset \mathbb{N}, \Pi_n \subset \mathbb{N}^n$ e $I_p \subset \mathbb{R}$ para $p \in \Pi_n$ inductivamente como sigue.

   Pongamos

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,1} &= \{1\} \\ \Sigma_1 &= \Sigma_{1,1} \\ \Pi_1 &= \Sigma_1 \\ I_1 &= \left[\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1^1}\right]. \end{aligned}$$

   Luego asumamos que $n \geq 2$ y que los conjuntos $\Sigma_{n-1,p}, \Sigma_{n-1}, \Pi_{n-1}$ e $I_p$ para $p \in \Pi_{n-1}$ fueron definidos.

Sea ahora,

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{n,p} &= \mathbb{N} \cap \left[ q_n \frac{p}{q_{n-1}}, q_n + \frac{p}{q_{n-1}} + q_n \frac{1}{2q_{n-1}^{n-1}} \right] \text{ para } p \in \Sigma_{n-1}, \\
\Sigma_n &= \bigcup_{p \in \Sigma_{n-1}} \Sigma_{n,p} \\
\Pi_n &= \left\{ p_1 p_2 \dots p_n \in \mathbb{N}^n : p_1 \in \Sigma_{1,p_0}, p_2 \in \Sigma_{2,p_1}, \dots, p_n \in \Sigma_{n p_{n-1}} \right\} \text{ donde } p_0 = 1 \\
I_p &= \left[ \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{q_n^n} \right] \text{ para } p = p_1 p_2 \dots p_n \in \Pi_n.
\end{aligned}
$$

Demos ahora algunas propiedades principales de los conjuntos $I_p$ que luego usaremos en el siguiente paso en la construcción. Denotaremos con $B(E, r)$ al $r$-entorno cerrado de $E$, i.e., $B(E, r) = \{y \in \mathbb{R} : d(y, E) \leq r\}$.

**Proposición 5.7.** a) *Si* $\boldsymbol{p}_p \in \Pi_{n+1}$ *con* $p \in \Pi_n$ *entonces* $I_{\boldsymbol{p}_p} \subset I_p$

b) *Si* $p_1, p_2 \in \Pi_n$ *son distintos, entonces*

$$dist\left( B(I_{p_1}, \frac{1}{2q_n^n}), B(I_{p_2}, \frac{1}{2q_n^n}) \right) = \frac{1}{q_n} - \frac{2}{q_n^n} > 0.$$

*En particular,* $I_{p_1} \cap I_{p_2} = \emptyset$.

c) *Tenemos* $\bigcap_n \bigcup_{p \in \Pi_n} I_p \subset (\mathbb{L} \cup \mathbb{Q}) \cap (0, 3)$.

*Demostración.* (a) Sea $n \geq 1$. Sabemos que $I_p = \left[ \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{q_n^n} \right]$ para $p = (p_1, \dots, p_n) \in \Pi_n$.

Sea $\mathbf{p} \in \Pi_{n+1}$, entonces $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n, p)$ con $p \in \Sigma_{n+1,p_n}$. Entonces,

$$I_{\mathbf{p}} = \left[ \frac{p}{q_{n+1}}, \frac{p}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+1}^{n+1}} \right] \subset I_{(p_1,\dots,p_n)} = \left[ \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{q_n^n} \right].$$

La anterior inclusión sucede si y sólo si $\frac{p}{q_{n+1}} \geq \frac{p_n}{q_n}$ y $\frac{p}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+1}^{n+1}} \leq \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{q_n^n}$.

Y ambas cosas suceden. En efecto, como $p \in \Sigma_{n+1,p_n}$, entonces $p \geq q_{n+1} \frac{p_n}{q_n}$, es decir, $\frac{p}{q_{n+1}} \geq \frac{p_n}{q_n}$. Para la otra desigualdad, como $p \in \Sigma_{n+1,p_n}$, tenemos que $p \leq q_{n+1} \frac{p_n}{q_n} + q_{n+1} \frac{1}{2q_n^n}$, por lo que

$$\frac{p}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+1}^{n+1}} \leq \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{2q_n^n} + \frac{1}{q_{n+1}^{n+1}}.$$

Ahora, el miembro derecho de la anterior desigualdad es menor o igual a $\frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{q_n^n}$ si y sólo si $\frac{1}{q_{n+1}^{n+1}} \leq \frac{1}{2q_n^n}$. Pero sabemos que $q_{n+1} \geq (cq_n^n)^2$ por lo que

$$q_{n+1}^{n+1} \geq (cq_n^n)^{2(n+1)} \geq cq_n^n \geq 2q_n^n,$$

con lo cual obtenemos lo que queríamos.

(b) Si $p_1, p_2 \in \Pi_n$ son distintos y escribimos $p_1 = (p_{11}, \ldots, p_{1n})$, $p_2 = (p_{21}, \ldots, p_{2n})$, entonces existe un $1 \leq i \leq n$ tal que $p_{1i} \neq p_{2i}$.

Afirmamos que si $p_{1i} \neq p_{2i}$ entonces $p_{1n} \neq p_{2n}$.

Notemos que por la construcción de los intervalos $I_p$, sólo nos interesa la coordenada $n$-ésima, pues

$$I_{p_i} = \left[\frac{p_{in}}{q_n}, \frac{p_{in}}{q_n} + \frac{1}{q_n^n}\right]$$

para $i = 1, 2$.

Si $p_{1n} \neq p_{2n}$, como son ambos números naturales, si suponemos, por ejemplo, que $p_{1n} < p_{2n}$, entonces debe ser $p_{2n} \geq p_{1n} + 1$. Sean $a = \frac{p_{2n}}{q_n} - \frac{1}{2q_n^n}$ y $b = \frac{p_{1n}}{q_n} + \frac{1}{q_n^n} + \frac{1}{2q_n^n}$. Supongamos que $p_{2n} = p_{1n} + 1$ (éste es el peor de los casos).

Luego,

$$\begin{aligned} dist\left(B\left(I_{p_1}, \frac{1}{2q_n^n}\right), B\left(I_{p_2}, \frac{1}{2q_n^n}\right)\right) &\leq a - b \\ &= \frac{p_{1n}+1}{q_n} - \frac{1}{2q_n^n} - \left(\frac{p_{1n}}{q_n} + \frac{1}{q_n^n} + \frac{1}{2q_n^n}\right) \\ &= \frac{1}{q_n} - \frac{2}{q_n^n}. \end{aligned}$$

Como $a \in B\left(I_{p_1}, \frac{1}{2q_n^n}\right)$ y $b \in B\left(I_{p_2}, \frac{1}{2q_n^n}\right)$ y $|a - b| = \frac{1}{q_n - \frac{2}{q_n^n}}$, entonces

$$dist\left(B\left(I_{p_1}, \frac{1}{2q_n^n}\right), B\left(I_{p_2}, \frac{1}{2q_n^n}\right)\right) = \frac{1}{q_n} - \frac{2}{q_n^n} > 0.$$

Para terminar con la demostración de (b) nos queda ver que si $p_{1i} \neq p_{2i}$ entonces $p_{1n} \neq p_{2n}$.

Para simplificar la demostración veamos que si tenemos $(p_{11}\dots p_{1(n_1)}p_{1n})$ y $(p_{21}\dots p_{2(n_1)}p_{2n})$ con $p_{1(n_1)}\neq p_{2(n_1)}$ entonces deben ser $p_{1n}\neq p_{2n}$.

Supongamos que $p_{1n}=p_{2n}=a$. Luego, por definición tendríamos que

$$a\in\Sigma_{n,p_{1(n-1)}}\cap\Sigma_{n,p_{2(n-1)}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
q_n\frac{p_{1(n-1)}}{q_{n-1}} &\leq q_n\frac{p_{1(n-1)}}{q_{n-1}}+q_n\frac{1}{2q_{n-1}^{n-1}}\\
q_np_{1(n-1)} &\leq aq_{n-1}\leq q_np_{1(n-1)}+\frac{q_n}{2q_{n-1}^{n-2}}\\
p_{1(n-1)} &\leq a\frac{q_{n-1}}{q_n}\leq p_{1(n-1)}+\frac{1}{2q_{n-1}^{n-2}}\leq p_{1(n-1)}.
\end{aligned}$$

Análogamente obtendríamos que

$$p_{2(n-1)}\leq a\frac{q_{n-1}}{q_n}\leq p_{2(n-1)}+\frac{1}{2q_{n-1}^{n-2}}\leq p_{2(n-1)}.$$

Como $p_{i(n-1)}\in\mathbb{N}$ para $i=1,2$ y $q_n,q_{n-1}\geq 1$, tendríamos que $p_{2(n-1)}=a\dfrac{q_{n-1}}{q_n}=p_{1(n-1)}$, lo cual es un absurdo.

Luego, debe ser $p_{1n}\neq p_{2n}$.

(c) Queremos ver que $\bigcap_n\bigcup_{p\in\Pi_n}I_p\subset(\mathbb{L}\cup\mathbb{Q})\cap(0,3)$.

Sea $x\in\bigcap_m\bigcup_{p\in\Pi_m}I_p$.

Dividamos la demostración en dos casos.

Si $x\in\mathbb{Q}$, entonces claramente

$$\begin{aligned}
x\in\left(\bigcap_m\bigcup_{p\in\Pi_m}I_p\right)\cup\mathbb{Q} &\subset \left(\bigcup_{p\in\Pi_1}I_p\right)\cup\mathbb{Q}\\
&= I_1\cup\mathbb{Q}\\
&= \left[\frac{1}{q_1},\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1^1}\right]\cup\mathbb{Q}\\
&= [1,2]\cup\mathbb{Q}\subset(\mathbb{L}\cup\mathbb{Q})\cap(0,3).
\end{aligned}$$

Sea ahora $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Sean $n$ un entero positivo. Como $x\in\bigcup_{p\in\Pi_n}I_p$, entonces existe $p=p_1\dots p_n\in\Pi_n$ tal que $x\in I_p=\left[\dfrac{p_n}{q_n},\dfrac{p_n}{q_n}+\dfrac{1}{q_n^n}\right]$, de lo que

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|\leq\frac{1}{q_n^n}.$$

Como $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, esto muestra que $x$ es un número de Liouville, y entonces $x \in \mathbb{L} \cup \mathbb{Q}$. Además,

$$x \in \bigcap_m \bigcup_{p \in \Pi_m} I_p \subset \bigcup_{p \in \Pi_1} I_p = I_1 = \left[\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1^1}\right] = [1, 2] \subset (0, 3).$$

Luego obtenemos lo deseado.

□

3. Construcción de los conjuntos $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$.

Lo que vamos a hacer es construir subconjuntos $\Gamma_1 \subset \Pi_1, \Gamma_2 \subset \Pi_2, \ldots$ inductivamente tales que las siguientes tres condiciones se cumplan para todo $n \geq 2$.

(II.1n) Si $|E_i| \geq \dfrac{1}{2q_n^n}$, entonces $E_i \cap I_p = \emptyset$ para todo $p \in \Gamma_n$.

(II.2n) $|\Gamma_n| \geq \dfrac{q_n}{4q_{n-1}^{n-1}} |\Gamma_{n-1}|$.

(II.3n) $\Gamma_n \subset \{\, \mathbf{p}p \in \Pi_: p \in \Gamma_{n-1}\}$.

Para $n = 1$, tenemos que $\Gamma_1 = \Pi_1$.

Para el paso inductivo, supongamos que $n \geq 2$ y que los conjuntos $\Gamma_1 \subset \Pi_1, \Gamma_2 \subset \Pi_2, \ldots, \Gamma_{n-1} \subset \Pi_{n-1}$ fueron construídos de forma tal que el conjunto $\Gamma_j$ cumple las condiciones (II.1j), (II.2j) y (II.3j) para todo $j \in \{\, 2, \ldots, n-1\}$.

Sea

$$\Gamma_n = \left\{\mathbf{p}_p \in \Pi_n : p \in \Gamma_{n-1}, \left|E_i \cap B\left(I_{\mathbf{p}_p}, \frac{1}{2q_n^n}\right)\right| < \frac{1}{4}\left|B\left(I_{\mathbf{p}_p}, \frac{1}{2q_n^n}\right)\right| \text{ para todo } i\right\}.$$

Dedemos probar que el conjunto $\Gamma_n$ así definido cumple las condiciones (II.1n), (II.2n) y (II.3n).

Escribamos

$$\begin{aligned} X &= \left\{\mathbf{p}_p \in \Pi_n : p \in \Gamma_{n-1}\right\} \setminus \Gamma_n \\ &= \left\{\mathbf{p}_p \in \Pi_n : p \in \Gamma_{n-1}, \exists i : \left|E_i \cap B\left(I_{\mathbf{p}_p}, \frac{1}{2q_n^n}\right)\right| \geq \frac{1}{4}\left|B\left(I_{\mathbf{p}_p}, \frac{1}{2q_n^n}\right)\right|\right\}. \end{aligned}$$

Y notemos también con

$$X_i = \left\{\mathbf{p}_p \in \Pi_n : p \in \Gamma_{n-1}, \left|E_i \cap B\left(I_{\mathbf{p}_p}, \frac{1}{2q_n^n}\right)\right| \geq \frac{1}{4}\left|B\left(I_{\mathbf{p}_p}, \frac{1}{2q_n^n}\right)\right|\right\}$$

para todo $i$.

Claramente tenemos que $X = \bigcup_i X_i$.

Probaremos ahora las siguientes cuatro proposiciones que usaremos luego para ver que $\Gamma_n$ definido como arriba cumple las condiciones (II.1n), (II.2n) y (II.3n).

**Proposición 5.8.** *Se tiene que*

$$\left|\left\{\boldsymbol{p}_p \in \Pi_n : p \in \Gamma_{n-1}\right\}\right| \geq \frac{q_n}{2q_{n-1}^{n-1}}|\Gamma_{n-1}|.$$

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\left\{\mathbf{p}_p \in \Pi_n : p \in \Gamma_{n-1}\right\}\right| &\geq \sum_{p=p_1\ldots p_{n-1}\in\Gamma_{n-1}} \left|\mathbb{N} \cap \left[q_n\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, q_n\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + q_n\frac{1}{2q_{n-1}^{n-1}}\right]\right| \\
&= \sum_{p\in\Gamma_{n-1}} q_n\frac{1}{2q_{n-1}^{n-1}} \\
&= \frac{q_{n-1}}{2q_{n-1}^{n-1}}|\Gamma_{n-1}|.
\end{aligned}$$

□

**Proposición 5.9.**

$$|X_i| \leq 4q_n|E_i| + \frac{h(|E_i|)}{h\left(\frac{1}{2q_n^n}\right)}.$$

*Demostración.* Dividamos la demostración en dos pasos.

Primero supongamos que $|X_i| = 1$.

En este caso $X_i = \{p\}$ para algún $p \in \Pi_n$, entonces

$$|E_i| \geq \frac{1}{4}\left|B\left(I_p, \frac{1}{2q_n^n}\right)\right| = \frac{1}{2q_n^n}.$$

Observemos que efectivamente $\left|B\left(I_p, \frac{1}{2q_n^n}\right)\right| = \frac{1}{2q_n^n}$. En efecto, si llamamos

$d = \left| B\left(I_p, \frac{1}{2q_n^n}\right) \right|$, si $x, y \in\ B\left(I_p, \frac{1}{2q_n^n}\right)$, entonces

$$\begin{aligned} |x-y| &\leq d(x, I_p) + d(y, I_p) \\ &\leq \frac{1}{2q_n^n} + \frac{1}{2q_n^n} \\ &= \frac{1}{q_n^n} \\ &\leq \frac{2}{q_n^n}. \end{aligned}$$

Por otro lado como $p = p_1 \dots p_n \in \Pi_n$, tenemos $I_p = \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{q_n^n}\right]$. Entonces si tomamos $x = \frac{p_n}{q_n} - \frac{1}{2q_n^n}, y = \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{q_n^n} + \frac{1}{2q_n^n} \in B\left(I_p, \frac{1}{2q_n^n}\right)$, resulta $|x-y| = \frac{2}{q_n^n}$. Luego, $d = \frac{2}{q_n^n}$.

Como $h$ es una función dimensión, es creciente, entonces $h(|E_i|) \geq h\left(\frac{1}{2q_n^n}\right)$ de lo que resulta

$$\begin{aligned} |X_i| &\leq \frac{h(|E_i|)}{h\left(\frac{1}{2q_n^n}\right)} \\ &\leq 4q_n|E_i| + \frac{h(|E_i|)}{h\left(\frac{1}{2q_n^n}\right)}. \end{aligned}$$

Esto prueba la proposición en el caso $|X_i| = 1$.

Ahora supongamos que $|X_i| \geq 2$.

En este caso $X_i = \{p_1, \dots, p_m\}$ para algunos $p_i \in \Pi_n$ y $m \geq 2$. Como $E_i$ es un intervalo, deducimos que $E_i$ debe contener los $m-1$ "gaps" entre los intervalos

$$B(I_{p_1}, \frac{1}{2q_n^n}), \dots, B(I_{p_m}, \frac{1}{2q_n^n})$$

y como la proposición 5.7 muestra que la longitud de cada "gap" es igual a

$\dfrac{1}{q_n} - \dfrac{2}{q_n^n}$, concluimos que

$$\begin{aligned} |E_i| &\geq (m-1)\left(\frac{1}{q_n} - \frac{2}{q_n^n}\right) \\ &\geq (m-1)\frac{1}{2q_n^n} \\ &\geq \frac{m}{4q_n} \\ &= \frac{|X_i|}{4q_n}. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} |X_i| &\leq 4q_n|E_i| \\ &\leq 4q_n|E_i| + \frac{h(|E_i|)}{h\left(\frac{1}{2q_n^n}\right)}, \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración. □

**Proposición 5.10.** *Si* $2 \leq m \leq n$, *entonces* $|\Gamma_{m-1}| \geq 1$ *y*

$$\frac{h\left(\frac{1}{2q_m^m}\right)}{\frac{1}{2q_m^m}} \geq c q_{m-1}^{m-1} q_m^{m-1} \frac{1}{|\Gamma_{m-1}|}.$$

*Demostración.* Primero probemos que $|\Gamma_{m-1}| \geq 1$.

Para $2 \leq j \leq n-1$, la hipótesis inductiva (II.2j) y el hecho de que $q_j \geq (c q_{j-1}^{j-1})^2 \geq 4 q_{j-1}^{j-1}$ implican que $|\Gamma_j| \geq \dfrac{q_j}{4q_{j-1}^{j-1}}|\Gamma_{j-1}| \geq |\Gamma_{j-1}|$.

Si repetimos varias veces esta desigualdad, obtenemos

$$|\Gamma_{m-1}| \geq |\Gamma_{m-2}| \geq \ldots \geq |\Gamma_1| = 1.$$

Probemos ahora que

$$\frac{h\left(\frac{1}{2q_m^m}\right)}{\frac{1}{2q_m^m}} \geq c q_{m-1}^{m-1} q_m^{m-1} \frac{1}{|\Gamma_{m-1}|}.$$

De (5.14) y de la desigualdad $\frac{1}{2q_m^m} \leq r_m \leq \frac{1}{q_m^m}$ se tiene que

$$\frac{h\left(\frac{1}{2q_m^m}\right)}{\frac{1}{2q_m^m}} \geq \frac{1}{(\frac{1}{q_m^m})^{1-1/2m}} = q_m^{m-1/2}. \tag{5.18}$$

Además como $q_m \geq (cq_{m-1}^{m-1})^2$ y $|\Gamma_{m-1}| \geq 1$, se deduce que

$$q_{m-1}^{m-1} q_m^{m-1} \frac{1}{|\Gamma_{m-1}|} \leq q_{m-1}^{m-1} q_m^{m-1} \leq \frac{1}{c} q_m^{m-1/2}. \tag{5.19}$$

Combinando (5.18) y (5.19), obtenemos lo deseado. □

**Proposición 5.11.**

$$|X| \leq \frac{1}{2} \left| \left\{ \boldsymbol{p}_p \in \Pi_n : p \in \Gamma_{n-1} \right\} \right|.$$

*Demostración.* Dividamos la demostración en dos casos.

Caso 1. $n = 2$.

En este caso la proposición 5.9 implica que

$$|X| \leq \sum_i |X_i| \leq 4q_2 \sum_i |E_i| + \frac{1}{h\left(\frac{1}{2q_2^2}\right)} \sum_i h(|E_i|). \tag{5.20}$$

Como $|E_i| \leq r_0$, (5.9) implica que

$$\frac{h(|E_i|)}{|E_i|} \geq \frac{h(r_0)}{r_0} \geq 32C.$$

Entonces concluimos de (5.20) que

$$\begin{aligned} |X| &\leq \frac{4q_2}{32C} \sum_i h(|E_i|) + \frac{1}{h\left(\frac{1}{2q_2^2}\right)} \sum_i h(|E_i|) \\ &\leq \frac{q_2}{8} + \frac{1}{h\left(\frac{1}{2q_2^2}\right)} C. \end{aligned}$$

Entonces, usando la proposición 5.9, obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{h\left(\frac{1}{2q_2^2}\right)}{\frac{1}{2q_2^2}} &\geq cq_1^1 q_2^1 \frac{1}{|\Gamma_1|} \\ &= cq_2.\end{aligned}$$

Así, $|X| \leq \frac{q_2}{8} + \frac{2q_2}{c}C$. Además la proposición 5.8 implica que

$$\begin{aligned}\left|\left\{\mathbf{p}_p \in \Pi_2 : p \in \Gamma_1\right\}\right| &\geq \frac{q_2}{2q_1}|\Gamma_1| \\ &= \frac{q_2}{2}.\end{aligned}$$

Esto y la anterior desigualdad dan

$$\begin{aligned}|X| &\leq \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{c}C\right)\left|\left\{\mathbf{p}_p \in \Pi_2 : p \in \Gamma_1\right\}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left|\left\{\mathbf{p}_p \in \Pi_2 : p \in \Gamma_1\right\}\right|.\end{aligned}$$

Lo cual completa la demostración en el caso $n = 2$.

<u>Caso 2</u> $n \geq 3$.

Tenemos que

$$|X| \leq \sum_i |X_i|. \tag{5.21}$$

Afirmamos que para $i$ se cumple lo siguiente

$$\text{Si } |E_i| \geq \frac{1}{2q_{n-1}^{n-1}} \text{ entonces } X_i = \emptyset. \tag{5.22}$$

En efecto, si (5.22) no se cumpliera existiría un $\mathbf{p}_p \in \Pi_n$ con $p \in \Gamma_{n-1}$ tal que

$$\left|E_i \cap B\left(I_{\mathbf{p}_p}, \frac{1}{2q_n^n}\right)\right| \geq \frac{1}{4}\left|B\left(I_{\mathbf{p}_p}, \frac{1}{2q_n^n}\right)\right|.$$

En particular, esto implica que $E_i \cap I_{\mathbf{p}_p} \neq \emptyset$, de donde $E_i \cap I_p \neq \emptyset$ (usando el hecho de que $I_{\mathbf{p}_p} \subset I_p$). Pero esto contradice la hipótesis inductiva $(II,1(n-1))$ con $|E_i| \geq \frac{1}{2q_{n-1}^{n-1}}$. Esto prueba (5.22).

Entonces de (5.21), (5.22) y de la proposición 5.9, tenemos que

$$|X| \leq \sum_{\left\{i:|E_i|<\frac{1}{2q_{n-1}^{n-1}}\right\}} |X_i| \leq 4q_n \sum_{\left\{i:|E_i|<\frac{1}{2q_{n-1}^{n-1}}\right\}} |E_i| + \frac{1}{h\left(\frac{1}{2q_2^2}\right)} \sum_i h(|E_i|). \tag{5.23}$$

Además para $i$ con $|E_i| < \frac{1}{2q_{n-1}^{n-1}}$, la proposición 5.10 implica que

$$\begin{aligned} \frac{h(|E_i|)}{|E_i|} &\geq \frac{h\left(\frac{1}{2q_{n-1}^{n-1}}\right)}{\frac{1}{2q_{n-1}^{n-1}}} \\ &\geq cq_{n-2}^{n-2}q_{n-1}^{n-2}\frac{1}{|\Gamma_{n-2}|}. \end{aligned}$$

Concluimos de (5.23) que

$$\begin{aligned} |X| &\leq \frac{4q_n|\Gamma_{n-2}|}{cq_{n-2}^{n-2}q_{n-1}^{n-2}} \sum_{\left\{i:|E_i|<\frac{1}{2q_{n-1}^{n-1}}\right\}} h(|E_i|) + \frac{1}{h\left(\frac{1}{2q_n^n}\right)} \sum_i h(|E_i|) \\ &\leq \frac{4q_n|\Gamma_{n-2}|}{cq_{n-2}^{n-2}q_{n-1}^{n-2}}c + \frac{1}{h\left(\frac{1}{2q_n^n}\right)}c. \end{aligned}$$

Luego, usando la hipótesis inductiva (II.2(n-1)) tenemos que $|\Gamma_{n-1}| \geq \frac{q_{n-1}}{4q_{n-2}^{n-2}}|\Gamma_{n-2}|$, de lo que resulta que

$$|X| \leq \frac{16q_n|\Gamma_{n-1}|}{cq_{n-1}^{n-1}}C + \frac{1}{h\left(\frac{1}{2q_n^n}\right)}C.$$

Usando la proposición 5.10, obtenemos que

$$\frac{h\left(\frac{1}{2q_n^n}\right)}{\frac{1}{2q_n^n}} \geq cq_{n-1}^{n-1}q_n^{n-1}\frac{1}{|\Gamma_{n-1}|}.$$

Esto y la anterior desigualdad implican que

$$|X| \leq \frac{16q_n|\Gamma_{n-1}|}{cq_{n-1}^{n-1}}C + \frac{2q_n|\Gamma_{n-1}|}{cq_{n-1}^{n-1}}c.$$

Finalmente, usando la proposición 5.8, obtenemos

$$\begin{aligned}|X| &\leq \left(\frac{32}{c}C + \frac{4}{c}C\right)\left|\left\{\mathbf{p}_p \in \Pi_n : p \in \Gamma_{n-1}\right\}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left|\left\{\mathbf{p}_p \in \Pi_n : p \in \Gamma_{n-1}\right\}\right|.\end{aligned}$$

Esto completa la demostración de la Proposición en el caso $n \geq 3$. $\square$

Ahora, usando las anteriores proposiciones, probaremos que los conjuntos $\Gamma_n$ satisfacen las condiciones (II.1n), (II.2n) y (II.3n).

Comencemos viendo que cumplen la condición (II.1n)

Queremos ver que si $|E_i| \geq \dfrac{1}{2q_n^n}$, entonces $E_i \cap I_p = \emptyset$ para todo $p \in \Gamma_n$. Esto lo vamos a obtener directamente de la definición del conjunto $\Gamma_n$. En efecto, si suponemos que existe $i$ con $|E_i| \geq \dfrac{1}{2q_n^n}$ y un $p \in \Gamma_n$ tal que $E_i \cap I_p \neq \emptyset$ esto claramente implica que

$$\left|E_i \cap B\left(I_{\mathbf{p}_p}, \frac{1}{2q_n^n}\right)\right| \geq \frac{1}{2q_n^n} = \frac{1}{4}\left|B\left(I_{\mathbf{p}_p}, \frac{1}{2q_n^n}\right)\right|. \qquad (5.24)$$

Pero la desigualdad (5.24) contradice el hecho de que $p \in \Gamma_n$. Luego vale la condición (II.1n) para $\Gamma_n$.

Veamos ahora que cumple la condición (II.2n)

Queremos ver que

$$|\Gamma_n| \geq \frac{q_n}{4q_{n-1}^{n-1}}|\Gamma_{n-1}|.$$

Como $X = \left\{\mathbf{p}_p \in \Pi_n : p \in \Gamma_{n-1}\right\} \setminus \Gamma_n$, se tiene por la proposición 5.8 y la proposición 5.11 que

$$\begin{aligned}|\Gamma_n| &= \left|\left\{\mathbf{p}_p \in \Pi_n : p \in \Gamma_{n-1}\right\} \setminus X\right| \\ &\geq \frac{1}{2}\left|\left\{\mathbf{p}_p \in \Pi_n : p \in \Gamma_{n-1}\right\}\right| \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{q_n}{2q_{n-1}^{n-1}}|\Gamma_{n-1}| \\ &= \frac{q_n}{4q_{n-1}^{n-1}}|\Gamma_{n-1}|.\end{aligned}$$

Esto prueba que $\Gamma_n$ cumple la condición (II.2n).

Por último, la condición (II.3n) se obtiene directamente de la definición de los $\Gamma_n$.

4. Construcción de los conjuntos $C_1, C_2, \ldots$.

   Sea $C_n = \bigcup_{p\in\Gamma_n} I_p$.

   Como ya habíamos dicho antes, en este paso completaremos la demostración del Teorema 5.3 mostrando que los conjuntos $C_n$ cumplen las condiciones (5.11), (5.12) y (5.13).

   Para (5.11), primero observemos que $C_n \neq \emptyset$ para todo $n$. De hecho, razonando como en la demostración de la proposició 5.10, vemos que para $j \geq 2$, la condición (II.2j) y el hecho de que $q_j \geq (cq_{j-1}^{j-1})^2 \geq 4q_{j-1}^{j-1}$ implican que

$$|\Gamma_j| \geq \frac{4q_j}{4q_{j-1}^{j-1}} |\Gamma_{j-1}| \geq |\Gamma_{j-1}|.$$

   Repitiendo esta desigualdad para cada $j$ tenemos que

$$|\Gamma_n| \geq |\Gamma_{n-1}| \geq \ldots \geq |\Gamma_1| \geq 1,$$

   y el conjunto $C_n = \bigcup_{p\in\Gamma_n} I_p$ es entonces no vacío.

   Por otro lado, la condición (II.3n) implica que $C_{n+1} \subset C_n$ para todo $n$ y entonces la sucesión $(C_n)_{n\geq 1}$ es decreciente de conjuntos compactos no vacíos y por lo tanto

$$\bigcap_{n\geq 1} C_n \neq \emptyset,$$

   que era lo que buscábamos.

   En cuanto a (5.12), queremos ver que

$$\bigcap_{n\geq 1} C_n \subset (\mathbb{L} \cup \mathbb{Q}) \cap (0,3).$$

   Pero esto se tiene por la proposición 5.7, pues

$$\bigcap_{n\geq 1} C_n \subset \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{p\in\Pi_n} I_p \subset (\mathbb{L} \cup \mathbb{Q}) \cap (0,3).$$

   Por último la condición (5.13) se tiene de la definición de $C_n$ y de la condición (II.1n).

   Con esto completamos la demostración del Teorema 5.3.

$\square$

Antes de dedicarnos a la demostración del Teorema 5.2 observemos que si $h$ es una función dimensión para la cual la función $r \longmapsto \dfrac{h(r)}{r}$ es decreciente, entonces $\Gamma_h = h$. En efecto, como la función $r \longmapsto \dfrac{h(r)}{r}$ es decreciente, para todo $0 < s \leq r$, se tiene que

$$\frac{h(s)}{s} \geq \frac{h(r)}{r}.$$

Luego,

$$r\frac{h(s)}{s} \geq \frac{h(r)}{r}r = h(r) \text{ para todos } 0 < s \leq r.$$

Así,

$$\begin{aligned} \Gamma_h(r) &= \inf_{0<s\leq r} r\frac{h(s)}{s} \\ &\geq h(r). \end{aligned}$$

Por otro lado tomando $s = r$ resulta que $r\dfrac{h(r)}{r} = h(r)$, de lo que obtenemos,

$$\Gamma_h(r) \leq h(r).$$

Luego, $\Gamma_h = h$.

Por lo antes observado, si $h$ es una función dimensión para la cual la función $r \longmapsto \dfrac{h(r)}{r}$ es decreciente, el teorema que queremos demostrar se reduce al Teorema 5.3.

Probaremos dos lemas que necesitaremos para la demostración del teorema.

**Lema 5.12.** *Sea $h$ una función dimensión tal que la función $r \longmapsto \dfrac{h(r)}{r}$ es decreciente en un entorno del cero y tal que*

$$\limsup_{r\searrow 0} \frac{h(r)}{r^t} > 0 \text{ para todo } t > 0.$$

*Entonces existe una nueva función dimensión $g$ tal que la función $r \longmapsto \dfrac{g(r)}{r}$ es decreciente en un entorno del cero y tal que*

*(a)* $\limsup_{r\searrow 0} \dfrac{g(r)}{r} > 0$ *para todo* $t > 0$.

*(b)* $\lim_{r\searrow 0} \dfrac{g(r)}{h(r)} = 0$.

*Demostración.* Como $\operatorname{lím\,sup}_{r\searrow 0} \dfrac{h(r)}{r^t} > 0$ para todo $t > 0$, obtenemos que

$$\operatorname*{lím\,sup}_{r\searrow 0} \frac{h(r)}{r^t} = \infty. \tag{5.25}$$

En efecto,

$$\operatorname*{lím\,sup}_{r\searrow 0} \frac{h(r)}{r^t} = \operatorname*{lím\,sup}_{r\searrow 0} \frac{h(r)}{r^{\frac{t}{2}}} \frac{1}{r^{\frac{t}{2}}} = \infty,$$

para todo $t > 0$. Observemos además que

$$\operatorname*{lím}_{r\searrow 0} \frac{h(r)}{r} = \infty. \tag{5.26}$$

En efecto, como la función $r \longmapsto \dfrac{h(r)}{r}$ es decreciente y por ser $h$ una función dimensión, $h(0) = 0$, tenemos que el límite $\operatorname{lím}_{r\searrow 0} \dfrac{h(r)}{r}$ existe y es infinito aplicando (5.25) con $t = 1$.

Usando (5.25) y (5.26) podemos elegir una sucesión decreciente $(r_n)_n$ de números reales positivos en el intervalo $(0, 1)$ con $r_n \to 0$ y tal que las siguientes condiciones valen para todo $n$.

$$\frac{h(r_n)}{r_n^{\frac{1}{n}}} \geq n^2. \tag{5.27}$$

$$\frac{h(r_{n+1})}{r_{n+1}} \geq \frac{n+1}{n} \frac{h(r_n)}{r_n}. \tag{5.28}$$

Sea $\rho_n = r_n \dfrac{n}{n+1} \dfrac{h(r_{n+1})}{h(r_n)}$.

De (5.28) tenemos que

$$\frac{h(r_{n+1})}{r_{n+1}} \geq \frac{n+1}{n} \frac{h(r_n)}{r_n} \text{ si y sólo si } r_n \frac{n}{n+1} \frac{h(r_{n+1})}{h(r_n)} \geq r_{n+1},$$

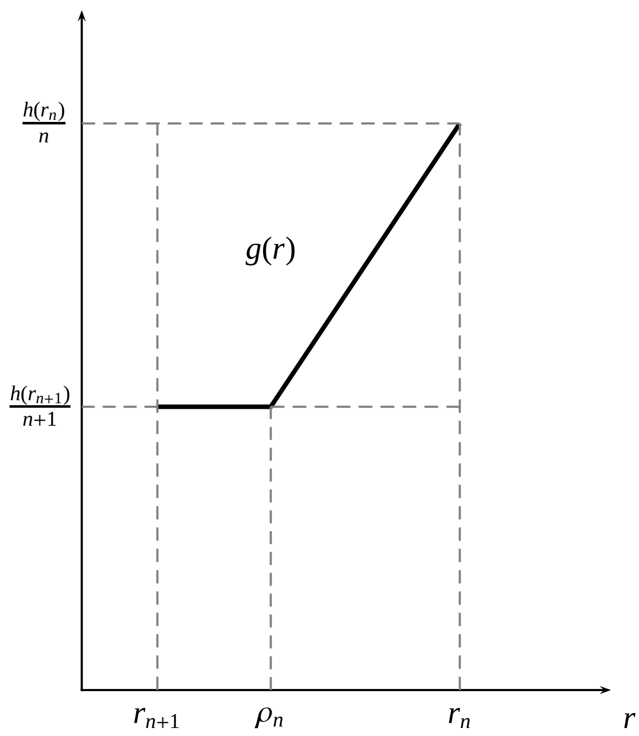
es decir que $\rho_n \geq r_{n+1}$. Además como $h$ es creciente por ser una función dimensión, tenemos que

$$\frac{h(r_{n+1})}{h(r_n)} \leq 1$$

y por lo tanto $\rho_n \leq r_n$. Así, $r_{n+1} \leq \rho_n \leq r_n$ y por lo tanto podemos definir la función $g : [0, +\infty) \longmapsto [0, +\infty)$ de la siguiente manera:

$$g(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0, \\ \dfrac{h(r_{n+1})}{n+1} & \text{si } r_{n+1} < r \leq \rho_n, \\ r\dfrac{h(r_n)}{nr_n} & \text{si } \rho_n < r \leq r_n. \end{cases}$$

Su gráfico en el intervalo $[r_{n+1}, r_n]$ es el siguiente




Es claro que $g$ es creciente y continua con $g(0) = 0$. En particular, esto muestra que $g$ es una función dimensión.

Probemos que la función $r \longmapsto \dfrac{g(r)}{r}$ es decreciente en un entorno del cero y que $g$ satisface las condiciones (a) y (b).

Dediquémonos primero a la condición (a).

Para todo $t > 0$, usando (5.27) y la definición de $g$, tenemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{r\searrow 0} \frac{g(r)}{r^t} &\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{g(r_n)}{r_n^t} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{h(r_n)}{n r_n^t} \\
&\geq \limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\geq \frac{1}{t}}} \frac{h(r_n)}{n r_n^{\frac{1}{n}}} \\
&\geq \limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\geq \frac{1}{t}}} \frac{n^2}{n} = \infty,
\end{aligned}$$

lo que muestra que la condición (a) se cumple.

Para la condición (b), observemos que como $h$ es creciente y la función $r \longmapsto \dfrac{h(r)}{r}$ es decreciente, tenemos que $\dfrac{h(r)}{r} \geq \dfrac{h(r_n)}{r_n}$ para todo $r \in [r_{n+1}, r_n]$ y obtenemos que

$$h(r) \geq \begin{cases} h(r_{n+1}) = (n+1)g(r) \geq ng(r) & \text{para } r_{n+1} < r \leq \rho_n, \\ \dfrac{h(r_n)}{r_n} r = ng(r) & \text{para } \rho_n < r \leq r_n. \end{cases} \tag{5.29}$$

De (5.29) se desprende que $\dfrac{g(r)}{h(r)} \leq \frac{1}{n}$ para todo $n$ y por lo tanto

$$\lim_{r\searrow 0} \frac{g(r)}{h(r)} = 0,$$

que es lo que queríamos.

Finalmente vamos a mostrar que la función $r \longmapsto \dfrac{g(r)}{r}$ es decreciente. Para esto notemos que

$$\frac{g(r)}{r} = \begin{cases} \dfrac{h(r_{n+1})}{n+1} \dfrac{1}{r} & \text{si } r_{n+1} < r \leq \rho_n, \\ \dfrac{h(r_n)}{n} \dfrac{1}{r_n} & \text{si } \rho_n < r \leq r_n. \end{cases} \tag{5.30}$$

Como para $r_{n+1} < r \leq \rho_n$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{g(r)}{r} &= \frac{h(r_{n+1})}{n+1}\frac{1}{r} \\ &\leq \frac{h(r_{n+1})}{n+1}\frac{1}{\rho_n} \\ &= \frac{h(r_n)}{n}\frac{1}{r_n} \\ &= \frac{g(\rho_n)}{\rho_n}, \end{aligned}$$

entonces resulta que

$$\frac{g(r)}{r} \geq \frac{g(\rho_n)}{\rho_n} \text{ para todo } r_{n+1} < r \leq \rho_n.$$

Concluimos de (5.30) que la función $r \longmapsto \dfrac{g(r)}{r}$ es decreciente en el intervalo $(r_{n+1}, r_n]$. Esto es pues sabemos que $r_{n+1} \leq \rho_n \leq r_n$ para todo $n$ y en $[\rho_n, r_n]$ tenemos que $\dfrac{g(r)}{r} = \dfrac{h(r_n)}{n}\dfrac{1}{r_n} = g(r_n)$ para todo $r$.

Por otro lado como para $r_n < r \leq \rho_{n-1}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{g(r_n)}{r_n} &= \frac{h(r_n)}{n}\frac{1}{r_n} \\ &\geq \frac{h(r_n)}{n}\frac{1}{r} \\ &= \frac{g(r)}{r}, \end{aligned}$$

se concluye de (5.30) que la función $r \longmapsto \dfrac{g(r)}{r}$ es decreciente en el intervalo $(\rho_n, \rho_{n-1}]$. Esto es pues $\dfrac{g(r)}{r} = \dfrac{h(r_n)}{n}\dfrac{1}{r_n}$ para todo $r \in [\rho_n, r_n]$.

De lo anterior obtenemos que la función $r \longmapsto \dfrac{g(r)}{r}$ es decreciente. Esto se debe a que la función $\dfrac{g(r)}{r}$ es decreciente en cada intervalo $[r_{n+1}, r_n)$ y continua por lo que resulta decreciente en todo su dominio.

$\square$

**Lema 5.13.** *Sea h una función dimensión arbitraria.*

1. *La función $\Gamma_h$ es una función dimensión. En particular, la medida de Hausdorff $\Gamma_h$-dimensional $\mathcal{H}^{\Gamma_h}$ está bien definida.*

2. *La función* $r \longmapsto \dfrac{\Gamma_h(r)}{r}$ *es decreciente en un entorno del cero.*

3. *Tenemos*
$$\mathcal{H}^{\Gamma_h}(E) \leq \mathcal{H}^h(E) \leq 2\mathcal{H}^{\Gamma_h}(E)$$
*para todo* $E \subset \mathbb{R}$.

*Demostración.* Para (1), es claro que $\Gamma_h$ es continua por derecha y que $\Gamma_h(0) = 0$, con lo cual sólo falta ver que $\Gamma_h$ es creciente. Para esto, fijemos $0 < r_1 \leq r_2$ y observemos que
$$\Gamma_h(r_1) = \inf_{0<s\leq r_1} r_1 \frac{h(s)}{s} \leq \inf_{0<s\leq r_1} r_2 \frac{h(s)}{s}.$$

Además,
$$\begin{aligned}
\Gamma_h(r_1) &= \inf_{0<s\leq r_1} r_1 \frac{h(s)}{s} \\
&\leq r_1 \frac{h(r_1)}{r_1} \\
&= h(r_1) \\
&= \inf_{r_1\leq s\leq r_2} h(s) \\
&\leq \inf_{r_1\leq s\leq r_2} h(s)\frac{r_2}{s} \\
&= \inf_{r_1\leq s\leq r_2} r_2 \frac{h(s)}{s}.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\Gamma_h(r_1) \leq \inf_{0<s\leq r_1} r_2 \dfrac{h(s)}{s}$ y $\Gamma_h(r_1) \leq \inf_{r_1\leq s\leq r_2} r_2 \dfrac{h(s)}{s}$. Entonces
$$\begin{aligned}
\Gamma_h(r_1) &\leq m = min\left(\inf_{0<s\leq r_1} r_2 \frac{h(s)}{s}, \inf_{r_1\leq s\leq r_2} r_2 \frac{h(s)}{s}\right) \\
&= \inf_{0<s\leq r_2} r_2 \frac{h(s)}{s} \\
&= \Gamma_h(r_2).
\end{aligned}$$

Para terminar la demostración de (1) veamos que efectivamente $m = \inf_{0<s\leq r_2} r_2 \dfrac{h(s)}{s}$. Para ver que $m$ es cota inferior observemos que como $0 < r_1 \leq r_2$, si $0 < s \leq r_1$ entonces
$$r_2 \frac{h(s)}{s} \geq \inf_{0<s\leq r_1} r_2 \frac{h(s)}{s} \geq m;$$

y si $r_1 \leq s \leq r_2$, tenemos que

$$r_2 \frac{h(s)}{s} \geq \inf_{r_1 \leq s \leq r_2} r_2 \frac{h(s)}{s} \geq m.$$

Para ver que es la mayor de las cotas inferiores, supongamos que $r_2 \frac{h(s)}{s} \geq t$ para todo $0 < s \leq r_2$ y veamos que $t \leq m$. Pero como tenemos que $r_2 \frac{h(s)}{s} \geq t$ para todo $0 < s \leq r_1$ entonces

$$\inf_{0 < s \leq r_1} r_2 \frac{h(s)}{s} \geq t.$$

Además, como $r_2 \frac{h(s)}{s} \geq t$ para todo $r_1 \leq s \leq r_2$, entonces

$$\inf_{r_1 \leq s \leq r_2} r_2 \frac{h(s)}{s} \geq t.$$

Luego, $m \geq t$.

Para (2) observemos que si $0 < r_1 \leq r_2$, entonces claramente

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_h(r_1)}{r_1} &= \inf_{0 < s \leq r_1} \frac{h(s)}{s} \\ &\geq \inf_{0 < s \leq r_2} \frac{h(s)}{s} \\ &= \frac{\Gamma_h(r_2)}{r_2} \end{aligned}$$

con lo cual la función $r \longmapsto \frac{\Gamma_h(r)}{r}$ es decreciente que era lo que queríamos ver.

Para (3), recordemos que queremos ver que

$$\mathcal{H}^{\Gamma_h}(E) \leq \mathcal{H}^h(E) \leq 2\mathcal{H}^{\Gamma_h}(E)$$

para todo $E \subset \mathbb{R}$.

Primero mostraremos que $\mathcal{H}^{\Gamma_h}(E) \leq \mathcal{H}^h(E)$. Claramente tenemos que

$$\Gamma_h(r) = \inf_{0 < s \leq r} r \frac{h(s)}{s} \leq r \frac{h(r)}{r} = h(r).$$

De esta desigualdad obtenemos que $\mathcal{H}^{\Gamma_h}(E) \leq \mathcal{H}^h(E)$ para todo $E \subset \mathbb{R}$. En efecto, como $\Gamma_h(r) \leq h(r)$ para todo $r > 0$, tenemos que para $\delta > 0$ y para todo cubrimiento $\{E_i\}_i$ de $E$,

$$\sum_i \Gamma_h(|E_i|) \leq \sum_i h(|E_i|).$$

Así, $\mathcal{H}^{\Gamma_h}_\delta(E) \leq \mathcal{H}^h_\delta(E)$ para todo $\delta > 0$. Luego, $\mathcal{H}^{\Gamma_h}(E) \leq \mathcal{H}^h(E)$.

Mostraremos ahora que $\mathcal{H}^h(E) \leq 2\mathcal{H}^{\Gamma_h}(E)$ para todo $E \subset \mathbb{R}$.

Consideremos $E \subset \mathbb{R}$ y fijemos un $\delta > 0$. Sea $(E_i)_{i\in I}$ un $\delta$-cubrimiento de $E$. Momentáneamente fijemos el índice $i$ y escribamos $r_i = |E_i|$. Como

$$\Gamma_h(r_i) = \frac{\delta}{2^i} > \Gamma_h(r_i) = \inf_{0<s\leq r_i} r_i \frac{h(s)}{s},$$

por ser ínfimo, existe un $s_i$ con $0 < s_i \leq r_i$ tal que

$$\Gamma_h(r_i) = \frac{\delta}{2^i} \geq r_i \frac{h(s_i)}{s_i}. \tag{5.31}$$

Si denotamos con $n_i$ al único entero positivo tal que $n_i - 1 < \frac{r_i}{s_i} \leq n_i$, tenemos que, como $|E_i| = r_i < n_i s_i$, el conjunto $E_i$ puede ser cubierto por $n_i$ conjuntos $E_{i,1}, \ldots, E_{i,n_i}$ con $|E_{i,j}| = s_i$ para todo $j = 1, \ldots, n_i$.

Claramente, como

$$E \subset \bigcup_i E_i \subset \bigcup_i \bigcup_{j=1}^{n_i} E_{i,j} \quad \text{y} \quad n_i \leq 1 + \frac{r_i}{s_i} \leq 2\frac{r_i}{s_i},$$

pues $1 \leq \frac{r_i}{s_i}$, concluimos de (5.31), que

$$\begin{aligned}
\sum_i \Gamma_h(|E_i|) + \delta &= \sum_i \left(\Gamma_h(|E_i|) + \frac{\delta}{2^i}\right) \\
&= \sum_i \left(\Gamma_h(r_i) + \frac{\delta}{2^i}\right) \\
&\geq \sum_i \frac{r_i}{s_i} h(s_i) \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_i n_i h(s_i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} h(s_j) \\
&= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} h(|E_{i,j}|) \\
&\geq \frac{1}{2} \mathcal{H}^h_\delta(E).
\end{aligned}$$

Esto implica que $\mathcal{H}^{\Gamma_h}_\delta(E) + \delta \geq \frac{1}{2}\mathcal{H}^h_\delta(E)$. En efecto, para cada $\delta > 0$ obtenemos que

$$\sum_i \Gamma_h(|E_i|) + \delta \geq \frac{1}{2}\mathcal{H}^h_\delta(E)$$

entonces $\mathcal{H}^{\Gamma_h}_\delta(E) \geq \frac{1}{2}\mathcal{H}^h_\delta(E) - \delta$. Así,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{\Gamma_h}(E) &= \lim_{\delta\searrow 0}\left(\mathcal{H}^{\Gamma_h}_\delta(E) + \delta\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\lim_{\delta\searrow 0}\mathcal{H}^h_\delta(E) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{H}^h(E),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathcal{H}^h(E) \geq 2\mathcal{H}^{\Gamma_h}(E).$$

Esto completa la demostración del lema. □

*Demostración.* del Teorema 5.2

(1) Sea $h$ una función dimensión tal que $\limsup_{r\searrow 0}\dfrac{\Gamma_h(r)}{r^t} = 0$ para algún $t > 0$. Entonces por el Teorema 5.3 aplicado a la función $\Gamma_h$ que es también una función dimensión (usando la parte (1) del lema 5.13), se tiene que $\mathcal{H}^{\Gamma_h}(\mathbb{L}) = 0$. Ahora usando la parte (3) del Lema 5.13, concluimos que $\mathcal{H}^h(\mathbb{L}) = 0$.

(2) Queremos ver que si $\limsup_{r\searrow 0}\dfrac{\Gamma_h(r)}{r^t} > 0$ para todo $t > 0$, entonces el conjunto $\mathbb{L}$ no tiene medida $\mathcal{H}^h\sigma$-finita. Supongamos, para llegar luego a una contradicción, que existe una función dimensión $h$ tal que $\limsup_{r\searrow 0}\dfrac{\Gamma_h(r)}{r^t} > 0$ para todo $t > 0$ y tal que $\mathbb{L}$ tiene medida de Hausdorff $h$-dimensional $\sigma$-finita. Entonces, tendríamos que $\mathbb{L}$ puede escribirse como

$$\mathbb{L} = \bigcup_n E_n$$

donde $E_n \subset \mathbb{R}$ con $\mathcal{H}^h(E_n) < +\infty$ para todo $n$.

Como $\limsup_{r\searrow 0}\dfrac{\Gamma_h(r)}{r^t} > 0$ para todo $t > 0$ y la función $r \longmapsto \dfrac{\Gamma_h(r)}{r}$ es decreciente en un entorno del cero (por la parte (2)del lema 5.13), usando el lema 5.12, podemos encontrar una nueva función dimensión $g$ tal que la función $r \longmapsto \dfrac{g(r)}{r}$ es decreciente en un entorno del cero y tal que

(a) $\limsup_{r\searrow 0}\dfrac{g(r)}{r^t} > 0$ para todo $t > 0$.

(b) $\text{lím}_{r\searrow 0} \dfrac{g(r)}{\Gamma_h(r)} = 0.$

Tenemos entonces usando (a) y el teorema 5.3, que

$$\mathcal{H}^g(\mathbb{L}) = \infty. \tag{5.32}$$

Como $\mathcal{H}^h(E_n) < +\infty$ para todo $n$, entonces $\mathcal{H}^{\Gamma_h}(E_n) < +\infty$ para todo $n$ (usando la parte (3) del lema 5.13); y por lo tanto, usando (b), podemos deducir que $\mathcal{H}^g(E_n) = 0$ para todo $n$. En efecto, como

$$\text{lím}_{r\searrow 0} \frac{g(r)}{\Gamma_h(r)} = 0,$$

dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|r| < \delta$ entonces $\dfrac{g(r)}{h(r)} < \varepsilon$.

Sea $(E_n^i)_i$ tal que $E_n \subset \bigcup_i E_n^i$ con $|E_n^i| < \delta$. Entonces

$$\sum_i g(|E_n^i|) = \sum_i \frac{g(|E_n^i|)}{\Gamma_h(|E_n^i|)}\Gamma_h(|E_n^i|) < \varepsilon \sum_i \Gamma_h(|E_n^i|) < \widetilde{\varepsilon}$$

con $\widetilde{\varepsilon}$ arbitrario, con lo cual $\mathcal{H}^g(E_n) = 0$ para todo $n$. Así,

$$\mathcal{H}^g(\mathbb{L}) = \mathcal{H}^g\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \sum_n \mathcal{H}^g(E_n) = 0. \tag{5.33}$$

Luego, la contradicción que buscábamos se tiene de (5.32) y (5.33). □

Nos podemos preguntar en base a este teorema si realmente existe una función dimensión $h$ tal que $\mathcal{H}^h(\mathbb{L}) > 0$ y el conjunto de los números de Liouville $\mathbb{L}$ tenga medida $\mathcal{H}^h\sigma$-finita. Esta pregunta fue formulada por R. D. Mauldin ([2].) El siguiente corolario responde a esta pregunta.

**Corolario 5.14.** *Sea $h$ una función dimensión arbitraria. Entonces $\mathcal{H}^h(\mathbb{L}) = 0$ o el conjunto $\mathbb{L}$ no tiene medida $\mathcal{H}^h$ $\sigma$-finita.*

*Demostración.* En el capítulo 4 habíamos visto que $\mathcal{H}^h(\mathbb{L}) \in \{0, +\infty\}$ entonces tenemos que $\mathcal{H}^h(\mathbb{L}) = 0$ o si $\mathcal{H}^h(\mathbb{L}) > 0$ (lo que es equivalente a que $\mathcal{H}^h(\mathbb{L}) = +\infty$), usando (1) del Teorema 5.2, $\mathbb{L}$ no tiene medida $\mathcal{H}^h$ $\sigma$- finita. □

El corolario 5.14 también fue obtenido por Elekes y Keleti ([3]) usando diferentes métodos. Ellos probaron que si $\mu$ es una medida sobre $\mathbb{R}$ invariante por traslaciones entonces $\mu(\mathbb{L}) = 0$ o el conjunto $\mathbb{L}$ no tiene medida $\mu$ $\sigma$-finita. A desarrollar esta demostración nos dedicaremos en el siguiente capítulo.

Notemos que el verdadero significado del Teorema 5.2 no es que demuestra que la medida de Hausdorff $h$-dimensional del conjunto de los números de Liouville es igual a cero o a infinito para toda función dimensión $h$, sino que, en primer lugar pone de manifiesto que si la medida $h$-dimensional de Hausdorff de $\mathbb{L}$ es infinita entonces $\mathbb{L}$ no tiene medida de Hausdorff $h$-dimensional $\sigma$-finita y, en segundo lugar, que localiza el "punto de corte exacto"para el cual la medida de Hausdorff de $\mathbb{L}$ salta de infinito a cero: si $h$ es una función dimensión para la cual la función $r \longmapsto \Gamma_h(r) = \operatorname{ínf}_{0<s\leq r} r\dfrac{h(s)}{s}$ decrece más rápido que cualquier potencia cerca del cero, entonces $\mathcal{H}^h(\mathbb{L}) = \infty$, y si $h$ es una función dimensión para la cual la función $r \longmapsto \Gamma_h(r)$ decrece más lento que alguna potencia cerca del cero, entonces $\mathcal{H}^h(\mathbb{L}) = 0$.

Observemos además que si bien el resultado obtenido por Elekes y Keleti, que desarrollaremos en el siguiente capítulo, es más general en el sentido en que no trabaja sólo con medidas $h$-dimensionales de Hausdorff con $h$ una función dimensión, éste no da una clasificación de las medidas en el sentido de para cuáles $\mathcal{H}^h(\mathbb{L}) = 0$ y para cuáles $\mathcal{H}^h(\mathbb{L}) = \infty$.

# Capítulo 6

# Inconmensurabilidad del Conjunto de Liouville

En este capítulo mostraremos, como lo ya lo habíamos anunciado en el capítulo anterior, que el conjunto de los números de Liouville tiene medida cero o medida no $\sigma$-finita respecto de toda medida de Borel en $\mathbb{R}$ invariante por traslaciones, en particular, con respecto a cualquier medida de Hausdorff $\mathcal{H}^g$ con función dimensión $g$. Para ello nos basaremos en un paper de M. Elekes y T. Keleti [3].

Para este capítulo tendremos en cuenta la siguiente definición.

**Definición 6.1.** *Un conjunto de Borel $B \subset \mathbb{R}$ no vacío se dice **inconmensurable** si tiene medida cero o no $\sigma$- finita para toda medida de Borel de $\mathbb{R}$ invariante por traslaciones.*

Además cuando decimos medida de Borel nos referimos a una medida definida en una $\sigma$-álgebra que contiene a los conjuntos borelianos.

**Teorema 6.2.** *El conjunto $\mathbb{L}$ de los números de Liouville es inconmensurable.*

En los anteriores capítulos ya observamos que $\mathbb{L}$ es de medida de Lebesgue cero, denso, $G_\delta$ y periódico módulo $\mathbb{Q}$ (esto es, $\mathbb{L} + q = \mathbb{L}$ para todo $q \in \mathbb{Q}$). Entonces el anterior teorema es un corolario del siguiente Teorema.

**Teorema 6.3.** *Sea $B \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío $G_\delta$ de medida de Lebesgue cero. Supongamos que $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subset B\}$ es denso en $\mathbb{R}$. Entonces $B$ es inconmensurable.*

Para demostrar este teorema nos basaremos en dos lemas. El primero de los dos lemas se basa en un resultado probado por V. Prokaj [10], donde se prueba algo similar pero para medidas finitas usando métodos más complicados.

**Lema 6.4.** *Sea $B$ un conjunto de Borel de medida de Lebesgue cero y $\mu$ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ tal que $B$ es de medida positiva y $\sigma$-finita. Entonces*

*(i)* $\mu(B \cap (B+t)) = 0$ *para $\lambda$-c.t.p. $t$ ($\lambda$: medida de Lebesgue).*

*(ii) Existe un conjunto de Borel $B' \subset B$ con $\mu(B') > 0$ e int$(B' - B') = \emptyset$.*

*(iii) Existe un conjunto compacto $C \subset B$ con $\mu(C) > 0$ e int$(C - C) = \emptyset$.*

*Demostración.* (i) Sea $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow [0, +\infty]$ la medida dada, donde $\mathcal{S}$ es una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ conteniendo a los conjuntos de Borel. Definimos una nueva medida $\mu_B$ como sigue:

$$\mu_B(S) = \mu(B \cap S) \text{ para todo } s \in \mathcal{S}.$$

$\mu_B$ es claramente una medida de Borel en $\mathbb{R}$ $\sigma$-finita (pues $\mu$ lo es).

Definimos

$$\widetilde{B} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in B\right\}.$$

Éste es claramente un conjunto de Borel (pues $B$ lo es) y por lo tanto $\mu_B x \lambda$-medible. Como ambas medidas son $\sigma$-finitas, podemos aplicar el Teorema de Fubini a $\widetilde{B}$.

Las secciones verticales de $\widetilde{B}$ son de la forma

$$\{y \in \mathbb{R} : x + y \in B\} = \{y \in \mathbb{R} : y \in B - x\} = B - x,$$

luego son todas de medida de Lebesgue cero. Entonces, por Fubini, $(\mu_B x \lambda)(\widetilde{B}) = 0$ y por lo tanto la sección horizontal de $\widetilde{B}$ es de medida $\mu_B$ cero, para casi todo punto respecto de la medida de Lebesgue.

La sección horizontal de $\widetilde{B}$ es

$$\{x \in \mathbb{R} : x + y \in B\} = B - y,$$

luego tenemos que

$$0 = \mu_B(B - y) = \mu(B \cap (B - y))$$

para casi todo $y$.

Reemplazando ahora $y$ por $-t$ se obtiene que

$$0 = \mu(B \cap (B + t))\, \lambda - \text{c.t.p.} t,$$

que es lo que queríamos.

(ii) Queremos ver que existe un conjunto de Borel $B' \subset B$ con $\mu(B') > 0$ e $\mathrm{int}(B' - B') = \emptyset$.

Por (i) podemos elegir un conjunto denso numerable $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\mu(B \cap (B + d)) = 0$ para todo $d \in D$.

Definimos
$$B' = B \setminus \bigcup_{d \in D} (B + d).$$
Luego, $B'$ resulta un conjunto de Borel incluido en $B$. Además,

$$\begin{aligned}
\mu_B(B') &= \mu_B(B) - \mu_B\left(\bigcup_{d \in D} (B + d)\right) \\
&\geq \mu(B) - \sum_{d \in D} \mu_B(B + d) \\
&= \mu(B) - 0 \\
&= \mu(B) > 0.
\end{aligned}$$

Luego $\mu(B') \geq \mu(B) > 0$.

Más aún, como $B' \subset B$, tenemos que $\mu(B') \leq \mu(B)$ por lo que $\mu(B) = \mu(B')$. Nos falta ver que $\mathrm{int}(B' - B') = \emptyset$. Para esto, como $D$ es denso en $\mathbb{R}$, veremos que $D \cap (B' - B') = \emptyset$.

Esto es cierto, en efecto, si existiera un $y \in D \cap (B' - B')$, entonces $y \in D$ e $y = d_1 - d_2$ con $d_1, d_2 \in B'$, es decir, $d_1, d_2 \in B$ y $d_1, d_2 \notin B + d$ para ningún $d \in D$. Entonces tendríamos que $d_1 = y + d_2 \in B + y$, esto es absurdo pues $y \in D$.

Luego, $\mathrm{int}(B' - B') = \emptyset$.

(iii) Queremos ver que existe un conjunto compacto $C \subset B$ con $\mu(C) > 0$ e $\mathrm{int}(C - C) = \emptyset$. Como por (ii), $\mathrm{int}(B' - B') = \emptyset$, alcanza con encontrar un conjunto compacto $C \subset B'$ con $\mu(C) > 0$.

Como $B' \subset B$ y $B$ tiene medida $\sigma$-finita respecto de $\mu$, entonces $B'$ también tiene medida $\mu$ $\sigma$-finita. Escribamos entonces

$$B' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$$

con $S_n \in \mathcal{S}$ y $\mu(S_n) < +\infty$.

Ahora, como por (ii) $\mu(B') > 0$, existe algún $S = S_n \subset B'$ con $0 < \mu(S) < +\infty$. Definamos

$$\mu_S(A) = \mu(S \cap A) \text{ para todo conjunto de Borel } A \subset \mathbb{R}.$$

Notemos que a diferencia de la medida $\mu_B$, esta medida está definida sólo para los conjuntos borelianos.

$\mu_S$ es claramente una medida finita sobre los conjuntos de Borel y por lo tanto, para todo conjunto medible $A$

$$\mu_S(A) = \sup\{\mu_S(K) : K \subset A, K\text{compacto}\}.$$

El anterior resultado puede verse por ejemplo en Classical descriptive set theory, A. S. Kechris, Teorema 17.11 ([6]).

Aplicando esto a $B'$, conjunto de Borel con $\mu_S(B') = \mu(S \cap B') = \mu(S) > 0$, obtenemos un conjunto compacto $C \subset B'$ con $\mu_S(C) = \mu(S \cap C) > 0$.

Luego, $\mu(C) > 0$ con lo cual demostramos lo que queríamos.

□

**Lema 6.5.** *Sea $B$ un conjunto $G_\delta$ denso tal que $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subset B\}$ es denso en $\mathbb{R}$, y $C \subset B$ un conjunto compacto con $int(C - C) = \emptyset$. Entonces existe una cantidad no numerable de traslaciones disjuntas de $C$ dentro de $B$.*

*Demostración.* Consideremos

$$T = \{t \in \mathbb{R} : C + t \subset B\}.$$

Como por hipótesis $B$ es un conjunto $G_\delta$, existen abiertos $U_n$ tales que $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$.

Claramente $C + t \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n = B$ si y sólo si $C + t \subset U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $T = \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$ donde $G_n = \{t \in \mathbb{R} : C + t \subset U_n\}$.

Como $C$ es compacto y $U_n$ es abierto entonces $G_n$ es abierto. Además $G_n$ es denso.

Observemos que es suficiente construir un conjunto de Cantor $P \subset C$ con la propiedad de que $(C + p_0) \cap (C + p_1) = \emptyset$ para todo par de puntos distintos $p_0, p_1 \in P$.

Definamos entonces $P$ usando el usual esquema con el que se contruyen los conjuntos de Cantor.

Construyamos para cada $n \in \mathbb{N}$ intervalos compactos no degenerados $I_s$ con $s \in \{0, 1\}^n$ (sucesiones de ceros y unos de longitud $n$ que sabemos que hay en total $2^n$).

Fijemos $I_\emptyset$ tal que $I \subset G_0$.

Una vez que $I_s$ está definido para algún $s \in \{0,1\}^n$, elijamos $x \in I_s \cap G_{n+1}$. Como $G_{n+1}$ es abierto y denso y $C - C$ tiene interior vacío, podemos encontrar $y \in [I_s \cap G_{n+1}] \setminus [(C - C) + x]$.

En efecto, como $G_{n+1}$ es abierto y $x \in I_s \cap G_{n+1}$, entonces existe un $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset G_{n+1}$. Además, como $I_s$ es un intervalo y $x \in I_s$, existe un $\delta < r$ tal que $B(x,\delta) \subset G_{n+1} \cap I_s$.

Ahora, si suponemos que para todo $y \in B(x,\delta), y \in (C - C) + x$, entonces $B(x,\delta) \subset (C - C) + x$, pero $\operatorname{int}((C - C) + x) = \emptyset$ pues $\operatorname{int}(C - C) = \emptyset$, lo cual nos lleva a un absurdo.

Luego, existe un $y \in [I_s \cap G_{n+1}] \setminus [(C - C) + x]$.

Lo anterior asegura que $(C + x) \cap (C + y) = \emptyset$, pues de lo contrario existirían $c_0, c_1 \in C$ tales que $c_0 + x = c_1 + y$, entonces tendríamos que $y = (c_0 - c_1) + x \in (C - C) + x$, lo cual es un absurdo.

Por compacidad podemos encontrar $I_{s0}, I_{s1} \subset I_s \cap G_{n+1}$ disjuntos tales que $x \in I_{s0}, y \in I_{s1}$ y $(C + I_{s0}) \cap (C + I_{s1}) = \emptyset$.

Definimos ahora

$$P = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s\in\{0,1\}^n} I_s.$$

Claramente $P$ es un conjunto de Cantor, $P \subset T = \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$ pues $I_s \subset G_n$ para todos $n \in \mathbb{N}$ y $s \in \{0,1\}^n$.

Además, si $p_0, p_1 \in P$ con $p_0 \neq p_1$ entonces existen $n$ y $s \in \{0,1\}^n$ tales que $p_0 \in I_{s0}$ y $p_1 \in I_{s1}$ (o al revés) con lo que $(C + p_0) \cap (C + p_1) = \emptyset$ (pues $(C + I_{s0}) \cap (C + I_{s1}) = \emptyset$.)

Esto completa la demostración del Lema.

$\square$

La demostración del Teorema 6.3, sale razonando por el absurdo aplicando el Lema 6.5 a $C$ del Lema 6.4 parte (iii).

Para terminar este capítulo, observemos que el Teorema 6.3 proporciona una gran cantidad de ejemplos de conjuntos inconmensurables: Sea $A$ un conjunto no vacío con medida de Lebesgue cero, y sea $B$ un conjunto $G_\delta$ de medida cero que contiene a $A + \mathbb{Q}$. Entonces, $\bigcap_{q\in\mathbb{Q}}(B + q)$ está en las hipótesis del Teorema 6.3, por lo tanto es inconmensurable.

Claramente $A \subset \bigcap_{q\in\mathbb{Q}}(B + q)$, luego todo conjunto con medida de Lebesgue cero puede ser cubierto por un conjunto inconmensurable.

# Bibliografía


[1] E. Best, *A closed dimensionless set*, Proc. Edimburgh Math. Soc.(2) (1939), no 6, 105–108.

[2] M. Csörnyei, *Open Problems.* Compiled and edited by Marianne Csörnyei in *Proceedings from the "Dimensions and Dynamics" conference*, Miskolc, Hungary, 1998. Periodica Mathematica Hungarica 37, 227–237

[3] M. Elekes y T. Keleti, *Borel sets which are null or non-$\sigma$-finite for every translation invariant measure*, Adv. Math. 201 (2006), no. 1, 102–115.

[4] F. Hausdorff, *Dimension und äusseres Math*, Mathematische Annalen 79 (1919), 157–179.

[5] V. Jarnik, *Über simultanen diophantischen Approximationen*, Mathematische Zeitschrift 33 (1931), 505–543.

[6] A.S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer, Berlin, 1995.

[7] L. Olsen, *On the exact Hausdorff dimension of the set of Liouville numbers.*, Manuscripta Mathematica 116, 157–172 (2005)

[8] L. Olsen y Dave L. Renfro, *On teh exact Hausdorff dimension of the set of Liouville numbers II*, Manuscripta Mathematica 119, 217–224 (2006).

[9] J. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer Verlag, 1980.

[10] V. Prokaj, *A characterization of singular measures*, Real Anal. Exchange 29 (2), (2003/04), 805–812.

[11] C. A. Rogers, *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, 1998, Cambridge, UK 2nd edition.

[12] J. Sondow, *An irrationality measure for Liouville numbers and conditional measures for Euler's constant*, preprint, arXiv:math.NT/0307308 (2003)

[13] C. Tricot, Jr., *Two definition of fractional dimension*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 91 (1982), no. 1, 57–74.