



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Singularidades de Funciones Diferenciables

Autor: Martina Negrin Barcellos
Director: Fernando Cukierman
Fecha de Presentación: Marzo del 2013

Singularidades de Funciones Diferenciables

Índice

1. Introducción	4
2. Gérmenes y Jets.	5
2.1. Definiciones y notación	5
2.2. Una fórmula integral de Cauchy	7
2.3. El teorema de división	8
2.4. El teorema de Preparación	14
3. Gérmenes finitamente determinados	19
3.1. Definiciones y ejemplos elementales	19
3.2. El teorema de Mather y su interpretación geométrica	21
4. Despliegues	29
4.1. Definiciones y propiedades.	29
4.2. Teorema principal sobre despliegues y consecuencias	33
4.3. Demostración del lema 4.10	36
5. Catástrofes	40
5.1. El teorema de las siete catástrofes elementales	40
6. Aplicaciones y ejemplos	43
6.1. Generalidades	43
6.2. Geometría del pliegue y de la cúspide	46
6.3. Ejemplos	48
6.3.1. La ecuación de Van der Waals.	48
6.3.2. Un ejemplo de la regla de dilación	51

Si humildes semillas, en complemento casamiento con el agua (mediadora entre la vida y la muerte, en la doble corriente de creación y destrucción) despiertan a su destino, inician un armónico fenómeno, que la ciencia nos explica en parte, y son capaces de tender a su "ser final", desplazando lo fijo que se interpone, mudando formas, irrumpiendo el espacio más allá del asignado, cómo no entrever el misterio, la precariedad del continente frente al contenido viviente, la poética emanada de una experiencia simple, símbolo de la regeneración periódica de la naturaleza y del hombre, de la muerte y la resurrección. "He aquí un nuevo día, de un nuevo mes, de un nuevo año; hay que remover lo que el tiempo ha gastado": invocación que reiteran los tártaros para cada año nuevo, cuando siembran en la tierra una jarra llena de tierra. Lo hacen siempre en recuerdo de la creación.

Víctor Grippo

Quiero agradecer a Fran, Pablo y Guille; a Maxi; a mis papás y mis hermanos; y a Fernando.

1. Introducción

Abordaremos el problema de clasificar funciones diferenciables a valores reales salvo cambio de coordenadas. Estudiaremos familias de singularidades (despliegues). Y finalmente aplicaremos los resultados a la Teoría de Catástrofes de R. Thom.

En el capítulo 2, se definen los objetos con los que trabajaremos a lo largo de este trabajo: gérmenes y k -jets de funciones diferenciables. También probaremos una generalización del Teorema de Preparación de Weierstrass para el caso C^∞ (2.20) y la formulación más algebraica del mismo dada por Mather (2.22).

Sentadas las bases técnicas, en el capítulo 3, estudiaremos gérmenes finitamente determinados. Un germen está k -determinado cuando es equivalente a cualquier otro germen con su mismo k -jet, en este sentido está determinado por su polinomio de Taylor de orden k . Para eso, se define la noción de equivalencia de gérmenes con la que trabajaremos a lo largo de la tesis, y se estudian algunos ejemplos ilustrativos. Luego, se expone una demostración del Teorema de Mather (3.7) que da una caracterización algebraica para determinar cuándo un germen está k -determinado.

En el capítulo 4, nos introduciremos en el estudio de despliegues (o deformaciones) de singularidades y daremos una condición algebraica para saber en qué caso un despliegue es lo suficientemente general como para inducir cualquier otro despliegue, es decir, en qué caso un despliegue resulta *miniversal* (4.11). Una medida de la complejidad de un germen es la codimensión del ideal generado por sus derivadas parciales en el ideal maximal, que es, a su vez, la cantidad de parámetros de un despliegue miniversal. R. Thom probó que esencialmente (salvo la adición de una forma cuadrática no degenerada y el signo) existen siete singularidades con codimensión ≤ 4 , estas son las siete catástrofes elementales (capítulo 5). En el último capítulo veremos algunas aplicaciones y ejemplos.

2. Gérmenes y Jets.

Este primer capítulo es esencialmente técnico. En primer lugar, haremos las definiciones pertinentes y sentaremos notación. El resultado principal es la generalización del Teorema de Preparación de Weierstrass para funciones $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. La demostración presentada (que sigue, principalmente, la demostración de Nirenberg en [10]) vale tanto en el caso complejo como en el caso real, pero es una versión local del teorema de preparación. El mismo es válido globalmente para funciones holomorfas o C^∞ y el resultado global es utilizado en la demostración de la equivalencia entre estabilidad infinitesimal y estabilidad estructural. Para lo que nosotros veremos alcanza con el resultado local.

2.1. Definiciones y notación

2.1 Definición. Sean M y N dos variedades diferenciables. Sean $U, V \subset M$ entornos abiertos de un punto $p \in M$, $f: U \rightarrow N$ y $g: V \rightarrow N$ diferenciables. Decimos que f y g tienen el mismo *germen* en el punto p si existe un abierto no vacío W tal que $f|_W = g|_W$. Esto define una relación de equivalencia en el conjunto de las funciones diferenciables definidas en un entorno de p . Se llama $C_p^\infty(M, N)$ al conjunto de las clases de equivalencia de esta relación y cada clase será un *germen*. Notaré $h: (M, p) \rightarrow N$ si $h \in C_p^\infty(M, N)$ y $\bar{f} \in C_p^\infty(M, N)$ al germen que tiene como representante a la función $f: U \rightarrow N$.

2.2. Observemos que si f y g son dos representantes de un germen $h \in C_p^\infty(M)$ entonces $f(p) = g(p)$, por lo tanto, $h(p)$ designará el valor en p de cualquier representante. Todas las derivadas en p tampoco dependen del representante del germen. Si $\bar{f} \in C_p^\infty(M, N)$ con $f(p) = q$ y $\bar{g} \in C_q^\infty(N, L)$ entonces $\bar{g} \circ \bar{f} := \overline{g \circ f} \in C_p^\infty(M, L)$ está bien definida.

2.3. Se nota $C_p^\infty(M)$ al anillo de gérmenes en p con valores reales. La estructura de anillo es la heredada por la de $C^\infty(M)$. Ya que $C_p^\infty(M) = C^\infty(M)/I$ donde

$$I = \{f \in C^\infty(M) \mid f|_U = 0 \text{ para algún abierto } U \text{ que contiene a } p\}.$$

Ahora, sea

$$\mathfrak{m} = \{f: (M, p) \rightarrow \mathbb{R} \mid f(p) = 0\}.$$

Este ideal es maximal y, de hecho, el único ya que si $f(p) \neq 0$, f es no nula en un entorno y, por lo tanto, es una unidad en el anillo de gérmenes.

2.4. A lo largo de la tesis, trabajaré sobre todo con $M = \mathbb{R}^n$, $N = \mathbb{R}^m$ y $p = 0$ para esto introduciré la notación:

$$\mathcal{E}(n, m) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$$\mathcal{E}(n) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathfrak{m}(n) := \mathfrak{m}(\mathbb{R}^n)$$

2.5 Definición. Sea $j^k: \mathcal{E}(n) \rightarrow \mathcal{E}(n)/\mathfrak{m}(n)^{k+1}$ la proyección al cociente. Llamamos k -jet de un germen f a la imagen $j^k(f)$. Sean $\mathfrak{m}(n)^\infty = \bigcap_{k=1}^\infty \mathfrak{m}(n)^k$ y $j^\infty: \mathcal{E}(n) \rightarrow \mathcal{E}(n)/\mathfrak{m}(n)^\infty$. A la imagen $j^\infty(f)$ le diremos el *jet* del germen f y lo notaremos \hat{f} . Llamamos:
 $\mathcal{J}^k(n) := \mathcal{E}(n)/\mathfrak{m}(n)^{k+1}$
 $\mathcal{J}^\infty(n) := \mathcal{E}(n)/\mathfrak{m}(n)^\infty$

Cuando no haga falta indicar el valor de n , notaré \mathfrak{m} , \mathcal{E} , \mathcal{J} , etc.

2.6. Del mismo modo, todas estas definiciones se pueden hacer para el caso holomorfo. La analogía es directa. Notaremos $\mathcal{H}(n, m)$ a los gérmenes en 0 de funciones de \mathbb{C}^n a \mathbb{C}^m y $\mathcal{H}(n) := \mathcal{H}(n, 1)$. También llamaremos $\mathfrak{m}(n) \subset \mathcal{H}(n)$ al ideal de gérmenes que se anulan en 0. En el transcurso de la tesis intentaré remarcar paralelismos entre el caso holomorfo y el caso C^∞ .

2.7 Lema. (Fórmula de Taylor sin resto 1.) *Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+k})$. Si llamamos $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$ a las coordenadas de \mathbb{R}^{n+k} , Entonces,*

$$f(x, y) - f(x, 0) = f_1(x, y)y_1 + \dots + f_k(x, y)y_k$$

Demostración. Considero $f: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x, 0) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(x, ty) dt \\ \Rightarrow f(x, y) - f(x, 0) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, ty) \cdot y_i dt \\ \Rightarrow f(x, y) - f(x, 0) &= \sum_{i=1}^k y_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, ty) dt \end{aligned}$$

◊

2.8. Sea $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ la inclusión definida por $i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$. Este morfismo induce uno en los gérmenes, $i^*: \mathcal{E}(n+k) \rightarrow \mathcal{E}(n)$ definido como $i^*(\bar{f}) = \overline{f \circ i}$. Dada $f \in \mathfrak{m}(n+k)$, notaremos $f|_{\mathbb{R}^n \times 0} := i^*(f)$ o también $f(x, 0)$. A su vez, $\mathcal{E}(n) \subset \mathcal{E}(n+k)$ y $\mathfrak{m}(k) \cdot \mathcal{E}(n+k) = \{f \in \mathcal{E}(n+k) / f(x, 0) = 0\}$.

2.9 Corolario. *El ideal $\mathfrak{m}(k) \cdot \mathcal{E}(n+k)$ está generado por los gérmenes de las funciones coordenadas y_1, y_2, \dots, y_k . En particular, $\mathfrak{m}(n) \subset \mathcal{E}(n)$ está generado por x_1, x_2, \dots, x_n .*

2.10 Teorema. (Fórmula de Taylor sin resto 2.) *Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces,*

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)x_i + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j + \sum_{|\beta|=3} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^\beta}(0)x^\beta + \dots + \sum_{|\alpha|=m} r_\alpha(x)x^\alpha. \quad (1)$$

Con,

$$r_\alpha(0) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0).$$

Donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ es un multiíndice, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$
y $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Demostración. Por inducción en m . El caso $m = 1$ es consecuencia directa del lema anterior. Supongamos que

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i + \dots + \sum_{|\beta|=m-1} r_\beta(x) x^\beta \quad \text{y} \quad r_\beta(0) = \frac{1}{m-1!} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta}(0).$$

A su vez, $r_\beta(x) - \frac{1}{m-1!} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta}(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_\beta}{\partial x_i}(0) x_i$. Por ende, se concluye (1). \odot

2.11 Corolario. $\mathcal{J}^k(n) \simeq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] / \langle x_1, \dots, x_n \rangle^k$

Demostración. El isomorfismo está dado por

$$j^k(f) \mapsto \text{el polinomio de Taylor de orden } k \text{ de } f.$$

\odot

2.2. Una fórmula integral de Cauchy

Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable, consideremos las coordenadas $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$. Entonces,

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2}$$

Entonces,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}.$$

Y se define $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ como,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

2.12. En estos términos, son equivalentes,

- f es analítica
- f es holomorfa
- f verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
- $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$
- $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = 0$

2.13 Lema. Una fórmula integral de Cauchy. Sean $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable (no necesariamente holomorfa), D el disco unitario cerrado y $\alpha \in D^\circ$. Entonces,

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{1}{z - \alpha} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) dz \wedge d\bar{z}.$$

Demostración. Consideremos una bola centrada en α de radio ε , $B_\varepsilon \subset D^\circ$. La función $1/(z - \alpha)$ es analítica fuera de la bola B_ε , por lo tanto, $g(z) = f(z)/(z - \alpha)$ es diferenciable. Entonces, por el teorema de Stokes,

$$\int_{D \setminus B_\varepsilon} dg \wedge dz = \int_{\partial D} g dz - \int_{\partial B_\varepsilon} g dz. \quad (2)$$

Pero,

$$dg \wedge dz = \left(\frac{\partial g}{\partial z} dz + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - \alpha} + f \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{z - \alpha} \right) d\bar{z} \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - \alpha} d\bar{z} \wedge dz. \quad (3)$$

Por lo tanto, reemplazando en (2),

$$\int_{D \setminus B_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - \alpha} d\bar{z} \wedge dz = \int_{\partial D} f(z) \frac{1}{z - \alpha} dz - \int_0^{2\pi} g(\alpha + \varepsilon e^{i\theta}) i \varepsilon e^{i\theta} d\theta \quad (4)$$

$$= \int_{\partial D} f(z) \frac{1}{z - \alpha} dz - \int_0^{2\pi} f(\alpha + \varepsilon e^{i\theta}) i d\theta. \quad (5)$$

Considerando $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos el resultado deseado. \odot

2.3. El teorema de división

2.14 Lema. Si los coeficientes de un polinomio tienden a cero entonces las raíces tienden a cero.

Demostración. Quiero ver que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|\sigma_i| < \delta$ para $i \leq n$ entonces $|x| < \varepsilon$ si $\sum_{i=1}^n \sigma_i x^{n-i} = 0$.

Sea $x \neq 0$ y $p(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_i x^{n-i} = x^n \left(1 + \frac{\sigma_1}{x} + \dots + \frac{\sigma_n}{x^n} \right)$. Supongamos $|x| \geq \varepsilon$, entonces si δ es lo suficientemente chico $\left| \frac{\sigma_1}{x} + \dots + \frac{\sigma_n}{x^n} \right| < 1$ y, por lo tanto, $1 + \frac{\sigma_1}{x} + \dots + \frac{\sigma_n}{x^n} \neq 0$. Entonces, $p(x) \neq 0$. Por lo cual, si $p(x) = 0$ y δ suficientemente chico entonces $|x| < \varepsilon$. \odot

2.15. Teorema de división de Weierstrass. Sea $f: U \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica definida en un entorno del origen U y sea $P: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}$ el polinomio general de grado p ,

$$P(t, \lambda) = t^p + \sum_{j=1}^p \lambda_j t^{p-j} \quad (6)$$

Entonces, en un entorno del origen,

$$f(t, x) = Q(t, x, \lambda)P(t, \lambda) + R(t, x, \lambda)$$

donde

$$R(t, x, \lambda) = \sum_{j=1}^p h_j(x, \lambda)t^{p-j}.$$

Demostración. Como f es analítica tenemos la fórmula integral de Cauchy:

$$f(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z, x)}{z - t} dz$$

Si $|\lambda|$ es lo suficientemente chico, D es un disco que contiene a t y a todas las raíces de P en su interior. La función

$$r(t, z, \lambda) = \frac{P(z, \lambda) - P(t, \lambda)}{z - t}$$

es un polinomio en t de grado menor que p . Ahora,

$$\frac{1}{z - t} = \frac{P(z, \lambda)}{P(z, \lambda)(z - t)} = \frac{P(t, \lambda)}{P(z, \lambda)(z - t)} + \frac{r(t, z, \lambda)}{P(z, \lambda)}$$

Reemplazando en la fórmula de Cauchy, obtenemos

$$f(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{P(t, \lambda)}{P(z, \lambda)(z - t)} + \frac{r(t, z, \lambda)}{P(z, \lambda)} f(z, x) dz \quad (7)$$

$$= P(t, \lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z, x)}{P(z, \lambda)(z - t)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z, x)}{P(z, \lambda)} r(t, z, \lambda) dz \quad (8)$$

Es decir, obtuvimos (6) con $Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z, x)}{P(z, \lambda)(z - t)} dz$ y $R = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z, x)}{P(z, \lambda)} r(t, z, \lambda) dz$ que es un polinomio en t de grado menor que p . \odot

Ahora seguiremos estos pasos para probar el caso C^∞ . Para eso necesitamos el siguiente lema:

2.16. Un lema de Extensión Sea $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable con soporte en la bola unitaria entonces existe una función diferenciable $F: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}$ que verifica:

i) $F(t, x, \lambda) = f(t, x)$ si $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$

ii) Las derivadas de todos los órdenes de la función $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ se anulan en los puntos (z, x, λ) tal que $\text{Im}(z) = 0$ o $P(z, \lambda) = 0$, donde $P(t, \lambda) = t^p + \sum_{j=1}^p \lambda_j t^{p-j}$.

Demostración. Esta demostración consta de tres pasos.

Primer paso: Probaremos la siguiente afirmación.

Sea $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable con soporte en la bola unitaria. Entonces existe $F: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} = f$ y las derivadas de todos los órdenes de $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ se anulan en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Consideremos las coordenadas $(z, \lambda) = (x + iy, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n$. Y se F dada por la serie,

$$F(z, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} i^j \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \lambda) \cdot \frac{y^j}{j!} \cdot \phi(t_j \cdot y)$$

Donde, $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\phi(y) = 1$ si $|y| \leq 1/2$ y $\phi(y) = 0$ si $|y| \geq 1$, t_j es una sucesión tal que $|t_j|$ crece lo suficientemente rápido para que la serie sea diferenciable (t_j dependerá de f). Veamos que verifica lo que queríamos. Es claro que $F(x, \lambda) = f(x)$ si x es real. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z, \lambda) &= \sum_{j=0}^{\infty} i^j \frac{\partial^{j+1} f}{\partial x^{j+1}}(x, \lambda) \cdot \frac{y^j}{j!} \cdot \phi(t_j \cdot y) + \sum_{j=1}^{\infty} i^{j+1} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \lambda) \cdot \frac{y^{j-1}}{(j-1)!} \cdot \phi(t_j \cdot y) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} i^{j+1} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \lambda) \cdot \frac{y^j}{j!} \cdot \phi'(t_j \cdot y) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} i^{j+2} \frac{\partial^{j+1} f}{\partial x^{j+1}}(x, \lambda) \cdot \frac{y^j}{j!} \cdot (\phi(t_{j+1}y) - \phi(t_j \cdot y)) + \sum_{j=0}^{\infty} i^{j+1} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \lambda) \cdot \frac{y^j}{j!} \cdot \phi'(t_j \cdot y) \end{aligned}$$

Evaluando en $y = 0$ sólo sobrevive el primer término de la segunda suma, pero este es nula ya que ϕ es constante en un entorno de $y = 0$ y, por lo tanto, $\phi'(0) = 0$. Y el resultado queda demostrado.

Segundo paso: En este paso queremos probar que si $u, v: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones con soporte en la bola unitaria que verifican que las derivadas de todos los órdenes de $(u - v)$ se anulan en $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$, entonces existe una función $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}$ tal que todas las derivadas de $F - u$ y de $F - v$ se anulan en $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ y en $\mathbb{R}^m \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$ respectivamente.

Llamemos (x, y, z) a las coordenadas de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ y sea para cada multiíndice α , $f_\alpha(y, z) = \frac{\partial^\alpha (u-v)}{\partial x^\alpha}(0, y, z)$. Se define,

$$F(x, y, z) = v(x, y, z) + \sum_{\alpha} f_\alpha(y, z) \cdot \frac{x^\alpha}{\alpha!} \cdot \phi(t_{|\alpha|} \cdot x)$$

Donde ϕ es tal que $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\phi(x) = 1$ si $|x| \leq 1/2$ y $\phi(x) = 0$ si $|x| \geq 1$, $t_{|\alpha|}$ es una sucesión que crece lo suficientemente rápido y; si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_m!$. En $y = 0$, f_α y todas sus derivadas se anulan, por lo tanto, las derivadas F coinciden con las derivadas de v en $\mathbb{R}^m \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$. Sean α, β, γ multiíndices, entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\alpha, \beta, \gamma} F}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}(0, y, z) &= \frac{\partial^{\alpha, \beta, \gamma} v}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}(0, y, z) + \frac{\partial^{\beta, \gamma} f_\alpha}{\partial y^\beta \partial z^\gamma}(y, z) \\ &= \frac{\partial^{\alpha, \beta, \gamma} v}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}(0, y, z) + \frac{\partial^{\alpha, \beta, \gamma} (u - v)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}(0, y, z) \\ &= \frac{\partial^{\alpha, \beta, \gamma} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}(0, y, z). \end{aligned}$$

Y obtenemos lo que queríamos.

Tercer paso: Queremos probar el enunciado del lema. Lo haremos por inducción en p , el grado del polinomio $P(z, \lambda) = z^p + \sum_{j=1}^p \lambda_j z^{p-j}$. El caso $p = 0$ es el paso 1. Supongamos que vale el enunciado para $p - 1$. Primero, consideremos el cambio de variables

$$(z, \lambda) \mapsto (z, \lambda', P(z, \lambda))$$

donde, $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1})$ y llamemos $\mu = P(z, \lambda)$. Entonces, en las nuevas variables la variedad $P(z, \lambda) = 0$ es $\mu = 0$ y el operador $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ se convierte en:

$$L = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \overline{P'(z, \lambda')} \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}}$$

P' denota la derivada con respecto a z , y observar que P' no depende de λ_p . Ahora, construiremos funciones diferenciable $v(z, x, \lambda')$, $u(z, x, \lambda', \mu)$ definidas en $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda' \in \mathbb{C}^{p-1}$, $\mu \in \mathbb{C}$ que verifiquen

- (a) $v(t, x, \lambda) = f(t, x)$ para x real
- (b) las derivadas de todo los órdenes de $\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}$ se anulan en $\text{Im}z = 0$
- (c) $u = v$ si $\mu = 0$
- (d) $L(u)$ se anula en orden infinito si $\mu = 0$
- (e) todas las derivadas de $u - v$ se anulan en $\text{Im}z = \text{Re}\mu = \text{Im}\mu = 0$.

Una vez construidas u y v , la función F que estamos buscando es la hallada en el paso 2. Por hipótesis inductiva existe v que verifica (a),(b) y tal que $\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = 0$ cuando $P'(z, \lambda') = 0$. La función u se construye así:

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{P'} \right)^j \frac{\partial^j v}{\partial \bar{z}^j}(z, x, \lambda') \frac{\bar{\mu}^j}{j!} \phi(|\mu|^2 t_j)$$

Donde, ϕ es como en el primer paso, t_j es una sucesión tal que $|t_j|$ crece lo suficientemente rápido para que la serie sea diferenciable y $(\frac{-1}{\bar{P}'})^j \frac{\partial^j v}{\partial \bar{z}^j}(z, x, \lambda') = 0$ si $\bar{P}' = 0$, $j \geq 1$ (todos los términos son diferenciables ya que $\frac{\partial^j v}{\partial (z)^j}$ y todas sus derivadas se anulan en $P' = 0$). Es claro que se satisface (c). Ahora computemos $L(u)$,

$$\begin{aligned}
L(u) &= \bar{P}' \left(\frac{1}{\bar{P}'} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{\mu}} \right) \\
&= -\bar{P}' \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\bar{P}'} \right)^{j+1} \frac{\partial^{j+1} v}{\partial (z)^{j+1}}(z, x, \lambda') \frac{\bar{\mu}^j}{j!} \phi(|\mu|^2 t_j) \\
&\quad + \bar{P}' \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{\bar{P}'} \right)^j \frac{\partial^j v}{\partial (z)^j}(z, x, \lambda') \frac{\bar{\mu}^{j-1}}{(j-1)!} \phi(|\mu|^2 t_j) \\
&\quad + \bar{P}' \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\bar{P}'} \right)^j \frac{\partial^j v}{\partial (z)^j}(z, x, \lambda') \frac{\bar{\mu}^j}{j!} \phi'(|\mu|^2 t_j) \mu t_j \\
&= -\bar{P}' \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\bar{P}'} \right)^{j+1} \frac{\partial^{j+1} v}{\partial (z)^{j+1}}(z, x, \lambda') \frac{\bar{\mu}^j}{j!} (\phi(|\mu|^2 t_j) - |\mu|^2 t_{j+1}) \\
&\quad + \bar{P}' \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\bar{P}'} \right)^j \frac{\partial^j v}{\partial (z)^j}(z, x, \lambda') \frac{\bar{\mu}^j}{j!} \phi'(|\mu|^2 t_j) \mu t_j
\end{aligned}$$

Evaluando en $\mu = 0$, vemos que se satisface (d) ($\phi'(0) = 0$). Como vale (b),

$$u(z, x, \lambda', \mu) - v(z, x, \lambda') \phi(|\mu|^2 t_0)$$

se anula en todos los órdenes en $\text{Im}z = 0$ y, a su vez, $v - v\phi(|\mu|^2 t_0)$ también se anula en todos los órdenes cuando $\mu = 0$ (ϕ es localmente constante). Entonces, se deduce (e). \odot

2.17 Teorema. (División con Resto) *Sea $\bar{f}: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ un germen diferenciable y sea $P: (\mathbb{R} \times \mathbb{C}^p, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ el polinomio general de grado p ,*

$$P(t, \lambda) = t^p + \sum_{j=1}^p \lambda_j t^{p-j}.$$

Entonces,

$$\bar{f}(t, x) = \bar{Q}(t, x, \lambda) \bar{P}(t, \lambda) + \bar{R}(t, x, \lambda) \tag{9}$$

donde

$$R(t, x, \lambda) = \sum_{j=1}^p h_j(x, \lambda) t^{p-j}$$

y si f y λ son reales Q y R se pueden elegir reales.

Demostración. Consideremos una extensión de $f(t, x)$ con la forma del lema (2.16). Si $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t, x) = F(t, x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{F(z, x, \lambda)}{z-t} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{1}{z-t} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z, x, \lambda) dz \wedge d\bar{z}$$

Como antes,

$$\frac{1}{z-t} = \frac{P(z, \lambda)}{P(z, \lambda)(z-t)} = \frac{P(t, \lambda)}{P(z, \lambda)(z-t)} + \frac{r(t, z, \lambda)}{P(z, \lambda)}$$

y reemplazando en la fórmula anterior obtenemos lo que queríamos con

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{F(z, x, \lambda)}{(z-t)P(z, \lambda)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{1}{(z-t)P(z, \lambda)} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z, x, \lambda) dz \wedge d\bar{z} \quad (10)$$

$$R = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} F(z, x, \lambda) \frac{r(t, z, \lambda)}{P(z, \lambda)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{r(t, z, \lambda)}{P(z, \lambda)} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z, x, \lambda) dz \wedge d\bar{z} \quad (11)$$

Los primeros términos de R y Q son diferenciables porque los integrandos son continuos en ∂D . Las integrales en los segundos términos son absolutamente convergentes ya que todas las derivadas de todos los órdenes de la función $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ se anulan en los puntos (z, x, λ) tal que $Im(z) = 0$ o $P(z, \lambda) = 0$, donde $P(t, \lambda) = t^p + \sum_{j=1}^p \lambda_j t^{p-j}$. Y podemos derivar bajo el signo de la integral, por ende, R y Q resultan C^∞ . Si f y P son reales,

$$f = \frac{f + \bar{f}}{2} = \frac{Q + \bar{Q}}{2} P(t, \lambda) + \frac{R + \bar{R}}{2}.$$

◊

2.18 Definición. Un germen $f \in \mathcal{E}(1+n)$ se dice *p-regular* (con respecto a la primera variable), si $f|_{\mathbb{R} \times 0} \in \mathfrak{m}(1)^p \setminus \mathfrak{m}(1)^{p+1}$.

Si llamamos t a la primera coordenada decir que es p-regular significa que

$$f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, 0) = \dots = \frac{\partial^{p-1} f}{\partial t^{p-1}}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^p f}{\partial t^p}(0, 0) \neq 0$$

Equivalentemente, $\hat{f}(t, 0) = at^p + \text{'términos de orden superior'}$ con $a \neq 0$.

2.19 Observación. Sea $f \in \mathcal{E}(n+1)$ tal que $\hat{f} \neq 0$ y sea p tal que $f \in \mathfrak{m}(n+1)^p$ y $f \notin \mathfrak{m}(n+1)^{p+1}$. Entonces, existe cambio de coordenadas lineal h tal que $f \circ h$ es p-regular.

Demostración. $\hat{f} = f_p(x_1, \dots, x_{n+1}) + \psi(x_1, \dots, x_{n+1})$ donde f_p es un polinomio homogéneo de grado p y $\psi \in \mathfrak{m}(n+1)^{p+1}$. Sea $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f_p(a) \neq 0$ y $h: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ lineal inversible con $h(1, 0, \dots, 0) = a$. Entonces,

$$\begin{aligned} \widehat{f \circ h}(t, 0, \dots, 0) &= \hat{f} \circ \hat{h}(t, 0, \dots, 0) = \hat{f}(ta_1, \dots, ta_{n+1}) \\ &= f_p(ta_1, \dots, ta_{n+1}) + \psi(ta_1, \dots, ta_{n+1}) \\ &= t^p f_p(a_1, \dots, a_{n+1}) + \psi(ta) \end{aligned}$$

donde $f_p(a_1, \dots, a_{n+1}) \neq 0$ y $\psi(ta) \in \mathfrak{m}(1)^{p+1}$

◊

2.4. El teorema de Preparación

2.20 Teorema. (Malgrange) Sea $f \in \mathcal{E}(1+n)$ un germen p -regular con respecto a la primera variable. Entonces, existen gérmenes $u_1, \dots, u_p \in \mathfrak{m}(n)$ y una unidad $Q \in \mathcal{E}(1+n)$ tales que, en un entorno del cero,

$$f(t, x) = Q(t, x) \left[t^p + \sum_{j=1}^p u_j(x) \cdot t^{p-j} \right]$$

Demostración. Por el teorema de división sabemos que:

$$f(t, x) = Q(t, x, \lambda)P(t, \lambda) + R(t, x, \lambda) \quad (12)$$

donde

$$R(t, x, \lambda) = \sum_{j=1}^p h_j(x, \lambda) t^{p-j}$$

La idea es hallar $u_j(x) \in \mathfrak{m}(n)$ tal que $h_j(x, u(x)) = 0$ ($u = (u_1, \dots, u_p)$). Primero veamos que

- (a) $Q(0, 0, 0) \neq 0$ y $h_j(0, 0) = 0$
- (b) $\frac{\partial h_i}{\partial \lambda_j}(0, 0) = 0$ si $i < j$ y $\frac{\partial h_j}{\partial \lambda_j}(0, 0) \neq 0$
- (a) Basta evaluar (12) en $x = \lambda = 0$.

$$f(t, 0) = Q(t, 0, 0)P(t, 0) + R(t, 0, 0) = Q(t, 0, 0)t^p + \sum_{j=1}^p h_j(0, 0)t^{p-j}$$

Como f es p -regular, $Q(0, 0, 0) \neq 0$ y $h_j(0, 0) = 0$.

- (b) Derivemos (12) con respecto a λ_i :

$$0 = Q(t, x, \lambda)t^{p-i} + P(t, \lambda)\frac{\partial Q}{\partial \lambda_i}(t, x, \lambda) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial h_j}{\partial \lambda_i}(x, \lambda)t^{p-j}$$

Evaluando en $x = \lambda = 0$,

$$0 = Q(t, 0, 0)t^{p-i} + t^p \frac{\partial Q}{\partial \lambda_i}(t, 0, 0) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial h_j}{\partial \lambda_i}(0, 0)t^{p-j}$$

Considerando esta ecuación módulo t^p

$$0 = q(t)t^{p-i} + \sum_{j=1}^p \frac{\partial h_j}{\partial \lambda_i}(0, 0)t^{p-j} \quad (13)$$

Entonces,

$$0 = \sum_{j=i+1}^p \frac{\partial h_j}{\partial \lambda_i}(0,0)t^{p-j} \text{ módulo } t^{p-i}$$

y se sigue que $\frac{\partial h_j}{\partial \lambda_i}(0,0) = 0$ si $i < j$. Por otro lado, considerando (13) módulo t^{p-i+1} ,

$$0 = q(t)t^{p-i} + \frac{\partial h_i}{\partial \lambda_i}(0,0)t^{p-i}$$

como $q(t) \neq 0$ resulta que $\frac{\partial h_i}{\partial \lambda_i}(0,0) \neq 0$.

Ahora, sea $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ definido por

$$\phi(x, \lambda) = (x, h(x, \lambda))$$

donde

$$h(x, \lambda) = (h_1(x, \lambda), \dots, h_p(x, \lambda))$$

La matriz jacobiana de ϕ en $(0,0)$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & & \\ & & ? & & \frac{\partial h_i}{\partial \lambda_i}(0,0) \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Como la matriz $\left(\frac{\partial h_i}{\partial \lambda_i}(0,0)\right)$ es triangular inferior y tiene toda la diagonal no nula, ϕ es inversible en un entorno del $(0,0)$. Sea $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $i(x) = (x, 0)$. Entonces, la función $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ que buscábamos será la composición

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{i} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \xrightarrow{\phi^{-1}} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}^p$$

◊

2.21 Corolario. Lema de división generalizado. Sean $f, g \in \mathcal{E}(n+1)$, f p -regular, entonces, existen $Q \in \mathcal{E}(n+1)$ y p gérmenes $h_j \in \mathcal{E}(n)$ tales que

$$g = Q \cdot f + R \text{ donde } R(t, x) = \sum_{j=1}^p h_j(x)t^{p-j}.$$

Demostración. Sabemos que

$$f(t, x) = Q_1(t, x) \left[t^p + \sum_{j=1}^p u_j(x) \cdot t^{p-j} \right]$$

y

$$g(t, x) = Q_2(t, x, \lambda)P(t, \lambda) + R(t, x, \lambda)$$

donde

$$R(t, x, \lambda) = \sum_{j=1}^p h_j(x, \lambda)t^{p-j}.$$

Poniendo $\lambda = u_j(x)$, entonces,

$$g(t, x) = \frac{Q_2(t, x, h(x))}{Q_1(t, x)} f(t, x) + R(t, x, h(x)).$$

◊

2.22. El teorema de preparación según Mather. Sea $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ un germen diferenciable y $f^* : \mathcal{E}(p) \rightarrow \mathcal{E}(n)$ el morfismo inducido por f . Sea A un $\mathcal{E}(n)$ -módulo finitamente generado entonces, son equivalentes:

- I. A está finitamente generado como $\mathcal{E}(p)$ -módulo
- II. $A/(f^*\mathfrak{m}(p).A)$ tiene dimensión finita como \mathbb{R} -espacio vectorial.

Demostración. Observemos que si $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ entonces

$$f^*(\mathfrak{m}(p)) = \langle f_1, \dots, f_p \rangle.$$

Ya que si $g \in \mathfrak{m}(p)$, $g = \sum_{i=1}^p x_i \cdot h_i$ entonces,

$$g \circ f = \sum_{i=1}^p f_i \cdot h_i \circ f.$$

Si A está generado por a_1, \dots, a_r como $\mathcal{E}(p)$ -módulo, entonces, también generan $A/(f^*\mathfrak{m}(p).A)$ sobre $\mathcal{E}(p)/\mathfrak{m}(p) = \mathbb{R}$ (esto es consecuencia de la fórmula de Taylor sin resto).

La otra implicación es la más sutil. Veamos primero el caso particular en que $n = p + 1$ y $f(t, x) = x$. Consideremos $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ que generan A como $\mathcal{E}(p + 1)$ -módulo y cuyas clases generan $A/(\mathfrak{m}(p).A)$ como \mathbb{R} -espacio vectorial (en este caso, $f^*\mathfrak{m}(p) = \mathfrak{m}(p)$). Entonces, si $a \in A$ se escribe como

$$a = \sum_{j=1}^k c_j a_j + \sum_{j=1}^p z_j a_j \text{ con } c_j \in \mathbb{R}, z_j \in \mathfrak{m}(p). \mathcal{E}(p + 1)$$

En particular,

$$ta_i = \sum_{j=1}^k c_{ij}a_j + \sum_{j=1}^p z_{ij}a_j \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

En forma matricial, si $a = (a_1, \dots, a_k)^t$, $c = (c_{ij})$, $z = (z_{ij})$

$$(t.Id - c - z).a = 0$$

Llamo $b = t.Id - c - z$, entonces

$$Adj(b).b = det(b).Id$$

y resulta que $det(b).a_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$. Por otro lado, $\chi(x, t) = det(t.Id - c - z)$ cuando $x = 0$ es un polinomio mónico de grado k . Ya que, como $z(t, 0) = 0$, $\chi(t, 0)$ es el polinomio característico de la matriz c . Entonces, χ es q -regular para algún $q \leq k$. Por ende, el lema de división generalizado nos dice que $\mathcal{E}(p+1)/\chi\mathcal{E}(p+1)$ está generado por $1, t, \dots, t^{q-1}$ como $\mathcal{E}(p)$ -módulo. Pero, como $\chi.a_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$, $\chi.A = 0$ y, por lo tanto, A es un módulo sobre $\mathcal{E}(p+1)/\chi\mathcal{E}(p+1)$ que es finitamente generado por hipótesis. Entonces, resulta que A está finitamente generado como $\mathcal{E}(p)$ -módulo.

Ahora, analicemos el caso en que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una inmersión en el origen (i.e. tiene rango n). Por el teorema del rango, existen coordenadas tales que $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$. En este caso, $f^*: \mathcal{E}(p) \rightarrow \mathcal{E}(n)$ resulta sobreyectiva. Entonces, los generadores de A como $\mathcal{E}(n)$ -módulo también lo generan como $\mathcal{E}(p)$ -módulo.

Finalmente, si $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ es un germen cualquiera lo podemos escribir como la composición de una inmersión y n proyecciones del primer caso:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{(id, f)} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}^p$$

Nos resta ver que si la tesis del teorema vale para $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ y para $g: (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ entonces vale para $g \circ f$. Supongamos, entonces, que A es un $\mathcal{E}(n)$ -módulo finitamente generado y tal que $A/(g \circ f)^*\mathfrak{m}(q).A$ tiene dimensión finita como \mathbb{R} -espacio vectorial. Como, $g^*\mathfrak{m}(q) \subset \mathfrak{m}(p)$, se sigue que $f^*g^*\mathfrak{m}(q) \subset f^*\mathfrak{m}(p)$ y, por lo tanto, $A/f^*\mathfrak{m}(p).A$ también tiene dimensión finita. Entonces, A es un $\mathcal{E}(p)$ -módulo finitamente generado. Como la estructura de A como un $\mathcal{E}(p)$ -módulo es vía f^* ,

$$A/g^*\mathfrak{m}(q).A = A/(f^*g^*\mathfrak{m}(q).A)$$

que tiene dimensión finita sobre \mathbb{R} . Entonces, estamos en la hipótesis del teorema para g y A resulta finitamente generado como $\mathcal{E}(q)$ -módulo, y la estructura es vía $(g \circ f)^*$. ⊙

2.23 Corolario. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, $\{a_1, \dots, a_k\}$ generan A como $\mathcal{E}(p)$ -módulo si y solo si representan generadores de $A/(f^*\mathfrak{m}(p).A)$ como \mathbb{R} -espacio vectorial.*

Demostración. Que si $\{a_1, \dots, a_k\}$ generan A como $\mathcal{E}(p)$ -módulo entonces representan generadores de $A/(f^*\mathfrak{m}(p).A)$ como \mathbb{R} -espacio vectorial lo vimos en la demostración del teorema precedente. Veamos la otra implicación. Si $\{a_1, \dots, a_k\}$ representan generadores de $A/(f^*\mathfrak{m}(p).A)$ como \mathbb{R} -espacio vectorial, entonces,

$$A = \langle a_1, \dots, a_k \rangle_{\mathbb{R}} + f^*\mathfrak{m}(p).A = \langle a_1, \dots, a_k \rangle_{\mathfrak{m}(p)} + \mathfrak{m}(p)A$$

Como A está finitamente generado como $\mathcal{E}(p)$ -módulo, el lema de Nakayama implica que

$$A = \langle a_1, \dots, a_k \rangle_{\mathfrak{m}(p)}$$

◉

3. Gérmenes finitamente determinados

3.1. Definiciones y ejemplos elementales

3.1 Definición. \triangleright Llamemos $\mathcal{B}(n) := \{h \in \mathcal{E}(n, n)/h \text{ es inversible y } h(0) = 0\}$.

\triangleright Decimos que $f, g \in \mathcal{E}(n)$ son *equivalentes a derecha* si existe $h \in \mathcal{B}(n)$ tal que $f \circ h = g$. (Ser equivalente a derecha es una relación de equivalencia.) Diremos que f y g son equivalentes. Decimos que $f, g \in \mathcal{H}(n)$ son *equivalentes a derecha* si existe $h \in \{h \in \mathcal{H}(n, n)/h \text{ es inversible y } h(0) = 0\}$ tal que $f \circ h = g$.

\triangleright Decimos que $f \in \mathcal{E}(n)$ (o en $\mathcal{H}(n)$) está *k-determinado*¹ si todo germen $g \in \mathcal{E}(n)$ con $j^k(f) = j^k(g)$ es equivalente a derecha a f . Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f \in \mathcal{E}(n)$ está k-determinado entonces decimos que f está *finitamente determinado*.

3.2 Observación. $f \in \mathcal{E}(n)$ está k-determinado si y solo si todo $g \in \mathcal{E}(n)$ tal que $j^k(f) = j^k(g)$ está k-determinado ya que ser equivalente a derecha es de equivalencia. En particular, $f \in \mathcal{E}(n)$ está k-determinado si y solo si su k-jet está k-determinado. Es decir, que f esté k-determinado depende solo de su k-jet.

3.3 Ejemplos. Ningún 0-jet determina. Si $Df \neq 0$, el teorema de rango implica que f es equivalente a la proyección a la primera coordenada. Por lo tanto, está 1-determinada (los gérmenes con diferencial no nula forman una sólo órbita por la acción).

3.4 Definición. Sea $f \in \mathcal{E}(n)$, si $f(0) = Df(0) = 0$, decimos que es una *singularidad*.

3.5 Proposición. Una singularidad $f \in \mathcal{E}(n)$ está 2-determinada si y solo si $j^2(\eta)$ es una forma no degenerada, es decir, $\det(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)_{i,j} \neq 0$.

Demostración. El lema de Morse dice que si $p \in M$ es un punto crítico no degenerado de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ entonces podemos elegir un sistema de coordenadas alrededor de p tal que en estas coordenadas $f = \sum_{0 \leq i \leq n} \lambda_i x_i^2 + f(p)$ donde $\lambda_i = \pm 1$. Por lo tanto, si $j^2(f)$ es una forma no degenerada f está 2-determinada.

Supongamos que $j^2(f)$ es una forma degenerada, para ver que f no está 2-determinada alcanza ver que su 2-jet no está 2-determinado. Podemos suponer que tiene la forma $q(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{0 \leq i \leq n-1} \lambda_i x_i^2$ con $\lambda_i = \pm 1$. Supongamos que q es equivalente a $g = q(x_1, \dots, x_{n-1}) + x_n^3$. Entonces, existe $h \in \mathfrak{m}(n, n)$, $h = (h_1, \dots, h_n)$ inversible, tal que $\eta \circ h = g$.

$$\sum_{0 \leq i \leq n-1} \lambda_i h_i^2 = q(x_1, \dots, x_{n-1}) + x_n^3 \quad (14)$$

¹Mather en [8] define diferentes equivalencias dadas por la acción de otros grupos, y en cada caso, da una condición algebraica que asegura que un germen esté k-determinado con la noción de equivalencia dada.

Derivando con respecto a x_k ,

$$\sum_{0 \leq i \leq n-1} \lambda_i 2h_i \frac{\partial h_i}{\partial x_k} = \begin{cases} \pm 2x_k & \text{si } k \neq n, \\ 3x_n^2 & \text{si } k = n. \end{cases} \quad \forall 1 \leq k \leq n \quad (15)$$

Derivando con respecto a x_n ,

$$\sum_{0 \leq i \leq n-1} \lambda_i 2 \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_n} \frac{\partial h_i}{\partial x_k} + h_i \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_n \partial x_k} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ 6x_n & \text{si } k = n. \end{cases} \quad \forall 1 \leq k \leq n \quad (16)$$

Como $h_i(0, \dots, 0) = 0$,

$$\sum_{0 \leq i \leq n-1} \lambda_i 2 \frac{\partial h_i}{\partial x_n}(0) \frac{\partial h_i}{\partial x_k}(0) = 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n \quad (17)$$

Como $\det(\partial h_i / \partial x_k(0))_{i,k} \neq 0$,

$$\partial h_i / \partial x_n(0) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n-1 \quad (18)$$

Ahora, derivando (16) con respecto a x_n obtengo,

$$\sum_{1 \leq i \leq n-1} 2\lambda_i \left(3 \frac{\partial h_i}{\partial x_n} \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_n^2} + h_i \frac{\partial^3 h_i}{\partial x_n^3} \right) = 6 \quad (19)$$

Evaluando en 0,

$$\sum_{1 \leq i \leq n-1} 2\lambda_i 3 \frac{\partial h_i}{\partial x_n}(0) \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_n^2}(0) = 6 \quad (20)$$

Llegamos a una contradicción, por lo tanto q no está 2-determinado. \odot

3.6. Nos preguntamos si esta proposición se puede generalizar. En este sentido, ¿será cierto que dada $f \in \mathfrak{m}(n)^{r-1}$ entonces, f está r -determinado si y sólo si $j^r(f)$ es un polinomio homogéneo de rango máximo? Donde el *rango* se define de la siguiente manera. Dado $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}),

$$rg(p) \leq r \quad \Leftrightarrow \quad \text{existe } A \in Gl(n) \text{ tal que } p \circ A \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$$

$$rg(p) = r \quad \Leftrightarrow \quad r = \min\{k : rg(p) \leq k\}.$$

Veremos más adelante que, si f está r -determinado, su forma inicial debe tener rango máximo, es decir, no existe un cambio de coordenadas tal que pueda escribirse en menos de n variables. También mostraremos un ejemplo de un polinomio de rango máximo que no está finitamente determinado.

3.2. El teorema de Mather y su interpretación geométrica

3.7 Teorema. (Mather) Sea $f \in \mathcal{E}(n)$. Si

$$\mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle + \mathfrak{m}^{k+2}. \quad (21)$$

Entonces, f está k -determinada.

Al ideal $\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$ lo llamaré indistintamente $\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle$ o $\langle \partial f \rangle$.

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{E}(n)$ con el mismo k -jet, es decir, tales que $f - g \in \mathfrak{m}^{k+1}$. Queremos ver que son equivalentes. Considero representantes de f y g y los llamo igual. Definamos la curva de funciones,

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x) \text{ con } t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Llamo $F_t(x) = F(t, x)$. Si vemos que dado t_0 existe $\varepsilon > 0$ tal que F_t es equivalente a F_{t_0} siempre que $|t - t_0| < \varepsilon$, entonces, como \mathbb{R} es conexo, f resultará equivalente a g (el conjunto $\{t \in \mathbb{R} / F_t \text{ es equivalente a } F_0\}$ sería abierto y cerrado).

Llamemos $\mathcal{E}(n+1)$ al anillo de gérmenes centrados en $(0, t_0)$, y veamos a $\mathcal{E}(n) \subset \mathcal{E}(n+1)$ como el subanillo de los gérmenes que no dependen de t . La hipótesis implica que

$$\mathfrak{m}(n)^{k+1} \mathcal{E}(n+1) \subset \mathfrak{m}(n)^2 \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{E}(n+1)} + \mathfrak{m}(n)^{k+2} \cdot \mathcal{E}(n+1). \quad (22)$$

Como $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = t \frac{\partial}{\partial x_i} (g - f) \in \mathfrak{m}(n)^k \cdot \mathcal{E}(n+1)$, entonces

$$\mathfrak{m}(n)^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{E}(n+1)} \subset \mathfrak{m}(n)^2 \cdot \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{E}(n+1)} + \mathfrak{m}(n)^{k+2} \cdot \mathcal{E}(n+1). \quad (23)$$

De (22) + (23) y del hecho que $\mathfrak{m}(n) \subset \mathfrak{m}(n+1)$ se deduce que

$$\mathfrak{m}(n)^{k+1} \cdot \mathcal{E}(n+1) \subset \mathfrak{m}(n)^2 \cdot \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{E}(n+1)} + \mathfrak{m}(n+1) \mathfrak{m}(n)^{k+1} \cdot \mathcal{E}(n+1).$$

Por el lema de Nakayama,

$$\mathfrak{m}(n)^{k+1} \cdot \mathcal{E}(n+1) \subset \mathfrak{m}(n)^2 \cdot \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{E}(n+1)}$$

Como, $\frac{\partial F}{\partial t} = g - f \in \mathfrak{m}(n)^{k+1}$, entonces,

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \mathfrak{m}(n)^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{E}(n+1)}$$

Es decir, existen $\alpha_i \in \mathfrak{m}(n)^2 \mathcal{E}(n+1)$ tales que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (24)$$

Sea $\alpha = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$ y $H : \mathbb{R}^n \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \alpha(H(x, t), t)$$

con condición inicial $H_{t_0} = id$. Que existe, cerca de t_0 , por el teorema de existencia y unicidad de solución (diferenciable respecto a parámetros y condiciones iniciales) de una ecuación diferencial ordinaria ([1], pág. 52). Como $\alpha(0, t) = 0$ (ya que $\alpha_i \in \mathfrak{m}(n)^2 \mathcal{E}(n+1)$), $H(0, t) = 0$ es la única solución de la ecuación:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(0, t) = \alpha(H(0, t), t).$$

Por lo tanto, encontramos una función $H : \mathbb{R}^n \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que verifica:

- (I) $H_{t_0} = id$
- (II) $H_t(0) = 0$
- (III) $\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x, t), t) \frac{\partial H_i}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x, t), t) = 0$

Observemos que la condición (III) nos dice que

$$\frac{\partial}{\partial t}(F_t \circ H_t) = 0$$

Es decir que $F_t \circ H_t$ no depende de t . Pero,

$$F_{t_0} \circ H_{t_0} = F_{t_0}(H(x, t_0)) = F_{t_0}(x)$$

Entonces, el germen $\bar{H} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ verifica

- (I) $\bar{H}_{t_0} = id$
- (II) $\bar{H}_t(0) = 0 \forall t$
- (III) $\bar{F}_t \circ \bar{H}_t = F_{t_0}$

La primera condición implica que \bar{H}_t es inversible cerca de t_0 , por lo tanto, (II) nos dice que $\bar{H}_t \in \mathcal{B}(n)$ y (III) que F_{t_0} y F_t son equivalentes si $|t - t_0| < \varepsilon$. \odot

3.8 Observación. La misma demostración prueba que el teorema de Mather vale en el caso holomorfo.

3.9. Sea $f \in \mathcal{E}(n)$, entonces vale la siguiente implicación,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(n)^k &\subset \mathfrak{m}(n) \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1} \\ \Rightarrow \mathfrak{m}(n)^{k+1} &\subset \mathfrak{m}(n)^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+2} \end{aligned} \quad (25)$$

Brocker en [3] demuestra (25). Demazure en [5] enuncia el teorema de Mather con la condición (21). Nosotros seguimos la demostración de Brocker para probar el enunciado de Demazure.

3.10 Corolario. Sea $f \in \mathcal{E}(n)$ un germen tal que $\dim(\mathcal{E}(n)/\langle \partial f \rangle) = k$. Entonces, f está $k+1$ -determinado.

Demostración. Sea $A = \mathcal{E}(n)/\langle \partial f \rangle$. Consideremos la cadena de módulos,

$$A \supset \mathfrak{m}(n).A \supset \mathfrak{m}(n)^2.A \supset \dots \supset \mathfrak{m}(n)^h.A \supset \mathfrak{m}(n)^{h+1}.A \supset \dots$$

Por el lema de Nakayama, tenemos que

$$A \supsetneq \mathfrak{m}(n).A \supsetneq \mathfrak{m}(n)^2.A \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{m}(n)^h.A = 0$$

con $h \leq \dim(A) = k$. Por lo tanto,

$$\mathfrak{m}(n)^k \subset \mathfrak{m}(n)^h \subset \langle \partial f \rangle$$

y multiplicando por $\mathfrak{m}(n)$

$$\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{m}(n)\langle \partial f \rangle \quad (26)$$

y, en particular,

$$\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{m}(n)\langle \partial f \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1} \quad (27)$$

⊙

Observar que las condiciones (26) y (27) son equivalentes (Nakayama).

3.11 Ejemplos. a) Si $\nabla f \neq 0$ entonces, $\langle \partial f \rangle = \mathcal{E}(n)$ (ya que todo germen que no se anula en 0 es inversible en $\mathcal{E}(n)$) y f resulta 1-determinada. Si $j^2(f)$ es una forma no degenerada, entonces, $\langle \partial f \rangle = \mathfrak{m}(n)$ módulo $\mathfrak{m}(n)^2$, entonces f está 2-determinado.

b) El "k" del corolario no es óptimo. Sea $f(x, y) = x^3 + y^3$, $\dim(\mathcal{E}(n)/\langle \partial f \rangle) = \dim(\mathcal{E}(n)/\langle x^2, y^2 \rangle) = 4$, por lo tanto, f está 5-determinado. Sin embargo, $\mathfrak{m}(n)\langle \partial f \rangle = \langle x, y \rangle \langle x^2, y^2 \rangle = \langle x^3, yx^2, y^3, xy^2 \rangle = \mathfrak{m}(n)^3$. Por lo tanto, (25) se cumple para $k = 3$ y f resulta estar 3-determinado.

c) Sea $f(x, y) = x^3 + yx^2$.

$$\mathbf{m}(n)\langle\partial f\rangle = \langle 3x^3 + 2yx^2, 3x^2y + 2y^2x, x^3, x^2y \rangle = \langle y^2x, x^3, x^2y \rangle = I.$$

El monomio $y^k \notin I$ cualquiera sea k (ya que el conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 que se anulan en I es la recta $x = 0$ que no está contenido en el $(0, 0)$). Por lo tanto, f no está finitamente determinado. Sin embargo, f es un polinomio de rango máximo. Para ver esto, calculemos el determinante de su matriz Hessiana.

$$\det \begin{pmatrix} 6x + 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix} = -4x^2$$

Como su hessiano no es idénticamente nulo, entonces f es de rango máximo².

d) Si $\dim(\mathcal{E}(n)/\langle\partial f\rangle) < \infty$, entonces, por el argumento dado en la demostración anterior, $\mathbf{m}(n)^k \subset \langle\partial f\rangle$ para algún k . Por lo tanto, si f es un polinomio,

$$\mathcal{E}(n)/\langle\partial f\rangle = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/\langle\partial f\rangle$$

Por otro lado, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/\langle\partial f\rangle) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\langle\partial f\rangle)$. Si escribimos,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=r_i}^{d_i} g_j \text{ donde } g_j \text{ es homogéneo de grado } j.$$

Entonces,

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\langle\partial f\rangle) \geq \prod_{i=1}^n r_i \quad (28)$$

Y vale la igualdad si y sólo si el único cero en común de los f_{r_i} es el cero. Por ejemplo, sea $f(x, y) = x^\alpha \pm y^\beta$ con g un polinomio de grado mayor que α y β . Entonces,

$$\dim(\mathcal{E}(n)/\langle\partial f\rangle) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\langle\alpha x^{\alpha-1}, \beta x^{\beta-1}\rangle) = (\alpha - 1)(\beta - 1).$$

Por lo tanto, f resulta $((\alpha - 1)(\beta - 1) + 1)$ -determinado.

Ahora, veamos para qué valores de k vale la inclusión (25). Es decir,

$$\langle x, y \rangle^k \subset \langle x, y \rangle \langle x^{\alpha-1}, y^{\beta-1} \rangle$$

²Hesse afirmó que un polinomio homogéneo en $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ se puede escribir en menos que $n + 1$ variables si y sólo si el determinante de su matriz hessiana es idénticamente nulo. Noether y Gordan probaron que esto es cierto si $n \leq 3$ ([6]). En el caso general, vale que si no tiene rango máximo entonces, el determinante de su matriz hessiana es idénticamente nulo. Sylvester dio un método para determinar el rango de un polinomio mediante la construcción de una matriz cuyo rango coincide con el del polinomio.

Si,

$$x^k, y^k \in \langle x^\alpha, xy^{\beta-1}, yx^{\alpha-1}, y^\beta \rangle,$$

entonces, $k \geq \max(\alpha, \beta)$. Además,

$$x^i y^{k-i} \in \langle x^\alpha, xy^{\beta-1}, yx^{\alpha-1}, y^\beta \rangle \quad \text{para } 1 \leq i \leq k,$$

implica que, $i \geq \alpha - 1$ o $k - i \geq \beta - 1$. Como $k - i \geq k - \alpha + 2$, alcanza tomar $k = \max\{\alpha + \beta - 3, \alpha, \beta\}$.

Por otro lado,

$$\langle x, y \rangle^2 \langle x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \rangle = \langle x^{\alpha+1}, x^2 y^{\beta-1}, y^2 x^{\alpha-1}, y^{\beta+1}, yx^\alpha, xy^\beta \rangle$$

y haciendo un cálculo análogo, vemos que,

$$\langle x, y \rangle^{\alpha+\beta} \subset \langle x, y \rangle^2 \langle \partial f \rangle.$$

Es decir, (21) vale para $k = \alpha + \beta - 4$ y, por lo tanto, f está $(\alpha + \beta - 4)$ -determinado.

3.12. Hasta ahora habíamos hablado de jets de funciones de una variedad cualquiera con valores reales. Podemos definir, más en general, Sea

$$\mathcal{B}^k(n) = \text{los } k\text{-jets de gérmenes en } \mathcal{B}(n).$$

Este es el grupo de n -tuplas de polinomios de grado k cuya matriz diferencial en 0 es inversible. Es un grupo de Lie que actúa sobre la variedad $\mathcal{J}^k(n)$. Las órbitas por esta acción son las clases de equivalencia de k -jets.

3.13 Observación. Sea G un grupo de Lie que actúa a derecha sobre una variedad M , definimos el morfismo

$$\tau_x: G \rightarrow M$$

$$\tau_x(g) = x.g$$

Es un resultado conocido que si $e \in G$ es la identidad del grupo y $x.G \subset M$ es la órbita de x , la diferencial

$$D\tau_x(e): T_e(G) \rightarrow T_x(G.x)$$

resulta sobreyectiva.

3.14 Lema. Sea $\eta \in \mathcal{E}(n)$. Denotemos $\eta_k = j^k(\eta)$. Entonces, el espacio tangente a la órbita $\eta_k \mathcal{B}^k(n) \subset \mathcal{J}^k(n)$ en η_k es

$$\mathfrak{m}(n) \left\langle \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right\rangle \text{ módulo } \mathfrak{m}(n)^{k+1} \quad (29)$$

Demostración. Identificamos el espacio tangente a $\mathcal{J}^k(n)$ en η_k con $\mathcal{J}^k(n)$ ya que es un espacio vectorial real. Por la observación anterior, un vector tangente a la órbita en η_k es el vector velocidad en $t = 0$ de una curva de la forma $\eta_k \circ \delta_t$ con $\delta_t \in \mathcal{B}^k(n)$ y $\delta_0 = Id_{\mathbb{R}^n}$. Consideremos un representante de δ_t de la forma $x + \varepsilon(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$ donde $\varepsilon(x, 0) = 0$, $\varepsilon(0, t) = 0$. Llamo $\eta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a un representante. Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta_k(x + \varepsilon(x, t))) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}(x + \varepsilon(x, t)) \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t}$$

Evaluando en $t = 0$, vemos que cualquier vector en el tangente tiene la forma

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t}(x, 0) \text{ módulo } \mathfrak{m}(n)^{k+1}$$

donde $\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t}(x, 0) \in \mathfrak{m}(n)$ ya que $\varepsilon(0, t) = 0$. Además, dada una n-tupla de funciones (f_1, \dots, f_n) que se anulan en 0,

$$\varepsilon(x, t) = (f_1(x) \cdot t, \dots, f_n(x) \cdot t)$$

verifica

$$\varepsilon(x, 0) = 0 \text{ y } \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t}(x, 0) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

◊

3.15 Proposición. Sea $f \in \mathcal{E}(n)$ tal que f está k -determinado. Entonces,

$$\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{m}(n)\langle \partial f \rangle \quad (30)$$

Demostración. Sean

$$U = \{g \in \mathcal{J}^{k+1}(n) / j^k(g) = j^k(f)\}$$

$$V = j^k(f) \cdot \mathcal{B}^k(n)$$

Como f está k -determinado, $U \subset V$ (ya que $j^k(g \circ h) = j^k(g) \circ j^k(h)$). Por lo tanto, $T_{j^k(f)}U \subset T_{j^k(f)}V$. Calculemos $T_{j^k(f)}U$, Sea $\alpha: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow U$ una curva en U con $\alpha(0, x) = j^k(f)(x)$. Entonces,

$$\alpha(t, x) = f(x) + g(t, x)$$

donde $g(0, x) = 0$, $g(t, x) \in \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ Por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha(t, x)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} g(t, x)|_{t=0}$$

y $\frac{\partial}{\partial t}g(t, x)|_{t=0}$ es cualquier germen en $\mathfrak{m}(n)^{k+1}$. Es decir, $T_{j^k(f)}U = \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ módulo $\mathfrak{m}(n)^{k+2}$. Entonces,

$$\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{m}(n)\langle \partial f \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+2}$$

Por el lema de Nakayama,

$$\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{m}(n)\langle \partial f \rangle.$$

◊

3.16 Ejemplo. Sea $f(x, y) = x^5 + y^5$.

$$x^3y^3 \notin \langle x, y \rangle \langle x^4, y^4 \rangle$$

Por lo tanto, f no está 5-determinada. De hecho, $g(x, y) = x^5 + y^5 + \lambda x^3y^3$ no es equivalente a f para algún λ .

Más en general, consideremos como antes, $f(x, y) = x^\alpha \pm y^\beta$,

$$x^{\alpha-2}y^{\beta-2} \notin \mathfrak{m}(n)\langle \partial f \rangle.$$

Entonces, f no está $(\alpha + \beta - 5)$ -determinado y $g(x, y) = x^\alpha \pm y^\beta + \lambda x^{\alpha-2}y^{\beta-2}$ no es equivalente a f , para algún λ .

3.17 Corolario. Sea $f \in \mathcal{E}(n)$. Entonces, f está finitamente determinada si y solo si $\dim(\mathcal{E}(n)/\langle \partial f \rangle) < \infty$.

3.18. Sea $f \in \mathfrak{m}(n)$ una singularidad. Decimos que f está algebraicamente aislada si $\dim(\mathcal{E}(n)/\langle \partial f \rangle) < \infty$ y f es una singularidad aislada si $\{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = Df(x) = 0\} = \{0\}$. Una singularidad algebraicamente aislada está aislada. Ya que,

$$\dim(\mathcal{E}(n)/\langle \partial f \rangle) < \infty$$

$$\Rightarrow \mathfrak{m}^k \subset \langle \partial f \rangle \text{ para algún } k$$

$$\Rightarrow x_i^k \in \langle \partial f \rangle \text{ para todo } i$$

y se sigue que $Df(x) = 0$ implica $x = 0$. La recíproca no es cierta, por ejemplo, $f(x) = e^{-1/x^2}$ está aislado y no algebraicamente aislada. Sin embargo, si trabajamos en el cuerpo de números complejos estas dos nociones son equivalentes.

3.19 Proposición. Sea $f \in \mathfrak{m}(n)^{r-1}$. Si $j^r(f)$ es un polinomio homogéneo $q(x)$ que puede escribirse en menos de n variables, entonces f no está r -determinado.

Demostración. Sea $h \in \mathcal{B}(n)$ tal que $q \circ h$ no depende de x_n . Llamemos $\tilde{f} = f \circ h$ y $\tilde{q} = j^r(\tilde{f})$. Veamos que \tilde{q} no está r -determinada. Para esto, veamos que $\mathfrak{m}(n)^{r+1} \not\subset \mathfrak{m}(n)\langle \partial \tilde{q} \rangle + \mathfrak{m}(n)^{r+2}$. Pero, $\tilde{q} = j^r(f \circ h) = j^r(q \circ h)$ que no depende de x_n . Entonces, $x_n^{r+1} \in \mathfrak{m}(n)^{r+1}$ y $x_n^{r+1} \notin \mathfrak{m}(n)\langle \partial \tilde{q} \rangle + \mathfrak{m}(n)^{r+2}$. Como \tilde{q} no está r -determinado, tampoco lo está \tilde{f} y existe $g \in \mathcal{E}(n)$ tal que $j^r(g) = j^r(\tilde{f})$ y no son

equivalentes. Entonces, $\tilde{f} \circ h^{-1}$ y $g \circ h^{-1}$ tampoco son equivalentes. Pero, $\tilde{f} \circ h^{-1} = f$ y,

$$\begin{aligned}j^r(g \circ h^{-1}) &= j^r(j^r(g) \circ j^r(h^{-1})) \\ &= j^r(j^r(\tilde{f}) \circ j^r(h^{-1})) \\ &= j^r(j^r(f \circ h) \circ j^r(h^{-1})) = j^r(f).\end{aligned}$$

Entonces, f no está r-determinado.

⊙

4. Despliegues

4.1. Definiciones y propiedades.

Definiciones y notación. \triangleright Sea $\eta \in \mathcal{E}(n)$, si $f \in \mathbf{m}(n+r)$ es tal que $f|_{\mathbb{R}^n} = \eta$ decimos que (r, f) es un r -despliegue (o una deformación) de η .

\triangleright Llamaré (x, u) a las coordenadas de \mathbb{R}^{n+r} , x son las coordenadas de la singularidad y u las del despliegue.

4.1 Ejemplos. a) El despliegue constante, $f(x, u) = \eta(x)$.

b) Dados $b_1, \dots, b_r \in \mathcal{E}(n)$, $f(x, u) = \eta(x) + u_1 b_1(x) + u_2 b_2(x) + \dots + u_r b_r(x)$ es un r -despliegue.

4.2 Definición. Sea $f \in \mathbf{m}(n+r)$ un despliegue de una singularidad η . Definimos la función $T^k f: \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathcal{J}_0^k(n)$ como

$$(x, u) \mapsto \text{el } k\text{-jet de } (y \mapsto f(x+y, u) - f(x, u)).$$

Decimos que el despliegue f es k -transversal si $T^k f$ es transversal en el origen a la órbita $\eta_k \cdot \mathcal{B}^k(n)$ ($\eta_k = j^k(\eta)$).

4.3 Lema. Sea (r, f) un despliegue de una singularidad η . Entonces, f es k -transversal si y solo si

$$\mathbf{m}(n) = \left\langle \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_j} \Big|_{\mathbb{R}^n} - \frac{\partial f}{\partial u_j}(0) \right\rangle_{\mathbb{R}} + \mathbf{m}(n)^{k+1}. \quad (31)$$

Demostración. Una vez más, identificamos los espacios tangentes a \mathbb{R}^{n+r} y a $\mathcal{J}_0^k(n)$ con sí mismos ya que son espacios vectoriales reales. Ya vimos que el tangente a la órbita $j^k(\eta) \cdot \mathcal{B}^k(n)$ es

$$\mathbf{m}(n) \left\langle \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right\rangle \text{ módulo } \mathbf{m}(n)^{k+1}$$

Por lo tanto, f resulta k -transversal si y solo si

$$\mathcal{J}_0^k(n) = \mathbf{m}(n) / \mathbf{m}(n)^{k+1} = \left(\mathbf{m}(n) \left\langle \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial T^k f}{\partial x_i}(0), \frac{\partial T^k f}{\partial u_j}(0) \right\rangle_{\mathbb{R}} \right) / \mathbf{m}(n)^{k+1}$$

Ya que, la imagen de la diferencial $D_0(T^k f)$ está generada por

$$\frac{\partial T^k f}{\partial x_i}(0), \quad \frac{\partial T^k f}{\partial u_j}(0) \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Computando el desarrollo de Taylor con respecto a la primer variable centrado en x vemos que

$$T^k f(x, u)(y) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x, u) y^\alpha$$

donde, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un multiíndice, $|\alpha| = \sum \alpha_i$, $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ y $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdot y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}$.

Y si $\varphi: \mathcal{J}_0^k(n) \rightarrow \mathbb{R}^N$ es la carta dada por

$$\varphi\left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha\right) = (a_{\alpha^1}, a_{\alpha^2}, \dots, a_{\alpha^N})$$

donde $N = \dim(\mathcal{J}^k(n)^0) = \binom{n+k}{k} - 1$. Entonces,

$$\varphi \circ T^k f(x, u) = \left(\frac{\partial^{|\alpha^1|} f}{\partial x^{\alpha^1}}, \frac{\partial^{|\alpha^2|} f}{\partial x^{\alpha^2}}, \dots, \frac{\partial^{|\alpha^N|} f}{\partial x^{\alpha^N}}\right)\Big|_{(x,u)}$$

y derivando,

$$\frac{\partial T^k f}{\partial x_i}(x, u) = T^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, u), \quad \frac{\partial T^k f}{\partial u_j}(x, u) = T^k \frac{\partial f}{\partial u_j}(x, u).$$

Por otra parte,

$$T^k \frac{\partial f}{\partial u_j}(0, 0) \text{ es el } k\text{-jet de } \frac{\partial f}{\partial u_j}(y, 0) - \frac{\partial f}{\partial u_j}(0, 0)$$

$$T^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, 0)(y) \text{ es el } k\text{-jet de } \frac{\partial f}{\partial x_i}(y, 0) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, 0) = \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(y) - \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(y)$$

Por lo tanto, f resulta k -transversal si y solo si

$$\mathfrak{m}(n)/\mathfrak{m}(n)^{k+1} = (\mathfrak{m}(n)\langle \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \rangle + \langle j^k(\frac{\partial \eta}{\partial x_i}) \rangle_{\mathbb{R}} + \langle j^k(\frac{\partial f}{\partial u_j} \Big|_{\mathbb{R}^n} - \frac{\partial f}{\partial u_j}(0)) \rangle_{\mathbb{R}}) / \mathfrak{m}(n)^{k+1}.$$

Y el lema se deduce de las siguientes igualdades,

$$\langle \partial \eta \rangle_{\mathcal{E}(n)} + \mathfrak{m}(n)^{k+1} = \langle \partial \eta \rangle_{\mathbb{R}} + \mathfrak{m}(n)\langle \partial \eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1} = \langle j^k(\frac{\partial \eta}{\partial x_i}) \rangle_{\mathbb{R}} + \mathfrak{m}(n)\langle \partial \eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1}$$

$$\langle \frac{\partial f}{\partial u_j} \Big|_{\mathbb{R}^n} - \frac{\partial f}{\partial u_j}(0) \rangle_{\mathbb{R}} + \mathfrak{m}(n)^{k+1} = \langle j^k(\frac{\partial f}{\partial u_j} \Big|_{\mathbb{R}^n} - \frac{\partial f}{\partial u_j}(0)) \rangle_{\mathbb{R}} + \mathfrak{m}(n)^{k+1}.$$

⊙

4.4 Corolario. Si b_1, \dots, b_r son representantes de una base de $\mathfrak{m}(n)/(\langle \partial \eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1})$, entonces, $f(x, u) = \eta(x) + u_1 b_1(x) + u_2 b_2(x) + \dots + u_r b_r(x)$ es k -transversal.

Demostración. Como los b_i son base, $\mathfrak{m}(n) = \langle b_1, \dots, b_r \rangle + \langle \partial \eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1}$. Además, $\frac{\partial f}{\partial u_j} = b_j$. Por lo tanto, vale la igualdad (31). ⊙

Observemos que $\mathfrak{m}(n)/(\langle \partial\eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1})$ tiene dimensión finita, por lo tanto, *existe un despliegue k -transversal para cada k .*

4.5 Definición. \triangleright Un *morfismo entre despliegues* de η

$$(\phi, \alpha) : (r, f) \rightarrow (s, g)$$

consiste de:

i) $\phi \in \mathcal{E}(n+r, n+s)$ con $\phi(x, 0) = (x, 0)$

ii) $\varphi \in \mathcal{E}(r, s)$ tal que $\pi_s \circ \phi = \varphi \circ \pi_r$

iii) $\alpha \in \mathfrak{m}(r)$ tal que $f = g \circ \phi + \alpha \circ \pi_r$

Es decir, $f(x, u) = g(\phi_1(x, u), \varphi(u)) + \alpha(u)$.³

\triangleright La composición de morfismos se define:

$$(\psi, \beta)(\phi, \alpha) = (\psi \circ \phi, \alpha + \beta \circ \varphi)$$

Un morfismo resulta un isomorfismo cuando ϕ es inversible.

\triangleright Decimos que (r, f) es un *despliegue inducido* por (s, g) a través de (ϕ, α) si verifican las condiciones (i), (ii) y (iii) de la definición anterior.

\triangleright Un despliegue es *versal* si cualquier otro despliegue es inducido por él.

\triangleright Un *despliegue miniversal* (r, f) es un despliegue versal con parámetro r mínimo⁴.

Sea $\alpha_u \in \mathcal{E}(1)$, $\alpha_u(t) = t + \alpha(u)$ entonces la condición iii) se puede escribir

$$f(x, u) = \alpha_u(g(\phi(x, u))).$$

4.6 Ejemplos. a) El despliegue constante es inducido por cualquier otro despliegue.

b) Sean (r, f) y (s, g) despliegues de η . Definimos el despliegue $f + g \in \mathcal{E}(n+r+s)$ como,

$$(f + g)(x, u, v) = f(x, u) + g(x, v) - \eta(x).$$

El despliegue f está inducido por la suma. Basta considerar el germen de $\phi: \mathbb{R}^{n+r+s} \rightarrow \mathbb{R}^{n+r}$, $\phi(x, u, v) = (x, u, 0)$ y $\alpha = 0$. Observar que si f es k -transversal entonces $f + g$ es k -transversal.

4.7 Proposición. *Si (r, f) es versal, entonces f es k -transversal para todo k .*

³Otra definición posible de morfismo entre despliegues es permitir que $\alpha_u \in \mathcal{E}(1)$ sea cualquiera y no solo las traslaciones. Todo lo que haremos vale también en es caso.

⁴Esta es la denominación que adopta Arnold, la mayoría de la bibliografía denomina *universal* a un despliegue con esta propiedad pero como no verifica la unicidad de una propiedad universal, adoptamos la forma de Arnold.

Demostración. Elijamos un despliegue k -transversal (s, g) . Como, (r, f) es versal existe un morfismo de despliegues,

$$(\phi, \alpha): (s, g) \rightarrow (r, f).$$

Entonces, $g(x, u) = f \circ \phi(x, u) + \alpha(u)$. Llamemos

$$V_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_j} \Big|_{\mathbb{R}^n} - \frac{\partial f}{\partial u_j}(0) \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Ahora, computemos $V_{f \circ \phi}$,

$$\frac{\partial f \circ \phi}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial u_j} + \sum_{l=1}^r \frac{\partial f}{\partial v_l} \frac{\partial \phi_l}{\partial u_j}$$

Evaluando, $u = 0$

$$\frac{\partial f \circ \phi}{\partial u_j}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \phi_i}{\partial u_j}(x, 0) + \sum_{l=1}^r \frac{\partial f}{\partial v_l}(x, 0) \frac{\partial \phi_l}{\partial u_j}(0)$$

Como $\frac{\partial \phi_l}{\partial u_j}(0) \in \mathbb{R}$, entonces, $V_g = V_{f \circ \phi} \subset \langle \partial \eta \rangle + V_f$. Entonces, la condición (31) para g implica (31) para f . Y por lo tanto, como g es k -transversal, f también lo es. \odot

4.8 Definición. Definimos la *codimensión* de η como $\text{codim}(\eta) := \dim(\mathfrak{m}(n)/\langle \partial \eta \rangle)$.

4.9 Corolario. Si (r, f) es un despliegue versal de η , entonces $\text{codim}(\eta) \leq r$.

Demostración. Por la proposición anterior, (r, f) es k -transversal y $\mathfrak{m}(n) = \langle \partial \eta \rangle + V_f + \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ para todo k . Entonces,

$$\dim(\mathfrak{m}(n)/\langle \partial \eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1}) \leq \dim(V_f) \leq r \quad \forall k$$

Sea $A = \mathfrak{m}(n)/\langle \partial \eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1}$, considero la cadena de ideales,

$$A \supset \mathfrak{m}(n).A \supset \mathfrak{m}(n)^2.A \supset \dots \supset \mathfrak{m}(n)^h.A \supset \mathfrak{m}(n)^{h+1}.A \supset \dots$$

Por el lema de Nakayama, tenemos que

$$A \supsetneq \mathfrak{m}(n).A \supsetneq \mathfrak{m}(n)^2.A \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{m}(n)^h.A = 0$$

con $h \leq \dim(A) \leq r$. Por lo tanto, $\mathfrak{m}(n)^r \subset \langle \partial \eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1}$. Y para todo $k \geq r$,

$$\mathfrak{m}(n)^k \subset \langle \partial \eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1}.$$

Aplicando Nakayama una vez más, $\mathfrak{m}(n)^k \subset \langle \partial \eta \rangle$. Por ende,

$$\mathfrak{m}(n)/\langle \partial \eta \rangle = \langle \partial \eta \rangle + V_f + \mathfrak{m}(n)^{k+1}/\langle \partial \eta \rangle = \langle \partial \eta \rangle + V_f/\langle \partial \eta \rangle = V_f/V_f \cap \langle \partial \eta \rangle$$

Entonces, $\text{codim}(\eta) \leq \dim(V_f) \leq r$ \odot

4.2. Teorema principal sobre despliegues y consecuencias

Por un momento, asumamos verdadero el siguiente lema:

4.10 Lema. *Si η está k -determinada, (r, f) y (r, g) son dos despliegues k -transversales, entonces son isomorfos.*

Ahora, podemos probar el teorema principal sobre despliegues:

4.11 Teorema Principal sobre Despliegues. (TPD)

- I. *Si η está k -determinada. Un despliegue de η es versal si y solo si es k -transversal.*
- II. *Una singularidad η admite un despliegue versal si y sólo si tiene codimensión finita.*
- III. *Dos r -despliegues versales son isomorfos.*
- IV. *Todo despliegue versal es isomorfo a despliegue miniversal + constante.*
- V. *Si $\mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta \rangle = \langle \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r \rangle$, el despliegue definido por*

$$f(x, u) = \eta(x) + b_1(x)u_1 + \dots + b_r(x)u_r$$

es miniversal.

Demostración. I. Ya vimos que si un despliegue es versal entonces es k -transversal para todo k . Ahora, sea η un singularidad k -determinada y (r, f) un despliegue k -transversal. Dado otro despliegue (s, g) , queremos un morfismo $(s, g) \rightarrow (r, f)$. Éste será la composición de los siguientes morfismos:

$$(s, g) \rightarrow (s, g) + (r, f)$$

$$\text{dado por } \phi(x, u) = (x, u, 0), \alpha = 0$$

$$(s, g) + (r, f) \rightarrow \eta + (r, f)$$

que existe por el lema anterior

$$\eta + (r, f) \rightarrow (r, f)$$

es evidente.

- II. Sea (r, f) un despliegue versal de η , del corolario 4.9 se sigue que $\text{codim}(\eta) \leq r$. Ahora, sea η una singularidad con codimensión finita, entonces η está k -determinada para algún k . Sea (r, f) un despliegue k -transversal (que existe por el corolario 4.4), por el ítem anterior, el mismo resulta versal.

III. Si (r, f) y (r, g) son versales entonces son k -transversales para todo k . Como η admite un despliegue versal, sea k tal que η resulta k -determinada. Entonces, por el lema, los despliegues son isomorfos.

IV. Se deduce de III.

V. Como η tienen codimensión finita, para algún k , está k -determinada y el despliegue $f(x, u) = \eta(x) + b_1(x)u_1 + \dots + b_r(x)u_r$ es k -transversal (corolario 4.4) y por lo tanto versal. Pero, r es mínimo y, por ende, el despliegue es miniversal.

◊

4.12 Corolario. *Sea (r, f) un despliegue de η k -transversal para todo k , entonces (r, f) es versal.*

Demostración. Por el teorema anterior alcanza ver que η está finitamente determinada. Pero, vimos en el corolario 4.9 que $\text{codim}(\eta) \leq r$ entonces η está (al menos) $(r + 1)$ -determinada.

◊

4.13. Probamos que un despliegue es versal si y solo si es k -transversal. Otra noción equivalente a estas es la de un despliegue *estructuralmente estable* (lo llamamos así para distinguir esta estabilidad de la de los puntos de equilibrio). El tema de la estabilidad de funciones y de deformaciones es un tema muy rico e interesante del que yo solo haré algunos comentarios ([9], [2]). En general, un objeto f es estable cuando todo objeto *suficientemente cerca* es *equivalente* a f . Entonces, para definir estabilidad necesitamos una topología y una noción de equivalencia. Por ende, hay muchas definiciones de estabilidad posibles. Si la equivalencia está dada por la acción de un grupo, f es estable si su órbita contiene un entorno de f . Wassermann en [12] define 6 tipos de estabilidad, prueba que son todas equivalentes y que a su vez son equivalentes a que el despliegue sea versal (Wassermann llama universal a un despliegue versal). Cinco de estas nociones dependen de la topología que uno considere en el espacio de funciones salvo la de *infinitesimalmente estable* que es una condición algebraica. Uno pensaría en definir que un despliegue (s, g) es equivalente a un despliegue (r, f) si g induce a f , sin embargo, esto no sirve. Sea $f: \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}$ un representante de un despliegue de una singularidad η . Si $g: \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}$ está *cerca* (alguna topología usual del espacio de funciones), el germen de $g|_{\mathbb{R}^n \times 0}$ no necesariamente será equivalente a η , pero lo que sí podemos esperar es que exista un punto $(x, u) \in \mathbb{R}^{n+r}$ tal que el germen alrededor de x de $g|_{\mathbb{R}^n \times}$ sea equivalente a η . Una definición posible (la que da Wassermann) es la siguiente:

4.14 Definición. Sean $U, V \subset \mathbb{R}^{n+r}$ abiertos, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables. Entonces, f en (z, w) es *equivalente como r -despliegue* a g en (y, v) si existen W_1 y W_2 entornos abiertos de z y w respectivamente con $W_2 \times W_2 \subset U$, $\varphi: W_2 \times W_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi: W_2 \rightarrow \mathbb{R}^r$ y $\alpha: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ que verifican:

i) $(\varphi(x, u), \psi(u)) \in V$ para todo $(x, u) \in W_1 \times W_2$

- ii) $\varphi(z, w) = y$ y $\psi(w) = v$
- iii) $\varphi|_{W_1 \times w}$ es no singular en z , ψ es no singular en w
- iv) para todo $(x, u) \in W_1 \times W_2$, $f(x, u) = g(\varphi(x, u), \psi(u)) + \alpha(u)$

Al estudiar fenómenos de la naturaleza resulta natural pedir que el modelo sea estable. Para motivar esta idea, pensemos en una gota que cae en el centro de una taza con café (este ejemplo se lo debo a Arnold). En la realidad es imposible tener una taza perfectamente circular y que la gota caiga exactamente en el medio. Sin embargo, al realizar el experimento podemos observar olas concéntricas y el modelo donde todo es exacto se refleja en la realidad.

4.15 Observación. Sea $f(x_1, \dots, x_n, u) = \eta(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n, u)$ un despliegue miniversal de η y considero una forma cuadrática no degenerada $q(x_{n+1}, \dots, x_m)$. Entonces, $\eta + q + g$ es un despliegue miniversal de $\eta + q$. Ya que q es equivalente a $\sum_{n+1 \leq i \leq m} \pm x_i^2$, entonces $\langle \partial\eta + q \rangle = \langle \frac{\partial\eta}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\eta}{\partial x_n}, x_{n+1}, \dots, x_m \rangle$. Entonces, $\mathfrak{m}(m)/\langle \partial(\eta + q) \rangle$ y $\mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta \rangle$ tiene la misma base.

4.16 Definición. El *corango* de η es el corango de la matriz hessiana, es decir, la matriz $(\partial^2\eta/\partial x_i\partial x_j)_{i,j}$. Lo notamos $corg(\eta)$

4.17. Lema de descomposición. Sea $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ una singularidad, $corg(\eta) = n - r$. Entonces, η es equivalente a un germen de la forma:

$$q(x_1, \dots, x_r) + \mu(x_{r+1}, \dots, x_n)$$

Donde $q(x_1, \dots, x_r)$ es una forma cuadrática no degenerada y $j^2(\mu) = 0$.

Demostración. Podemos suponer que el 2-jet de η tiene la forma $q = \sum_{1 \leq j \leq r} \pm x_j^2$. Sea $\theta(x_1, \dots, x_r) = \eta(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$, el 2-jet de θ es q y q es no degenerada, por lo tanto θ está 2-determinada y es equivalente a q . Entonces, podemos suponer que $\eta(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) = q(x_1, \dots, x_r)$, es decir, $(n - r, \eta)$ induce a $(0, q)$. Como $\langle \partial q \rangle = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$, por el teorema principal de despliegues (TPD), $(0, q)$ resulta un despliegue miniversal de q , por lo tanto, $(n - r, \eta)$ es un despliegue versal. Por TPD, $(n - r, q)$ es isomorfo a $(n - r, \eta)$. Es decir, existen (ϕ, α) tal que $q(x_1, \dots, x_r) = \eta\phi(x_1, \dots, x_n) + \alpha(x_{r+1}, \dots, x_n)$. \odot

4.18 Proposición. Si $corg(\eta) = r$, entonces $codim(\eta) \geq \binom{r+1}{2}$.

Demostración. Como el $corg(\eta) = r$, por el lema anterior, $\eta = \mu(x_1, \dots, x_r) + q(x_{r+1}, \dots, x_n)$ donde q es una forma cuadrática no degenerada y $j^2(\mu) = 0$. Queremos acotar la $dim(\mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta \rangle)$. Considero el morfismo $\phi: \mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta \rangle \rightarrow \mathfrak{m}(r)/\langle \partial\mu \rangle$ definido por $\phi(\bar{f}) = \bar{f}(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$. Está bien definido ya que,

$$\bar{f} = \bar{g} \Leftrightarrow f = g + a_1 \frac{\partial\eta}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial\eta}{\partial x_n} \text{ con } a_i \in \mathcal{E}(n)$$

$$\Leftrightarrow f = g + a_1 \frac{\partial \mu}{\partial x_1} + \dots + a_r \frac{\partial \mu}{\partial x_r} + a_{r+1} \frac{\partial q}{\partial x_{r+1}} + \dots + a_n \frac{\partial q}{\partial x_n}$$

$$\Rightarrow f(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) = g(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) +$$

$$a_1(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \frac{\partial \mu}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_r) + \dots + a_r(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \frac{\partial \mu}{\partial x_r}(x_1, \dots, x_r)$$

Este morfismo es claramente sobreyectivo, por lo tanto, $\dim(\mathfrak{m}(n)/\langle \partial \eta \rangle) \geq \dim(\mathfrak{m}(r)/\langle \partial \mu \rangle)$. A su vez, $\dim(\mathfrak{m}(r)/\langle \partial \mu \rangle) \geq \dim(j^2(\mathfrak{m}(r))/j^2(\langle \partial \mu \rangle))$. Pero, $\dim(j^2(\mathfrak{m}(r))) = r + \binom{r+1}{2}$. Ahora, $j^2(\mu) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \in \mathfrak{m}(n)^2 \Rightarrow$ si $h \in \langle \partial \mu \rangle$ se escribe como $h = a_1 \frac{\partial \mu}{\partial x_1} + \dots + a_r \frac{\partial \mu}{\partial x_r}$, $j^2(h) = a_1(0) \frac{\partial \mu}{\partial x_1} + \dots + a_r(0) \frac{\partial \mu}{\partial x_r} \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x_i}$ generan $j^2(\langle \partial \mu \rangle)$ como \mathbb{R} -espacio vectorial $\Rightarrow \dim(j^2(\langle \partial \mu \rangle)) \leq r$. Finalmente,

$$\dim(j^2(\mathfrak{m}(r))/j^2(\langle \partial \mu \rangle)) \geq r + \binom{r+1}{2} - r = \binom{r+1}{2}$$

◊

4.3. Demostración del lema 4.10

4.19 Observación. En las condiciones del lema, $\text{codim}(\eta) \leq r$. Ya que, sabemos que

$$\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{m}(n)\langle \partial \eta \rangle \subset \langle \partial \eta \rangle \text{ porque } \eta \text{ esta k-determinada}$$

$$\mathfrak{m}(n) = \langle \partial \eta \rangle + V_f + \mathfrak{m}(n)^{k+1} \text{ porque } f \text{ es k-transversal.}$$

Por lo tanto,

$$\mathfrak{m}(n) / \langle \partial \eta \rangle = \langle \partial \eta \rangle + V_f + \mathfrak{m}(n)^{k+1} / \langle \partial \eta \rangle = \langle \partial \eta \rangle + V_f / \langle \partial \eta \rangle = V_f / \langle \partial \eta \rangle \cap V_f$$

y $\text{codim}(\eta) \leq r$.

Demostración del lema 4.10. Sea η una singularidad k-determinada, (r, f) y (r, g) dos despliegues k-transversales. Queremos ver que son isomorfos. Para eso, en primer lugar, buscaremos F_t una curva de despliegues de η k-transversales con $F_0 = f$ y $F_1 = g$.

Cualquier despliegue (r, f) , puede escribirse como $f = \eta + \delta$ con $\delta \in \mathfrak{m}(r) \cdot \mathfrak{m}(n+r)$ ya que $f(x, 0) - \eta(x) = 0$. Ahora, $V_{\eta+\delta} = V_\delta$ y buscamos δ tal que V_δ sea transversal a $\langle \partial \eta \rangle$ en $\mathcal{J}_0^k(n)$. Consideremos el morfismo lineal,

$$\mathfrak{m}(r) \cdot \mathfrak{m}(n+r) \xrightarrow{\theta} \text{Hom}(\mathbb{R}^r, J_0^k(n))$$

$$\delta \longmapsto (e_i \mapsto j^k(\frac{\partial \delta}{\partial u_i} |_{\mathbb{R}^n \times 0} - \frac{\partial \delta}{\partial u_i}(0)))$$

Este morfismo es sobreyectivo, basta considerar δ con la forma $\delta = \sum_{i=1}^r p_i(x)u_i$ con $p_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Sea $A \subset Hom$ el conjunto de aquellas transformaciones lineales cuya imagen no es transversal a $\langle \partial \eta \rangle / \mathfrak{m}(n)^{k+1}$. Si $s = codim(\eta)$, vimos que $s \leq r$. Llamemos $S = \langle \partial \eta \rangle / \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ y $N = dim_{\mathbb{R}}(J_0^k(n))$, entonces,

$$A = \{a: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ lineales} / Im(a) \text{ no es transversal a } S\}$$

Sea B una base de \mathbb{R}^N cuyos primeros $N-s$ vectores son una base de S . Considerando coordenadas de \mathbb{R}^N en esa base,

$$A = \{a \in \mathbb{R}^{N \times r} / a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ donde } a_2 \in \mathbb{R}^{s \times r} \text{ no tiene rango máximo} \}$$

La subvariedad algebraica $\{a \in \mathbb{R}^{n \times m} / rg(a) \leq r\} \subset \mathbb{R}^{n \times m}$ tiene dimensión es $m.n - (n-r)(m-r)$. Entonces, la dimensión de

$$A = \{a \in \mathbb{R}^{N \times r} / a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ donde } rg(a_2) \leq s-1\}$$

es $s.r - (s - (s-1))(r - (s-1)) + (N-s).r = N.r - (r-s+1)$. Es decir, $codim(A) = r-s+1$.

Si $r > s$, $codim(A) > 1$ entonces $Hom \setminus A$ es arcoconexo (ver, por ejemplo, [4]).

Si $r = s$,

$$Hom \setminus A \simeq \mathbb{R}^{r \times (N-r)} \times Gl(r)$$

que tiene dos componentes arcoconexas (ver, por ejemplo, [11] pág 131). Sea $\phi \in Gl(r)$ entonces,

$$\begin{aligned} \delta(x, u) &\mapsto a_\delta \\ \Rightarrow \delta(x, \phi(u)) &\mapsto a_\delta \cdot \phi \end{aligned}$$

Por ende, si $det(\phi) < 0$, $\delta(x, u)$ y $\delta(x, \phi(u))$ están en diferentes componentes conexas pero $\eta + \delta(x, u)$ y $\eta + \delta(x, \phi(u))$ son isomorfos. Por lo tanto, dados f, g k -transversales, $f = \eta + \delta_f$, $g = \eta + \delta_g$, podemos suponer que $\theta(\delta_f)$ y $\theta(\delta_g)$ caen en la misma componente conexa y por ende podemos unir las con un camino poligonal (son todas variedades C^∞). Entonces, podemos suponer que podemos unir $\theta(\delta_f)$ y $\theta(\delta_g)$ con segmento, es decir, que $\theta(\delta_f)t + (1-t)\theta(\delta_g) \in Hom \setminus A$ para todo $t \in [0, 1]$. Como θ es lineal,

$$\theta(\delta_f t + (1-t)\delta_g) = \theta(\delta_f)t + (1-t)\theta(\delta_g) \in Hom \setminus A$$

Entonces, el segmento es de despliegues k -transversales y tenemos lo que queríamos. Podemos suponer, $f(0, u) = g(0, u) = 0$, ya que F_t es isomorfo a

$$(1-t)(f(x, u) - f(0, u)) + t(g(x, u) - g(0, u))$$

vía (Id, α_t) donde $\alpha_t = (1-t)f(0, u) + tg(0, u)$. Fijemos t_0 , queremos encontrar para cada t en un entorno de t_0 un par (ϕ_t, α_t) que verifiquen:

- (a) $\phi_t(x, 0) = (x, 0)$, $\alpha_t(0) = 0$
- (b) $F_t(\phi_t(x, u)) + \alpha_t(u) = F_{t_0}(x, u)$
- (c) $\phi_{t_0} = id$, $\alpha_{t_0} = 0$

Estas condiciones las queremos diferenciables con respecto a t , es decir, $\phi(x, u, t) \in \mathcal{E}(n+r+1, n+r)$, $\alpha(x, u) \in \mathcal{E}(r+1)$, donde $\mathcal{E}(n+r+1, n+r)$ y $\mathcal{E}(r+1)$ denotan los gérmenes en $(0, 0, t_0)$ y $(0, t_0)$ respectivamente. La condición (c) nos asegura que ϕ_t es inversible para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Y podemos cambiar (b) por

$$\frac{\partial}{\partial t}(F_t(\phi_t(x, u)) + \alpha_t(u)) = 0$$

Como $\phi(x, u, t) = (\varphi(x, u, t), \psi(u, t))$,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\phi, t) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(x, t) + \sum_{j=1}^r \frac{\partial F}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial t}(u, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\phi, t) + \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, t) = 0.$$

Por lo tanto, buscamos gérmenes $\gamma_i \in \mathcal{E}(n+r+1)$, $\sigma_j \in \mathcal{E}(r+1)$ tales que

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \gamma_i + \sum_{j=1}^r \frac{\partial F}{\partial u_j} \cdot \sigma_j + \sigma_{j+1} = -\frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\gamma_i(x, 0, t) = 0$$

$$\sigma_j(0, t) = 0$$

Como $\frac{\partial F}{\partial t} = g - f \in \mathfrak{m}(r)\mathcal{E}(n+r+1)$, alcanza ver que

$$\mathfrak{m}(r)\mathcal{E}(n+r+1) \subset \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathfrak{m}(r)\mathcal{E}(n+r+1)} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle_{\mathfrak{m}(r)\mathcal{E}(r+1)} + \mathfrak{m}(r)\mathcal{E}(r+1).$$

Probaremos que

$$\mathcal{E}(n+r+1) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{E}(n+r+1)} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle_{\mathcal{E}(r+1)} + \mathcal{E}(r+1).$$

Por un lado, la k -transversalidad de F_t nos asegura que

$$\mathfrak{m}(n) = \langle \partial \eta \rangle_{\mathcal{E}(n)} + \left\langle \frac{\partial F_t}{\partial u_j} \Big|_{\mathbb{R}^n \times 0} - \frac{\partial F_t}{\partial u_j}(0, 0) \right\rangle_{\mathbb{R}} + \mathfrak{m}(k+1) \quad (32)$$

La singularidad η está k -determinada, por lo tanto,

$$\mathfrak{m}(k+1) \subset \mathfrak{m}(n) \langle \partial \eta \rangle \subset \langle \partial \eta \rangle$$

y $\frac{\partial F_t}{\partial u_j}(0,0) = 0$ porque $F_t(0, u, t) = 0$. Observando que $\frac{\partial \eta}{\partial x_i} = \frac{\partial F_t}{\partial x_i} |_{\mathbb{R}^n \times 0}$, (32) implica

$$\mathfrak{m}(n) = \left\langle \frac{\partial F_t}{\partial x_i} \Big|_{\mathbb{R}^n \times 0} \right\rangle_{\mathcal{E}(n)} + \left\langle \frac{\partial F_t}{\partial u_j} \Big|_{\mathbb{R}^n \times 0} \right\rangle_{\mathbb{R}} \quad (33)$$

Si $g \in \mathcal{E}(n+r+1)$ entonces $g = g_1 + g_2$ con $g_2 \in \mathfrak{m}(n)\mathcal{E}(n+r+1)$ y $g_1 \in \mathcal{E}(r+1)$. Por (33), existe $\tilde{g}_2 \in \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{E}(n+r+1)} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle_{\mathcal{E}(r+1)}$ con $\tilde{g}_2(x, 0, t_0) = g_2(x, 0, t_0)$. Por lo cual, si $g \in \mathcal{E}(n+r+1)$ entonces $g = g_1 + g_2 + g_3$ con $g_1 \in \mathcal{E}(r+1)$, $g_2 \in \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{E}(n+r+1)} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle_{\mathcal{E}(r+1)}$, $g_3 \in \mathfrak{m}(r+1)\mathcal{E}(n+r+1)$. Es decir,

$$\mathcal{E}(n+r+1) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{E}(n+r+1)} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle_{\mathcal{E}(r+1)} + \mathcal{E}(r+1) + \mathfrak{m}(r+1)\mathcal{E}(n+r+1)$$

Llamemos $A = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{E}(n+r+1)}$, $B = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle_{\mathcal{E}(r+1)} + \mathcal{E}(r+1) + \mathfrak{m}(r+1)\mathcal{E}(n+r+1)$ y $C = \mathcal{E}(n+r+1)$. Queremos

$$A + B = C \quad \Leftrightarrow \quad B = C \text{ módulo } A$$

y tenemos

$$A + B + \mathfrak{m}(r+1)C = C \quad \Leftrightarrow \quad B + \mathfrak{m}(r+1)C = C \text{ módulo } A \quad (34)$$

Son todos $\mathcal{E}(n+r+1)$ -módulos que pueden ser considerados como $\mathcal{E}(r+1)$ -módulo vía π^* donde $\pi: (\mathbb{R}^{n+r+1}) \rightarrow \mathbb{R}^{r+1}$ es la proyección. Ahora, C está finitamente generado como $\mathcal{E}(n+r+1)$ -módulo, B está finitamente generado como $\mathcal{E}(r+1)$ -módulo. La ecuación (34) nos dice que los generadores de B son generadores de $C/\mathfrak{m}(r+1)C$ como \mathbb{R} -espacio vectorial y, por el lema de preparación, resultan generadores de C como $\mathcal{E}(r+1)$ -módulo. Entonces, $B = C$. \odot

5. Catástrofes

Si consideramos despliegues de η con $\text{codim}(\eta) \leq 4$, la proposición anterior nos dice que $\text{corg}(\eta) \leq 2$. Por lo tanto, si $r \leq 4$ un despliegue η será equivalente a un germen de la forma $\mu(x, y) + q(z_1, z_2, \dots)$ donde q es una forma cuadrática. El teorema de las siete catástrofes elementales clasifica la forma que puede tomar μ salvo equivalencia. Como,

$$\begin{aligned} \text{codim}(\eta) &= \dim(\mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta \rangle) \leq 4 \\ &\Rightarrow \mathfrak{m}(n)^5 \subset \langle \partial\eta \rangle \\ &\Rightarrow \mathfrak{m}(n)^6 \subset \mathfrak{m}(n)\langle \partial\eta \rangle \\ &\Rightarrow \eta \text{ está 6-determinada.} \end{aligned}$$

Entonces, μ será equivalente a un polinomio de grado a lo sumo 6.

5.1. El teorema de las siete catástrofes elementales

5.1 Teorema. *Una singularidad η con $\text{codim}(\eta) \leq 4$ es equivalente a alguno de los siguientes polinomios, salvo multiplicación por -1 y la adición de una forma cuadrática.*

<i>codim</i>	η	<i>despliegue miniversal</i>	<i>nombre (en inglés)</i>
1	x^3	$x^3 + ux$	<i>fold</i>
2	x^4	$x^4 - ux^2 + vx$	<i>cuspid</i>
3	x^5	$x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$	<i>swallowtail</i>
3	$x^3 + y^3$	$x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$	<i>hyperbolic umbilic</i>
3	$x^3 - xy^2$	$x^3 - xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy$	<i>elliptic umbilic</i>
4	x^6	$x^6 + tx^4 + ux^3 + vx^2 + wx$	<i>butterfly</i>
4	$x^2y + y^4$	$x^2y + y^4 + wx^2 + ty^2 - ux - vy$	<i>parabolic umbilic</i>

Demostración. Supongamos que $\eta \in \mathfrak{m}^3$.

Si $\text{corg}(\eta) = 1$, entonces, $\eta \sim \pm x^k$, ya que η está finitamente determinada (notaré la equivalencia a derecha con \sim). Como $\text{codim}(\eta) \leq 4$, entonces $k = 3, 4, 5$ o 6 .

Si $\text{corg}(\eta) = 2$, entonces $\text{codim}(\eta) \geq \binom{2+1}{2} = 3$. Sea $P(x, y) = j^3(\eta)$. Como es un polinomio homogéneo de grado 3, admite una descomposición en \mathbb{C}

$$P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(a_3x + b_3y)$$

Analicemos los siguientes casos,

1. Los (a_i, b_i) linealmente independientes en \mathbb{C}^2 .
2. Si la $\dim_{\mathbb{C}}\langle (a_i, b_i) \rangle = 2$, entonces, podemos suponer $P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)^2$. Y, como P tiene coeficientes reales, los (a_i, b_i) podemos tomarlos reales.

3. Todos linealmente dependientes, no nulos. $P(x, y) = (ax + by)^3$, $a, b \neq 0$.

4. $P(x, y) = 0$

Caso 1. Primero supongamos que los $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$. Como los (a_i, b_i) son l. i. $\phi(x, y) = ((a_1x + b_1y, a_2x + b_2y))$ es inversible, por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(x, y) &\sim xy(ax + by) \text{ vía el cambio de variables } \phi^{-1} \\ xy(ax + by) &\sim (ab)^{-1}xy(x + y) \text{ a través de } (x, y) \mapsto (a^{-1}x, b^{-1}y) \\ (ab)^{-1}xy(x + y) &\sim xy(x + y) \text{ a través de } (x, y) \mapsto ab^{1/3}(x, y) \\ xy(x + y) &\sim 2x(x^2 - y^2) \text{ a través de } (x, y) \mapsto (x + y, x - y) \\ 2x(x^2 - y^2) &\sim x(x^2 - y^2) \text{ a través de } (x, y) \mapsto 2^{-1/3}(x, y). \end{aligned}$$

Finalmente, $P(x, y) \sim x^3 - xy^2$. Pero, $\mathbf{m}\langle \partial P \rangle = \mathbf{m}\langle x^2 - y^2, -2xy \rangle = \langle x^3 - xy^2, -2x^2y, yx^2 - y^3, -2xy^2 \rangle = \mathbf{m}^3$. Por ende, P está 3-determinado y $\eta \sim x^3 - xy^2$.

Ahora, si (a_i, b_i) no son reales, $P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(\bar{a}_2x + \bar{b}_2y)$. El producto de los últimos dos factores es una forma cuadrática definida positiva, por lo tanto, mediante un cambio de coordenadas lineal se puede transformar en $x^2 + y^2$ y

$$P(x, y) \sim (ax + by)(x^2 + y^2).$$

Mediante un cambio de coordenadas ortogonal y uno escalar,

$$P(x, y) \sim cx(x^2 + y^2) \sim x(x^2 + y^2) = x^3 + y^2x \sim 2x^3 + 6xy^2.$$

Y haciendo el cambio de variables $(x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$, vemos que,

$$2x^3 + 6xy^2 \sim x^3 + y^3.$$

Pero $x^3 + y^3$ resulta 3-determinado. Por ende, $\eta \sim x^3 + y^3$.

Caso 2. Mediante un cambio de coordenadas lineal,

$$P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)^2 \sim x^2y.$$

Computando $\langle \partial P \rangle = \langle xy, x^2 \rangle$, vemos que $\mathbf{m}^k \not\subseteq \langle \partial P \rangle$ cualquiera sea k . Entonces, P no está finitamente determinado. Pero η está 6-determinado, entonces

$$\eta \sim j^n(\eta) \text{ con } 4 \leq n \leq 6.$$

Ahora, sea k el máximo tal que $j^k(\eta) \sim x^2y$, entonces, $j^{k+1}(\eta) = x^2y + h(x, y)$. Consideremos un difeomorfismo de la forma $\varphi(x, y) = (x + \phi, y + \psi)$ con ϕ, ψ polinomios homogéneos de grado $k - 1$. Se sigue que,

$$\begin{aligned} j^{k+1}(\eta \circ \varphi) &= j^{k+1}((x + \phi)^2(y + \psi) + h(x + \phi, y + \psi)) \\ &= j^{k+1}(x^2y + 2\phi xy + \phi^2y + x^2\psi + \phi^2\psi + h(x, y)) \\ &= j^{k+1}(x^2y + 2\phi xy + x^2\psi + h(x, y)) \end{aligned}$$

Eligiendo los polinomios ϕ y ψ podemos cancelar los términos de h que son múltiplos de xy y x^2 , y de este modo, tendremos que $Q(x, y) = j^{k+1}(\eta) = x^2y + ay^{k+1}$ con $a \neq 0$, $k \geq 3$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} \cdot \langle \partial Q \rangle &= \mathfrak{m} \cdot \langle 2xy, x^2 + a(k+1)y^k \rangle \\ &= \langle x^2y, xy^2, x^3 + a(k+1)y^kx, x^2y + a(k+1)y^{k+1} \rangle \\ &= \langle x^2y, xy^2, x^3, y^{k+1} \rangle. \end{aligned}$$

En consecuencia, Q está $(k+1)$ -determinado y $\eta \sim x^2y + ay^{k+1} \sim x^2y \pm y^{k+1}$ con $k \geq 3$. Pero, $\langle \partial \eta \rangle = \langle x^2 \pm y^k, xy \rangle \subsetneq \langle x^2, y^k, xy \rangle$, entonces

$$4 \geq \dim(\mathfrak{m} / \langle \partial \eta \rangle) > \dim(\mathfrak{m} / \langle x^2, y^k, xy \rangle) = k.$$

Por lo tanto, $k = 3$ y $\eta \sim x^2y + y^4 \sim x^2y - y^4$.

Caso 3. En este caso, $P(x, y) = (ax + by)^3 \sim x^3$. Es decir, podemos suponer que $j^3(\eta) = x^3$ y $j^4(\eta) = x^3 + h$ con h homogéneo de grado 4. Ahora bien,

$$\dim(\mathfrak{m} / \langle \partial \eta \rangle) \geq \dim(\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^4 / \langle \partial \eta \rangle \cap \mathfrak{m}^4 / \mathfrak{m}^4) = (\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^4 / \langle \partial j^4(\eta) \rangle \cap \mathfrak{m}^4 / \mathfrak{m}^4)$$

$$\dim(\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^4) = 9$$

La dimensión de

$$\left(\langle 3x^2 + \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \rangle \cap \mathfrak{m}^4 / \mathfrak{m}^4 \right)$$

podemos calcularla como,

$$\dim\left(\left\langle 3x^2 + \frac{\partial h}{\partial x}, x\left(3x^2 + \frac{\partial h}{\partial x}\right), y\left(3x^2 + \frac{\partial h}{\partial x}\right), \frac{\partial h}{\partial y} \right\rangle_{\mathbb{R}}\right) \leq 4$$

Entonces,

$$\dim(\mathfrak{m} / \langle \partial \eta \rangle) \geq 5 > 4$$

y este caso no es posible.

Caso 4. Si $P = 0$, $\eta \in \mathfrak{m}^4$, entonces $\langle \partial \eta \rangle \subset \mathfrak{m}^3$. De donde,

$$\dim(\mathfrak{m} / \langle \partial \eta \rangle) \geq \dim(\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^3) = 5$$

y llegamos a una contradicción. ⊙

6. Aplicaciones y ejemplos

6.1. Generalidades

Muchos fenómenos de la naturaleza pueden ser pensados siendo gobernados por una función potencial. Bajo esa línea de interpretación, los estados estables, los observables, los “que ocurren” pueden ser considerados como los estados donde una función potencial alcanza su mínimo. Por ejemplo, el recorrido que hace un rayo de luz que parte de un punto A a un punto B, cuando A y B están en diferentes medios es aquel que minimiza el tiempo que tarda el rayo para ir de A a B. Si sumergimos un aro en detergente con agua, la superficie que se genera al sacarlo delicadamente es aquella de área mínima.

A modo de ejemplo, consideremos un sistema de la forma

$$x'(t) = f(x)$$

Los puntos de equilibrio serán aquellos donde $x'(t) = f(x) = 0$. Pensando a x' como un flujo en la recta real, dibujemos flechas hacia la derecha cuando $f > 0$ y hacia la izquierda cuando $f < 0$ sobre el gráfico de f (Figura 1). De este modo, podemos decir cuando un punto de equilibrio es localmente estable o inestable. El equilibrio es estable (un atractor) cuando f es positiva a la izquierda del punto y negativa a la derecha y es inestable (un expulsor) cuando ocurre lo contrario. Si f no cambia de signo se trata de un equilibrio semi-estable.

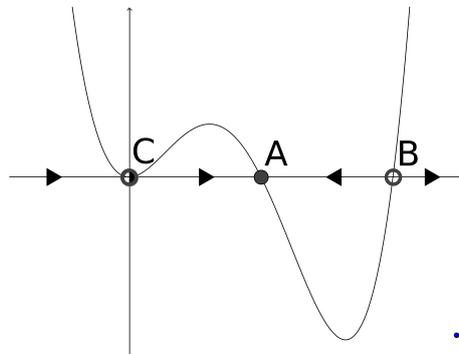


Figura 1: A es un punto de equilibrio estable, B es de equilibrio inestable y C es semi-estable.

Ahora, si existe una función potencial V que gobierna el sistema, es decir, tal que

$$x' = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

El equilibrio es estable en aquellos puntos donde el potencial alcanza un mínimo relativo. Cuando uno varía los parámetros de control del sistema la función potencial que gobierna el sistema puede cambiar cualitativamente, sus mínimos pueden

desaparecer o cambiar de altura. De este modo, una variación diferenciable de los parámetros de control puede generar una alteración discontinua de los equilibrios estables que puede presentar el sistema. En la naturaleza con frecuencia se observan discontinuidades. Ese cambio abrupto es lo que R. Thom llamó catástrofe.

Más precisamente, vamos a estudiar cómo varían los mínimos de una familia de funciones potenciales $V_u \in \mathcal{E}(n)$ cuando variamos los parámetros u . Las variables x refieren al estado de un sistema, las llamaremos *variables de estado* y las variables u serán los *parámetros de control* del sistema (constantes de elasticidad, concentraciones, presión de un gas, etc.). Genéricamente, una tal familia es un despliegue $V(x, u)$ de una singularidad definido en un entorno $E \times U$ de $(0, 0)$ y el conjunto de puntos críticos de V :

$$M = \{(x, u) \in E \times U / \frac{\partial V}{\partial x_i}(x, u) = 0, 1 \leq i \leq n\}$$

es una variedad de dimensión r (esto es consecuencia de los teoremas de transversalidad de R. Thom, [7], [5]). La llamaremos la *variedad de equilibrio*. Observemos que en esta variedad también encontramos los máximos de V_u y los puntos críticos degenerados, es decir, no sólo los equilibrios estables. A la proyección

$$\chi_V : M \rightarrow \mathbb{R}^r$$

$$(x, u) \mapsto u$$

le diremos *función catástrofe*. Sean

$$C = \{(x, u) / \chi_V \text{ es singular en } (x, u)\}$$

$$B = \chi_V(C)$$

Si $u \in B$ entonces V_u tiene puntos críticos degenerados. Si “perseguiamos” un punto crítico de V_u cuando recorremos una curva en el espacio de parámetros de control, al encontrarnos con el conjunto B el punto crítico se ramifica, o se encuentra con otro, por esto B es el *conjunto de bifurcación*. Otro conjunto que va a ser de nuestro interés es el *conjunto de Maxwell* que es el conjunto de parámetros u para los cuales V_u tiene al menos dos mínimos absolutos. Queremos entender cómo se modifican los equilibrios del sistema al perturbar los parámetros de control. Como la función χ_V es localmente un revestimiento en $M \setminus C$ uno podría pensar que al cambiar suavemente los parámetros los equilibrios variarán suavemente, pero esto no es así, se producen cambios abruptos. El *conjunto de catástrofes* es el conjunto de puntos en el espacio de parámetros donde ocurren estas discontinuidades. Para definir más precisamente este conjunto necesitamos lo que Thom llamó una *convención*. Como vimos, los equilibrios de un sistema están definidos por los atractores estables de $-\nabla V_u$ es decir los mínimos de V_u . Cuando la función V_u tiene varios mínimos, la convención es la “regla” que rige que el sistema adquiera uno u otro estado, es decir,

la convención define una sección de χ_V . Ejemplificaremos dos convenciones, la de Maxwell y la de dilación.

En un sistema que se rige según la convención de Maxwell, el estado de equilibrio x permanece en el mínimo absoluto hasta que aparece otro mínimo con valor menor. En este caso el conjunto de catástrofe es el conjunto de Maxwell. En cambio, si está regido por la convención de dilación el x permanece en el mismo mínimo hasta que este mínimo “desaparece”. Bajo esta convención, el conjunto de catástrofe es el de bifurcación.

El teorema de las siete catástrofes elementales clasifica las singularidades de corango ≤ 4 salvo multiplicación por -1, la adición de una forma cuadrática no degenerada y un cambio de coordenadas diferenciable. Veamos que la adición de una variable al cuadrado es una operación inocua para el análisis de las catástrofes.

Sea $\eta = \eta(x) \in \mathcal{E}(n)$ una singularidad y $\{b_1, \dots, b_r\} \subset \mathfrak{m}(n)$ representan una base de $\mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta \rangle$. Consideremos $\eta'(x, y) = \eta(x) + \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i^2$ con $\lambda_i = \pm 1$. El despliegue

$$V(x, u) = \eta(x) + u_1 \cdot b_1(x) + \dots + u_r \cdot b_r(x)$$

es miniversal. Entonces,

$$V'(x, y, u) = \eta'(x, y) + u_1 \cdot b_1(x) + \dots + u_r \cdot b_r(x) = \eta(x) + \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i^2 + u_1 \cdot b_1(x) + \dots + u_r \cdot b_r(x)$$

resulta un despliegue miniversal de η' . Analicemos como se relacionan sus variedades de equilibrio y sus funciones catástrofe. A saber,

$$M = \{(x, u) / \frac{\partial V}{\partial x_i}(x, u) = 0, 1 \leq i \leq n\}$$

$$\begin{aligned} M' &= \left\{ (x, y, u) / \frac{\partial V'}{\partial x_i}(x, y, u) = 0, \frac{\partial V'}{\partial y_j}(x, y, u) = 0 \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k \right\} \\ &= \left\{ (x, y, u) / \frac{\partial V}{\partial x_i}(x, u) = 0, 2y_j = 0 \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k \right\} \\ &= M \times \{0\} \end{aligned}$$

Entonces, podemos identificar M con M' a través del morfismo $(x, u) \mapsto (x, 0, u)$ y la función catástrofe es la misma para ambos. Ahora, si los λ_i son todos positivos, V_u alcanza un mínimo en x si y solo si V'_u alcanza un mínimo en $(x, 0)$, Por ende basta analizar el comportamiento de V . Si algún λ_i es negativo, V'_u no tiene mínimos y no resulta de nuestro interés.

6.2. Geometría del pliegue y de la cúspide

La catástrofe elemental más sencilla es el *pliegue*. Esta es la dada por el despliegue

$$V(x, u) = x^3 + ux.$$

Este caso es poco interesante. La variedad de equilibrio es

$$M = \{(x, u) / 3x^2 + u = 0\}$$

Cuando $u > 0$, V_u no tiene puntos críticos, si $u < 0$ tiene un máximo y un mínimo. Si $u = 0$ tiene un solo punto crítico degenerado. El origen es el punto de bifurcación y no tiene conjunto de Maxwell. Ahora, analizaremos la geometría de la cúspide. Es decir, del despliegue miniversal de $x^4/4$, dado por

$$V(x, u, v) = x^4/4 + ux^2/2 + vx$$

(cambiamos constantes para que las cuentas sean más prolijas). Entonces, la variedad de equilibrio es

$$M = \{(x, u, v) \in \mathbb{R}^3 / x^3 + ux + v = 0\}.$$

El conjunto de bifurcación es la cúbica conocida como cúspide:

$$B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 4u^3 + 27v^2 = 0\}$$

y el conjunto de Maxwell son los puntos (u, v) tal que $v = 0$ y $u < 0$. El conjunto de bifurcación divide el plano en dos componentes conexas, $U_+ = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 4u^3 + 27v^2 > 0\}$ y $U_- = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 4u^3 + 27v^2 < 0\}$. Para los parámetros en U_+ la función potencial tiene un solo mínimo. En cambio, si $(u, v) \in U_-$ la función potencial V_{uv} tiene dos mínimos relativos y un máximo (Figura 3).

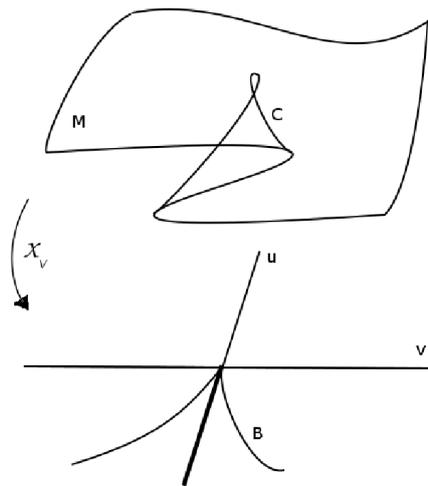
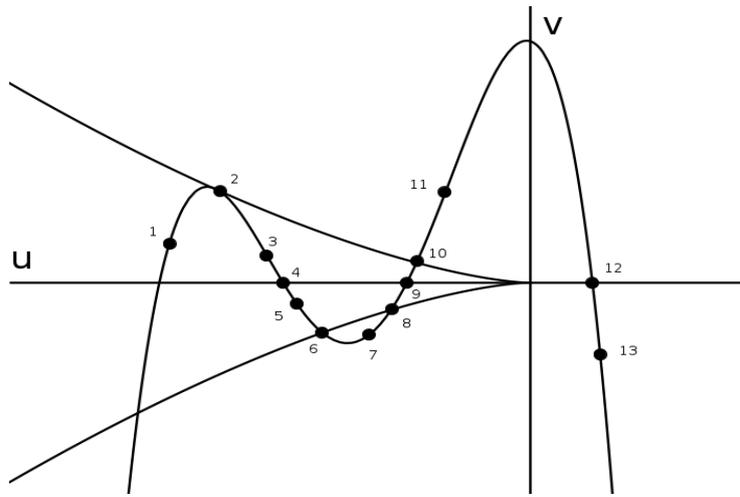
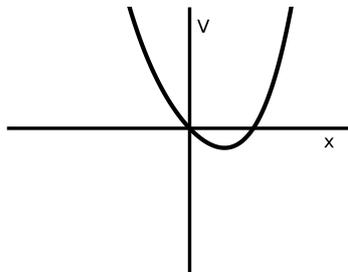


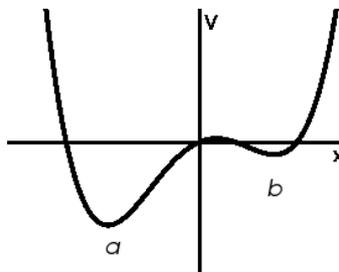
Figura 2



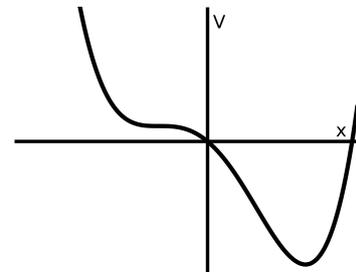
(a)



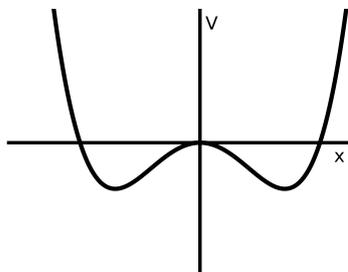
(b)



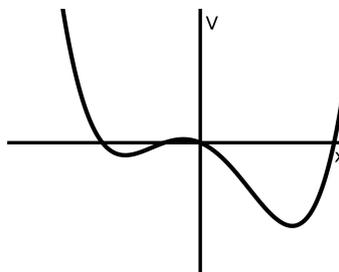
(c)



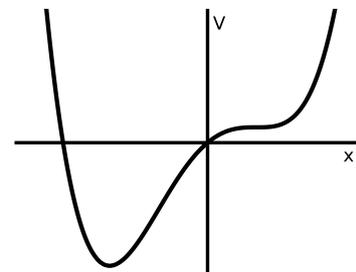
(d)



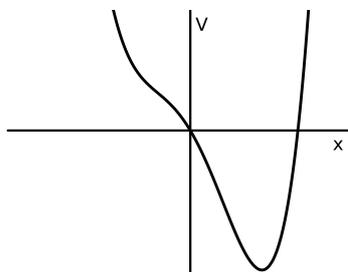
(e)



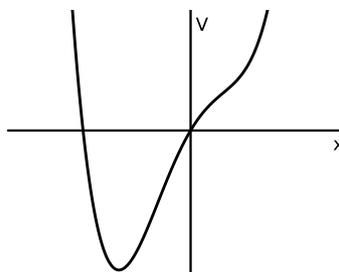
(f)



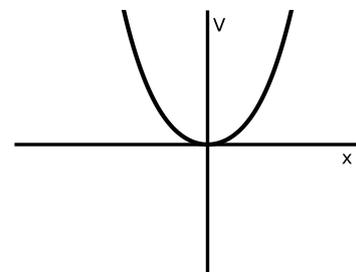
(g)



(h)



(i)



(j)

Figura 3: Gráficos de $V_{uv}(x) = x^4/4 + ux^2/2 + vx$ para distintos valores de (u, v) sobre la curva. (a) Gráfico de la curva y los puntos (u, v) elegidos; (b) V_{13} , (c) V_1 o V_3 ; (d) V_2 o V_{10} , (e) V_4 o V_9 (f) V_5 , (g) V_6 o V_8 , (h) V_7 , (i) V_{11} , (j) V_{12} .

6.3. Ejemplos

A continuación, ejemplificaremos la convención de Maxwell y la de dilación en aplicaciones de la cúspide.

6.3.1. La ecuación de Van der Waals.

La ecuación de Van der Waals para un gas ideal es

$$(P + a/V^2)(V - b) = NkT$$

donde (P, T, V) son la presión, la temperatura y el volumen, a está relacionada con la atracción de las partículas, b con el "tamaño" de las moléculas y k es la constante de Boltzmann. Si fijamos la temperatura obtenemos una isoterma con la siguiente forma:

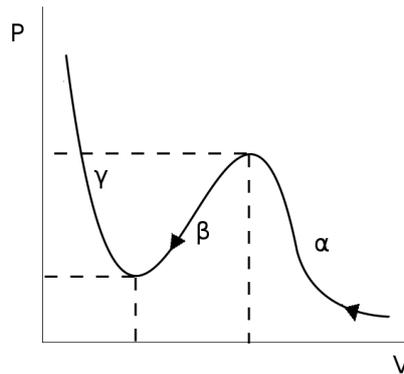


Figura 4

Sin embargo, hay regiones de esta gráfica que no se observan en la realidad. No es físicamente posible que $\frac{\partial P}{\partial V}$ tome valores positivos. Consideremos un gas ideal (en estado gaseoso) en una recipiente que dispone de un pistón que, a su vez, está dentro de una caja con paredes aislantes. Manteniendo la temperatura constante, si disminuimos el volumen del gas observamos que al alcanzar cierto volumen, en el momento que el gas empieza a condensarse, la presión se mantiene constante durante la fase de transición hasta que todo el gas está en estado líquido y la presión vuelve a aumentar. Es decir, lo que observamos se puede graficar de la siguiente manera:

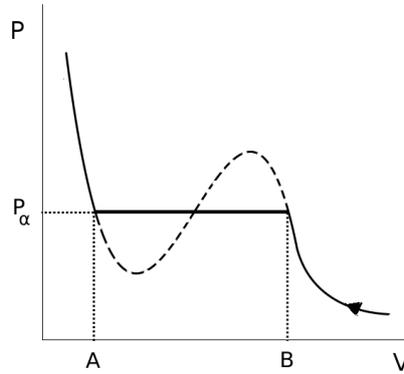


Figura 5

donde P_α es tal que las áreas A_1 y A_2 son iguales. Esta es la regla de Maxwell que le da el nombre a la convención. Ahora, para aplicar la teoría buscamos una función potencial. Para esto introducimos variables de la termodinámica.

La *energía libre* se define como $F = E - TS$ donde E es la energía interna y S es la entropía. Diferenciando obtenemos que

$$dF = dE - TdS - SdT \quad (35)$$

Por otro lado, la primera ley de la termodinámica enuncia

$$dE = dQ + dW \quad (36)$$

donde Q es el calor y $dW = -PdV$ es la diferencial del trabajo. Si la temperatura T es constante, la segunda ley implica que

$$dQ \leq TdS. \quad (37)$$

y junto con (35) y (36) obtenemos

$$dF \leq -PdV. \quad (38)$$

Ahora, para cada valor dado de P, T la *función de Gibbs* se define como $G_{(P,T)} = G = F + PV$. Diferenciando, como resultado de (38), obtenemos la ecuación,

$$dG \leq 0.$$

Entonces, si la temperatura y la presión se mantienen constantes a lo largo de un proceso que empieza en un estado (volumen) A y termina en un estado B , la función de Gibbs verifica

$$G(A) \leq G(B).$$

Por lo tanto, los estados que minimizan la función de Gibbs son estados de equilibrio estable. Más aún, las isotermas de Van der Waals muestran los mínimos de $G_{(P,T)}$ y $G_{(P_\alpha,T)}(A) = G_{(P_\alpha,T)}(B)$ son dos mínimos en los que $G_{(P_\alpha,T)}$ vale lo mismo. Las funciones potenciales $G_{(P,T)}$ tiene la forma de los gráficos en la figura 3 donde (u, v) son (P, T) . Si fijamos la temperatura cuando $P = P_\alpha$ G tiene la forma de la figura 3 (e). Ahora, aplicando el teorema de las siete catástrofes elementales podemos deducir que para un cambio de variables adecuado $G(P, T, V)$ puede escribirse como $x^4/4 + ux^2/2 + vx$. Veamos que la superficie dada por la ecuación de Van der Waals

$$(P + a/V^2)(V - b) = NkT$$

resulta ser la superficie de equilibrio del despliegue $f(x, u, v) = x^4/4 + ux^2/2 + vx$ para el cambio de coordenadas adecuado. Empecemos calculando el punto cúspide de $(P + a/V^2)(V - b) = NkT$. Este es $(P_0, T_0) = (a/27b^2, 8a/27br)$. Ahora consideremos las variables normalizadas

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{27b^2}{a}P \\ \bar{T} &= \frac{27br}{8a}T \\ \bar{V} &= \frac{V}{3b}.\end{aligned}$$

La ecuación de Van der Waals nos queda:

$$(\bar{P} + \frac{3}{\bar{V}^2})(\bar{V} - \frac{1}{3}) = \frac{8}{3}\bar{T}.$$

Haciendo el cambio de variable $\bar{X} = \frac{1}{\bar{V}}$, obtenemos

$$(\bar{P} + 3\bar{X}^2)(\frac{1}{\bar{X}} - \frac{1}{3}) = \frac{8}{3}\bar{T}.$$

donde $(1, 1, 1)$ es el punto cuspidal. Lo llevamos al origen considerando

$$\begin{aligned}p &= \bar{P} - 1 \\ x &= \bar{X}/1 \\ t &= \bar{T} - 1\end{aligned}$$

y la ecuación de Van der Waals es

$$x^3 + \frac{1}{3}(8t + p)x + \frac{2}{3}(8t - 2p) = 0$$

Finalmente, la transformación

$$u = \frac{1}{3}(8t + p)$$

$$v = \frac{2}{3}(8t - 2p)$$

concluye el cambio de variables que estábamos buscando.

Este análisis nos permite dar una fórmula para P_α dependiendo de la temperatura. Ya que los parámetros (u, v) para las cuales $f_{(u,v)}$ tiene dos mínimos con el mismo valor, es el semi eje $v = 0, u < 0$. Es decir,

$$0 = 4t - p = 4\bar{T} - \bar{P} - 3 = \frac{27br}{2a}T - \frac{27b^2}{a}P - 3$$

$$8t + p = 0.$$

Por lo tanto,

$$P_\alpha(T) = \frac{r}{2b}T - \frac{a}{9b^2}.$$

6.3.2. Un ejemplo de la regla de dilación

Consideremos un resorte fijo a una base en sus dos extremos a cierta distancia y una barra pesada que está fija por su extremo inferior sin rozamiento en el medio de los extremos del resorte, de forma que su movimiento está restringido a un plano vertical. La barra está atada al resorte a un ángulo θ_0 del eje perpendicular a la base. Ver Figura 6.

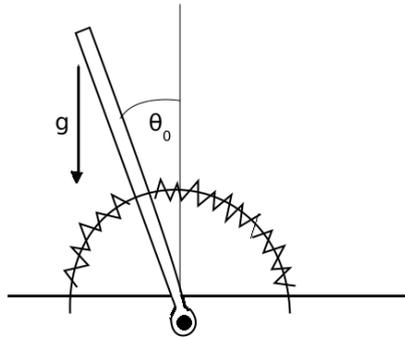


Figura 6

Si θ denota el ángulo entre la barra y el eje vertical, entonces el movimiento de la barra se rige por la ecuación diferencial

$$\theta = -a(\theta - \theta_0) + g.\text{sen}(\theta)$$

donde g depende del peso (está fijo) y a de la constante elástica. Llamo $b = -a\theta_0$, si V es la función potencial, es decir,

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -b - a\theta + g.\text{sen}(\theta)$$

entonces,

$$V_{ab}(\theta) = b\theta + a\frac{\theta^2}{2} + g(\cos(\theta) - 1) = b\theta + \frac{(a-g)}{2}\theta + \frac{g}{24}\theta^4 + \dots$$

Veamos que esta ecuación es equivalente a la cúspide. Para eso calculemos los parámetros de (a, b) tal que V_{ab} tiene un punto crítico degenerado (ese será nuestro origen). Si $b = 0$ y $a - g = 0$, entonces

$$V_{g,0} = \frac{g}{24}\theta^4 + \dots$$

está 4-determinada y por lo tanto es equivalente a x^4 vía un cambio de variables $\theta \mapsto x$. Entonces,

$$\tilde{V}_{ab}(x) = bx - \frac{(a-g)}{2}x + x^4$$

es un despliegue miniversal de x^4 . Llamo $b = v$, $a - g = u$, analicemos el comportamiento del sistema a partir de la geometría de la cúspide.

Si fijamos la constante elástica y disminuimos el ángulo inicial, es decir, fijamos $u = 1$, empezamos con v “grande” y vamos disminuyendo su valor, la función potencial al principio tiene un solo punto crítico que es mínimo y, cuando u alcanza el conjunto de bifurcación, aparece un punto crítico degenerado que se bifurca en un máximo y un mínimo. Pero la barra solo abandona el mínimo en el que se encuentra cuando este desaparece, es decir, la barra cambia abruptamente de posición cuando la función potencial vuelve a tener un solo mínimo (Figura 7). Es decir, el sistema se rige con la convención de dilación. Ahora pensemos en el problema simétrico, es decir, cuando $b = 0$. Si $a > g$, el sistema tiene un único equilibrio en $\theta = 0$ y este es estable (la fuerza del resorte supera el peso), cuando $a < g$ el sistema tiene un equilibrio inestable para $\theta = 0$ y dos estables simétricos. Cuando $a = 0$, observamos una bifurcación de puntos críticos, sin embargo la barra no se queda en posición vertical, esta situación en la realidad no es realizable porque el sistema simétrico no es estable estructuralmente y lo que es observable es lo que ocurre cuando $b \neq 0$. Para analizar este sistema el modelo debe tener en cuenta la asimetría para que el despliegue de funciones potenciales sea versal y de este modo estructuralmente estable.

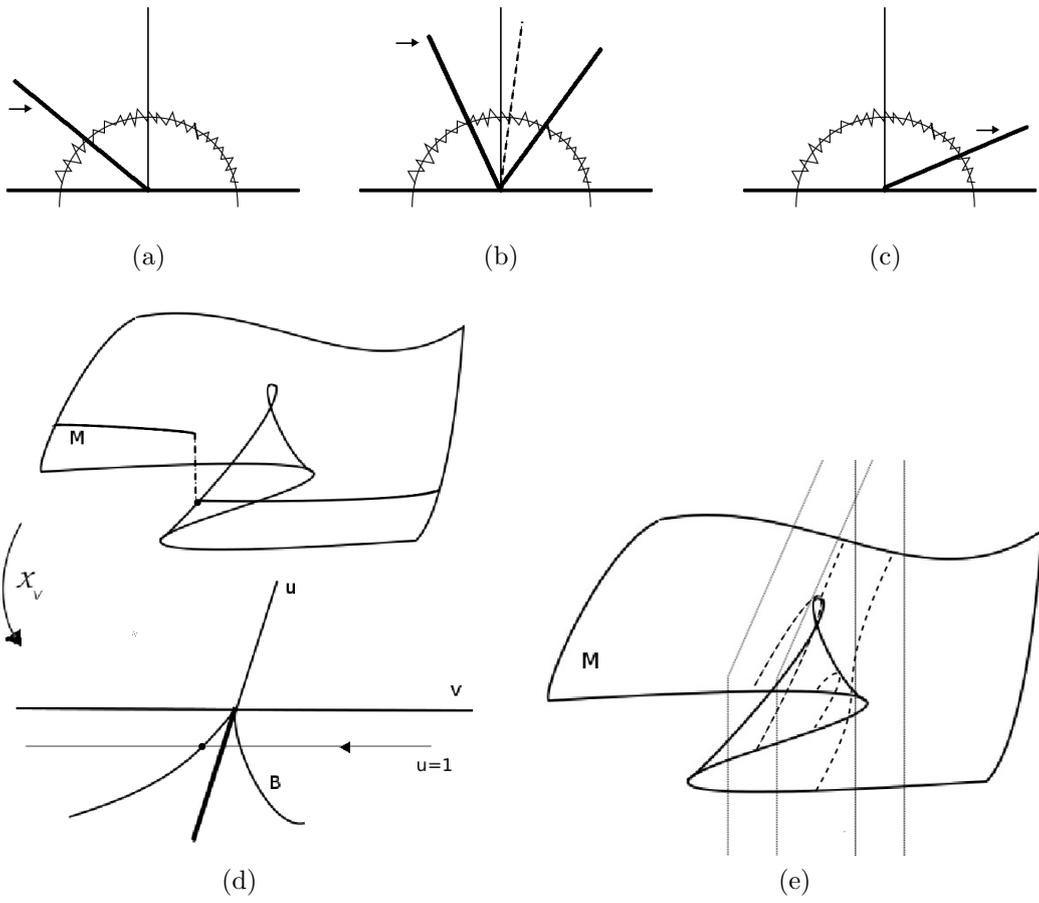


Figura 7

Referencias

- [1] V.I. Arnold. *Ordinary differential equations. Translated and edited by Richard A. Silverman.* The MIT Press, Cambridge, Mass. - London, 1973. 22
- [2] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade, and A.N. Varchenko. *Singularities of differentiable maps, Volume 1. Classification of critical points, caustics and wave fronts,* volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics.* Birkhauser, Boston, 1985. 34
- [3] Th. Bröcker. *Differentiable germs and catastrophes,* volume 17 of *Lecture Note Series.* Cambridge University Press., Cambridge, 1975. Translated by L. Lander. 23
- [4] F Cukierman. Positive polynomials and hyperdeterminants. *Collect. Math.,* (3):279–289, 2007. 37
- [5] Michel Demazure. *Bifurcations and catastrophes. Geometry of solutions to non-linear problems.* Universitext. Springer, Berlin, 2000. Transl. from the French (1989) by David Chillingworth. 23, 44
- [6] C. Lossen. When does the hessian determinant vanish identically? (on gordan and noether’s proof of hesse’s claim). *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.),* (35):71/84, 2004. 24
- [7] Yung-Chen Lu. *Singularity theory and an introduction to catastrophe theory.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976. 44
- [8] J.N. Mather. Stability of c^∞ mappings. iii: Finitely determined map germs. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.,* (35):127–156, 1968. 19
- [9] J.N. Mather. Stability of c^∞ mappings. ii: Infinitesimal stability implies stability. *Ann. Math. (2),* (89):254–291, 1969. 34
- [10] Louis Nirenberg. A proof of the malgrange preparation theorem. *Proc. Liverpool Singularities-Symp. I, Dept. Pure Math. Univ. Liverpool 1969-1970,* pages 97–105, 1971. 5
- [11] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups,* volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition. 37
- [12] Gordon Wassermann. *Stability of unfoldings,* volume 393 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974. Corrected reprint of the 1971 edition. 34