UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Recuperación de fase

Rocío Nores

Directora: Victoria Paternostro

18 de Marzo de 2021

Agradecimientos

Me gustaría empezar esta tesis agradeciendo a mi mamá y a mi papá.

A mi papá por ser el primero que acercó la matemática a mi vida, por hacer del aprendizaje un juego hermoso, por mostrarme que este era un camino posible, por todo tu amor y tus consejos (ya sé que no te escuché cuando me dijiste que no fume, pero por suerte ya lo dejé).

A mi mamá, mi mujer favorita en este mundo, por el ejemplo que sos para mi, por tu amor y tu escucha siempre abierta. Por todas las veces que tachaste *padre, tutor o encargado* y firmaste mis boletines como *madre* aunque a mi me daba vergüenza. Hoy lo entiendo, lo que no se nombra no existe.

También les quiero agradecer a lxs dos juntes, por haber sido los mejores xadres separades que jamás conocí. Por enseñarme con su ejemplo que el amor muta, pero que siempre iban a estar ahí para mí. Lxs amo con todo mi corazón.

A Manu, el hermano más dulce y compañero que podría imaginar.

A mi amor perruno, Fiona, por hacer la vida más feliz. Por haber venido a acompañarme cuando más lo necesitaba.

A Anto, por las incontables horas de estudio compartidas. Por todo el mundo que llevamos recorrido juntas. Por confiar siempre en mí, por todo lo que nos queda por descubrir. Por aceptar ser mi amiga el primer día de clases. Te amo.

A Juli, por el empuje, por la convivencia más hermosa que podría haber imaginado. No hubiera podido con todo esto sin vos, gracias rumi.

A Piombis, mi amigo más sensible. Por todas nuestras charlas y nuestros secretos. Por los abrazos en silencio y por todos los saltos fallidos a la soga. Qué alegría haberte cruzado en el camino!

A Requi, por todos los mates ahumados, los abrazos y los asados. Te adoro.

A Nico y Nacho, mis primeros amigos de la facultad. Todo hubiera sido mucho más dificil sin ustedes, gracias.

A Sebi, por compartir tu vida conmigo. Por tu amistad primero y por tu amor después. Por los abrazos más hermosos. Por las incontables horas estudiando, comiendo sushi y chocolate. Por mostrarme siempre otro punto de vista, por nuestras discusiones que siempre me hacen crecer. Por todo el apoyo que me diste mientras escribía esta tesis, por acompañarme en mis llantos, frustraciones y enojos. Por todos nuestros viajes. Sobre todas las cosas, por ser mi compañero.

A Checha, por nuestras charlas que tanto amo. Por alentarme a seguir adelante siempre.

A Viole, por todos nuestros viajes y todos los que vendrán. Por ser la amiga más gamba que se puede tener. Una alegría inmensa que seas parte de mi vida.

A Magui, por ser mi primera amiga en esta vida.

A todes mis amigues: las pepus, los pepos, Marie, Ceci, Pedro, las Mahala, las chicas de danza, lxs chiques de acro, porque hacen mi vida más feliz y sin dudas eso es razón suficiente para agradecerles.

A Dani, por todos los años compartidos. Por acompañarme los sábados a la mañana cebándome mate mientras yo estudiaba. Por crecer juntes, te adoro.

A toda mi familia, mis abuelas Delia y Betty, mis abuelos que ya no están, mis tías y tíos, todxs mis primxs, a Male. Les adoro.

A Enrique, por haberse sumado a esta familia hace ya muchos años. Te quiero mucho.

A Vicky, por haber aceptado dirigir esta tesis. Por haberme acompañado en este año tan complicado para el mundo entero. Por haberme presentado este tema que me volvió a acercar tanto a la matemática. Gracias, en serio.

A Carolina y a Pablo, por aceptar ser jurades de esta tesis. Por sus correcciones y sus comentarios. Gracias por tomarse el trabajo de leerla.

A todxs los docentes que fueron parte de mi formación tanto en la UBA como en la primaria y la secundaria. Especialmente a Paula Otero, mi profesora de matemática de 5to grado que me llevo por primera vez a las Olimpíadas Ñandú.

A la educación pública en general, y a la Universidad de Buenos Aires en particular. Gracias.

Índice general

Introducción

El problema de recuperación de fase consiste en recuperar una señal a partir de ciertas mediciones sin fase. Generalmente, interesa reconstruir una función f a partir del valor absoluto de su transformada de Fourier $|\hat{f}|$ o de cierto conjunto de mediciones $\{|f(\lambda)|\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Este problema aparece naturalmente en varias áreas de la física, como puede ser la astronomía [14], radares [20], reconocimiento de voz [32] y mecánica cuántica [29]. El ejemplo más destacado, sin embargo, es el de la difracción de imágenes donde en un experimento básico un objeto es colocado frente a un láser que emite radiación electromagnética. El objeto interactúa con la onda incidente de forma difractiva creando una nueva onda. El objetivo de la difracción de imágenes es determinar el objeto a partir de las mediciones de la onda difractada. Esto se encuentra seriamente obstaculizado por el hecho de que la mayoría de los elementos de medición sólo son capaces de capturar la intensidad de la onda, generando una pérdida de información de fase. La reconstrucción del objeto a partir de la intensidad de sus ondas difractadas, llamado *patrón de difracción*, requiere resolver el problema de *recuperación de fase de Fourier*, i.e., dado $|\hat{f}|$ hallar f, salvo ambigüedades triviales.

En microscopía se utiliza un lente para invertir la trasformada de Fourier y así crear la imagen el objeto. Sin embargo, esto no es posible para longitudes de onda demasiado cortas como pueden ser los rayos-x. Para obtener una mayor resolución es necesario recuperar la imagen a partir de su patrón de difracción.

Determinar objetos a partir de su patrón de difracción, y de allí el problema de recuperación de fase, se volvió relevante por primera vez cuando Max von Laue descubrió en 1912 que los rayos-x se difractan al interactuar con cristales, lo cual le valió el Premio Nobel en física dos años después. Esto dió comienzo al campo de la cristalografía de rayos-x. Para quien se encuentre interesade en una descripción más exhaustiva puede dirigirse a [24],[17].

Su formulación matemática abstracta consiste en considerar $\mathcal{B}$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, Λ un conjunto de índices no necesariamente numerables y $\Phi = \{\phi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de funcionales lineales acotados contenida en el dual topológico de $\mathcal{B}$, el objetivo será analizar la inyectividad y estabilidad del operador

$$\mathcal{A}_\Phi f := \{|\langle f, \phi_\lambda \rangle|\}_{\lambda \in \Lambda}$$

donde $\langle f, \phi_\lambda \rangle = \phi_\lambda(f)$.

Esta tesis está basada principalmente en los trabajos de Grohs, Koppensteiner y Rathmair en [15] y de Bojarovska y Flinth en [8]. En el primer capítulo abordaremos el problema de recuperación de fase en su versión abstracta. Probaremos condiciones necesarias y suficientes sobre Φ que nos garanticen la inyectividad. Con respecto a la estabilidad, vamos a considerar de forma diferenciada los casos en que $\mathcal{B}$ tenga dimensión finita e infinita. En ambas situaciones es cierto que la inversa del operador es continua, pero necesitaremos estar en un espacio de dimensión finita para asegurar la continuidad Lipschitz del mismo. Más aún, probaremos que no es posible recuperar la fase de forma estable en dimensión infinita. Un aspecto importante a destacar es que para que el operador $\mathcal{A}_\Phi$ sea estable, es condición necesaria que Φ sea un marco de $\mathcal{B}$ (continuo si el conjunto de índices no es discreto). Sin embargo, esta condición sobre Φ no garantiza la estabilidad de $\mathcal{A}_\Phi$. Esta es una diferencia crucial con el problema de *sampling* donde se consideran muestras con fase, es decir, donde se estudia el operador $C_\Phi f := (\langle f, \phi_\lambda \rangle)_{\lambda \in \Lambda}$ con $\langle f, \phi_\lambda \rangle = \phi_\lambda(f)$. Es este caso, la condición de estabilidad de C_Φ es equivalente a la condición de marco de Φ.

En el Capítulo 2 abordaremos el problema de recuperación de fase a partir de las mediciones sin fase de la transformada de Fourier. En primer lugar, caracterizaremos las ambigüedades que pueden aparecer si consideramos la transformada de Fourier discreta sobre $\mathbb{C}^N$. Esto nos permitirá contar la cantidad, además de conocer la forma de las ambigüedades que posee una señal *genérica.* De forma análoga, en la segunda parte de este capítulo trabajaremos con la transformada de Fourier continua sobre $L^2(\mathbb{R}^d)$.

En el Capítulo 3 trabajaremos con marcos de Gabor, o dicho de otro modo, con mediciones de la transformada de Fourier a tiempo corto, esto es el conjunto de traslaciones tiempo-frecuencia de un generador fijo. Estos tipos de mediciones son de especial interés en procesamiento de voz y en las llamadas imagenes de difracción coherente (CDI por sus siglas en inglés) [16]. Este último proceso consiste en dos pasos, primero se obtiene uno o múltiples patrones de difracción para luego procesarlos con el objetivo de obtener la imagen del objeto inicial, generalemente a partir de algoritmos de recuperación de fase iterativos. Los resultados teóricos de este capítulo se centrarán en el estudio de condiciones de inyectividad sobre los marcos de Gabor y condiciones sobre los generadores que permitan esa recuperación de fase.

Por último, en el Capítulo 4 consideraremos algunos casos particulares en los cuales introduciremos modificaciones o bien sobre el operador $\mathcal{A}_\Phi$ o bien sobre la familia de funciones que queremos recuperar con el objetivo de asegurar la recuperación de fase.

Capítulo 1

Recuperación de fase abstracta

A lo largo de este capítulo, $\mathcal{B}$ denota un espacio de Banach sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathcal{B}'$ su espacio dual topológico y Λ es un conjunto de índices no necesariamente numerable. Dada una familia de funcionales lineales acotados $\Phi := \{\phi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ definimos el operador

$$\mathcal{A}_\Phi f := (|\langle f, \phi_\lambda \rangle|)_{\lambda \in \Lambda}$$

donde $\langle f, \phi_\lambda \rangle = \phi_\lambda(f)$.

Es inmediato que $\mathcal{A}_\Phi(cf) = \mathcal{A}_\Phi(f)$ para todo escalar c de módulo 1. Es por esto que definimos en $\mathcal{B}$ la relación de equivalencia $cf \sim f$ sii $|c| = 1$ y decimos que Φ *permite recuperar la fase* si

$$\mathcal{A}_\Phi : \mathcal{B}/\sim \longrightarrow \mathbb{R}_+^\Lambda$$

es inyectivo.

1.1 Inyectividad

Supongamos que $\Phi \subseteq \mathcal{B}'$ es una familia de funcionales lineales acotados y $S \subseteq \Lambda$. Notaremos por Φ_S al conjunto $\Phi_S := \{\phi_\lambda : \lambda \in S\} \subseteq \Phi$. Si V es un subespacio de $\mathcal{B}'$ denotaremos al *anulador de* V *en* $\mathcal{B}$ por $V_\perp$ que se define como $V_\perp := \{f \in \mathcal{B} : \langle f, v \rangle = 0 \ \forall v \in V\}$.

Definición 1.1. *Una familia $\Phi \subseteq \mathcal{B}'$ satisface la propiedad del complemento si para todo subconjunto $S \subseteq \Lambda$, $(span\ \Phi_S)_\perp = 0$ ó $(span\ \Phi_{\Lambda \setminus S})_\perp = 0$.*

Teorema 1.2. *Sea $\mathcal{B}$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ y $\Phi \subseteq \mathcal{B}'$ una familia de funcionales lineales acotados. Entonces:*

1. *Si $\mathcal{A}_\Phi$ es inyectivo entonces Φ satisface la propiedad del complemento.*

2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *y* Φ *satisface la propiedad del complemento entonces* $\mathcal{A}_\Phi$ *es inyectivo.*

Demostración.

1. Supongamos que $\mathcal{A}_\Phi$ es inyectivo, $S \subseteq \Lambda$ es un subconjunto cualquiera y además existe $f \in (\text{span } \Phi_S)_\perp$ no nula. Sea $h \in (\text{span } \Phi_{\Lambda \setminus S})_\perp$, queremos ver que $h = 0$.

   Con esta elección de f y h tenemos que

   $$|\langle f \pm h, \phi_\lambda \rangle|^2 = |\langle f, \phi_\lambda \rangle|^2 \pm \underbrace{2Re(\langle f, \phi_\lambda \rangle \langle h, \phi_\lambda \rangle)}_{=0} + |\langle h, \phi_\lambda \rangle|^2 \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

   por lo que $\mathcal{A}_\Phi(f + h) = \mathcal{A}_\Phi(f - h)$. Como $\mathcal{A}_\Phi$ es inyectivo existe $c \in \mathbb{K}$ con $|c| = 1$ tal que $f + h = c(f - h)$, pero además $c \neq -1$ dado que $f \neq 0$. Con esto, tenemos

   $$h = \frac{c-1}{c+1} f \in (\text{span } \Phi_S)_\perp \cap (\text{span } \Phi_{\Lambda \setminus S})_\perp$$

   lo que implica que $\mathcal{A}_\Phi h = 0$ y, por lo tanto $h = 0$.

2. Supongamos que existen f y $h \in \mathcal{B}$ tales que $\mathcal{A}_\Phi f = \mathcal{A}_\Phi h$. Como $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ cada una de las coordenadas de $(\langle f, \phi_\lambda \rangle)_{\lambda \in \Lambda}$ y $(\langle h, \phi_\lambda \rangle)_{\lambda \in \Lambda}$ difieren a lo sumo en su signo. Tiene sentido considerar la siguiente partición de Λ, $S := \{\lambda \in \Lambda : \langle f, \phi_\lambda \rangle = \langle h, \phi_\lambda \rangle\}$ y por lo tanto $\Lambda \setminus S = \{\lambda \in \Lambda : \langle f, \phi_\lambda \rangle = -\langle h, \phi_\lambda \rangle\}$. Así $f - h \in (\text{span } \Phi_S)_\perp$ y $f + h \in (\text{span } \Phi_{\Lambda \setminus S})_\perp$. Pero por hipótesis alguno de los dos anuladores sólo contiene al 0. Por lo tanto $f = h$ o $f = -h$ y $\mathcal{A}_\Phi$ resulta inyectivo.

□

El siguiente ejemplo fue extraído del trabajo de Alfari y Grohs en [4].

Ejemplo 1.3. *Como una aplicación para demostrar la inyectividad usando la propiedad del complemento, vamos a considerar la recuperación de fase en el espacio de Paley-Wiener*

$$\mathcal{PW}_{\mathbb{R}}^{p,b} := \{f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ sop(\hat{f}) \subseteq [-b/2, b/2]\}$$

con la norma que hereda de L^p *y* $p = 2$.

Observación 1.4. *Vía el Teorema de Paley-Wiener-Schwartz [19, Teo 7.3.1], el espacio el Paley-Wiener se identifica con las funciones enteras de tipo exponencial cuya restricción a los números reales está en* L^2. *Por lo cual, toda función en* $\mathcal{PW}_{\mathbb{R}}^{2,b}$ *en particular es holomorfa.*

Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$. Consideremos el conjunto $\Phi := \{\phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ dado por

$$\langle f, \phi_\lambda\rangle := f(\lambda).$$

Decimos que Λ es un conjunto de muestreo para $\mathcal{PW}_{\mathbb{R}}^{2,b}$ si para todo $f \in \mathcal{PW}_{\mathbb{R}}^{2,b}$

$$\langle f, \phi_\lambda\rangle = 0 \quad \forall\lambda \in \Lambda \Longrightarrow f = 0.$$

Existen varias condiciones que hacen de Λ una sucesión de muestreo. Una manera de caracterizarla es a través de la densidad inferior de Beurling que para un conjunto Λ se define como

$$D^-(\Lambda) := \liminf_{r\to\infty} \inf_{a\in\mathbb{R}} \frac{\#(\Lambda \cap [a, a+r))}{r}.$$

Así, los conjuntos de muestreo se pueden caracterizar de la siguiente forma:

Teorema 1.5. *([9], [33])Para $p \in (1,\infty)$, Λ es un conjunto de muestreo si $D^-(\Lambda) > b$ y sólo si $D^-(\Lambda) \geqslant b$.*

Con esto, podemos enunciar el siguiente resultado:

Teorema 1.6. *Supongamos que Λ es un conjunto de muestreo para $\mathcal{PW}_{\mathbb{R}}^{1,2b}$. Entonces*

$$\mathcal{A}_\Phi : \mathcal{PW}_{\mathbb{R}}^{2,b}/\{1,-1\} \to \mathbb{R}_+^\Lambda$$

es inyectivo.

Demostración. Por el Teorema 1.2, basta con ver que Φ satisface la propiedad del complemento. Supongamos que esto no es así, entonces existen $f, g \in \mathcal{PW}_{\mathbb{R}}^{2,b}\backslash\{0\}$ y $S \subseteq \Lambda$ tales que $f(S) = 0$ y $g(\Lambda\backslash S) = 0$. Sea $h := f.g \in \mathcal{PW}_{\mathbb{R}}^{1,2b}$, por la Observación 1.4 f, g y h son funciones holomorfas. Supongamos que h se anula en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Como $f \neq 0$, existe un subintervalo $U \subseteq I$ en el cual f no tiene ceros. Pero entonces $g = 0$ en U, lo cual implica que $g = 0$ en $\mathbb{R}$ y eso contradice nuestra suposición. En consecuencia, $h \in \mathcal{PW}_{\mathbb{R}}^{1,2b}\backslash\{0\}$. Pero $h(\Lambda) = f(\Lambda).g(\Lambda) = 0$, contradiciendo la condición de muestreo sobre Λ. $\square$

Corolario 1.7. *Sea Λ un conjunto con densidad inferior de Beurling $D^-(\Lambda) > b$. Entonces*

$$\mathcal{A}_\Phi : \mathcal{PW}_{\mathbb{R}}^{2,b}/\{1,-1\} \to \mathbb{R}_+^\Lambda$$

es inyectivo.

En lo que resta de la sección, estudiaremos la inyectividad en espacios de dimensión finita. Para ello, utilizaremos algunas nociones de marcos en dimensión finita que se detallan en el apéndice. De aquí en adelante notaremos por $N = \#\Lambda$ y d será la dimensión de $\mathcal{B}$. El resultado que sigue es un corolario del Teorema 1.2.

Corolario 1.8. *Si $N < 2d - 1$ entonces $\mathcal{A}_\Phi$ no es inyectivo para ninguna familia $\Phi \subseteq \mathbb{K}^d$ de N elementos.*

Demostración. Basta con tomar una partición de Λ de modo tal que ambos subconjuntos tengan a lo sumo $d - 1$ elementos. De esta forma $\operatorname{span} \Phi_S \neq \mathbb{K}^d$ y $\operatorname{span} \Phi_{\Lambda \setminus S} \neq \mathbb{K}^d$, lo que claramente contradice la propiedad del complemento. □

El recíproco no es cierto en general. Sin embargo, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la otra implicación es cierta *para casi todo* marco. Para precisar mejor esto, es necesario definir algunos conceptos de geometría algebraica. Una *variedad algebraica* en $\mathbb{K}^d$ es el conjunto de ceros comunes de una familia finita de polinomios en $\mathbb{K}[x_1, ..., x_d]$. Si definimos estas variedades como cerrados de $\mathbb{K}^d$ obtenemos la *topología Zariski*. Observemos que la topología habitual de $\mathbb{K}^d$ es más fina que esta nueva topología, por lo cual los abiertos Zariski son también abiertos de $\mathbb{K}^d$ y por lo tanto son conjuntos medibles Lebesgue. Más aún, los abiertos Zariski son densos respecto de la topología usual de $\mathbb{K}^d$ por lo cual su complemento es un conjunto cerrado con medida de Lebesgue *cero*.

Decimos que un *punto genérico* en $\mathbb{K}^d$ cumple cierta propiedad P si existe un abierto Zariski para el cual P es válida. Identificando los marcos de $\mathbb{K}^d$ de N elementos con las matrices de rango máximo de $\mathbb{K}^{d \times N}$, resultan ser un abierto Zariski por lo que tiene sentido estudiar los puntos genéricos dentro del conjunto de los marcos. A estos puntos genéricos los llamaremos *marcos genéricos*.

El siguiente resultado fue probado por Radu Balan, Pete Casazza y Dan Edidin en [6] y nos permite terminar de caracterizar la inyectividad en el caso real.

Teorema 1.9. *Si $N \geqslant 2d - 1$ entonces $\mathcal{A}_\Phi$ es inyectivo para un marco genérico de N elementos en $\mathbb{R}^d$.*

Antes de probar esto veamos los siguientes lemas.

Lema 1.10. *Un subespacio genérico $W \subseteq \mathbb{R}^N$ de dimensión d tiene intersección nula con un subespacio fijo $L \subseteq \mathbb{R}^N$ de codim$(L) \geqslant d$.*

Demostración. Queremos ver que el conjunto de subespacios que cumplen esta condición es un abierto Zariski de $G(d, N)$, la variedad de subespacios de dimensión d en $\mathbb{R}^N$.

Podemos caracterizar esta variedad como el cociente entre los elementos de $\mathbb{R}^{d\times N}$ de rango máximo bajo la relación de equivalencia

$$W \sim W' \text{ sii } \exists G \in GL(d,\mathbb{R}) \text{ tal que} W = W'G$$

con la topología Zariski cociente, donde $GL(d,\mathbb{R})$ es el conjunto de matrices inversibles de tamaño $d \times d$ sobre $\mathbb{R}$. Es decir, estamos identificando todas las bases de un mismo subespacio.

Consideremos

$$U = \{W \in G(d,N) : W \cap L = \{0\}\} \subseteq G(d,N).$$

Basta ver que U es abierto Zariski. Como $G(d,N)$ tiene la topología cociente eso es equivalente a ver que $\pi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^{d\times N}$ es abierto Zariski invariante por $GL(d,\mathbb{R})$, donde π es la proyección al cociente.

Si $dim(L) = l$, tenemos

$$\pi^{-1}(U) = \{A \in \mathbb{R}^{d\times N} : \text{Ran}(A)\text{=d y dim(Im}(A) + L\ )= d + l\}.$$

Esto es lo mismo que considerar la matriz ampliada M_A de columnas de A y generadores de L y pedirle que tenga rango máximo. Esto sucede si y sólo si algún menor de tamaño $(d+l) \times (d+l)$ es distinto de cero. En una matriz de tamaño $(d+l) \times N$ tendremos $\binom{N}{d+l}$ menores de ese tamaño. Como los determinantes son polinomios en los coeficientes de A, $\pi^{-1}(U)$ resulta ser abierto Zariski.

Por último, este conjunto es $GL(d,\mathbb{R})$-invariante dado que multiplicar a derecha solo realiza operaciones de columna en la matriz A y no modifica Im(A).

Luego U es un abierto Zariski del conjunto de todos los subespacios de dimensión d en $\mathbb{R}^N$.

□

Dado un conjunto $S \subseteq \{1,...N\}$ notaremos $\chi_S(i)$ a la función característica de S. Definimos $\sigma : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ como

$$\sigma_S(u) := ((-1)^{\chi_S(1)}u_1, ..., (-1)^{\chi_S(N)}u_N).$$

Claramente $\sigma^2 = id$ y $\sigma_{S^c} = -\sigma_S$.

Lema 1.11. *Si $N \geqslant 2d-1$ lo que sigue vale para un subespacio genérico W de dimensión d en $\mathbb{R}^N$. Dado $u \in W$, $\sigma_S(u) \in W \Leftrightarrow \sigma_S(u) = \pm u$.*

Demostración. Si $u \in W$ y $\sigma_S(u) = \pm u$, claramente $\sigma_S(u) \in W$. Supongamos entonces que $\sigma_S(u) \in W$ pero que $\sigma_S(u) \neq \pm u$. Consideremos $L^S := \{(a_1, ...a_N) \in \mathbb{R}^N : a_i = 0 \; \forall i \in S\}$ que es un subespacio de dimensión $N - |S|$. Como $\sigma_S(u) + u \in \text{Ł}^S$, pues está fijo por σ_S, y $\sigma_S(u) + u \neq 0$ por hipótesis resulta que $W \cap L^S \neq \{0\}$. Además $0 \neq u - \sigma_S(u) = u + \sigma_{S^c}(u)$ por lo que $W \cap L^{S^c} \neq \{0\}$.

L^S y L^{S^c} son subespacios fijos de dimensión $N - |S|$ y $|S|$ respectivamente y $N \geqslant 2d - 1$ por lo que alguno de los dos tiene codimensión mayor o igual a d. Por el lema anterior, esta condición no puede cumplirse para W subespacio genérico de dimensión d. $\square$

Demostración del Teorema 1.9. Supongamos que existen $f, g \in \mathcal{B}$ tales que $\mathcal{A}_\Phi(f) = \mathcal{A}_\Phi(g)$. Sean $(f_1, ..., f_N)$ y $(g_1, ..., g_N)$ las tiras de coeficientes de f y g, es decir, $f_i = \langle f, \phi_i \rangle$ y $g_i = \langle g, \phi_i \rangle$ $\forall i \in \{1, ..., N\}$. Entonces $\mathcal{A}_\Phi(f) = \mathcal{A}_\Phi(g)$ si y sólo si existe un subconjunto de índices $S \subseteq \{1, ..., N\}$ tal que $f_i = (-1)^{\chi(i)} g_i$ $\forall i$. Esto a su vez es equivalente a que exista un subconjunto $S \subseteq \{1, ...N\}$ tal que $(f_1, ..., f_N)$ y $((-1)^{\chi(1)} f_1, ..., (-1)^{\chi(N)} f_N)$ pertenecen a $W := Im(C_\Phi)$. Por el Lema 1.11, para un subespacio genérico esto sólo es posible si $f = \pm g$. $\square$

El caso en el que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ es bastante más complicado. En [7], Bandeira et al. en 2013 plantea la *Conjetura* $4d - 4$ que resulta análoga al caso real.

La Conjetura 4d-4. *Sea $\Phi \subseteq \mathbb{C}^d$ un marco de N elementos. Si $d \geqslant 2$ vale:*

1. *Si $N < 4d - 4$ entonces $\mathcal{A}_\Phi$ no es inyectivo.*

2. *Si $N \geqslant 4d - 4$ entonces $\mathcal{A}_\Phi$ es inyectivo para un marco genérico.*

Esta conjetura dejó de serlo cuando fue probada la segunda parte por Conca et al. en [12, Teorema 1.1] en 2014. Alli mismo prueban que la primera parte es cierta si tomamos espacios de dimensión $d = 2^k + 1$ [12, Teorema 1.2]. Sin embargo, esto no es cierto en general. En [34] Vinzant da un ejemplo de un marco de $11 = 4d - 5$ elementos en $\mathbb{C}^4$ para el cual $\mathcal{A}_\Phi$ es inyectivo.

1.2 Estabilidad

La estabilidad de este problema está relacionada con la continuidad del operador $\mathcal{A}_\Phi^{-1} : \mathrm{ran}\mathcal{A}_\Phi \to \mathcal{B}/_\sim$. Para esto, es necesario definir una topología en $\mathcal{B}/_\sim$ y encontrar un espacio de Banach $\mathcal{D}$ adecuado de modo que $\mathrm{ran}\mathcal{A}_\Phi \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$. La elección natural para $\mathcal{B}/_\sim$ es la métrica cociente dada por

$$d(f,g) := \inf_{|c|=1} \|f - cg\|_{\mathcal{B}}.$$

El espacio de análisis para marcos en espacios de Hilbert separables es $\ell^2(\Lambda)$. Sin embargo, durante esta sección estudiaremos la estabilidad en espacios de Banach. Una generalización apropiada de $\ell^2(\Lambda)$ es tomar un espacio de Banach $\mathcal{D}$ *admisible* que contenga al rango del operador de análisis

$$\mathcal{C}_\Phi(f) = (\langle f, \phi_\lambda \rangle)_{\lambda\in\Lambda}. \tag{1.1}$$

Definición 1.12. *Sea Λ un espacio topológico σ-compacto. Un espacio de Banach $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$ se dice admisible si:*

1. *La función característica χ_K de todo compacto $K \subseteq \Lambda$ cumple que $\|\chi_K\| < \infty$.*
2. *Cada vez que $z \in \mathcal{D}$ y $|w(\lambda)| \leqslant |z(\lambda)|$ para todo $\lambda \in \Lambda$, se tiene que $w \in \mathcal{D}$ y además $\|w\| \leqslant \|z\|$. Es decir, el espacio de Banach $\mathcal{D}$ es sólido.*
3. *Los elementos de $\mathcal{D}$ de soporte compacto son densos en $\mathcal{D}$.*

Esta definición no es muy restrictiva, por ejemplo todos los espacios L^p con $1 \leqslant p < \infty$ la cumplen. Si $p = \infty$ no es cierto que los elementos de soporte compacto sean densos en L^∞, pero sí se cumplen las otras dos condiciones.

Con esto, ya podemos definir la estabilidad de manera más precisa.

Definición 1.13. *Sean $\Phi \subseteq \mathcal{B}'$ una familia de funcionales lineales acotados y $\mathcal{D}$ un espacio de Banach admisible tal que $\mathcal{C}_\Phi : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$, donde $\mathcal{C}_\Phi$ está definido como en (1.1). Diremos que la recuperación de fase de Φ es estable (con respecto a $\mathcal{D}$) si existen constantes $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$ tales que*

$$\alpha d(f,g) \leqslant \|\mathcal{A}_\Phi(f) - \mathcal{A}_\Phi(g)\|_{\mathcal{D}} \leqslant \beta d(f,g) \qquad \forall f,g \in \mathcal{B}. \tag{1.2}$$

Más aún, llamaremos α_Φ y β_Φ a las constantes óptimas.

Definición 1.14. *Sea $\Phi \subseteq \mathcal{B}'$ un familia de funcionales lineales acotados tales que la aplicación $\lambda \mapsto \phi_\lambda$ es continua. Decimos que Φ es un marco de Banach continuo si existe un espacio de Banach admisible tal que:*

1. *Existen constantes positivas $0 < A \leqslant B < \infty$ tal que*

$$A\|f\|_{\mathcal{B}} \leqslant \|\mathcal{C}_\Phi(f)\|_{\mathcal{D}} \leqslant B\|f\|_{\mathcal{B}} \qquad \forall f \in \mathcal{B}. \tag{1.3}$$

   A los valores óptimos los llamaremos A_Φ y B_Φ.

2. *Existe un operador continuo $R : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$, llamado operador de reconstrucción, que cumple*

$$R\mathcal{C}_\Phi(f) = f \qquad \forall f \in \mathcal{B}.$$

Observemos que si $\mathcal{C}_\Phi$ llega a un espacio de Banach admisible, la solidés implica que $\|\mathcal{A}_\Phi f\|_{\mathcal{D}} = \|\mathcal{C}_\Phi f\|_{\mathcal{D}}$. Por lo tanto, es posible ver que la condición de marco dada en (1.3) es *necesaria* para que se cumpla la condición de estabilidad en el sentido de (1.2) tomando en esta última $g = 0$. De aquí se desprende también que $B_\Phi \leqslant \beta_\Phi$.

De aquí en adelante, salvo que se especifique lo contrario, Λ será un espacio topológico σ-compacto.

Proposición 1.15. Si $\Phi \subseteq \mathcal{B}'$ es un marco de Banach continuo tal que $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}$ es un espacio de Banach admisible, entonces $\beta_\Phi = B_\Phi$.

Demostración. Resta ver que $\beta_\Phi \leqslant B_\Phi$. Sean $f, g \in \mathcal{B}$, $\lambda \in \Lambda$. Tenemos que para todo $c \in \mathbb{K}$ con $|c| = 1$:

$$\begin{aligned} |(A_\Phi f - \mathcal{A}_\Phi g)_\lambda| &= ||\langle f, \phi_\lambda\rangle| - |\langle g, \phi_\lambda\rangle|| \\ &= ||\langle f, \phi_\lambda\rangle| - |\langle cg, \phi_\lambda\rangle|| \\ &\leqslant |\langle f - cg, \phi_\lambda\rangle|. \end{aligned}$$

Como además $\mathcal{D}$ es sólido se tiene que:

$$\begin{aligned} \|A_\Phi f - \mathcal{A}_\Phi g\|_{\mathcal{D}} &\leqslant \min_{|c|=1} \||\langle f - cg, \phi_\lambda\rangle|\|_{\mathcal{D}} \\ &= \min_{|c|=1} \|\mathcal{A}_\Phi(f - cg)\|_{\mathcal{D}} \\ &= \min_{|c|=1} \|\mathcal{C}_\Phi(f - cg)\|_{\mathcal{D}} \\ &\leqslant B_\Phi d(f, g) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\beta_\Phi \leqslant B_\Phi$. □

Aunque no es suficiente para alcanzar la estabilidad que buscamos, el siguiente resultado nos asegura que el inverso de $\mathcal{A}_\Phi$ siempre es continuo.

Teorema 1.16. *[4, Teorema 3.3] Sea $\Phi \subseteq \mathcal{B}'$ un marco de Banach continuo y supongamos que $\mathcal{A}_\Phi$ es inyectivo. Entonces $\mathcal{A}_\Phi^{-1}$ es continuo en el rango de $\mathcal{A}_\Phi$.*

Demostración. Queremos ver que si $(\mathcal{A}_\Phi(f_k))_k \subseteq \mathcal{D}$ es una sucesión convergente entonces $(f_k)_k \subseteq \mathcal{B}$ también converge. Como $(\mathcal{A}_\Phi(f_k))_k$ es de Cauchy, el conjunto $\widetilde{K} := \{\mathcal{A}_\Phi(f_k) : k \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto. Por ser $\mathcal{D}$ un espacio de Banach esto es equivalente a ser totalmente acotado. En particular, $\widetilde{K}$ es un conjunto acotado y como además

$$\|f_k\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{1}{A_\Phi}\|\mathcal{C}_\Phi(f_k)\|_{\mathcal{D}} = \frac{1}{A_\Phi}\|\mathcal{A}_\Phi(f_k)\|_{\mathcal{D}}$$

se sigue que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{K}}$ también lo es.

Por otro lado, como la aplicación $\lambda \mapsto \phi_\lambda$ es continua, dados $\lambda \in \Lambda$ y $\epsilon > 0$ existe un entorno $U_\epsilon(\lambda) \subset \Lambda$ tal que

$$\|\phi_\lambda - \phi_\mu\|_{\mathcal{B}'} \leqslant \frac{\epsilon}{c} \qquad \forall \mu \in U_\epsilon(\lambda).$$

Combinando estas dos cosas, si $\mu \in U_\epsilon(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\sup_{k\in\mathbb{N}} |\langle f_k, \phi_\lambda\rangle - \langle f_k, \phi_\mu\rangle| &= \sup_{k\in\mathbb{N}} |\langle f_k, \phi_\lambda - \phi_\mu\rangle| \\ &\leqslant c\|\phi_\lambda - \phi_\mu\|_{\mathcal{B}'} \\ &\leqslant \epsilon.\end{aligned}$$

Esto prueba que el conjunto $K = \{\mathcal{C}_\Phi(f_k) : k \in \mathbb{N}\}$ es fuertemente equicontinuo, es decir que para todo ϵ, $\lambda > 0$ existe $U_\epsilon(\lambda) \subseteq \Lambda$ tal que vale esta última desigualdad. Como además $\widetilde{K}$ es relativamente compacto, por el Corolario A.4 de [4] tenemos que K también lo es. Consideremos $(\mathcal{C}_\Phi(f_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ una subsucesión convergente. Dado que Φ es un marco continuo, $f_{n_k} = R(\mathcal{C}_\Phi(f_{n_k}))$ y $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ resulta ser una sucesión de Cauchy que converge a algún $f \in \mathcal{B}$. Como $\mathcal{A}_\Phi$ es continuo, $\mathcal{A}_\Phi(f_{n_k}) \longrightarrow \mathcal{A}_\Phi(f)$.

Supongamos que existe otra subsucesión que converge a f', por inyectividad de $\mathcal{A}_\Phi$ necesariamente se tiene que $f' = f$. Podemos concluir que $\mathcal{A}_\Phi^{-1}$ es continuo en el rango de $\mathcal{A}_\Phi$.

□

La continuidad de $\mathcal{A}_\Phi^{-1}$ no es suficiente para obtener la estabilidad en el sentido de (1.2). De hecho, esta sólo va a ser posible en aquellos casos en los que $\mathcal{B}$ tenga dimensión finita. La demostración de este resultado se puede encontrar en [11, Proposición 1.4].

Teorema 1.17. *Si $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach de dimensión finita y $\Phi = \{\phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un marco que permite la recuperación de fase (i.e.: $\mathcal{A}_\Phi$ es inyectivo) entonces existe $\alpha_\Phi > 0$ que cumple la desigualdad (1.2).*

Demostración. $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita d, por lo cual es isomorfo a $\mathbb{K}^d$. Para esto basta con tomar una base ordenada de $\mathcal{B}$ y mandarla a la base canónica de $\mathbb{K}^d$. Además, sobre $\mathbb{K}^d$ todas las normas son equivalentes. Es por esto que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{B}$ es $\mathbb{K}^d$ con la norma que proviene del producto interno canónico, i.e. $< x, y >= \sum_{i=1}^d x_i\overline{y_i}$ y la norma sobre $\mathcal{B}$ es $\|.\|_2$. Por último, como la desigualdad $\alpha d(f, g) \leqslant \|\mathcal{A}_\Phi f - \mathcal{A}_\Phi g\|_\mathcal{D}$ permite sacar escalares afuera, podemos suponer que $\|f\|_\mathcal{B} = 1$ y $\|g\|_\mathcal{B} \leqslant 1$.

Consideremos $\mathbb{H}_d$ el conjunto de las matrices Hermitianas de tamaño $d \times d$ con el producto interno de Hilbert-Schmidt $\langle X, Y\rangle_{HS} = \text{Traza}(XY)$. Como estamos considerando la restricción a las matrices Hermitianas, no es necesario considerar la adjunta de Y. Además, con este producto interno $\mathbb{H}_d$ resulta un espacio de Hilbert real.

Definimos el operador lineal $\mathcal{A}^2_\Phi : \mathbb{H}_d \to l^2(\Lambda)$ como

$$\mathcal{A}^2_\Phi(X) := (\langle X, \phi_\lambda\phi^*_\lambda\rangle_{HS})_{\lambda\in\Lambda}, \tag{1.4}$$

donde hh^* es el operador de rango uno definido por $hh^*(g) := \langle g, h\rangle h \ \forall g \in \mathbb{K}^d$. Se puede ver que $\mathcal{A}^2_\Phi(X) = (\langle X\phi_\lambda, \phi_\lambda\rangle)_{\lambda\in\Lambda}$. Observemos que si X es una matriz de rango uno, $X = ff^*$ para alguna $f \in \mathbb{K}^d$ y $\mathcal{A}^2_\Phi(X) = (|\langle f, \phi_\lambda\rangle|^2)_{\lambda\in\Lambda}$ por lo cual la notación $\mathcal{A}^2_\Phi$ tiene sentido.

Se puede probar (ver Lema 1.18) que Φ permite la recuperación de fase si y sólo si $\ker(\mathcal{A}^2_\Phi)$ no contiene matrices de rango 1 ó 2. Esto, junto con el hecho de que el conjunto $S = \{X \in \mathbb{H}_N : \text{ran}(X) \leqslant 2 \ \|X\| = 1\}$ es compacto (pues $\mathbb{H}_N$ es de dimensión finita) implica que

$$\min_{X\in S} \|\mathcal{A}^2_\Phi(X)\| = c > 0$$

donde $\|X\|$ es la norma en el sentido de operadores. Sin embargo, para cualquier norma sobre $\mathbb{H}_N$ sigue siendo cierto.

Dados $f, g \in \mathbb{K}^N$ consideramos el operador $ff^* - gg^*$ de rango 1 ó 2. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\|ff^* - gg^*\|^2 &\leqslant \frac{1}{c^2}\|\mathcal{A}^2_\Phi(ff^* - gg^*)\|^2 \\
&= \frac{1}{c^2}\|\mathcal{A}^2_\Phi(ff^*) - \mathcal{A}^2_\Phi(gg^*)\|^2 \\
&= \frac{1}{c^2}\sum_{\lambda\in\Lambda}(|\langle f, \phi_\lambda\rangle|^2 - |\langle g, \phi_\lambda\rangle|^2)^2.
\end{aligned}$$

Además, como $\|f\| = 1$ y $\|g\| \leqslant 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in\Lambda}(|\langle f,\phi_\lambda\rangle|^2 - |\langle g,\phi_\lambda\rangle|^2)^2 &= \sum_{\lambda\in\Lambda}(|\langle f,\phi_\lambda\rangle| - |\langle g,\phi_\lambda\rangle|)^2(|\langle f,\phi_\lambda\rangle| + |\langle g,\phi_\lambda\rangle|)^2\\
&\leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda}(|\langle f,\phi_\lambda\rangle| - |\langle g,\phi_\lambda\rangle|)^2(2\|\phi_\lambda\|)^2\\
&\leqslant (4\max_{\lambda\in\Lambda}\|\phi_\lambda\|^2)\sum_{\lambda\in\Lambda}(|\langle f,\phi_\lambda\rangle| - |\langle g,\phi_\lambda\rangle|)^2\\
&= (4\max_{\lambda\in\Lambda}\|\phi_\lambda\|^2)\|\mathcal{A}_\Phi f - \mathcal{A}_\Phi g\|^2
\end{aligned}$$

Usando nuevamente que $\|f\| = 1$ y $\|g\| \leqslant 1$ junto con el Lema 1.19 (ver más adelante), tenemos que el autovalor con mayor valor absoluto de $ff^* - gg^*$ es

$$\frac{1}{2}(\|f\|^2 - \|g\|^2 + ((\|f\|^2 + \|g\|^2)^2 - 4|\langle f,g\rangle|^2)^{\frac{1}{2}}).$$

Como la norma de un operador es mayor o igual que su radio espectral, que en este caso es el máximo de los valores valores absolutos de los autovalores, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|ff^* - gg^*\| &\geqslant \frac{1}{2}(\|f\|^2 - \|g\|^2 + ((\|f\|^2 + \|g\|^2)^2 - 4|\langle f,g\rangle|^2)^{\frac{1}{2}})\\
&\geqslant \frac{1}{2}((\|f\|^2 + \|g\|^2)^2 - 4|\langle f,g\rangle|^2)^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{2}(\|f\|^2 + \|g\|^2 - 2|\langle f,g\rangle|)^{\frac{1}{2}}(\|f\|^2 + \|g\|^2 + 2|\langle f,g\rangle|)^{\frac{1}{2}}\\
&\geqslant \frac{1}{2}\inf_{|c|=1}\|f - cg\|
\end{aligned}$$

donde en el último paso usamos que $(\|f\|^2+\|g\|^2-2|\langle f,g\rangle|)^{\frac{1}{2}} = \|f-cg\|$ con $c = \frac{\langle f,g\rangle}{|\langle f,g\rangle|}$ (si $\langle f,g\rangle = 0$, $\|f\|^2+\|g\|^2 = \|f-cg\|$ para todo $|c| = 1$) y que $(\|f\|^2+\|g\|^2+2|\langle f,g\rangle|) \geqslant 1$.

Juntando todo,

$$d(f,g) \leqslant 2\|ff^* - gg^*\| \leqslant \left(\frac{4}{c}\max_{\lambda\in\Lambda}\|\phi_\lambda\|\right)\|\mathcal{A}_\Phi f - \mathcal{A}_\Phi g\|.$$

$\square$

Lema 1.18. *[7, Lemma 9] $\mathcal{A}_\Phi$ es inyectivo si y sólo si el núcleo de $\mathcal{A}_\Phi^2$ no contiene matrices de rango 1 ó 2.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Si $\mathcal{A}_\Phi$ no es inyectivo, existen f y $g \in \mathbb{K}^d$ con $f \neq cg$ para todo $|c| = 1$ tales que $\mathcal{A}_\Phi f = \mathcal{A}_\Phi g$. Entonces $\mathcal{A}_\Phi^2(ff^*) = \mathcal{A}_\Phi^2(gg^*)$, por lo que $ff^* - gg^*$ pertenece al núcleo de $\mathcal{A}_\Phi^2$. Pero $ff^* - gg^*$ tiene rango 1 ó 2, lo cual contradice la hipótesis.

$\Rightarrow$) Supongamos primero que existe una matriz H de rango 1 en el núcleo de $\mathcal{A}_\Phi^2$. Entonces existe $f \in \mathbb{K}^d$, $f \neq 0$, tal que $H = ff^*$ y $\mathcal{A}_\Phi f = \mathcal{A}_\Phi^2(ff^*) = 0$. Como $f \neq 0$ resulta que $\mathcal{A}_\Phi$ no es inyectiva, contradiciendo la hipótesis. Si, en cambio, existe una matriz H de rango 2 en el núcleo de $\mathcal{A}_\Phi^2$, por el teorema de diagonalización para operadores autoadjuntos (ver [13, Cap. 2, Teo 5.1]) existen v_1,$v_2 \in \mathbb{K}^d$ ortonormales y $a_1 \geqslant a_2$ distintos de cero tales que $H = a_1 v_1 v_1^* + a_2 v_2 v_2^*$. Como H está en el núcleo de $\mathcal{A}_\Phi^2$ se tiene para todo $\lambda \in \Lambda$

$$0 = \langle H, \phi_\lambda \phi_\lambda^* \rangle_{HS} = \langle a_1 v_1 v_1^* + a_2 v_2 v_2^*, \phi_\lambda \phi_\lambda^* \rangle_{HS} = a_1 |\langle v_1, \phi_\lambda \rangle|^2 + a_2 |\langle v_2, \phi_\lambda \rangle|^2. \tag{1.5}$$

Consideremos $f := |a_1|^{1/2} v_1$ y $g := |a_2|^{1/2} v_2$. Por un lado, $f \neq cg$ dado que v_1 y v_2 son ortogonales. Por otro lado, nos gustaría ver que $\mathcal{A}_\Phi f = \mathcal{A}_\Phi g$. En efecto, si a_1 y a_2 tienen el mismo signo, reescribiendo (1.5) tenemos $|\langle f, \phi_\lambda \rangle|^2 + |\langle g, \phi_\lambda \rangle|^2 = 0$. Esto implica que $|\langle f, \phi_\lambda \rangle|^2 = |\langle g, \phi_\lambda \rangle|^2 = 0$ $\forall \lambda \in \Lambda$, con lo cual $\mathcal{A}_\Phi$ no es inyectivo. Si, por otro lado $a_1 \geqslant 0 \geqslant a_2$, $ff^* - gg^* = a_1 v_1 v_1^* + a_2 v_2 v_2^* = H$. Luego $\mathcal{A}_\Phi f = \mathcal{A}_\Phi g$. □

Lema 1.19. *Si f y $g \in \mathbb{K}^d$, los autovalores de $ff^* - gg^*$ son 0 y*

$$\frac{1}{2}(\|f\|^2 - \|g\|^2 \pm ((\|f\|^2 + \|g\|^2)^2 - 4|\langle f, g \rangle|^2)^{\frac{1}{2}}).$$

Demostración. Obeservemos en primer lugar que $\text{Ran}(ff^* - gg^*) \leqslant 2$, pues es la resta de dos operadores de rango 1. Además, f y g pertenecen a la imagen del operador. Para ver esto basta con tomar $h = g - \langle g, f \rangle \frac{f}{\|f\|^2}$, con lo cual resulta que $(ff^* - gg^*)h = \alpha g$ para algún $\alpha \in \mathbb{K}$. Del mismo modo se puede ver que $f \in \text{Im}(ff^* - gg^*)$. Por lo tanto, la imagen del operador tendrá rango 2 en el caso en que f y g sean linealmente independientes y rango 1 si no lo son.

Veamos cada uno de los casos por separado:

1. Si $Ran(ff^* - gg^*) = 2$, vamos a considerar la matriz del operador en la base $B = \{f, g, h_1, ..., h_{d-2}\}$ donde $\{h_1, ..., h_{d-2}\}$ es una base del núcleo de $ff^* - gg^*$. Tenemos que

$$[(ff^* - gg^*)f]_B = [\langle f, f \rangle f - \langle f, g \rangle g]_B = (\|f\|^2, -\langle f, g \rangle, 0, ..., 0)$$

y

$$[(ff^* - gg^* g]_B = [\langle g, f \rangle f - \langle g, g \rangle g]_B = (\overline{\langle f, g \rangle}, -\|g\|^2, 0, ..., 0).$$

Por lo tanto

$$[ff^* - gg^*]_B = \begin{pmatrix} \|f\|^2 & \overline{\langle f, g\rangle} & \cdots & 0 \\ -\langle f, g\rangle & -\|g\|^2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico será

$$\begin{aligned} p(x) &= (-x)^{d-2}\left((\|f\|^2 - x)(-\|g\|^2 - x) + |\langle f, g\rangle|^2\right) \\ &= (-x)^{d-2}(x^2 + (-\|f\|^2 + \|g\|^2)x + |\langle f, g\rangle|^2 - \|f\|^2\|g\|^2). \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que los autovalores serán $x = 0$ y las raíces del polinomio $x^2 + (-\|f\|^2 + \|g\|^2)x + |\langle f, g\rangle|^2 - \|f\|^2\|g\|^2$ que son

$$\frac{1}{2}\left(\|f\|^2 - \|g\|^2 \pm \left((-\|f\|^2 + \|g\|^2)^2 - 4(|\langle f, g\rangle|^2 - \|f\|^2\|g\|^2)\right)^{1/2}\right) = \\ \frac{1}{2}\left(\|f\|^2 - \|g\|^2 \pm ((\|f\|^2 + \|g\|^2)^2 - 4|\langle f, g\rangle|^2)^{1/2}\right)$$

como queríamos ver.

2. Si $Ran(ff^* - gg^*) = 1$, existe $\alpha \neq 0$ tal que $g = \alpha f$. Considero nuevamente la matriz del operador en la base $B = \{f, h_1, ..., h_{d-1}\}$ donde $\{h_1, ..., h_{d-1}\}$ es una base del núcleo de $ff^* - gg^*$. En este caso,

$$[(ff^* - gg^*)f]_B = [\langle f, f\rangle f - \langle f, \alpha f\rangle \alpha f]_B = [\|f\|^2(1 - |\alpha|^2)f]_B = \|f\|^2(1 - |\alpha|^2)$$

por lo que la matriz del operador queda

$$[ff^* - gg^*]_B = \begin{pmatrix} \|f\|^2(1 - |\alpha|^2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Veamos que esto coincide con el resultado que estamos buscando. En efecto, reemplazando g por αf obtenemos

$$\frac{1}{2}(\|f\|^2 - \|g\|^2 \pm ((\|f\|^2 + \|g\|^2)^2 - 4|\langle f, g\rangle|^2)^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(\|f\|^2(1 - |\alpha|^2) \pm \|f\|^2(1 - |\alpha|^2)),$$

que da 0 ó $\|f\|^2(1 - |\alpha|^2)$, como queríamos.

□

Para ver que no es posible obtener estabilidad en espacios de Banach de dimensión infinita, debemos introducir una versión más fuerte de la propiedad del complemento.

Definición 1.20. *Decimos que la familia $\Phi \subseteq \mathcal{B}$ cumple la σ-propiedad del complemento fuerte (σ-SCP por sus siglas en inglés) si existe $\sigma > 0$ tal que para cualquier subconjunto $S \subseteq \Lambda$ o bien Φ_S o bien Φ_{S^c} es un marco y además*

$$max\{A_{\Phi_S}, A_{\Phi_{S^c}}\} \geqslant \sigma.$$

Llamaremos σ_Φ al supremo de todas estas constantes.

Observación 1.21. *Sea $S \subseteq \Lambda$. Usando que Φ es un marco y $\mathcal{D}$ es sólido, la constante superior de marco B_Φ también sirve para Φ_S. Es decir*

$$\|C_{\Phi_S}\|_{\mathcal{D}} = \|C_\Phi \chi_S\|_{\mathcal{D}} \leqslant \|C_\Phi\|_{\mathcal{D}} \leqslant B_\Phi.$$

Esto nos dice que para que Φ_S sea un marco es condición necesaria y suficiente la existencia de la constante inferior A_{Φ_S}.

Teorema 1.22. *(Condición necesaria para la estabilidad [4]) Sea $\mathcal{B}$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y $\Phi \subseteq \mathcal{B}'$ un marco de Banach continuo. Si existe $\alpha_\Phi > 0$ entonces Φ cumple la σ-propiedad del complemento fuerte.*

Demostración. Supongamos que no vale la σ-SCP.

Sea $\sigma > 0$ y sea $S \subseteq \Lambda$ tal que o bien ni Φ_S ni Φ_{S^c} son marcos, o bien $max\{A_{\Phi_S}, A_{\Phi_{S^c}}\} < \sigma$.

Si ninguno de los dos es un marco sumado a la Observación (1.21) deben existir $f,g \in \mathcal{B}$ con $\|f\|_{\mathcal{B}} = 1 = \|g\|_{\mathcal{B}}$ tales que

$$\|C_{\Phi_S} f\|_{\mathcal{D}} < \sigma \qquad \text{y} \qquad \|C_{\Phi_{S^c}} g\|_{\mathcal{D}} < \sigma. \tag{1.6}$$

Si $\max\{A_{\Phi_S}, A_{\Phi_{S^c}}\} < \sigma$, queremos ver que también vale (1.6). Si no, tendríamos que para toda $f,g \in \mathcal{B}$ con $\|f\|_{\mathcal{B}} = 1 = \|g\|_{\mathcal{B}}$

$$\|C_{\Phi_S} f\|_{\mathcal{D}} \geqslant \sigma \qquad \text{y} \qquad \|C_{\Phi_{S^c}} g\|_{\mathcal{D}} \geqslant \sigma$$

pero entonces ambos subconjuntos forman marcos y sus constantes inferiores son mayores o iguales a σ lo cual contradice nuestras hipótesis.

En conclusión, si no vale la σ-SCP para cada $\sigma > 0$ existe $S \subseteq \Lambda$ y $f,g \in \mathcal{B}$ de norma uno tales que vale (1.6).

Sean $x := f + g$ e $y := f - g$, entonces

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_\Phi x - \mathcal{A}_\Phi y\|_\mathcal{D} &\leqslant \|(|\langle x, \phi_\lambda\rangle| - |\langle y, \phi_\lambda\rangle|)_{\lambda\in S}\|_\mathcal{D} + \|(|\langle x, \phi_\lambda\rangle| - |\langle y, \phi_\lambda\rangle|)_{\lambda\in S^c}\|_\mathcal{D}\\ &\leqslant \|C_{\Phi_S}(x+y)\|_\mathcal{D} + \|C_{\Phi_{S^c}}(x-y)\|_\mathcal{D}\\ &= 2\|C_{\Phi_S} f\|_\mathcal{D} + 2\|C_{\Phi_{S^c}} g\|_\mathcal{D}\\ &\leqslant 4\sigma\end{aligned}$$

donde usamos que $\mathcal{D}$ es sólido junto con la desigualdad triangular inversa.

Por definición de α_Φ tenemos que

$$\alpha_\Phi d(x,y) \leqslant \|\mathcal{A}_\Phi x - \mathcal{A}_\Phi y\|_\mathcal{D} \leqslant 4\sigma. \tag{1.7}$$

Llegado este momento, debemos separar en dos casos.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $d(x,y) = \min\{\|x+y\|_\mathcal{B}, \|x-y\|_\mathcal{B}\} = 2\min\{\|f\|_\mathcal{B}, \|g\|_\mathcal{B}\} = 2$ y por lo tanto

$$\alpha_\Phi \leqslant 2\sigma$$

lo cual es un absurdo dado que σ era arbitrario y $\alpha_\Phi > 0$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ aunque es un poco más complicado, es cierto también que $d(x,y)$ se encuentra lejos de cero cuando σ es arbitrariamente pequeño. Veamos primero algunas observaciones.

Por un lado para cualquier subconjunto $\Lambda' \subseteq \Lambda$, $\|C_{\Phi_{\Lambda'}}\|_\mathcal{D} = \|C_\Phi.\chi_{\Lambda'}\|_\mathcal{D} \leqslant \|C_\Phi\|_\mathcal{D}$. Además, como Φ es un marco

$$A_\Phi \leqslant \|C_\Phi f\|_\mathcal{D} \leqslant \|C_{\Phi_S} f\|_\mathcal{D} + \|C_{\Phi_{S^c}} f\|_\mathcal{D} \leqslant \sigma + \|C_{\Phi_{S^c}} f\|_\mathcal{D}$$

por lo cual $A_\Phi - \sigma \leqslant \|C_{\Phi_{S^c}} f\|_\mathcal{D}$. Razonando de la misma forma, $A_\Phi - \sigma \leqslant \|C_{\Phi_S} g\|_\mathcal{D}$.

Queremos encontrar una cota inferior para $\|x - ty\|$ con $|t| = 1$. Como Φ es un marco

$$\begin{aligned}B_\Phi\|x - ty\|_\mathcal{B} &\geqslant \|C_\Phi(x - ty)\|_\mathcal{D}\\ &\geqslant \frac{1}{2}\|C_{\Phi_S}(x-ty)\|_\mathcal{D} + \frac{1}{2}\|C_{\Phi_{S^c}}(x-ty)\|_\mathcal{D}\\ &= \frac{1}{2}\|C_{\Phi_S}((1-t)f + (1+t)g)\|_\mathcal{D} + \frac{1}{2}\|C_{\Phi_{S^c}}((1-t)f + (1+t)g)\|_\mathcal{D}.\end{aligned}$$

Usando desigualdad triangular inversa y las cotas obtenidas anteriormente,

$$\begin{aligned} B_\Phi\|x - ty\|_{\mathcal{B}} &\geqslant \frac{|1+t|}{2}\|C_{\Phi_S} g\|_{\mathcal{D}} - \frac{|1-t|}{2}\|C_{\Phi_S} f\|_{\mathcal{D}} \\ &+ \frac{|1-t|}{2}\|C_{\Phi_{S^c}} f\|_{\mathcal{D}} - \frac{|1+t|}{2}\|C_{\Phi_{S^c}} g\|_{\mathcal{D}} \\ &\geqslant \frac{|1+t|+|1-t|}{2}(A_\Phi - 2\sigma) > 0 \end{aligned}$$

si tomamos $\sigma < \frac{A_\Phi}{2}$.

Como $|1+t| + |1-t| \geqslant |(1+t) + (1-t)| = 2$, tenemos que $\forall t \in \mathbb{C}$ con $|t| = 1$

$$B_\Phi\|x - ty\|_{\mathcal{B}} \geqslant A_\Phi - 2\sigma,$$

pero entonces

$$d(x, y) = \inf_{|t|=1} \|x - ty\|_{\mathcal{B}} \geqslant \frac{A_\Phi - 2\sigma}{B_\Phi}.$$

Reemplazando en (1.7) y despejando,

$$\alpha_\Phi \leqslant \frac{4\sigma B_\Phi}{A_\Phi - 2\sigma}$$

que nuevamente es un absurdo dado que $\alpha_\Phi > 0$ y σ es arbitrariamente pequeño.

□

En el caso real, del mismo modo que la propiedad del complemento era condición suficiente para la inyectividad, resulta que la σ- SCP es condición suficiente para la estabilidad de $\mathcal{A}_\Phi$.

Lema 1.23. *Sea $\mathcal{B}$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ y $\Phi \subseteq \mathcal{B}'$ un marco continuo. Si existe $\sigma_\Phi > 0$ entonces existe la constante inferior de (1.2), $\alpha_\Phi > 0$.*

Demostración. Razonemos por el absurdo. Si no existe tal α_Φ, entonces para todo $\alpha > 0$ existen f y $g \in \mathcal{B}$ tales que $\alpha d(f, g) > \|\mathcal{A}_\Phi g - \mathcal{A}_\Phi g\|_{\mathcal{D}}$.

Sea $S := \{\lambda \in \Lambda : sg(\langle f, \phi_\lambda\rangle) = -sg(\langle g, \phi_\lambda\rangle)\}$, $u := f + g$ y $v := f - g$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_{\Phi_S} u\|_{\mathcal{D}} &= \|(|\langle f, \phi_\lambda\rangle + \langle g, \phi_\lambda\rangle|)_{\lambda\in S}\|_{\mathcal{D}} \\ &= \|(|\langle f, \phi_\lambda\rangle| - |\langle g, \phi_\lambda\rangle|)_{\lambda\in S}\|_{\mathcal{D}} \\ &\leqslant \|(|\langle f, \phi_\lambda\rangle| - |\langle g, \phi_\lambda\rangle|)_{\lambda\in \Lambda}\|_{\mathcal{D}} \\ &= \|\mathcal{A}_\Phi f - \mathcal{A}_\Phi g\|_{\mathcal{D}} \\ &< \alpha d(f, g) = \alpha \min\{\|f + g\|_{\mathcal{B}}, \|f - g\|_{\mathcal{B}}\} \\ &\leqslant \alpha\|u\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Razonando de la misma forma con $\Lambda \backslash S$ y v, obtenemos que

$$0 < \sigma_\Phi \leqslant \max\{A_{\Phi_S}, A_{\Phi_{\Lambda \backslash S}}\} \leqslant \alpha.$$

Como α es arbitrario y $\sigma_\Phi > 0$, esto es un absurdo que proviene de suponer que no existe $\alpha_\Phi > 0$.

□

Estos resultados implican que la σ-propiedad del complemento fuerte es necesaria para la estabilidad que estamos buscando. Más aún, es suficiente si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En particular, en dimensión finita siempre se satisface. Sin embargo, en dimensión infinita *ningún* marco continuo va a cumplirla y por lo tanto, nunca es estable la recuperación de fase en estos casos. Para ver esto primero probaremos un resultado de [4] que dice que si el conjunto de índices es compacto, no existen marcos de Banach continuos en dimensión infinita.

Teorema 1.24. *Supongamos que $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach de dimensión infinita y Λ un conjunto de índices compacto. Si $\Phi := \{\phi_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{B}'$ es una familia de operadores y la aplicación $\lambda \mapsto \phi_\lambda$ es continua entonces $\forall \epsilon > 0$ existe $f \in \mathcal{B}$ tal que*

$$\|\mathcal{C}_\Phi f\|_\mathcal{D} < \epsilon \|f\|_\mathcal{B}.$$

Es decir, no satisface la desigualdad inferior para ser un marco.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como la aplicación $\lambda \mapsto \phi_\lambda$ es continua, para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un entorno abierto U_λ tal que

$$\|\phi_\lambda - \phi_\mu\|_{\mathcal{B}'} < \frac{\epsilon}{\|\chi_\Lambda\|_\mathcal{D}} \qquad \forall \mu \in U_\lambda.$$

Como Λ es compacto, el cubrimiento $(U_\lambda)_\lambda$ de Λ admite un subcubrimiento finito $\{U_{\lambda_1}, ..., U_{\lambda_N}\}$. Considero el conjunto de abiertos disjuntos dado por $U_1 := U_{\lambda_1}$, $U_k := U_{\lambda_k} \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} U_j$ para $k = 2, ...N$.

Por desigualdad triangular tenemos

$$|\langle f, \phi_\lambda \rangle| \leqslant |\langle f, \phi_{\lambda_j} \rangle| + |\langle f, \phi_\lambda - \phi_{\lambda_j} \rangle|$$

Para todo $j = 1, ..., N$. Multiplicando por la característica de U_{λ_j} y sumando sobre

j obtenemos:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}_\phi f)_\lambda &= \sum_{j=1}^{N} |\langle f, \phi_\lambda\rangle| \chi_{U_j}(\lambda)\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{N} |\langle f, \phi_{\lambda_j}\rangle| \chi_{U_j}(\lambda) + \sum_{j=1}^{N} |\langle f, \phi_\lambda - \phi_{\lambda_j}\rangle| \chi_{U_j}(\lambda)\\ &< \sum_{j=1}^{N} |\langle f, \phi_{\lambda_j}\rangle| \chi_{U_j}(\lambda) + \frac{\epsilon \|f\|_{\mathcal{D}}}{\|\chi_\Lambda\|_{\mathcal{D}}} \chi_\Lambda(\lambda).\end{aligned}$$

Como $\mathcal{D}$ es sólido, para toda $f \in \mathcal{B} \backslash \{0\}$ se tiene:

$$\|C_\Phi f\| = \|\mathcal{A}_\Phi f\| < \sum_{j=1}^{N} |\langle f, \phi_{\lambda_j}\rangle| \|\chi_{U_j}\|_{\mathcal{D}} + \epsilon \|f\|_{\mathcal{D}}.$$

Como $\mathcal{B}$ tiene dimensión infinita, debe existir una $f_\epsilon \in \mathcal{B}$ no nula tal que $\langle f_\epsilon, \phi_{\lambda_j}\rangle = 0$ para todo $j = 1, ..., N$ y por lo tanto $\|C_\Phi f_\epsilon\| < \epsilon \|f_\epsilon\|$. □

Teorema 1.25. *Si $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach de dimensión infinita sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $\Phi \subseteq \mathcal{B}'$ es un marco de Banach continuo, entonces Φ no cumple la propiedad del complemento fuerte.*

Demostración. Queremos ver que para todo $\epsilon > 0$ existe un subconjunto $S \subseteq \Lambda$ y dos elementos $f, g \in \mathcal{B}$ tales que $\|C_{\Phi_S} f\|_{\mathcal{D}} < \epsilon \|f\|_{\mathcal{B}}$ y $\|C_{\Phi_{\Lambda \backslash S}} g\|_{\mathcal{D}} < \epsilon \|g\|_{\mathcal{B}}$.

Sea $f \in \mathcal{B}$ cualquiera, con $\|f\|_{\mathcal{B}} = 1$. Como los elementos de soporte compacto son densos en $\mathcal{D}$, puedo tomar una sucesión de compactos encastrados crecientes de modo que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Lambda$ tales que

$$\|C_\Phi f - C_\Phi f . \chi_{K_n}\|_{\mathcal{D}} \longrightarrow_{n \to \infty} 0$$

Considero N suficientemente grande de modo que $\|C_\Phi f - C_\Phi f . \chi_{K_N}\|_{\mathcal{D}} < \epsilon$. Tomando $S = \Lambda \backslash K_N$, obtenemos $\|C_{\Phi_S} f\|_{\mathcal{D}} < \epsilon \|f\|_{\mathcal{B}}$. Nos resta mirar el complemento de S que resulta ser el compacto K_N por lo que el teorema anterior nos asegura que existe $g \in \mathcal{B}$ tal que $\|C_{\Phi_{\Lambda \backslash S}} g\|_{\mathcal{D}} < \epsilon \|g\|_{\mathcal{B}}$. □

Corolario 1.26. *Sea $\mathcal{B}$ un espacio de Banach de dimensión infinita y $\Phi \subseteq \mathcal{B}'$ un marco de Banach continuo. Entonces Φ no permite recuperar la fase de forma estable. Es decir, para todo $\epsilon > 0$ existen $f, g \in \mathcal{B}$ tales que $\|\mathcal{A}_\Phi f - \mathcal{A}_\Phi g\|_{\mathcal{D}} < \epsilon$ pero $d(f, g) \geqslant 1$.*

Capítulo 2

Recuperación de fase a través de la transformada de Fourier

Durante este capítulo nos dedicaremos a estudiar la recuperación de fase para mediciones de Fourier en $\mathbb{C}^N$ y en $L^2(\mathbb{R}^d)$. El objetivo principal será caracterizar las ambigüedades que puedan aparecer. En el caso de dimensión finita, la inyectividad nos asegura también la estabilidad a través del Teorema 1.17.

2.1 Recuperación de fase en espacios de dimensión finita

En lo que sigue abordaremos el problema de recuperar una señal a partir de su transformada de Fourier sin fase. Para ello vamos a considerar señales discretas multilineales. Es decir, dado $n = (n_1, ..., n_d) \in \mathbb{N}^d$ una *señal discreta* es una función a valores complejos definida en

$$J_n := \{0, ..., n_1 - 1\} \times ... \times \{0, ..., n_d - 1\}.$$

La *transformada discreta de Fourier* (DFT por sus siglas en inglés) de una señal $x = (x_j)_{j \in J_n}$ la definimos como

$$\hat{x}(\omega) := \sum_{j \in J_n} x_j e^{-2\pi i j.\omega/n} \qquad \omega \in \mathbb{R}^d,$$

donde $j.\omega$ es el producto interno usual en $\mathbb{R}^d$ y $\omega/n := (\omega_1/n_1, ..., \omega_d/n_d)$.
El objetivo entonces será recuperar $x \in \mathbb{C}^{J_n}$ conociendo $|\hat{x}|$.

Observación 2.1. *Para $x \in \mathbb{C}^{J_n}$, $|\hat{x}|^2$ resulta ser un polinomio trigonométrico por lo cual está determinado por sus valores en algún subconjunto finito $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Por ejemplo si $d = 1$ sabemos que un polinomio trigonométrico de grado N tiene a lo sumo $2N$ raíces en cualquier intervalo de longitud 2π. El problema de recuperar x a través de $|\hat{x}(\omega)|$ para todo $\omega \in \mathbb{R}^d$ es equivalente a hacerlo a través de $|\hat{x}(\omega)|$ para todo $\omega \in \Omega$.*

Antes de caracterizar las ambigüedades, necesitamos definir la reflexión y traslación de una señal $x \in \mathbb{C}^{J_n}$. Definimos el *operador de reflexión* R en $\mathbb{C}^{J_n}$ como

$$(Rx)_j = x_{-j} \quad (\text{mód n}) \qquad \forall j \in J_n$$

y el *operador de traslación* T_τ con $\tau \in \mathbb{Z}^d$ como

$$(T_\tau x)_j = x_{j-\tau} \quad (\text{mód n}) \qquad \forall j \in J_n$$

donde el módulo debe tomarse coordenada a coordenada. Por último, para $z \in \mathbb{C}^d$ y $j \in \mathbb{Z}^d$ diremos $z^{-1} := (z_1^{-1}, ..., z_d^{-1})$ y $z^j := z_1^{j_1} ... z_d^{j_d}$.

Proposición 2.2. Sea $x \in \mathbb{C}^{J_n}$. Las siguientes elecciones de y nos dan las mismas magnitudes para la transformada de Fourier, i.e. $|\hat{x}| = |\hat{y}|$:

i. $y = cx$ con $|c| = 1$,

ii. $y = T_\tau x$ con $\tau \in \mathbb{Z}^d$,

iii. $y = \overline{Rx}$.

Demostración.

i. Si $y = cx$ con $|c| = 1$,

$$|\hat{y}(\omega)| = |\sum_{j \in J_n} c x_j e^{-2\pi i j \cdot \omega / n}| = |c||\hat{x}(\omega)| = |\hat{x}(\omega)|.$$

ii. Si $y = T_\tau x$,

$$|\hat{y}(\omega)| = |\sum_{j \in J_n} x_{j-\tau} e^{-2\pi i j \cdot \omega / n}| = |e^{-2\pi i \tau \cdot \omega / n}|| \sum_{j \in J_n} x_{j-\tau} e^{-2\pi i (j-\tau) \cdot \omega / n}| = |\hat{x}(\omega)|.$$

iii. Si $y = \overline{Rx}$,

$$\begin{aligned} |\hat{y}(\omega)| &= |\sum_{j \in J_n} \overline{x_{-j}} e^{-2\pi i j \cdot \omega / n}| = |\overline{\sum_{j \in J_n} x_{-j} e^{2\pi i j \cdot \omega / n}}| \\ &= |\overline{\sum_{j \in J_n} x_j e^{-2\pi i j \cdot \omega / n}}| = |\sum_{j \in J_n} x_j e^{-2\pi i j \cdot \omega / n}| = |\hat{x}(\omega)|. \end{aligned}$$

□

A este tipo de ambigüedades, así como a composiciones de ellas, las llamaremos *ambigüedades triviales*. Para mayor comodidad, las identificaremos en $\mathbb{C}^{J_n}$ bajo la relación de equivalencia

$$x \sim y \iff y = cT_\tau \overline{Rx} \qquad \text{donde} \quad \tau \in \mathbb{Z}^d, \text{ y } |c| = 1.$$

En lo que resta de esta sección intentaremos caracterizar las ambigüedades no triviales y para ello necesitaremos definir y estudiar la transformada Z.

Definición 2.3. *Sea $x \in \mathbb{C}^{J_n}$. Definimos la transformada Z de x como*

$$X(z) := Z(x)(z) := \sum_{j \in J_n} x_j z^j \qquad \forall z \in \mathbb{C}^d.$$

La unicidad de la recuperación de fase en este caso estará estrechamente relacionada con la factorización de su Z-transformada en $\mathbb{C}^d$.

En lo que sigue $p(z) = \sum_j c_j z^j$ denotará un polinomio en $\mathbb{C}^d$. Definimos el grado de p como el grado en cada variable, es decir $deg(p) \in \mathbb{N}_0^d$ y

$$deg(p)_k = max\{j_k : c_j \neq 0\} \qquad \text{para} \quad k = 1, ..., d.$$

Diremos que p es *reducible* si existen polinomios no constantes q y r tales que $p = q.r$, en caso contrario p se dice *irreducible*. Más adelante necesitaremos considerar la aplicación $z \mapsto \overline{p(\overline{z}^{-1})}$ que no tiene por qué ser un polinomio. Sin embargo, podemos quitarle sus singularidades multiplicando por un monomio apropiado. Consideramos entonces

$$p^*(z) = \overline{p(\overline{z}^{-1})}.z^{deg(p)} \tag{2.1}$$

que es nuevamente un polinomio. Por último, definimos $\nu(p) \in \mathbb{N}_0^d$ como el mayor exponente, tomado coordenada a coordenada, para el cual $z^{\nu(p)}$ divide a p. Esto nos permite descomponer p de manera única como

$$p(z) = z^{\nu(p)} p_0(z). \tag{2.2}$$

Lema 2.4. *Sea p un polinomio no nulo y consideramos p^* y p_0 como en (2.1) y (2.2) respectivamente. Entonces*

1. $\nu(p^*) = 0$

2. p_0 es irreducible si y sólo si p^* lo es.

Demostración.

1. Sea $p(z) = \sum_j c_j z^j$ y supongamos que existe $\nu \in \mathbb{N}_0^d$, $\nu \neq 0$, tal que z^ν es un divisor de p^*. Esto quiere decir que

$$p^*(z).z^{-\nu} = \overline{p(\overline{z}^{-1})}.z^{deg(p)}.z^{-\nu} = \sum_j \overline{c_j} z^{-j+deg(p)-\nu}$$

es un polinomio. Sea i tal que $\nu_i \geqslant 1$, por definición de grado existe un subíndice $k \in J_n$ tal que $c_k \neq 0$ y $k_i = deg(p)_i$. Pero entonces $p^*(z).z^{-\nu}$ contiene al sumando $c_k z^{-k+deg(p)-\nu}$ que tiene exponente negativo en la $i-$ésima coordenada. Esto contradice el hecho de que z^ν sea un divisor de p^*.

2. Supongamos que p_0 es reducible. Es decir que existen p_1 y p_2 polinomios no constantes tales que $p_0 = p_1 p_2$. Para $i = 1, 2$ consideramos $p_i^*(z) := \overline{p_i(\overline{z}^{-1})} z^{deg(p_i)}$. Resulta entonces

$$p^*(z) = z^{deg(p)}\overline{p(\overline{z}^{-1})} = z^{deg(p)-\nu(p)}.\overline{p_1(\overline{z}^{-1})}.\overline{p_2(\overline{z}^{-1})} = p_1^*(z)p_2^*(z)$$

dado que $deg(p) = \nu(p) + deg(p_1) + deg(p_2)$. Como $\nu(p)$ es maximal, ninguno de los dos factores puede ser constante. Por lo tanto p^* es reducible.

Supongamos ahora que puedo descomponer $p^* = p_1^*.p_2^*$ donde p_1^* y p_2^* son polinomios no constantes. Con los mismos argumentos que en el paso anterior

$$p_0(z) = z^{deg(p)-\nu(p)}\overline{p_1^*(\overline{z}^{-1})}.\overline{p_2^*(\overline{z}^{-1})}.$$

Además $deg(p_1^*) + deg(p_2^*) = deg(p^*) \leqslant deg(p) - \nu(p)$, pues en otro caso el término de la derecha no resultaría un polinomio. Por otro lado, los factores

$$z^{deg(p_i^*)}.\overline{p_i^*(\overline{z}^{-1})} \qquad i = 1, 2$$

son polinomios no constantes. Si lo fueran, podríamos hallar un monomio que divida a p^* pero esto contradice el hecho de que $\nu(p^*) = 0$. Por lo tanto, p_0 resulta reducible.

□

Con todo esto, tenemos la siguiente caracterización:

Teorema 2.5. *Sean* $x,y \in \mathbb{C}^{J_n}$ *y* X *e* Y *sus respectivas transformadas* Z*. Entonces* $|\hat{x}| = |\hat{y}|$ *si y sólo si existe una factorización* $Y = Y_1.Y_2$*, una constante* γ *de módulo* 1 *y* $\tau \in \mathbb{Z}^d$ *tales que*

$$X(z) = \gamma z^{\tau} Y_1(z)\overline{Y_2(\overline{z}^{-1})}.$$

Demostración. Supongamos primero que $|\hat{x}| = |\hat{y}|$. Por definición $X(z) = \sum_{j \in J_n} x_j z^j$ y usando la notación $e^{-2\pi i\omega/n} = (e^{-2\pi i\omega_1/n_1}, ..., e^{-2\pi i\omega_d/n_d})$ para $\omega \in \mathbb{R}^d$ se tiene que

$$X(e^{-2\pi i\omega/n}) = \hat{x}(\omega).$$

Elevando el módulo de la transformada de Fourier al cuadrado,

$$|\hat{x}(\omega)|^2 = X(e^{-2\pi i\omega/n})\overline{X(e^{-2\pi i\omega/n})} = X(e^{-2\pi i\omega/n})\overline{X(\overline{e^{-2\pi i\omega/n}}^{-1})}$$

dado que $|e^{-2\pi i\omega_j/n_j}| = 1$ para todo j y el conjugado y el inverso se toman coordenada a coordenada. Como esta identidad vale sobre todo S^1 y además $|\hat{x}| = |\hat{y}|$, extendiendo analíticamente tenemos que

$$X(z)\overline{X(\overline{z}^{-1})} = Y(z)\overline{Y(\overline{z}^{-1})} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^d \backslash \{0\}. \tag{2.3}$$

Consideremos la factorización de X e Y en polinomios irreducibles:

$$X(z) = z^{\nu(X)} \prod_{i=1}^{L} p_i(z) \qquad \text{e} \qquad Y(z) = z^{\nu(Y)} \prod_{i=1}^{M} q_i(z).$$

Multiplicando ambos lados de (2.3) por z^n y reemplazando sus respectivas factorizaciones obtenemos la siguiente igualdad

$$z^{n-\sum_{i=1}^{L} deg(p_i)} \prod_{i=1}^{L} p_i(z) \prod_{i=1}^{L} z^{deg(p_i)}\overline{p_i(\overline{z}^{-1})} = z^{n-\sum_{i=1}^{M} deg(q_i)} \prod_{i=1}^{M} q_i(z) \prod_{i=1}^{M} z^{deg(q_i)}\overline{q_i(\overline{z}^{-1})}.$$

Como p_i es irreducible tenemos que $p_i^* = z^{deg(p_i)}\overline{p_i(\overline{z}^{-1})}$ también lo es y además $\nu(p_i^*) = 0$. Razonando de la misma forma obtenemos los mismos resultados para q_i y q_i^*.

Por unicidad de la factorización debe ser $L = M$ y

$$\prod_{i=1}^{L} p_i(z) \prod_{i=1}^{L} z^{deg(p_i)}\overline{p_i(\overline{z}^{-1})} = \prod_{i=1}^{M} q_i(z) \prod_{i=1}^{M} z^{deg(q_i)}\overline{q_i(\overline{z}^{-1})}. \tag{2.4}$$

Sea I el subconjunto maximal de $\{1, ..., L\}$ tal que $\prod_{i \in I} p_i$ divide a $\prod_{i=1}^{L} q_i$. Reordenando los índices podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\prod_{i \leqslant l} p_i$ divide a $\prod_{i\leqslant l} q_i$ para cierto $l \leqslant L$. Como ambos son producto de polinomios irreducibles con la misma cantidad de factores, existe $a \in \mathbb{C}$ no nula tal que

$$\prod_{i\leqslant l} p_i = a \prod_{i\leqslant l} q_i$$

y en consecuencia

$$\prod_{i\leqslant l} p_i^* = \overline{a} \prod_{i\leqslant l} q_i^*.$$

Reemplazando en la expresión (2.4) y cancelando, obtenemos

$$\prod_{i>l} p_i \prod_{i>l} p_i^* = b \prod_{i>l} q_i \prod_{i>} q_i^*$$

para alguna constante $b \neq 0$. Por la maximalidad de I necesariamente $\prod_{i>l} p_i$ divide a $\prod_{i>l} q_i^*$ y $\prod_{i>l} p_i^*$ divide a $\prod_{i>l} q_i$. Entonces existe $c \neq 0$ tal que $\prod_{i>l} p_i^* = c \prod_{i>l} q_i$.

Con todo esto obtenemos que

$$X(z) = z^{\nu(X)} \prod_{i<l} p_i(z) \prod_{i>l} p_i(z) = z^{\nu(X)} \left(a \prod_{i<l} q_i(z) \right) \left(c \prod_{i>l} q_i^*(z) \right).$$

Evaluando en $z = 1$ tenemos que

$$|X(1)| = |ac| \prod_{i<l} |q_i(1)| \prod_{i>l} |q_i^*(1)| = |ac| \prod_{i<l} |q_i(1)| \prod_{i>l} |q_i(1)| = |ac|.|Y(1)|$$

y por lo tanto $|ac| = 1$.

Tomando $Y_1(z) := \prod_{i<l} q_i(z)$, $Y_2(z) := \prod_{i>l} q_i(z)$, $\gamma := ac$ y $\tau = \nu(X) \in \mathbb{Z}^d$ podemos concluir que

$$X(z) = \gamma z^\tau Y_1(z) \overline{Y_2(\overline{z}^{-1})}.$$

Si por otro lado, asumimos que tenemos la factorización del enunciado y evaluamos en $\omega \in \mathbb{R}^d$ obtenemos

$$\begin{aligned} |\hat{x}(\omega)|^2 &= X(e^{-2\pi i\omega/n}) \overline{X(e^{-2\pi i\omega/n})} \\ &= Y_1(e^{-2\pi i\omega/n}) \overline{Y_1(e^{-2\pi i\omega/n})} Y_2(e^{-2\pi i\omega/n}) \overline{Y_2(e^{-2\pi i\omega/n})} = |\hat{y}(\omega)|^2. \end{aligned}$$

□

Un corolario inmediato de este teorema es que si X es irreducible entonces $\hat{x}$ solo puede tener ambigüedades triviales.

Corolario 2.6. *Sean x e $y \in \mathbb{C}^{J_n}$. Si $|\hat{x}| = |\hat{y}|$ y además X es irreducible entonces la ambigüedad es trivial, es decir $y = cT_\tau \overline{Rx}$ para $\tau \in \mathbb{Z}^d$ y $|c| = 1$.*

Demostración. Como $|\hat{x}| = |\hat{y}|$ por el Teorema 2.5 existen $\tau \in \mathbb{Z}^d$ y $|\gamma| = 1$ tales que

$$X(z) = \gamma z^\tau Y_1(z)\overline{Y_2(\overline{z}^{-1})}.$$

Como X es irreducible, debe ser Y_1 constante y $\tau = deg(Y_2)$ por lo que nos queda

$$X(z) = \gamma z^{deg(Y_2)}\overline{Y_2(\overline{z}^{-1})}.$$

Por el Lema 2.4 Y_2 es irreducible y por lo tanto Y lo es. Si escribimos $Y(z) = \sum_{j \in \mathbb{C}^{J_n}} y_j z^j$ tenemos

$$X(z) = \gamma z^{deg(Y_2)} \sum_{j \in \mathbb{C}^{J_n}} \overline{y_j} z^{-j} = \sum_{j \in \mathbb{C}^{J_n}} \gamma \overline{y_j} z^{deg(Y_2)-j}.$$

Si cambiamos de índices módulo n, resulta que $x = (\gamma \overline{y}_{deg(Y_2)-j})_{j \in \mathbb{C}^{J_n}} = \gamma \overline{R}(T_{deg(Y_2)} y)$. $\square$

El Teorema 2.5 también nos permite obtener una cota superior para la cantidad de posibles ambigüedades *no triviales* de $x \in \mathbb{C}^{J_n}$, número al que llamaremos

$$\mathcal{N}(x) := \#\{y \in \mathbb{C}^{J_n} / |\hat{y}| = |\hat{x}|\}.$$

Corolario 2.7. *Sea $x \in \mathbb{C}^{J_n}$ y X su transformada Z. Entonces $\mathcal{N}(x) \leqslant 2^{L-1}$ donde L es la cantidad de factores no triviales de X.*

Demostración. Supongamos que X se factoriza como

$$X = X_1 \ldots X_L.$$

Para contar la cantidad de ambigüedades no triviales debemos contar todas las posibles maneras de escribir $Y = Y_1 \cdot Y_2$ donde Y_i están formados por factores disjuntos de X. Esto nos da 2^L posibilidades distintas. Sin embargo, considerar $Y_1 = \prod_{J \subset \{1,\ldots,L\}} X_j$ e $Y_2 = \prod_{\{1,\ldots,L\} \setminus J} X_j$ o viceversa nos da el mismo polinomio Y. Por lo tanto, tendremos a lo sumo 2^{L-1} ambigüedades no triviales. $\square$

En el caso en que $d = 1$ la transformada Z de una señal x es un polinomio de una variable de grado $k \leqslant n$. Por el teorema fundamental del álgebra, X tiene k raíces y se puede expesar como el producto de k factores lineales. La situación en dimensiones mayores es abismalmente distinta.

Teorema 2.8. *Sea $\mathbb{C}[x_1, ..., x_d]_{\leqslant k}$ el conjunto de los polinomios en $d > 1$ variables de grado a lo sumo k, donde aquí el grado de un polinomio está dado por la suma de los grados en cada variable. El conjunto de los polinomios reducibles dentro de $\mathbb{C}[x_1, ..., x_d]_{\leqslant k}$ tiene medida cero.*

Demostración. Sea $S := \{P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_d]_{\leqslant k} : \text{P es reducible}\}$ y consideremos la aplicación bilineal

$$\Phi_a : \mathbb{C}[x_1, ..., x_d]_{\leqslant a} \times \mathbb{C}[x_1, ..., x_d]_{\leqslant k-a} \to \mathbb{C}[x_1, ..., x_d]_{\leqslant k}$$

$$(Q, R) \mapsto Q.R.$$

Podemos escribir $S = \bigcup_{a=1}^{k-1} \mathrm{Im}(\Phi_a)$ y por lo tanto, basta ver que $\mathrm{Im}(\Phi_a)$ mide 0 para todo a. Para ello vamos a usar un argumento de dimensión. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} dim(Im(\Phi_a)) \leqslant dim(\mathbb{C}[x_1, ..., x_d]_{\leqslant a} \times \mathbb{C}[x_1, ...x_d]_{\leqslant k-a}) \\ dim(\mathbb{C}[x_1, ..., x_d]_{\leqslant a}) + dim(\mathbb{C}[x_1, ..., x_d]_{\leqslant k-a}) \end{aligned}$$

y nos gustaría ver que esto es menor estricto que la dimensión de $\mathbb{C}[x_1, ..., x_d]_{\leqslant k}$. En efecto, $\dim((\mathbb{C}[x_1, ..., x_d]_{\leqslant k})$=$\dim((\mathbb{C}_H[x_0, x_1, ..., x_d]_k)$ donde $\mathbb{C}_H[x_0, x_1, ..., x_d]_k$ es el conjunto de polinomios homogéneos en $d + 1$ variables de grado k. La dimensión de estos espacios es más sencilla de calcular dado que debemos contar todos los posibles monomios de grado k que podemos armar don $d + 1$ variables y eso es el combinatorio $\binom{d+k}{k}$.

Con todo esto,

$$dim(Im(\Phi_a)) \leqslant \binom{d+a}{a} + \binom{d+(k-a)}{k-a} < \binom{d+k}{a} + \binom{d+k-a}{k-a} = \binom{d+k}{k}.$$

Por lo tanto $\dim(\mathrm{Im}(\Phi_a))$<$\dim(\mathbb{C}[x_1, ..., x_d]_{\leqslant k})$ y así, la medida de $\mathrm{Im}(\Phi_a)$ es 0. □

Corolario 2.9. *Si $d > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}^d$ fijo el conjunto $\{x \in \mathbb{C}^{J_n} : \mathcal{N}(x) > 1\}$ tiene medida* 0.

Si $d = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ fijo el conjunto $\{x \in \mathbb{C}^n : \mathcal{N}(x) < 2^{n-1}\}$ tiene medida 0.

Demostración. Si $d > 1$ y $n \in \mathbb{N}^d$ fijo, el conjunto

$$\{x \in \mathbb{C}^{J_n} : \mathcal{N}(x) > 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{C}^{J_n} : X \text{es reducible}\}$$

que mide cero por el Teorema 2.8.

Si, por otro lado, $d = 1$ y $n \in \mathbb{N}$ está fijo podemos escribir

$$\{x \in \mathbb{C}^n : \mathcal{N}(x) < 2^{n-1}\} = \{x \in \mathbb{C}^n : x_n = 0\} \cup \{x \in \mathbb{C}^n : X(z) \text{ tiene raíces múltiples}\}$$

ya que de otro modo la transformada Z de x sería un polinomio de grado n con n factores lineales distintos que nos darían 2^{n-1} posibles factorizaciones distintas. El conjunto $\{x_n = 0\}$ tiene medida de Lebesgue cero por ser un subespacio de dimensión $n-1$. Por otro lado, dados $p,q \in \mathbb{C}[x]$ definimos la resultante entre p y q como

$$Res(p,q) = \prod_{x:p(x)=0} \prod_{y:q(y)=0} (x-y).$$

Con esta definición, podemos reescribir el conjunto de polinomios con raíces múltiples como

$$\{x \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Res}(X, X') = 0\}.$$

Este conjunto tiene medida de Lebesgue cero por ser un cerrado de la topología Zariski, i.e., es una ecuación polinomial igualada a cero. Por lo tanto, $\{x \in \mathbb{C}^n : \mathcal{N}(x) < 2^{n-1}\}$ tiene medida de Lebesgue cero, como queríamos ver. □

2.2 Recuperación de fase en espacios de dimensión infinita

El objetivo de esta sección es caracterizar, de forma análoga al caso de dimensión finita, todas las posibles ambigüedades que pueden aparecer al intentar recuperar la fase de una función $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ de soporte compacto, conociendo el módulo de su transformada de Fourier.

Definición 2.10. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La transformada de Fourier $\hat{f}$ de f la definimos como*

$$\mathcal{F}f(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ la extendemos por continuidad, usando la densidad de $L^1 \cap L^2$ en L^2.

Comenzaremos por identificar las ambigüedades triviales. Del mismo modo que en el capítulo anterior, definimos el operador de traslación como $T_\tau f(x) = f(x-\tau)$ para $\tau \in \mathbb{R}^d$ y el operador de reflexión R como $Rf(x) = f(-x)$.

Proposición 2.11. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Las siguientes elecciones de $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ nos dan las mismas magnitudes en sus transformadas de Fourier, i.e., $|\hat{g}| = |\hat{f}|$:

1. $g = cf$ para $|c| = 1$,
2. $g = T_\tau f$ para $\tau \in \mathbb{R}^d$,
3. $g = \overline{Rf}$.

La demostración es análoga al caso de dimensión finita. Nuevamente, estas ambigüedades las consideraremos *ambigüedades triviales.*

Es estandar considerar funciones de soporte compacto. En el contexto de las aplicaciones a procesamiento de imágenes esto sólo requiere que el objeto de estudio sea de extensión finita. La gran ventaja de esta suposición es que la transformada de Fourier de funciones de soporte compacto se extiende de manera analítica a todo $\mathbb{C}^d$ y, por lo tanto, se puede utilizar toda la teoría del análisis complejo y de las funciones enteras en particular. Por el teorema de Paley-Wiener [28] para funciones de una variable el recíproco es cierto también, i.e., la restricción de ciertas funciones enteras al eje real resulta ser la transformada de Fourier de alguna función de L^2 de soporte compacto. La extensión de este resultado a más dimensiones se debe a Plancherel y Pólya [31].

Teorema 2.12. *(Paley-Wiener). Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ una función de soporte compacto. Entonces su transformada de Fourier-Laplace dada por*

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i z\cdot x} dx \qquad\qquad \forall z \in \mathbb{C}^d,$$

es una función entera de tipo exponencial, i.e., existen $A, B > 0$ tal que

$$|F(z)| \leqslant A e^{B|z|} \qquad\qquad \forall z \in \mathbb{C}^d.$$

Reciprocamente, supongamos que $F : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ es una función entera de tipo exponencial y su restricción al plano real $\mathbb{R}^d$ está en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces F es la transformada de Fourier-Laplace de una función de soporte compacto $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Observación 2.13. *El Teorema 2.12 se puede extender a distribuciones de soporte compacto. Este resultado es conocido bajo el nombre de Teorema de Paley-Wiener-Schwartz. Ver [19, Capítulo 7] para más detalles.*

Definición 2.14. *Sea F una función entera de una o varias variables. Diremos que F es reducible si existen funciones $G, H \neq 0$ no nunca nulas tales que $F = G.H$. En otro caso, F se dice reducible.*

La descomposición de una función entera de tipo exponencial en factores irreducibles es única salvo factores no nulos. Para funciones en una variable esto se debe al Teorema de factorización de Weierstrass [23], y para funciones de varias variables se debe a Osgood [27]. Probaremos entonces un resultado similar al del caso discreto (Teorema 2.5).

Teorema 2.15. *Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ funciones de soporte compacto y sean F y G sus transformadas de Fourier-Laplace respectivamente. Entonces $|\hat{f}| = |\hat{g}|$ si y sólo si existe una factorización $G = G_1 \cdot G_2$ y una función entera Q donde $Q|_{\mathbb{R}^d} \in \mathbb{R}$, tal que*

$$F(z) = e^{iQ(z)} \cdot G_1(z) \cdot \overline{G_2(\overline{z})}.$$

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que $|\hat{f}| = |\hat{g}|$. De forma análoga al caso de dimensión finita, tenemos que $|\hat{f}(\omega)|^2 = F(\omega)\overline{F(\omega)} = F(\omega)\overline{F(\overline{\omega})}$ para todo $\omega \in \mathbb{R}^d$. Extendiendo analíticamente a todo $\mathbb{C}^d$ obtenemos que

$$F(z)\overline{F(\overline{z})} = G(z)\overline{G(\overline{z})} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^d. \tag{2.5}$$

Como F y G son enteras de tipo exponencial, existen $\{p_j(z)\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{q_j(z)\}_{j\in\mathbb{N}}$ funciones enteras irreducibles tales que

$$F(z) = \prod_{j\in\mathbb{N}} p_j(z) \qquad \text{y} \qquad G(z) = \prod_{j\in\mathbb{N}} q_j(z).$$

Reemplazando en la igualdad (2.5) nos queda

$$\prod_{j\in\mathbb{N}} p_j(z) \cdot \prod_{j\in\mathbb{N}} \overline{p_j(\overline{z})} = \prod_{j\in\mathbb{N}} q_j(z) \cdot \prod_{j\in\mathbb{N}} \overline{q_j(\overline{z})}.$$

Sea $J \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto maximal tal que $\prod_{j\in J} p_j$ divide a $\prod_{j\in\mathbb{N}} q_j$. Por unicidad de la factorización, existe $J' \subseteq \mathbb{N}$ y una función entera $h(z)$ nunca nula tal que

$$\prod_{j\in J} p_j(z) = h(z) \prod_{j\in J'} q_j(z).$$

Mas aún, evaluando la igualdad anterior en $\overline{z}$ y conjugándola, resulta que J también es maximal para $\overline{p_j(\overline{z})}$ y por lo tanto

$$\prod_{j\in J} \overline{p_j(\overline{z})} = \overline{h(\overline{z})} \prod_{j\in J'} \overline{q_j(\overline{z})}.$$

Reemplazando y cancelando nos queda

$$h(z)\overline{h(\overline{z})} \prod_{j\in J^c} p_j(z)\overline{p_j(\overline{z})} = \prod_{j\in J'^c} q_j(z)\overline{q_j(\overline{z})}.$$

Como J es maximal, necesariamente $\prod_{j\in J^c} p_j(z)$ divide a $\prod_{j\in J'^c} \overline{q_j(\overline{z})}$ por lo que existe g entera y nunca nula tal que

$$\prod_{j\in J^c} p_j(z) = g(z) \prod_{j\in J'^c} \overline{q_j(\overline{z})}.$$

Así

$$\begin{aligned} F(z) &= \prod_{j\in\mathbb{N}} p_j(z) = \prod_{j\in J} p_j(z) \prod_{j\in J^c} p_j(z) \\ &= \underbrace{h(z) \prod_{j\in J'} q_j(z)}_{:=G_1(z)} \cdot \underbrace{g(z) \prod_{j\in J'^c} \overline{q_j(\overline{z})}}_{:=\overline{G_2(\overline{z})}}. \end{aligned}$$

Como h y g son nunca nulas, existe Q entera tal que $h(z)\cdot g(z) = e^{iQ(z)}$ y así

$$F(z) = e^{iQ(z)} G_1(z)\overline{G_2(\overline{z})}.$$

Falta ver que $Q(\omega) \in \mathbb{R}^d$ para todo $\omega \in \mathbb{R}^d$. Sea entonces $\omega \in \mathbb{R}^d$, tenemos

$$|F(\omega)| = |e^{iQ(\omega)}||G_1(\omega)||\overline{G_2(\omega)}| = |e^{iQ(\omega)}||G(omega)|.$$

Se sigue que $|e^{iQ(\omega)}| = 1$ para todo $\omega \in \mathbb{R}^d$ y por lo tanto $Q(\omega) \in \mathbb{R}^d$ para todo $\omega \in \mathbb{R}^d$.
$\Leftarrow$) Si existe tal factorización, evaluando en $\omega \in \mathbb{R}^d$ obtenemos

$$|\hat{f}(\omega)| = |F(\omega)| = \underbrace{|e^{iQ(\omega)}|}_{=1} |G_1(\omega)||\overline{G_2(\omega)}| = |G(\omega)| = |\hat{g}(\omega)|.$$

$\square$

Usando el teorema de Paley-Wiener junto con el teorema anterior podemos caracterizar todas las posibles ambigüedades de una f dada.

Corolario 2.16. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ de soporte compacto y F su transformada de Fourier-Laplace. Supongamos además que $F = F_1 \cdot F_2$ tal que $G(z) := F_1(z) \cdot \overline{F_2(\overline{z})}$ es entera de tipo exponencial. Entonces para toda constante γ con $|\gamma| = 1$ y $\tau \in \mathbb{R}^d$ la función*

$$g := \gamma \cdot T_\tau \mathcal{F}^{-1}(G|_{\mathbb{R}^d})$$

es ambigua con respecto a f, i.e., $|\hat{f}| = |\hat{g}|$.

Para funciones de una variable el problema de la unicidad fue estudiado en los años 50 por Akutowicz ([2],[3]) y unos años más tarde, independientemente, por Walther [35] y Hofstetter [18]. Sus resultados indican que todas las soluciones ambiguas de la recuperación de fase se obtienen conjugando un subconjunto de los ceros de la transformada de Fourier-Laplace.

Teorema 2.17. *(Walther [20]) Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ funciones de soporte compacto y sean F y G sus respectivas transformadas de Fourier-Laplace. Sea m la multiplicidad* *del origen como raíz de F y $Z(F)$ el conjunto de ceros restantes de F, donde cada uno aparece con su respectiva multiplicidad. Entonces $|\hat{f}| = |\hat{g}|$ si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{R}$ y $E \subseteq Z(F)$ tal que*

$$G(z) = e^{i(az+b)} \cdot \prod_{\xi \in E} \frac{\left(1 - \frac{z}{\overline{\xi}}\right) e^{z/\overline{\xi}}}{\left(1 - \frac{z}{\xi}\right) e^{z/\xi}} \cdot F(z).$$

La demostración de este resultado está basada en el teorema de factorización de Hadamard (ver, por ejemplo, [1]), que para funciones enteras de tipo exponencial se puede enunciar del siguiente modo:

Teorema 2.18. *Sea F una función entera de tipo exponencial con un cero de orden m en el origen. Entonces existen a,$b \in \mathbb{C}$ tales que*

$$F(z) = e^{az+b} z^m \prod_{\xi \in Z(F)} \left(1 - \frac{z}{\xi}\right) e^{\frac{z}{\xi}}.$$

Demostración del Teorema 2.17. Supongamos primero que $|\hat{f}| = |\hat{g}|$. Por el Teorema 2.15 sabemos que $F(z) = e^{iQ(z)} G_1(z) \cdot \overline{G_2(\overline{z})}$ y, por lo tanto

$$\xi \in Z(F) \Leftrightarrow \xi \text{ ó } \overline{\xi} \in Z(G).$$

Sea $E := \{\xi \in Z(F) : \ \overline{\xi} \in Z(G)\}$. Por otro lado, la multiplicidad del origen como raíz de ambas funciones debe ser la misma, por lo cual podemos suponer sin pérdida de generalidad que $m = 0$. De la misma forma que en el Teorema 2.15, tenemos que

$$F(z) \cdot \overline{F(\overline{z})} = G(z) \cdot \overline{G(\overline{z})} \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2.6}$$

Por otro lado, el teorema de factorización de Hadamard nos asegura que existen A,B,C,$D \in \mathbb{C}$ tales que

$$F(z) = e^{Az+B} \prod_{\xi \in Z(F)} \left(1 - \frac{z}{\xi}\right) e^{z/\xi} \qquad \text{y}$$

$$G(z) = e^{Cz+D} \prod_{\xi \in E} \left(1 - \frac{z}{\overline{\xi}}\right) e^{z/\overline{\xi}} \prod_{\xi \in Z(G) \setminus E} \left(1 - \frac{z}{\xi}\right) e^{z/\xi}.$$

Para mayor simplicidad, notaremos $E(z, \xi) := \left(1 - \frac{z}{\xi}\right) e^{z/\xi}$. Reemplazando esta factorización en (2.6) obtenemos la siguiente identidad

$$e^{2(Re(A)z+Re(B))} \prod_{\xi \in Z(F)} E(z,\xi) \cdot E(z,\overline{\xi}) = e^{2(Re(C)z+Re(D))} \prod_{\xi \in Z(F)} E(z,\xi) \cdot E(z,\overline{\xi})$$

donde utilizamos que $\overline{E(\overline{z},\xi)} = E(z,\overline{\xi})$. De aquí se sigue inmediatamente que

$$e^{2(Re(A)z+Re(B))} = e^{2(Re(C)z+Re(D))} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^d,$$

por lo cual $Re(A) = Re(C)$ y $Re(B) = Re(D)$. Existen entonces $a,b \in \mathbb{R}$ tales que

$$C = A + ia \qquad \text{y} \qquad D = B + ib.$$

Juntando todo esto, podemos escribir a G como

$$\begin{aligned} G(z) &= e^{i(az+b)} \cdot e^{Az+B} \prod_{\xi \in E} \left(1 - \frac{z}{\overline{\xi}}\right) e^{z/\overline{\xi}} \prod_{\xi \in Z(G) \setminus E} \left(1 - \frac{z}{\xi}\right) e^{z/\xi} \\ &= e^{i(az+b)} \cdot \prod_{\xi \in E} \frac{\left(1 - \frac{z}{\overline{\xi}}\right) e^{z/\overline{\xi}}}{\left(1 - \frac{z}{\xi}\right) e^{z/\xi}} \cdot F(z). \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $G(z) = e^{i(az+b)} \cdot \prod_{\xi \in E} \frac{\left(1 - \frac{z}{\overline{\xi}}\right) e^{z/\overline{\xi}}}{\left(1 - \frac{z}{\xi}\right) e^{z/\xi}} \cdot F(z)$ para ciertos $a,b \in \mathbb{R}$ y $E \subseteq Z(F)$. Dado $\omega \in \mathbb{R}$, queremos ver que $|G(\omega)| = |F(\omega)|$. Para ello observemos primero que si $\omega \in \mathbb{R}$, $|E(\omega,\xi)| = |E(\omega,\overline{\xi})|$. Entonces

$$|G(\omega)| = |e^{i(a\omega+b)}| \prod_{\xi \in E} \frac{|E(\omega,\overline{\xi})|}{|E(\omega,\xi)|} \cdot |F(\omega)| = |F(\omega)|.$$

$\square$

Capítulo 3

Recuperación de fase a partir de marcos de Gabor

Durante este capítulo intentaremos decidir bajo qué condiciones una señal $x \in \mathbb{C}^N$ que pertenece a una familia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}^N$ puede ser recuperada a partir de algún conjunto de mediciones de Gabor. Del mismo modo que en los capítulos anteriores, las mediciones son invariantes por multiplicación por constantes de módulo 1, por lo cual la igualdad módulo 1 sigue siendo una ambigüedad trivial. Los resultados de este capítulo están basados en el trabajo de Irena Bojarovska y Axel Flinth en [8].

De aquí en adelante vamos a trabajar con señales finitas $x \in \mathbb{C}^N$. Para mayor comodidad, consideraremos a las señales extendidas de forma periódica, i.e., x_j ó $x(j)$ con $j \in \mathbb{Z}$ será siempre interpretado módulo N. Es por ello que consideraremos el dominio $\{0, ..., N-1\}$ y escribiremos $j \in \mathbb{Z}_N$. Consideraremos el producto interno usual de de $\mathbb{C}^N$ y además, el producto interno de Hilbert-Schmidt para matrices de $N \times N$ definido como

$$\langle A, B \rangle_{HS} := tr(AB^*) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_N} \langle Ae_i, Be_i \rangle,$$

donde $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}_N}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^N$. Recordemos que la definición de este producto interno no depende de la base elegida. Como vimos en el Capítulo 2, la transformada de Fourier discreta mapea señales finitas en señales finitas. Está definida como

$$\hat{x}(j) := \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{-nj} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}_N$$

y su inversa está dada por

$$\check{x}(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{nj} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}_N$$

donde $\omega = e^{2\pi i/N}$. Con esta normalización de la inversa, el teorema de Plancharel queda como

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = N\langle x, y \rangle.$$

Definimos además los operadores de modulación y traslación (circulares) como

$$(T_k x)_j := x_{j-k} \qquad y \qquad (M_l x)_j := \omega^{lj} x_j.$$

Como transformando Fourier las modulaciones en el tiempo se corresponden con traslaciones en frecuencia, llamaremos operadores de traslación tiempo-frecuencia a $\pi_\lambda = \pi_{(k,l)} := M_l T_k$ para $\lambda = (k,l) \in \mathbb{Z}_N^2$. Un *sistema de Gabor* es la colección de todas las posibles traslaciones y modulaciones de un vector *generador* fijo $g \in \mathbb{C}^N$,

$$(\pi_\lambda g)_{\lambda \in \mathbb{Z}_N^2}.$$

En el caso en el que el sistema es *completo* diremos que es un *marco de Gabor*. Es bien sabido que si $g \neq 0$ el sistema generado por todas las traslaciones y modulaciones resulta ser un marco. Para más detalles se puede ver el trabajo de Pfander en [30].

Para mayor simplicidad, notaremos $g_\lambda := \pi_\lambda g$. Los operadores π_λ, $\lambda \in \mathbb{Z}_N^2$, son unitarios y forman una base de $\mathbb{C}^{N\times N}$ [30], más aún

$$\langle \pi_\lambda, \pi_\mu \rangle_{HS} = N\delta_{\lambda,\mu}. \tag{3.1}$$

Vamos a necesitar las siguientes relaciones de conmutatividad entre modulaciones y traslaciones.

Lema 3.1. *Sean $\lambda = (k,l)$ y $\mu = (p,q) \in \mathbb{Z}_N^2$. Entonces*

1. $M_l T_k = \omega^{lk} T_k M_l$
2. $\pi_\lambda \pi_\mu = \omega^{-k\cdot q + p\cdot l} \pi_\mu \pi_\lambda$.

Demostración.

1. Para cada $x \in \mathbb{C}^N$ vale que

$$\begin{aligned} M_l T_k x &= (\omega^{lj}(T_k x)_j)_j \\ &= (\omega^{lj} x_{j-k}) j \\ &= (\omega^{lj-lk+lk} x_{j-k})_j \\ &= \omega^{lk} T_k M_l x. \end{aligned}$$

2. Sea $x \in \mathbb{C}^N$. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}\pi_\mu \pi_\lambda x &= \pi_\mu((\omega^{jl} x_{j-k})_j) \\ &= (\omega^{jq} \omega^{(j-p)l} x_{j-k-p})_j \\ &= (\omega^{jq+jl-pl} x_{j-k-p})_j.\end{aligned}$$

Invirtiendo los roles de λ y μ obtenemos

$$\pi_\lambda \pi_\mu = (\omega^{jl+jq-kq} x_{j-p-k})_j.$$

Multiplicando y dividiendo por ω^{pl} en esta última expresión nos queda

$$\begin{aligned}\pi_\lambda \pi_\mu &= (\omega^{jl+jq-kq+pl-pl} x_{j-p-k})_j \\ &= \omega^{-k\cdot q+p\cdot l}(\omega^{jl+jq-pl} x_{j-p-k})_j \\ &= \omega^{-k\cdot q+p\cdot l} \pi_\mu \pi_\lambda.\end{aligned}$$

□

En lo que sigue trateremos el problema de recuperación de fase de señales arbitrarias a partir de todas las medidas, es decir, $\mathcal{C} = \mathbb{C}^N$, $\Lambda = \mathbb{Z}_N^2$ y $\Phi = \{g_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{Z}_N^2}$ para algún generador $g \in \mathbb{C}^N$. Con el objetivo de caracterizar los marcos de Gabor que permiten la recuperación de fase, i.e., aquellos $g \in \mathbb{C}^N$ tales que el operador $\mathcal{A}_\Phi x = (|\langle x, g_\lambda\rangle|)_{\lambda\in\Lambda}$ es inyectivo, consideraremos nuevamente el operador $\mathcal{A}_\Phi^2$ definido en (1.4) junto con el Lema 1.18 que relaciona la inyectividad de $\mathcal{A}_\Phi$ con las matrices del núcleo de $\mathcal{A}_\Phi^2$. Recordemos que dado un conjunto de mediciones $\Phi = \{\phi_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathbb{C}^N$ y $H \in \mathbb{C}^{N\times N}$, este operador está definido como

$$\mathcal{A}_\Phi^2(H) := (\langle H, \phi_i \phi_i^* \rangle_{HS})_{i=1}^m.$$

Además si H es de la forma xx^* con $x \in \mathbb{C}^N$,

$$\mathcal{A}_\Phi^2(H) = \langle H, \phi_i \phi_i^* \rangle_{HS} = \langle H\phi_i, \phi_i \rangle = |\langle x, \phi_i \rangle|^2. \tag{3.2}$$

El siguiente resultado nos da una condición que asegura la recuperación de fase para marcos de Gabor.

Teorema 3.2. *Sea $g \in \mathbb{C}^N$ un generador tal que*

$$\langle g, g_\lambda \rangle \neq 0$$

para todo $\lambda \in \mathbb{Z}_N^2$. Entonces, el marco de Gabor asociado $\Phi = \{g_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{Z}_N^2}$ permite la recuperación de fase, i.e., $\mathcal{A}_\Phi$ es inyectivo.

Demostración. Por el Lema 1.18 basta ver que no hay matrices Hermitianas de rango 1 ó 2 en el núcleo de $\mathcal{A}_\Phi^2$. Si además recordamos que $\mathcal{A}_\Phi^2(H) = \langle H, g_\lambda g_\lambda^* \rangle_{HS} = \langle Hg_\lambda, g_\lambda \rangle$, tiene sentido trabajar con $\langle Hg_\lambda, g_\lambda \rangle$ para $H \in \mathbb{H}_N$.

El conjunto $\{\frac{\pi_\lambda}{\sqrt{N}}\}_{\lambda \in \mathbb{Z}_N^2}$ resulta una base ortonormal del espacio de matrices de tamaño $N \times N$ como consecuencia de la igualdad (3.1), por lo cual podemos escribir a H como

$$H = \frac{1}{N} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_N^2} \langle H, \pi_\mu \rangle_{HS} \pi_\mu.$$

Si $\mu = (p, q)$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle H, \pi_\mu \rangle_{HS} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}_N} \langle He_i, \pi_\mu e_i \rangle \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}_N} \langle He_i, \omega^{q(i+p)} e_{i+p} \rangle \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}_N} \omega^{-qi} \langle He_{i-p}, e_i \rangle \\ &= \hat{\mathcal{H}}_p(q), \end{aligned}$$

donde $\hat{\mathcal{H}}_p$ es la transformada de Fourier discreta del vector $\mathcal{H}_p$ definido por $\mathcal{H}_p(i) := \langle He_{i-p}, e_i \rangle = H_{i,i-p}$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\Phi^2(H) &= \langle H, g_\lambda g_\lambda^* \rangle_{HS} = \langle Hg_\lambda, g_\lambda \rangle \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\mu=(p,q) \in \mathbb{Z}_N^2} \langle \hat{\mathcal{H}}_p(q) \pi_\mu g_\lambda, g_\lambda \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\mu=(p,q) \in \mathbb{Z}_N^2} \hat{\mathcal{H}}_p(q) \langle \pi_\mu g_\lambda, g_\lambda \rangle. \end{aligned}$$

Si escribimos $\lambda = (k, l)$, sabemos por el Lema 3.1 que $\pi_\mu g_\lambda = \pi_\mu \pi_\lambda g = \omega^{-pl+qk} \pi_\lambda \pi_\mu g$. Usando esto y el hecho de que los operadores π_λ son unitarios, obtenemos que

$$\langle Hg_\lambda, g_\lambda \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\mu=(p,q) \in \mathbb{Z}_N^2} \omega^{-pl} \omega^{qk} \hat{\mathcal{H}}_p(q) \langle g_\mu, g \rangle. \tag{3.3}$$

Sea $H \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A}_\Phi^2)$, i.e., $\langle Hg_\lambda, g_\lambda \rangle = 0$ para todo $\lambda = (k, l) \in \mathbb{Z}_N^2$. Si fijamos l, la expresión (3.3) es precisamente la coordenada l-ésima de la transformada de Fourier del vector $V^k \in \mathbb{C}^N$ cuya coordenada p-ésima está dada por

$$V^k(p) = \sum_q \omega^{qk} \hat{\mathcal{H}}_p(q) \langle g_\mu, g \rangle.$$

Como la expresión (3.3) es igual a cero para todo $l \in \mathbb{Z}_N$, el vector V^k es el vector nulo para todo $k \in \mathbb{Z}_N$. Por otro lado, $V^k(p)$ es N veces el valor en k de la inversa de la transformada de Fourier del vector $v^p \in \mathbb{C}^N$ dado por

$$v^p(q) := \hat{\mathcal{H}}_p(q) \langle g_\mu, g \rangle, \tag{3.4}$$

y por lo tanto debe ser igual a cero para todo $p,q \in \mathbb{Z}_N$. Como por hipótesis $\langle g_\mu, g\rangle \neq 0$, debe ser $\hat{\mathcal{H}}_p(q) = 0$ para todo $p,q \in \mathbb{Z}_N$. Pero entonces $H = 0$. En particular, no puede tener rango 1 ó 2 que es lo que queríamos probar. $\square$

Mirando con cuidado el final de la demostración, podemos ver que el único elemento en el núcleo de $\mathcal{A}^2_\Phi$ es la matriz nula. Por lo tanto, bajo las hipótesis del Teorema 3.2 el operador $\mathcal{A}^2_\Phi$ es inyectivo. Usando esta idea, podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 3.3. *Sea $g \in \mathbb{C}^N$ tal que $\langle g, g_\lambda\rangle \neq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{Z}^2_N$. Entonces los N^2 operadores de rango 1 dados por $(g_\lambda g^*_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Z}^2_N}$ forman un marco de $\mathbb{C}^{N\times N}$ con la norma de Hilbert-Schmidt y, por lo tanto, son una base. Las cotas del marco están dadas por*

$$A = N \cdot \min_{\lambda\in\mathbb{Z}^2_N} |\langle g, g_\lambda\rangle|^2, \qquad\qquad B = N \cdot \max_{\lambda\in\mathbb{Z}^2_N} |\langle g, g_\lambda\rangle|^2.$$

Demostración. Queremos probar que para todo $H \in \mathbb{C}^{N\times N}$ vale que

$$A\|H\|^2_{HS} \leqslant \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^2_N} |\langle H, g_\lambda g^*_\lambda\rangle|^2 \leqslant B\|H\|^2_{HS},$$

i.e., queremos ver que $A\|H\|^2_{HS} \leqslant \|\mathcal{A}^2_\Phi(H)\|^2 \leqslant B\|H\|2_{HS}$, donde $\Phi = \{g_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{Z}^2_N}$. Usando la notación del Teorema 3.2, la identidad (3.3) nos dice que las N-tuplas $(V^k)^N_{k=1} \in (\mathbb{C}^N)^N$ se obtienen al aplicar la transformada de Fourier inversa a las columnas de la matriz $(N\langle H, g_\lambda g^*_\lambda\rangle_{HS})_{\lambda\in\mathbb{Z}^2_N} = N\mathcal{A}^2_\Phi(H)$. Entonces, aplicando la identidad de Plancharel obtenemos

$$\|\mathcal{A}^2_\Phi(H)\|^2 = \|(\hat{V^k})^N_{k=1}\|^2 = N\|(V^k)^N_{k=1}\|^2.$$

Repitiendo el argumento, tenemos que

$$\|(V^k)^N_{k=1}\|^2 = \|(N\check{v}^p)^N_{p=1}\|^2 = \frac{N^2}{N}\|(v^p)^N_{p=1}\|^2$$

y además

$$\|(\hat{\mathcal{H}}_p)^N_{p=1}\|^2 = N\|(\mathcal{H}_p)^N_{p=1}\|^2.$$

Las N-tuplas $\mathcal{H}^p$ y v^p están relacionadas por la identidad (3.4) para todo $p \in \mathbb{Z}_N$, por lo cual vale que

$$\|(v^p)^N_{p=1}\|^2 = \sum_{(p,l)\in\mathbb{Z}^2_N} |v^p(l)|^2 = \sum_{\lambda=(p,l)\in\mathbb{Z}^2_N} \left|\hat{\mathcal{H}}_p(l)\langle g, g_\lambda\rangle\right|^2$$

Así, definiendo $\alpha = \min_{\lambda\in\mathbb{Z}_N^2} |\langle g, g_\lambda\rangle|$, $\beta = \max_{\lambda\in\mathbb{Z}_N^2} |\langle g, g_\lambda\rangle|$ tenemos que

$$\alpha^2\|(\hat{\mathcal{H}}_p)_{p=1}^N\|^2 \leqslant \|(v^p)_{p=1}^N\|^2 \leqslant \beta^2|(\hat{\mathcal{H}}_p)_{p=1}^N\|^2.$$

Finalmente, como $\mathcal{H}_p(i) = H_{i,i-p}$ la matriz H se obtiene reacomodando los elementos de $\mathcal{H}_p$ y por lo tanto $\|H\|_{HS}^2 = \|(\mathcal{H}_p)_{p=1}^N\|^2$. Combinando todo obtenemos que

$$\|\mathcal{A}_\Phi^2(H)\|_{HS}^2 = \frac{N}{N^2}\|(V^k)_{k=1}^N\|^2 = \|(v^p)_{p=1}^N\|^2 \leqslant \beta^2\|(\hat{\mathcal{H}}_p)_{p=1}^N\|^2 = N\beta^2\|(\mathcal{H}_p)_{p=1}^N\|^2 = B\|H\|_{HS}^2.$$

De manera análoga se ve que $\|\mathcal{A}_\Phi^2(H)\|_{HS}^2 \geqslant A\|H\|_{HS}^2$.

□

3.1 Inyectividad para mediciones de Gabor completas

Veremos a lo largo de esta sección que si consideramos la subfamilia de vectores de $\mathbb{C}^N$ que no se anulan, podemos debilitar las condiciones sobre el generador y aún así recuperar la fase.

Definición 3.4. *Un vector $x \in \mathbb{C}^N$ se dice completo si todas sus coordenadas son distintas de cero, i.e.,*

$$x_j \neq 0 \qquad \forall j = 0, \dots, N-1.$$

Notaremos por $\mathcal{C}_f$ (la f proviene de full, su nombre en inglés) a la familia de vectores completos en $\mathbb{C}^N$.

Esta situación es bastante más sencilla de manejar. Usaremos las mismas técnicas que en el Teorema 3.2 para ver cómo debilitando sus hipótesis es posible recuperar la fase de señales completas.

Teorema 3.5. *Sea $g \in \mathbb{C}^N$ y $\lambda = (p, q) \in \mathbb{Z}_N^2$. Supongamos que*

$$\langle g, g_\lambda\rangle \neq 0 \qquad \text{para } p = 0, 1 \text{ y } q \in \mathbb{Z}_N.$$

Entonces el marco de Gabor generado por g, $\Phi = (g_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Z}_N^2}$ permite la recuperación de fase para todo $x \in \mathcal{C}_f$.

Demostración. Supongamos que se cumplen las hipótesis del teorema y, además, x e y son vectores completos cuyas medidas de Gabor son iguales, i.e., $|\langle x, g_\lambda\rangle| = |\langle y, g_\lambda\rangle|$ para todo $\lambda \in \mathbb{Z}_N^2$. Entonces la matriz Hermitiana H definida como $H := xx^* - yy^*$ pertenece al núcleo de $\mathcal{A}_\Phi^2$. En efecto, para todo $\lambda \in \mathbb{Z}_N^2$ tenemos

$$\mathcal{A}_\Phi^2(xx^* - yy^*)(\lambda) = \langle (xx^* - yy^*)g_\lambda, g_\lambda\rangle = |\langle x, g_\lambda\rangle|^2 - |\langle y, g_\lambda\rangle|^2 = 0.$$

La prueba del Teorema 3.2 implica que $\hat{\mathcal{H}}_p = 0$ para $p = 0, 1$. Pero entonces $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 = 0$. Recordando que $\mathcal{H}_p(i) = \langle He_{i-p}, e_i\rangle$ obtenemos

$$0 = x_i\overline{x}_i - y_i\overline{y}_i = x_i\overline{x}_{i-1} - y_i\overline{y}_{i-1} \qquad\qquad i = 0, \ldots, N-1.$$

De la primera parte de la igualdad obtenemos que $|x_i| = |y_i|$ para todo $i = 0, \ldots, N-1$, i.e., existen c_i con $|c_i| = 1$ tales que $x_i = c_i y_i$ para todo i. Reemplazando esto en la segunda parte de la igualdad obtenemos

$$0 = y_i\overline{y}_{i-1}(c_i\overline{c}_{i-1} - 1).$$

Como todas las coordenadas de y son distintas de cero, necesariamente debe ser $c_i\overline{c}_{i-1} = 1$ por lo cual $c_i = c_{i-1}$. Pero entonces $c_i = c_0 := c$ para todo i. Luego $x = cy$ con $|c| = 1$, como queríamos ver. □

3.2 Generadores que permiten la recuperación de fase

Durante esta sección, presentaremos dos grupos diferentes de generadores que cumplen las hipótesis del Teorema 3.2 y por lo tanto permiten la recuperación de fase a través de las N^2 mediciones de Gabor. En primer lugar vamos a considerar el caso en que g es un generador *genérico* en $\mathbb{C}^N$ y luego tomaremos g como la función característica de un conjunto de diferencias.

Teorema 3.6. *Existe un conjunto $E \subset \mathbb{C}^N$ de medida de Lebesgue cero tal que para todo $g \in \mathbb{C}^N \backslash E$ la familia $(g_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Z}_N^2}$ admite la recuperación de fase.*

Demostración. Usando el resultado del Teorema 3.2 y que además hay finitos $\lambda \in \mathbb{Z}_N^2$, basta encontrar un conjunto de medida cero tal que para un λ_0 arbitrario pero fijo, se verifique

$$\langle g, g_{\lambda_0}\rangle \neq 0.$$

Como π_{λ_0} es unitario, existe una base ortonornal $\{q_j\}_{j=1}^N$ de $\mathbb{C}^N$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ todos de módulo 1 tales que

$$\pi_{\lambda_0} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j q_j q_j^*.$$

Si escribimos g en la base $\{q_j\}_{j=1}^N$, tenemos $g = \sum_{j=1}^N \beta_j q_j$ y así

$$\langle g, g_\lambda \rangle = \langle \sum_j \beta_j q_j, \sum_l \alpha_l \beta_l q_l \rangle = \sum_j \overline{\alpha_j} |\beta_j|^2.$$

Como $E'_{\lambda_0} := \{\beta \in \mathbb{C}^N \ : \ \sum_j \overline{\alpha_j} |\beta_j|^2 = 0\}$ es un variedad de codimensión uno en $\mathbb{C}^N$, tiene medida de Lebesgue cero. Además, la aplicación $\beta \mapsto g = \sum_j \beta_j q_j$ es una isometría, por lo cual

$$E_{\lambda_0} := \{g = \sum_j \beta_j q_j, \ \ \beta \in E'_{\lambda_0}\}$$

también tiene medida de Lebesgue cero. Tomando entonces $E := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Z}_N^2} E_\lambda$, resulta que E tiene medida de Lebesgue cero y para todo $g \in \mathbb{C}^N \backslash E$ tenemos que $\langle g, g_\lambda \rangle \neq 0$, como queríamos ver. □

El segundo ejemplo es llamado *conjunto de diferencias*, una construcción que proviene de la teoría combinatoria. El objetivo será probar que el conjunto de todas las modulaciones y traslaciones de la función característica de un conjunto de diferencias cumple la propiedad deseada para recuperar la fase.

Definición 3.7. *Un subconjunto $\mathcal{K} = \{u_1, \ldots, u_K\}$ de $\mathbb{Z}_N$ se dice un (N, K, ν) conjunto de diferencias si el conjunto de las $K(K-1)$ diferencias*

$$(u_k - u_j) \quad mod\ N, \qquad\qquad k \neq j$$

toma todos los posibles valores no nulos $1, 2, \ldots, N-1$, donde cada valor aparece exactamente ν veces.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.8. *Sea $N = 7$. El subconjnto $\mathcal{K} = \{1, 2, 4\}$ es un $(7, 3, 1)$ conjunto de diferencias. Podemos chequear esto considerando todas las posibles diferencias módulo 7:*

$$(1-2) \equiv 6, \quad (1-4) \equiv 4, \quad (2-4) \equiv 5,$$
$$(2-1) \equiv 1, \quad (4-1) \equiv 3, \quad (4-2) \equiv 2.$$

Dado un conjunto $\mathcal{K}$ de diferencias con parámetros (N, K, ν), denotaremos $\chi_{\mathcal{K}} \in \{0,1\}^N$ a la función característica de $\mathcal{K}$ definida de la forma usual,

$$\chi_{\mathcal{K}}(j) = \begin{cases} 1 & si \quad j \in \mathcal{K} \\ 0 & si \quad j \notin \mathcal{K}. \end{cases}$$

Probaremos ahora que si estas funciones las usamos como generadores, su marco de Gabor asociado satisface la condición del Teorema 3.2 y por lo tanto permite la recuperación de fase para señales arbitrarias.

Teorema 3.9. *Sea $N \in \mathbb{N}$ cuya factorización en primos está dada por $N = p_1^{a_1} \ldots p_r^{a_r}$. Sea $\mathcal{K}$ un conjunto de diferencias con parámetros (N, K, ν) tales que*

$$\nu, K < \min\{p_1 \ldots, p_r\}.$$

Entonces, si $g = \chi_{\mathcal{K}}$,

$$\langle g, g_\lambda \rangle \neq 0 \qquad\qquad \forall \lambda \in \mathbb{Z}_N^2.$$

Demostración. Sea $\lambda = (q, j)$ con ambos q,$j \neq 0$. Usando la definición de g_λ y $\mathcal{K}$ obtenemos

$$\langle g, g_\lambda \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} g(n)\overline{(M_j T_q g)(n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} g(n)g(n-q)\omega^{-jn} = \sum_{\substack{n \in \mathcal{K}, \\ n-q \in \mathcal{K}}} \omega^{-jn}. \tag{3.5}$$

Teniendo en cuenta el hecho de que $\mathcal{K}$ es un conjunto de diferencias, el conjunto dado por

$$\{n : n \in \mathcal{K}, n-q \in \mathcal{K}\}$$

debe tener siempre ν elementos. Esto es porque para cada $q \in \mathbb{Z}_N$ existen exactamente ν maneras distintas de escribir q como diferencias de elementos de $\mathcal{K}$ y esas son precisamente $n - (n-q)$.

Si $\nu = 1$, la expresión (3.5) es simplemente ω^{jn_0} por lo que la suma es no nula.

Si $\nu \neq 1$, tenemos en (3.5) la suma de ν distintas raíces N-ésimas de la unidad. Vamos a utilizar un resultado de [25] sobre sumas de raíces de la unidad que se anulan. En su Teorema principal, este artículo prueba que para cualquier $N = p_1^{a_1} \ldots p_r^{a_r}$ las únicas cantidades posibles de raíces N-ésimas de la unidad que suman cero están dadas por $M_1 p_1 + \ldots + M_r p_r$, donde $M_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Con este resultado es claro que la condición $\nu < \min\{p_1, \ldots, p_r\}$ nos asegura que no tenemos una suma nula en ningún caso.

Supongamos ahora que $\lambda = (0, j)$. La sumatoria será en este caso sobre todos los elementos de $\mathcal{K}$, y como $K < \min\{p_1, \ldots, p_r\}$, nuevamente la suma no puede ser nula.

Por último, si $\lambda = (q, 0)$ tenemos una suma de ν veces el número 1 con lo cual hemos probado que $\langle g, g_\lambda \rangle \neq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{Z}_N^2$. $\square$

Si consideramos el conjunto del Ejemplo 3.8, está en las condiciones del Teorema 3.9. En general vale que si $q = p^r \equiv 3 \mod 4$, con p un número primo y $N = q$, $K = \frac{p-1}{2}$, $\nu = \frac{p-3}{4}$ entonces el conjunto dado por $\{t^2 : t \in \mathbb{Z}_N \backslash \{0\}\}$ es un (N, K, ν) conjunto de diferencias. Si $r = 1$ este conjunto cumple las hipótesis del Teorema 3.9.

3.3 Generadores que no permiten la recuperación de fase

En esta sección consideraremos dos casos en los que las hipótesis del Teorema 3.9 no se satisfacen y veremos que, en esos casos, no es posible la recuperación de fase. Para facilitar la escritura, durante esta sección escribiremos $g_\lambda = g_{(p,l)}$ para $\lambda = (p, l) \in \mathbb{Z}_N^2$.

Veamos primero el siguiente lema.

Lema 3.10. *Sea $g \in \mathbb{C}^N$ y $(p, l) \in \mathbb{Z}_N^2$. Entonces*

$$\langle g, g_{(p,l)} \rangle = \omega^{-lp} \overline{\langle g, g_{(-p,-l)} \rangle}.$$

Demostración. Sean $g \in \mathbb{C}^N$ y $\lambda = (p, l) \in \mathbb{Z}_N^2$. Por un lado tenemos que

$$\langle g, g_{(p,l)} \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} g_j \omega^{-jl} \overline{g_{j-p}}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \overline{\langle g, g_{(-p,-l)} \rangle} &= \langle g_{(-p,-l)}, g \rangle = \langle (\omega^{-jl} g_{j+p})_j, g \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{-jl} g_{j+p} \overline{g_j} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \omega^{-(i-p)l} g_i \overline{g_{i-p}} = \omega^{pl} \langle g, g_{(p,l)} \rangle. \end{aligned}$$

Dividiendo por ω^{pl} obtenemos la identidad buscada. $\square$

Proposición 3.11. Sea $g \in \mathbb{C}^N$ un generador tal que alguna de las siguientes condiciones se cumple

$$\langle g, g_{(p_0,l)} \rangle = 0 \qquad \text{para } p_0 \in \mathbb{Z}^N \backslash \{0\} \text{ fijo y todo } l \in \mathbb{Z}_N. \tag{3.6}$$

$$\text{(3.7)} \qquad \langle g, g_{(p_0,l)} \rangle = 0 \qquad \text{para } p_0 = 0 \text{ y todo } l \in \mathbb{Z}_N \backslash \{0\}.$$

Entonces el marco de Gabor asociado a g, $\Phi = \{g_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{Z}_N^2}$ no permite la recuperación de fase en $\mathbb{C}^N$.

Demostración. Supongamos primero que se cumple al condición (3.6). Vamos a considerar la matriz Hermitiana de $\mathbb{C}^{N\times N}$ dada por

$$H_1 = e_0 e_{-p_0}^* + e_{-p_0} e_0^*,$$

donde recordemos que e_0 es el primer vector canónico dado que estamos considerando los índices en $\mathbb{Z}_N$.

Como e_0 y e_{-p_0} son linealmente independientes, H_1 es una matriz de rango 2. Veamos que además pertenece al núcleo de $\mathcal{A}_\Phi^2$. Usando la notación del Teorema 3.2, tenemos que

$$\mathcal{H}_p(i) = \langle He_{i-p}, e_i \rangle = H_{i,i-p} = \begin{cases} 1 & si \quad i = 0, p = p_0 \\ 1 & si \quad i = p = -p_0 \\ 0 & si \qquad\quad no \end{cases}$$

En particular $\mathcal{H}_p = 0$ para todo $p \neq \pm p_0$. Por el Lema 3.10 sabemos que $\langle g, g_{(p,l)} \rangle = \omega^{-lp} \overline{\langle g, g_{(-p,-l)} \rangle}$, por lo cual la ecuación (3.6) implica que $\langle g, g_{(-p_0,l)} \rangle = 0$ para todo $l \in \mathbb{Z}_N$. Sumando todo esto tenemos que

$$\hat{\mathcal{H}}_p(l) \langle g, g_{(p,l)} \rangle = 0 \qquad\qquad \forall p, l \in \mathbb{Z}_N.$$

Usando la misma técnica que en el Teorema 3.2, resulta que $\mathcal{A}_\Phi^2(H_1) = 0$. Como H_1 es una matriz Hermitiana de rango 2 que pertenece al núcleo de $\mathcal{A}_\Phi^2$, por el Lema 1.18 no es posible recuperar la fase en este caso.

Supongamos ahora que vale la condición (3.7). En este caso consideramos la matriz Hermitiana de $\mathbb{C}^{N\times N}$ definida como

$$H_2 = e_0 e_0^* - e_1 e_1^*.$$

Nuevamente H_2 es una matriz de rango 2 y, en este caso, $\mathcal{H}_p = 0$ para todo $p \neq 0$. Además, como $H_{00} = 1$, $H_{11} = -1$ y $H_{jj} = 0$ para todo $j \neq 0, 1$, resulta que $\hat{\mathcal{H}}_p(0) = \sum_{j=0}^{N-1} H_{jj} = 0$. Sumando estas dos condiciones a las hipótesis sobre g, obtenemos nuevamente que

$$\hat{\mathcal{H}}_p(l) \langle g, g_{(p,l)} \rangle = 0 \qquad\qquad \forall p, l \in \mathbb{Z}_N,$$

y con el mismo argumento que antes, H_2 pertenece al núlceo de $\mathcal{A}_\Phi^2$ por lo cual tampoco es posible recuperar la fase. $\square$

Un caso en el cual se cumple la condición (3.6) es cuando g es lo que llamamos una "ventana corta". Esto es, si el soporte de g está contenido en un intervalo de longitud menor a $\frac{N}{2}$. En este caso, g y $M_l T_p g$ tienen soporte disjunto cuando consideramos un valor de p adecuado por lo cual el producto escalar entre g y $g_{p,l}$ se anulará.

Capítulo 4

Restricciones que permiten recuperar la fase

4.1 Restricciones al problema de recuperación de fase en $\mathbb{R}$

Durante esta sección abordaremos distintas restricciones sobre la familia de funciones a recuperar que nos permitan asegurar la unicidad del problema de recuperación de fase sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 4.1. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ de soporte compacto y supongamos que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\overline{f(t_0 - t)} = f(t_0 + t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Entonces f está unívocamente determinada, salvo ambigüedades triviales, por $|\hat{f}|$.

Demostración. Como las traslaciones son ambigüedades triviales, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $t_0 = 0$. Como consecuencia de la simetría de f, su transformada de Fourier-Laplace satisface la siguiente identidad

$$\overline{F(\overline{z})} = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} e^{2\pi izt} dt = \int_{\mathbb{R}} f(-t) e^{2\pi izt} dt = F(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{4.1}$$

En particular, los ceros de F aparecen de manera simétrica respecto al eje real, i.e., $z \in Z(F) \Leftrightarrow \overline{z} \in Z(F)$. Sabemos que la única manera de introducir ambigüedades en este caso es simetrizando algunos de los factores de la factorización de Hadamard de la transformada de Fourier-Laplace. Pero si eso sucede, entonces también debemos simetrizar a su factor conjugado para mantener la identidad (4.1). Por lo tanto, no es posible introducir ambigüedades no triviales en este caso. $\square$

Otra alternativa para garantizar la unicidad es tomar una segunda medida a partir de una distorsión aditiva de una señal conocida. Una versión bastante general puede encontrarse en [22].

Teorema 4.2. *([22]) Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ una función de soporte compacto cuya transformada de Fourier toma valores reales y sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ con soporte compacto contenido en $[0, \infty)$. Entonces f está unívocamente determinada por $|\hat{f}|$ y $|\hat{f} + \hat{g}|$.*

Si la distorsión aditiva g se elige como un múltiplo apropiado de la distribución delta, la magnitud de $\hat{f}$ es dispensable, i.e, si c es suficientemente grande comparado con f, es posible recuperar f a partir de $|\hat{f} + c|$. La interferencia de f con esta g empuja todos los ceros de la extensión analítica de la transformada de Fourier al semiplano superior. En este caso, la transformada de Hilbert nos da una relación entre fase y maginitud y la recuperación de fase resulta estable, además de única.

Teorema 4.3. *Para $a,b > 0$ definimos*

$$\mathcal{B}_{a,b} := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \;\;:\;\; \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < a \;\; y \;\; sop(f) \subseteq [0, b]\}$$

y para $c \in \mathbb{R}$ sea $L^2_c(\mathbb{R}) := \{f + c \;\;:\;\; f \in L^2(\mathbb{R})\}$ con la métrica

$$d_{L^2_c(\mathbb{R})}(f, g) := \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Supongamos que $c > ab$. Entonces $\mathcal{A} : f \mapsto |\hat{f} + c|$ es un operador inyectivo de $\mathcal{B}_{a,b}$ en $L^2_c(\mathbb{R})$ y $\mathcal{A}^{-1} : \mathcal{A}(\mathcal{B}_{a,b}) \subset L^2_c(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}_{a,b}$ es uniformemente continua. Más aún, existe $C > 0$ tal que

$$\|f_1 - f_2\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C \cdot d_{L^2_c(\mathbb{R})}(|\hat{f}_1 + c|, |\hat{f}_2 + c|) \qquad\qquad \forall f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}).$$

Demostración. Veamos primero la buena definición de $\mathcal{A}$. Sea $f \in \mathcal{B}_{a,b} \subset L^2(\mathbb{R})$, queremos ver que $\mathcal{A}f \in L^2_c(\mathbb{R})$, i.e., $\mathcal{A}f - c \in L^2(\mathbb{R})$. Usando que $c > ab > 0$ y la desigualdad triangular inversa tenemos que

$$|\mathcal{A}f - c| = ||\hat{f} + c| - c| \leqslant |\hat{f} + c - c| = |\hat{f}|.$$

Como $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}f - c \in L^2(\mathbb{R})$.

Denotaremos por g a la extensión analítica de $\hat{f} + c$, es decir

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i z t} dt + c \qquad\qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Entonces, suponiendo que g tiene todos su ceros en el semiplano superior (o inferior), la fase y la magnitud de g se relacionan a través de la transformada de Hilbert de la siguiente manera. Sea

$$\alpha(x) := H(ln|g|) := -\frac{1}{\pi}V.P.\int_{\mathbb{R}} \frac{ln|g(t)|}{t-x}dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

entonces $g = |g|e^{i\alpha}$ (para más detalles sobre esta identidad ver [10]).

Veamos entonces que g tiene todos sus ceros en el semiplano superior. Para $\mathrm{Im} z \leqslant 0$, como $f \in \mathcal{B}_{a,b}$ es cierto que

$$|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi izt}dt| \leqslant \int_{sop(f)} |f(t)|e^{2\pi Im(z)t} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant ab$$

y tenemos entonces $|g(z)| \geqslant ||\hat{f}(z)| - |c|| \geqslant c - ab > 0$ en el semiplano inferior, dado que $c > ab$.

Para f_1,$f_2 \in \mathcal{B}_{a,b}$ sea $g_k := \hat{f}_k + c$ y sea $\alpha_k := H(ln|g_k|)$. Entonces tenemos para $k = 1, 2$ y $x \in \mathbb{R}$ que

$$|g_k(x)| = |\hat{f}_k(x) + c| \geqslant c - |\hat{f}_k(x) \geqslant c - ab > 0$$

y, similarmente $|g_k(x)| \leqslant c+ab$. Como $|g_k|$ está acotado, existe una constante $C_1 > 0$ que depende de a,b,c tal que

$$|ln|g_1(x)| - ln|g_2(x)|| \leqslant C_1||g_1(x)| - |g_2(x)|| \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Esto último implica que la diferencia $ln|g_1(x)| - ln|g_2(x)|$ pertenece a $L^2(\mathbb{R})$. De acuerdo con (4.2) la diferencia de fase entre g_1 y g_2, $\delta := \alpha_1 - \alpha_2$, puede escribirse como $\delta = H(ln|g_1| - ln|g_2|)$. Usando el hecho de que la transformada de Hilbert es una isometría en $L^2(\mathbb{R})$ y la desigualdad (4.3) se sigue que

$$\|\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C_1\||g_1(x)| - |g_2(x)|\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Con todo esto, sumado a que $|1 - e^{it}| \leqslant |t|$, $t \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f_1 - f_2\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\hat{f}_1 - \hat{f}_2\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|g_1 - g_2\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \||g_1|e^{i\alpha_1} - |g_2|e^{i\alpha_2}\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \||g_1|e^{i\alpha_1} - |g_1|e^{i\alpha_2} + |g_1|e^{i\alpha_2} - |g_2|e^{i\alpha_2}\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant \||g_1|e^{i\alpha_1}(1 - e^{-i\delta}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \||g_1| - |g_2|\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant \|g_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} + \||g_1| - |g_2|\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant \underbrace{(c + ab + 1)}_{=C}\||g_1| - |g_2|\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

$\square$

4.2 Recuperación de fase a partir de mediciones holomorfas

Por el Teorema de Paley-Wiener existe una correspondencia uno a uno entre ciertas funciones holomorfas y las funciones de L^2 de soporte compacto, a través de la extensión de la transformada de Fourier al plano complejo. Como vimos en el Capítulo 2, esto juega un rol fundamental en la caracterización de las ambigüedades en el problema de recuperación de fase a partir de la transformada de Fourier.

Supongamos que $D \subset \mathbb{C}$ es un abierto, $\mathcal{X} \subset \mathcal{O}(D)$ un subconjunto de las funciones homomorfas en D y $S \subset D$. El problema que nos interesa abordar en esta sección es el siguiente: dada $F \in \mathcal{X}$, encontrar *todas* las $G \in \mathcal{X}$ tales que

$$|G(z)| = |F(z)| \qquad \forall z \in S.$$

Si D es el plano complejo, S el eje real y $\mathcal{X}$ son las funciones enteras de tipo exponencial cuya restricción al eje real son cuadrado integrables entonces el Teorema 2.17 prueba que tenemos un gran número de ambigüedades no triviales que surgen de conjugar algún subconjunto de ceros.

Sin embargo si el módulo de la función es conocido en dos rectas adecuadas, se puede garantizar la unicidad. Veremos primero el caso de dos rectas que pasan por el origen. Para ello, recordaremos la siguiente definición.

Definición 4.4. *Decimos que una función entera f es de tipo finito con orden $\rho > 0$ si existen constantes $A,B > 0$ tales que*

$$|f(z)| \leqslant Ae^{B|z|^\rho} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

La prueba del siguiente resultado se encuentra en [21, Teorema 3.3].

Teorema 4.5. *Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de funciones enteras de tipo finito y S la unión de dos rectas que pasan por el origen, i.e.,*

$$S = \{z = te^{i\alpha_1} \ : \ t \in \mathbb{R}\} \cup \{z = te^{i\alpha_2} \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

donde $\alpha_1,\alpha_2 \in [0, 2\pi)$ cumple $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \pi\mathbb{Q}$.

Supongamos que $F,G \in \mathcal{X}$ cumplen $|F(z)| = |G(z)|$ para todo $z \in S$. Entonces existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $G(z) = e^{i\theta}F(z)$.

Demostración. Si F tiene un cero de orden m en el origen, entonces G también. Por lo tanto podemos suponer sin pérdida de generalidad que F y G no se anulan en el origen. Sea ρ el máximo de los órdenes de F y G. Para $k = 1, 2$ definimos cuatro funciones enteras de orden menor o igual a ρ, $F_k(z) := F(ze^{i\alpha_k})$ y $G_k(z) := G(ze^{i\alpha_k})$. Por hipótesis $|F_k(x)| = |G_k(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos reescribir esta igualdad como

$$F_k(z)\overline{F_k(\overline{z})} = G_k(z)\overline{G_k(\overline{z})} \qquad \forall z \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Pero como es una igualdad entre funciones enteras, puede extenderse a todo el plano complejo.

Escribamos la factorización de Hadamard de F y G

$$F(z) = e^{\sum_{j=0}^{[\rho]} a_j z^j} \prod_{z_l \in Z(F)\cap Z(G)} E_{[\rho]}(z, z_l) \prod_{z_l \in Z(F)\setminus Z(G)} E_{[\rho]}(z, z_l)$$

$$G(z) = e^{\sum_{j=0}^{[\rho]} b_j z^j} \prod_{z_l \in Z(F)\cap Z(G)} E_{[\rho]}(z, z_l) \prod_{z_l \in Z(G)\setminus Z(F)} E_{[\rho]}(z, z_l)$$

donde $E_{[\rho]}(z, z_l) = \left(1 - \frac{z}{z_l}\right) e^{\sum_{j=1}^{[\rho]} \frac{1}{j}(\frac{z}{z_l})^j}$ y ρ es mayor o igual al orden de F y G.

Reemplazando las factorizaciones en (4.4) y cancelando los ceros en común obtenemos

$$\begin{aligned} e^{2\sum_{j=0}^{[\rho]} Re(a_j e^{ij\alpha_k}) z^j} \prod_{z_l \in Z(F)\setminus Z(G)} E_{[\rho]}(z, e^{-i\alpha_k} z_l) E_{[\rho]}(z, \overline{e^{-i\alpha_k} z_l}) = \\ e^{2\sum_{j=0}^{[\rho]} Re(b_j e^{ij\alpha_k}) z^j} \prod_{z_l \in Z(G)\setminus Z(F)} E_{[\rho]}(z, e^{-i\alpha_k} z_l) E_{[\rho]}(z, \overline{e^{-i\alpha_k} z_l}). \end{aligned}$$

De esta identidad se siguen dos consecuencias. En primer lugar

$$\sum_{j=0}^{[\rho]} Re(a_j e^{ij\alpha_k}) z^j = \sum_{j=0}^{[\rho]} Re(b_j e^{ij\alpha_k}) z^j$$

para $k = 1, 2$ y para todo $z \in \mathbb{C}$. Del término $j = 0$ obtenemos que $Re(a_0) = Re(b_0)$ y por lo tanto $b_0 = a_0 + i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Si $j \neq 0$, para $k = 1, 2$

$$\begin{aligned} Re(a_j e^{ij\alpha_k}) &= Re(b_j e^{ij\alpha_k}) \\ Re(a_j)cos(\alpha_k) - Im(a_j)sen(\alpha_k) &= Re(b_j)cos(\alpha_k) - Im(b_j)sen(\alpha_k) \\ (Re(a_j) - Re(b_j))cos(\alpha_k) &= (Im(a_j) - Im(b_j))sen(\alpha_k) \end{aligned}$$

Si $Re(a_j) \neq Re(b_j)$ y $Im(a_j) \neq Im(b_j)$ dividiendo las ecuaciones para $k = 1, 2$ obtenemos que $tg(\alpha_1) = tg(\alpha_2)$ lo cual es absurdo pues $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \pi\mathbb{Q}$. Por lo tanto $Re(a_j) = Re(b_j)$ ó $Im(a_j) = Im(b_j)$. Nuevamente, como $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \pi\mathbb{Q}$ no es posible que alguna de esas dos igualdades no se cumpla. Luego $a_j = b_j$ para todo $j \neq 0$.

En segundo lugar, $z_l \in Z(F)\backslash Z(G)$ sí y sólo sí $e^{2i\alpha_k}\overline{z_l} \in Z(G)\backslash Z(F)$ para $k = 1, 2$ y viceversa. Esto nos dice que el conjunto $(Z(F)\backslash Z(G)) \bigcup (Z(G)\backslash Z(F))$ es estable por la rotación de ángulo $2(\alpha_1 - \alpha_2)$. Pero como este ángulo no es un múltiplo racional de π, su órbita no puede ser un conjunto discreto. Esto último no es compatible con el hecho de que $(Z(F)\backslash Z(G)) \bigcup (Z(G)\backslash Z(F))$ sea un subconjunto de ceros de una función entera, por lo tanto $Z(F)\backslash Z(G) = Z(G)\backslash Z(F) = \varnothing$, i.e., $Z(F) = Z(G)$.

Sumando todo esto, resulta que $G(z) = e^{i\theta}F(z)$. □

Si consideramos funciones en el espacio de Hardy del semiplano superior $\mathbb{H}$, conocer el módulo de la función en dos rectas paralelas es suficiente para garantizar la unicidad.

Teorema 4.6. *Sea $a > 0$ fijo y consideramos el espacio de Hardy*

$$\mathcal{X} := \{F \in \mathcal{O}(\mathbb{H}) \ : \ \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dx < \infty\}.$$

Sean F,$G \in \mathcal{X}$ tales que

1. $|G(x+ia)| = |F(x+ia)|$ *para casi todo* $x \in \mathbb{R}$ *y*
2. $\lim_{y\to 0^+} |G(x+iy)| = \lim_{y\to 0^+} |F(x+iy)|$ *para casi todo* $x \in \mathbb{R}$.

Entonces existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $G = e^{i\theta}F$.

Como las funciones consideradas en este teorema no son enteras si no holomorfas en el semiplano superior, el teorema de factorización de Hadamard no puede ser aplicado en este caso. Sin embargo, las funciones del espacio de Hardy pueden factorizarse de manera única vía el producto de sus factores de Blaschke. La demostración de este teorema puede verse en [26, Teorema 2.1].

4.3 Recuperación de fase a través de la transformada de Fourier a tiempo corto

A lo largo de esta sección estudiaremos la posibilidad de recuperar la fase de $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ conociendo su transformada de Fourier a tiempo corto (STFT, por sus siglas en inglés). Dada $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, definimos la STFT de $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ respecto de la ventana g como

$$V_g f(x,\xi) := (f \cdot T_x\overline{g})\widehat{\ }(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-2\pi i t\cdot\xi}dx \qquad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Para una ventana g fija, $V_g f$ es un operador lineal de $L^2(\mathbb{R}^d)$ en $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ por lo cual multiplicar a f por una constante unimodular nos devuelve la misma medida sin fase de la STFT. Es por esto que, nuevamente, consideraremos esta ambigüedad como trivial.

Una primera observación es que $V_g f(x, \xi) = \langle f, g_\lambda \rangle$ donde el producto interno es el usual de L^2 y g_λ está definida como en el Capítulo 3, i.e., $g_\lambda = M_\xi T_x g$ para $\lambda = (x, \xi)$. Del mismo modo que en el caso de los marcos de Gabor, una condición suficiente para recuperar f a partir de $|V_g f|$ está dada en términos de los ceros de $V_g g$. Para probar esto, necesitamos enunciar y demostrar algunas propiedades de la STFT.

Del mismo modo que en el caso discreto, llamaremos π_λ a los operadores de traslación tiempo-frecuencia, donde ahora $\lambda = (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}$. En este caso tenemos la misma propiedad de conmutatividad que enunciamos en el Lema 3.1. La demostración es análoga, razón por la cual la omitiremos.

Lema 4.7. *Sean $\lambda = (x, \xi)$ y $\mu = (y, \beta) \in \mathbb{R}^{2d}$. Entonces vale que*

$$\pi_\lambda \pi_\mu = e^{2\pi i(-x\beta + \xi y)} \pi_\mu \pi_\lambda.$$

Lema 4.8 (Propiedad de covarianza)**.** *Sean λ y $\mu \in \mathbb{R}^{2d}$. Entonces*

$$V_{\pi_\lambda g}(\pi_\lambda f)(\mu) = e^{2\pi i \mu \mathcal{I} \lambda} V_g f(\mu),$$

donde $\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Sean λ, $\mu \in \mathbb{R}^{2d}$ y $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces

$$\begin{aligned} V_{\pi_\lambda g}(\pi_\lambda f)(\mu) &= \langle \pi_\lambda f, \pi_\mu \pi_\lambda g \rangle \\ &= e^{2\pi i \mu \mathcal{I} \lambda} \langle \pi_\lambda f, \pi_\lambda \pi_\mu g \rangle \\ &= e^{2\pi i \mu \mathcal{I} \lambda} \langle f, \pi_\mu g \rangle \\ &= e^{2\pi i \mu \mathcal{I} \lambda} V_g f(\mu), \end{aligned}$$

donde aquí usamos el lema anterior y el hecho de que los operadores π_λ son unitarios. □

Proposición 4.9 (Relación de ortogonalidad)**.** Sean $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces

$$\langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}.$$

Demostración. Asumiremos primero que g_j pertenecen a $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$, por lo cual $f_j \cdot T_x\overline{g_j} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Entonces la identidad de Parseval puede aplicarse a la integral respecto de ω y así obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} V_{g_1}f_1(x,\omega)\overline{V_{g_2}f_2(x,\omega)}d\omega dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f_1 \cdot T_x\overline{g_1})\widehat{\ }(\omega)\overline{(f_2 \cdot T_x\overline{g_2})\widehat{\ }(\omega)}d\omega\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f_1(t)\overline{f_2(t)}\;\overline{g_1(t-x)}g_2(t-x)dt\right) dx.
\end{aligned}$$

Como f_1,$f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tenemos que $f_1\overline{f_2} \in L^1(\mathbb{R}^d, dt)$, además $g_1\overline{g_2} \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ con lo cual el teorema de Fubini nos permite intercambiar el orden de integración. Obtenemos entonces

$$\begin{aligned}
\langle v_{g_1}f_1, V_{g_2}f_2\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t)\overline{f_2(t)}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\overline{g_1(t-x)}g_2(t-x)dx\right)dt \\
&= \langle f_1, f_2\rangle\,\overline{\langle g_1, g_2\rangle}.
\end{aligned}$$

La extensión a $g_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ la haremos por densidad de $L^1 \cap L^\infty$ en L^2. Si $g_1 \in L^1 \cap L^\infty$ está fija, la aplicación $g_2 \mapsto \langle V_{g_1}f_1, V_{g_2}f_2\rangle$ es un funcional lineal que coincide con $\langle f_1, f_2\rangle\langle g_2, g_1\rangle$ en un subespacio denso de L^2. Además es acotado, con lo cual se puede extender a toda $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Del mismo modo, para f_1,f_2 y $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, el funcional lineal conjugado $g_1 \mapsto \langle V_{g_1}f_1, V_{g_2}f_2\rangle$ coincide con $\langle f_1, f_2\rangle\overline{\langle g_1, g_2\rangle}$ en $L^1 \cap L^\infty$ y se extiende a todo L^2.

Así, quedan probadas las relaciones de ortogonalidad para toda f_j,$g_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$. □

Con todo esto, podemos probar la siguiente identidad.

Proposición 4.10. Sean f,g,h,$u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces

$$(V_g f \cdot \overline{V_u h})\widehat{\ }(x,\xi) = (V_h f \cdot \overline{V_u g})(-\xi, x) \qquad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Demostración. Primero observemos que $\mathcal{I}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -I$, donde I es la matriz identidad. Por el Lema 4.8 tenemos que

$$e^{-2\pi i\mu\cdot\lambda}V_h f(\mu) = e^{2\pi i\mu\mathcal{I}^2\lambda}V_h f(\mu) = V_{\pi_{\mathcal{I}\lambda}h}(\pi_{\mathcal{I}\lambda}f)(\mu).$$

Con esto obtenemos que

$$
\begin{aligned}
(V_h f \cdot \overline{V_u g})\widehat{\ }(\lambda) &= \int V_h f(\mu)\overline{V_u g(\mu)} e^{-2\pi i \mu\cdot\lambda} d\mu \\
&= \int V_{\pi_{\mathcal{I}\lambda} h}(\pi_{\mathcal{I}\lambda} f)(\mu)\overline{v_u g(\mu)} d\mu \\
&= \langle V_{\pi_{\mathcal{I}\lambda} h}(\pi_{\mathcal{I}\lambda} f), V_u g\rangle = \langle \pi_{\mathcal{I}\lambda} f, g\rangle\overline{\langle u, \pi_{\mathcal{I}\lambda} h\rangle},
\end{aligned}
$$

donde en el último paso usamos la relación de ortogonalidad de la Proposición 4.9.

Observemos que el operador adjunto $\pi_\lambda^* = c\pi_{-\lambda}$ donde $|c| = 1$. Sin embargo, este factor se cancela al pasar a los dos operadores hacia el otro lado del producto interno, es decir

$$
(V_h f \cdot \overline{V_u g})\widehat{\ }(\lambda) = \langle \pi_{\mathcal{I}\lambda} f, g\rangle\overline{\langle u, \pi_{\mathcal{I}\lambda} h\rangle} = \langle f, \pi_{-\mathcal{I}\lambda} g\rangle\overline{\langle h, \pi_{-\mathcal{I}\lambda} u\rangle} = (V_h f \cdot \overline{V_u g})(-\mathcal{I}\lambda).
$$

Si $\lambda = (x, \xi)$ entonces $-\mathcal{I}\lambda = (-\xi, x)$, con lo cual hemos probado lo que queríamos. $\square$

Lema 4.11. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces $V_f f$ determina unívocamente a f, i.e., si existen $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tales que $V_f f = V_g g$ en casi todo punto entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f = e^{i\alpha} g$.*

Demostración. Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tales que $V_f f(x, \xi) = V_g g(x, \xi)$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^{2d}$. Aplicando la inversa de la transformada de Fourier en la variable ξ obtenemos la siguiente igualdad en $L^1(\mathbb{R}^d)$

$$
f \cdot \overline{T_x f} = g \cdot \overline{T_x g} \qquad c.t.p.\ x \in \mathbb{R}^d.
$$

Si $f \neq 0$ en un conjunto de medida positiva, existe t_0 tal que $f(t_0) \neq 0$ y $g(t_0) \neq 0$. Por lo tanto

$$
f(t_0) \cdot \overline{f(t_0 - x)} = g(t_0) \cdot \overline{g(t_0 - x)}.
$$

Esto quiere decir que existe una constante $c = \frac{\overline{g(t_0)}}{f(t_0)}$ tal que $f = c \cdot g$ y además debe ser $|c| = 1$ dado que $V_f f = V_g g$.

Si $f = 0$ c.t.p. tenemos por la igualdad anterior que

$$
g \cdot \overline{T_x g} = 0 \qquad c.t.p.\ x \in \mathbb{R}^d.
$$

Esto implica que $g = 0$ c.t.p.. Supongamos por el contrario que $E = \{g \neq 0\}$ tiene medida de Lebesgue positiva, pero entonces debe ser $T_x g(E) = g(E - x) = 0$ para casi todo $t \in E$. Esta última igualdad implica que $g = 0$ en $E - x$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. Veamos que esto implica que $g = 0$ c.t.p.

Como $g(E) \neq 0$ y $g(E-x) = 0$, tenemos que $E \cap (E-x) = \varnothing$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. Además, si $z \in (E-x) \cap (E-y)$ tenemos que

$$\begin{aligned} z =& e_1 - x = e_2 - y \\ & e_1 = e_2 - (y-x), \end{aligned}$$

como $E \cap (E-x) = \varnothing$ c.t.p. x, resulta que $(E-x) \cap (E-y) = \varnothing$ c.t.p. x,y.

Como $|E-x| = |E| > 0$, podemos tomar para cada $x \in A := \{x \in \mathbb{C}^d : g \cdot \overline{T_x g} = 0\}$ un elemento $q_x \in \mathbb{Q} \cap (E-x)$. Como todos los $(E-x)$ son disjuntos, resulta que todos los q_x son distintos. Por lo tanto el cardinal de A es a lo sumo numerable y eso es una contradicción porque A tiene medida de Lebesgue total en $\mathbb{R}^d$. Esta contradicción vino de suponer que el conjunto en donde $g \neq 0$ tiene medida de Lebesgue positiva.

□

Para más detalles sobre la recuperación de f a partir de $V_f f$ ver [5].

Teorema 4.12. *Sea $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ con $V_g g(x,\xi) \neq 0$ para casi todo $x,\xi \in \mathbb{R}^d$. Entonces para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $|V_g f|$ permite recuperar f de manera unívoca, i.e. si $f,h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ son tales que $|V_g f| = |V_g h|$ entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $h = e^{i\alpha} f$.*

Demostración. Por la Proposición 4.10 tenemos

$$(|V_g f|^2)\widehat{\ }(x,\xi) = V_f f(-\xi, x) \cdot \overline{V_g g(-\xi, x)} \qquad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

De allí podemos recuperar $V_f f$ en casi todo punto. Por el Lema 4.11 esto determina f salvo constantes de módulo 1. Luego si f y h son tales que $|V_g f| = |V_g h|$ c.t.p. existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f = e^{i\alpha} h$.

□

4.4 Una condición de inyectividad para señales ralas

En esta sección vamos a considerar señales ralas en un diccionario. Un diccionario D es un conjunto de d vectores en $\mathbb{C}^N$ y lo identificaremos con la matriz que tiene como columnas a los d vectores que forman el diccionario. La clase de señales que llamaremos k-ralas en el diccionario D, o simplemente señales kD-ralas, es

$$\mathcal{C}_{k,D} = \{x \in \mathbb{C}^N : \exists z \in \mathbb{C}^d, \|z\|_0 \leqslant k \text{ tal que } x = Dz\}$$

donde $\|z\|_0$ es la cantidad de coordenadas no nulas de z. Para mayor comodidad, diremos kD-recuperación de fase en lugar de recuperación de fase para $\mathcal{C}_{k,D}$.

Dado un diccionario $D = (d_i)_{i=1}^d$ y un conjunto de índices $K \subset \{1, \ldots, d\}$, notaremos $W_K := span\{d_i\}_{i \in K}$. Con esto, podemos caracterizar el conjunto de mediciones que permiten la kD-recuperación de fase. Sea $\mathcal{A}_\Phi^2$ el operador definido en (1.4) donde $\Phi = \{f_i\}_{i_1}^m$ para $f_i \in \mathbb{C}^N$ un marco.

Teorema 4.13. *[8, Teorema 3.1] Con las notaciones de arriba, vale lo siguiente:*

1. *Si para todo K con $|K| = 2k$ el núcleo de $\mathcal{A}_\Phi^2$ no contiene matrices Hermitianas de rango 1 ó 2 cuyo rango esté contenido en W_K, entonces $\Phi = \{f_i\}_{i=1}^m$ permite la kD-recuperación de fase.*

2. *Si $\Phi = \{f_i\}_{i=1}^m$ permite la kD-recuperación de fase, entonces para todo K con $|K| = k$ el núcleo de $\mathcal{A}_\Phi^2$ no contiene matrices Hermitianas de rango 1 ó 2 cuyo rango esté contenido en W_K.*

Demostración.

1. Probaremos la primera parte por contrarrecíproco, i.e., queremos ver que si $\Phi = \{f_i\}_{i=1}^m$ no permite la kD-recuperación de fase entonces existe algún K con $|K| = 2k$ tal que hay alguna matriz Hermitiana de rango 1 ó 2 en el núcleo de $\mathcal{A}_\Phi^2$ cuya imagen está contenida en W_K. Supongamos entonces que $\Phi = \{f_i\}_{i=1}^m$ no permite la kD-recuperación de fase y sean $x \neq y$ módulo constantes de módulo 1 señales k-ralas tales que

$$\langle xx^*, f_i f_i^* \rangle_{HS} = |\langle x, f_i \rangle|^2 = |\langle y, f_i \rangle|^2 = \langle yy^*, f_i f_i^* \rangle_{HS} \qquad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Entonces, $xx^* - yy^*$ es una matriz Hermitiana de rango menor o igual a 2 que pertenece al núcleo de $\mathcal{A}_\Phi^2$. Sean z_x y z_y tales que $\|z_x\|_0, \|z_y\|_0 \leqslant k$ y $x = Dz_x$ e $y = Dz_y$, entonces $ran(xx^* - yy^*) \subseteq W_{sop(z_x) \cup sop(z_y)}$ donde $sop(z_x) = \{i : (z_x)_i \neq 0\}$. Si podemos ver que el rango de $xx^* - yy^*$ es al menos 1 habremos logrado probar lo que queríamos dado que $|sop(z_x) \cup sop(z_y)| \leqslant 2k$.

Supongamos que no es el caso, es decir, que $xx^* - yy^* = 0$. Como además $x \neq cy$ para todo $|c| = 1$, ambos vectores son no nulos. Entonces existe $v \in \mathbb{C}^N$ tal que $\langle v, x \rangle \neq 0$. Evaluando $xx^* - yy^*$ en v y despejando x obtenemos que

$$x = \frac{\langle v, y \rangle}{\langle v, x \rangle} y,$$

es decir, $x = \lambda y$ para $\lambda \in \mathbb{C}$. Reemplazando nuevamente en $xx^* - yy^* = 0$ obtenemos que $|\lambda| = 1$, lo cual es una contradicción.

2. Supongamos que $\Phi = \{f_i\}_{i=1}^m$ permite la kD-recuperación de fase pero existe un K tal que $|K| = k$ y el núcleo de $\mathcal{A}_\Phi^2$ contiene una matriz Hermitiana H de rango 1 ó 2 cuya imagen está contenida en W_K. Por el teorema de diagonalización para operadores autoadjuntos (ver [13, Cap. 2, Teo 5.1]) existe una base ortonormal $\{\phi_1, \cdots, \phi_N\}$ de $\mathbb{C}^N$ de autovectores de H, con sus correspondientes autovalores reales $(\lambda_j)_{j=1}^N$. Entonces podemos escribir $H = \sum_j \lambda_j \phi_j \phi_j^*$.

   Como el rango de H es menor ó igual 2 y $H \neq 0$, existen a lo sumo dos autovalores no nulos. Es claro que los respectivos autovectores asociados están contenidos en W_K, dado que forman una base de la imagen de H, y por lo tanto son kD-ralos.

   Supongamos en primer lugar que sólo hay un autovalor distinto de cero λ_1. Si escribimos $x = |\lambda_1|^{1/2}\phi_1$, entonces $H = sg(\lambda_1)xx^*$ y por lo tanto

$$0 = \langle xx^*, f_i f_i^* \rangle = |\langle x, f_i \rangle|^2 = 0.$$

   Esto quiere decir que las dos señales kD-ralas x y 0 tienen la misma medida sin fase, pero $x \neq 0$ con lo cual $\mathcal{A}_\Phi$ no es inyectivo. Esto es una contradicción.

   Si, por otro lado, existen dos autovalores λ_1 y λ_2 no nulos escribimos $x = |\lambda_1|^{1/2}\phi_1$ e $y = |\lambda_2|^{1/2}\phi_2$ y resulta que $H = \pm xx^* \pm yy^*$, donde el signo depende del signo de los autovalores. Si los signos son iguales, reemplazando las escrituras de x e y obtenemos que $|\langle x, f_i \rangle|^2 + |\langle y, f_i \rangle|^2 = 0$ por lo cual nuevamente tenemos dos señales kD-ralas que miden 0. Si los signos no son iguales, nos queda que $|\langle x, f_i \rangle|^2 - |\langle y, f_i \rangle|^2 = 0$ y por lo tanto $\mathcal{A}_\Phi x = \mathcal{A}_\Phi y$. Ambas señales son kD-ralas y no pueden ser múltiplos entre sí porque son ortogonales.

□

Apéndice

Marcos en dimensión finita

Sea $\mathcal{B}$ un espacio de Banach de dimensión finita d y $\Phi := \{\phi_1, ..., \phi_N\} \subseteq \mathcal{B}'$ un conjunto de funcionales lineales y acotados. Consideramos el operador $\mathcal{C}_\Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{K}^N$ dado por

$$\mathcal{C}_\Phi(f) = (\langle f, \phi_i \rangle)_{i=1}^N.$$

Definición 4.14. *Diremos que $\Phi \subseteq \mathcal{B}'$ es un marco si existen constantes $0 < A \leqslant B < \infty$ tales que*

$$A\|f\|_{\mathcal{B}} \leqslant \|\mathcal{C}_\Phi f\| \leqslant B\|f\|_{\mathcal{B}} \tag{4.5}$$

donde en $\mathbb{K}^N$ podemos tomar cualquier norma.

Una consecuencia inmediata de esta definición es que si Φ es un marco entonces los elementos de Φ generan todo el espacio $\mathcal{B}'$ y por lo tanto $N \geqslant d$. Si no fuera así, debería existir $f \in \mathcal{B}$ tal que $\phi_i(f) = \langle f, \phi_i \rangle = 0$ para todo i pero $f \neq 0$ lo cual contradice la desigualdad (4.5).

Como $\mathcal{B}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, resulta que $\mathcal{B}$ es isomorfo a $\mathbb{K}^d$ y por lo tanto $\mathcal{B}'$ también. Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son $\mathbb{K}^d$ y por lo tanto $\Phi = \{\phi_1, ..., \phi_N\} \subseteq \mathbb{K}^d$.

Lema 4.15. *Sea $N \geqslant d$. Existe una relación uno a uno entre los marcos $\Phi \subseteq \mathbb{K}^d$ de N elementos y las matrices de $\mathbb{K}^{d\times N}$ de rango máximo.*

Demostración. Si $\Phi = \{\phi_1, ..., \phi_N\} \subseteq \mathbb{K}^d$ es un marco de N elementos, considero la matriz que tiene a ϕ_i como columnas. Como Φ es un sistema de generadores de $\mathbb{K}^d$, la matriz debe tener rango máximo igual a d. Reciprocamente, si $M \in \mathbb{K}^{d\times N}$ es una matriz de rango máximo d entonces sus columnas $\{C_1, ..., C_N\}$ sos un sistema de generadores de $\mathbb{K}^d$. Más aún, consideremos el operador definido de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^N$ dado por $f \mapsto fM = (\langle f, C_1 \rangle, ..., \langle f, C_N \rangle)$. Por razones de dimensión éste resulta inyectivo y por lo tanto existen $0 < A \leqslant B < \infty$ tales que $A \leqslant \frac{\|M^t f\|}{\|f\|} \leqslant B$ para toda $f \in \mathbb{K}^d$ con $\|f\| = 1$. Por lo tanto las columnas de M forman un marco en $\mathbb{K}^d$ de N elementos. $\square$

Bibliografía

[1] Lars V. Ahlfors. *"Complex analysis"*. Third. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.

[2] Edwin J. Akutowicz. “On the determination of the phase of a Fourier integral. I”. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 83 (1956).

[3] Edwin J. Akutowicz. “On the determination of the phase of a Fourier integral. II”. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 8 (1957).

[4] Rima Alaifari and Philipp Grohs. “Phase retrieval in the general setting of continuous frames for Banach spaces”. In: *SIAM J. Math. Anal.* 49 (2017).

[5] L. Auslander and R. Tolimieri. “Radar ambiguity functions and group theory”. In: *SIAM J. Math. Anal.* 16 (1985).

[6] Radu Balan, Pete Casazza, and Dan Edidin. “On signal reconstruction without phase”. In: *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 20 (2006).

[7] Afonso S. Bandeira et al. “Saving phase: injectivity and stability for phase retrieval”. In: *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 37 (2014).

[8] Irena Bojarovska and Axel Flinth. “Phase retrieval from Gabor measurements”. In: *J. Fourier Anal. Appl.* 22 (2016).

[9] Joaquim Bruna. “Sampling in complex and harmonic analysis”. In: *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*. Vol. 201. Progr. Math. Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 225–246.

[10] R E Burge et al. “The application of dispersion relations (Hilbert transforms) to phase retrieval”. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 7 (1974).

[11] Jameson Cahill, Peter G. Casazza, and Ingrid Daubechies. “Phase retrieval in infinite-dimensional Hilbert spaces”. In: *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B* 3 (2016).

[12] Aldo Conca et al. "An algebraic characterization of injectivity in phase retrieval". In: *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 38 (2015).

[13] John B. Conway. *A course in functional analysis.* Second. Vol. 96. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1990.

[14] C Fienup and J Dainty. "Phase retrieval and image reconstruction for astronomy". In: *Image recovery: theory and application* 231 (1987), p. 275.

[15] Philipp Grohs, Sarah Koppensteiner, and Martin Rathmair. "Phase Retrieval: Uniqueness and Stability". In: *SIAM Rev.* 62 (2020).

[16] Manuel Guizar-Sicairos and James R Fienup. "Phase retrieval with transverse translation diversity: a nonlinear optimization approach". In: *Optics express* 16.10 (2008), pp. 7264–7278.

[17] Christopher Hammond and Christopher Hammond. *The basics of cristallography and diffraction.* Vol. 214. Oxford, 2001.

[18] E. Hofstetter. "Construction of time-limited functions with speci ed autocorrelation functions." In: *IEEE Transactions on Information Theory* 10 (1964).

[19] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I.* Classics in Mathematics. Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition [Springer, Berlin; MR1065993 (91m:35001a)]. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[20] Philippe Jaming. "Phase retrieval techniques for radar ambiguity problems". In: *J. Fourier Anal. Appl.* 5 (1999).

[21] Philippe Jaming. "Uniqueness results in an extension of Pauli's phase retrieval problem". In: *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 37 (2014).

[22] Michael V. Klibanov, Paul E. Sacks, and Alexander V. Tikhonravov. "The phase retrieval problem". In: *Inverse Problems* 11 (1995).

[23] Steven G. Krantz. *Handbook of complex variables.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

[24] Marcus Frederick Charles Ladd, Rex Alfred Palmer, and Rex Alfred Palmer. *Structure determination by X-ray crystallography.* Springer, 1977.

[25] T. Y. Lam and K. H. Leung. "On vanishing sums of roots of unity". In: *J. Algebra* 224 (2000).

[26] Stéphane Mallat and Irène Waldspurger. "Phase retrieval for the Cauchy wavelet transform". In: *J. Fourier Anal. Appl.* 21 (2015).

[27] W. F. Osgood. *Lehrbuch der Funktionentheorie. Erster Band.* Chelsea Publishing Co., New York, 1965.

[28] Raymond E. A. C. Paley and Norbert Wiener. *Fourier transforms in the complex domain.* Vol. 19. American Mathematical Society Colloquium Publications. Reprint of the 1934 original. American Mathematical Society, Providence, RI, 1987.

[29] Wolfgang Pauli. "Die allgemeinen prinzipien der wellenmechanik". In: *Quantentheorie.* Springer, 1933, pp. 83–272.

[30] Götz E. Pfander. "Gabor frames in finite dimensions". In: *Finite frames.* Appl. Numer. Harmon. Anal. Birkhäuser/Springer, New York, 2013, pp. 193–239.

[31] M. Plancherel and G. Pólya. "Fonctions entières et intégrales de fourier multiples". In: *Comment. Math. Helv.* 10 (1937).

[32] Lawrence Rabiner. "Fundamentals of speech recognition". In: *Fundamentals of speech recognition* (1993).

[33] Kristian Seip. *Interpolation and sampling in spaces of analytic functions.* Vol. 33. University Lecture Series. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[34] Cynthia Vinzant. "A small frame and a certi ficate of its injectivity." In: *ArXiv e-prints, 1502.04656* (2015).

[35] Adriaan Walther. "The question of phase retrieval in optics". In: *Optica Acta* 10 (1963).