



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Secuencias de baja discrepancia  
sin correlación Poissoniana de pares

Ignacio Mollo Cunningham

Directora: Verónica Becher

Fecha de Manuscrito: 2021/02/05

**Resumen:** En el año 1999, M. Levin definió un número real  $\lambda$  tal que la secuencia de las partes fraccionarias de  $(2^n \lambda)_{n \geq 1}$  verifica que los primeros  $N$  términos tienen discrepancia respecto de la equidistribución del orden  $\mathcal{O}((\log N)^2/N)$ . Ésta es la menor discrepancia conocida para este tipo de secuencias. En este trabajo mostramos que la secuencia de las partes fraccionarias de  $(2^n \lambda)_{n \geq 1}$  no tiene correlación Poissoniana de pares. Más aún, mostramos esto para todos los elementos de una familia de variantes de  $\lambda$ .

# Tabla de Contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
1.1	Equidistribución y Discrepancia . . . . .	5
1.2	Correlación Poissoniana de Pares . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Los números de Levin</b>	<b>9</b>
2.1	El número $\lambda$ . . . . .	9
2.2	La familia $\mathcal{L}$ . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Secuencias de baja discrepancia sin correlación Poissoniana de pares</b>	<b>17</b>
3.1	Caso $\lambda$ . . . . .	17
3.2	Generalización . . . . .	20



# Capítulo 1

## Introducción

En esta tesis estudiaremos la estadística de *correlación de pares* de secuencias para una familia particular de secuencias. Heurísticamente, dada una secuencia de números reales en  $[0, 1)$ , esta estadística cuenta la cantidad de pares de elementos que se encuentran “demasiado cerca” entre sí. Decimos que una secuencia tiene *correlación Poissoniana de pares* si su comportamiento bajo esta estadística coincide con el comportamiento esperado de una secuencia seleccionada al azar en el  $[0, 1)$ . En la Sección 1.2 daremos las definiciones pertinentes.

Los ejemplos de secuencias deterministas que verifican esta propiedad son muy limitados. Nuestra motivación al comenzar este trabajo era la de exhibir un ejemplo positivo que tuviera la forma  $(2^n \lambda \bmod 1)_{n \in \mathbb{N}}$ , donde  $x \bmod 1$  denota la mantisa de  $x$ , y  $\lambda$  es una constante prometedora, en un sentido que clarificaremos en la sección 1.2. Desafortunadamente, esto resultó ser falso. En esta tesis, daremos la demostración de que esta secuencia, junto con otras de construcción similar, fallan esta propiedad.

Este capítulo se divide en dos secciones. En la primera, indicamos los conceptos básicos que usaremos de la teoría de distribución uniforme. El lector o lectora que desee una exposición más detallada puede consultar, por ejemplo [8]. En la segunda sección decimos lo que significa que una secuencia tenga correlación de pares Poissoniana, y hablaremos un poco más de la constante  $\lambda$  que nos ocupará por el resto del trabajo.

### 1.1 Equidistribución y Discrepancia

Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una secuencia de números reales en  $[0, 1)$ . Decimos que esta secuencia es *uniformemente distribuida módulo 1* (o también *equidistribuida módulo 1*) si para cada par de números  $a, b$  en el intervalo unitario se cumple que

$$\frac{\#\{1 \leq i \leq N \mid a \leq x_i < b\}}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (b - a).$$

Intuitivamente, una secuencia verifica esta propiedad si cada subintervalo semiabierto de  $[0, 1)$  contiene su “justa cantidad” de elementos de la secuencia. Con fines ilustrativos, aquí presentamos algunos ejemplos de secuencias que verifican o fallan esta propiedad.

- Si  $x$  es un número irracional cualquiera, entonces la secuencia  $(nx \bmod 1)_{n \in \mathbb{N}}$  es uniformemente distribuida módulo 1. Por otra parte, si  $x$  es racional, la misma secuencia siempre falla esta propiedad.
- Una secuencia convergente nunca es equidistribuida módulo 1. Esto puede probarse fácilmente considerando cualquier intervalo  $[a, b)$  que esté a distancia positiva del punto límite, y observando que hay sólo finitos términos de la secuencia allí.

Sea  $x_1, \dots, x_N$  una secuencia finita de números reales en  $[0, 1)$ . La *discrepancia* de esta secuencia se define como el número

$$D_N(x_1, \dots, x_N) = \sup_{0 \leq \alpha < \beta \leq 1} \left| \frac{\#\{1 \leq i \leq N \mid x_i \in (\alpha, \beta)\}}{N} - (\beta - \alpha) \right|.$$

No es difícil de probar que, para todo  $N$  y para *cualquier* secuencia finita,

$$\frac{1}{N} \leq D_N(x_1, \dots, x_N) \leq 1.$$

La desigualdad de la izquierda se alcanza, por ejemplo, en la secuencia perfectamente equidistribuida  $(0, 1/N, 2/N, \dots, (N-1)/N)$ . La desigualdad de la derecha también se alcanza, por ejemplo en la secuencia perfectamente *mal* equidistribuida  $(0, 0, \dots, 0)$ . Intuitivamente, la discrepancia de una secuencia finita de números se puede pensar como una forma de medir cuán bien distribuidos están esos números en el intervalo  $[0, 1)$ .

Se puede extender la definición de discrepancia a una secuencia infinita  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $[0, 1)$ . Simplemente se toma, para cada  $N$ ,  $D_N((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = D_N(x_1, \dots, x_N)$ . Esta definición nos provee de una herramienta cuantitativa para medir la equidistribución de una secuencia. Esta interpretación se basa en el siguiente Teorema.

**Teorema.** Una secuencia  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es equidistribuida si y sólo si  $D_N((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ .

Esto no sólo nos da una herramienta para verificar si una secuencia es equidistribuida, sino que también nos permite clasificar secuencias de acuerdo a la rapidez con la que convergen a la equidistribución.

Un caso particular de gran interés es el de las secuencias de la forma  $(q^n x \bmod 1)_{n \in \mathbb{N}}$ , donde  $q$  es un entero mayor a 1 y  $x$  es un número fijo. Una secuencia de este tipo es equidistribuida, exactamente cuando  $x$  es un número *normal en base  $q$*  de acuerdo con la definición de Borel. Intuitivamente, un número es normal en base  $q$  si no existe ningún

bloque que aparezca “demasiadas veces” en su expansión en base  $q$ . En particular, ningún número racional es normal, porque su expansión es eventualmente periódica. Un ejemplo clásico de número normal es la *constante de Champernowne*

$$0,123456789101112131415\dots$$

que se obtiene como la concatenación, en orden, de todos los números naturales escritos en base 10. Esta constante es normal en base 10. Para cada  $q \geq 2$  existe una constante de Champernowne análoga que es normal en base  $q$ .

Es bien conocido el hecho de que el conjunto de todos los números normales en el intervalo  $[0, 1)$  tiene medida completa. Sin embargo, dado un número cualquiera, no se conoce una forma de determinar si es normal o no. En particular, establecer la normalidad de constantes fundamentales de la matemática, como  $\pi$ ,  $e$  y  $\sqrt{2}$  continúan siendo problemas abiertos.

## 1.2 Correlación Poissoniana de Pares

Decimos que una secuencia  $(x_n)_{n \geq 1}$  de números reales en  $[0, 1)$  tiene *correlación Poissoniana de pares* si para todo número no negativo  $s$ , se verifica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(s) = 2s$$

donde

$$F_N(s) = \frac{1}{N} \# \left\{ (i, j) : 1 \leq i \neq j \leq N \text{ and } \|x_i - x_j\| < \frac{s}{N} \right\}.$$

y

$$\|x\| = \text{dist}(x, \mathbb{Z}).$$

La función  $F_N(s)$  cuenta la cantidad de pares  $(x_n, x_m)$  con  $1 \leq m, n \leq N$ ,  $m \neq n$ , de puntos que se encuentran a una distancia de a lo sumo  $s/N$ , en el sentido de distancia en el círculo. Casi seguramente, una secuencia de variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidas en el intervalo unitario tiene esta propiedad. Los ejemplos concretos son, sin embargo, muy difíciles de encontrar: uno de ellos es la secuencia  $(\sqrt{n} \bmod 1)_{n \geq 1}$  excluyendo los términos indexados por cuadrados perfectos [6]. Se conoce que para casi todos los números reales  $x$ ,  $(a_n x \bmod 1)_{n \geq 1}$  cumple la propiedad si  $(a_n)_{n \geq 1}$  es una secuencia de números enteros *lacunaria* [15]; o también cuando  $(a_n)_{n \geq 1}$  es un polinomio en  $n$  de grado mayor a 1 [14, 13]. Sin embargo, para valores específicos tales como  $x = \sqrt{2}$  y  $a_n = n^2$  aún no se conoce si  $(a_n x \bmod 1)_{n \geq 1}$  tiene correlación Poissoniana de pares o no.

Si una secuencia tiene correlación Poissoniana de pares entonces también es equidistribuida módulo 1. Esto fue recientemente probado en [1, Theorem 1] y también en [7, Corollary 1.2] de manera independiente. La afirmación recíproca no siempre es cierta.

Se ha demostrado que esta propiedad no se cumple en varias secuencias uniformemente distribuidas de la forma  $(b^n x \bmod 1)_{n \geq 1}$  donde  $b$  es un entero mayor que 1 y  $x$  es una constante. Pirsic y Stockinger [12] lo hicieron para la constante de Champernowne definida en base  $b$ . Larcher y Stockinger [9] a su vez lo hicieron para un número de Stoneham  $x$  [16] y para todo número real  $x$  con una expansión que pueda escribirse como una palabra de De Bruijn infinita (para una presentación detallada de estas palabras infinitas ver [5, 17]). Larcher y Stockinger en [10] muestran que la propiedad tampoco se cumple en otras secuencias de la forma  $(a_n x \bmod 1)_{n \geq 1}$ .

En [2], Aistleitner, Larcher y Lewko dieron una caracterización de las secuencias  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  para las cuales el conjunto

$$\Delta(a_n) = \{ \alpha \in [0, 1) \mid (a_n \alpha)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tiene correlación Poissoniana de pares} \}$$

es de medida completa. Esta caracterización está basada en el concepto de *energía aditiva* de una secuencia:

$$E_N(a_n) = \#\{ 0 < i, j, k, l \leq N \mid a_i + a_j = a_k + a_l \}.$$

De acuerdo a esta caracterización,  $\Delta(a_n)$  tiene medida completa si y sólo si  $E_N(a_n) \in \mathcal{O}(N^{3-\varepsilon})$  para algún  $\varepsilon > 0$ . En particular, la secuencia  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  tiene energía aditiva trivial (del orden  $N^2$ ) y esto implica que  $(2^n \alpha \bmod 1)_{n \in \mathbb{N}}$  tiene correlación Poissoniana de pares para casi todos los  $\alpha \in [0, 1)$ . Sin embargo, aún no se ha hallado ningún  $\alpha$  concreto para el cual esto sea cierto.

En este trabajo, mostramos que la secuencia  $(2^n \lambda \bmod 1)_{n \geq 1}$ , donde  $\lambda$  es el número real definido por Levin en [11, Theorem 2], no tiene correlación Poissoniana de pares. El número de Levin  $\lambda$  se define constructivamente usando matrices triangulares basadas en el Triángulo de Pascal y verifica que la discrepancia de los primeros  $N$  términos de la secuencia  $(2^n \lambda \bmod 1)_{n \geq 1}$  es  $\mathcal{O}((\log N)^2/N)$  (en particular, es un número normal en base 2). Ésta es la cota de discrepancia más pequeña conocida para secuencias de la forma  $(2^n \alpha \bmod 1)_{n \geq 1}$ .

También mostramos que cada uno de los números reales  $\rho$  considerados por Becher y Carton en [3] son tales que la secuencia  $(2^n \rho \bmod 1)_{n \geq 1}$  no verifica la propiedad. Los números  $\rho$  son variantes del número de Levin  $\lambda$  porque están definidos usando rotaciones de matrices triangulares de Pascal, y la secuencia  $(2^n \rho \bmod 1)_{n \geq 1}$  exhibe la misma discrepancia que la que se obtiene con Levin. Denotamos  $\mathcal{L}$  al conjunto formado por estas variantes de  $\lambda$ .

El resto de este trabajo nos dedicamos a demostrar el siguiente resultado:

**Teorema 1.** *Para cada  $\rho \in \mathcal{L}$ , la secuencia de partes fraccionarias  $(2^n \rho)_{n \geq 1}$  no posee correlación Poissoniana de pares.*

# Capítulo 2

## Los números de Levin

Comenzamos definiendo el número  $\lambda$  presentado por primera vez por Levin en [11, Theorem 2], siguiendo la caracterización que Becher y Carton dan en [3]. Posteriormente, exhibimos las variantes  $\rho \in \mathcal{L}$  de este número también presentadas en [3].

### 2.1 El número $\lambda$

Como es corriente, denotamos por  $\mathbb{F}_2$  al cuerpo de dos elementos. En este trabajo, identificamos palabras binarias con vectores de  $\mathbb{F}_2$ . Con esto queremos decir que utilizamos operaciones de palabras (como la concatenación) y operaciones de vectores (como la multiplicación matricial) indistintamente.

Empezamos definiendo, de manera recursiva, una secuencia de matrices en  $\mathbb{F}_2$ :

$$M_0 = (1) \quad \text{y para cada } d \geq 0, \quad M_{d+1} = \begin{pmatrix} M_d & M_d \\ 0 & M_d \end{pmatrix}.$$

Las primeras matrices en esta secuencia son:

$$M_0 = (1), \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las siguientes propiedades se deducen en forma directa a partir de la definición de  $M_d$ .

**Lema 1.** Sea  $d \geq 0$ .

1.  $M_d$  es una matriz cuadrada de  $2^d$  filas y columnas.
2.  $M_d$  es triangular superior, y los elementos de su diagonal son unos. En particular,  $M_d$  es inversible.
3. La primera fila y la última columna de  $M_d$  son el vector de unos.

Menos evidente es el hecho de que cada una de estas matrices puede obtenerse como un truncamiento del triángulo de Pascal en módulo 2. Esto lo demostramos con la ayuda del siguiente Lema. Como es usual,  $A_{i,j}$  denota el elemento de la matriz  $A$  que se encuentra en la fila  $i$  y en la columna  $j$ .

**Lema 2.** La matriz  $M_d$  verifica, para todo  $1 < i \leq 2^d$  y  $1 \leq j < 2^d$ , que

$$(M_d)_{i,j} = (M_d)_{i-1,j} + (M_d)_{i,j+1}.$$

En otras palabras, cada elemento de  $M_d$  es igual a la suma entre su vecino superior y su vecino derecho.

*Demostración.* Lo hacemos por inducción en  $d \geq 0$ . Si  $d = 0$ , entonces  $M_d = (1)$  y no hay nada que hacer. Supongamos, entonces, que esta propiedad vale para  $M_d$  y veamos que se preserva para  $M_{d+1}$ . Por definición,

$$M_{d+1} = \begin{pmatrix} M_d & M_d \\ 0 & M_d \end{pmatrix},$$

y entonces podemos pensar a la matriz  $M_{d+1}$  como “subdividida” en cuatro cuadrantes distintos. Sean  $i, j$  tales que  $1 < i \leq 2^{d+1}$  y  $1 \leq j < 2^{d+1}$ . Si el elemento  $(M_{d+1})_{i,j}$  se encuentra en el “interior” de uno de estos cuadrantes (es decir, si los vecinos superior y derecho de  $(M_{d+1})_{i,j}$  se encuentran en el mismo cuadrante que éste) entonces podemos concluir la demostración apelando a la hipótesis inductiva sobre  $M_d$  y al hecho de que lo que estamos tratando de probar es válido en la matriz de ceros. Supongamos que  $(M_{d+1})_{i,j}$  no está en el interior de un cuadrante. Esto implica que  $i = 2^d + 1$  o  $j = 2^d$ . Separamos en casos, y usamos las observaciones del Lema 1.

- Si  $i = 2^d + 1$  y  $j = 2^d$  entonces  $(M_{d+1})_{i,j} = 0$ . Tanto su vecino derecho como su vecino superior se encuentran en la diagonal de un  $M_d$ . Por lo tanto ambos valen 1, y entonces su suma es 0.
- Si  $i = 2^d + 1$  y  $j < 2^d$  también  $(M_{d+1})_{i,j} = 0$ . Sus dos vecinos también valen 0: el derecho porque está en el cuadrante de ceros, y el superior porque se encuentra por debajo de la diagonal en un  $M_d$ .

$$\begin{array}{cccccc}
 \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 \dots & 15 & 10 & 6 & 3 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \dots & 35 & 20 & 10 & 4 & 1 & \rightsquigarrow & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \dots & 70 & 35 & 15 & 5 & 1 & & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

Figura 2.1: La matriz  $M_2$  como truncamiento del triángulo de Pascal módulo 2.

- Si  $i < 2^d + 1$  y  $j = 2^d$  entonces  $(M_{d+1})_{i,j} = 1$ . Su vecino superior también vale 1 (porque la última columna de  $M_d$  está compuesta únicamente por unos), y el vecino derecho es un cero (porque está por debajo de la diagonal en  $M_d$ ).

Los dos casos restantes (cuando  $i > 2^d + 1$  y  $j = 2^d$ , y cuando  $i = 2^d + 1$  y  $j > 2^d$ ) son un reflejo de los dos últimos casos listados. Concluimos que cada elemento de la matriz  $M_{d+1}$  es igual a la suma entre su vecino superior y su vecino derecho.  $\square$

Por el Lema 1, la primera fila y la última columna de  $M_d$  coinciden con las de un truncamiento cuadrado del Triángulo de Pascal módulo 2 de tamaño  $2^d \times 2^d$ . Por el Lema 2,  $M_d$  verifica la propiedad aditiva que caracteriza este objeto matemático, y por lo tanto coinciden.

Sea  $d \geq 0$  un número entero, y por comodidad notemos  $e = 2^d$ . Recordemos que el orden lexicográfico en  $\mathbb{F}_2^e$  es el orden total definido como sigue:

$$v < w \iff \text{existe } k \text{ con } 1 \leq k \leq e \text{ tal que } v_i = w_i \text{ si } i < k \text{ y } v_k < w_k.$$

En otras palabras, es el orden de “diccionario” para las palabras de  $\mathbb{F}_2^e$ . Consideremos la enumeración

$$w_0, \dots, w_{2^e-1}$$

de todos los vectores de longitud  $e$  en orden lexicográfico. Entonces,

$$M_d w_0, \dots, M_d w_{2^e-1}$$

es otra enumeración de todos los vectores de longitud  $e$ , porque del Lema 1 sabemos que  $M_d$  es inversible. Obtenemos el  $d$ -ésimo bloque de  $\lambda$  concatenando los términos de esa secuencia:

$$\lambda_d = (M_d w_0)(M_d w_1) \dots (M_d w_{2^e-1})$$

La constante de Levin  $\lambda$  se define como la concatenación infinita

$$\lambda = 0, \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots$$

Su expansión en base 2 empieza como sigue (los espacios se incluyen como una convención para el lector):

$$\underbrace{01}_{\lambda_0} \underbrace{00111001}_{\lambda_1} \underbrace{000011111010101011100011011001100001110001001010010111100001}_{\lambda_2} \underbrace{00000000111111111\dots}_{\lambda_3}$$

Decimos que dos palabras binarias  $v$ ,  $w$  son *complementarias* si tienen la misma longitud y además para cada  $i$  se verifica que  $v_i = 0 \iff w_i = 1$ . En lo sucesivo, utilizaremos la notación  $\bar{v}$  para referirnos a la palabra complementaria a  $v$ . La expansión del número de Levin puede representarse como una concatenación de bloques de la forma  $v\bar{v}$ . Probamos esto con el auxilio del siguiente Lema.

**Lema 3.** *Para cada  $d$  y para cada  $n$  par,  $M_d w_n$  y  $M_d w_{n+1}$  son vectores complementarios.*

*Demostración.* La secuencia  $w_0, w_1, \dots, w_{2^e-1}$  está ordenada lexicográficamente, y en consecuencia la última coordenada de  $w_n$  es cero si y sólo si  $n$  es par. Entonces, si  $n$  es par,  $w_{n+1}$  y  $w_n$  sólo difieren en la última coordenada. Por lo tanto,

$$M_d w_{n+1} = M_d w_n + M_d \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (M_d w_n) + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{M_d w_n}.$$

□

Más aún, dependiendo de la paridad de  $n$ , podemos determinar si la palabra  $M_d w_n$  termina en 0 o en 1.

**Lema 4.** *Sea  $d$  un entero no negativo, y  $e = 2^d$ . El subespacio vectorial de todos los vectores pares de longitud  $e$*

$$\mathbb{P} = \{v \in \mathbb{F}_2^e \mid v_e = 0\}$$

*es invariante bajo  $M_d$ . Más aún,  $M_d w$  termina en 0 si y sólo si  $w$  termina en 0.*

*Demostración.* Por el Lema 1,  $M_d$  es triangular superior y su diagonal está compuesta de unos. Esto implica que todas sus columnas excepto la última terminan en 0. Por lo tanto, la única forma de obtener un vector de la forma  $M_d w$  que termine en 1 es que  $w$  termine en 1. □

Estos dos Lemas, tomados en conjunto, implican que la expansión del número  $\lambda$  puede escribirse como una concatenación de bloques de la forma  $v\bar{v}$ , donde  $v$  es una palabra que termina en 0.

## 2.2 La familia $\mathcal{L}$

A continuación, introducimos una familia  $\mathcal{L}$  de constantes que poseen propiedades similares a las exhibidas por  $\lambda$ . Nuevamente, seguimos la caracterización de Becher y Carton en [3].

Sea  $\sigma$  la transformación que, dada una palabra, mueve su última letra al principio. Es decir, si  $(a_1 \dots a_e) \in \mathbb{F}_2^e$  entonces  $\sigma(a_1 \dots a_e) = (a_e a_1 \dots a_{e-1})$ . Vamos a utilizar a  $\sigma$  para definir la familia  $\mathcal{L}$  mediante rotaciones selectivas de las columnas de  $M_d$ .

Al igual que en la sección anterior, sea  $d$  un entero no negativo y  $e = 2^d$ . Para los propósitos de este trabajo, llamamos *adecuada* a una tupla  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_e)$  de enteros no negativos que verifica las dos condiciones siguientes:

- el último elemento de  $\nu$  es cero;
- para cada  $i$  con  $1 \leq i < |\nu|$ , o bien vale que  $\nu_{i+1} = \nu_i$ , o bien  $\nu_{i+1} = \nu_i - 1$ . En particular,  $\nu$  es decreciente.

Por ejemplo, las tuplas  $(3, 2, 1, 0)$  y  $(2, 1, 1, 0)$  son adecuadas, pero  $(4, 3, 2, 1)$  y  $(5, 1, 1, 0)$  no lo son (la primera porque no termina en 0, y la segunda porque de 5 a 1 hay un salto de longitud mayor a 1).

Llamemos  $C_1, \dots, C_e$  a las columnas de  $M_d$ , y sea  $\nu$  una tupla adecuada de longitud  $e$ . Definimos

$$M_d^\nu = (\sigma^{\nu_1}(C_1), \dots, \sigma^{\nu_e}(C_e)).$$

Es decir, la matriz  $M_d^\nu$  se obtiene de  $M_d$  mediante rotaciones de sus columnas, controladas por la tupla  $\nu$ . Por ejemplo, tomando  $d = 2$  obtenemos 8 posibles matrices, una por cada elección de  $\nu$ :

$$\begin{array}{cccc} M_2^{(0,0,0,0)} & M_2^{(1,0,0,0)} & M_2^{(1,1,0,0)} & M_2^{(2,1,0,0)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ M_2^{(1,1,1,0)} & M_2^{(2,1,1,0)} & M_2^{(2,2,1,0)} & M_2^{(3,2,1,0)} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es muy fácil comprobar que la matriz  $M_d$  es inversible, pero no está claro, en principio, que lo mismo valga para cada matriz  $M_d^\nu$ . Daremos una demostración

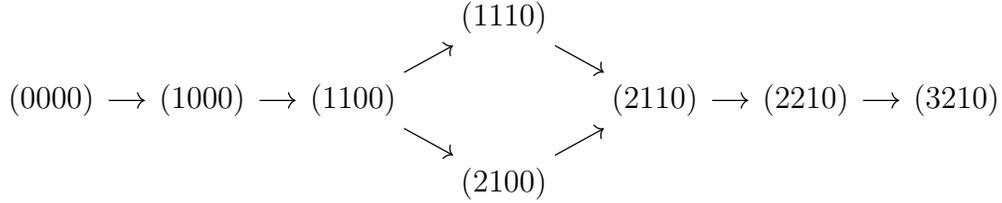


Figura 2.2: Todas las tuplas adecuadas de longitud 4.

recursiva sobre  $\nu$  de que esto sí es cierto. Para ello, necesitamos una forma inductiva de construir todas las tuplas adecuadas de una longitud fija.

**Lema 5.** *Para cada tupla adecuada  $\nu$ , existe una secuencia  $\nu^0, \dots, \nu^r$  de tuplas adecuadas tales que*

- *todas tienen la misma longitud;*
- *$\nu^0$  es la tupla de ceros;*
- *$\nu^r = \nu$ ;*
- *para cada  $0 \leq j < r$ : la tupla  $\nu^{j+1}$  se obtiene a partir de  $\nu^j$  sumando 1 en una de sus posiciones (y dejando el resto como está).*

*Demostración.* Si la secuencia existe, vale que  $r = \sum_{k=1}^{|\nu|} \nu_k$ . Empecemos tomando  $\nu^r = \nu$  y definamos recursivamente el resto de la secuencia hacia atrás. Supongamos definida  $\nu^{i+1}$  y sea  $N$  el máximo valor alcanzado en ella. Podemos suponer que  $N \neq 0$ , pues de ser así ya habríamos concluido el procedimiento. Sea  $k$  el máximo índice tal que  $(\nu^{i+1})_k = N$ . Definimos  $\nu^i$  como la tupla obtenida a partir de  $\nu^{i+1}$  al restarle 1 a la posición  $k$ . Entonces  $\nu^i$  es adecuada:

- *termina en cero, ya que como  $N \neq 0$ , no tocamos el último elemento de  $\nu^{i+1}$ ;*
- *los saltos entre elementos tienen longitud 0 o 1, porque sólo dos de esos saltos fueron alterados respecto de  $\nu^{i+1}$  (el salto desde el elemento  $k$  al  $k + 1$ , y el del elemento  $k - 1$  al  $k$ ) y en ambos casos la modificación los deja en uno de estos valores.*

□

Con esto, podemos demostrar la no-singularidad de cada  $M_d^\nu$ .

**Lema 6.** *Para cada  $d$  no negativo y para cada tupla adecuada  $\nu$ ,  $M_d^\nu$  es inversible.*

*Demostración.* Sea  $\nu^0, \dots, \nu^r$  una secuencia de tuplas adecuadas para  $\nu$  como en el Lema 5. Por comodidad, escribimos  $M = M_d$ . Sabemos que  $M^{\nu^0}$  es inversible porque es igual a  $M$ . Vamos a probar por inducción en  $i$  que  $M^{\nu^i}$  es inversible. Digamos que  $\nu^{i+1}$  se obtiene a partir de  $\nu^i$  sumando 1 en la coordenada  $k$ . Esto implica que  $(\nu^i)_k = (\nu^i)_{k+1}$  (pues en caso contrario,  $\nu^{i+1}$  no sería adecuada, ya que  $(\nu^{i+1})_k > (\nu^{i+1})_{k+1} + 1$ ). Esto no es sino una forma convolucionada de decir que las columnas  $k$  y  $k+1$  de la matriz  $M^{\nu^i}$  fueron rotadas la misma cantidad de veces a partir de  $M$ ; o sea que sus posiciones relativas se mantienen. En particular, podemos aplicar el Lema 2 a los elementos de la columna  $k$ . Es decir que para cada fila  $j$ ,

$$(M^{\nu^i})_{j,k} + (M^{\nu^i})_{j,k+1} = (M^{\nu^i})_{j-1,k}$$

¡Pero el elemento del lado derecho de esa igualdad es exactamente  $(M^{\nu^{i+1}})_{j,k}$ ! Esto nos dice lo siguiente: la transformación de  $M^{\nu^i}$  que rota la columna  $k$  una posición, se puede representar como la transformación de  $M^{\nu^i}$  que le suma la columna  $k+1$  a la columna  $k$ . Entonces, la matriz  $M^{\nu^{i+1}}$  se obtiene a partir de  $M^{\nu^i}$  vía la aplicación de una operación elemental de matrices. Como estas operaciones preservan la no singularidad, y  $M^{\nu^i}$  es inversible por hipótesis inductiva,  $M^{\nu^{i+1}}$  también lo es.  $\square$

Para caracterizar los elementos de  $\mathcal{L}$ , usaremos las matrices  $M_d^\nu$  en lugar de  $M_d$ . Sea  $w_0, \dots, w_{2^e-1}$  la secuencia lexicográficamente ordenada de todos los vectores en  $\mathbb{F}_2^e$ . Por el Lema 6, la secuencia  $M_d w_0, \dots, M_d w_{2^e-1}$  es otra enumeración de los vectores de  $\mathbb{F}_2^e$ . Más aún, si  $y \in \mathbb{F}_2^e$  es un vector cualquiera, podemos reemplazar cada  $w_i$  en la secuencia anterior por  $w'_i = w_i + y$ , y el resultado continúa siendo una enumeración de todos los vectores binarios de longitud  $e$ , porque sumar una constante es una operación biyectiva. Decimos que la palabra  $x$  es un  $e$ -collar afín si existen un  $y \in \mathbb{F}_2^e$  y una tupla adecuada  $\nu$  tal que la palabra se puede escribir como una concatenación

$$x = (Mw'_0)(Mw'_1) \dots (Mw'_{2^e-1})$$

con  $M = M_d^\nu$  y  $w'_i = w_i + y$  para  $0 \leq i \leq 2^e - 1$ .

Finalmente, definimos  $\mathcal{L}$  como el conjunto de todos los números reales en  $[0, 1)$  cuya expansión binaria puede ser escrita como una concatenación infinita  $\rho_0\rho_1\rho_2\dots$  donde cada  $\rho_d$  es un  $2^d$ -collar afín. En particular, tomando  $\nu = (0, \dots, 0)$  e  $y = 0$  en todos lados se verifica que  $\lambda$  es un elemento de  $\mathcal{L}$ .

Los siguientes Lemas son un reflejo de los Lemas 3 y 4 de la sección anterior.

**Lema 7.** *Para cada  $d$  no negativo, cada  $n$  par, y toda tupla adecuada  $\nu$ , los vectores  $M_d^\nu w_n$  y  $M_d^\nu w_{n+1}$  son complementarios.*

*Demostración.* La última coordenada de  $\nu$  es cero por definición. Por lo tanto, la última columna de  $M_d^\nu$  coincide con la de  $M_d$ ; es decir, es el vector que sólo tiene unos. El mismo argumento que empleamos en la prueba del Lema 3 aplica idénticamente en este caso.  $\square$

El Lema 7 nos permite concluir que la expansión binaria de un  $\rho \in \mathcal{L}$  puede escribirse como una concatenación de bloques de la forma  $v\bar{v}$ , pues si  $M_d^\nu w_n$  y  $M_d^\nu w_{n+1}$  son complementarios, también lo son  $M_d^\nu(w_n + y)$  y  $M_d^\nu(w_{n+1} + y)$ , para cualquier  $y$ .

**Lema 8.** *Sea  $d$  un entero no negativo, y sea  $e = 2^d$ . Sea  $\nu$  una tupla adecuada de longitud  $e$ . Entonces:*

1. *Si  $\nu_{e-1} = 0$ , el subespacio vectorial  $\mathbb{P}$  de todos los vectores que terminan en 0 es invariante bajo  $M_d^\nu$ . En este caso,  $w$  termina en 0 si y sólo si  $M_d^\nu w$  termina en 0.*
2. *Si  $\nu_{e-1} = 1$ , el subespacio vectorial  $\mathbb{P}$  está en biyección vía  $M_d^\nu$  con el espacio de todos los vectores que empiezan con 0. En este caso,  $w$  termina en 0 si y sólo si  $M_d^\nu w$  empieza en 0.*

*Demostración.* Sea  $\nu$  una tupla adecuada de longitud  $e$ . Entonces  $\nu_{e-1}$  es o bien 0 o 1. Consideramos por separado las dos posibilidades.

Primero, supongamos  $\nu_{e-1} = 1$ . Como  $\nu$  es decreciente, todos sus valores salvo el último son mayores o iguales a 1. Esto significa que, al construir  $M_d^\nu$  a partir de  $M_d$ , todas las columnas de esta matriz, con excepción de la última, son rotadas al menos una posición. Fijemos un índice  $i$  tal que  $1 \leq i \leq e - 1$ , y llamemos  $c$  a la  $i$ -ésima columna de la matriz  $M_d$ . Vamos a mostrar que el primer elemento de  $\sigma^{\nu_i}(c)$  es cero.

Por el Lema 1, sabemos que  $M_d$  es triangular. Esto significa que los elementos  $c_{i+1}, \dots, c_e$  son cero. Pero el primer elemento de  $\sigma^{\nu_i}(c)$  es  $c_{e-\nu_i+1}$ ; y de la desigualdad  $\nu_i \leq e - i$  se sigue que  $e - \nu_i + 1$  es mayor o igual a  $i + 1$ . Por lo tanto, el primer elemento de  $\sigma^{\nu_i}(c)$  es cero.

Dado que  $i$  es cualquier índice entre 1 y  $e - 1$ , concluimos que las primeras  $e - 1$  columnas de  $M_d^\nu$  tienen a cero como primera coordenada. Si  $w$  termina en 0,  $M_d w$  es una combinación lineal de vectores que comienzan con 0, y de allí se deduce que  $M_d w$  también comienza con 0. Recíprocamente, si  $w$  comienza con 1 entonces  $M_d w$  debe terminar en 1, porque es una combinación lineal de elementos que empiezan con 0 junto con la última columna de  $M_d^\nu$ , que es el vector de unos. Concluimos que  $w$  termina en 0 si y sólo si  $M_d^\nu w$  empieza con un 0.

El caso en que  $\nu_{e-1} = 0$  se resuelve de forma similar. Primero, se prueba que las primeras  $e - 1$  columnas de  $M_d^\nu$  terminan en 0. A partir de ahí se puede concluir, siguiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior, que  $M_d^\nu w$  termina en 0 si y sólo si  $w$  termina en 0.  $\square$

# Capítulo 3

## Secuencias de baja discrepancia sin correlación Poissoniana de pares

Finalmente demostramos el Teorema 1. Seguimos el trabajo [4] que realizamos junto a Becher y Carton. Primero, probamos el teorema para el número  $\lambda$  que definimos en 2.1, y al final explicamos cómo generalizar el resultado a cada número en la familia  $\mathcal{L}$ .

### 3.1 Caso $\lambda$

Sea  $d$  un entero no negativo, y  $e = 2^d$ . Construiremos una sucesión creciente  $N(d)$  sobre la cual se verifica que  $F_{N(d)}(2)$  diverge.

Decimos que una palabra  $a \in \mathbb{F}_2^r$  tiene una *ocurrencia* en la posición  $k$  de otra palabra  $\mu$  si

$$\mu_k \dots \mu_{k+r-1} = a.$$

Mostraremos que ciertas palabras tienen “demasiadas” ocurrencias en  $\lambda_d$ , y ello nos permitirá obtener una cota inferior para  $F_{N(d)}(2)$ . Contamos ocurrencias de palabras binarias de longitud  $d + e$ ,

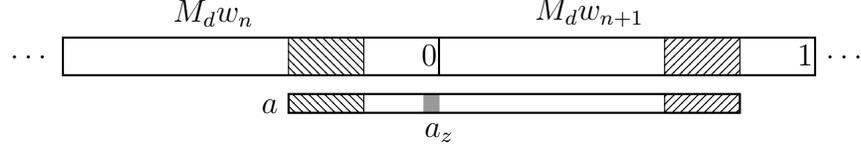
$$a = a_1 a_2 \dots a_{d+e}$$

tales que

$$\overline{a_1 \dots a_d} = a_{e+1} \dots a_{e+d}.$$

Esta elección, aparentemente arbitraria, la sugiere el Lema 3 y pronto estará clara su relevancia. Primero, necesitamos un poco más de terminología. Dada una palabra  $a$  con esta forma, y una ocurrencia de  $a$  en  $\lambda_d$ , llamamos

- $k$  al número de ceros en  $a_d \dots a_e$ ;
- $n$  al índice tal que la ocurrencia de  $a$  empieza en  $M_d w_n$ ;

Figura 3.1: Una ocurrencia de  $a$ 

- $z$  a la posición en  $a$  que coincide con la  $e$ -ésima (o sea, la última) letra de  $M_d w_n$ .

*Requerimos* que  $n$  sea un número par, y que  $z$  esté dentro del rango  $d \leq z \leq e$ . Esto último lo pedimos para prevenir que la palabra  $a$  se extienda por sobre más de dos de los bloques con la forma  $M_d w_n$ ; y lo primero lo pedimos para asegurar que una coincidencia de las primeras  $d$  letras automáticamente implica una coincidencia de las últimas  $d$  letras (una combinación del Lema 3 y las hipótesis sobre  $a$ ). Además, por el Lema 4, sabemos que  $M_d w_n$  termina en 0, de donde  $a_z = 0$ .

Fijamos  $k$  y contamos todas las posibles ocurrencias en  $\lambda_d$  de cada posible palabra  $a$ . Hay exactamente

$$2^{d-1} \binom{e-d+1}{k}$$

palabras  $a$  con  $k$  ceros en  $a_d \dots a_e$ . Por cada una de ellas, tenemos una elección de  $k$  distintos  $z$ , porque sabemos que  $a_z$  es igual a cero. Afirmamos que cada una de esas elecciones para  $z$  efectivamente se corresponde con una ocurrencia de  $a$  en  $\lambda_d$ , y lo probamos a continuación. Supongamos que la palabra binaria  $a$ , cuya longitud es  $d+e$ , empieza en  $M_d w_n$  y continúa en  $M_d w_{n+1}$ . Entonces, debe existir un  $z$  para el cual

$$a_1 \dots a_z = (M_d w_n)_{e-z+1} \dots (M_d w_n)_e$$

y

$$a_{z+1} \dots a_e = (M_d w_{n+1})_1 \dots (M_d w_{n+1})_{e-z}.$$

Entonces, el Lema 3 nos permite concluir que

$$M_d w_n = \overline{a_{z+1} \dots a_e} a_1 \dots a_z.$$

Por el Lema 1, sabemos que existe un  $w_n$  que verifica esta ecuación, y por el Lema 4,  $n$  debe ser un número par. Por lo tanto, dada una elección de  $z$  existe una ocurrencia de  $a$ . Concluimos que por cada elección de  $k$ , y por cada palabra  $a \in \{0, 1\}^{e+d}$  con  $k$  ceros en  $a_d \dots a_e$ , tenemos exactamente  $k$  ocurrencias en  $\lambda_d$ .

Ahora probamos que la secuencia de partes fraccionarias de  $(2^n \lambda)_{n \geq 1}$  no tiene correlación Poissoniana de pares. Tomemos  $s = 2$  y  $N = 2^{d+e+1}$  y verifiquemos que  $\lim_{d \rightarrow \infty} F_N(s) = \infty$ .

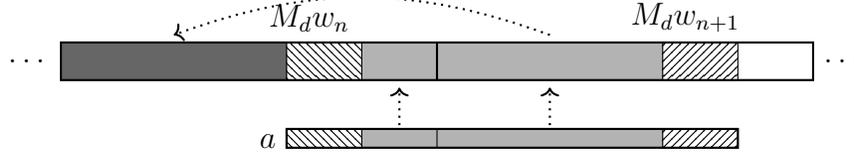


Figura 3.2: Dada una palabra  $a$  y una elección de  $z$ , es posible encontrar una única posición dentro de  $\lambda_d$  donde  $a$  ocurre con alineación  $z$ .

Recordemos que  $(x \bmod 1)$  denota la expansión fraccionaria de  $x$ . Si  $a$  tiene dos ocurrencias distintas dentro de  $\lambda$  en las posiciones  $i$  y  $j$ , entonces

$$\begin{aligned} \|(2^i \lambda \bmod 1) - (2^j \lambda \bmod 1)\| &= \|0.a_1 \dots a_{e+d} \lambda_{i+d+e+1} \dots - 0.a_1 \dots a_{e+d} \lambda_{j+d+e+1} \dots\| \\ &\leq |0.a_1 \dots a_{e+d} \lambda_{i+d+e+1} \dots - 0.a_1 \dots a_{e+d} \lambda_{j+d+e+1} \dots| \\ &< 2^{-(e+d)} \\ &= \frac{s}{N}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $i$  y  $j$  son ambos menores a  $N$ , los pares  $(i, j)$  y  $(j, i)$  cuentan para el total de  $F_N(s)$ . Si tomamos posiciones  $i$  y  $j$  de  $\lambda$  que se corresponden a elementos de  $\lambda_d$ , lo anterior es cierto. Podemos verificar esto último calculando la longitud de  $\lambda$  truncada hasta el bloque  $\lambda_d$ :

$$|\lambda_0 \dots \lambda_d| = \sum_{i=0}^d |\lambda_i| = \sum_{i=0}^d 2^i 2^{2^i} = \sum_{i=0}^d 2^{i+2^i} < 2^{2^d+d+1} = N.$$

Entonces, podemos dar una cota inferior para  $F_N(s)$ , tomando todos los posibles pares de ocurrencias de cada palabra  $a$  que satisface la condición  $\overline{a_1 \dots a_d} = a_{e+1} \dots a_{e+d}$ :

$$\begin{aligned} F_N(2) &\geq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{e-d+1} 2 \left( 2^{d-1} \binom{e-d+1}{k} \binom{k}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2^{e+1}} \sum_{k=0}^{e-d+1} \binom{e-d+1}{k} \binom{k}{2} \\ &= \frac{1}{2^{e+1}} \binom{e-d+1}{2} 2^{e-d+1-2} \\ &= \frac{1}{8e} (e-d+1)(e-d) \end{aligned}$$

En el tercer paso del cálculo anterior, invocamos la identidad

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{2} = 2^{n-2} \binom{n}{2}$$

evaluando  $n = (e - d + 1)$ . Por lo tanto,

$$F_N(2) \geq \frac{(e - d + 1)(e - d)}{8e}$$

y esta expresión diverge cuando  $d \rightarrow \infty$ . Esto concluye la prueba de que la secuencia de partes fraccionarias de  $(2^n \lambda)_{n \geq 1}$  no tiene correlación Poissoniana de pares.

## 3.2 Generalización

Ahora, explicamos cómo la prueba se extiende a cualquier constante en  $\mathcal{L}$ . Tomamos  $\rho \in \mathcal{L}$ . Entonces, la expansión binaria de  $\rho$  puede escribirse como una concatenación

$$\rho = \rho_0 \rho_1 \rho_2 \dots$$

donde cada  $\rho_d$  es un  $2^d$ -collar afín. Eso significa que para cada  $d$ , existen una tupla adecuada  $\nu$  y un  $y$  tales que  $\rho_d$  se escribe como

$$\rho_d = (M_d^\nu w'_0)(M_d^\nu w'_1) \dots (M_d^\nu w'_{2^e - 1}),$$

donde  $w'_i = w_i + y$ . Fijemos un entero no negativo  $d$  y llamemos  $e = 2^d$ . Tomamos  $s = 2$  y  $N_d = 2^{e+d+1}$ . Al igual que en la sección anterior, es posible dar una cota inferior para  $F_{N_d}(s)$  mediante el conteo de ocurrencias en  $\rho_d$  de palabras de longitud  $e + d$ .

Por el Lema 8, hay dos posibilidades para  $M_d^\nu$ :

1.  $M_d^\nu$  manda el subespacio  $\mathbb{P}$ , de los vectores que terminan en cero, en sí mismo; o
2.  $M_d^\nu$  manda el subespacio  $\mathbb{P}$  en forma biyectiva al espacio de los vectores que comienzan en cero.

Asimismo, hay dos posibilidades para el vector  $y$ :

- A.  $y$  termina en cero;
- B.  $y$  termina en uno.

La constante  $\lambda$  es un caso particular de 1, A. La demostración que dimos para este número se generaliza, casi palabra por palabra, a todas las constantes englobadas por este caso.

Para los casos restantes, es necesario hacerle a la prueba algunas modificaciones menores. Por ejemplo, si consideramos las condiciones 2, A, ya no es cierta la suposición de que  $M_d^\nu w_n$  termina en 0 para cada  $n$  par. Dada una ocurrencia de la palabra  $a$  en  $\rho_d$ , tenemos que redefinir al  $z$  y al  $k$  de la prueba: el primero se redefine como el índice de  $a$  tal que  $a_z$  coincide con la primera letra de  $M_d^\nu w_{n+1}$  (en lugar de la última letra de

$M_d^\nu w_n$ ) y el segundo se redefine como la cantidad de unos en  $a_{d+1} \dots a_{e+1}$  (en lugar de la cantidad de ceros). El argumento no cambia a pesar de estas modificaciones, ya que llegamos al mismo número de ocurrencias de  $a$  dentro de  $\rho_d$  en el conteo.

Los casos  $1, B$  y  $2, B$  se resuelven en forma similar. Si  $y$  termina en 1, entonces la situación se invierte:  $n$  es par si y sólo si  $w_n + y$  termina en 1. Entonces, es cuestión de “cambiar los ceros por unos” en las demostraciones de los casos  $1, A$  y  $2, A$  para obtener demostraciones de los casos  $2, A$  y  $2, B$ , respectivamente.



# Bibliografía

- [1] C. Aistleitner, T. Lachmann, and F. Pausinger. Pair correlations and equidistribution. *Journal of Number Theory*, 182:206–220, 2018.
- [2] C. Aistleitner, G. Larcher, and M. Lewko. Additive energy and the Hausdorff dimension of the exceptional set in metric pair correlation problems. *Israel J. Math.*, 222(1):463–485, 2017.
- [3] V. Becher and O. Carton. Normal numbers and perfect necklaces. *Journal of Complexity*, page to appear, 2019.
- [4] V. Becher, O. Carton, and I. Mollo. Low discrepancy sequences failing Poissonian pair correlations. *Archiv der Mathematik*, 113(2), 2019.
- [5] V. Becher and P.A. Heiber. On extending de Bruijn sequences. *Information Processing Letters*, 111:930–932, 2011.
- [6] D. El-Baz, J. Marklof, and I. Vinogradov. The two-point correlation function of the fractional parts of  $\sqrt{n}$  is Poisson. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 143(7):2815–2828, 2015.
- [7] S. Grepstad and G. Larcher. On pair correlation and discrepancy. *Archiv der Mathematik*, 109(2):143–149, 2017.
- [8] L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences*. Dover Publications, Inc., New York, 2006.
- [9] G. Larcher and W. Stockinger. Pair correlation of sequences  $(\{a_n\alpha\})_{n \in \mathbf{N}}$  with maximal order of additive energy. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 168(2):287–293, 2020.
- [10] G. Larcher and W. Stockinger. Some negative results related to Poissonian pair correlation problems. *Archiv der Mathematik*, 343(2), 2020.
- [11] M. B. Levin. On the discrepancy estimate of normal numbers. *Acta Arithmetica*, 88(2):99–111, 1999.

- [12] Í. Pirsic and W. Stockinger. The Champernowne constant is not Poissonian. *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici*, 60(2):253–262, 2019.
- [13] Z. Rudnick and P. Sarnak. The pair correlation function of fractional parts of polynomials. *Comm. Math. Phys.*, 194(1):61–70, 1998.
- [14] Z. Rudnick, P. Sarnak, and A. Zaharescu. The distribution of spacings between the fractional parts of  $n^2\alpha$ . *Invent. Math.*, 145(1):3–57, 2001.
- [15] Z. Rudnick and A. Zaharescu. A metric result on the pair correlation of fractional parts of sequences. *Acta Arithmetica*, 89(1999):283–293, 1999.
- [16] R. Stoneham. On absolute  $(j, \varepsilon)$ -normality in the rational fractions with applications to normal numbers. *Acta Arithmetica*, 22(3):277–286, 1973.
- [17] E. Ugalde. An alternative construction of normal numbers. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 12:165–177, 2000.