UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Ecuaciones de Euler-Arnold y subgrupos totalmente geodésicos

María Cecilia De Vita

Director: Gabriel Larotonda

1° de junio de 2021

Agradecimientos

Sin duda todo este trabajo me hubiese resultado muchísimo más difícil de no haber estado acompañada por toda la gente hermosa que me rodea. Todas y todos de alguna manera aportaron su granito de arena para que hoy pueda estar acá, recibiéndome. Probablemente me olvide de nombrar a mucha gente, así que pido perdón por adelantado y en tal caso se compensará con un abrazo.

A mi mamá, por alentarme siempre a hacer lo que me gusta, por apoyarme en todas mis decisiones. Por todos los mensajitos de "suerte!" o "cómo te fue?" antes y después de cada parcial/final, desde el primer hasta el último año de carrera. Por cocinarme para llevarme comida a la facu esos días interminables, y por dejarme la comida lista las veces que terminaba a las 23hs. Por muchísimas cosas más que no nombro porque la lista sería interminable.

A mi papá, porque a tu modo también me acompañaste en este largo camino. Te quiero mucho.

A mi hermano, por ser tan incondicional. Por tus abrazos (aunque ahora se complican un poco ya que medís como 2 metros) y por saber levantarme el ánimo cuando las cosas no van del todo bien.

A Valen, por ser el mejor amigo del mundo, el que me conoce como nadie. Por los mediodías de panchos en "parada 29" allá por 2008, por los viernes de cumbia en la óptica, por las rolleadas en Palermo. Por las fiestas en exactas, las salidas a comer (como cerdos), y por tener la excelente idea de llevar papas fritas sabor cebolla a 3500 metros de altura. Por confiar ciegamente en mí y subirte a un 109 que no era un 109. Por el apoyo incondicional durante toda la carrera.

Al nono Marian, porque en tan poco tiempo te convertiste en una persona súper importante para mí. Por toda tu ayuda en diferentes materias, por bancarte mis 15 minutos de llanto (o más) y por compartir tus 15 minutos de llanto conmigo, por todas las burbujitas de Telegram (arreglá la cámara frontal), por ser tan manija en la montaña,

por tus memes!!! Qué hubiese sido de mí todos estos años sin tus memes... Gracias por tanto nonito!

A Piombis, por confiar en mí más que yo misma. Porque siempre que siento que no puedo más ahí estás vos dándome el empujoncito final para hacerme notar que sí puedo. Por festejar mis logros tanto como los tuyos. Por enseñarme tantas cosas. Por subir montañas conmigo, por haberme cambiado el nombre, y por cocinar las mejores papas fritas del universo (me debés unas). Por los abrazos más lindos y por la compañía de siempre.

Al gran Ivo, por haber compartido las primeras materias de la carrera conmigo, por ser el mejor asador de todos (además de un comeflanes). A Solcito, por todos los viajes hasta la facu, por la conga que bailaste en mi cumpleaños. A Nets, por estar siempre primera en la lista cuando se trata de juntarnos a comer, por ir a patinar sobre hielo conmigo (y por supuesto, comer un budín). A Ulis, por habilitar su casa siempre (y Tigre también), por subir el Tres Picos y el Champaquí aguantándonos a Marian y a mí. A Ger, por sus chistes en el grupo de Telegram. Los quiero un montón!

A Nico Allo, por haber sido el creador de la Ceci Dory. Por las cursadas compartidas, por tu bella y serena alarma sonando en elENA, por la UMA de Mendoza y tu agua micelar, por todos los momentos de perreo y los que vendrán.

A Max, que hace años que no nos vemos pero igual te conectaste desde Dubai para ver la defensa, gracias! Ojalá me hagas un lugarcito para ir a visitarte.

A mis bellos optiturros: Macot, Cami, Brunito y Valen (de nuevo). Por bancarme siempre, desde hace tantos años. Porque juntarme a comer con ustedes es de las cosas que más disfruto, y porque sé que en algún momento, en algún lugar del mundo, nos volveremos a juntar. Los quiero muchísimo.

A mis amigas de toda la vida: Ale, Eve, Giuli, Guada, Lu, Lulita, Marce, Mica, Pau, Ro, por acompañarme desde hace 20 años, por saberse todos los chismes siempre, por haberse tomado un ratito para conectarse el día de la defensa de tesis. Las quiero tanto!

A Juanma, porque tal vez si no hubiese tenido una conversación con vos por MSN no estaría acá recibiéndome de matemática... Porque por más que pasen los años sé que cuento con vos siempre.

A Seba y Ro, por las tardes haciendo acroyoga, por el verano en Tigre y por haber estado en la defensa.

A mi tía Paula y a Xavi, que se conectaron desde Barcelona para acompañarme en este momento tan importante. Los quiero!

A toda la gente de PAT, porque correr con ustedes es mi cable a tierra. Porque todos en este último tiempo se bancaron mis nervios y que no paraba de hablar de la tesis. Porque cada abrazo de llegada es una satisfacción enorme.

A Gabriel por haber aceptado ser mi director, por su paciencia, su dedicación y su buena onda de siempre. Por haberme presentado este tema tan lindo y que tanto disfruté estudiar. A Esteban y Marco por haber aceptado ser jurados de esta tesis, por sus preguntas, comentarios y correcciones, gracias!

Por último pero no por eso menos importante, quería agradecer a toda la gente que me crucé en estos años de facultad: compañeros, ayudantes, profesores. Jamás me cansaré de decir que la calidad humana de Exactas es realmente increíble. Gracias a la educación pública y a la Universidad de Buenos Aires en particular.

Índice general

Introducción

En un artículo de 1966, Vladimir Arnold observó que muchas ecuaciones básicas en física, como las ecuaciones de Euler de movimiento de un cuerpo rígido y las ecuaciones de Euler de la dinámica de fluidos ideales pueden verse (al menos formalmente) como ecuaciones de las geodésicas de una variedad riemanniana (de dimensión finita o infinita). Y no cualquier variedad riemanniana: estas resultan ser grupos de Lie equipados con una métrica invariante a derecha (o a izquierda, según convenciones). En el contexto de cuerpos rígidos, el grupo de Lie es el grupo de matrices de rotación $SO(3)$, y en el caso de fluidos ideales es el grupo $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(M)$: los difeomorfismos de una variedad compacta M que preservan el volumen. Al ser este último un grupo de Lie de dimensión infinita (más precisamente, un grupo de Fréchet-Lie), el estudio de las geodésicas suele ser un tanto más complicado. Es por esto (entre otras cosas) que resulta interesante comprender las ecuaciones de Euler. Desarrollando la teoría necesaria acerca de variedades infinito-dimensionales y grupos de Fréchet-Lie, veremos que podemos describir estas ecuaciones utilizando únicamente la acción coadjunta del álgebra de Lie en su espacio dual. Ambos ejemplos mencionados pueden leerse del artículo original de Arnold [Ar66], o también pueden encontrarse en libros un poco más modernos como [AK98] o [MR99].

Una cuestión muy interesante es pensar cómo es que se relaciona esta "correspondencia" descubierta por Arnold con el significado de subvariedades totalmente geodésicas. Veremos que tanto en dimensión finita como en dimensión infinita es posible construir una métrica en un grupo de Lie G de modo que las soluciones de las ecuaciones de Euler de un subgrupo dado H también sean soluciones de la ecuación de Euler en G. En uno de los teoremas principales de este trabajo demostraremos que hay distintas equivalencias a ser solución de la ecuación de Euler (en términos de álgebras de Lie) y en base a ese resultado deduciremos condiciones que debe satisfacer la métrica buscada.

Desde aquel entonces ha habido mucho interés en intentar generalizar las ecuaciones de Euler (también conocidas como ecuaciones de Euler-Arnold), es decir, las ecuaciones de las geodésicas en un grupo de Lie equipado con una métrica invariante. Tales ecuaciones son, por ejemplo: la ecuación de Burgers (Diff(S^1) con una métrica L^2 invariante a derecha), Korteweg-de Vries (el grupo de Virasoro-Bott con una métrica L^2 invariante a derecha), Camassa-Holm (Diff(S^1) con una métrica H^1 invariante a derecha). Estos ejemplos y algunos más están detallados en [Vi08].

Fijada una métrica riemanniana en un grupo de Lie G, un subgrupo de Lie $H \subseteq G$ se dice "totalmente geodésico" en G si las geodésicas en H son también geodésicas en G. Debido a las aplicaciones físicas, es común preguntarse cuáles subgrupos (de un grupo dado) son totalmente geodésicos con respecto a una métrica dada. En este trabajo nosotros abordaremos una pregunta diferente: no fijaremos la métrica, y nos preguntaremos si es posible elegir una de modo tal que un subgrupo dado $H \subseteq G$ sea totalmente geodésico.

No existe mucha literatura en cuanto a subgrupos totalmente geodésicos. Sin embargo, en el caso del grupo de difeomorfismos, los siguientes resultados son conocidos:

1. El subgrupo de difeomorfismos exactos que preservan el volumen de una variedad riemanniana plana y compacta sin borde es totalmente geodésico en el grupo de difeomorfismos que preservan el volumen, con respecto a la métrica L^2 invariante a derecha. (Los difeomorfismos exactos que preservan el volumen están generados por campos suaves que tienen un potencial vectorial en términos del operador curl). Este resultado está explicado y demostrado en [AK98] y en [HTV02].

2. El subgrupo de difeomorfismos hamiltonianos de una variedad de Kähler cerrada con métrica plana es totalmente geodésico en el grupo de difeomorfismos simplécticos, con respecto a la métrica L^2 invariante a derecha. Este resultado también puede hallarse en [AK98] y [HTV02].

3. Sea G un grupo de Lie compacto que actúa por isometrías sobre una variedad riemanniana M. Denotemos por Φ_g a la acción. El subgrupo de difeomorfismos equivariantes $\mathrm{Diff}_{\Phi_g}(M)$ es totalmente geodésico en $\mathrm{Diff}(M)$ y en $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(M)$ con respecto a la métrica invariante a derecha L^2. Este resultado está demostrado en [Vi99].

4. El subgrupo de difeomorfismos que dejan fijo un punto de una subvariedad N de una variedad riemanniana M es totalmente geodésico con respecto a la métrica L^2 invariante a derecha. Este resultado fue probado en [Vi99].

5. El subgrupo de difeomorfismos del cilindro $S^1 \times [0,1]$ que rotan rígidamente todos los círculos horizontales en un ángulo es totalmente geodésico en el grupo de difeomorfismos que preservan el volumen de $S^1 \times [0,1]$. Este resultado está demostrado en [BR97].

Lo que haremos en este trabajo, siguiendo el paper de Modin, et al. [MPMM10], será construir una familia de métricas invariantes en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de modo que un subgrupo dado $H \subseteq G$ sea totalmente geodésico con respecto a cada métrica de la familia. Lo que necesitaremos es una forma bilineal simétrica en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G con cierta propiedad de bi-invariancia y no degenerada. Esta construcción funciona tanto en el caso finito dimensional como en el caso infinito dimensional (trabajaremos en la categoría de grupos de Fréchet-Lie). En el caso de dimensión finita, usando la forma de Killing como forma bilineal simétrica, el único requerimiento es que la subálgebra $\mathfrak{h}$ sea semisimple.

Usando esta técnica, puede extenderse la lista de los ejemplos de subgrupos totalmente geodésicos:

6. Sea G un grupo de Lie de dimensión n, y sea $H \subseteq G$ un subgrupo de Lie semisimple de dimensión m. Construiremos una variedad de dimensión $(n+1)\frac{n}{2} - (n-m)m$ de métricas invariantes a izquierda (o a derecha) en G, para las cuales H es totalmente geodésico en G. En particular, daremos un ejemplo de una métrica invariante a izquierda tal que $SO(3)$ resulta totalmente geodésico en $GL(3)$.

En el caso infinito dimensional de grupos de difeomorfismos, debemos hallar formas bi-invariantes. Para campos exactos con divergencia nula y campos hamiltomnianos respectivamente, una forma bilineal simétrica no degenerada y bi invariante fue dada por Smolentsev en [Sm86], [Sm83], [Sm06]. Daremos una generalización del resultado de Smolentsev, extendiéndolo a variedades con borde. Usando este marco de trabajo, daremos los siguientes ejemplos de subgrupos de difeomorfismos totalmente geodésicos:

7. Sea (M,g) una variedad riemanniana de dimensión n compacta y con borde. El grupo de isometrás $\mathrm{Diff}_{\mathrm{iso}}(M)$ es totalmente geodésico en $\mathrm{Diff}(M)$ con respecto a la métrica Sobolev invariante a derecha H^1_α.

8. Sea (M,g) una variedad riemanniana de dimensión n compacta y con borde. Daremos una condición más fuerte para que $\mathrm{Diff}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol}}(M)$ sea totalmente geodésico en $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(M)$ con respecto a la métrica invariante a derecha H^1_α. Esta es una extensión de Modin et al. de un resultado dado en [HTV02].

9. Sea (M, g) una variedad de contacto con borde, compacta, de dimensión 3. Entonces el subgrupo de difeomorfismos exactos de contacto es totalmente geodésico en el grupo de difeomorfismos exactos que preservan el volumen, con respecto a la métrica invariante a derecha L^2.

Lo que sigue a continuación es un breve detalle acerca de cómo está organizada esta tesis. En el Capítulo 1 se podrán encontrar resultados preliminares acerca de espacios localmente convexos y variedades diferenciables en dimensión infinita. La idea es que el lector tenga presentes todas las definiciones y resultados que figuran allí ya que serán utilizados a lo largo de todo el trabajo. En el Capítulo 2 hablaremos de grupos de Lie en dimensión infinita: más precisamente grupos de Fréchet-Lie. En particular haremos la construcción de la estructura diferenciable del grupo de difeomorfismos de una variedad compacta M. El Capítulo 3 comienza con una serie de resultados acerca de cálculo de variaciones, luego definiremos las ecuaciones de Euler-Arnold, y por último daremos una descripción detallada acerca de cómo representar el espacio dual $\mathfrak{g}^*$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ mediante una elección de pairing. Daremos varios ejemplos de posibles pairings y en cada uno de ellos veremos qué forma toma la ecuación de Euler-Arnold. En el Capítulo 4 daremos una caracterización de subgrupos totalmente geodésicos mirando su álgebra de Lie. Para pensarlo desde un punto de vista más geométrico, veremos cuándo un subgrupo es totalmente geodésico analizando su segunda forma fundamental. En la última sección de este capítulo analizaremos nuevamente esta condición pero desde un punto de vista de coordenadas: es decir, en términos de las constantes de estructura del álgebra de Lie. En el Capítulo 5 presentaremos un marco de trabajo para construir métricas totalmente geodésicas. Esta construcción caracterizará todas las métricas que hagan que un subgrupo sea ETG: es decir, que el complemento ortogonal de la subálgebra sea invariante bajo la acción adjunta del grupo. Analizaremos en particular el caso especial de productos semidirectos. Finalmente en el Capítulo 6 veremos en detalle los ejemplos de subgrupos totalmente geodésicos que listamos anteriormente.

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de este capítulo introduciremos algunos conceptos básicos acerca del estudio de las variedades diferenciables infinito dimensionales. Asumiremos que el lector está familiarizado con las definiciones y resultados más conocidos en dimensión finita.

Sabemos que las variedades finito dimensionales son espacios topológicos localmente euclídeos, es decir, están modeladas por $\mathbb{R}^n$. La generalización más inmediata al caso de dimensión infinita es considerar variedades diferenciables modeladas en espacios de Banach. Sin embargo, a lo largo de estre trabajo consideraremos un tipo de espacios un poco más generales: los espacios de Fréchet. Esta elección se debe a que el resultado final de esta tesis involucra al grupo de difeomorfismos de una cierta variedad compacta M, que no puede ser modelado por un espacio de Banach.

1.1. Espacios localmente convexos

Los espacios de Fréchet son casos particulares de espacios localmente convexos. Comenzaremos definiendo estos espacios y recordando algunas de sus propiedades.

Definición 1.1.1. Un *espacio vectorial topológico* E es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ dotado de una topología de modo que las aplicaciones $+ : E \times E \to E$ y $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ son continuas.

Definición 1.1.2. Un espacio vectorial topológico E se dice *localmente convexo* si todo entorno de $0 \in E$ contiene un entorno de 0 convexo. En todo momento asumiremos que los espacios vectoriales topológicos E son Hausdorff.

Definición 1.1.3. Un espacio localmente convexo E es un *espacio de Fréchet* si existe una sucesión $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ de seminormas en E, tal que la topología de E está inducida por la métrica

$$d(x,y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)},$$

y el espacio métrico (E,d) es completo.

Observación 1.1.4. Todo espacio de Banach es un espacio de Fréchet. En este caso, la topología está definida por una única (semi-)norma.

Ejemplos 1.1.5. (a) Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de algún espacio euclídeo. Entonces Ω es una unión numerable de conjuntos compactos $K_n \neq \emptyset$ que pueden ser elegidos de modo que $K_n \subseteq K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideramos el conjunto $C(\Omega,\mathbb{R})$ junto con la topología dada por la familia de seminormas

$$p_n(f) := \sup\{|f(x)| : x \in K_n\}.$$

Entonces $C(\Omega,\mathbb{R})$ es un espacio de Fréchet (ver detalles en Ejemplo 1.44 de [Ru73]).

(b) Con las mismas definiciones que el ítem anterior, el conjunto $C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ junto con la familia de seminormas

$$p_n(f) := \max\{|D^\alpha f(x)| : x \in K_n, |\alpha| \leq n\},$$

es un espacio de Fréchet (ver detalles en Ejemplo 1.46 de [Ru73]).

Como se dijo anteriormente, el espacio de Fréchet que será de nuestro mayor interés en este trabajo, es el grupo de difeomorfismos de una variedad diferenciable y compacta M. En el Capítulo 2 veremos que este espacio es un grupo de Fréchet-Lie modelado por el espacio de campos suaves de M, el cual notaremos $\mathfrak{X}(M)$.

Definición 1.1.6. Sean E, F espacios localmente convexos, $\mathcal{U} \subseteq E$ abierto y $f : \mathcal{U} \to F$ una función. Definimos la *derivada de* f *en* x *en la dirección* h como:

$$df(x)(h) := (D_h f)(x) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x+th) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(x+th) - f(x))$$

siempre que exista. La función f se dice *diferenciable* en x si $df(x)(h)$ existe para todo $h \in E$. Decimos que f es de *clase* C^k para $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ si f es continua, las derivadas direccionales iteradas

$$d^j f(x)(h_1,\ldots,h_j) := (D_{h_j}\ldots D_{h_1} f)(x)$$

existen para todos los enteros $j \leq k$, $x \in \mathcal{U}$ y $h_1,\ldots,h_j \in E$, y todas las funciones $d^j f : \mathcal{U} \times E^j \to F$ son continuas.

Ahora que tenemos definido el concepto de “función de clase C^k”, recordamos los enunciados de los hechos más fundamentales del cálculo en espacios localmente convexos.

Proposición 1.1.7. *Sean E, F espacios localmente convexos, $\mathcal{U} \subseteq E$ un abierto y $f : \mathcal{U} \to F$ una función de clase C^1.*

1. *Para todo $x \in \mathcal{U}$, la aplicación $df(x) : E \to F$ es lineal y continua.*
2. *(Teorema Fundamental del Cálculo) Si $x + [0,1]h \subseteq \mathcal{U}$, entonces*
$$f(x+h) = f(x) + \int_0^1 df(x+th)(h)dt.$$
En particular, f es localmente constante si y sólo si $df = 0$.
3. *f es continua.*
4. *Si f es de clase C^n para $n \geq 2$, las funciones $d^n f(x)$ para $x \in \mathcal{U}$ son funciones n- lineales simétricas.*
5. *Si $x + [0,1]h \subseteq \mathcal{U}$ y f es de clase C^n, tenemos la fórmula de Taylor*
$$f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f(x)(h,\ldots,h)$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} d^n f(x+th)(h,\ldots,h)dt.$$
6. *(Regla de la cadena) Si Z es un espacio localmente convexo, $\mathcal{V} \subseteq F$ es un abierto y $f_1 : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $f_2 : \mathcal{V} \to Z$ son funciones de clase C^1, entonces $f_2 \circ f_1 : \mathcal{U} \to Z$ es de clase C^1 y vale que*
$$d(f_2 \circ f_1)(x) = df_2(f_1(x)) \circ df_1(x) \text{para todo } x \in \mathcal{U}.$$
Si f_1 y f_2 son de clase C^k para $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la regla de la cadena implica que $f_2 \circ f_1$ también es de clase C^k.

Las demostraciones de esta proposición serán omitidas ya que son parecidas a las ya conocidas en $\mathbb{R}^n$. Igualmente aquel lector que desee leerlas en detalle las puede consultar en [Ne05].

Sin embargo, no todos los resultados que conocemos en dimensión finita siguen siendo válidos. Un ejemplo de esto es el teorema de la función inversa: en el contexto de espacios de Banach es cierto, pero al generalizar a espacios de Fréchet pierde su validez. Veamos un ejemplo: consideremos $A := C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el álgebra de todas las funciones continuas en $\mathbb{R}$ con la topología de convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos, la cual convierte a A en un espacio de Fréchet en el cual la multiplicación del álgebra es continua. Tenemos un mapa exponencial suave

$$\begin{aligned} \exp_A : A &\to A \\ f &\mapsto e^f \end{aligned}$$

tal que su diferencial en cero es la función identidad. Notar que el rango del operador $\exp_A$ es un subconjunto del espacio $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{>0})$ y por lo tanto ningún entorno de la función constante 1 podrá ser la imagen de un entorno del 0 (ya que con la topología dada por convergencia uniforme sobre compactos, todo entorno de la función constante 1 contiene funciones que asumen valores negativos). Es por eso que el teorema de la función inveresa falla en este caso.

Otro contraejemplo se puede encontrar en la Sección I.I.5 del libro [Ha82]. Considerando el espacio de Fréchet $C^\infty[-1,1]$ y el operador

$$\begin{aligned} P : C^\infty[-1,1] &\to C^\infty[-1,1] \\ f &\mapsto f - xff', \end{aligned}$$

se tiene que P es suave y su diferencial está dada por

$$dP(f)g = g - xgf' - xfg'.$$

Como $dP(0) = Id$, si el teorema de la función inversa fuese válido tendríamos que la imagen de P contiene a algún entorno de la función cero. Sin embargo, Hamilton en su libro prueba que la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $g_n := \frac{1}{n} + \frac{x^n}{n!}$ converge a la función cero pero no pertenece a la imagen de P para ningún $n \in \mathbb{N}$.

1.2. Variedades diferenciables en dimensión infinita

En esta sección hablaremos acerca de variedades diferenciables en dimensión infinita modeladas por espacios localmente convexos. Definiremos las nociones de subvariedad, diferenciablidad, vector tangente, espacio tangente, campo vectorial y fibrado cotangente.

Dado que la regla de la cadena es válida para funciones suaves entre subconjuntos abiertos de espacios localmente convexos, podemos definir variedades suaves como en el caso de dimensión finita:

Definición 1.2.1. Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo y M un espacio topológico Hausdorff. Supongamos que existe una colección de abiertos $\mathcal{U} \subseteq M$ que lo recubren y una colección de mapas $\varphi : \mathcal{U} \to E$ de manera que $\varphi(\mathcal{U}) \subseteq E$ es abierto y $\varphi : \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U})$ es un homeomorfismo. Los pares $(\mathcal{U}, \varphi)$ se denominan *cartas* de M y diremos que M es una *variedad diferenciable modelada en* E si se satisface la siguiente condición de compatibilidad: si $(\mathcal{V}, \phi)$ es otra carta de M, entonces la función de transición

$$\phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \to \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

es suave. Decimos que M es una *variedad diferenciable de Fréchet* si el espacio E es de Fréchet.

Definición 1.2.2. Sea M una variedad diferenciable modelada por un espacio E, y sea $N \subseteq M$ un subconjunto.

(a) Decimos que N es una *subvariedad* de M si existe un subespacio cerrado $F \subseteq E$ tal que para cada $n \in N$ existe una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de M con $n \in \mathcal{U}$ donde se satisface que $\varphi(\mathcal{U} \cap N) = \varphi(\mathcal{U}) \cap F$.

(b) Decimos que N es una *subvariedad split* de M si, además, existe un subespacio $G \subseteq E$ para el cual la aplicación suma $F \times G \to E, (f, g) \mapsto f + g$ es un isomorfismo.

Observación 1.2.3. Si $N \subseteq M$ es una subvariedad, entonces N posee estructura de variedad diferenciable. Para demostrarlo debemos ver que las aplicaciones dadas por restringir las cartas de M inducen cambios de coordenadas suaves. Si M es de dimensión finita, toda subvariedad es split ya que todo subespacio cerrado de $\mathbb{R}^n$ es complementado. Así, podemos decir que los cambios de coordenadas de N son los cambios de coordenadas suaves de M compuestos con la inclusión y la proyección sobre el espacio complementado. (Ver [Lee12]). Aquí aparece la primera diferencia con el caso infinito dimensional: no todas las subvariedades de una variedad de dimensión infinita son subvariedades split. Si N es una subvariedad no split, veamos que los cambios de coordenadas restringidos forman un atlas: sean $(\mathcal{U}, \varphi)$ y $(\mathcal{V}, \psi)$ cartas de M. Consideremos $T := \varphi \circ \psi^{-1}$ y llamemos

$$t := \varphi \circ \psi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \cap \psi(\mathcal{V}) \cap F \to \varphi(\mathcal{U}) \cap \psi(\mathcal{V}) \cap F$$

a la restricción de T al subespacio F. Queremos probar que t es diferenciable, sabiendo que T lo es. Para eso, veamos que la diferencial de T se restringe bien. Consideremos

$dT(p) : E \to E$, la diferencial de T en un punto $p \in F$. Por definición tenemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{T(p+x) - T(p) - dT(p)x}{|x|} = 0.$$

Si existiera un elemento $v \in F$ tal que $w = dT(p)v \notin F$, por el teorema de Hahn-Banach podemos considerar $\Phi \in E^*$ tal que $\Phi(F) \equiv 0$ y $\Phi(w) = d = \text{dist}(w, F) \neq 0$. Aplicando Φ al límite a lo largo de la recta $p + \lambda v$, tendríamos que

$$0 = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\Phi(T(p + \lambda v) - T(p)) - \lambda \Phi(w)}{\lambda |v|} = \frac{-d}{|v|}$$

puesto que $T(p + \lambda v) - T(p) \in F$ por hipótesis. Pero esto es un absurdo, y por lo tanto debe ser $dT(p)(F) \subseteq F$. Como $dT(p)$ es continuo en E, su restricción a F también lo es y por lo tanto t es diferenciable, con diferencial es $dT(p)|_F : F \to F$.

La noción de función diferenciable entre variedades diferenciables se define al igual que para el caso finito dimensional:

Definición 1.2.4. Sean M, N variedades diferenciables modeladas en espacios localmente convexos E, F respectivamente. Una función $f : M \to N$ es *diferenciable* si para todo par de cartas $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \phi)$ de M y N respectivamente se tiene que la composición $\phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable.

Al trabajar sobre dimensión finita, sabemos que el espacio tangente a una variedad se puede definir de (al menos) dos formas distintas: podemos pensarlo como clases de equivalencias de cierto tipo de curvas, o también como un espacio de derivaciones. Ambas definiciones en ese caso son equivalentes. Sin embargo, esto no sucede en dimensión infinita. La definición que usaremos en este trabajo para espacio tangente es la que daremos a continuación.

Definición 1.2.5. Dado $p \in M$, definimos los *vectores tangentes* $v \in T_pM$ como clases de equivalencias de curvas suaves $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\varepsilon > 0$ y $\gamma(0) = p$, bajo la relación de equivalencia dada por $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$ para alguna carta $(\varphi, \mathcal{U})$ con $p \in \mathcal{U}$.

Observación 1.2.6. Notar que T_pM tiene una estructura natural de espacio vectorial, donde además para cada carta $(\varphi, \mathcal{U})$, la aplicación

$$\begin{aligned} T_pM &\to E \\ [\gamma] &\mapsto (\varphi \circ \gamma)'(0) \end{aligned}$$

es un isomorfismo lineal.

Definición 1.2.7. Definimos el *fibrado tangente* a M como $TM := \bigcup_{p\in M} T_pM$, y llamamos $\pi : TM \to M$ a la proyección que asigna $p \in M$ a cada vector $v \in T_pM$.

Observación 1.2.8. TM es una variedad diferenciable modelada en el espacio localmente convexo $E \times E$. Su estructura diferenciable se define igual que en el caso finito dimensional.

Definición 1.2.9. Dada $f : M \to N$ una función suave entre variedades diferenciables, definimos la *diferencial de f en $p \in M$* como la aplicación lineal entre los espacios tangentes dada por:

$$\begin{aligned} T_p(f) : T_pM &\to T_{f(p)}N \\ [\gamma] &\mapsto [f \circ \gamma]. \end{aligned}$$

Esta definición induce una aplicación entre espacios tangentes $T(f) : TM \to TN$ que satisface el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T(f)} & TN \\ {\scriptstyle \pi_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_N} \\ M & \xrightarrow[f]{} & N \end{array}$$

Definición 1.2.10. Un *campo vectorial suave* en M es una sección diferenciable de la proyección $\pi : TM \to M$. Es decir, una función diferenciable $X : M \to TM$ tal que para todo $p \in M$ vale que $X(p) := X_p \in T_pM$. Denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ al espacio de los campos suaves en M.

Dados un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y una función suave $f \in C^\infty(M)$, definimos una nueva aplicación $Xf : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$(Xf)(p) := (T(f) \circ X)(p).$$

Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, existe un único campo $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ que satisface la siguiente propiedad:

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

para toda $f \in C^\infty(M)$. Así, tenemos que $\mathfrak{X}(M)$ tiene estructura de álgebra de Lie.

Definición 1.2.11. Si M es una variedad diferenciable con borde, definimos el conjunto de los *campos suaves tangentes a ∂M* como

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{t}}(M) := \{X \in \mathfrak{X}(M) : X_p \in T_p\partial M \text{ para todo } p \in \partial M\}.$$

Definición 1.2.12. Sean M una variedad diferenciable modelada sobre un espacio E y F un espacio localmente convexo. Un *fibrado vectorial suave de tipo F sobre M* es un par $(\pi, \mathbb{F})$ donde $\mathbb{F}$ es una variedad diferenciable y $\pi : \mathbb{F} \to M$ una función suave que cumplen las siguientes propiedades:

- Para cada $p \in M$, la fibra $\mathbb{F}_p := \pi^{-1}(p)$ tiene estructura de espacio localmente convexo y es isomorfa a F.
- Cada punto $p \in M$ tiene un entorno abierto $\mathcal{U}$ para el cual existe un difeomorfismo $\varphi_{\mathcal{U}} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times F$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{U} \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Observación 1.2.13. Un ejemplo de fibrado vectorial es (π, TM), el cual llamamos "fibrado tangente de la variedad M".

Definición 1.2.14. Dada una variedad diferenciable M modelada en un espacio localmente convexo E, definimos el *fibrado cotangente* como $T^*M := \bigcup_{p \in M} T_pM^*$ donde T_pM^* es el espacio dual topológico de T_pM, es decir: las funcionales lineales continuas $f : T_pM \to \mathbb{R}$.

Observación 1.2.15. Notar que, como conjunto, el fibrado cotangente posee una estructura natural de fibrado vectorial sobre M. Sin embargo, para darle una estructura de variedad diferenciable necesitamos una topología localmente convexa en el espacio dual E^*, de modo que para cada difeomorfismo local $f : \mathcal{U} \to E$ con $\mathcal{U} \subseteq E$ abierto, la aplicación

$$\begin{aligned} U \times E^* &\to E^* \\ (x, \lambda) &\mapsto \lambda \circ df(x) \end{aligned}$$

sea suave. Si E es un espacio de Banach, la topología dada por la norma en E^* tiene esta propiedad, pero en general, esta propiedad falla para variedades que no son modeladas en espacios de Banach. En el siguiente capítulo veremos que el espacio dual de un espacio de Fréchet no es necesariamente un espacio de Fréchet, e introduciremos la noción de "dual regular".

Formas diferenciales en dimensión infinita

En esta subsección desarrollaremos algunos conceptos acerca de formas diferenciales en variedades modeladas en espacios localmente convexos, y ciertos operadores que tienen como dominio a estos espacios de k-formas, como la diferencial exterior, la derivada de Lie, el operador estrella de Hodge y algunos otros.

Definición 1.2.16. Sea M una variedad diferenciable modelada en un espacio localmente convexo E. Una *k-forma diferencial* en M con valores en E es una función ω que asocia a cada elemento $p \in M$ una función k-lineal alternada $\omega_p : (T_pM)^k \to E$ tal que en coordenadas locales la aplicación $(p, v_1, \ldots, v_k) \mapsto \omega_p(v_1, \ldots, v_k)$ es suave.

Notación 1.2.17. Denotaremos por $\Omega^k(M, E)$ al espacio de las k-formas en M con valores en E e identificaremos a $\Omega^0(M, E)$ con el espacio de las funciones suaves $C^\infty(M, E)$.

Una diferencia importante con el caso finito dimensional, es que dada una carta no hay una descripción natural de las k-formas en términos de formas más básicas, por lo tanto las formas diferenciales no pueden ser definidas como secciones suaves de un fibrado vectorial.

Observación 1.2.18. Notar que el espacio de 1-formas diferenciales $\Omega^1(M, E)$ no es otra cosa que TM^*, el dual topológico del fibrado tangente. Por otro lado, tenemos que

$$\Omega^2(M, E) = \Omega^1(M, E) \times \Omega^1(M, E)/\sim$$

donde cocientamos por todas las relaciones necesarias para que las aplicaciones sean alternadas. Así, al espacio de 2-formas diferenciales podemos dotarlo de la topología cociente. De la misma forma, consideramos a $\Omega^k(M, E)$ con la topología cociente para todo $k \in \mathbb{N}$ y por lo tanto podemos considerar en

$$\Omega(M, E) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} \Omega^k(M, E)$$

la topología de la suma directa. Es decir: si para cada $k \in \mathbb{N}_0$ consideramos la inlcusión $i_k : \Omega^k(M, E) \to \Omega(M, E)$ entonces un subconjunto $\mathcal{U} \subseteq \Omega(M, E)$ es abierto si y sólo si $i_k^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en $\Omega^k(M, E)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

Definición 1.2.19. Sea M una variedad diferenciable modelada en un espacio localmente convexo E. El *producto wedge*

$$\Omega^k(M, E) \times \Omega^l(M, E) \to \Omega^{k+l}(M, E), \quad (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$$

está definido como $(\omega \wedge \eta)_p := \omega_p \wedge \eta_p$, donde

$$(\omega_p \wedge \eta_p)(v_1, \ldots, v_{k+l}) := \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sg(\sigma)\omega_p(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\eta_p(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}).$$

La definición de *diferencial exterior* $\mathrm{d}:\Omega^k(M,E)\to\Omega^{k+1}(M,E)$ es un poco más sutil que en dimensión finita, donde normalmente se utilizan coordenadas locales para definirla en cartas. Aquí establecemos que $(df)(X)(p):=T_p(f)(X_p)$ para las 0-formas f y luego extendemos la fórmula inductivamente del siguiente modo:

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\omega)(X_0,\dots,X_k) := &\sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i\omega(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_k)\\ &+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k).\end{aligned}$$

Al igual que en el caso finito dimensional, esta diferencial exterior también tiene las propiedades usuales como $\mathrm{d}^2=0$ y la compatibilidad con el pullback: $\varphi^*(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}(\varphi^*\omega)$.

Extendiendo d a una aplicación lineal en el espacio $\Omega(M,E):=\bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0}\Omega^k(M,E)$ de todas las formas diferenciales en M con valores en E, la relación $\mathrm{d}^2=0$ implica que el espacio

$$Z^k_{dR}(M,E):=\ker(\mathrm{d}|_{\Omega^k(M,E)})$$

de k-formas cerradas contiene al espacio

$$B^k_{dR}(M,E):=\mathrm{d}(\Omega^{k-1}(M,E))$$

de k-formas exactas, y por lo tanto podemos definir el *espacio de cohomología de de Rham* como

$$H^k_{dR}(M,E):=Z^k_{dR}(M,E)/B^k_{dR}(M,E).$$

Para variedades de dimensión finita, usualmente se define la derivada de Lie de una forma diferencial en la dirección de un campo suave X usando su flujo local $t\mapsto Fl^X_t$:

$$\pounds_X\omega:=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(Fl^X_{-t})^*\omega.$$

Como los campos suaves en una variedad infinito dimensional pueden no admitir un flujo local (como mencionaremos más adelante en la Sección 2.1), introduciremos la definición de derivada de Lie de forma más directa.

Definiciones 1.2.20. Dada una variedad diferenciable M modelada en un espacio localmente convexo E, definimos los siguientes operadores:

(a) Para cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$ la *derivada de Lie* $\pounds_Y : \Omega^k(M, E) \to \Omega^k(M, E)$ está dada por $\pounds_Y(f) = Yf$ si $k = 0$ (ver Definición (1.2.10)) y para $k \geq 1$ tenemos la siguiente fórmula:

$$(\pounds_Y \omega)(X_1, \ldots, X_k) = Y.\omega(X_1, \ldots, X_k) - \sum_{i=1}^{k} \omega(X_1, \ldots, [Y, X_j], \ldots, X_k).$$

Se puede verificar que el lado derecho de esta igualdad en algún $p \in M$ depende únicamente de los valores de los campos X_i en p.

(b) Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos el *producto interior* $\mathrm{i}_X : \Omega^{k+1}(M, E) \to \Omega^k(M, E)$ para $k \geq 1$ como

$$\mathrm{i}_X(\omega)(X_1, \ldots, X_k) := \omega(X, X_1, \ldots, X_k).$$

Para $\omega \in \Omega^0(M, E) = C^\infty(M, E)$ definimos $\mathrm{i}_X \omega := 0$.

En lo que sigue asumiremos que M es una variedad riemanniana con métrica g.

(c) Definimos el *operador flat* $\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M, E)$ como

$$\flat(X)(Y) = X^\flat(Y) := \langle X, Y \rangle_g$$

y su inverso, el *operador sharp* $\sharp : \Omega^1(M, E) \to \mathfrak{X}(M)$.

(d) Si (M, g) es de dimensión finita, la métrica induce un producto interno en el espacio de k-formas $\Omega^k(M)$ el cual define un operador $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ llamado "*operador estrella de Hodge*". Este operador está dado por la siguiente relación: si $\beta \in \Omega^k(M)$ entonces $\star\beta$ cumple

$$\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \operatorname{vol} \qquad \forall \alpha \in \Omega^k(M),$$

donde $\operatorname{vol} \in \Omega^n(M)$ es la forma de volumen asociada a la métrica g.

(e) Al igual que antes, si (M, g) es de dimensión finita, definimos el *operador codiferencial* $\delta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ como

$$\delta\beta := (-1)^k \star^{-1} \mathrm{d} \star \beta = (-1)^{n(k-1)+1} \star \mathrm{d} \star \beta$$

para todo $\beta \in \Omega^k(M)$. Como $\mathrm{d}^2 = 0$ y $\star\star$ es un múltiplo de la identidad, tenemos que $\delta^2 = 0$.

(f) El operador *gradiente* $\operatorname{grad} : C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)$ se define como

$$\operatorname{grad}(f) := (\mathrm{d}f)^\sharp.$$

(g) La *divergencia* $\mathrm{div} : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ de un campo X es la única función suave en M que satisface la siguiente igualdad:

$$\mathrm{d}(\mathrm{i}_X \,\mathrm{vol}) = \mathrm{div}(X)\,\mathrm{vol}\,.$$

Más precisamente, $\mathrm{div}(X) = \star \mathrm{d} \star X^\flat$.

(h) Por último definimos el operador *curl*, como la aplicación $\mathrm{curl} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$\mathrm{curl}(X) = (\star \mathrm{d} X^\flat)^\sharp.$$

A continuación listaremos algunas propiedades que satisfacen estos operadores y que utilizaremos en los siguientes ejemplos. Pueden encontrarse sus demostraciones en la Sección 6.4 de [AMR88] y a lo largo del Capítulo V de [Lan94].

Proposición 1.2.21. *Sea (M, g) una variedad riemanniana de dimensión finita. Son válidas:*

1. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ *para todo* $\alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^l(M)$ *(Regla de Leibniz).*
2. $d\alpha = 0$ *para todo* $\alpha \in \Omega^n(M)$ *con* $n = dim(M)$.
3. $d(\phi^*\alpha) = \phi^*(d\alpha)$.
4. $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)$.
5. $i_X \circ i_X = 0$.
6. $i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_X\beta)$ *para todo* $\alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^l(M)$ *(Regla de Leibniz).*
7. $\star \star \alpha = (-1)^{k(n-k)}\alpha$ *para todo* $\alpha \in \Omega^k(M), n = dim(M)$.
8. $\star\delta = (-1)^k d \star$ *y* $\star d = (-1)^{k+1}\delta\star$.
9. $d \circ \pounds_X = \pounds_X \circ d$.
10. $i_X \circ \pounds_X = \pounds_X \circ i_X$.
11. $\pounds_X(i_Y\alpha) = i_{[X,Y]}\alpha + i_Y \pounds_X \alpha$.
12. $\pounds_X(\alpha \wedge \beta) = (\pounds_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\pounds_X\beta)$ *(Regla de Leibniz).*
13. $i_X(\mathrm{vol}) = \star X^\flat$.

14. $i_X(\phi^*\alpha) = \phi^*(i_{d\phi(X)}\alpha)$.

15. $\pounds_X = d \circ i_X + i_X \circ d$ *(Fórmula mágica de Cartan).*

En la siguiente figura podemos observar el complejo de de Rham de una variedad riemanniana M de dimensión n. La sucesión superior se corresponde con la sucesión inferior vía las identificaciones dadas por las flechas verticales (las cuales son isomorfismos). De la misma forma, las flechas curvadas superiores se corresponden con las flechas curvadas inferiores.

$$\begin{tikzcd}
& C^\infty(M) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, leftrightarrow, "Id"] \arrow[rrrr, bend left, "Id"] & \mathfrak{X}(M) \arrow[rr, bend left, "Id"] \arrow[d, shift left, "\flat"] & & \mathfrak{X}(M) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\xi\mapsto i_\xi \mathrm{vol}"] & C^\infty(M) \arrow[d, "f\mapsto f\,\mathrm{vol}"] & \\
0 \arrow[r] & \Omega^0(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[rrrr, bend right, "\star"'] & \Omega^1(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[u, shift left, "\sharp"] \arrow[rr, bend right, "\star"'] & \ldots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^{n-1}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^n(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{1.2.1}$$

El teorema de descomposición de Hodge

Este teorema nos brinda una descomposición ortogonal del espacio de k-formas diferenciales $\Omega^k(M)$. Es un resultado que tiene muchas apliaciones en el área de la física matemática o la ingeniería. En particular, juega un rol muy importante en el estudio de hidrodinámica de fluidos incompresibles (ver [AMR88]): permite la introducción de la presión para un estado de fluido dado.

Para poder hablar de ortogonalidad, definimos el *producto interno* L^2 *en* $\Omega^k(M)$ como:

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2} := \int_M \alpha \wedge \star\beta, \tag{1.2.2}$$

donde $\star$ es el operador estrella de Hodge definido anteriormente en (1.2.20).

Definición 1.2.22. Dada M una variedad suave con borde, decimos que una forma diferenciable $\alpha \in \Omega^k(M)$ es *tangente* a ∂M si $i^*(\star\alpha) = 0$ y que es *normal* a ∂M si $i^*(\alpha) = 0$. (Aquí $i : \partial M \to M$ denota la inclusión).

Así, definimos los espacios de *k-formas tangentes* y *k-formas normales*

$$\Omega^k_{\mathrm{t}}(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) : \ \alpha \text{ es tangente a } \partial M\}$$
$$\Omega^k_{\mathrm{n}}(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) : \ \alpha \text{ es normal a } \partial M\}$$

y el espacio de k-formas armónicas

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) : \mathrm{d}\alpha = 0, \delta\alpha = 0\}.$$

Observación 1.2.23. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo suave en M. Usando la métrica podemos saber cuándo X es tangente o normal (perpendicular) a ∂M. Ahora, el campo X se corresponde con la 1-forma $X^\flat$ y con la $(n-1)$-forma $\mathrm{i}_X \operatorname{vol} = \star X^\flat$. Se puede ver entonces que X es tangente a ∂M si y sólo si $X^\flat$ es tangente a ∂M si y sólo si $\mathrm{i}_X \operatorname{vol}$ es normal a ∂M. Análogamente para campos normales.

Teorema 1.2.24 (Teorema de descomposición de Hodge para variedades con borde)**.** *Sea M una variedad riemanniana compacta, orientada y con borde. Entonces es válida la siguiente descomposición:*

$$\Omega^k(M) = d\Omega^{k-1}_n(M) \oplus \delta\Omega^{k+1}_t(M) \oplus \mathcal{H}^k.$$

La demostración de este teorema es un tanto complicada y requiere ciertos conocimientos de análisis que no serán utilizados a lo largo de este trabajo, sin embargo quien desee leer la demostración puede encontrarla en la Sección 2.4 de [Sc95]. En el caso donde M es una variedad sin borde, la descomposición que nos provee el teorema de Hodge es

$$\Omega^k(M) = \mathrm{d}\Omega^{k-1}(M) \oplus \delta\Omega^{k+1}(M) \oplus \mathcal{H}^k(M)$$

y una demostración accesible se puede encontrar en el Capítulo 6 del libro [Wa83].

A continuación daremos únicamente la prueba de la ortogonalidad entre los subespacios, omitiendo la demostración de que estos son cerrados y que todo $\omega \in \Omega^k(M)$ se puede escribir como $\omega = \mathrm{d}\alpha + \delta\beta + \gamma$ con $\alpha \in \Omega^{k-1}(M), \beta \in \Omega^{k+1}(M), \gamma \in \mathcal{H}^k(M)$.

Demostración de la ortogonalidad. Para comenzar, veamos que $\mathrm{d}\Omega^{k-1}_{\mathrm{n}}(M)$ es ortogonal al espacio de k-formas cocerradas: sean $\alpha \in \Omega^{k-1}_{\mathrm{n}}(M)$ y $\beta \in \Omega^k(M)$ tal que $\delta\beta = 0$.

$$\langle \mathrm{d}\alpha, \beta\rangle = \int_M \mathrm{d}\alpha \wedge \star\beta = \int_M \mathrm{d}(\alpha \wedge \star\beta) \pm \int_M \alpha \wedge \mathrm{d} \star \beta.$$

Como $\mathrm{d}\star\beta = (-1)^k \star\delta\beta = 0$, la última integral se anula. A su vez, usando el teorema de Stokes, tenemos que:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{d}\alpha, \beta\rangle &= \int_M \mathrm{d}(\alpha \wedge \star\beta)\\ &= \int_{\partial M} i^*(\alpha \wedge \star\beta)\\ &= \int_{\partial M} \underbrace{i^*(\alpha)}_{=0} \wedge i^*(\star\beta) = 0.\end{aligned}$$

Como $\mathcal{H}^k(M)$ está contenido en el espacio de k-formas cocerradas, tenemos que $\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{n}}^{k-1}(M) \perp \mathcal{H}^k(M)$. Ahora veamos que $\delta\Omega_{\mathrm{t}}^{k+1}(M)$ es ortogonal al espacio de k-formas cerradas: sean $\alpha \in \Omega_{\mathrm{t}}^{k+1}(M)$ y $\beta \in \Omega^k(M)$ tal que $\mathrm{d}\beta = 0$. Entonces,

$$\langle \beta, \delta\alpha\rangle = \int_M \beta \wedge \star\delta\alpha = \pm \int_M \beta \wedge \mathrm{d} \star \alpha = \pm \int_M \mathrm{d}(\beta \wedge \star\alpha) + \int_M \mathrm{d}\beta \wedge \star\alpha.$$

La segunda integral de la suma se anula ya que β es cerrada, y usando nuevamente el teorema de Stokes en la primera integral de la suma, tenemos que:

$$\begin{aligned}\langle \beta, \delta\alpha\rangle &= \int_M \mathrm{d}(\beta \wedge \star\alpha)\\ &= \int_{\partial M} i^*(\beta \wedge \star\alpha)\\ &= \int_{\partial M} i^*(\beta) \wedge \underbrace{i^*(\star\alpha)}_{=0}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Al igual que antes, como $\mathcal{H}^k(M)$ está contenido en el espacio de k-formas cerradas, tenemos que $\delta\Omega_{\mathrm{t}}^{k+1}(M) \perp \mathcal{H}^k(M)$. Por último nos falta ver la ortogonalidad entre $\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{n}}^{k-1}(M)$ y $\delta\Omega_{\mathrm{t}}^{k+1}(M)$. Pero esto es claro, ya que todas las k-formas que pertenecen a $\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{n}}^{k-1}(M)$ son cerradas. □

Hay otras dos descomposiciones válidas que serán de nuestro interés, llamadas "descomposición de Helmholtz". Si denotamos por $D_{\mathrm{t}}^k(M) = \{\alpha \in \Omega_{\mathrm{t}}^k(M) : \delta\alpha = 0\}$ al espacio de k-formas co-cerradas tangentes a ∂M y por $C_{\mathrm{n}}^k(M) = \{\alpha \in \Omega_{\mathrm{n}}^k(M) : \mathrm{d}\alpha = 0\}$ al espacio de k-formas cerradas normales a ∂M, entonces:

$$\Omega^k(M) = \mathrm{d}\Omega^{k-1}(M) \oplus D_{\mathrm{t}}^k(M), \tag{1.2.3}$$

$$\Omega^k(M) = \delta\Omega^{k+1}(M) \oplus C_{\mathrm{n}}^k(M). \tag{1.2.4}$$

Se puede verificar la ortogonalidad entre cada uno de estos subespacios de la misma forma que lo hicimos anteriormente. Para detalles acerca del resto de la prueba, ver Corolario 2.4.9 de [Sc95].

Capítulo 2

El grupo de difeomorfismos y su estructura de variedad diferenciable

La idea principal de este capítulo es presentar Diff(M): el grupo de difeomorfismos de una variedad diferenciable M, que en principio no posee una estructura de variedad diferenciable natural. Para comenzar introduciremos nociones básicas acerca de grupos de Lie (tanto finito como infinito dimensionales), luego hablaremos sobre la estructura de espacio de Fréchet del conjunto de campos suaves $\mathfrak{X}(M)$ y por último haremos la construcción de la estructura diferenciable de Diff(M). Veremos que éste resulta ser un grupo de Fréchet-Lie modelado sobre el espacio $\mathfrak{X}(M)$.

2.1. Grupos de Lie en dimensión infinita

Definición 2.1.1. Un *grupo de Lie localmente convexo* G es una variedad diferenciable localmente convexa junto con una estructura de grupo de modo que la multiplicación $m_G : G \times G \to G$ y la inversión $\eta_G : G \to G$ son funciones suaves.

Notación 2.1.2. De ahora en adelante, notaremos por $L_g, R_g : G \to G$ a las traslaciones a izquierda y a derecha respectivamente y por $C_g := L_g \circ R_{g^{-1}} : G \to G$ a la conjugación.

Definición 2.1.3. Un campo suave $X : G \to TG$ se dice que es *invariante a izquierda* si

$$T_h L_g(X_h) = X_{gh}$$

para todo $g, h \in G$.

Definición 2.1.4. Dado un grupo de Lie G, definimos su *álgebra de Lie* como el conjunto

$$Lie(G) := \mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{X}(G) : X \text{ es invariante a izquierda}\},$$

dotado de la operación $[\cdot,\cdot]$ definida en (1.2.10).

Observación 2.1.5. Notar que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ puede ser identificada con el espacio tangente a G en la identidad. Todo campo invariante a izquierda X define unívocamente un elemento $X(e) \in T_eG$. Por otro lado, dado un vector $X \in T_eG$, podemos asociarle un campo vectorial $\widetilde{X} : G \to TG$ dado por $\widetilde{X}(g) := T(L_g)_e(X) \in T_gG$. Es evidente que $\widetilde{X}$ es invariante a izquierda. Si consideramos esta identificación, la operación en el álgebra estaría dada por:

$$[X, Y] := [\widetilde{X}, \widetilde{Y}](e).$$

Ambas definiciones son equivalentes, por lo tanto usaremos la que sea de conveniencia según el contexto.

El siguiente teorema es una herramienta elemental pero muy útil que sirve para construir estructuras de grupos de Lie en grupos que contienen a un grupo de Lie local. Lo usaremos a la hora de construir la estructura diferenciable del grupo de difeomorfismos en la Sección 2.4.

Teorema 2.1.6. *Sea G un grupo y $U = U^{-1}$ un subconjunto simétrico de G que contiene al elemento neutro. Supongamos que U es una variedad diferenciable modelada sobre un espacio localmente convexo E que satisface:*

1. *Existe un entorno del elemento neutro $V \subseteq U$ tal que $V = V^{-1}$, $V \cdot V \subseteq U$, y la multiplicación $m_V : V \times V \to U$ es suave,*
2. *La inversión $\eta_U : U \to U$ es suave,*
3. *Para todo $g \in G$, existe un entorno abierto del elemento neutro $V_g \subseteq U$ tal que $V_g = V_g^{-1}$, $C_g(V_g) \subseteq U$ y la conjugación $C_g : V_g \to U$ es suave.*

Entonces existe una única estructura de grupo de Lie en G para la cual hay un entorno del elemento neutro $U_0 \subseteq U$ tal que la inclusión $U_0 \hookrightarrow G$ induce un difeomorfismo con un subconjunto abierto de G. Además, si el grupo G está generado por V, la tercera condición puede omitirse.

Demostración. Sea $A \subseteq V$ un subconjunto abierto y v_0 un elemento tal que $v_0A \subseteq V$. Notar que $v_0A = \{v \in V : v_0^{-1}v \in A\}$. Así, por la primera hipótesis, tenemos que v_0A es un abierto. Más aún, si consideramos las aplicaciones

$$\begin{aligned} f : A &\to v_0A & \qquad g : v_0A &\to A \\ a &\mapsto v_0a & v_0a &\mapsto a, \end{aligned}$$

la condición 1 nos dice que son biyecciones inversas y diferenciables, y por lo tanto tenemos que $v_0 A$ es difeomorfo a A.

Consideremos $W \subseteq V$ un abierto simétrico ($W = W^{-1}$) alrededor del elemento neutro que sea dominio de alguna carta en U tal que $W \cdot W \cdot W \subseteq V$. Denotaremos por (W, φ) a esta carta. Para cada $g \in G$, sea $\varphi_g : gW \to E$ dada por $h \mapsto \varphi(g^{-1}h)$. Consideremos el atlas $\{(gW, \varphi_g)\}_{g \in G}$ y veamos que se trata de cartas compatibles:

Sean $g_1, g_2 \in G$ dos elementos diferentes tales que $g_1 W \cap g_2 W \neq \emptyset$. Esto implica que $g_2^{-1} g_1$ y $g_1^{-1} g_2$ son elementos de W y, por lo probado anteriormente, tenemos que $g_1^{-1} g_2 W$ es un abierto y por lo tanto $W \cap g_1^{-1} g_2 W$ es abierto por ser intersección de abiertos. Dado que $\varphi_{g_1}(g_1 W \cap g_2 W) = \varphi(W \cap g_1^{-1} g_2 W)$, resulta que $\varphi_{g_1}(g_1 W \cap g_2 W)$ es un abierto de E y además la función de transición está dada por

$$\begin{aligned} \varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_1}^{-1} : \varphi_{g_1}(g_1 W \cap g_2 W) &\to \varphi_{g_2}(g_1 W \cap g_2 W) \\ x &\mapsto (g_2^{-1} g_1 \varphi^{-1}(x)), \end{aligned}$$

que es diferenciable por las hipótesis 1 y 2.

Sea $g_0 \in G$. Notar que la aplicación $\mu_{g_0} : G \to G$ dada por la multiplicación a izquierda por g_0 es diferenciable. En efecto, si $g \in G$ tenemos que $\varphi_{g_0 g} \circ \mu_{g_0} \circ \varphi_g^{-1}(x) = \varphi_{g_0 g}(g_0 g \varphi^{-1}(x)) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$ y la identidad es claramente diferenciable. Resta entonces verificar que la multiplicación y la inversión son diferenciables. Para esto, basta encontrar para cada $g \in G$ un entorno abierto del elemento neutro tal que la aplicación $(g, h) \mapsto g^{-1}h$ sea diferenciable en ese entorno, y un entorno abierto del elemento neutro en el que la conjugación por g resulte también diferenciable. Ambas condiciones se cumplen por las hipótesis 1 y 3 y lo demostrado anteriormente.

Para ver que U es un abierto de G con esta estructura de variedad, alcanza con notar que para todo $u \in U$ existe un entorno abierto $A \subseteq W$ del elemento neutro tal que $uA \subseteq U$ por la primera hipótesis.

La unicidad de la estructura se sigue del hecho de que las traslaciones deben ser difeomorfismos en ambas estructuras diferenciables, y las dos coinciden en un entorno de la identidad.

$\square$

Representaciones de grupos de Lie

Una *representación de un grupo de Lie G* en un espacio vectorial V es una acción suave de G en V. Todo grupo de Lie tiene dos representaciones distinguidas: la representación adjunta y la coadjunta. Como estas juegan un rol importante a lo largo de este trabajo, las describiremos en detalle.

Definición 2.1.7. Sea Ad_g la diferencial de la conjugación por g en el elemento neutro. Es decir, $\mathrm{Ad}_g := T(C_g)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Llamamos *representación adjunta de G* en $\mathfrak{g}$ a la representación dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G &\to Aut(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto \mathrm{Ad}_g. \end{aligned}$$

Observación 2.1.8. A su vez, la diferencial en la identidad de la representación adjunta de G induce una representación

$$\mathrm{ad} := T(\mathrm{Ad})_e : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g}),$$

llamada *representación adjunta del álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$.

Observación 2.1.9. Para que la definición anterior tenga sentido tenemos que hacer una pequeña observación. En el caso donde el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no es un espacio de Banach, tenemos que $Aut(\mathfrak{g})$ no posee estructura de grupo de Lie, por lo cual no podemos considerar la diferencial de Ad. Sin embargo, podemos pensar a $Aut(\mathfrak{g})$ como un subgrupo de Diff($\mathfrak{g}$) (que sí posee estructura diferenciable, y lo veremos en la Sección 2.4) y así pensar a la representación adjunta Ad como una función con codominio Diff($\mathfrak{g}$).

A continuación nombraremos una propiedad que será de mucha utilidad para las cuentas que haremos más adelante, cuya demostración puede encontrarse en la Proposición III.1.16 de [Ne05].

Proposición 2.1.10. *La representación adjunta de un álgebra de Lie en sí misma coincide con el corchete de Lie de la siguiente manera: $ad_v(w) = [v, w]$.*

Notación 2.1.11. En lo que sigue denotaremos por $\mathfrak{g}^*$ al dual de $\mathfrak{g}$, es decir: al conjunto de funcionales $f : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ lineales y continuas.

Definición 2.1.12. La *representación coadjunta de un grupo de Lie G* es la aplicación $\mathrm{Ad}^* : G \to \mathfrak{g}^*$ dada por $\mathrm{Ad}^*(g)(\xi) = \mathrm{Ad}^*_g(\xi) : x \mapsto \xi(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(x))$. Es decir, si notamos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ al pairing entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$, la representación coadjunta queda definida por la relación:

$$\langle \mathrm{Ad}^*_g(\xi), X\rangle = \langle \xi, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)\rangle$$

para todo $\xi \in \mathfrak{g}^*$ y $X \in \mathfrak{g}$.

Definición 2.1.13. Al igual que para la representación adjunta, definimos la *representación coadjunta del álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ como la diferencial de Ad^* en la identidad. Es decir:

$$\mathrm{ad}^* := T(\mathrm{Ad}^*)_e : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g}^*).$$

Observación 2.1.14. Por lo general cuando nos referimos a la representación coadjunta estamos hablando en realidad de una subrepresentación de (2.1.12). Esto se debe a que el dual de un espacio de Fréchet no es necesariamente un espacio de Fréchet.

Definición 2.1.15. Llamamos *dual regular* de $\mathfrak{g}$ a un subespacio de Fréchet G-invariante $\mathfrak{g}^*_{\text{reg}} \subseteq \mathfrak{g}^*$ que satisface que para todo $X \in \mathfrak{g}$ no nulo, existe un elemento $\xi \in \mathfrak{g}^*_{\text{reg}}$ tal que $\langle \xi, X \rangle \neq 0$ y viceversa.

Fijado un dual regular, la representación coadjunta de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}^*_{\text{reg}}$ esté unívocamente determinada por la condición de la Definición (2.1.12).

El mapa exponencial

A la hora de estudiar grupos de Lie de dimensión finita, el mapa exponencial es una herramienta fundamental que se suele utilizar para pasar información del grupo de Lie a su respectiva álgebra de Lie y viceversa. Recordemos que tanto la existencia como la unicidad de esta aplicación se deben al teorema de Piccard-Lindelöf, que establece la existencia y unicidad de soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios euclídeos de dimensión finita. En el caso de los grupos de Banach-Lie, se puede definir el mapa exponencial de la misma forma que en el caso finito dimensional, debido a que la herramienta principal en la demostración del teorema de Picard-Lindelöf es el teorema del punto fijo de Banach, el cual es válido en espacios de Banach. Desafortunadamente esto no es cierto para espacios de Fréchet: allí existen ecuaciones diferenciales ordinarias que no admiten solución o que admiten múltiples soluciones, y por lo tanto debemos considerar una nueva definición de mapa exponencial. Para eso, definiremos primero el concepto de "derivada logarítmica".

Definición 2.1.16. Sea M una variedad diferenciable y G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dada una función suave $f : M \to G$, definimos su *derivada logarítmica* (a izquierda) como la aplicación $\delta(f) : TM \to \mathfrak{g}$ dada por

$$\delta(f)(v) := T_{f(p)}(L_{f(p)^{-1}}) \circ T_p(f)(v) \qquad \text{si } v \in T_pM.$$

Proposición 2.1.17. *Dadas dos funciones suaves $f, g : M \to G$, son válidas las siguientes reglas de derivación:*

1. *Regla del producto: $\delta(fg) = \delta(g) + Ad_{g^{-1}}(\delta(f))$,*

2. *Regla del cociente: $\delta(fg^{-1}) = Ad_g(\delta(f) - \delta(g))$.*

Demostración. En lo que sigue se omitirán los puntos donde debe ser evaluada cada función por cuestiones de simplicidad. En cuanto a la regla del producto, dadas dos funciones suaves $f, g : M \to G$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\delta(fg) &= T_{fg}(L_{g^{-1}f^{-1}}) \circ T(fg) \\
&= T_{fg}(L_{g^{-1}} \circ L_{f^{-1}}) \circ T(fg) \\
&= T_g(L_{g^{-1}}) \circ T_{fg}(L_{f^{-1}}) \circ (T_g(L_f)T(g) + T_f(R_g)T(f)) \\
&= T_g(L_{g^{-1}}) \circ T(g) + T_g(L_{g^{-1}}) \circ T_f(L_{f^{-1}} \circ R_g) \circ T(f) \\
&= T_g(L_{g^{-1}}) \circ T(g) + T_g(L_{g^{-1}}) \circ T_f(R_g \circ L_{f^{-1}}) \circ T(f) \\
&= T_g(L_{g^{-1}}) \circ T(g) + T_g(L_{g^{-1}}) \circ T_e(R_g) \circ T_f(L_{f^{-1}}) \circ T(f) \\
&= \delta(g) + \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\delta(f)).
\end{aligned}
$$

Utilizando esta igualdad para el producto fg^{-1} tenemos que:

$$\delta(fg^{-1}) = \delta(g^{-1}) + \mathrm{Ad}_g(\delta(f)).$$

Así, para probar la regla del cociente basta ver que

$$\delta(g^{-1}) = -\mathrm{Ad}_g(\delta(g)).$$

Veamos:

$$
\begin{aligned}
-Ad_g(\delta(g)) &= -T_e(L_g \circ R_{g^{-1}}) \circ \delta(g) \\
&= T_{g^{-1}}(L_g) \circ -T_e(R_{g^{-1}}) \circ T_g(L_{g^{-1}}) \circ T(g) \\
&= T_{g^{-1}}(L_g) \circ T(g^{-1}) \\
&= \delta(g^{-1})).
\end{aligned}
$$

□

Observación 2.1.18. Aunque a lo largo de este trabajo solo usaremos la derivada logarítmica a izquierda, notar que se puede definir la derivada logarítmica a derecha de una función suave $f : M \to G$ como la aplicación $\delta^r(f) : TM \to \mathfrak{g}$ dada por

$$\delta^r(f)(v) := T_{f(p)}(R_{f(p)^{-1}}) \circ T_p(f)(v) \qquad \text{si } v \in T_pM.$$

Al igual que para el caso anterior, tenemos las siguientes reglas de derivación:

1. Regla del producto: $\delta^r(fg) = \delta^r(f) + \mathrm{Ad}_f(\delta^r(g))$,

2. Regla del cociente: $\delta^r(fg^{-1}) = \delta^r(f) - \mathrm{Ad}_{fg^{-1}}(\delta^r(g))$.

Definición 2.1.19. Dado un grupo de Lie G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, llamamos *mapa exponencial de* G a una aplicación $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ suave tal que para todo $X \in \mathfrak{g}$, la curva $\gamma_X(t) := \exp_G(tX)$ es un grupo a un parámetro que satisface $\gamma'_X(0) = X$.

Es sencillo ver que cualquier curva de este tipo es una solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \gamma(0) & = e \\ \delta(\gamma) & = X \end{cases}$$

donde δ es la derivada logarítmica definida anteriormente.

Preguntarnos por la existencia de una aplicación exponencial nos lleva a una pregunta más general: ¿para toda curva suave $\xi \in C^\infty([0,1], \mathfrak{g})$ el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \gamma(0) & = e \\ \delta(\gamma) & = \xi \end{cases}$$

tiene solución? En caso de que sí, para las funciones constantes $\xi(t) = X$, las soluciones correspondientes son las curvas γ_X que necesitamos para obtener una función exponencial. Más adelante veremos que estas soluciones de hecho son únicas.

Un grupo de Lie en donde este problema de valores iniciales admite una solución $\gamma_\xi \in C^\infty([0,1], \mathfrak{g})$ y el mapa evolución

$$\mathrm{evol}_G : C^\infty([0,1], \mathfrak{g}) \to G, \quad \xi \mapsto \gamma_\xi(1)$$

es suave se dice regular.

Que un grupo de Lie sea regular nos proporciona una gran cantidad de métodos para pasar del nivel infinitesimal al global. Este concepto de regularidad se debe a Milnor ([Mi84]). Al día de hoy no se conoce ningún grupo de Lie modelado en un espacio completo que no sea regular. Para todos los ejemplos que nombraremos de aquí en adelante se puede demostrar la regularidad, pero no hay un teorema general que afirme que todo grupo de Lie localmente convexo modelado sobre un espacio completo sea regular o incluso tenga una función exponencial. Probar o refutar este teorema es actualmente un problema abierto.

2.2. Espacios de funciones suaves

En esta sección describiremos una topología en los espacios de funciones suaves, que se obtiene de la topología compacto-abierta. A esta nueva topología la llamaremos "topología C^r compacto-abierta".

Definición 2.2.1. Si X e Y son espacios topológicos Hausdorff, la *topología compacto-abierta* en el espacio $C(X,Y)$ está definida como la topología generada por los conjuntos de la forma

$$W(\mathcal{K},\mathcal{U}) := \{f \in C(X,Y) : f(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{U}\},$$

donde $\mathcal{K}$ es un subconjunto compacto de X y $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de Y. Denotaremos por $C(X,Y)_c$ al espacio topológico de las funciones continuas de X en Y dotado de la topología compacto-abierta.

Observación 2.2.2. Si Y es un espacio localmente convexo, tenemos que $C(X,Y)$ es un espacio vectorial con respecto a las operaciones punto a punto. Así, la topología en $C(X,Y)_c$ está definida por las seminormas

$$p_{\mathcal{K}}(f) := sup\,\{p(f(x)) : x \in \mathcal{K}\},$$

donde $\mathcal{K} \subseteq X$ es un subconjunto compacto y p es una seminorma continua en Y. En particular, esto nos dice que $C(X,Y)_c$ es un espacio localmente convexo.

Sean M y N variedades diferenciables (posibilemente de dimensión infinita). Cada función suave $f : M \to N$ define una sucesión de funciones suaves $T^k f : T^k M \to T^k N$ en los espacios tangentes iterados. Así, obtenemos para $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ un embedding

$$C^r(M,N) \hookrightarrow \prod_{k=0}^{r} C(T^k M, T^k N)_c,$$

en un espacio producto, que usaremos para definir una topología en $C^r(M,N)$ a la cual llamaremos la *topología C^r compacto-abierta*. Para $r < \infty$, es suficiente considerar el embedding $C^r(M,N) \hookrightarrow C(T^r M, T^r N)_c$. En el conjunto $C^\infty(M,N)$, la topología C^∞ compacto-abierta es el refinamiento común de todas las topologías C^r para $r < \infty$. Como cada subconjunto compacto de M está contenido en una unión finita de abiertos coordenados, la topología en $C^r(M,N)$ está generada por conjuntos de la forma $W(\mathcal{K},\mathcal{U})$ en $C(T^k M, T^k N)$, donde $\mathcal{K} \subseteq T^k\mathcal{U}$ para alguna carta $(\mathcal{U},\varphi)$ de M.

Si E es un espacio localmente convexo, todos los espacios $C(T^k M, T^k E)$ son localmente convexos por la Observación (2.2.2). Además, la correspondiente topología del producto es localmente convexa y por lo tanto $C^\infty(M,E)$ es un espacio localmente convexo. Si M es de dimensión finita, para cada carta $(\mathcal{U},\varphi)$ de M, la topología en $C^\infty(\mathcal{U},E)$ coincide con la topología de convergencia uniforme de todas las derivadas parciales en cada subconjunto compacto de $\mathcal{U}$.

Definición 2.2.3. Como los campos vectoriales son funciones suaves $X : M \to TM$, tenemos un embedding natural $\mathfrak{X}(M) \hookrightarrow C^\infty(M, TM)$ que define una topología en $\mathfrak{X}(M)$. Si $(\mathcal{U}, \varphi)$ es una carta de M, tenemos que $T\mathcal{U} \cong \mathcal{U} \times E$ y los campos suaves de $\mathcal{U}$ se corresponden con funciones suaves $\mathcal{U} \to E$. Esto nos dice que, dotado de esta topología, $\mathfrak{X}(M)$ es un espacio localmente convexo. De hecho, $\mathfrak{X}(M)$ es un espacio de Fréchet si consideramos la sucesión de seminormas que definiremos más adelante en (3.4.1).

2.3. Suavidad de aplicaciones en grupos de difeomorfismos

Aunque la noción de variedad diferenciable nos proporciona una noción natural de función suave entre variedades, resulta conveniente tener también una noción de suavidad para aquellas aplicaciones que tengan como dominio a una variedad suave, pero cuyo codominio sea un espacio de funciones suaves que en principio no tenga estructura de variedad diferenciable. En lo que sigue discutiremos esta noción de suavidad con énfasis en aplicaciones con valores en grupos de difeomorfismos de variedades localmente convexas, y en la próxima sección veremos que si la variedad M es compacta entonces podemos definir una estructura diferenciable en su grupo de difeomorfismos.

Definición 2.3.1. Sean M una variedad diferenciable localmente convexa, y $\mathrm{Diff}(M)$ su grupo de de difeomorfismos, el cual en principio no posee ninguna estructura diferenciable natural. Sea N una variedad diferenciable cualquiera. Diremos que una aplicación $\varphi : N \to \mathrm{Diff}(M)$ es *suave* si la aplicación

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi} : N \times M &\to M \times M \\ (x, p) &\mapsto (\varphi(x)(p), \varphi(x)^{-1}(p)) \end{aligned}$$

es suave. Si N es un intervalo en $\mathbb{R}$, obtenemos en particular una noción de curva suave.

Para hablar acerca de la diferencial de una aplicación $\varphi : N \to \mathrm{Diff}(M)$, debemos primero definir qué significa el "espacio tangente" a $\mathrm{Diff}(M)$ cuando éste no posee estructura de grupo de Lie. Lo pensaremos como el conjunto

$$T(\mathrm{Diff}(M)) := \{X \in C^\infty(M, TM) : \pi_{TM} \circ X \in \mathrm{Diff}(M)\},$$

junto con la "proyección"

$$\begin{aligned} \pi : T(\mathrm{Diff}(M)) &\to \mathrm{Diff}(M) \\ X &\mapsto \pi_{TM} \circ X. \end{aligned}$$

En el caso donde M es una variedad compacta, veremos en la próxima sección que $\text{Diff}(M)$ posee estructura diferenciable y el espacio tangente (como lo definimos en (1.2.5)) coincidirá con esta definición.

Observación 2.3.2. Llamaremos espacio tangente en $f \in \text{Diff}(M)$, al conjunto dado por $T_f(\text{Diff}(M)) := \pi^{-1}(f)$.

Notar que $\text{Diff}(M)$ actúa de forma natural en $T(\text{Diff}(M))$ tanto a izquierda como a derecha:

$$f \cdot X = T(f) \circ X \qquad y \qquad X \cdot f = X \circ f.$$

Definición 2.3.3. Llamamos *acción adjunta* de $\text{Diff}(M)$ en $\mathfrak{X}(M)$ a la acción dada por

$$\begin{aligned} \text{Ad} : \text{Diff}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (f, X) &\mapsto T(f) \circ X \circ f^{-1}. \end{aligned}$$

Las curvas suaves $\varphi : J \subseteq \mathbb{R} \to \text{Diff}(M)$ tienen derivadas logarítmicas (a izquierda)

$$\begin{aligned} \delta(\varphi) : J &\to \mathfrak{X}(M) \\ t &\mapsto \varphi(t)^{-1}.\varphi'(t) \end{aligned}$$

que son curvas suaves en el álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$ de campos suaves de M. Para una variedad cualquiera N, las derivadas logarítmicas son 1-formas valuadas en $\mathfrak{X}(M)$ que se definen de la siguiente forma:

Si $\varphi : N \to \text{Diff}(M)$ es suave y $\widehat{\varphi} : N \times M \to M$ está dada por $\widehat{\varphi}(x, p) := \varphi(x)(p)$, entonces tenemos una aplicación tangente suave

$$T(\widehat{\varphi}) : T(N \times M) \cong TN \times TM \to TM,$$

y para cada $v \in T_x N$ la aplicación parcial

$$\begin{aligned} T_x(\varphi)v : M &\to TM \\ p &\mapsto T_{(x,p)}(\widehat{\varphi})(v, 0) \end{aligned}$$

es un elemento de $T_{\varphi(x)}(\text{Diff}(M))$. Así obtenemos entonces una aplicación tangente

$$\begin{aligned} T(\varphi) : TN &\to T(\text{Diff}(M)) \\ v &\mapsto T_x(\varphi)v \qquad \text{si } v \in T_x N. \end{aligned}$$

Definición 2.3.4. Definimos la *derivada logarítmica* (a izquierda) de φ como la aplicación $\delta(\varphi) : TN \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$\delta(\varphi)_v(p) := T_{\varphi(x)(p)}(\varphi(x)^{-1}) \circ T_{(x,p)}(\widehat{\varphi})(v, 0) \qquad \text{si } v \in T_x N.$$

Se puede probar que $\delta(\varphi)$ es una 1-forma en N que toma valores en $\mathfrak{X}(M)$ (ver [Ne05] para detalles), pero recordemos que $\mathfrak{X}(M)$ no tiene por qué ser un álgebra de Lie topológica si M no es de dimensión finita.

Como consecuencia de la regla de la cadena, tenemos un resultado análogo al que definimos en la Proposición (2.1.17):

Lema 2.3.5. *Dadas dos funciones suaves $f, g : N \to$ Diff(M), definimos el producto como $(fg)(x) := f(x) \circ g(x)$ y el cociente como $(fg^{-1})(x) := f(x) \circ g(x)^{-1}$. Son válidas:*

1. *Regla del producto: $\delta(fg) = \delta(g) + Ad_{g^{-1}}(\delta(f))$,*
2. *Regla del cociente: $\delta(fg^{-1}) = Ad_g(\delta(f) - \delta(g))$,*

donde $(Ad_f(\alpha))_x := Ad_{f(x)}(\alpha_x)$ para α una 1-forma de N que toma valores en $\mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Si $f, g : N \to \mathrm{Diff}(M)$, $v \in T_xN$ y $p \in M$ entonces:

$$\begin{aligned}
\delta(fg)_v(p) &= T_{f(x)(g(x)(p))}((fg(x))^{-1}) \circ T_{(x,p)}(\widehat{fg})(v,0) \\
&= T_{g(x)(p)}(g(x)^{-1}) \circ T_{f(x)(g(x)(p))}(f(x)^{-1}) \circ [T_{(x,g(x)(p))}(\widehat{f})(v,0) \\
&\quad + T_{g(x)(p)}(f(x))T_{(x,p)}(\widehat{g})(v,0)] \\
&= T_{g(x)(p)}(g(x)^{-1}) \circ [T_{f(x)(p)}(f(x)^{-1}) \circ T_{(x,p)}(\widehat{f})(v,0)] \circ g(x) \\
&\quad + T_{g(x)(p)}(g(x)^{-1}) \circ T_{f(x)(g(x)(p))}(f(x)^{-1}) \circ T_{g(x)(p)}(f(x)) \circ T_{(x,p)}(\widehat{g})(v,0) \\
&= Ad_{g(x)^{-1}}(\delta(f)_v(p)) + \delta(g)_v(p).
\end{aligned}$$

Usando esta igualdad para el producto fg^{-1} tenemos que:

$$\delta(fg^{-1})_v(p) = \delta(g^{-1})_v(p) + Ad_{g(x)}(\delta(f)_v(p)).$$

Entonces, alcanza con probar la igualdad

$$-\delta(g^{-1})_v(p) = Ad_{g(x)}(\delta(g)_v(p)).$$

Observar que, si $v \in T_xN$ y $p \in M$ entonces:

$$\begin{aligned}
Ad_{g(x)}(\delta(g)_v(p)) &= T_{g(x)^{-1}(p)}(g(x)) \circ \delta(g)_v \circ g(x)^{-1}(p) \\
&= T_{g(x)^{-1}(p)}(g(x)) \circ T_{g(x)(g(x)^{-1}(p))}(g(x)^{-1}) \circ T_{(x,g(x)^{-1}(p))}(\widehat{g})(v,0) \\
&= T_{g(x)^{-1}(p)}(g(x)) \circ [T_{g(x)^{-1}(p)}(g(x))]^{-1} \circ T_{(x,g(x)^{-1}(p))}(\widehat{g})(v,0) \\
&= T_{(x,g(x)^{-1}(p))}(\widehat{g})(v,0).
\end{aligned}$$

Considerando la igualdad

$$p = g(x) \circ g(x)^{-1}(p) = \widehat{g}(x, \widehat{g^{-1}}(x, p)),$$

y derivando respecto de x, tenemos que

$$0 = T_{(x, \widehat{g^{-1}}(x,p))}(\widehat{g})(v, T_{(x,p)}\widehat{g^{-1}}(v, 0)).$$

Usando esto último y la linealidad de $T(\widehat{g})$, podemos afirmar entonces que

$$Ad_{g(x)}(\delta(g)_v(p)) = -T_{(x, g(x)^{-1}(p))}(0, T_{(x,p)}\widehat{g^{-1}}(v, 0)).$$

Veamos entonces que efectivamente la expresión del lado derecho es $-\delta(g^{-1})_v(p)$. Para eso, consideremos primero la siguiente igualdad:

$$\widehat{g}(x, g(x)^{-1}(p)) = g(x)\widehat{g^{-1}}(x, p).$$

Derivando respecto de x:

$$T_{(x,g(x)^{-1}(p))}(\widehat{g})(0, T_{(x,p)}\widehat{g^{-1}}(v, 0)) = T_{g(x)^{-1}(p)}(g(x)) \circ T_{(x,p)}\widehat{g^{-1}}(v, 0)$$
$$[T_{g(x)^{-1}(p)}(g(x))]^{-1} \circ T_{(x,g(x)^{-1}(p))}(\widehat{g})(0, T_{(x,p)}\widehat{g^{-1}}(v, 0)) = T_{(x,p)}\widehat{g^{-1}}(v, 0).$$

Finalmente, tenemos que:

$$\begin{aligned} -\delta(g(x)^{-1})_v(p) &= -T_{g(x)^{-1}(p)}(g(x)) \circ T_{(x,p)}(\widehat{g^{-1}})(v, 0) \\ &= -T_{g(x)^{-1}(p)}(g(x)) \circ [T_{g(x)^{-1}(p)}(g(x))]^{-1} \circ \\ &\qquad \circ T_{(x,g(x)^{-1}(p))}(\widehat{g})(0, T_{(x,p)}\widehat{g^{-1}}(v, 0)) \\ &= -T_{(x,g(x)^{-1}(p))}(\widehat{g})(0, T_{(x,p)}\widehat{g^{-1}}(v, 0)) \\ &= Ad_{g(x)}(\delta(g)_v(p)), \end{aligned}$$

que era lo que queríamos ver.

□

Observación 2.3.6. Al igual que lo hicimos anteriormente, recalcamos que se puede definir la derivada logarítmica a derecha de una función suave $\varphi : N \to \mathrm{Diff}(M)$ como

$$\delta^r(\varphi)_v(p) := (T_{(x,p)}(\widehat{\varphi})(v, 0)) \circ \varphi(x)^{-1}(p) \qquad \text{si } x \in T_x N,$$

que también define un elemento de $\Omega^1(N, \mathfrak{X}(M))$, y que además satisface la igualdad $\delta^r(\varphi) = \mathrm{Ad}_\varphi(\delta(\varphi)) = -\delta(\varphi^{-1})$. Las reglas de derivación se deducen de la misma forma que como lo hicimos en la Observación (2.1.18).

Como ya nombramos anteriormente cuando definimos el mapa exponencial, hay ciertas ecuaciones diferenciales ordianarias con coeficientes constantes en espacios de Fréchet E para las cuales las soluciones no son únicas. Sin embargo, el lema que enunciaremos a continuación afirma que las soluciones de los correspondientes problemas de valores inciales en el grupo $GL(E) \subseteq \mathrm{Diff}(E)$ son únicas siempre que existan.

Lema 2.3.7 (Lema de unicidad)**.** *Sea N una variedad diferenciable conexa. Dadas dos aplicaciones suaves $f, g : N \to \mathrm{Diff}(M)$, la relación $\delta(f) = \delta(g)$ es equivalente a la existencia de $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ tal que $g(x) = \varphi \circ f(x)$ para todo $x \in N$. En particular, $g(x_0) = f(x_0)$ para algún $x_0 \in N$ implica que $f \equiv g$.*

Demostración. Si $g(x) = \varphi \circ f(x)$ para todo $x \in N$, entonces $T_x(g) = \varphi(x).T_x(f)$ y por lo tanto $\delta(g) = \delta(f)$.

Si por el contrario, $\delta(g) = \delta(f)$ y definimos $\gamma := gf^{-1}$, la regla del cociente implica que $\delta(\gamma) = 0$, que a su vez implica que para cada $p \in M$ la aplicación $x \mapsto \gamma(x)(p)$ tiene derivada nula, y por lo tanto es localmente constante. Como N es conexo, debe ser γ constante. Así, concluimos que $g = \varphi \circ f$ para algún $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$. □

Observación 2.3.8. El lema de unicidad implica en particular que una acción suave a izquierda de un grupo de Lie G conexo en una variedad suave M dada por un morfismo $\sigma : G \to \mathrm{Diff}(M)$, está unívocamente determinada por el correspondiente morfismo de álgebras de Lie dado por

$$\dot{\sigma} := -\delta(\sigma)_e : \mathrm{Lie}(G) \to \mathfrak{X}(M)$$

ya que $\delta(\sigma)$ es una 1-forma invariante a izquierda en G que toma valores en $\mathfrak{X}(M)$, y por lo tanto está completamente determinada por su valor en e.

2.4. La estructura diferenciable de Diff(M)

Sea M una variedad diferenciable compacta sin borde y $\mathfrak{g} = \mathfrak{X}(M)$ el álgebra de Lie de los campos suaves en M. En lo que sigue demostraremos cómo el grupo de difeomorfismos $\mathrm{Diff}(M)$ posee una estructura diferenciable que lo hace ser un grupo de Fréchet-Lie modelado en $\mathfrak{X}(M)$.

Si $Fl^X : \mathbb{R} \times M \to M$, $(t, p) \mapsto Fl^X_t(p)$ denota el flujo de un campo vectorial X, el mapa exponencial en el grupo Diff(M) debería estar dado por

$$\begin{aligned} \exp_{\mathrm{Diff}(M)} : \mathfrak{X}(M) &\to \mathrm{Diff}(M) \\ X &\mapsto Fl^X_1. \end{aligned}$$

Desafortunadamente, esta aplicación no es un difeomorfismo local entre un entorno de $0 \in \mathfrak{X}(M)$ y un entorno de $Id_M \in$ Diff(M) (para detalles ver [Gr88]). Por lo tanto no podemos usarla para definir una carta alrededor de Id_M.

Sin embargo, existe una forma sencilla de solucionar este problema. Sea g una métrica riemanniana en M y sea Exp : $TM \to M$ su mapa exponencial, el cual asigna a $v \in T_pM$ el punto $\gamma_v(1)$, donde $\gamma_v : [0,1] \to M$ es la geodésica que satisface $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma_v'(0) = v$. Así obtenemos la aplicación suave

$$\begin{aligned} \Phi : TM &\to M \times M \\ v &\mapsto (p, Exp(v)) \qquad \text{si } v \in T_pM. \end{aligned}$$

Existe un entorno abierto $\mathcal{U} \subseteq TM$ de 0 tal que Φ es un difeomorfismo entre $\mathcal{U}$ y un entorno abierto $\mathcal{V}$ de la diagonal de $M \times M$. Ahora, el conjunto

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{g}} := \{X \in \mathfrak{X}(M) : X(M) \subseteq \mathcal{U}\}$$

es un subconjunto abierto del espacio de Fréchet $\mathfrak{X}(M)$, y definimos la aplicación

$$\varphi : \mathcal{U}_{\mathfrak{g}} \to C^\infty(M, M), \qquad \varphi(X)(p) := \mathrm{Exp}(X(p)).$$

Es claro que $\varphi(0) = Id_M$. Además, se puede ver que luego de achicar $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$ a un entorno de 0 lo suficientemente pequeño en la topología C^1 compacto-abierta de $\mathfrak{X}(M)$, obtenemos que $\varphi(\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}) \subseteq$ Diff(M). Para ver que Diff(M) posee una estructura de grupo de Lie para la cual φ es una carta, se debe verificar que las operaciones de grupo son suaves en un entorno del 0 cuando se transfieren a $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$ vía φ, de modo que podamos aplicar el Teorema (2.1.6).

Notar que si $(Id, f)(M) \subseteq \mathcal{V}$, entonces podemos definir

$$\varphi^{-1}(f)(p) := Y$$

donde $Y \in \mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$ es tal que $Y_p = \Phi^{-1}(p, f(p))$. Así, φ^{-1} es una función suave y por lo tanto el par $(\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}, \varphi)$ es una carta para $\varphi(\mathcal{U}_{\mathfrak{g}})$. Entonces hemos probado que $\varphi(\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}) \subseteq$ Diff(M) es una variedad diferenciable. Para poder usar el Teorema (2.1.6) debemos ver que la multiplicación, la inversión y la conjugación en $\varphi(\mathcal{U}_{\mathfrak{g}})$ son diferenciables.

Si consideramos $X, Y \in \mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$ tenemos que:

$$m(\varphi(X), \varphi(Y))(p) = (\varphi(X) \circ \varphi(Y))(p) = \varphi(X)(\mathrm{Exp}(Y_p)) = \mathrm{Exp}(X_{\mathrm{Exp}(Y_p)}),$$

por lo tanto, la multiplicación es suave por ser composición de funciones suaves.

Por otro lado, veamos qué sucede con la inversión: por cómo definimos la inversa de φ más arriba, tenemos que si $X \in \mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$:

$$\varphi(X)^{-1}(p) = \varphi(Y)(p)$$

donde $Y \in \mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$ es tal que $Y_p = \Phi^{-1}(p, \varphi(X)(p))$ para todo $p \in M$. Esto es:

$$\Phi(Y_p) = (p, \text{Exp}(Y_p)) = (p, \varphi(X)(p)) = (p, \text{Exp}(X_p))$$

y como Φ es un difeomorfismo entre $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$ y un entorno de $\mathcal{V}$, entonces debe ser $Y_p = X_p$ para todo $p \in M$, es decir: $Y \equiv X$. Así, $\varphi(X)^{-1} = \varphi(X)$ y por lo tanto la inversión en $\varphi(\mathcal{U}_{\mathfrak{g}})$ es suave.

Por último, debemos corroborar que la conjugación por cualquier elemento de Diff(M) es una aplicación suave. Si $f \in \text{Diff}(M)$ y $X \in \mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$, tenemos que:

$$C_f(\varphi(X))(p) = (f \circ \varphi(X) \circ f^{-1})(p) = f(\varphi(X)(f^{-1}(p))) = f(\text{Exp}_{f^{-1}(p)})$$

que es una función suave por ser composición de funciones suaves.

Finalmente, gracias al teorema del grupo de Lie local nombrado anteriormente, tenemos que Diff(M) tiene estructura de grupo de Lie.

De la suavidad de la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathfrak{g}} \times M &\to M \\ (X, p) &\mapsto \varphi(X)(p) = \text{Exp}(X(m)), \end{aligned}$$

se sigue que la acción canónica a izquierda

$$\begin{aligned} \sigma : \text{Diff}(M) \times M &\to M \\ (\varphi, p) &\mapsto \varphi(p) \end{aligned}$$

es suave en un entorno de la identidad de Diff(M), y por lo tanto es suave, ya que es una acción por funciones suaves.

El morfismo correspondiente de álgebras de Lie (2.3.8) $\dot{\sigma} : \text{Lie}(\text{Diff}(M)) \to \mathfrak{X}(M)$ está dado por

$$\dot{\sigma}(X)(p) = -T\sigma(X, 0_p) = -X(p),$$

esto es, $\dot{\sigma} = -Id_{\mathfrak{X}(M)}$, lo cual nos dice que

$$\text{Lie}(\text{Diff}(M)) = (\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])^{\text{op}},$$

donde $\mathfrak{g}^{\text{op}}$ es el opuesto del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con el corchete dado por $[X, Y]_{\text{op}} := [Y, X]$.

Este signo "menos" se debe al hecho de que consideramos a Diff(M) como un grupo que actúa sobre M a izquierda. Si en cambio lo consideráramos actuando a derecha, obtendríamos la multiplicación opuesta: $\varphi * \psi := \psi \circ \varphi$ y así tendríamos que Lie(Diff(M)$^{\text{op}}$) $\cong (\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$. Aquí escribimos G^{op} para el grupo opuesto con el orden de la multiplicación invertido.

Proposición 2.4.1. *Si M es una variedad diferenciable compacta con borde, entonces el álgebra de Fréchet-Lie de Diff(M) es el espacio de campos suaves tangentes al borde $\mathfrak{X}_t(M)$.*

Demostración. Por un lado, si $X \in$ Lie(Diff(M)) $= T_{Id}$Diff(M) entonces existe una curva $f_t \subseteq$ Diff(M) tal que $f_0 = Id$ y $\dot{f}_0 = X$. Como f_0 es un difeomorfismo, tenemos que $f|_{\partial M} : \partial M \to \partial M$. Así, si $p \in \partial M$ entonces $X_p = \dot{f}_0(p) \in T_p \partial M$ y por lo tanto X es un campo suave tangente al borde.

Por otro lado, si $X \in \mathfrak{X}_{\text{t}}(M)$ y p es un punto cualquiera de M, consideremos las curvas $\gamma_{X_p} : [0, 1] \to M$ que satisfacen que $\gamma_{X_p}(0) = p$ y $\dot{\gamma}_{X_p}(0) = X_p$. Si denotamos por $g_t : M \to M$ a las aplicaciones dadas por $p \mapsto \gamma_{X_p}(t)$, gracias al Teorema fundamental de flujos podemos afirmar que g_t es una curva en el grupo de difeomorfismos de M (ver Teorema 9.34 de [Lee12]), que además satisface que $g_0 = Id$ y $\dot{g}_0 = X$. De esta forma podemos afirmar que entonces $X \in$ Lie(Diff(M)). $\square$

Capítulo 3

Flujo geodésico y ecuaciones de Euler-Arnold

El objetivo principal de este capítulo es definir las ecuaciones de Euler-Arnold y analizar en distintos ejemplos qué forma toman estas ecuaciones. Dado un grupo de Lie G junto con una métrica invariante a izquierda, lo que queremos hacer es calcular sus geodésicas.

3.1. Métricas en variedades de dimensión infinita

Definición 3.1.1. Sea M una variedad diferenciable. Una *métrica de Riemann* g en M es una sección diferenciable del fibrado

$$T^*M \times T^*M \to M$$

con las siguientes propiedades:

- g es simétrico: $g_p(X,Y) = g_p(Y,X)$ para todo $p \in M$ y $X, Y \in T_pM$.
- g es definido positivo: $g_p(X,X) \geq 0$ para todo $p \in M$, $X \in T_pM$.
- g es no degenerado: $g_p(X,X) = 0$ si y sólo si $X = 0$.

Notación 3.1.2. Notaremos $g_p(\cdot,\cdot) := \langle \cdot,\cdot \rangle_p$.

Definición 3.1.3. Decimos que una métrica de Riemann es *fuerte* si para cada $p \in M$ la aplicación

$$\begin{aligned} g_p : T_pM &\to T_pM^* \\ X &\mapsto g_p(X,\cdot) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. En caso contrario, diremos que la métrica es *débil*.

Observación 3.1.4. Notar que las métricas de Riemann débiles inducen un monomorfismo de espacios vectoriales. Así, toda métrica de Riemann en una variedad de dimensión finita es fuerte.

Definición 3.1.5. Sea (M, g) una variedad riemanniana. La conexión de Levi-Civita es una conexión ∇ que satisface las siguientes condiciones:

- Preserva la métrica: si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ donde $Xg(Y, Z)$ denota la derivada de la función $g(Y, Z)$ a lo largo del campo vectorial X.
- Es libre de torsión: si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Observación 3.1.6. Una métrica de Riemann débil no necesariamente induce una conexión de Levi-Civita en la variedad. Para más detalles se puede consultar [Br16] o [Kl95].

3.2. Cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones está relacionado con los extremos de funcionales que tienen como dominio a un espacio de curvas. Un ejemplo de este tipo de funcionales es la longitud de una curva en el espacio euclídeo: si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una curva cualquiera, su longitud está dada por $\ell(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)||dt$.

Definición 3.2.1. Se dice que un funcional Φ es *diferenciable* si $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F + R$, donde F depende linealmente de h y $R(h, \gamma) = O(h^2)$. A la parte lineal de este incremento, $F(h)$, la llamamos *diferencial* de Φ.

Se puede ver que si Φ es diferenciable, su diferencial es única. La diferencial de un funcional también es llamada variación, y h es llamada la variación de la curva.

Teorema 3.2.2. *Sea $L = L(x, y, z)$ una función diferenciable de tres variables, y sea X un espacio de curvas. El funcional $\Phi : X \to \mathbb{R}$ dado por $\Phi(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)dt$ es diferenciable y su derivada está dada por la fórmula*

$$F(h) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \gamma} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}}\right] h\, dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} h\right)\Bigg|_a^b. \tag{3.2.1}$$

Observación 3.2.3. Para evitar posibles confusiones aclaramos que aquí

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = \frac{\partial L}{\partial x},$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} = \frac{\partial L}{\partial y}.$$

Al espacio vectorial de curvas X lo pensamos como un espacio de Fréchet y usamos las nociones de derivación dadas en el Capítulo 1.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) &= \int_a^b [L(\gamma + h, \dot{\gamma} + \dot{h}, t) - L(\gamma, \dot{\gamma}, t)]\, dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \gamma} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} \dot{h}\right] dt + O(h^2) = F(h) + R,\end{aligned}$$

donde

$$F(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} \dot{h}\right) dt \qquad \text{y} \quad R = O(h^2).$$

Integrando por partes, obtenemos que

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} \dot{h} dt = -\int_a^b h \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}}\right) dt + \left(h \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}}\right)\Bigg|_a^b .$$

□

Definición 3.2.4. Un *extremal* de un funcional difrerenciable Φ es una curva α tal que $F(h) = 0$ para todo h.

Existe una equivalencia de la definición de extremal, la cual nos conducirá hacia la ecuación de Euler-Lagrange. Antes de enunciarla y dar su respectiva demostración, enunciaremos y demostraremos un lema previo que será de utilidad.

Lema 3.2.5. *Si una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisface que $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$ para toda función continua $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $g(a) = g(b) = 0$, entonces $f \equiv 0$.*

Demostración. Supongamos que $f(x) \neq 0$ para algún $x \in [a, b]$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f(x) > 0$. Como f es continua, tenemos que $f(t) > c > 0$ en algún subintervalo $[x_0, x_1] \subseteq [a, b]$ alrededor de x.

Consideremos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} (t - x_0)(x_1 - t) & \text{si } t \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}. \tag{3.2.2}$$

Notar que g satisface las hipótesis del enunciado pero sin embargo,

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)g(t)dt > 0$$

pues ambas funciones son positivas en el intervalo (x_0, x_1). Lo cual es absurdo, y por lo tanto debe ser $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. □

Teorema 3.2.6. *Una curva α es extremal del funcional $\Phi(\gamma) = \int_a^b L(\gamma, \dot{\gamma}, t)dt$ si y sólo si*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0.$$

Demostración. Recordemos que el Teorema (3.2.2) nos da la siguiente expresión para la diferencial del funcional Φ:

$$F(h) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right)\right] h\, dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} h\right)\Bigg|_a^b,$$

y notar que el término que le sigue a la integral es nulo, ya que $h(a) = h(b) = 0$.

Consideremos la función

$$f(t) := \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha}.$$

Notar que si α es extremal, tenemos que $F(h) = 0$ para todo h con $h(a) = h(b) = 0$. Esto es,

$$\int_a^b f(t)h(t)dt = 0$$

para toda h tal que $h(a) = h(b) = 0$ y por lo tanto el lema previo nos indica que $f \equiv 0$.

A su vez, si $f \equiv 0$, entonces es claro que $F(h) \equiv 0$ y así α es extremal. □

Definición 3.2.7. La ecuación

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \gamma} = 0$$

es llamada la *ecuación de Euler-Lagrange* del funcional $\Phi(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)dt$.

Hasta aquí hemos mencionado algunas definiciones y resultados del cálculo de variaciones sin hablar de variedades diferenciables. En lo que sigue veremos cómo relacionar la teoría del cálculo de variaciones con las geodésicas de una variedad diferenciable.

Definición 3.2.8. Dada una variedad diferenciable M, decimos que una curva $\gamma : [0,1] \to M$ es *admisible* si es C^1 y con derivada no nula a trozos.

Definición 3.2.9. Dada una curva admisible $\gamma : [0,1] \to M$, definimos una *variación* como una función continua $\nu : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to M$ que satisface $\nu(0,t) = \gamma(t)$, $\nu_s(t) := \nu(s,t)$ es admisible para cada s fijo, y si $\pi = \{0 = t_0, t_1, \ldots, t_n = 1\}$ es una partición de $[0,1]$ tal que $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ es diferenciable, entonces la restricción de ν a los rectángulos $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_i, t_{i+1}]$ es dos veces diferenciable.

Decimos que una variación $\nu(s,t)$ es con extremos fijos si $\nu_s(0) = \gamma(0)$ y $\nu_s(1) = \gamma(1)$ para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Definición 3.2.10. Sea M una variedad riemanniana. Definimos el *mapa exponencial* de M como la aplicación $\mathrm{Exp} : TM \to M$ dada por

$$\mathrm{Exp}_p(v) = \gamma_v(1)$$

si $v \in T_pM$, donde $\gamma_v : [0,1] \to M$ es la única geodésica en M tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$.

Lema 3.2.11. *Sea M una variedad riemanniana de dimensión finita y sea exp su mapa exponencial. Consideremos $\gamma : [0,1] \to M$ una curva admisible y $\mu : [0,1] \to TM$ una curva suave a trozos tal que $\pi \circ \mu = \gamma$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que si $\nu : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to M$ está dada por*

$$\nu(s,t) := Exp_{\gamma(t)}(s\mu(t))$$

entonces ν es una variación de γ con $\frac{d}{ds}\nu(0,t) = \mu(t)$. Además, la variación tiene extremos fijos si y sólo si $\mu(0) = \mu(1) = 0$.

Demostración. Refinando la partición de ser necesario, podemos suponer que los intervalos donde γ y μ son suaves son los mismos. Tomando s lo suficientemente pequeño para que $s\mu(t) \in T_{\gamma(t)}M$ pertenezca al entorno en el que $\exp_{\gamma(t)}$ es un difeomorfismo (el cual existe pues M es de dimensión finita), podemos asegurar que ν es suave en los rectángulos donde γ lo era y, además, cada ν_s es admisible puesto que

$$\nu_s : t \mapsto \mathrm{Exp}_{\gamma(t)}(s\mu(t)).$$

Como $\nu_0 = \mathrm{Exp}_{\gamma(t)}(0\mu(t)) = \gamma(t)$, se trata de una variación de γ. Por otro lado,

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{(0,t)} \nu(s,t) = T_0(\mathrm{Exp}_{\gamma(t)})(\mu(t)) = \mu(t).$$

Por último, como

$$\nu_s(0) = \mathrm{Exp}_{\gamma(0)}(s\mu(0)) \ \text{ y } \ \nu_s(1) = \mathrm{Exp}_{\gamma(1)}(s\mu(1))$$

para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, se deduce que ν es una variación con extremos fijos si y sólo si $\mu(0) = \mu(1) = 0$. □

Toda variación induce un campo, y con este lema acabamos de probar que dado un campo μ, podemos construir una variación de modo que μ sea el campo variacional. Notar que la variación construida será de clase C^2 en la variable s sin importar la regularidad de μ ni de γ, por la regularidad de la exponencial. Sin embargo, la regularidad en la variable t sí está condicionada por la de γ, μ.

A continuación enunciaremos la fórmula de la primera variación del *funcional de longitud de arco L*. Se puede encontrar su demostración en [Lan94] o [Lar12].

Teorema 3.2.12. *Sean (M, g) una variedad riemanniana de dimensión finita, $\gamma \subseteq M$ una curva parametrizada por longitud de arco y $\mu : [0,1] \to TM$ una curva suave a trozos tal que $\pi \circ \mu = \gamma$. Consideremos $\nu(s,t)$ la variación de γ definida en el lema previo y supongamos que tiene extremos fijos. Entonces*

$$L(\gamma)\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\nu_s) = -\int_0^1 \langle T_t\dot{\gamma}, \mu\rangle_g \, dt + \sum_{i=1}^{n} \langle \mu(t_i), \dot{\gamma}(t_i^-) - \dot{\gamma}(t_i^+)\rangle_g.$$

Corolario 3.2.13. *Sea (M, g) una variedad riemanniana de dimensión finita y sea $\gamma : [0,1] \to M$ una curva. Entonces:*

1. *Si γ es una geodésica de M entonces es punto crítico de L para toda variación con extremos fijos.*

2. *Si γ es C^1 y punto crítico de L (en particular minimal), entonces γ es una geodésica de M.*

Demostración. Dada una variación cualquiera $\nu(s,t)$ con extremos fijos de γ, consideramos el campo μ a lo largo de γ dado por $\mu(t) := \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(\nu_s(t))$. Este campo induce una variación $\widetilde{\nu}$ vía el Lema (3.2.11).

Si observamos la fórmula de la primera variación, tenemos que la integral vale cero ya que al ser γ una geodésica el integrando es nulo. Además, la sumatoria es de términos nulos pues γ es suave. Esto nos dice entonces que $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\widetilde{\nu}_s) = 0$. Como las derivadas con respecto a s de $\widetilde{\nu}_s$ y ν_s coinciden para todo t, tenemos que $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\nu_s) = 0$ y así γ es punto crítico de L para toda variación con extremos fijos.

Por otro lado, si γ es C^1, el término de la suma no está presente en la fórmula de la primera variación. Si γ es minimal, es un extremo del funcional L para cualquier variación, en particular para $\mu = T_t\dot{\gamma}$ y entonces debe ser $T_t\dot{\gamma} = 0$ y por lo tanto γ es una geodésica. □

Estos resultados nos indican que podríamos definir las geodésicas de una variedad diferenciable de dimensión finita como los puntos críticos del funcional de longitud de arco. Sin embargo, esta definición da lugar a una ambigüedad: toda reparametrización de una geodésica resultaría ser una geodésica, y esto es algo que no es cierto cuando se utiliza la definición convencional en términos de la derivada covariante.

Para evitar esta ambigüedad, definimos el *funcional de energía* de una variedad (M, g) (pseudo-)riemanniana como:

$$E(\gamma(t)) := \frac{1}{2}\int g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))dt. \tag{3.2.3}$$

Las curvas extremales del funcional de energía son también curvas extremales del funcional de longitud de arco, que además satisfacen la condición de tener velocidad constante. Esto último es lo que hace que los puntos críticos del funcional de energía sean exactamente las geodésicas de la variedad M.

Recordemos que nuestro enfoque está puesto en las variedades diferenciables infinito dimensionales. Para estudiar sus geodésicas debemos primero fijar qué definición usaremos de geodésica. Como indicamos en la Observación (3.1.6), las métricas riemannianas débiles en espacios de Fréchet no inducen conexiones de modo usual, por lo que la definición más inmediata para generalizar a variedades de Fréchet es la que podemos describir en términos del cálculo de variaciones, como definiremos a continuación.

Definición 3.2.14. Dada una variedad (M, g) con g una métrica riemanniana débil en M, decimos que una curva $\gamma \subseteq M$ es una geodésica si es un punto crítico del funcional de energía.

3.3. Ecuaciones de Euler-Arnold

Con los resultados previos, en esta sección definiremos qué son las ecuaciones de Euler-Arnold y analizaremos cómo hallar soluciones.

Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Denotamos por $[\cdot, \cdot]$ al corchete de Lie en $\mathfrak{g}$, y por e al elemento neutro en G. Por simplicidad trabajaremos con traslaciones a izquierda, aunque todos los siguientes resultados seguirán valiendo si trasladamos a derecha.

Consideremos un producto interno real $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathfrak{g}$. Este está asociado a un operador $\mathcal{A}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^*$ (llamado *operador de inercia*) de modo que $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\mathcal{A}\cdot,\cdot\rangle$. A partir de ahora lo notaremos $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$. La aplicación dada por

$$T_gG\times T_gG \ni (v_g,w_g) \longmapsto \langle T_gL_{g^{-1}}v_g, T_gL_{g^{-1}}w_g\rangle_{\mathcal{A}} =: \langle\!\langle v_g,w_g\rangle\!\rangle_{\mathcal{A},g}.$$

define una métrica riemanniana $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle_{\mathcal{A}}$ en G.

Sea $\gamma(t)\subseteq G$ una geodésica. Consideremos su vector velocidad en cada punto $\dot\gamma(t)$ y llamemos $\xi(t)$ a su traslación al álgebra de Lie. Es decir: $\xi(t) := T_{\gamma(t)}L_{\gamma(t)^{-1}}(\dot\gamma(t))\subseteq\mathfrak{g}$. La evolución de este vector está codificada en las ecuaciones de las geodésicas de G. Estas ecuaciones nos dan un sistema no lineal en $\mathfrak{g}$ de la forma

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = B(\xi(t)). \tag{3.3.1}$$

Definición 3.3.1. Dado un grupo de Lie G junto con una métrica invariante a izquierda, a la ecuación (3.3.1) la llamamos *ecuación de Euler-Arnold en* $\mathfrak{g}$.

A continuación enunciaremos el resultado de Arnold, que nos permitirá describir la ecuación de Euler-Arnold utilizando la acción coadjunta del grupo de Lie G.

Teorema 3.3.2 (Teorema de Arnold)**.** *Sea G un grupo de Lie y sea $\mathcal{A}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^*$ un operador de inercia. La ecuación de Euler-Arnold asociada a la métrica invariante a izquierda $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle_{\mathcal{A}}$ es*

$$\frac{d}{dt}m(t) = -ad^*_{\mathcal{A}^{-1}m(t)}(m(t)),$$

al verla en $\mathfrak{g}^*$ vía el operador de inercia.

Al momento de la publiación del artículo [Ar66] no existían estudios profundos acerca de la teoría de grupos de Fréchet-Lie. Es por esto que la demostración dada por Arnold en su artículo original en su momento se creía válida para todo tipo de grupos de Lie. Hoy en día sabemos que vale únicamente en el contexto de grupos de Banach-Lie, ya que utiliza la existencia de una carta alrededor del origen con ciertas propiedades de simetrías que, en general, los grupos localmente convexos no poseen. Quien desee leer la demostración para el caso general puede encontrarla en el Apéndice de [Az19].

El flujo geodésico $\gamma:[0,1]\to G$ entre dos puntos $g_0,g_1\in G$ satisface (por definición) el problema variacional

$$\delta\int_0^1 \frac{1}{2}\langle\!\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle\!\rangle_{\mathcal{A},\gamma(t)}dt = 0.$$

Esto puede ser visto como un problema lagrangiano con $L : TG \to \mathbb{R}$ definido como $L(v_g) = \frac{1}{2}\langle\langle v_g, v_g\rangle\rangle_{\mathcal{A},g}$.

De la construcción de la métrica en G se sigue que L es invariante a izquierda, es decir: $L(v_g) = L(T_g L_h(v_g))$ para todo $h \in G$. En particular, esto significa que el lagrangiano L está completamente determinado por $l : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, donde $l = L\big|_{\mathfrak{g}}$.

Obtenemos entonces el siguiente Teorema que es un caso particular del Teorema de Arnold.

Teorema 3.3.3. *Sea G un grupo de Lie y sea $L : TG \to \mathbb{R}$ el lagrangiano invariante a izquierda dado por $L(v_g) := \frac{1}{2}\langle\langle v_g, v_g\rangle\rangle_{\mathcal{A},g}$. Llamamos $l : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ a su restricción al espacio tangente en la identidad. Dada una curva $\gamma(t) \in G$, definimos $\xi(t) := T_{\gamma(t)} L_{\gamma(t)^{-1}} \dot{\gamma}(t)$. Son equivalentes:*

(a) *$\gamma(t)$ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange para L en G;*

(b) *$\dot{\xi} = ad_{\xi}^{\top_{\mathcal{A}}}(\xi)$, donde $ad^{\top_{\mathcal{A}}}$ es la traspuesta de la representación adjunta con respecto al producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$.*

Demostración. La siguiente demostración es válida únicamente para grupos de Lie G que estén contenidos en el conjunto de elementos inversibles de un álgebra de Banach.

Notar que el lagrangiano L es exactamente el funcional de energía definido en (3.2.3). Entonces, tenemos que la condición (a) es equivalente a decir que $\gamma(t)$ es una geodésica de G.

Para simplificar notación, escribiremos $\gamma(t)^{-1}\dot{\gamma}(t) := T_{\gamma(t)} L_{\gamma(t)^{-1}} \dot{\gamma}(t) = \xi(t)$. (Si G es un grupo de matrices, esta notación coincide con el significado usual de la expresión $\gamma(t)^{-1}\dot{\gamma}(t)$ como producto de matrices).

Sea $\mu : [0,1] \to TG$ un campo cualquiera con $\mu(0) = \mu(1) = 0$. Consideremos la variación $\nu : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to G$ de $\gamma(t) \in G$ tal que $\frac{d}{ds}\big|_{s=0} \nu(s,t) = \mu(t)$.

En lo que sigue, notaremos por $(\cdot)'$ a la derivada con respecto a s y por $(\cdot)^{\cdot}$ a la derivada con respecto a t.

Consideremos la función $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(s) := L(\nu_s(t)) = \frac{1}{2}\int_0^1 ||\nu_s(t)^{-1}.\dot{\nu_s}(t)||^2 dt.$$

Derivando respecto de s (y omitiendo la variable t por simplicidad), obtenemos que

$$
\begin{aligned}
f'(s) &= \int_0^1 \langle -\nu_s^{-1}\nu_s'\nu_s^{-1}\dot{\nu}_s + \nu_s^{-1}(\dot{\nu}_s)' , \, \nu_s^{-1}\dot{\nu}_s \rangle \, dt \\
&= \int_0^1 \langle (\nu_s^{-1}\nu_s')^{\cdot} + [\nu_s^{-1}\dot{\nu}_s \, , \, \nu_s^{-1}\nu_s'] \, , \, \nu_s^{-1}\dot{\nu}_s \rangle \, dt \\
&= \int_0^1 \langle (\nu_s^{-1}\nu_s')^{\cdot} \, , \, \nu_s^{-1}\dot{\nu}_s \rangle \, dt + \int_0^1 [\nu_s^{-1}\dot{\nu}_s \, , \, \nu_s^{-1}\nu_s'] \, , \, \nu_s^{-1}\dot{\nu}_s \rangle \, dt
\end{aligned}
$$

Evaluando en $s = 0$ y usando que $\nu_0(t) = \gamma(t)$ y $\nu_0'(t) = \mu(t)$ obtenemos:

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \int_0^1 \langle (\gamma^{-1}\mu)^{\cdot} \, , \, \gamma^{-1}\dot{\gamma} \rangle \, dt \; + \; \int_0^1 \langle [\gamma^{-1}\dot{\gamma} \, , \, \gamma^{-1}\mu] \, , \, \gamma^{-1}\dot{\gamma} \rangle \, dt \\
&= -\int_0^1 \langle \gamma^{-1}\mu \, , \, (\gamma^{-1}\dot{\gamma})^{\cdot} \rangle \, dt \; + \; \int_0^1 \langle [\gamma^{-1}\dot{\gamma} \, , \, \gamma^{-1}\mu] \, , \, \gamma^{-1}\dot{\gamma} \rangle \, dt
\end{aligned}
$$

donde la última igualdad se obtiene integrando por partes y usando que μ tiene extremos nulos.

Si γ es geodésica, entonces por el Corolario (3.2.13) tenemos que $f'(0) = 0$ para cualquier elección del campo μ. Esto es:

$$
\int_0^1 \langle \gamma^{-1}\mu \, , \, (\gamma^{-1}\dot{\gamma})^{\cdot} \rangle \, dt = \int_0^1 \langle [\gamma^{-1}\dot{\gamma} \, , \, \gamma^{-1}\mu] \, , \, \gamma^{-1}\dot{\gamma} \rangle \, dt
$$

Recordemos que $\xi := \gamma^{-1}\dot{\gamma}$ y llamemos $\eta := \gamma^{-1}\mu$. Así,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \langle \eta \, , \, \dot{\xi} \rangle \, dt &= \int_0^1 \langle [\xi, \eta] \, , \, \xi \rangle \, dt \\
\int_0^1 \langle \eta \, , \, \dot{\xi} \rangle \, dt &= \int_0^1 \langle \mathrm{ad}_\xi(\eta) \, , \, \xi \rangle \, dt \\
\int_0^1 \langle \eta \, , \, \dot{\xi} \rangle \, dt &= \int_0^1 \langle \eta \, , \, \mathrm{ad}_\xi^\top(\xi) \rangle \, dt \\
0 &= \int_0^1 \langle \eta \, , \, \mathrm{ad}_\xi^\top(\xi) - \dot{\xi} \rangle \, dt
\end{aligned}
$$

Como esto debe valer para todo η, se satisface la condición (b).

A su vez, si se satisface la condición (b), es claro que $f'(0) = 0$ para toda variación y usando de nuevo el Corolario (3.2.13) tenemos que γ es geodésica, es decir, vale la condición (a). □

Decimos que la forma débil de la ecuación de Euler-Arnold está dada por

$$\langle \dot{\xi}, \eta \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \xi, \mathrm{ad}_{\xi}(\eta) \rangle_{\mathcal{A}}, \qquad \forall \eta \in \mathfrak{g} \tag{3.3.2}$$

donde $\mathrm{ad}_{\xi} = [\xi, \cdot]$. Y su forma fuerte está dada por

$$\dot{\xi} = \mathrm{ad}_{\xi}^{\top_{\mathcal{A}}}(\xi), \tag{3.3.3}$$

que es exactamente la parte (b) del teorema anterior.

En lo que sigue asumiremos que $\mathrm{ad}_{\xi}^{\top_{\mathcal{A}}}$ está bien definida para cualquier $\xi \in \mathfrak{g}$, y que la forma fuerte de la ecuación de Euler-Arnold está bien definida para cualquier elección de datos iniciales. En dimensión finita esto siempre sucede ya que el producto interno es no degenerado y por lo tanto $\mathcal{A}$ es un isomorfismo. En dimensión infinita, como veremos en la Sección 3.4, estas suposiciones no son triviales.

Dada una curva $\xi(t) \in \mathfrak{g}$ solución de la ecuación de Euler-Arnold, la correspondiente geodésica $\gamma(t) \in G$ se obtiene de la ecuación $\dot{\gamma}(t) = T_e L_{\gamma(t)} \xi(t)$.

La ecuación fuerte de Euler-Arnold (3.3.3) está descripta en el marco lagrangiano de la mecánica. También es posible obtener una descripción hamiltoniana gracias a la transformación de Legendre: considerando la variable de momentos $\mu := \frac{dl}{d\xi}(\xi) = \mathcal{A}\xi$, la ecuación de Euler-Arnold toma la forma

$$\dot{\mu} = \mathrm{ad}_{\xi}^{*}(\mu), \quad \xi = \mathcal{A}^{-1}\mu, \tag{3.3.4}$$

donde $\mathrm{ad}^{*} : \mathfrak{g}^{*} \to \mathfrak{g}^{*}$ está definida de modo que $\langle \mu, \mathrm{ad}_{\xi}(\eta) \rangle = \langle \mathrm{ad}_{\xi}^{*}(\mu), \eta \rangle$ para todo $\eta \in \mathfrak{g}$ y $\mu \in \mathfrak{g}^{*}$. Este es un sistema hamiltoniano con respecto al corchete canónico de Lie-Poisson (para detalles ver [MR99]), para la función hamiltoniana cuadrática reducida $h(\mu) = \frac{1}{2}\langle \mu, \mathcal{A}^{-1}\mu \rangle$.

Observación 3.3.4. Si consideramos un lagrangiano que sea invariante a derecha en vez de invariante a izquierda, todo funciona de igual manera, pero en la Ecuación (3.3.2) el lado derecho cambia de signo.

3.4. Ajustes en dimensión infinita

Como ya mencionamos, lo descripto anteriormente además de ser válido para grupos de Lie de dimensión finita, funciona para los grupos infinito dimensionales de Fréchet-Lie. Los principales ejemplos (y los únicos que consideraremos nosotros en esta tesis), son subgrupos -incluyendo el grupo en sí- del grupo $\mathrm{Diff}(M)$ de difeomorfismos de una variedad compacta n-dimensional M. Si M no tiene borde, la correspondiente álgebra de Fréchet-Lie es el espacio $\mathfrak{X}(M)$ de campos suaves en M. Para el caso de una variedad M con borde, vimos en la Proposición (2.4.1) que el álgebra de Fréchet-Lie es el espacio $\mathfrak{X}_t(M)$ de campos suaves tangentes al borde. El corchete de Lie en $\mathfrak{X}(M)$ es (menos) el corchete de Jacobi-Lie, esto es: $\mathrm{ad}_\xi(\eta) \equiv [\xi, \eta] = -[\xi, \eta]_{\mathfrak{X}}$. La topología en $\mathfrak{X}(M)$ que lo hace ser un espacio de Fréchet está dada por la sucesión de seminormas

$$\|\xi\|_0, \|\xi\|_1, \|\xi\|_2, \ldots \quad \text{donde} \quad \|\xi\|_m := \sum_{k=0}^{m} \sup_{x \in M} \sum_{i=1}^{n} |\xi_i^{(k)}(x)|, \quad \xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_i \tag{3.4.1}$$

El corchete de Jacobi-Lie $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ es una aplicación suave con esta topología, así como también lo es cualquier operador diferencial $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Para más detalles acerca de la categoría del álgebras de Frechét-Lie y grupos de Fréchet-Lie ver [Ha82].

Observación 3.4.1. La topología definida en (3.4.1) es independiente de la elección de coordenadas en M, ya que todas las métricas en M son equivalentes.

Proposición 3.4.2. *Sea E un espacio locamente convexo y metrizable. Entonces, el espacio dual E^* es metrizable si y sólo si E es un espacio normado.*

La demostración de esta proposición puede encontrarse en la Sección 29.1 de [Ko69]. Notar que este resultado nos dice que el dual de un espacio de Fréchet no es necesariamente un espacio de Fréchet. Entonces, el punto de vista hamiltoniano dado por la Ecuación (3.3.4) no tiene sentido, ya que asume que $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$ son isomorfos. Para solucionar esto, usaremos la definición de "dual regular" dada en (2.1.15). En este caso, está dado por la imagen del operador de inercia $\mathfrak{g}^*_{reg} := \mathcal{A}\mathfrak{g}$. A lo largo de este trabajo trabajaremos únicamente con el dual regular, así que omitiremos el subíndice: $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*_{reg}$. Además, si son considerados varios operadores de inercia $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ para la misma álgebra de Fréchet-Lie, asumiremos que la parte regular del dual es invariante, esto es: $\mathcal{A}_1\mathfrak{g} = \mathcal{A}_2\mathfrak{g}$.

3.5. Elección del pairing

La forma más sencilla de obtener una representación en coordenadas de la ecuación de Euler-Arnold es introduciendo coordenadas en $\mathfrak{g}$ y luego calculando la traspuesta de ad_ξ (con respecto al producto interno dado $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$) en esas coordenadas. Sin embargo, esto depende de la elección del producto interno y no queremos que eso suceda. Además, en el caso infinito dimensional (por ejemplo, cuando trabajemos con el grupo de difeomorfismos), sólo es posible calcular explícitamente la traspuesta de ad_ξ en unos pocos casos. Entonces, queremos dar una representación en coordenadas que sea independiente del producto interno elegido. Es decir, queremos una representación de la eucación de Euler-Arnold similar a la forma hamiltoniana (3.3.4). Para eso, necesitamos definir una correspondencia entre los elementos de $\mathfrak{g}^*$ y los elementos en $\mathfrak{g}$ sin hacer referencia al producto interno. En dimensión finita podríamos elegir una base cualquiera de $\mathfrak{g}$ y luego usar su base dual en $\mathfrak{g}^*$. En general, debemos identificar cada elemento de $\mathfrak{g}^*$ con un elemento de un espacio $\mathfrak{g}^\bullet$, isomorfo a $\mathfrak{g}^*$ vía un isomorfismo $\mathcal{L} : \mathfrak{g}^\bullet \to \mathfrak{g}^*$ el cual llamaremos *operador de pairing*. Esto quiere decir que un elemento $\mu \in \mathfrak{g}^*$ estará representado por $\bar{\mu} = \mathcal{L}^{-1}\mu \in \mathfrak{g}^\bullet$. La idea es encontrar algún espacio isomorfo $\mathfrak{g}^\bullet$ y un operador conveniente $\mathcal{L}$ de modo que ad^*_ξ sea representada de forma cómoda, es decir, que $\mathrm{ad}^\bullet_\xi := \mathcal{L}^{-1} \circ \mathrm{ad}^*_\xi \circ \mathcal{L}$ sea fácil de describir.

Desde el punto de vista hamiltoniano, la ecuación de Euler-Arnold (3.3.4) puede ser escrita en términos de $\bar{\mu}$ como:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\mu}}{dt} & = \mathrm{ad}^\bullet_\xi(\bar{\mu}) \\ \bar{\mu} & = \mathcal{J}\xi \end{cases} \tag{3.5.1}$$

donde $\mathcal{J} := \mathcal{L}^{-1}\mathcal{A} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^\bullet$.

También podemos reescribir la ecuación desde el punto de vista lagrangiano como

$$\mathcal{J}\dot{\xi} = \mathrm{ad}^\bullet_\xi(\mathcal{J}\xi). \tag{3.5.2}$$

Notar que en ambos casos estamos usando la aplicación $\mathrm{ad}^\bullet_\xi$ en vez de $\mathrm{ad}^{\top_\mathcal{A}}_\xi$ o ad^*_ξ. La elección del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mathcal{A}$ es equivalente a la elección de $\mathcal{J}$.

Las variables reconstruidas $\mu(t) = \mathcal{L}(\bar{\mu}(t))$ y $\xi(t) = \mathcal{J}^{-1}\bar{\mu}(t)$ son independientes de la elección de $\mathfrak{g}^\bullet$ y de $\mathcal{L}$. Si tomamos $\mathfrak{g}^\bullet = \mathfrak{g}$ y $\mathcal{L} = \mathcal{A}$, tanto la Ecuación (3.5.1) como la Ecuación (3.5.2) son exactamente la ecuación original (3.3.3). A esta elección de $\mathfrak{g}^\bullet$ y de $\mathcal{L}$ la llamamos "*pairing de inercia*".

Observación 3.5.1. Así como describimos $\mathrm{ad}^\bullet_\xi$ en términos de ad^*_ξ, resulta útil (para las cuentas que haremos más adelante) tener también una descripción de $\mathrm{ad}^\bullet_\xi$ en términos de $\mathrm{ad}^{\top_\mathcal{A}}_\xi$. Por definición, sabemos que para todo $\psi, \xi, \eta \in \mathfrak{g}$ vale:

$$\langle \psi, \mathrm{ad}_\xi(\eta) \rangle_\mathcal{A} = \langle \mathrm{ad}^{\top_\mathcal{A}}_\xi(\psi), \eta \rangle_\mathcal{A}$$
$$\mathcal{A}(\psi)(\mathrm{ad}_\xi(\eta)) = \mathcal{A}(\mathrm{ad}^{\top_\mathcal{A}}_\xi(\psi))(\eta).$$

Es decir, $\mathcal{A}(\psi) \circ \mathrm{ad}_\xi = \mathcal{A}(\mathrm{ad}^{\top_\mathcal{A}}_\xi(\psi))$ como elementos de $\mathfrak{g}^*$.

A su vez, por definición de ad_ξ^* tenemos que $\mathcal{A}(\psi)\circ\mathrm{ad}_\xi = \mathrm{ad}_\xi^*\circ\mathcal{A}(\psi)$. Por lo tanto, igualando las expresiones obtenidas podemos afirmar que

$$\mathrm{ad}_\xi^*\circ\mathcal{A}(\psi) = \mathcal{A}(\mathrm{ad}_\xi^{\top_\mathcal{A}}(\psi))$$

para todo $\psi\in\mathfrak{g}$. Es decir, $\mathrm{ad}_\xi^*\circ\mathcal{A} = \mathcal{A}\circ\mathrm{ad}_\xi^{\top_\mathcal{A}}$.

Recordando que $\mathrm{ad}_\xi^* = \mathcal{L}\circ\mathrm{ad}_\xi^\bullet\circ\mathcal{L}^{-1}$, tenemos entonces

$$\mathrm{ad}_\xi^\bullet = \mathcal{J}\circ\mathrm{ad}_\xi^{\top_\mathcal{A}}\circ\mathcal{J}^{-1}.$$

A continuación daremos dos ejemplos originales del libro de Arnold [Ar66]. Utilizando nuestro marco de trabajo, daremos una lista de varios pairings que son comunmente utilizados. En cada caso describiremos la forma hamiltoniana y la forma lagrangiana de las ecuaciones de Euler-Arnold:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar\mu}{dt} &= \mathrm{ad}_\xi^\bullet(\bar\mu),\\ \mathcal{J}\dot\xi &= \mathrm{ad}_\xi^\bullet(\mathcal{J}\xi).\end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.2 (Cuerpo rígido)**.** En este primer ejemplo el grupo es el conjunto de matrices de rotación $SO(3)$. Su álgebra de Lie es el espacio de matrices antisimétricas $\mathfrak{so}(3)$. Una métrica invariante a izquierda en $SO(3)$ se obtiene del operador de inercia $\mathcal{A}:\mathfrak{so}(3)\to\mathfrak{so}(3)^*$ correspondiente a los momentos de inercia del cuerpo rígido. En lo que sigue especificaremos dos posibles pairings.

(a) Consideremos $\mathfrak{g}^\bullet = \mathfrak{so}(3)$, y la aplicación $\mathcal{L}:\mathfrak{g}^\bullet\to\mathfrak{so}(3)^*$ definida por el producto interno de Frobenius: $\langle\mathcal{L}\bar\mu,\xi\rangle = \frac{1}{2}tr(\bar\mu^\top\xi)$. Con este operador de pairing tenemos que $\mathrm{ad}_\xi^\bullet(\bar\mu) = -\mathrm{ad}_\xi(\bar\mu) = -\xi\bar\mu+\bar\mu\xi$, lo cual se sigue del hecho de que el producto interno de Frobenius en $\mathfrak{so}(3)$ es menos la forma de Killing en $\mathfrak{so}(3)$. Así, la ecuación del cuerpo rígido en forma hamiltoniana (3.5.1) está dada por

$$\frac{d\bar\mu}{dt} = -[\xi,\bar\mu] = \bar\mu\xi-\xi\bar\mu,\quad \bar\mu = \mathcal{J}\xi$$

y en forma lagrangiana (3.5.2) por

$$\mathcal{J}\dot\xi = -[\xi,\mathcal{J}\xi] = \mathcal{J}\xi\,\xi-\xi\,\mathcal{J}\xi,$$

donde $\mathcal{J} = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{A}:\mathfrak{so}(3)\to\mathfrak{so}(3)$.

Si en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ consideramos la métrica de Frobenius dada por

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_F := \mathrm{Re}(tr(\xi\eta^\top)) = -tr(\xi\eta),$$

entonces tenemos que $\mathcal{A}(\xi) = -tr(\xi\cdot) = 2\mathcal{L}(\xi)$. En este caso, $\mathbb{J}(\xi) = 2\xi$ y por lo tanto la ecuación de Euler-Arnold se traduce en

$$\dot{\xi} = 0.$$

Entonces, tenemos que $\xi = \xi_0$ es constante y como la ecuación que satisfacen las geodésicas es $\dot{\gamma} = \gamma\xi$ (ver Sección (3.3)), tenemos que $\gamma(t) = e^{t\xi_0}$. Es decir, las geodésicas en este caso son los grupos a un parámetro dados por exponenciales.

En general, si consideramos un producto interno cualquiera $(\cdot,\cdot)$ en $\mathfrak{so}(3)$, por el Teorema de Representación de Riesz tenemos que existe un operador positivo $A : \mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{so}(3)$ tal que

$$(\xi, \eta) = \langle A(\xi), \eta\rangle_F = -tr(A(\xi)\eta).$$

Entonces en este caso el operador de inercia $\mathcal{A}$ está dado por $\mathcal{A}(\xi) = -tr(A(\xi)\cdot)$ y en consecuencia $\mathbb{J}(\xi) = 2A(\xi)$.

(b) Esta segunda elección de pairing es más usada por lo general. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathfrak{so}(3)$. En este caso elegimos $\mathfrak{g}^\bullet = \mathbb{R}^3$. Además usamos la notación tradicional para el vector $\bar{\mu} = \boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, correspondiente al momento angular. El operador de pairing está dado por $\mathcal{L}\boldsymbol{\pi} = \sum_{i=1}^3 \pi_i e_i^*$ donde $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ es la base dual de $\mathfrak{so}(3)^*$. Con este operador de pairing tenemos que $\mathrm{ad}_\xi^\bullet(\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\omega}$, donde $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ son las coordenadas de ξ en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ correspondiente a la velocidad angular. Así recuperamos la clásica versión de la ecuación de un cuerpo rígido, en forma hamiltoniana:

$$\dot{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbb{J}\xi = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}$$

y en forma lagrangiana:

$$\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}$$

donde $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es la matriz simétrica asociada al tensor de inercia. Este es un tensor simétrico de segundo orden tal que la forma cuadrática construida a partir del tensor y la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ da la energía cinética de la rotación, es decir:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega_x}\,\boldsymbol{\Omega_y}\,\boldsymbol{\Omega_z}) \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & Y_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega_x} \\ \boldsymbol{\Omega_y} \\ \boldsymbol{\Omega_z} \end{pmatrix}.$$

Las componentes de este tensor de inercia en una base ortonormal pueden calcularse a partir de los tres momentos de inercia según esos tres ejes perpendiculares:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_V \rho(y^2+z^2)\,dxdydz \\ I_{yy} &= \int_V \rho(z^2+x^2)\,dxdydz \\ I_{zz} &= \int_V \rho(x^2+y^2)\,dxdydz, \end{aligned}$$

y los tres productos de inercia se calculan como

$$\begin{aligned} I_{xy} = I_{yx} &= \int_V -\rho xy\,dxdydz \\ I_{yz} = I_{zy} &= \int_V -\rho yz\,dxdydz \\ I_{zx} = I_{xz} &= \int_V -\rho zx\,dxdydz \end{aligned}$$

Además se satisface que $\boldsymbol{I}\boldsymbol{e}_i = \mathcal{J}e_i = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{A}e_i$, donde $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^3$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

En el siguiente ejemplo trabajaremos mucho con la correspondencia entre campos suaves y formas diferenciales. Usaremos los operadores definidos sobre el espacio de k-formas diferenciales $\Omega^k(M)$ y las propiedades que satisfacen, nombradas en la Proposición (1.2.21). Además, el teorema de descomposición de Hodge (1.2.24) será una herramienta fundamental a la hora de entender qué forma toman las ecuaciones de Euler-Arnold para cada elección de pairing distinta.

Ejemplo 3.5.3 (Hidrodinámica ideal)**.** Este es el segundo ejemplo que Arnold propone en su libro [Ar66]. Sea (M, g) una variedad riemanniana compacta de dimensión n, posiblemente con borde. El grupo que consideraremos primero es Diff$_{\text{vol}}(M)$: el conjunto de difeomorfismos de M que preservan el volumen.

Tenemos que Diff$_{\text{vol}}(M)$ es un subgrupo de Fréchet-Lie de Diff(M). Su álgebra de Fréchet-Lie es $\mathfrak{X}_{\text{vol, t}}(M) = \mathfrak{X}_{\text{vol}}(M) \cap \mathfrak{X}_{\text{t}}(M)$, es decir, el conjunto de campos vectoriales de M que tienen divergencia cero y son tangentes al borde ∂M. La métrica $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_{\mathcal{A}}$ en $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(M)$ es la traslación a derecha del producto interno L^2:

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \xi, \eta \rangle_{L^2} := \int_M g(\xi, \eta)\mathrm{vol},$$

donde vol es la forma de volumen asociada con la métrica riemanniana g. En lo que sigue definiremos pairings que nos darán diferentes representaciones de la ecuación de Euler-Arnold para la hidrodinámica ideal.

(a) La elección clásica es el pairing de inercia: $\mathfrak{g}^\bullet = \mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ y $\mathcal{L} = \mathcal{A}$ (usando el producto interno L^2). Aquí $\mathcal{J} = Id$ y por lo tanto $\mathrm{ad}_\xi^\bullet = \mathrm{ad}_\xi^{\top_{\mathcal{A}}}$ (ver Observación (3.5.1)). Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{ad}_\xi^\bullet(\bar{\mu}), \eta \rangle_{\mathcal{A}} &= \langle \bar{\mu}, \mathrm{ad}_\xi(\eta) \rangle_{\mathcal{A}} \\
&= \int_M g(\bar{\mu}, [\eta, \xi])\,\mathrm{vol} \\
&= \int_M g(\bar{\mu}, \nabla_\eta \xi - \nabla_\xi \eta)\,\mathrm{vol} \\
&= \int_M g(\bar{\mu}, \nabla_\eta \xi)\,\mathrm{vol} - \underbrace{\int_M \mathcal{L}_\xi(g(\bar{\mu}, \eta))\,\mathrm{vol}}_{=0} + \int_M g(\nabla_\xi \bar{\mu}, \eta)\,\mathrm{vol} \\
&= \int_M g((\nabla \xi)^\top \bar{\mu}, \eta)\,\mathrm{vol} + \int_M g(\nabla_\xi \bar{\mu}, \eta)\,\mathrm{vol} \\
&= \int_M g(P((\nabla \xi)^\top \bar{\mu} + \nabla_\xi \bar{\mu}), \eta)\,\mathrm{vol} \\
&= \langle P((\nabla \xi)^\top \bar{\mu} + \nabla_\xi \bar{\mu}), \eta \rangle_{\mathcal{A}},
\end{aligned}$$

donde ∇ denota la derivada de Levi-Civita y $P : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ es la proyección ortogonal respecto del producto interno L^2. Así, afirmamos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_\xi^\bullet(\xi) &= P((\nabla \xi)^\top \xi + \nabla_\xi \xi) \\
&= P(\nabla_\xi \xi).
\end{aligned}$$

Observación 3.5.4. La integral que se marcó como nula en la cuenta anterior se debe a que:

$$\begin{aligned}
\int_M \pounds_\xi(g(\bar{\mu},\eta))\,\mathrm{vol} &= \int_M \pounds_\xi(g(\bar{\mu},\eta)\,\mathrm{vol}) - \int_M g(\bar{\mu},\eta)\,\underbrace{\pounds_\xi(\mathrm{vol})}_{=0} \\
&= \int_M \mathrm{i}_\xi(\underbrace{\mathrm{d}g(\bar{\mu},\eta)\,\mathrm{vol}}_{=0}) + \int_M \mathrm{d}(\mathrm{i}_\xi(g(\bar{\mu},\eta)\,\mathrm{vol})) \\
&= \int_{\partial M} i^*(\mathrm{i}_\xi(g(\bar{\mu},\eta)\,\mathrm{vol})) \\
&= \int_{\partial M} i^*(g(\bar{\mu},\eta)\mathrm{i}_\xi\,\mathrm{vol}),
\end{aligned}$$

y como ξ es tangente al borde, veamos que la restricción de $\mathrm{i}_\xi\,\mathrm{vol}$ a ∂M es nula:

$$\begin{aligned}
i^*(\mathrm{i}_\xi\,\mathrm{vol})_p(X_1,\dots,X_{n-1}) &= (\mathrm{i}_\xi\,\mathrm{vol})_{i(p)}(T_p(i)(X_1),\dots,T_p(i)(X_{n-1})) \\
&= \mathrm{vol}_{i(p)}(\xi, j(X_1),\dots,j(X_{n-1})) = 0,
\end{aligned}$$

donde $j : T(\partial M) \to TM$ es la inclusión, y la última expresión es nula ya que "vol" es una aplicación multilineal alternada y $\{\xi, j(X_1),\dots,j(X_{n-1})\}$ es un conjunto linealmente dependiente pues ξ es un campo tangente al borde.

Notar que esta misma cuenta también sirve para probar que $P((\nabla\xi)^\top\xi) = 0$, pues:

$$\begin{aligned}
\langle P((\nabla\xi)^\top\xi),\eta\rangle &= \langle (\nabla\xi)^\top\xi,\eta\rangle \\
&= \int_M g((\nabla\xi)^\top\xi,\eta)\,\mathrm{vol} \\
&= \int_M g(\xi,\nabla_\eta\xi)\,\mathrm{vol} \\
&= \int_M \frac{1}{2}\pounds_\eta(g(\xi,\xi))\,\mathrm{vol}\,.
\end{aligned}$$

Ahora nos gustaría saber quién es $\mathfrak{X}^{\perp_{\mathcal{A}}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ para poder describir mejor esta proyección.

Tenemos un isomorfismo entre $\mathfrak{X}(M)$ y $\Omega^{n-1}(M)$ dado por $\xi \mapsto \mathrm{i}_\xi\,\mathrm{vol}$, el cual envía campos tangentes a ∂M en formas normales. Por otro lado, tenemos el operador estrella de Hodge, que envía k-formas tangentes en $(n-k)$-formas normales y k-formas co-cerradas en $(n-k)$-formas cerradas. Así, la aplicación

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M) &\to D^1_{\mathrm{t}}(M) \\
\xi &\mapsto \star^{-1}\mathrm{i}_\xi\,\mathrm{vol}
\end{aligned}$$

está bien definida y, como $\star^{-1}\mathrm{i}_\xi\,\mathrm{vol} = \star^{-1}\star\,\xi^\flat = \xi^\flat$, tenemos que de hecho es un isomorfismo.

Usando la Ecuación (1.2.3) que nos da el teorema de descomposición de Hodge, tenemos que

$$\mathfrak{X}(M) \cong \mathrm{d}\Omega^0(M) \oplus \mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M).$$

Por lo tanto, $\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}^{\perp_{\mathcal{A}}} = \mathrm{d}\Omega^0(M) = \mathrm{grad}(C^\infty(M))$.

Así obtenemos la conocida ecuación de Euler para un fluido ideal incompresible:

$$\dot{\xi} = -\nabla_\xi \xi - \mathrm{grad}\, p, \quad \mathrm{div}\,\xi = 0, \tag{3.5.3}$$

donde $p \in C^\infty(M)$ es la única función (salvo una constante) que satisface que $\Delta p = \mathrm{div}(\nabla_\xi \xi)$.

(b) Existe otro pairing que es usado frecuentemente, en el cual la ecuación de Euler para un fluido toma una forma bastante simple.

Consideremos la aplicación $T : \Omega^1(M) \to \mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ dada por $T\alpha = P\alpha^\sharp$, donde P es la proyección ortogonal definida en (a). Notar que α está en el núcleo de T siempre que $\alpha^\sharp \in \mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}^{\perp_{\mathcal{A}}}(M) = \mathrm{grad}(C^\infty(M))$. Esto es: $\alpha^\sharp = \mathrm{grad}(f)$ para alguna $f \in C^\infty(M)$, y por lo tanto $\alpha = \mathrm{grad}(f)^\flat$. Así, tenemos que

$$Ker(T) = \mathrm{grad}(C^\infty(M))^\flat = d\Omega^0(M),$$

es decir, el núcleo de T es el espacio de todas las 1-formas exactas.

Entonces, tenemos un isomorfismo $\mathcal{T} : \Omega^1(M)/d\Omega^0(M) \to Im(T) = \mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$, por lo que podemos considerar $\mathfrak{g}^\bullet = \Omega^1(M)/d\Omega^0(M)$ con el operador de pairing definido por

$$\langle \mathcal{L}\bar{\mu}, \xi \rangle = \langle \mathcal{T}\bar{\mu}, \xi \rangle_{L^2} \quad \forall\, \xi \in \mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M).$$

Como $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(M)$ actúa en $\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ por cambios de coordenadas, y debido a que la forma de volumen se preserva, tenemos que $\mathrm{ad}_\xi^\bullet(\bar{\mu}) = \pounds_\xi \bar{\mu}$, donde la derivada de Lie está bien definida en $\Omega^1(M)/d\Omega^0(M)$ ya que manda formas exactas en formas exactas. Para detalles sobre esto último ver [KW09]. Entonces, la forma hamiltoniana de la ecuación de Euler-Arnold con este pairing es

$$\frac{d}{dt}\bar{\mu} = -\pounds_\xi \bar{\mu}, \quad \xi = \mathcal{T}\bar{\mu}, \tag{3.5.4}$$

y la forma lagrangiana correspondiente es

$$\frac{d}{dt}[\xi^\flat] = -\pounds_\xi [\xi^\flat]. \tag{3.5.5}$$

(c) Existe otra elección de pairing "en el medio" de los ejemplos (a) y (b). Recordemos que en el ejemplo (a) vimos que

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M) \ni \xi \mapsto \star^{-1}\mathrm{i}_\xi\,\mathrm{vol} = \star^{-1} \star \xi^\flat = \xi^\flat \in D^1_{\mathrm{t}}(M)$$

es un isomorfismo. Por lo tanto, podemos considerar $\mathfrak{g}^\bullet = D^1_{\mathrm{t}}(M)$ junto con el operador de pairing dado por

$$\langle \mathcal{L}\bar{\mu}, \xi\rangle = \langle \bar{\mu}, \xi^\flat\rangle_{L^2}.$$

Veamos entonces cuál será la expresión de $\mathrm{ad}^\bullet_\xi$ en este caso:

Por un lado, usando la definición de ad^*_ξ, tenemos que

$$\langle \mathrm{ad}^*_\xi(\mu), \eta\rangle = \langle \mu, \mathrm{ad}_\xi(\eta)\rangle = \langle \mathcal{L}\bar{\mu}, \mathrm{ad}_\xi(\eta)\rangle = \langle \bar{\mu}, (\mathrm{ad}_\xi(\eta))^\flat\rangle_{L^2}.$$

Por otro lado, usando la relación $\mathrm{ad}^*_\xi = \mathcal{L}\circ \mathrm{ad}^\bullet_\xi \circ \mathcal{L}^{-1}$,

$$\langle \mathrm{ad}^*_\xi(\mu), \eta\rangle = \langle \mathcal{L}(\mathrm{ad}^\bullet_\xi(\mathcal{L}^{-1}\mu)), \eta\rangle = \langle \mathcal{L}(\mathrm{ad}^\bullet_\xi(\bar{\mu})), \eta\rangle = \langle \mathrm{ad}^\bullet_\xi(\bar{\mu}), \eta^\flat\rangle_{L^2}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{ad}^\bullet_\xi(\bar{\mu}), \eta^\flat\rangle_{L^2} &= \langle \bar{\mu}, (\mathrm{ad}_\xi(\eta))^\flat\rangle_{L^2} = \langle \bar{\mu}, -[\xi,\eta]^\flat\rangle_{L^2} \\
&= -\int_M \bar{\mu}\wedge \star[\xi,\eta]^\flat = \int_M \bar{\mu}\wedge \mathrm{i}_{[\xi,\eta]}\mathrm{vol} \\
&= -\int_M \bar{\mu}\wedge \pounds_\xi \mathrm{i}_\eta \mathrm{vol} + \int_M \bar{\mu}\wedge \mathrm{i}_\eta \underbrace{\pounds_\xi \mathrm{vol}}_{=0} \\
&= \int_M \pounds_\xi\bar{\mu}\wedge \mathrm{i}_\eta\mathrm{vol} - \int_M \pounds_\xi(\bar{\mu}\wedge \mathrm{i}_\eta \mathrm{vol}) \\
&= \int_M \pounds_\xi\bar{\mu}\wedge \star\eta^\flat - \int_{\partial M} i^*(\mathrm{i}_\xi(\bar{\mu}\wedge\star\eta^\flat)) \\
&= \int_M \pounds_\xi\bar{\mu}\wedge \star\eta^\flat - \int_{\partial M} \mathrm{i}_{i^*\xi}(i^*(\bar{\mu})\wedge \underbrace{i^*(\star\eta^\flat)}_{=0}) \\
&= \langle \pounds_\xi\bar{\mu}, \eta^\flat\rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{ad}^\bullet_\xi(\bar{\mu}) = P(\pounds_\xi\bar{\mu})$, donde $P : \Omega^1(M) \to D^1_{\mathrm{t}}(M)$ es la proyección ortogonal. Notar que a lo largo de esta cuenta hemos usado muchas de las propiedades que nombramos en la Proposición (1.2.21), además del teorema de Stokes. Como el complemento ortogonal de D^1_{t} es $d\Omega^0(M)$ (por el teorema de descomposición de Hodge), tenemos que $\mathrm{ad}^\bullet_\xi(\bar{\mu}) = \pounds_\xi\bar{\mu} + \mathrm{d}p$ para algún

$p \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Así, la forma hamiltoniana de la ecuación de Euler-Arnold es

$$\frac{d}{dt}\bar{\mu} = -\pounds_\xi \bar{\mu} - \mathrm{d}p, \quad \delta\bar{\mu} = 0, \quad \bar{\mu} = \xi^\flat, \tag{3.5.6}$$

y la forma lagrangiana es

$$\frac{d}{dt}\xi^\flat = -\pounds_\xi \xi^\flat - \mathrm{d}p, \quad \delta\xi^\flat = 0. \tag{3.5.7}$$

Observar el parecido tanto con la Ecuación (3.5.3) como con las Ecuaciones (3.5.4) y (3.5.5). De hecho, aplicando el levantamiento riemanniano obtenemos la ecuación del pairing en (a) y con la aplicación cociente obtenemos las ecuaciones del pairing en (b).

(d) Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, definimos el álgebra de Lie de campos exactos con divergencia nula como

$$\mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol}}(M) = \{\xi \in \mathfrak{X}_{\mathrm{vol}}(M) : \exists\alpha \in \Omega^{n-2}x \text{ tal que } \mathrm{i}_\xi \operatorname{vol} = \mathrm{d}\alpha\}.$$

En este caso consideraremos una variedad suave M de dimensión 3 junto con el subgrupo $\mathrm{Diff}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol}}(M)$, que es aquel subgrupo de $\mathrm{Diff}(M)$ cuya álgebra de Lie está dada por $\mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,\,t}}(M) = \mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol}} \cap \mathfrak{X}_{\mathrm{t}}(M)$. Recordemos que el espacio $\mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ es isomorfo al espacio de 2-formas exactas normales $\mathrm{d}\Omega^1_{\mathrm{n}}(M)$, vía el isomorfismo dado por $\xi \mapsto \mathrm{i}_\xi \operatorname{vol}$. También tenemos que el operador $(\mathrm{d}\star)^{-1}$ está bien definido en $\mathrm{d}\Omega^1_{\mathrm{n}}(M)$, es no degenerado y autoadjunto con respecto al producto interno L^2 (todo esto lo probaremos más adelante en el Lema (6.5.3)).

Consideremos $\mathfrak{g}^\bullet = d\Omega^1_{\mathrm{n}}(M)$ con el operador de pairing definido por

$$\langle \mathcal{L}\bar{\mu}, \xi\rangle = \langle \bar{\mu}, (\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{i}_\xi \mathrm{vol}\rangle_{L^2}.$$

Veamos entonces cómo es la expresión de $\mathrm{ad}^\bullet_\xi$ en este caso.

Para $\xi, \eta \in \mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$, tenemos que

$$\langle \mathrm{ad}^*_\xi(\mu), \eta\rangle = \langle \mu, \mathrm{ad}_\xi(\eta)\rangle = \langle \mathcal{L}\bar{\mu}, \mathrm{ad}_\xi(\eta)\rangle = \langle \bar{\mu}, (\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{i}_{\mathrm{ad}_\xi(\eta)} \operatorname{vol}\rangle_{L^2},$$

y a su vez,

$$\langle \mathrm{ad}^*_\xi(\mu), \eta\rangle = \langle \mathcal{L}(\mathrm{ad}^\bullet_\xi(\mathcal{L}^{-1}\mu)), \eta\rangle = \langle \mathcal{L}(\mathrm{ad}^\bullet_\xi(\bar{\mu})), \eta\rangle = \langle \mathrm{ad}^\bullet_\xi(\bar{\mu}), (\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{i}_\eta \operatorname{vol}\rangle_{L^2}.$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{ad}^{\bullet}_{\xi}(\bar\mu), (\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{i}_{\eta}\mathrm{vol}\rangle_{L^2} &= \langle \bar\mu, (\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{i}_{\mathrm{ad}_{\xi}(\eta)}\mathrm{vol}\rangle_{L^2} \\
&= -\langle \bar\mu, (\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{i}_{[\xi,\eta]_{\mathfrak{X}}}\mathrm{vol}\rangle_{L^2} \\
&= -\langle \bar\mu, (\mathrm{d}\star)^{-1}\pounds_{\xi}\mathrm{i}_{\eta}\mathrm{vol}\rangle_{L^2} + \langle \bar\mu, (\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{i}_{\eta}\underbrace{\pounds_{\xi}\mathrm{vol}}_{=0}\rangle_{L^2} \\
&= -\int_M \bar\mu \wedge \mathrm{d}^{-1}\pounds_{\xi}\mathrm{i}_{\eta}\,\mathrm{vol} \\
&= -\int_M \bar\mu \wedge \pounds_{\xi}\mathrm{d}^{-1}\mathrm{i}_{\eta}\,\mathrm{vol} \\
&= \int_M \pounds_{\xi}\bar\mu \wedge \mathrm{d}^{-1}\mathrm{i}_{\eta}\,\mathrm{vol} - \int_M \pounds_{\xi}(\bar\mu \wedge \mathrm{d}^{-1}\mathrm{i}_{\eta}\,\mathrm{vol}) \\
&= \int_M \pounds_{\xi}\bar\mu \wedge \mathrm{d}^{-1}\mathrm{i}_{\eta}\,\mathrm{vol} - \int_M \mathrm{d}\mathrm{i}_{\xi}(\bar\mu \wedge \mathrm{d}^{-1}\mathrm{i}_{\eta}\,\mathrm{vol}) \\
&\quad + \underbrace{\mathrm{i}_{\xi}\mathrm{d}(\bar\mu \wedge \mathrm{d}^{-1}\mathrm{i}_{\eta}\,\mathrm{vol})}_{=0} \\
&= \int_M \pounds_{\xi}\bar\mu \wedge \mathrm{d}^{-1}\mathrm{i}_{\eta}\,\mathrm{vol} - \int_{\partial M} i^*(\mathrm{i}_{\xi}(\bar\mu \wedge \mathrm{d}^{-1}\mathrm{i}_{\eta}\,\mathrm{vol})) \\
&= \int_M \pounds_{\xi}\bar\mu \wedge \mathrm{d}^{-1}\mathrm{i}_{\eta}\,\mathrm{vol} - \int_{\partial M} \mathrm{i}_{i^*\xi}(\underbrace{i^*(\bar\mu)}_{=0} \wedge i^*(\mathrm{d}^{-1}\mathrm{i}_{\eta}\,\mathrm{vol})) \\
&= \langle \pounds_{\xi}\bar\mu, (\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{i}_{\eta}\mathrm{vol}\rangle_{L^2}
\end{aligned}
$$

donde nuevamente hemos usado propiedades nombradas en la Proposición (1.2.21), el teorema de Stokes y el hecho de que $\bar\mu$ es una 2-forma exacta.

Notar que $\pounds_{\xi}\bar\mu$ es exacto ya que d conmuta con la derivada de Lie. Así, $\mathrm{ad}^{\bullet}_{\xi}(\bar\mu) = \pounds_{\xi}\bar\mu$.

Notar que $\mathcal{A}\xi = \mathcal{L}\mathrm{d}\star\mathrm{i}_{\xi}\,\mathrm{vol}$ y por lo tanto $\mathcal{J}\xi = \mathrm{d}\star\mathrm{i}_{\xi}\,\mathrm{vol} = \mathrm{d}\star\star\xi^{\flat} = \mathrm{d}\xi^{\flat}$. Entonces, la forma hamiltoniana de la ecuación de Euler-Arnold es

$$\frac{d}{dt}\bar\mu = -\pounds_{\xi}\bar\mu, \quad \bar\mu = \mathcal{J}\xi = \mathrm{d}\xi^{\flat} \tag{3.5.8}$$

y la forma lagrangiana es

$$\mathrm{d}\dot{\xi}^{\flat} = -\pounds_{\xi}\mathrm{d}\xi^{\flat}. \tag{3.5.9}$$

El requisito para que las soluciones de la Ecuación (3.5.9) también cumplan la Ecuación (3.5.7) es que $\mathrm{Diff}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol}}(M)$ sea totalmente geodésico en $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(M)$ (definiremos en detalle el concepto de subgrupo totalmente geodésico en el próximo capítulo). La condición exacta para que esto suceda está dada en [HTV02], para el caso donde M es una variedad sin borde. También se puede extender al caso donde M es una variedad con borde y para una métrica H^1_α posiblemente alterada (correspondiente a la ecuación de fluidos promediada de Euler) y lo veremos más adelante en el Teorema (6.2.1).

(e) Existe otra elección de pairing, la cual es quizás la forma más elegante de la ecuación de un fluido hidrodinámico ideal. Nuevamente consideramos una variedad suave M de dimensión 3 y el subgrupo $\mathrm{Diff}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol}}(M)$. En este caso tomamos $\mathfrak{g}^\bullet = \mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ y el operador de pairing dado por

$$\langle \mathcal{L}\bar{\mu}, \xi \rangle = \langle \bar{\mu}, \mathrm{curl}^{-1}\xi \rangle_{L^2}.$$

La buena definición del operador curl^{-1} en $\mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ la veremos más adelante en el Lema (6.5.3). Además, demostraremos en el Teorema (6.5.1) que el producto interno $\langle \cdot, \mathrm{curl}^{-1} \cdot \rangle_{L^2}$ es bi-invariante. Entonces en este caso tenemos que

$$\mathrm{ad}^\bullet_\xi(\bar{\mu}) = -\mathrm{ad}_\xi(\bar{\mu}) = [\xi, \bar{\mu}]_{\mathfrak{X}}.$$

Más aún, $\mathcal{J}\xi = \mathrm{curl}\xi$, y por lo tanto la forma hamiltoniana de la ecuación de Euler-Arnold toma la forma del par de Lax

$$\frac{d}{dt}\bar{\mu} = -[\xi, \bar{\mu}]_{\mathfrak{X}}, \quad \bar{\mu} = \mathcal{J}\xi = \mathrm{curl}\,\xi. \tag{3.5.10}$$

La forma lagrangiana correspondiente de la ecuación es

$$\mathrm{curl}\,\dot{\xi} = -[\xi, \mathrm{curl}\,\xi]_{\mathfrak{X}}. \tag{3.5.11}$$

Del complejo de de Rham (ver Figura (1.2.1)) para una variedad de dimensión 3 se sigue que el ejemplo previo (d) se obtiene de estas ecuaciones aplicando el operador flat seguido del operador estrella de Hodge. Nuevamente, observemos que estas ecuaciones nos dan soluciones de la ecuación de Euler completa sólo en el caso donde $\mathrm{Diff}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol}}(M)$ es totalmente geodésico en $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(M)$.

Capítulo 4

Subgrupos totalmente geodésicos

En este capítulo definiremos el concepto de "totalmente geodésico". Demostraremos un teorema que será fundamental para nuestro trabajo de aquí en adelante, y lo analizaremos desde diferentes puntos de vista.

4.1. Definiciones generales

Definición 4.1.1. Sea $\widetilde{M}$ una variedad riemanniana con métrica $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_{\mathcal{A}}$, y $M \subseteq \widetilde{M}$ una subvariedad con la métrica inducida. Decimos que M es *totalmente geodésica* con respecto a $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_{\mathcal{A}}$ si toda geodésica de M embebida en $\widetilde{M}$ es también una geodésica de $\widetilde{M}$.

Sea G un grupo de Lie equipado con una métrica invariante a izquierda (o a derecha) y sea H un subgrupo de Lie de G. Nuestro principal objetivo en este trabajo es encontrar ciertas condiciones de la métrica invariante $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_{\mathcal{A}}$ bajo las cuales un subgrupo dado H sea totalmente geodésico en G. Debido a la invariancia a izquierda de la métrica, es suficiente considerar la subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$:

Lema 4.1.2. *H es totalmente geodésico en G si y sólo si todas las soluciones $\xi(t) \in \mathfrak{h}$ de la ecuación de Euler-Arnold en $\mathfrak{h}$ son también soluciones de la ecuación de Euler-Arnold en $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Sea $i : H \to G$ la inclusión y dados $h \in H$, $g \in G$, denotamos L^H_h y L^G_g a las traslaciones a izquierda en H y G respectivamente. Como $i \circ L^H_h = L^G_{i(h)} \circ i$, tenemos que $Ti \circ TL^H_h = TL^G_{i(h)} \circ Ti$.

Ahora, sea $\xi(t) \in \mathfrak{g}$ la solución a la ecuación de Euler-Arnold en $\mathfrak{g}$ con dato inicial $\xi(0) = T_e i \psi_0$ para algún $\psi_0 \in \mathfrak{h}$. Por otro lado, sea $\psi(t) \in \mathfrak{h}$ la solución a la ecuación de Euler-Arnold en $\mathfrak{h}$ con dato inicial $\psi(0) = \psi_0$. Sean $g(t) \in G$ y $h(t) \in H$ las correspondientes geodésicas. Lo que queremos probar es que $i(h(t)) = g(t)$ si y sólo si

$\xi(t) = T_e i\psi(t)$. Sabemos que la curva $h(t)$ satisface que $\dot{h}(t) = T_e L^H_{h(t)}\psi(t)$ con $h(0) = e$. Usando la relación entre las diferenciales nombrada anteriormente, tenemos que:

$$\frac{d}{dt} i(h(t)) = T_{h(t)} i \circ T_e L^H_{h(t)}\psi(t) = T_e L^G_{i(h(t))} \circ T_e i\psi(t), \quad i(h(0)) = e.$$

Luego, $i(h(t))$ satisface la misma ecuación de reconstrucción que $g(t)$ si y sólo si $\xi(t) = T_e i\psi(t)$ y por lo tanto el resultado que queríamos se obtiene de la unicidad de soluciones. $\square$

Así, decimos que una subálgebra $\mathfrak{h}$ es totalmente geodésica en $\mathfrak{g}$ con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$ si las soluciones de la ecuación de Euler-Arnold para $\mathfrak{h}$ son también soluciones a la ecuación de Euler-Arnold para $\mathfrak{g}$. Si esto se cumple o no, depende de la elección de la subálgebra $\mathfrak{h}$ y de la elección de la métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$. Para esto, tenemos el siguiente resultado obtenido por Modin en [MPMM10]:

Teorema 4.1.3. *Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$, y sea $\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$ el complemento ortogonal de $\mathfrak{h}$ con respecto al producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$. Son equivalentes:*

1. *$\mathfrak{h}$ es totalmente geodésica en $\mathfrak{g}$ con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$.*
2. *$\langle\xi,[\xi,\eta]\rangle_{\mathcal{A}} = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{h}$ y $\eta \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$.*
3. *$\langle\psi,[\xi,\eta]\rangle_{\mathcal{A}} + \langle\xi,[\psi,\eta]\rangle_{\mathcal{A}} = 0$ para todo $\xi,\psi \in \mathfrak{h}$ y $\eta \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$.*
4. *$ad_\xi^{\top_{\mathcal{A}}}(\xi) \in \mathfrak{h}$ para todo $\xi \in \mathfrak{h}$.*
5. *$ad_\xi^{\top_{\mathcal{A}}}(\psi) + ad_\psi^{\top_{\mathcal{A}}}(\xi) \in \mathfrak{h}$ para todo $\xi,\psi \in \mathfrak{h}$.*

Demostración. $1 \Leftrightarrow 2$: Sea $\xi(t)$ una solución a la ecuación de Euler-Arnold en $\mathfrak{h}$. Consideremos la forma débil de la ecuación, dada en (3.3.2). Sabamos que cualquier $\eta \in \mathfrak{g}$ puede ser escrito de forma única como $\eta = \eta_1 + \eta_2$ con $\eta_1 \in \mathfrak{h}$ y $\eta_2 \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$. Como $\xi(t) \in \mathfrak{h}$, para todo t se tiene que $\langle\dot{\xi}(t),\eta_2\rangle_{\mathcal{A}} = 0$. Entonces, para que $\xi(t)$ cumpla la ecuación de Euler-Arnold en $\mathfrak{g}$, una condición suficiente es que $\langle\xi(t),[\xi(t),\eta_2]\rangle_{\mathcal{A}} = 0$ para todo $\eta_2 \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$. Como la condición inicial $\xi(0) \in \mathfrak{h}$ es arbitraria, la condición es también necesaria.

$2 \Rightarrow 3$: Fijado $\eta \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$, consideremos la forma bilineal $Q_\eta(\xi,\psi) := \langle\xi,[\psi,\eta]\rangle_{\mathcal{A}}$. Por hipótesis, tenemos que $Q_\eta(\xi,\xi) = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{h}$. En particular, $Q_\eta(\xi+\psi,\xi+\psi) = 0$ y de la bilinealidad obtenemos la condición (3).

$3 \Rightarrow 2$: Considerando la misma forma bilineal Q_η y tomando $\xi = \psi$ obtenemos la condición (2).

$2 \Leftrightarrow 4$ y $3 \Leftrightarrow 5$ se deducen de la definición de $\mathrm{ad}_\xi^{\perp_{\mathcal{A}}}$ y el hecho de que $\mathfrak{g}$ está generada por $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$. $\square$

Una interpretación geométrica de este resultado es que $\mathfrak{h}$ es totalmente geodésica si y sólo si $[\xi, \eta] \perp_{\mathcal{A}} \xi$ para todo $\xi \in \mathfrak{h}$ y $\eta \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$. Esto es, $[\xi, \eta]$ debe pertenecer al hiperplano que es $\mathcal{A}$-ortogonal a ξ.

Observación 4.1.4. Notar que el Teorema (4.1.3) es válido incluso en el caso donde $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Fréchet-Lie infinito dimensional. En efecto, una subálgebra de Fréchet-Lie es (por definición) un subespacio lineal topológicamente cerrado de $\mathfrak{g}$ que es cerrado por la operación dada por el corchete. Por lo tanto, todo $\eta \in \mathfrak{g}$ admite una única descomposición $\eta = \eta_1 + \eta_2$ con $\eta_1 \in \mathfrak{h}$ y $\eta_2 \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$.

Ejemplo 4.1.5 (Cuerpo rígido, continuación)**.** Consideremos de nuevo el Ejemplo (3.5.2). Una subálgebra de dimensión 1 de $\mathfrak{so}(3)$ está dada por $\mathfrak{h} = \{\xi \in \mathfrak{so}(3) : \xi = ae_1, a \in \mathbb{R}\}$. Como es unidimensional, el corchete es trivial y por lo tanto la ecuación de Euler-Arnold en $\mathfrak{h}$ se reduce a $\dot{\xi} = 0$, es decir, todas las soluciones son estacionarias.

Del Teorema (4.1.3) obtenemos que $\mathfrak{h}$ es totalmente geodésica si y sólo si $\mathrm{ad}_{\xi}^{\top_{\mathcal{A}}}(\xi) \in \mathfrak{h}$ para todo $\xi \in \mathfrak{h}$. Como la subálgebra $\mathfrak{h}$ está generada por e_1, basta probar que $ad_{e_1}^{\top_{\mathcal{A}}}(e_1) = be_1$ para algún $b \in \mathbb{R}$. Expresado en términos de $\mathrm{ad}_{e_1}^{\bullet}$ (ver la Observación (3.5.1)), esto significa que $\mathrm{ad}_{e_1}^{\bullet}(\mathcal{J}e_1) = \mathcal{J}(be_1)$. Usando que $\mathcal{J}e_i = \boldsymbol{I}\mathbf{e}_i$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{e_1}^{\bullet}(\boldsymbol{I}\mathbf{e}_1) &= b\boldsymbol{I}\mathbf{e}_1 \\ \boldsymbol{I}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 &= b\boldsymbol{I}\mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

Como sabemos que las soluciones son estacionarias, tenemos que $b = 0$. Por lo tanto la ecuación de arriba se cumple si y sólo si $\boldsymbol{I}\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_1$ son paralelos, es decir: si $\mathbf{e}_1$ es un autovector de $\boldsymbol{I}$. De hecho, es bien sabido que las únicas soluciones estacionarias de la ecuación de Euler-Arnold en $\mathfrak{so}(3)$ están dadas por el conjunto de autovectores de la matriz de inercia $\boldsymbol{I}$.

4.2. Deducción usando la segunda forma fundamental

En esta sección daremos una versión diferente del Teorema (4.1.3), basada en la segunda forma fundamental de la subvariedad. Esta nueva versión nos proporcionará una visión más geométrica de todo el trabajo.

Antes de reformular el teorema, recordaremos algunas nociones básicas acerca de la segunda forma fundamental de una variedad riemanniana.

Sea $\widetilde{M}$ una variedad riemanniana de dimensión finita y sea $M \subseteq \widetilde{M}$ una subvariedad. Es sencillo ver que el conjunto

$$T\widetilde{M}\big|_M := \coprod_{p \in M} T_p\widetilde{M}$$

es un fibrado vectorial suave sobre M. Todo campo vectorial suave en $\widetilde{M}$ claramente se restringe a una sección suave de $T\widetilde{M}\big|_M$ y, a su vez, toda sección suave de $T\widetilde{M}\big|_M$ puede ser extendida a una sección suave de $T\widetilde{M}$. Cuando no haya riesgo de confusión usaremos la misma letra para denotar tanto un campo vectorial como una función en M y su extensión a $\widetilde{M}$.

En cada punto $p \in M$, el espacio tangente $T_p\widetilde{M}$ se puede escribir como una suma directa $T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus N_pM$ donde $N_pM := (T_pM)^\perp$ es el complemento ortogonal con respecto al producto interno en $T_p\widetilde{M}$ dado por la métrica en $\widetilde{M}$. Al conjunto

$$NM := \coprod_{p \in M} N_pM$$

lo denominamos *fibrado normal* de M. Notaremos $\mathcal{N}(M)$ al espacio de secciones suaves de NM.

Proyectar ortogonalmente en cada punto $p \in M$ sobre los subespacios T_pM y N_pM nos da las aplicaciones que llamaremos proyección tangencial y normal respectivamente:

$$\pi^\top : T\widetilde{M}\big|_M \to TM$$
$$\pi^\perp : T\widetilde{M}\big|_M \to NM.$$

Notación 4.2.1. Si X es una sección de $T\widetilde{M}\big|_M$, usaremos las notaciones $X^\top := \pi^\top X$ y $X^\perp := \pi^\perp X$ para sus proyecciones tangencial y normal.

Nuestra principal tarea ahora es comparar la conexión riemanniana de M con la de $\widetilde{M}$. Para eso usaremos la descomposición ortogonal de secciones de $T\widetilde{M}\big|_M$ en componente tangencial y componente ortogonal como mostramos anteriormente.

Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos extenderlos a campos suaves en $\widetilde{M}$, aplicarles la derivada covariante $\widetilde{\nabla}$ de $\widetilde{M}$ y luego descomponer en los puntos de M para obtener

$$\widetilde{\nabla}_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top + (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp. \tag{4.2.1}$$

Nos concentraremos en la componente normal de esta descomposición. Definimos la *segunda forma fundamental* de M como la aplicación $I\!I : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{N}(M)$ dada por

$$I\!I(X, Y) := (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp, \tag{4.2.2}$$

donde X, Y son extendidos arbitrariamente a $\widetilde{M}$. Como $\pi^\perp$ manda secciones suaves a secciones suaves, $I\!I(X, Y)$ es una sección suave de NM.

Lema 4.2.2. *La segunda forma fundamental es independiente de las extensiones de X e Y, es bilineal sobre $C^\infty(M)$ y simétrica en X e Y.*

Demostración. Veamos primero que la simetría de II se deduce de la simetría de la conexión $\widetilde{\nabla}$. Sean X, Y extendidos arbitrariamente a $\widetilde{M}$. Entonces,

$$II(X,Y) - II(Y,X) = (\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X)^{\perp} = [X,Y]^{\perp}.$$

Como X e Y son tangentes a M en todos los puntos de M, también lo es su corchete de Lie. Por lo tanto $[X,Y]^{\perp} = 0$, y así II es simétrica.

Por otro lado, como $\widetilde{\nabla}_X Y\big|_p$ depende únicamente de X_p, es claro que $II(X,Y)$ es independiente de la extensión de X, y que $II(X,Y)$ es lineal sobre $C^{\infty}(M)$ en X. Por simetría, lo mismo vale para Y. □

Aún no hemos dicho nada acerca del término tangencial en la descomposición de $\widetilde{\nabla}_X Y$. El siguiente teorema muestra que no es otra cosa que $\nabla_X Y$, la derivada covariante con respecto a la métrica riemanniana de M. Por lo tanto, podemos interpretar a la segunda forma fundamental como una medida de la diferencia entre la conexión riemanniana de M y la de $\widetilde{M}$.

Teorema 4.2.3 (Fórmula de Gauss). *Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ son extendidos arbitrariamente a campos en $\widetilde{M}$, la siguiente fórmula es válida en M:*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X,Y).$$

Demostración. Debido a la descomposición dada en (4.2.1) y la definición de segunda forma fundamental, es suficiente probar que $(\widetilde{\nabla}_X Y)^{\top} = \nabla_X Y$ en todos los puntos de M. Consideremos la aplicación $\nabla^{\top} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$\nabla^{\top}_X Y := (\widetilde{\nabla}_X Y)^{\top},$$

donde X, Y son extendidos arbitrariamente a $\widetilde{M}$. Se puede ver en [Lee97] que $\nabla^{\top}$ es una conexión en M. Una vez probadas la simetría y la compatibilidad con la métrica, la unicidad de la conexión riemanniana en M nos permitirá afrimar que $\nabla^{\top} = \nabla$.

Para probar que es simétrica, usaremos la simetría de $\widetilde{\nabla}$ y el hecho de que $[X,Y]$ es tangente a M:

$$\begin{aligned}
\nabla^{\top}_X Y - \nabla^{\top}_Y X &= (\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X)^{\top} \\
&= [X,Y]^{\top} = [X,Y].
\end{aligned}$$

Ahora demostremos la compatibilidad con la métrica de M. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y consideremos extensiones arbitrarias a $\widetilde{M}$. Usando la que $\widetilde{\nabla}$ es compatible con la métrica de $\widetilde{M}$ y evaluando en puntos de M tenemos que:

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \widetilde{\nabla}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \widetilde{\nabla}_X Z\rangle \\ &= \langle (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top, Z\rangle + \langle Y, (\widetilde{\nabla}_X Z)^\top\rangle \\ &= \langle \nabla^\top_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla^\top_X Z\rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos entonces que $\nabla^\top = \nabla$. □

Con estos conceptos y resultados en mente, nos concentraremos en el siguiente teorema:

Teorema 4.2.4. *Sea (M, g) una subvariedad riemanniana de una variedad riemanniana $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$. Entonces, M es totalmente geodésica en $\widetilde{M}$ si y sólo si la segunda forma fundamental de M es idénticamente nula.*

Demostración. Primero asumamos que M es totalmente geodésica en $\widetilde{M}$ y supongamos que su segunda forma fundamental no es nula. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $II(X, X) \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico, existe $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \widetilde{M}$ una geodésica en (M, g) con $\gamma'(0) = X$. Por definición de geodésica, tenemos que $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$. Pero entonces, por la fórmula de Gauss tenemos que:

$$\widetilde{\nabla}_X X = \underbrace{\nabla_X X}_{=0} + \underbrace{II(X, X)}_{\neq 0}$$

y esto nos dice que γ no es una geodésica en $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, lo cual es absurdo pues habíamos asumido que M era totalmente geodésica en $\widetilde{M}$.

Para probar la otra implicación, usando nuevamente la fórmula de Gauss esta vez obtenemos

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \underbrace{II(X, Y)}_{=0}$$

y por lo tanto es claro que toda geodésica de (M, g) es a su vez una geodésica de $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ como queríamos. □

Entonces, un enfoque alternativo del Teorema (4.1.3) se basa en calcular la segunda forma fundamental del subgrupo $H \subseteq G$. Nuevamente, $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{\mathcal{A}}$ denota una métrica invariante a izquierda en G y usaremos la misma notación para su restricción a H.

Como la métrica es invariante, la segunda forma fundamental como la definimos en (4.2.2) está completamente determinada por sus valores en vectores tangentes a H en la identidad. Por lo tanto, podemos determinar este tensor calculando una fórmula para

$$\langle\langle \nabla_{X_\xi} Y_\eta, Z_\psi \rangle\rangle_{\mathcal{A},e},$$

donde X_ξ denota el campo invariante a izquierda en G cuyo valor en e es ξ, y similarmente tenemos las definiciones para Y_η, Z_ψ. De hecho, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.2.5. *Si X_ξ, Y_η son campos invariantes a izquierda en G, se satisface:*

$$\nabla_{X_\xi} Y_\eta(e) = \frac{1}{2}([\xi,\eta] - ad_\xi^{\top_\mathcal{A}}(\eta) - ad_\eta^{\top_\mathcal{A}}(\xi)). \tag{4.2.3}$$

Demostración. Por propiedades de la conexión, sabemos que vale la fórmula

$$\begin{aligned} 2\langle\langle \nabla_{X_\xi} Y_\eta, Z_\lambda\rangle\rangle_{\mathcal{A},e} = {} & X_\xi\langle\langle Y_\eta, Z_\lambda\rangle\rangle_{\mathcal{A},e} + Y_\eta\langle\langle Z_\lambda, X_\xi\rangle\rangle_{\mathcal{A},e} - Z_\lambda\langle\langle X_\xi, Y_\eta\rangle\rangle_{\mathcal{A},e} \\ & - \langle\langle Y_\eta, [X_\xi, Z_\lambda]\rangle\rangle_{\mathcal{A},e} - \langle\langle Z_\lambda, [Y_\eta, X_\xi]\rangle\rangle_{\mathcal{A},e} + \langle\langle X_\xi, [Y_\eta, Z_\lambda]\rangle\rangle_{\mathcal{A},e}. \end{aligned}$$

Debido a la invariancia a izquierda de los campos y la métrica, los primeros tres términos se anulan, y obtenemos:

$$\begin{aligned} 2\langle\langle \nabla_{X_\xi} Y_\eta, Z_\lambda\rangle\rangle_{\mathcal{A},e} &= -\langle\langle Y_\eta, [X_\xi, Z_\lambda]\rangle\rangle_{\mathcal{A},e} - \langle\langle Z_\lambda, [Y_\eta, X_\xi]\rangle\rangle_{\mathcal{A},e} + \langle\langle X_\xi, [Y_\eta, Z_\lambda]\rangle\rangle_{\mathcal{A},e} \\ &= -\langle \eta, [\xi,\lambda]\rangle_\mathcal{A} - \langle \lambda, [\eta,\xi]\rangle_\mathcal{A} + \langle \xi, [\lambda,\eta]\rangle_\mathcal{A} \\ &= \langle -\mathrm{ad}_\xi^{\top_\mathcal{A}}(\eta), \lambda\rangle_\mathcal{A} - \langle [\eta,\xi], \lambda\rangle_\mathcal{A} - \langle \mathrm{ad}_\eta^{\top_\mathcal{A}}(\xi), \eta\rangle_\mathcal{A} \\ &= \langle [\xi,\eta] - \mathrm{ad}_\xi^{\top_\mathcal{A}}(\eta) - \mathrm{ad}_\eta^{\top_\mathcal{A}}(\xi), \lambda\rangle_\mathcal{A}, \end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. □

Gracias a esta igualdad, tenemos lo siguiente:

Otra demostración del Teorema (4.1.3): Utilizando la proposición demostrada recientemente tenemos que

$$II(X,Y)(e) = (\nabla_X Y)^{\perp_\mathcal{A}} = \frac{1}{2}([\xi,\psi] - \mathrm{ad}_\xi^{\top_\mathcal{A}}(\psi) - \mathrm{ad}_\psi^{\top_\mathcal{A}}(\xi))^{\perp_\mathcal{A}}$$

donde $\xi, \psi \in \mathfrak{h}$ y X e Y son campos arbitrarios que extienden ξ y ψ. Entonces, la forma fundamental de H se anula si y sólo si el lado derecho de esta ecuación se anula para todo $\eta \in \mathfrak{h}^{\perp_\mathcal{A}}$. Esto es: la segunda forma fundamental es cero si y sólo si para todo $\xi, \psi \in \mathfrak{h}$ y $\eta \in \mathfrak{h}^{\perp_\mathcal{A}}$ se tiene que $\langle ([\xi,\eta] - \mathrm{ad}_\xi^{\top_\mathcal{A}}(\psi) - \mathrm{ad}_\psi^{\top_\mathcal{A}}(\xi)), \eta\rangle_\mathcal{A} = 0$. Como $[\xi,\psi] \in \mathfrak{h}$, esto se cumple si y sólo si para todo $\xi, \psi \in \mathfrak{h}$ vale que $\langle \mathrm{ad}_\xi^{\top_\mathcal{A}}(\psi) + \mathrm{ad}_\psi^{\top_\mathcal{A}}(\xi), \eta\rangle_\mathcal{A} = 0$. Esto último es equivalente a $\langle \psi, [\xi,\psi]\rangle_\mathcal{A} = -\langle \xi, [\psi,\eta]\rangle_\mathcal{A}$ para todo $\xi, \psi \in \mathfrak{h}$ y $\eta \in \mathfrak{h}^{\perp_\mathcal{A}}$. En particular, tomando $\psi = \xi$, esta última ecuación dice que $\langle \xi, [\xi,\eta]\rangle_\mathcal{A} = -\langle \xi, [\xi,\eta]\rangle_\mathcal{A}$ para todo $\eta \in \mathfrak{h}^{\perp_\mathcal{A}}$ y por lo tanto debe ser $\langle \xi, [\xi,\eta]\rangle_\mathcal{A} = 0$. Esto es justamente la condición 2 del Teorema (4.1.3). □

4.3. El Teorema (4.1.3) en coordenadas

En esta sección trabajaremos la consecuencia del Teorema (4.1.3) en términos de las constantes de estructura del álgebra de Lie y de la matriz simétrica del producto interno. Es decir, investigaremos la condición para que una subálgebra sea totalmente geodésica desde el punto de vista de coordenadas. Observemos que para hablar de coordenadas, necesitamos trabajar en dimensión finita, por lo tanto los resultados vistos en esta sección no aplican para el caso donde $G = \mathrm{Diff}(M)$.

Definición 4.3.1. Dada un álgebra de Lie de dimensión finita $\mathfrak{g}$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base, definimos las *constantes de estructura del álgebra* como los escalares c_{ij}^k tales que

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k.$$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de dimensión finita n y sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de dimensión $m < n$. Consideremos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$ de modo que $\mathfrak{h}$ esté generada por $\{e_1, \ldots, e_m\}$. A los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$ los notaremos $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Denotaremos por C_i a la matriz de representación de ad_{e_i} en la base dada. En términos de las constantes de estructura c_{ij}^k para el corchete tenemos que $\mathbf{e}_k^\top C_i \mathbf{e}_j = c_{ij}^k$.

A todo producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ en $\mathfrak{g}$ le corresponde una matriz simétrica $A = (a_{ij})$ definida por $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle_{\mathcal{A}}$. El siguiente resultado es una reformulación del Teorema (4.1.3) en término de las matrices C_j y A:

Proposición 4.3.2. *La subálgebra $\mathfrak{h}$ es totalmente geodésica con respecto a $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$ si y sólo si*

$$\boldsymbol{e}_i^\top A C_j A^{-1} \boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{e}_j^\top A C_i A^{-1} \boldsymbol{e}_k = 0 \quad \textit{para todo} \quad \begin{cases} i, j \in \{1, \ldots, m\} \\ k \in \{m+1, \ldots, n\} \end{cases}$$

Demostración. El Teorema (4.1.3) nos dice que $\mathfrak{h}$ es totalmente geodésica si y sólo si

$$\langle \xi, [\xi, \eta] \rangle_{\mathcal{A}} = 0 \qquad \forall\, \xi \in \mathfrak{h},\ \eta \in \mathfrak{h}^\perp.$$

Notar que esto es cierto si y sólo si el núcleo de cada una de las 1-formas dadas por $\phi_\xi : \eta \mapsto \langle \xi, [\xi, \eta] \rangle_{\mathcal{A}}$ (con $\xi \in \mathfrak{h}$), contiene a $\mathfrak{h}^\perp$. Como $\xi \mapsto \phi_\xi$ es cuadrática, esto es cierto si y sólo si cada una de las ϕ_ξ son de la forma

$$\phi_\xi = \sum_{i,j,k=1}^{m} \xi^i \xi^j b_{ijk} \langle e_k, \cdot \rangle_{\mathcal{A}} \tag{4.3.1}$$

para algún tensor b_{ijk}. Por otro lado, una expansión de ϕ_ξ en la base nos da la expresión

$$\phi_\xi = \sum_{i,j=1}^{m} \xi^i \xi^j \langle e_i, [e_j, \cdot] \rangle_{\mathcal{A}} = \sum_{i,j=1}^{m} \xi^i \xi^j \langle \mathrm{ad}_{e_j}^{\top}(e_i), \cdot \rangle_{\mathcal{A}} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} \xi^i \xi^j b'_{ijk} \langle e_k, \cdot \rangle_{\mathcal{A}} \tag{4.3.2}$$

donde $b'_{ijk} = \mathbf{e}_k^\top A^{-1} C_j^\top A \mathbf{e}_i$. (Notar que $A^{-1}C_j^\top A$ es la representación matricial de $\mathrm{ad}_{e_j}^{\top_{\mathcal{A}}}$). Comparando las Ecuaciones (4.3.1) y (4.3.2) obtenemos la condición

$$\sum_{i,j=1}^{m} \xi^i \xi^j \mathbf{e}_k^\top A^{-1} C_j^\top A \mathbf{e}_i = 0, \qquad \forall k \in \{m+1, \ldots, n\}. \tag{4.3.3}$$

Entonces hasta ahora tenemos que $\mathfrak{h}$ es totalmente geodésica en $\mathfrak{g}$ si y sólo si la ecuación (4.3.3) vale para todo $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$. La condición del teorema claramente implica esta última condición. Para ver la otra implicación, llamemos S a la sumatoria. Notar que

$$\mathbf{e}_i^\top A C_j A^{-1} \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_j^\top A C_i A^{-1} \mathbf{e}_k = S(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) - S(\mathbf{e}_i) - S(\mathbf{e}_j).$$

Como estamos asumiendo que $S(\boldsymbol{\xi}) = 0$ para todo $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$ entonces la condición del enunciado es cierta y por lo tanto tenemos la equivalencia que queríamos probar. $\square$

Notar que si la base $e_1, \ldots, e_n$ diagonaliza a A, la condición se lee como $\mathbf{e}_i^\top C_j \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_j^\top C_i \mathbf{e}_k = 0$. De la anti-simetría del corchete obtenemos que $\mathbf{e}_i^\top C_k \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j^\top C_k \mathbf{e}_i = 0$. A su vez, esto implica que el bloque principal de tamaño $m \times m$ de las matrices C_k es antisimétrico para $k \in \{m+1, \ldots, n\}$. La afirmación equivalente sin apelar a las coordenadas es que $\langle \mathrm{ad}_\eta(\xi), \psi \rangle_{\mathcal{A}} + \langle \mathrm{ad}_\eta^{\top_{\mathcal{A}}}(\xi), \psi \rangle_{\mathcal{A}} = 0$ para todo $\eta \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$ y $\xi, \psi \in \mathfrak{h}$, que es la equivalencia 3 del Teorema (4.1.3).

Capítulo 5

Métricas totalmente geodésicas

En este capítulo la idea será la siguiente: dado un grupo de Lie G y un subgrupo H, queremos encontrar una métrica riemanniana invariante a derecha de modo que H resulte totalmente geodésico. Entonces, la condición del Teorema (4.1.3) será interpretada como una condición en el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ para que la subálgebra $\mathfrak{h}$ de H sea totalmente geodésica en el álgebra $\mathfrak{g}$ de G.

Definición 5.0.1. Dada un álgebra de Lie de dimensión finita $\mathfrak{g}$, llamamos *forma de Killing* a la forma bilineal simétrica $\mathcal{K} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{K}} := tr(\mathrm{ad}(\xi) \circ \mathrm{ad}(\eta)).$$

Observación 5.0.2. La forma de Killing de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es bi-invariante, esto es: $\langle [\xi, \psi], \eta \rangle_{\mathcal{K}} = -\langle \psi, [\xi, \eta] \rangle_{\mathcal{K}}$ para todo $\xi, \psi, \eta \in \mathfrak{g}$. (Ver Definición 5.1.6).

5.1. Construcción usando una forma invariante

Para comenzar, consideremos primero el caso donde el álgebra $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita y semisimple. En particular, esto implica que la forma de Killing, denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}}$, es no degenerada (pero no necesariamente definida negativa). Si el correspondiente operador $\mathcal{K} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ es usado como operador de pairing, la forma lagrangiana de la ecuación de Euler-Arnold toma la forma del ejemplo de cuerpo rígido nombrado en (3.5.2):

$$\mathcal{J}\dot{\xi} = -[\xi, \mathcal{J}\xi], \qquad \text{donde} \quad \mathcal{J} = \mathcal{K}^{-1}\mathcal{A}, \tag{5.1.1}$$

la cual es una consecuencia directa de la propiedad de bi-invariancia. De hecho, vale que $\langle \psi, \mathrm{ad}_{\xi}(\eta) \rangle_{\mathcal{K}} = -\langle \mathrm{ad}_{\xi}(\psi), \eta \rangle_{\mathcal{K}}$ y por lo tanto tenemos que $\mathrm{ad}_{\xi}^{\bullet} = -\mathrm{ad}_{\xi}$. Notar que tanto $\mathcal{K}\mathcal{J}$ como $\mathcal{A}\mathcal{J}$ son operadores autoadjuntos, por lo tanto $\mathcal{J}$ es autoadjunto con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}}$ y a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$.

Observación 5.1.1. Si además de ser semisimple $\mathfrak{g}$ es compacta, su forma de Killing es definida negativa. Así, podemos usar $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}} = \langle -\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}}$ como producto interno. Dado que es bi-invariante, todas las subálgebras de $\mathfrak{g}$ satisfacen la condición 2 del Teorema (4.1.3), por lo tanto todas las subálgebras son totalmente geodésicas con respecto a un producto interno bi-invariante. Como en este caso $\mathcal{J} = -Id$, la ecuación de Euler-Arnold (5.1.1) se reduce a $\dot{\xi} = [\xi, -\xi] = 0$. En el ejemplo del cuerpo rígido esto sucede cuando todos los momentos de inercia son iguales. Desde un punto de vista geométrico, la bi-invariancia de la métrica implica que las geodésicas están dadas por la exponencial del grupo.

Proposición 5.1.2. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita semisimple, y $\mathfrak{h}$ una subálgebra. Son equivalentes:*

1. *$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ es totalmente geodésica,*
2. *$\mathcal{J}^{-1}[\xi, \mathcal{J}\xi] \in \mathfrak{h}$ para todo $\xi \in \mathfrak{h}$.*

Demostración. De la Observación (3.5.1), tenemos que $\mathrm{ad}_{\xi}^{\top_{\mathcal{A}}} = \mathcal{J}^{-1} \circ \mathrm{ad}_{\xi}^{\bullet} \circ \mathcal{J}$. Como en este caso $\mathrm{ad}_{\xi}^{\bullet} = -\mathrm{ad}_{\xi}$, tenemos las siguientes equivalencias:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{\xi}^{\top_{\mathcal{A}}}(\xi) \in \mathfrak{h} &\Leftrightarrow \mathcal{J}^{-1}(\mathrm{ad}_{\xi}^{\bullet}(\mathcal{J}\xi)) \in \mathfrak{h} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{J}^{-1}(-\mathrm{ad}_{\xi}(\mathcal{J}\xi)) \in \mathfrak{h} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{J}^{-1}(-[\xi, \mathcal{J}\xi]) \in \mathfrak{h} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{J}^{-1}([\mathcal{J}\xi, \xi]) \in \mathfrak{h}
\end{aligned}
$$

Finalmente el Teorema (4.1.3) nos dice que $\mathrm{ad}_{\xi}^{\top_{\mathcal{A}}}(\xi) \in \mathfrak{h}$ es equivalente a que la subálgebra $\mathfrak{h}$ sea totalmente geodésica en $\mathfrak{g}$, que era lo que queríamos probar. □

Continuaremos con una generalización de estas ideas, la cual nos conducirá a una receta para la construcción de métricas totalmente geodésicas.

Definición 5.1.3. Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$ un producto interno en $\mathfrak{g}$. Decimos que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ es una subálgebra ETG (por las siglas de *easy totally geodesic*) con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$ si $\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$ es invariante por $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$, es decir si $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}) \subseteq \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$.

Veamos que las subálgebras ETG son, en particular, totalmente geodésicas:

Proposición 5.1.4. *Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra ETG de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$. Entonces $\mathfrak{h}$ es totalmente geodésica en $\mathfrak{g}$ con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$.*

Demostración. Sean $\xi, \psi \in \mathfrak{h}$ y $\eta \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$. Como $\mathfrak{h}$ es ETG, $\langle [\xi, \eta], \psi \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \mathrm{ad}_\xi(\eta), \psi \rangle_{\mathcal{A}} = 0$, pues $\mathrm{ad}_\xi(\eta) \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$ y $\psi \in \mathfrak{h}$. Entonces, el resultado se sigue del Teorema (4.1.3) tomando $\psi = \xi$. $\square$

Notar que la condición para que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ sea una subálgebra ETG es que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}})$ sea ortogonal a toda la subálgebra $\mathfrak{h}$. Sin embargo, para que sea totalmente geodésica sólo necesitamos que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}})$ sea ortogonal a un único vector de $\mathfrak{h}$. Entonces, podemos decir que las subálgebras ETG son más fuertes que las subálgebras totalmente geodésicas.

Observación 5.1.5. Observar que la definición de subálgebra ETG está relacionada con la definición de "espacios homogéneos reductivos". Si pedimos que una subálgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ verifique

1. $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$,
2. $[\xi, \eta] \perp \xi$ para todo $\xi \in \mathfrak{h}, \eta \in \mathfrak{h}^{\perp}$,
3. $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{\perp}] \subseteq \mathfrak{h}^{\perp}$,

entonces $\mathfrak{h}$ es una subálgebra ETG. Si además pedimos que cumpla

4. $[\mathfrak{h}^{\perp}, \mathfrak{h}^{\perp}] \subseteq \mathfrak{h}$

entonces tendremos que $\mathfrak{h}$ es una "subálgebra reductiva".

En lo que sigue desarrollaremos un método para construir productos internos para los cuales una subálgebra dada sea una subálgebra ETG. La construcción generaliza el enfoque que describimos anteriormente, donde la forma de Killing era usada como operador de pairing.

Definición 5.1.6. Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra y V un subespacio de $\mathfrak{g}$. Se dice que una forma bilineal simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}}$ en $\mathfrak{g}$ es *ad*$_{\mathfrak{h}}$*-invariante* en V si

$$\langle \mathrm{ad}_\xi(\eta), \psi \rangle_{\mathcal{K}} + \langle \eta, \mathrm{ad}_\xi(\psi) \rangle_{\mathcal{K}} = 0 \qquad \forall\, \xi \in \mathfrak{h} \quad \text{y} \quad \forall\, \eta, \psi \in V.$$

Si $V = \mathfrak{g}$ decimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}}$ es *ad*$_{\mathfrak{h}}$*-invariante*.

Notar que la bi-invariancia es equivalente a la $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-invariancia.

Dada una forma $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$-invariante en $\mathfrak{g}$, la cual es no degenerada en $\mathfrak{h}$, podemos construir una clase de productos internos en $\mathfrak{g}$ para los cuales $\mathfrak{h}$ es totalmente geodésica. De hecho, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.1.7. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra. Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}}$ una forma $ad_{\mathfrak{h}}$-invariante en $\mathfrak{g}$ tal que su restricción a $\mathfrak{h}$ es no degenerada, y sea $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$ un producto interno en $\mathfrak{g}$. Entonces:*

1. *Si $\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{K}}} = \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$, entonces $\mathfrak{h}$ es una subálgebra ETG de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$.* [1]

2. *Si $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = \mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}$ es una subálgebra ETG de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$, entonces $\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{K}}} = \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$.*

Demostración. En general, el álgebra $\mathfrak{g}$ admite dos descomposiciones $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{K}}}$. El operador de inercia $\mathcal{A} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ se puede descomponer como $\mathcal{A}\xi = \mathcal{A}_1\xi_1 + \mathcal{A}_2\xi_2$, donde $\xi = \xi_1 + \xi_2$ son las únicas componentes en la descomposición de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$, y $\mathcal{A}_1 : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$, $\mathcal{A}_2 : \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}} \to (\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}})^*$ son operadores inversibles. Además, el operador $\mathcal{K} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ puede descomponerse como $\mathcal{K}\xi = \mathcal{K}_a\xi_a + \mathcal{K}_b\xi_b$, donde $\xi = \xi_a + \xi_b$ son las únicas componentes en la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{K}}}$, y $\mathcal{K}_a : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$ es inversible (pues sabemos que la restricción de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}}$ a $\mathfrak{h}$ es no degenerada).

Probemos primero la afirmación 1. Sean $\xi, \psi \in \mathfrak{h}$ y $\eta \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\langle[\xi,\eta],\psi\rangle_{\mathcal{A}} &= \langle\mathcal{A}\psi,[\xi,\eta]\rangle = \langle\mathcal{A}_1\psi,[\xi,\eta]\rangle \\
&= \langle\mathcal{K}_a \underbrace{\mathcal{K}_a^{-1}\mathcal{A}_1}_{=:\mathcal{J}_1}\psi,[\xi,\eta]\rangle = \langle\mathcal{K}\mathcal{J}_1\psi,[\xi,\eta]\rangle \\
&= \langle\mathcal{J}_1\psi,[\xi,\eta]\rangle_{\mathcal{K}} = -\langle[\xi,\mathcal{J}_1\psi],\eta\rangle_{\mathcal{K}} = 0
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de que $[\xi,\mathcal{J}_1\psi] \in \mathfrak{h}$ y $\eta \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}} = \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{K}}}$. Así, tenemos que $\langle[\xi,\eta],\psi\rangle_{\mathcal{A}} = 0$ para todo $\xi,\psi \in \mathfrak{h}, \eta \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$, lo cual significa que $[\xi,\eta] \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$ para todo $\xi \in \mathfrak{h}, \eta \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$, es decir, $\mathfrak{h}$ es una subálgebra ETG.

Ahora probemos la afirmación 2. De nuevo, consideramos $\xi,\psi \in \mathfrak{h}$ y $\eta \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$. Como $\mathfrak{h}$ es una subálgebra ETG, se tiene que

$$\begin{aligned}
0 = \langle[\xi,\eta],\psi\rangle_{\mathcal{A}} &= \langle\mathcal{A}\psi,[\xi,\eta]\rangle = \langle\mathcal{A}_1\psi,[\xi,\eta]\rangle \\
&= \langle\mathcal{K}_a\mathcal{K}_a^{-1}\mathcal{A}_1\psi,[\xi,\eta]\rangle = \langle\mathcal{J}_1\psi,[\xi,\eta]\rangle_{\mathcal{K}} = -\langle[\xi,\mathcal{J}_1\psi],\eta\rangle_{\mathcal{K}}.
\end{aligned}$$

Entonces, como $\mathcal{J}_1 : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ es no degenerado y ξ,ψ son arbitrarias, debe valer que $\langle[\mathfrak{h},\mathfrak{h}],\eta\rangle_{\mathcal{K}} = 0$ para todo $\eta \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$. Usando ahora que $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = \mathfrak{h}$, tenemos que $\langle\mathfrak{h},\eta\rangle_{\mathcal{K}} = 0$ para todo $\eta \in \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$. Como todo elemento en $\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{K}}}$ también satisface esto, y como $\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}}$ y $\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{K}}}$ son isomorfos, debe ser $\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}} = \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{K}}}$, como queríamos probar. □

[1] Aquí, $\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{K}}} = \{\eta \in \mathfrak{g} : \langle\eta,\mathfrak{h}\rangle_{\mathcal{K}} = 0\}$ denota el complemento ortogonal generalizado con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}}$.

De la primera parte del Teorema (5.1.7) obtenemos una receta para construir productos internos ETG. De hecho, podemos tomar cualquier producto interno de la forma

$$\langle \xi, \psi \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \xi_1, \psi_1 \rangle_{\mathcal{A}_1} + \langle \xi_2, \psi_2 \rangle_{\mathcal{A}_2},$$

donde $\xi = \xi_1 + \xi_2$ y $\psi = \psi_1 + \psi_2$ son las únicas componentes en la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{K}}}$.

Y de la segunda parte del Teorema (5.1.7) podemos ver que si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{h}$, entonces podemos caracterizar los productos internos que hacen que $\mathfrak{h}$ sea una subálgebra ETG. Por ejemplo, en el caso finito dimensional tenemos el siguiente resultado:

Corolario 5.1.8. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión n, y sea $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra semisimple de dimensión m. Denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}}$ a la forma de Killing en $\mathfrak{g}$. La subálgebra $\mathfrak{h}$ es ETG en $\mathfrak{g}$ con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ si y sólo si $\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}} = \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{K}}}$. Además, el conjunto de productos internos en $\mathfrak{g}$ que hacen de $\mathfrak{h}$ una subálgebra ETG define una variedad de dimensión $(n+1)\frac{n}{2} - (n-m)m$.*

Demostración. Como $\mathfrak{h}$ es semisimple, la forma de Killing restringida a $\mathfrak{h}$ es no degenerada y $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{h}$. Entonces, se sigue del Teorema (5.1.7) que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ hace de $\mathfrak{h}$ una subálgebra ETG si y sólo si $\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}} = \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{K}}}$. Además, todo operador de inercia $\mathcal{A}$ con $\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{A}}} = \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{K}}}$ es de la forma

$$\mathcal{A}\xi = \mathcal{A}_1\xi_1 + \mathcal{A}_2\xi_2,$$

donde $\mathcal{A}_1 : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$ y $\mathcal{A}_2 : \mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{K}}} \to (\mathfrak{h}^{\perp_{\mathcal{K}}})^*$ son operadores lineales autoadjuntos. El conjunto de pares $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ forma un espacio lineal de dimensión $(n+1)\frac{n}{2} - (n-m)m$. El subconjunto de los pares que tienen autovalores definido positivos es entonces una variedad de dimensión $(n+1)\frac{n}{2} - (n-m)m$. $\square$

En contraste con el caso no-ETG, el siguiente resultado vale para subálgebras ETG:

Proposición 5.1.9. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ un producto interno. Consideremos $\mathfrak{h}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{l}$ una subálgebra de $\mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{l}$ es una subálgebra ETG de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$, entonces $\mathfrak{l}$ es una subálgebra ETG de $\mathfrak{h}$ con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{l}^{\perp_{\mathcal{A}}}$ el complemento ortogonal de $\mathfrak{l}$ en $\mathfrak{g}$ con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$. Entonces, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{l}^{\perp_{\mathcal{A}}}) \subseteq \mathfrak{l}^{\perp_{\mathcal{A}}}$ pues $\mathfrak{l}$ es una subálgebra ETG de $\mathfrak{g}$. Ahora, como $\mathfrak{h}$ es una subálgebra tenemos que

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{l}^{\perp_{\mathcal{A}}} \cap \mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{l}^{\perp_{\mathcal{A}}} \cap \mathfrak{h},$$

lo cual prueba la proposición. $\square$

Ejemplo 5.1.10. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(3)$ y $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(3)$. Una base $\{e_1, \ldots, e_9\}$ de $\mathfrak{gl}(3)$ está dada por

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los primeros tres elementos forman la base estándar de $\mathfrak{so}(3)$. Es sencillo ver que la matriz simétrica que representa la forma de Killing con respecto a esta base es diagonal con entradas $(-1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$. Entonces, el complemento ortogonal $\mathfrak{so}(3)^{\perp_\mathcal{K}}$ es el subespacio generado por $e_4, \ldots, e_9$. Usando el Teorema (5.1.7), tenemos que $\mathfrak{so}(3)$ es una subálgebra ETG de $\mathfrak{gl}(3)$ para cualquier operador de inercia $\mathcal{A} : \mathfrak{gl}(3) \to \mathfrak{gl}(3)^*$ que sea representado por una matriz diagonal con bloques de 3×3 y de 6×6 con respecto a la base $\{e_1, \ldots, e_9\}$.

Dado un producto interno de esa forma, la forma débil de la ecuación de Euler-Arnold en la descomposición $\xi = \xi_1 + \xi_2$ relativa a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp_\mathcal{K}}$ es

$$\begin{aligned} \langle \dot{\xi}_1, \eta_1 \rangle_{\mathcal{A}_1} &= \langle \xi_1, [\xi_1, \eta_1] \rangle_{\mathcal{A}_1} + \langle \xi_2, [\xi_2, \eta_1] \rangle_{\mathcal{A}_2} \quad \forall\, \eta_1 \in \mathfrak{h} \\ \langle \dot{\xi}_2, \eta_2 \rangle_{\mathcal{A}_2} &= \langle \xi, [\xi_2, \eta_2] \rangle_{\mathcal{A}} + \langle \xi_2, [\xi_1, \eta_2] \rangle_{\mathcal{A}_2} \qquad \forall\, \eta_2 \in \mathfrak{h}^{\perp_\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Notar que el acoplamiento entre las variables de $\mathfrak{so}(3)$ y $\mathfrak{so}(3)^{\perp_\mathcal{A}}$ es no trivial. Esto es, la ecuación de Euler-Arnold de $(\mathfrak{gl}(3), \langle \cdot, \cdot \rangle_\mathcal{A})$ para un operador de inercia diagonal por bloques $\mathcal{A}$ como antes, no se descompone simplemente como una "parte de rotación" y una "parte de no-rotación". También notar que $\xi_2 = 0$ implica que $\dot{\xi}_2 = 0$, y así la ecuación se reduce a la ecuación de Euler-Arnold para ξ_1, como se esperaba de la propiedad de ser totalmente geodésica. En cambio, $\xi_1 = 0$ no implica $\dot{\xi}_1 = 0$ ni $\dot{\xi}_2 = 0$.

Es sencillo ver que el álgebra de matrices de traza cero $\mathfrak{sl}(3)$ está generada por los elementos $e_1, \ldots, e_8$. Entonces, usando la Proposición (5.1.9), tenemos que $\mathfrak{so}(3)$ es ETG también como subálgebra de $\mathfrak{sl}(3)$ para cualquiera de los productos internos construidos restringidos a $\mathfrak{sl}(3)$.

5.2. Productos semidirectos

Consideremos el producto semidirecto $G \ltimes V$ del grupo G con el espacio vectorial V, con la multiplicación dada por

$$(g, v) \cdot (h, u) := (gh, g \cdot v + u),$$

donde $g\cdot v$ denota la acción lineal (representación) de G en V. El álgebra de Lie de $G \rtimes V$ se nota $\mathfrak{g} \rtimes V$ y el corchete está dado, en términos del corchete de $\mathfrak{g}$, por

$$[(\xi, v), (\eta, u)] := ([\xi, \eta], \xi \cdot u - \eta \cdot v)$$

donde $\xi \cdot v$ indica la acción infinitesimal de $\mathfrak{g}$ en V de la acción de G en V.

El elemento neutro en $G \rtimes V$ es $(e, 0)$. Hay dos subgrupos naturales: $G \rtimes \{0\}$ y el subgrupo normal $\{e\} \rtimes V$. Sus álgebras de Lie son $\mathfrak{g} \rtimes \{0\}$ y $\{0\} \rtimes V$ respectivamente. A un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ en $\mathfrak{g} \rtimes V$ tal que $(\mathfrak{g} \rtimes \{0\})^{\perp_{\mathcal{A}}} = \{0\} \rtimes V$ lo llamamos *métrica partida*.

Teorema 5.2.1. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *La subálgebra $\mathfrak{g} \rtimes \{0\}$ es ETG en $\mathfrak{g} \rtimes V$ con respecto a cualquier métrica partida $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$.*

2. *La subálgebra $\{0\} \rtimes V$ es totalmente geodésica en $\mathfrak{g} \rtimes V$ con respecto a cualquier producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ en $\mathfrak{g} \rtimes V$ si y sólo si G actúa en V por isometrías con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ restringido a V.*

Demostración. Para $(\xi, 0) \in \mathfrak{g} \rtimes \{0\}$ y $(0, v) \in (\mathfrak{g} \rtimes \{0\})^{\perp_{\mathcal{A}}}$, tenemos que

$$[(\xi, 0), (0, v)] = (0, \xi \cdot v) \in \{0\} \rtimes V = (\mathfrak{g} \rtimes \{0\})^{\perp_{\mathcal{A}}}.$$

Entonces, concluimos que la subálgebra $\mathfrak{g} \rtimes \{0\}$ es ETG en $\mathfrak{g} \rtimes V$ para cualquier métrica partida.

Ahora consideremos la subálgebra $\{0\} \rtimes V$. Para $v \in V$, $(\eta, \mu) \in (\{0\} \rtimes V)^{\perp_{\mathcal{A}}}$ tenemos que

$$\langle (\xi, 0), [(0, v), (\eta, u)] \rangle_{\mathcal{A}} = \langle (0, v), (0, -\eta \cdot v) \rangle_{\mathcal{A}} = -\langle v, \eta \cdot v \rangle_{\mathcal{A}|_V},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}|_V}$ es la restricción de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ a V. Ahora, sea $g(t)$ una curva en G tal que $g(0) = e$ y $\dot{g}(0) = \eta$. Así,

$$\langle v, \eta \cdot v \rangle_{\mathcal{A}|_V} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle g(t) \cdot v, g(t) \cdot v \rangle_{\mathcal{A}|_V}.$$

El lado derecho se anula para todo $\eta \in \mathfrak{g}$ y $v \in V$ si y sólo si G actúa por isometrías en V con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}|_V}$. □

Ejemplo 5.2.2 (Grupos magnéticos)**.** Dado un grupo cualquiera G, podemos considerar la acción de coadjunta de G en $\mathfrak{g}^*$, como la definimos en (2.1.12). Así, podemos considerar el producto semidirecto $G \rtimes \mathfrak{g}^*$, de modo que $\mathfrak{g}^*$ ahora juega el papel del espacio vectorial V en todo lo desarrollado anteriormente.

Este ejemplo se presenta al estudiar magnetohidrodinámica, donde el grupo está dado por $G = \mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(M)$, formando así el producto semidirecto $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(M) \ltimes \mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)^*$. El producto interno está dado por $((\xi, a), (\eta, b)) \mapsto \langle \xi, \eta \rangle_{L^2} + \langle a, b \rangle_{L^2}$. Como este producto interno es una métrica partida, el Teorema (5.1.7) nos indica que $\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M) \ltimes \{0\}$ es ETG. Desde un punto de vista físico, esto significa que si el campo magnético es inicialmente cero, entonces permanece nulo y así el flujo se reduce al fluido de Euler.

Ahora queremos construir las ecuaciones de Euler en general, para una métrica partida en el grupo magnético $G \ltimes \mathfrak{g}^*$. Veámoslo en el siguiente teorema:

Teorema 5.2.3. *Sea $\mathcal{A} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ un operador de inercia en $\mathfrak{g}$. La ecuación a derecha de Euler-Arnold en el álgebra de Lie del grupo magnético $G \ltimes \mathfrak{g}^*$ asociada a la métrica partida $\langle (\xi, \mu), (\eta, \sigma) \rangle_{\mathcal{A}} := \langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{A}} + \langle \mu, \sigma \rangle_{\mathcal{A}^{-1}}$ está dada por*

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -ad_{\xi}^{\top_{\mathcal{A}}}(\xi) + ad_{\mathcal{A}^{-1}(\mu)} \circ \mathcal{A}^{-1}\mu \\ \dot{\mu} &= \mathcal{A} \circ ad_{\xi} \circ \mathcal{A}^{-1}\mu. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Demostración. La forma débil de la ecuación de Euler en $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{g}^*$ para la métrica partida dada es

$$\begin{aligned} \langle \frac{d}{dt}(\xi, \mu), (\eta, \sigma) \rangle_{\mathcal{A}} &= -\langle (\xi, \mu), [(\xi, \mu), (\eta, \sigma)] \rangle_{\mathcal{A}} \\ &= -\langle (\xi, \mu), ([\xi, \eta], \xi \cdot \sigma - \eta \cdot \mu) \rangle_{\mathcal{A}} \\ &= -\langle \xi, [\xi, \eta] \rangle_{\mathcal{A}} - \langle \mu, \xi \cdot \sigma - \eta \cdot \mu \rangle_{\mathcal{A}^{-1}} \\ &= -\langle \mathrm{ad}_{\xi}^{\top_{\mathcal{A}}}(\xi), \eta \rangle_{\mathcal{A}} - \langle \mu, \xi \cdot \sigma \rangle_{\mathcal{A}^{-1}} + \langle \mu, \eta \cdot \mu \rangle_{\mathcal{A}^{-1}}. \end{aligned}$$

Veamos ahora qué sucede con estos últimos dos términos de la igualdad por separado. Para el segundo término, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \mu, \xi \cdot \sigma \rangle_{\mathcal{A}^{-1}} &= \langle \mu, -\mathrm{ad}_{\xi}^{*}(\sigma) \rangle_{\mathcal{A}^{-1}} \\ &= \langle -\mathrm{ad}_{\xi}^{*}(\sigma), \mathcal{A}^{-1}\mu \rangle \\ &= \langle \sigma, -\mathrm{ad}_{\xi} \circ \mathcal{A}^{-1}\mu \rangle \\ &= \langle \sigma, -\mathcal{A} \circ \mathrm{ad}_{\xi} \circ \mathcal{A}^{-1}\mu \rangle_{\mathcal{A}^{-1}}, \end{aligned}$$

y para el último termino, tenemos

$$\begin{aligned}\langle \mu, \eta \cdot \mu \rangle_{\mathcal{A}^{-1}} &= \langle \mu, -\mathrm{ad}^*_\eta(\mu) \rangle_{\mathcal{A}^{-1}} \\ &= \langle -\mathrm{ad}^*_\eta(\mu), \mathcal{A}^{-1}\mu \rangle \\ &= \langle \mu, -\mathrm{ad}_\eta(\mathcal{A}^{-1}\mu) \rangle \\ &= \langle \mu, \mathrm{ad}_{\mathcal{A}^{-1}\mu}(\eta) \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}^{-1}(\mu), \mathrm{ad}_{\mathcal{A}^{-1}\mu}(\eta) \rangle_{\mathcal{A}} \\ &= \langle \mathrm{ad}^{\top_{\mathcal{A}}}_{\mathcal{A}^{-1}\mu} \circ \mathcal{A}^{-1}\mu, \eta \rangle_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

Entonces, concluimos que

$$\langle \frac{d}{dt}(\xi, \mu), (\eta, \sigma) \rangle_{\mathcal{A}} = \langle -\mathrm{ad}^{\top_{\mathcal{A}}}_\xi(\xi) + \mathrm{ad}^{\top_{\mathcal{A}}}_{\mathcal{A}^{-1}\mu} \circ \mathcal{A}^{-1}\mu, \eta \rangle_{\mathcal{A}} + \langle \mathcal{A} \circ \mathrm{ad}_\xi \circ \mathcal{A}^{-1}(\mu), \sigma \rangle_{\mathcal{A}^{-1}}.$$

Como esto debe valer para todo par (η, σ), se verifican las ecuaciones del enunciado. □

Ahora investiguemos directamente de las ecuaciones de Euler obtenidas del teorema anterior, las condiciones para que los subgrupos $G \rtimes \{0\}$ y $\{e\} \rtimes \mathfrak{g}^*$ sean totalmente geodésicos. Se ve claramente de las ecuaciones que $\mathfrak{g} \rtimes \{0\}$ es invariante bajo el flujo de las Ecuaciones (5.2.1). Sin embargo, para que el flujo de Euler sea tangente a $\{0\} \rtimes \mathfrak{g}^*$, necesitamos que para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, $\langle \mathrm{ad}^{\top_{\mathcal{A}}}_{\mathcal{A}^{-1}\mu}, \xi \rangle_{\mathcal{A}} = 0$. Pero, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{ad}^{\top_{\mathcal{A}}}_{\mathcal{A}^{-1}\mu} \circ \mathcal{A}^{-1}\mu, \xi \rangle_{\mathcal{A}} &= \langle \mathcal{A}^{-1}\mu, \mathrm{ad}_{\mathcal{A}^{-1}\mu}(\xi) \rangle_{\mathcal{A}} \\ &= \langle \mathcal{A}^{-1}\mu, -\mathrm{ad}_\xi(\mathcal{A}^{-1}\mu) \rangle_{\mathcal{A}} \\ &= \langle \mu, -\mathrm{ad}_\xi(\mathcal{A}^{-1}\mu) \rangle \\ &= \langle -\mathrm{ad}^*_\xi(\mu), \mathcal{A}^{-1}\mu \rangle \\ &= \langle \xi \cdot \mu, \mathcal{A}^{-1}\mu \rangle = \langle \mu, \xi \cdot \mu \rangle_{\mathcal{A}^{-1}}\end{aligned}$$

y este último término se anula (para todo ξ y para todo μ) si y sólo si $\mathfrak{g}$ actúa en $\mathfrak{g}^*$ por isometrías con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}^{-1}}$, usando el Teorema (5.1.7).

Ejemplo 5.2.4 (Cuerpo rígido en fluidos)**.** Otro ejemplo en física está dado por las ecuaciones de Kirchhoff para un cuerpo rígido en un fluido. Aquí, $G = SO(3)$ y $V = \mathbb{R}^3$, formando el grupo especial euclideano $SO(3) \rtimes \mathbb{R}^3$. La variable de $SO(3)$ describe la orientación del cuerpo, mientras que la variable de $\mathbb{R}^3$ describe la posición de traslación de su centro de masa. El álgebra de Lie está dada por $\mathfrak{so}(3) \rtimes \mathbb{R}^3$, y el producto interno (que describe la energía cinética total) es de la forma

$$((\xi, u), (\eta, v)) \mapsto \langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{J}} + m\langle u, v \rangle_{L^2} + Q(\xi, v) + Q(\eta, u),$$

donde $\mathcal{J} : \mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{so}(3)^*$ es el operador de momentos rotacionales de inercia, $m > 0$ es la masa efectiva, y Q es positiva y bilineal (depende de la geometría del cuerpo). Entonces, el producto interno por lo general no es una métrica partida, y por lo tanto $\mathfrak{so}(3) \rtimes \{0\}$ no suele ser totalmente geodésico. En términos físicos, esto implica que si la velocidad inicial del centro de masa de un cuerpo rígido que gira en un fluido es cero, generalmente no seguirá siendo cero (debido a la intersección con el fluido). Sin embargo, como $m\langle g \cdot u, g \cdot v\rangle_{L^2} = m\langle u, v\rangle_{L^2}$ para todo $g \in SO(3)$, tenemos que $SO(3)$ actúa en $\mathbb{R}^3$ por isometrías. Así, debido al Teorema (5.1.7), tenemos que $\{0\} \rtimes V$ es totalmente geodésico, lo cual significa que un cuerpo rígido inicialmente no giratorio que se mueve en un fluido seguirá siendo no giratorio.

Capítulo 6

Ejemplos de grupos de difeomorfismos

El Teorema (5.1.7) que caracteriza los productos internos para los cuales una subálgebra es una subálgebra ETG es válido incluso en el caso de álgebras de Fréchet-Lie de dimensión infinita. Como hemos visto en en el capítulo anterior, en el caso finito dimensional podemos utilizar la forma de Killing como forma $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$-invariante y así el único requerimiento para poder aplicar este teorema es que la forma de Killing sea no degenerada en $\mathfrak{h}$, lo cual es equivalente a pedir que la subálgebra $\mathfrak{h}$ sea semisimple. En el caso infinito dimensional la situación es un poco más complicada: debemos hallar explícitamente una forma $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$-invariante en $\mathfrak{g}$. A lo largo de este capítulo daremos diferentes ejemplos.

6.1. Isometrías y la métrica H^1_α

Sea (M, g) una variedad riemanniana. Consideremos el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ en el espacio de k-formas diferenciables $\Omega^k(M)$ definido en (1.2.2). En lo que sigue usaremos varios de los operadores definidos en (1.2.20) y algunas de sus propiedades.

Definición 6.1.1. La métrica H^1_α a izquierda en $\mathrm{Diff}(M)$ es la métrica invariante a izquierda dada por la traslación a izquierda del correspondiente producto interno H^1_α en $\mathfrak{X}(M)$ y está dada por:

$$\langle \xi, \eta \rangle_{H^1_\alpha} := \langle \xi^\flat, \eta^\flat \rangle_{L^2} + \alpha \langle \mathrm{d}\xi^\flat, \mathrm{d}\eta^\flat \rangle_{L^2} + \alpha \langle \delta\xi^\flat, \delta\eta^\flat \rangle_{L^2}.$$

Observación 6.1.2. La métrica H^1_α aquí definida contiene $1 + \frac{n(n-1)}{2}$ términos de derivadas parciales. En algunos textos también puede estar definida con los n^2 términos de derivadas parciales.

Sea $\mathfrak{X}_{\text{iso}}(M) = \{\xi \in \mathfrak{X}(M) : \pounds_\xi g = 0\}$ el conjunto de campos de Killing de M. Sea $\text{Diff}_{\text{iso}}(M) \subseteq \text{Diff}(M)$ el subgrupo de isometrías. La subálgebra correspondiente está dada por los campos de Killing tangenciales $\mathfrak{X}_{\text{iso,t}}(M) = \mathfrak{X}_{\text{iso}}(M) \cap \mathfrak{X}_{\text{t}}(M)$.

Proposición 6.1.3. *Sea (M, g) una variedad riemanniana de dimensión n. Entonces el producto interno H^1_α en $\mathfrak{X}_t(M)$ es $ad_{\mathfrak{X}_{iso}(M)}$-invariante.*

Para demostrar esta proposición necesitaremos el siguiente resultado:

Lema 6.1.4. *Sea $\beta \in \Omega^k(M)$ y $\xi \in \mathfrak{X}_{iso}(M)$. Entonces $\pounds_\xi \star \beta = \star \pounds_\xi \beta$.*

Demostración. Sea $\alpha \in \Omega^k(M)$. El operador estrella de Hodge satisface (por definición) $\alpha \wedge \star\beta = g^\flat(\alpha, \beta)\text{vol}$, donde $g^\flat$ es el producto interno en $\Omega^k(M)$ inducido por g. Usando las propiedades definidas en la Proposición (1.2.21) es sencillo ver que $\pounds_\xi g = 0$ implica $\pounds_\xi g^\flat = 0$. Así,

$$\pounds_\xi(\alpha \wedge \star\beta) = \pounds_\xi(g^\flat(\alpha, \beta)\,\text{vol})$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{aligned}\pounds_\xi\alpha \wedge \star\beta + \alpha \wedge \pounds_\xi \star \beta = \underbrace{\pounds_\xi g^\flat}_{=0}(\alpha, \beta)\,\text{vol} + g^\flat(\pounds_\xi\alpha, \beta)\,\text{vol} \\ + g^\flat(\alpha, \pounds_\xi\beta)\,\text{vol} + g^\flat(\alpha, \beta)\,\underbrace{\pounds_\xi\,\text{vol}}_{=0}\end{aligned}$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha \wedge \pounds_\xi \star \beta = g^\flat(\alpha, \pounds_\xi\beta)\,\text{vol} = \alpha \wedge \star\pounds_\xi\beta,$$

donde usamos que $\pounds_\xi g^\flat = 0$ pues ξ es un campo de Killing, y $\pounds_\xi\,\text{vol} = 0$ pues todo campo de Killing tiene divergencia nula. Ahora, como α es arbitrario, tenemos que la derivada de Lie $\pounds_\xi$ conmuta con el operador estrella de Hodge en $\Omega^k(M)$. $\square$

Demostración de la Proposición (6.1.3). Dados campos suaves $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$, como la derivada de Lie $\pounds_\xi$ satisface la regla de Leibniz con respecto a la contracción con la métrica g, tenemos que $\pounds_\xi \eta^\flat = (\pounds_\xi \eta)^\flat + (\pounds_\xi g)(\eta, \cdot)$. Así, si $\xi \in \mathfrak{X}_{\text{iso}}$ y $\eta, \psi \in \mathfrak{X}_{\text{t}}(M)$ vale que:

$$\langle \text{ad}_\xi(\eta), \psi\rangle_{H^1_\alpha} = -\langle [\xi, \eta]_{\mathfrak{X}}, \psi\rangle_{H^1_\alpha} = -\langle \pounds_\xi \eta^\flat, \psi^\flat\rangle_{L^2} - \alpha\langle \text{d}\pounds_\xi\eta^\flat, \text{d}\psi^\flat\rangle_{L^2} - \alpha\langle \delta\pounds_\xi\eta^\flat, \delta\psi^\flat\rangle_{L^2}.$$

Veamos que cada uno de estos tres términos es invariante. Para el primer término, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle \pounds_\xi \eta^\flat, \psi^\flat \rangle_{L^2} &= \int_M \pounds_\xi \eta^\flat \wedge \star\psi^\flat = \int_M \pounds_\xi(\eta^\flat \wedge \star\psi^\flat) - \int_M \eta^\flat \wedge \pounds_\xi \star \psi^\flat \\
&= \int_M \mathrm{d}\mathrm{i}_\xi(\eta^\flat \wedge \star\psi^\flat) - \int_M \eta^\flat \wedge \pounds_\xi \star \psi^\flat \\
&= \int_{\partial M} i^*(\mathrm{i}_\xi(\eta^\flat \wedge \star\psi^\flat)) - \int_M \eta^\flat \wedge \pounds_\xi \star \psi^\flat \\
&= \int_{\partial M} \mathrm{i}_{i^*\xi}(i^*(\eta^\flat) \wedge i^*(\star\psi^\flat)) - \int_M \eta^\flat \wedge \pounds_\xi \star \psi^\flat
\end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula mágica de Cartan, el teorema de Stokes y la regla de Leibniz. Como ψ es tangente al borde ∂M, tenemos que $i^*(\star\psi^\flat) = 0$. Así, el término del borde se anula. Usando ahora el lema previo tenemos que $\langle \pounds_\xi \eta^\flat, \psi^\flat \rangle_{L^2} = -\langle \eta^\flat, \pounds_\xi \psi^\flat \rangle_{L^2}$.

Para el segundo término, recordemos que la identidad

$$\langle \mathrm{d}\alpha, \beta \rangle_{L^2} = \langle \alpha, \delta\beta \rangle_{L^2} + \int_{\partial M} \alpha \wedge \star\beta$$

vale para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$ y $\beta \in \Omega^{k+1}(M)$. Usando esta fórmula, el lema previo, el hecho de que $\pounds_\xi$ conmuta con d, y la cuenta que hicimos para el primer término, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{d}\pounds_\xi \eta^\flat, \mathrm{d}\psi^\flat \rangle_{L^2} &= \langle \delta \mathrm{d}\pounds_\xi \eta^\flat, \psi^\flat \rangle_{L^2} + \int_{\partial M} i^*(\mathrm{d}\pounds_\xi \eta^\flat \wedge \star\psi^\flat) \\
&= \langle \star\mathrm{d} \star \mathrm{d}\pounds_\xi \eta^\flat, \psi^\flat \rangle_{L^2} + \int_{\partial M} i^*(\mathrm{d}\pounds_\xi \eta^\flat) \wedge \underbrace{i^*(\star\psi^\flat)}_{=0} \\
&= \langle \pounds_\xi \star \mathrm{d} \star \mathrm{d}\eta^\flat, \psi^\flat \rangle_{L^2} = \langle \pounds_\xi \delta \mathrm{d}\eta^\flat, \psi^\flat \rangle_{L^2} \\
&= -\langle \delta \mathrm{d}\eta^\flat, \pounds_\xi \psi^\flat \rangle_{L^2} \\
&= -\langle \mathrm{d}\eta^\flat, \mathrm{d}\pounds_\xi \psi^\flat \rangle_{L^2} + \int_{\partial M} i^*(\mathrm{d}\eta^\flat \wedge \pounds_\xi \psi^\flat) \\
&= -\langle \mathrm{d}\eta^\flat, \mathrm{d}\pounds_\xi \psi^\flat \rangle_{L^2} + \int_{\partial M} i^*(\mathrm{d}\eta^\flat) \wedge i^*(\star\pounds_\xi \psi^\flat) \\
&= -\langle \mathrm{d}\eta^\flat, \mathrm{d}\pounds_\xi \psi^\flat \rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

El último término del borde se anula pues

$$i^*(\star\pounds_\xi \psi^\flat) = i^*(\pounds_\xi \star \psi^\flat) = i^*(\mathrm{d}\mathrm{i}_\xi \star \psi^\flat) + i^*(\mathrm{i}_\xi \mathrm{d} \star \psi^\flat) = \mathrm{d}\mathrm{i}_{i^*\xi} \underbrace{i^*(\star\psi^\flat)}_{=0} + \mathrm{i}_{i^*\xi}\mathrm{d} \underbrace{i^*(\star\psi^\flat)}_{=0}.$$

De la misma forma, para el tercer término obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle \delta\pounds_\xi \eta^\flat, \delta\psi^\flat \rangle_{L^2} &= \langle \mathrm{d}\delta\pounds_\xi \eta^\flat, \psi^\flat \rangle_{L^2} = \langle \pounds_\xi \mathrm{d}\delta \eta^\flat, \psi^\flat \rangle_{L^2} \\
&= -\langle \mathrm{d}\delta \eta^\flat, \pounds_\xi \psi^\flat \rangle_{L^2} = -\langle \delta \eta^\flat, \delta\pounds_\xi \psi^\flat \rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Juntando todos estos resultados, nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{ad}_\xi(\eta), \psi\rangle_{H^1_\alpha} &= -\langle [\xi,\eta]_{\mathfrak{X}}, \psi\rangle_{H^1_\alpha} \\ &= \langle \eta^\flat, \pounds_\xi \psi^\flat\rangle_{L^2} + \alpha\langle \mathrm{d}\eta^\flat, \mathrm{d}\pounds_\xi\psi^\flat\rangle_{L^2} + \alpha\langle \delta\eta^\flat, \delta\pounds_\xi\psi^\flat\rangle_{L^2} \\ &= \langle \eta, [\xi,\psi]_{\mathfrak{X}}\rangle_{H^1_\alpha} = -\langle \eta, \mathrm{ad}_\xi(\eta)\rangle_{H^1_\alpha},\end{aligned}$$

lo cual prueba la proposición. □

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado:

Corolario 6.1.5. *$\mathrm{Diff}_{iso}(M)$ es ETG en $\mathrm{Diff}(M)$ con respecto a la métrica H^1_α. De hecho, si $\xi \in \mathfrak{X}_{iso}$, entonces ξ es una solución estacionaria a la ecuación de Euler-Arnold de $(\mathrm{Diff}(M), \langle\!\langle \cdot,\cdot\rangle\!\rangle_{H^1_\alpha})$.*

Demostración. La primera afirmación es consecuencia directa de la proposición anterior y la Proposición (5.1.4). Además, si $\xi \in \mathfrak{X}_{\mathrm{iso}}$, entonces la ecuación de Euler-Arnold está dada por

$$\langle \dot{\xi}, \eta\rangle_{H^1_\alpha} = \langle \mathrm{ad}_\xi(\eta), \xi\rangle_{H^1_\alpha} = \langle \eta, \mathrm{ad}_\xi(\xi)\rangle_{H^1_\alpha} = 0,$$

para todo $\eta \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, ξ es una solución estacionaria. □

6.2. Difeomorfismos exactos que preservan el volumen y la métrica H^1_α

En esta sección, siguiendo [MPMM10] extenderemos un resultado dado en [HTV02]: dada una variedad riemanniana compacta sin borde, nos dan una condición para que el subgrupo de difeomorfismos exactos que preservan el volumen, correspondiente a la subálgebra de Lie de campos suaves exactos de divergencia nula, sea totalmente geodésico con respecto a la métrica L^2. Modin extiende este resultado a variedades riemannianas compactas con borde con respecto a la métrica H^1_α.

Sea (M,g) una variedad riemanniana de dimensión n con borde. Recordemos que los campos suaves exactos de divergencia nula están dados por

$$\mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol}}(M) = \{\xi \in \mathfrak{X}_{\mathrm{vol}}(M) : \exists \alpha \in \Omega^{n-1}(M) \text{ tal que } \mathrm{i}_\xi \operatorname{vol} = \mathrm{d}\alpha\}.$$

Es sencillo ver que es una subálgebra. De hecho, si $\xi, \eta \in \mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol}}(M)$ entonces

$$\mathrm{i}_{[\xi,\eta]} \operatorname{vol} = \pounds_\xi \mathrm{i}_\eta \operatorname{vol} + \mathrm{i}_\eta \underbrace{\pounds_\xi \operatorname{vol}}_{=0} = \pounds_\xi \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\pounds_\xi\alpha,$$

entonces $\mathrm{i}_{[\xi,\eta]} \operatorname{vol}$ es exacta. El subgrupo de $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(M)$ correspondiente a $\mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M) = \mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol}}(M) \cap \mathfrak{X}_{\mathrm{t}}(M)$ se denota $\mathrm{Diff}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol}}(M)$.

Teorema 6.2.1. *$Diff^{ex}_{vol}(M)$ es totalmente geodésico en $Diff_{vol}(M)$ con respecto a la métrica H^1_α si y sólo si*

$$\langle i_\xi d\xi^\flat, \gamma\rangle_{L^2} = 0$$

para todo $\xi \in \mathfrak{X}^{ex}_{vol,t}(M)$ y $\gamma \in \mathcal{H}^1(M)$.

Demostración. El espacio $\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ se corresponde con el espacio $D^1_{\mathrm{t}}(M)$ de las 1-formas tangentes co-cerradas, y $\mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ se corresponde con las 1-formas tangentes co-exactas $(\delta\Omega^2(M))_{\mathrm{t}} = \delta\Omega^2_{\mathrm{t}}(M)$ vía el operador flat. Del teorema de descomposición de Hodge para variedades con borde (1.2.24), tenemos que el complemento L^2-ortogonal de $\delta\Omega^2_{\mathrm{t}}(M)$ en $\Omega^1_{\mathrm{t}}(M)$ está dado por las 1-formas tangentes cerradas $C^1_{\mathrm{t}}(M)$. Así, el complemento L^2-ortogonal de $\delta\Omega^2_{\mathrm{t}}(M)$ en $D^1_{\mathrm{t}}(M)$ está dado por $C^1_{\mathrm{t}}(M) \cap D^1_{\mathrm{t}}(M)$, el conjunto de campos armónicos y tangentes al cual denotaremos por $\mathcal{H}^1_{\mathrm{t}}(M)$. Como $\delta\gamma = 0$ y $\mathrm{d}\gamma = 0$ para todo campo armónico, se sigue que $\mathcal{H}^1_{\mathrm{t}}(M)$ es el complemento ortogonal de $\delta\Omega^2_{\mathrm{t}}(M)$ también con respecto a H^1_α.

En el ítem (c) del Ejemplo (3.5.3) vimos que ad^*_ξ representada en $D^1_{\mathrm{t}}(M)$ toma la forma $\mathrm{ad}^\bullet_\xi(\psi) = P(\pounds_\xi \psi^\flat)$, donde P es la proyección L^2-ortogonal $\Omega^1_{\mathrm{t}}(M) \to D^1_{\mathrm{t}}(M)$. Ahora, el Teorema (4.1.3) afirma que $\mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ es totalmente geodésica en $\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ si y sólo si

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \mathrm{ad}^{\top_{\mathcal{A}}}_\xi(\xi), \gamma^\sharp\rangle_{H^1_\alpha} = \langle \mathcal{J}^{-1}(\mathrm{ad}^\bullet_\xi(\mathcal{J}\xi)), \gamma^\sharp\rangle_{H^1_\alpha} \\
&= \langle P(\pounds_\xi \xi^\flat), \gamma\rangle_{H^1_\alpha} = \langle P(\pounds_\xi \xi^\flat), \gamma\rangle_{L^2} \\
&= \langle \pounds_\xi \xi^\flat + \mathrm{d}p, \gamma\rangle_{L^2} = \langle \pounds_\xi \xi^\flat, \gamma\rangle_{L^2}
\end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$, y para todo $\gamma \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{t}}(M)$. La última igualdad se sigue de que $\mathrm{d}\Omega^0(M)$ es ortogonal a $\mathcal{H}^1_{\mathrm{t}}(M)$. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \pounds_\xi \xi^\flat, \gamma\rangle_{L^2} &= \langle \mathrm{i}_\xi \mathrm{d}\xi^\flat, \gamma\rangle_{L^2} + \langle \mathrm{d}\mathrm{i}_\xi \xi^\flat, \gamma\rangle_{L^2} \\
&= \langle \mathrm{i}_\xi \mathrm{d}\xi^\flat, \gamma\rangle_{L^2} + \langle \mathrm{i}_\xi \xi^\flat, \underbrace{\delta\gamma}_{=0}\rangle_{L^2} + \int_M i^*(\mathrm{i}_\xi \xi^\flat) \wedge \underbrace{i^*(\star\gamma)}_{=0} \\
&= \langle \mathrm{i}_\xi \mathrm{d}\xi^\flat, \gamma\rangle_{L^2}
\end{aligned}$$

lo cual prueba el teorema. □

Observación 6.2.2. En el caso donde $\alpha = 0$ y M no tiene borde, el Teorema (6.2.1) es la equivalencia $1 \leftrightarrow 5$ del Teorema 1 en [HTV02].

6.3. Forma bi-invariante en $\mathfrak{X}_{\mathbf{Ham}}(M)$

Comenzaremos esta sección definiendo el concepto de variedad simpléctica. Este tipo de variedades surgen de la mecánica clásica: en particular, son una generalización del espacio de fase de un sistema cerrado. De la misma manera que las ecuaciones de Hamilton permiten deducir la evolución temporal de un sistema a partir de un conjunto de ecuaciones diferenciales, la forma simpléctica nos permite obtener un campo vectorial que describe el flujo del sistema a partir de la diferencial $\mathrm{d}H$ de una función hamiltoniana H.

Definición 6.3.1. Sea M una variedad diferenciable y $\omega \in \Omega^2(M)$. Decimos que el par (M, ω) es una variedad simpléctica si ω es cerrada y no degenerada. Llamamos forma simpléctica de M a la 2-forma ω.

Observación 6.3.2. Que la 2-forma ω sea no degenerada significa que si $p \in M$ y existe $X \in T_pM$ tal que $\omega_p(X, Y) = 0$ para todo $Y \in T_pM$, entonces debe ser $X = 0$. Esta condición nos asegura que para cada diferencial $\mathrm{d}H$ hay un único campo correspondiente ξ_H tal que $\mathrm{d}H = \omega(\xi_H, \cdot)$.

Definición 6.3.3. Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Decimos que un campo suave $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ es simpléctico si $\mathrm{i}_\xi\omega$ es cerrada. Y decimos que es hamiltoniano si $\mathrm{i}_\xi\omega$ es exacta.

Sea (M, ω) una variedad simpléctica con borde. Los campos hamiltonianos $\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$ son campos simplécticos tangentes que tienen un hamiltoniano definido globalmente. Consideremos la siguiente forma simétrica bilineal en $\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$:

$$(\xi_H, \xi_G) \mapsto \int_M HG\omega^n =: \langle \xi_H, \xi_G \rangle_{\mathrm{Ham}} \tag{6.3.1}$$

donde H, G están normalizados de modo que $\int_M H\omega^n = \int_M G\omega^n = 0$. Consideremos $\mathrm{Diff}_{\mathrm{Sp}}(M) \subseteq \mathrm{Diff}(M)$: el subgrupo de difeomorfismos que preservan la estructura simpléctica. Notar que si $\Phi \in \mathrm{Diff}_{Sp}(M)$ entonces $\mathrm{Ad}_\Phi(\xi_H) = \xi_{\Phi^* H} \in \mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$, pues Φ preserva la estructura simpléctica. Ahora,

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{Ad}_\Phi(\xi_H), \mathrm{Ad}_\Phi(\xi_G) \rangle_{\mathrm{Ham}} &= \int_M (\Phi^* H)(\Phi^* G)\omega^n = \int_M (\Phi^* H)(\Phi^* G)(\Phi^* \omega)^n \\
&= \int_M (\Phi^* H)(\Phi^* G)(\Phi^* \omega^n) = \int_M \Phi^*(HG\omega^n) \\
&= \int_M HG\omega^n = \langle \xi_H, \xi_G \rangle_{\mathrm{Ham}}
\end{aligned}$$

donde usamos que $\Phi^*\omega = \omega$. Entonces, como el álgebra de Lie de $\mathrm{Diff}_{Sp}(M)$ es $\mathfrak{X}_{Sp,\mathrm{t}}(M)$ tenemos el siguiente resultado, el cual está dado para variedades sin borde en [Ho93] y [Sm86].

Proposición 6.3.4. *La forma bilineal (6.3.1) define un producto interno $ad_{\mathfrak{X}_{Sp,t}(M)}$-invariante en $\mathfrak{X}_{Ham}(M)$.*

6.4. Toro maximal de los difeomorfismos que preservan el volumen

Consideremos el cilindro finito $M = S^1 \times [0,1]$, parametrizado por (θ, z) junto con la estructura riemanniana natural. En [BR92], [BR93], [BR97] se estudia el grupo de difeomorfismos de M que preservan el volumen. En particular, en [BR97] se muestra que el subgrupo abeliano maximal de $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(M)$ está dado por

$$\mathcal{T} = \{\phi \in \mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(M) : \phi(\theta, z) = (\theta + f(z), z) \text{ con } f \in C^\infty([0,1], S^1)\}.$$

El álgebra correspondiente está dada por

$$\mathfrak{t} = \{\xi \in \mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M) : \xi(\theta, z) = T'(z)\partial_\theta \text{ con } T \in C^\infty([0,1], \mathbb{R})\}.$$

También en [BR97] se demuestra que $\mathcal{T}$ es totalmente geodésico en $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(M)$ con respecto al producto interno L^2. Usando las herramientas que hemos desarrollado en los capítulos anteriores, probaremos un resultado un poquito más fuerte: en realidad es ETG.

Definición 6.4.1. Una *variedad de Kähler* es una variedad que posee tres estructura mutuamente compatibles: una estructura simpléctica, una estructura compleja, y una estructura riemanniana. Es por eso que estas variedades pueden ser descriptas desde diferentes puntos de vista:

- Punto de vista simpléctico: una variedad de Kähler es una variedad simpléctica (M, ω) equipada con una estructura casi-compleja integrable J, la cual es compatible con la forma simpléctica ω en el siguiente sentido: la forma bilineal

$$g(u, v) := \omega(u, Jv)$$

  es simétrica y definida positiva en cada espacio tangente T_pM (y por lo tanto es una métrica riemanniana en M).

- Punto de vista complejo: una variedad de Kähler es una variedad compleja M (aquí una *variedad compleja* es una variedad cuyos abiertos coordenados son subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}^n$ y las funciones de transición entre las cartas son funciones holomorfas) junto con una métrica hermitiana h cuya 2-forma asociada ω es cerrada. Más detalladamente, como h es una forma hermitiana, es definida positiva en los espacios tangentes T_pM y la 2-forma cerrada ω está definida como

  $$\omega(u, v) := \mathrm{Re}(h(iu, v)) = \mathrm{Im}(h(u, v)).$$

  para vectores tangentes u, v. A su vez,

  $$g(u, v) := \mathrm{Re}(h(u, v))$$

  define una métrica riemanniana en M.

- Punto de vista riemanniano: una variedad de Kähler es una variedad riemanniana (M, g) que satisface que en cada espacio tangente T_pM existe una estructura compleja J que preserva la métrica (es decir, que $g(Ju, Jv) = g(u, v)$) y J se preserva por el transporte paralelo.

Como en este ejemplo M es una variedad de dimensión 2, la métrica junto con la forma de volumen inducida le dan a M una estructura de variedad de Kähler. Así, como la forma de volumen es la forma simpléctica, el álgebra de campos tangentes de divergencia nula en M es igual al espacio de campos simplécticos tangentes en M. Además, gracias al operador flat, el espacio de campos tangentes de divergencia nula en M es isomorfo al espacio de 1-formas tangentes co-cerradas en M, es decir: $\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)^\flat = D^1_{\mathrm{t}}(M)$. Es un resultado de [BR97] que $D^1_{\mathrm{t}}(M) = \delta\Omega^2_{\mathrm{t}}(M)$, es decir, toda 1-forma tangente co-cerrada del cilindro finito es co-exacta. A su vez, esto implica que $\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ consiste de campos hamiltonianos tangentes en M. Notar que un campo hamiltoniano es tangente si y sólo si la función hamiltoniana correspondiente es constante cuando se restringe a cada componente conexa del borde.

A continuación, calcularemos el complemento ortogonal de $\mathfrak{t}$ en $\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$. Sea $\xi_T \in \mathfrak{t}$, y consideremos un elemento $\xi_H = \frac{\partial H}{\partial z}\partial_\theta - \frac{\partial H}{\partial \theta}\partial_z \in \mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$. Ahora:

$$\langle \xi_T, \xi_H \rangle_{L^2} := \int_M g(\xi_T, \xi_H)\,\mathrm{vol} = \int_M \star \mathrm{d}T \wedge \star\star\,\mathrm{d}H = \int_M \mathrm{d}T \wedge \star \mathrm{d}H.$$

Usando una expansión de Fourier, podemos ver que $\langle \xi_T, \xi_H \rangle_{L^2} = 0$ para todo $\xi_T \in \mathfrak{t}$ si y sólo si H es de la forma

$$H(\theta, z) = \mathrm{cte} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)cos(k\theta) + b_k(z)sen(k\theta). \tag{6.4.1}$$

Así, el complemento L^2-ortogonal de $\mathfrak{t}$ en $\mathfrak{X}_{\text{vol},\mathfrak{t}}(M)$ está dado por

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}^{\perp} = \mathfrak{r} = \{\xi_H \in \mathfrak{X}_{\text{vol},\mathfrak{t}}(M) : H(\theta, z) = &\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)cos(k\theta) + b_k(z)sen(k\theta),\\ &a_k, b_k \in C^{\infty}([0,1], \mathbb{R})\}.\end{aligned}$$

Ahora, sean $\xi_T \in \mathfrak{t}$ y $\xi_H \in \mathfrak{r}$. Tenemos que $\mathrm{ad}_{\xi_T}(\xi_H) = [\xi_T, \xi_H] = \xi_{\{T,H\}}$, donde $\{T, H\} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial T}{\partial z}$. Es sencillo verificar que $\frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial T}{\partial z}$ es de la forma (6.4.1). Así, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{r}) \subseteq \mathfrak{r}$, y por lo tanto $\mathfrak{t}$ es una subálgebra ETG de $\mathfrak{X}_{\text{vol},\mathfrak{t}}(M)$.

6.5. Forma bi-invariante en $\mathfrak{X}^{\text{ex}}_{\text{vol},\,\mathfrak{t}}(M)$

Sea (M, g) una variedad riemanniana de dimensión 3. Los campos exactos de divergencia nula $\mathfrak{X}^{\text{ex}}_{\text{vol}}(M)$ son los campos en M que tienen potenciales vectoriales globalmente definidos. Esto es: $\xi \in \mathfrak{X}^{\text{ex}}_{\text{vol}}(M)$ implica que $\xi = \mathrm{curl}\psi$ para algún campo $\psi \in \mathfrak{X}(M)$. Equivalentemente, en términos de formas diferenciales: $\xi \in \mathfrak{X}^{\text{ex}}_{\text{vol}}(M)$ implica que $\mathrm{i}_\xi \,\mathrm{vol} = \mathrm{d}\alpha$ para algún $\alpha \in \Omega^1(M)$, el cual es único salvo por 1-formas cerradas.

Recordemos que el complejo de de Rham para una variedad suave M de dimensión 3 está dado por:

$$\begin{tikzcd}
 & C^{\infty}(M) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, leftrightarrow, "Id"'] \arrow[rrr, bend left=40, "Id"] & \mathfrak{X}(M) \arrow[r, "\mathrm{curl}"] \arrow[d, shift left, "\flat"] \arrow[r, bend left=60, "Id"] & \mathfrak{X}(M) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\xi \mapsto \mathrm{i}_\xi \,\mathrm{vol}"] & C^{\infty}(M) \arrow[d, "f \mapsto f\mathrm{vol}"] & \\
0 \arrow[r] & \Omega^0(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[rrr, bend right=40, "\star"'] & \Omega^1(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[u, shift left, "\sharp"] \arrow[r, bend right=60, "\star"'] & \Omega^2(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^3(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{6.5.1}$$

Ahora, sean $\mathrm{i}_\xi \,\mathrm{vol} = \mathrm{d}\alpha$ y $\mathrm{i}_\eta \,\mathrm{vol} = \mathrm{d}\beta$ y consideremos la siguiente forma bilineal:

$$(\xi, \eta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \mathrm{d}\beta =: \langle \xi, \eta \rangle_{\text{hel}} \tag{6.5.2}$$

llamada "*helicidad cruzada*". Esta forma es simétrica e independiente de la elección de α (ver Sección III.1.D. del libro [AK98]). Equivalentemente, en términos del operador curl tenemos que

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\text{hel}} = \int_M g(\xi, \text{curl}^{-1}\eta) \,\text{vol}\,.$$

El siguiente resultado está dado en [Ar86]. Aquí daremos una prueba diferente, basada en el teorema de descomposición de Hodge.

Teorema 6.5.1. *Sea (M, g) una variedad riemanniana con borde de dimensión 3. Entonces (6.5.2) define una forma $\mathrm{ad}_{\mathfrak{X}_{vol,\,t}(M)}$-invariante, no degenerada, simétrica y bilineal en $\mathfrak{X}^{ex}_{vol,\,t}(M)$.*

Definimos $\mathfrak{X}_{\text{vol, n}}(M) = \mathfrak{X}^{\text{ex}}_{\text{vol}}(M) \cap \mathfrak{X}_{\text{n}}(M)$. Para la demostración del teorema anterior, necesitaremos los siguientes lemas previos:

Lema 6.5.2. *$\mathfrak{X}^{ex}_{vol,\,t}(M)$ es un ideal de $\mathfrak{X}_{vol,\,t}(M)$.*

Demostración. Sean $\xi \in \mathfrak{X}_{\text{vol, t}}(M)$ y $\eta \in \mathfrak{X}^{\text{ex}}_{\text{vol,t}}(M)$. Notar que $[\xi, \eta] \in \mathfrak{X}^{\text{ex}}_{\text{vol, t}}(M)$ si y sólo si $\mathrm{i}_{[\xi,\eta]}\,\text{vol} \in \mathrm{d}\Omega^1_{\text{n}}(M)$. Como $\eta \in \mathfrak{X}^{\text{ex}}_{\text{vol, t}}$, tenemos que $\mathrm{i}_\eta\,\text{vol} = \mathrm{d}\alpha$ para algún $\alpha \in \Omega^1_{\text{n}}(M)$ (no necesariamente único). Ahora,

$$\mathrm{i}_{[\xi,\eta]}\,\text{vol} = \pounds_\xi \mathrm{i}_\eta\,\text{vol} - \underbrace{\mathrm{i}_\eta \pounds_\xi\,\text{vol}}_{=0} = \pounds_\xi \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\pounds_\xi \alpha \in \mathrm{d}\Omega^1_{\text{n}}(M),$$

lo cual prueba el resultado. $\square$

Lema 6.5.3. *Sea $(d\Omega^1(M))_t$ el espacio de 2-formas tangentes exactas. El operador $d\star$ es un isomorfismo autoadjunto entre los espacios $(d\Omega^1(M))_t \to d\Omega^1_n(M)$ (con respecto al producto interno L^2). Equivalentemente, curl es un isomorfismo L^2-autoadjunto entre los espacios $\mathfrak{X}^{ex}_{vol,\,n}(M) \to \mathfrak{X}^{ex}_{vol,\,t}(M)$.*

Demostración. Por el teorema de descomposición de Hodge (1.2.3), tenemos la descomposición $\Omega^2(M) = \mathrm{d}\Omega^1(M) \oplus D^2_{\text{t}}(M)$. Además, $(\mathrm{d}\Omega^1(M))_{\text{n}} = \mathrm{d}\Omega^1_{\text{n}}(M)$ pues d conmuta con el pullback de la inclusión $i : \partial M \to M$. Como $\mathfrak{X}_{\text{t}}(M) \cong \Omega^2_{\text{n}}(M)$ y $\mathfrak{X}^{\text{ex}}_{\text{vol}}(M) \cong \mathrm{d}\Omega^1(M)$ vía el isomorfismo $\xi \mapsto \mathrm{i}_\xi\,\text{vol}$, tenemos que $\mathfrak{X}^{\text{ex}}_{\text{vol,t}}(M) = \mathfrak{X}^{\text{ex}}_{\text{vol}} \cap \mathfrak{X}_{\text{t}}(M) \cong \mathrm{d}\Omega^1(M) \cap \Omega^2_{\text{n}}(M) = \mathrm{d}\Omega^1_{\text{n}}(M)$ usando el mismo isomorfismo.

En el complejo de de Rham (6.5.1) podemos notar que el operador curl se corresponde con el operador $\mathrm{d}\star$ en $\Omega^2(M)$. El núcleo de $\mathrm{d}\star$ contiene a $D^2_{\text{t}}(M)$: usando la propiedad $\star\delta = (-1)^k \mathrm{d}\star$, como en este caso $k = 2$ tenemos que $\star\delta = \mathrm{d}\star$. Entonces, si $\beta \in D^2_{\text{t}}(M)$, $\mathrm{d} \star \beta = \star\delta\beta = 0$ pues β es co-cerrada. Además, es claro que la imagen de $\mathrm{d}\star$ es $\mathrm{d}\Omega^1(M)$ (la suryectividad se sigue del hecho de que $\star$ es un isomorfismo).

Veamos entonces que $\mathrm{d}\star$ mapea de forma isomorfa a $(\mathrm{d}\Omega^1(M))_{\mathrm{t}}$ con $\mathrm{d}\Omega^1_{\mathrm{n}}(M)$. Primero mostraremos que la imagen de $(\mathrm{d}\Omega^1(M))_{\mathrm{t}}$ está contenida en $\mathrm{d}\Omega^1_{\mathrm{n}}(M)$. Si $\mathrm{d}\alpha \in (\mathrm{d}\Omega^1(M))_{\mathrm{t}}$ entonces

$$i^*(\mathrm{d} \star \mathrm{d}\alpha) = i^*(\star\delta\mathrm{d}\alpha) = 0$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que δ envía formas tangentes en formas tangentes. Así, $\mathrm{d}\star\mathrm{d}\alpha$ es normal. Ahora veamos la suryectividad. Sea $\mathrm{d}\beta \in \mathrm{d}\Omega^1_{\mathrm{n}}(M)$. De una variante del teorema de descomposición de Hodge para variedades con borde se sigue que $\beta = \delta\gamma + \mathrm{p}$ con $\delta\gamma \in \delta\Omega^2(M)$ y p una 1-forma cerrada normal. Como β y p son normales, debe valer que $\delta\gamma \in (\delta\Omega^2(M))_{\mathrm{n}}$. Entonces tenemos que

$$\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}(\delta\gamma + \mathrm{p}) = \mathrm{d}\underbrace{\delta\gamma}_{\text{normal}} = \mathrm{d}\star\underbrace{\star\delta\gamma}_{\text{tangente}}, \tag{6.5.3}$$

donde hemos usado que el operador estrella de Hodge manda formas normales en formas tangentes, y formas co-exactas en formas exactas. Entonces, todo $\mathrm{d}\beta \in \mathrm{d}\Omega^1_{\mathrm{n}}(M)$ es la imagen bajo $\mathrm{d}\star$ de un elemento de $(\mathrm{d}\Omega^1(M))_{\mathrm{t}}$, por lo tanto probamos que la aplicación $\mathrm{d}\star : (\mathrm{d}\Omega^1(M))_{\mathrm{t}} \to \mathrm{d}\Omega^1_{\mathrm{n}}(M)$ es suryectiva. Además, $\star\delta\gamma$ en la ecuación (6.5.3) es único pues $\star : (\mathrm{d}\Omega^1(M))_{\mathrm{t}} \to (\delta\Omega^2(M))_{\mathrm{n}}$ es un isomorfismo, $\delta\gamma$ es único gracias a la descomposición de Hodge, y d es no generada en $(\delta\Omega^2(M))_{\mathrm{n}}$. De hecho,

$$\langle \mathrm{d}\delta\gamma, \alpha\rangle_{L^2} = \langle \delta\gamma, \delta\alpha\rangle_{L^2} + \int_{\partial M} \underbrace{i^*(\delta\gamma)}_{=0} \wedge i^*(\star\alpha) = \langle \delta\gamma, \delta\alpha\rangle_{L^2}$$

el cual es cero para todo $\delta\alpha \in (\delta\Omega^2(M))_{\mathrm{n}}$ si y sólo si $\delta\gamma = 0$. Juntando toda esta información, tenemos que $\mathrm{d}\star : (\mathrm{d}\Omega^1(M))_{\mathrm{t}} \to \mathrm{d}\Omega^1_{\mathrm{n}}(M)$ es biyectiva, es decir, es un isomorfismo. Notar también que $\mathrm{d}\star$ es autoadjunto con respecto al producto interno L^2. De hecho, si $\mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\beta \in (\mathrm{d}\Omega^1(M))_{\mathrm{t}}$ entonces

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{d}\star\mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\beta\rangle_{L^2} &= \langle \star\mathrm{d}\alpha, \delta\mathrm{d}\beta\rangle_{L^2} + \int_{\partial M} i^*(\star\mathrm{d}\alpha) \wedge \underbrace{i^*(\star\mathrm{d}\beta)}_{=0} \\ &= \langle \star\mathrm{d}\alpha, \star\mathrm{d}\star\mathrm{d}\beta\rangle_{L^2} = \langle \mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\star\mathrm{d}\beta\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

Para campos suaves el resultado implica que curl es un isomorfismo entre los campos suaves exactos con divergencia nula normales al borde de M y $\mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$. □

Demostración del Teorema (6.5.1). Usando el Lema (6.5.3), tenemos que la forma dada en (6.5.2), la cual notaremos como $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}}$, es una forma bilineal bien definida, simétrica y no degenerada en $\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$. De hecho, $\mathrm{d}\star$ es un isomorfismo L^2-autoadjunto, y por lo tanto $(\mathrm{d}\star)^{-1}$ es también L^2-autoadjunto. Entonces, si $\xi, \eta \in \mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{K}} &= \langle \xi, \mathrm{curl}^{-1}\eta \rangle_{L^2} = \langle \mathrm{i}_\xi \operatorname{vol}, (\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{i}_\eta \operatorname{vol} \rangle_{L^2} \\
&= \langle (\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{i}_\xi \operatorname{vol}, \mathrm{i}_\eta \operatorname{vol} \rangle_{L^2} = \langle \mathrm{curl}^{-1}\xi, \eta \rangle_{L^2} = \langle \eta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}.
\end{aligned}
$$

Ahora sí estamos listos para mostrar la $\mathrm{ad}_{\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)}$-invariancia. Sea $\xi \in \mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ y sean $\eta, \psi \in \mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$. Primero, se sigue del Lema (6.5.2) que $\mathrm{ad}_\xi(\eta) \in \mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$, así que incluso aunque $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}}$ esté solo definida en $\mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$, tiene sentido que sea $\mathrm{ad}_{\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)}$-invariante. Denotemos por $\mathrm{d}\alpha = \mathrm{i}_\eta \operatorname{vol}$ y $\mathrm{d}\beta = \mathrm{i}_\psi \operatorname{vol}$ los correspondientes elementos en $\mathrm{d}\Omega^1_{\mathrm{n}}(M)$. Ahora,

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{ad}_\xi(\eta), \psi \rangle_{\mathcal{K}} &= \langle -[\xi, \eta], \psi \rangle_{\mathcal{K}} = -\langle \mathrm{i}_{[\xi,\eta]} \operatorname{vol}, (\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{i}_\psi \operatorname{vol} \rangle_{L^2} \\
&= -\langle \mathrm{i}_{[\xi,\eta]} \operatorname{vol}, (\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{d}\beta \rangle_{L^2} = -\langle \mathrm{i}_{[\xi,\eta]} \operatorname{vol}, (\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{d} \star \star\beta \rangle_{L^2} \\
&= -\langle \mathrm{i}_{[\xi,\eta]} \operatorname{vol}, \star\beta \rangle_{L^2} = -\int_M \mathrm{i}_{[\xi,\eta]} \operatorname{vol} \wedge \beta \\
&= -\int_M \pounds_\xi \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + \int_M \mathrm{i}_\eta \underbrace{\pounds_\xi \operatorname{vol}}_{=0} \wedge \beta \\
&= \int_M \mathrm{d}\alpha \wedge \pounds_\xi \beta + \int_M \pounds_\xi (\mathrm{d}\alpha \wedge \beta) \\
&= \int_M \mathrm{d}\alpha \wedge \pounds_\xi \beta + \int_{\partial M} i^*(\mathrm{i}_\xi(\mathrm{d}\alpha \wedge \beta)) \\
&= \int_M \mathrm{d}\alpha \wedge \pounds_\xi \beta + \int_{\partial M} \mathrm{i}_{i^*\xi}(\underbrace{i^*(\mathrm{d}\alpha)}_{=0} \wedge i^*(\beta)) \\
&= \int_M \alpha \wedge \mathrm{d}\pounds_\xi \beta + \int_{\partial M} \underbrace{i^*(\alpha)}_{=0} \wedge i^*(\pounds_\xi \beta) \\
&= \int_M \alpha \wedge \pounds_\xi \mathrm{d}\beta = \langle \star\alpha, \pounds_\xi \mathrm{d}\beta \rangle_{L^2} \\
&= \langle (\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{d} \star \star\alpha, \pounds_\xi \mathrm{d}\beta \rangle_{L^2} = \langle \mathrm{d}\alpha, \pounds_\xi \mathrm{d}\beta \rangle_{\mathcal{K}} \\
&= \langle \eta, [\xi, \eta] \rangle_{\mathcal{K}} = -\langle \eta, \mathrm{ad}_\xi(\psi) \rangle_{\mathcal{K}},
\end{aligned}
$$

lo cual prueba el resultado. □

Observación 6.5.4. Notar que la normalidad de $\mathrm{d}\alpha$ es usada en la prueba anterior, pero sin embargo la de $\mathrm{d}\beta$ nunca la usamos. Además, nunca usamos el hecho de que ξ es tangente. Así, $\langle \eta, \psi \rangle_{\mathcal{K}}$ está bien definida para $\eta \in \mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ y $\psi \in \mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol}}(M)$, y tenemos que $\langle \mathrm{ad}_\xi(\eta), \psi \rangle_{\mathcal{K}} = -\langle \eta, \mathrm{ad}_\xi(\psi) \rangle_{\mathcal{K}}$ para todo $\xi \in \mathfrak{X}_{\mathrm{vol}}(M)$. En particular, esto nos permite escribir al producto interno L^2 en $\mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ usando $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}}$. De hecho, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle\eta,\psi\rangle_{L^2} &= \langle \mathrm{i}_\eta \operatorname{vol}, \mathrm{i}_\psi \operatorname{vol}\rangle_{L^2} = \langle \mathrm{d}\star(\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{i}_\eta\operatorname{vol},\mathrm{i}_\psi\operatorname{vol}\rangle_{L^2}\\ &= \langle\star(\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{i}_\eta\operatorname{vol},\delta\mathrm{i}_\psi\operatorname{vol}\rangle_{L^2} + \int_{\partial M}\underbrace{i^*(\star(\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{i}_\eta\operatorname{vol})}_{=0}\wedge i^*(\star\mathrm{i}_\psi\operatorname{vol})\\ &= \langle(\mathrm{d}\star)^{-1}\mathrm{i}_\eta\operatorname{vol},\mathrm{d}\star\mathrm{i}_\psi\operatorname{vol}\rangle_{L^2} = \langle\eta,\operatorname{curl}\psi\rangle_{\mathcal{K}}\end{aligned}$$

donde los términos del borde se anulan pues $\star(\mathrm{d}\star)^{-1}:\mathrm{d}\Omega^1_{\mathrm{n}}(M)\to\Omega^1_{\mathrm{n}}(M)$.

Con este resultado, obtenemos una caracterización de las subálgebras de $\mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ que son totalmente geodésicas con respecto al producto interno L^2.

Teorema 6.5.5. *Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de $\mathfrak{X}^{ex}_{vol,t}(M)$. Entonces, $\mathfrak{h}$ es totalmente geodésica en $\mathfrak{X}^{ex}_{vol,t}(M)$ con respecto al producto interno L^2 si y sólo si $ad_{\mathfrak{h}}(curl\mathfrak{h})\subseteq\mathfrak{h}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{h}^\perp$ el complemento ortogonal de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{X}^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{vol,t}}(M)$. Entonces, $\mathfrak{h}$ es totalmente geodésica si y sólo si $\langle\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h}^\perp),\mathfrak{h}\rangle_{L^2}=\{0\}$. Ahora,

$$\langle\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h}^\perp),\mathfrak{h}\rangle_{L^2} = \langle\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h}^\perp),\operatorname{curl}\mathfrak{h}\rangle_{\mathcal{K}} = -\langle\mathfrak{h}^\perp,\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\operatorname{curl}\mathfrak{h})\rangle_{\mathcal{K}}.$$

Esto prueba que la hipótesis es suficiente. Para ver que es necesaria, debemos probar que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\operatorname{curl}\mathfrak{h})\subseteq\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$, pues de ser así $\langle\mathfrak{h}^\perp,\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\operatorname{curl}\mathfrak{h})\rangle_{\mathcal{K}}=\{0\}$ implica que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\operatorname{curl}\mathfrak{h})\subseteq\mathfrak{h}$. Pero esto es cierto porque $\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$ es un ideal de $\mathfrak{X}_{\mathrm{vol}}(M)$. De hecho, si $\xi\in\mathfrak{X}_{\mathrm{vol}}(M)$ y $\eta\in\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,\,t}}(M)$ entonces

$$\begin{aligned}i^*(\mathrm{i}_{[\xi,\eta]}\operatorname{vol}) &= i^*(\mathcal{L}_\xi\mathrm{i}_\eta\operatorname{vol})\\ &= i^*(\mathrm{d}\mathrm{i}_\xi\mathrm{i}_\eta\operatorname{vol}+\mathrm{i}_\xi\mathrm{d}\mathrm{i}_\eta\operatorname{vol})\\ &= \mathrm{d}\mathrm{i}_{i^*\xi}\underbrace{i^*(\mathrm{i}_\eta\operatorname{vol})}_{=0}+\mathrm{i}_{i^*\xi}\mathrm{d}\underbrace{i^*(\mathrm{i}_\eta\operatorname{vol})}_{=0}=0,\end{aligned}$$

donde $i:\partial M\to M$ denota la inclusión, como siempre. Así, $\mathrm{i}_{[\xi,\eta]}\operatorname{vol}$ es normal, lo cual es equivalente a que $[\xi,\eta]\in\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}(M)$. □

Para finalizar, definiremos la noción de "variedad de contacto" para poder dar un último ejemplo.

Definición 6.5.6. Una *variedad de contacto* (M,θ) es un par donde M es una variedad suave de dimensión impar $2n+1$ y $\theta\in\Omega^1(M)$ es la *forma de contacto*, que cumple que la $(2n+1)$-forma $\theta\wedge(\mathrm{d}\theta)^n$ es nunca nula.

Consideremos una variedad de contacto M de dimensión 3, con forma de contacto $\theta\in\Omega^1(M)$. Para más detalles acerca de variedades de contacto ver [Sm06]. En nuestro contexto, es suficiente tener en cuenta las siguientes propiedades:

- M tiene una estructura natural de variedad riemanniana de contacto,
- la forma de volumen está dada por $\theta \wedge \mathrm{d}\theta$,
- el campo de Reeb está dado por $\xi_R = \theta^\sharp$. Asumiremos estructura de K-contacto (ver [Sm06]), es decir: el campo de Reeb es un campo de Killing. Este es el caso usual, aunque no es siempre cierto.

Consideremos el subgrupo de *difeomorfismos de contacto exactos* $\mathrm{Diff}_\theta^{\mathrm{ex}}(M) = \{\phi \in \mathrm{Diff}(M) : \phi^*\theta = \theta\}$. Se puede ver en [Sm06] que $\mathrm{Diff}_\theta^{\mathrm{ex}}(M)$ es un subgrupo de $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}^{\mathrm{ex}}(M)$. Ahora, usando el Teorema (6.5.5), daremos un nuevo ejemplo de un subgrupo ETG de $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}^{\mathrm{ex}}(M)$.

Corolario 6.5.7. *$\mathrm{Diff}_\theta^{ex}(M)$ es ETG en $\mathrm{Diff}_{vol}^{ex}(M)$ con respecto a la métrica L^2.*

Demostración. El álgebra de Lie de $\mathrm{Diff}_\theta^{\mathrm{ex}}(M)$ está dada por $\mathfrak{X}_{\theta,\mathrm{t}}^{\mathrm{ex}}(M) = \{\xi \in \mathfrak{X}_{\mathrm{vol,t}}^{\mathrm{ex}}(M) : \pounds_\xi\theta = 0\}$. Primero mostraremos que $\pounds_{\mathrm{curl}\xi}\theta = 0$, y luego usaremos el Teorema (6.5.5). Como $\theta = \xi_R^\flat$, y como ξ_R es un campo de Killing, tenemos que $\pounds_{\mathrm{curl}\xi}\theta = [\mathrm{curl}\xi, \xi_R]^\flat$. En el libro de Smolentsev ([Sm06]) podemos encontrar que $\mathrm{curl}\xi = (f - \Delta f)\xi_R + \xi_R \times \mathrm{grad} f$, donde $f = \mathrm{i}_\xi\theta$ es el hamiltoniano de contacto. Recordemos que el campo de Reeb conserva todos los hamiltonianos de contacto. Además, también tenemos que $[\xi_R, \xi_R \times \mathrm{grad} f] = 0$. Entonces, basta con demostrar que $[(f - \Delta f)\xi_R, \xi_R] = 0$. Pero, como f y Δf son ambos contactos hamiltonianos, tenemos que

$$[\xi_R, (f - \Delta f)\xi_R] = \pounds_{\xi_R}(f - \Delta f)\xi_R = (\underbrace{\pounds_{\xi_R} f}_{=0} - \underbrace{\pounds_{\xi_R}\Delta f}_{=0})\xi_R + (f - \Delta f)\underbrace{\pounds_{\xi_R}\xi_R}_{=0}.$$

Así, $[\mathrm{curl}\xi, \eta] \in \mathfrak{X}_{\theta,\mathrm{t}}^{\mathrm{ex}}(M)$ para todo $\eta \in \mathfrak{X}_{\theta,\mathrm{t}}^{\mathrm{ex}}(M)$, y el resultado se sigue del Teorema (6.5.5). □

Con esta serie de ejemplos damos por finalizada la tesis, y esperamos que sea de utilidad como una introducción al tema de los subgrupos totalmente geodésicos y sus aplicaciones a la hidrodinámica y la mecánica en general.

Bibliografía

[AK98] V. I. Arnold. B. A. Khesin. *Topological methods in hydrodynamics*. Volume 125 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1998.

[AMR88] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*. Volume 75 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, Nueva York, second edition, 1988.

[Ar66] V. I. Arnold. *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 16(fasc.1), 319-361, 1966.

[Ar86] V. I. Arnold. *The asymptotic Hopf invariant and its applications*. Selecta Math. Soviet., 5(4):327-345, 1986. Selected translations.

[Ar89] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Second Edition. Springer-Verlag, New York, 1989.

[Az19] D. Aza *Las ecuaciones de Euler-Arnold en el Grupo de Virasoro*. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. 2019.

[BR92] D. Bao. T. Ratiu. *A candidate maximal torus in infinite dimensions*. In Mathematical aspects of classical field theory (Seattle, WA, 1991), volume 132 of Contemp. Math., pages 117-123. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[BR93] D. Bao. T. Ratiu. *On the geometrical origin and the solutions of a degenerate Monge-Ampère equation*. In Differential geometry: partial differential equations on manifolds (Los Ángeles, CA, 1990), volume 54 of Proc. Sympos. Pure Math., pages 55-68. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[BR97] D. Bao. T. Ratiu. *On a maximal torus in the volume-preserving diffeomorphism group of the finite cylinder*. Differential Geom. Appl., 7(3):193-210, 1997.

[Br16] M. Bruveris. *Notes on Riemannian geometry on manifolds of maps*. Lecture notes at summer school "Mathematics of Shapes", Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, 2016.

[Er17] O. Eriksson. *Hodge decomposition for manifolds with boundary and vector calculus*. BSc. thesis, Uppsala University, 2017.

[Gr88] J. Grabowski. *Free subgroups of diffeomorphism groups*. Fund. Math. 131:2, 103–121, 1988.

[Ha82] R. S. Hamilton. *The inverse function theorem of Nash and Moser*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 7(1):65-222, 1982.

[Ho93] H. Hofer. *Estimates for the energy of a symplectic map*. Comment. Math. Helv., 68(1):48-72, 1993.

[HTV02] S. Haller. J. Teichmann. C. Vizman. *Totally geodesic subgroups of diffeomorphisms*. J. Geom. Phys., 42(4):342-354, 2002.

[Kl95] W. P. A Klingenberg. *Riemannian geometry*. Second edition. De Gruyter Studies in Mathematics, 1. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.

[Ko69] G. Köthe.*Topological vector spaces I*. Springer-Verlag, New York, 1969.

[KW09] B. Khesin, R. Wendt. *The geometry of infinite-dimensional groups*. Volume 51 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[Lan94] S. Lang. *Differential and Riemannian manifolds*. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 160. Springer-Verlag, New York, 1995.

[Lar12] G. Larotonda. *Estructuras geométricas para las variedades de Banach*. Colección "Ciencia, Innovación y Tecnología". UNGS, 2012.

[Lee97] J. M. Lee. *Riemannian manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer-Verlag, New York, 1997.

[Lee12] J. M. Lee *Introduction to smooth manifolds*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer-Verlag, New York, 2012.

[Mi84] J. Milnor. *Remarks on infinite-dimensional Lie groups*. Relativité, groupes et topologie II (Les Houches, 1983), 1007-1057, North Holland, Amsterdam, 1984.

[MPMM10] K. Modin, M. Perlmutter, R.I. McLachlan, S. Marsland. *Geodesics on Lie groups: Euler equations and totally geodesic subgroups*. Technical Report, Res. Lett. Inf. Math. Sci., Massey University, vol. 14, pp. 79–106, 2010.

[MR99] J. E. Mardsen, T. S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry*. Volume 17 of Texts in Applied Mathematics. Second edition. Springer-Verlag, New York, 1999.

[Ne05] K. H. Neeb. *Infinite-dimensional Lie groups*. 3rd cycle. Monastir (Tunisie), pp.76, 2005.

[Ne06] K. H. Neeb. *Towards a Lie theory of locally convex groups*. Japanese Journal of Math. 1 (2006), 291-468.

[Ru73] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1973.

[Sc95] G. Schwarz. *Hodge decomposition - A method for solving boundary value problems*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1607, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Sm83] N. K. Smolentsev. *Bi-invariant metric on the group of diffeomorphisms of a three-dimensional manifold*. Siberian Math. J., 24(1):124-130, 1983.

[Sm86] N. K. Smolentsev. *A bi-invariant metric on a group of symplectic diffeomorphisms and the equation* $(\partial/\partial t)\Delta F = \{\Delta F, F\}$. Siberian Math. J., 27(1):120-126, 1986.

[Sm06] N. K. Smolentsev. *Diffeomorphism groups of compact manifolds*. Sovrem. Mat. Prilozh., (37, Geometriya):3-100, 2006.

[Vi99] C. Vizman. *Geodesics and curvature of diffeomorphism groups*. Proceedings of the Fourth International Workshop on Differential Geometry, Brasov, Romania, pages 298-305, 1999.

[Vi08] C. Vizman. *Geodesic equations on diffeomorphism groups*. SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., 4:Paper 030, 22, 2008.

[Wa83] F. W. Warner *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

Glosario

Entrada	Descripción	Lista de páginas
∇	Conexión de Levi-Civita	40
$\wedge$	Producto wedge	16
$\flat$	Operador flat	18
$\sharp$	Operador sharp	18
$\star$	Operador estrella de Hodge	18
$[\cdot,\cdot]$	Corchete de Lie	14
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$	Producto interno L^2 entre k-formas diferenciales	20
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$	Producto interno L^2 entre campos vectoriales	55
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{hel}}$	Helicidad cruzada	89
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1_\alpha}$	Métrica H^1_α en Diff(M)	81
$\langle\cdot,\cdot\rangle_F$	Métrica de Frobenius	52
$\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_{\mathcal{A}}$	Métrica riemanniana asociada a $\mathcal{A}$	46
$\mathcal{A}$	Operador de inercia	46
$Aut(\mathfrak{g})$	Automorfismos del álgebra $\mathfrak{g}$	26
Ad	Representación adjunta de G en $\mathfrak{g}$	26
ad	Representación adjunta de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$	26
Ad^*	Representación coadjunta de G en $\mathfrak{g}^*$	26
ad^*	Representación coadjunta de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}^*$	26
$\text{ad}^\bullet$	Representación de ad en el espacio $\mathfrak{g}^\bullet$	51
$\text{ad}^{\top_{\mathcal{A}}}$	Traspuesta de ad con respecto al producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$	47
$B^k_{dR}(M,E)$	Espacio de k-formas diferenciales exactas	17
C_g	Conjugación por g	23

Entrada	Descripción	Lista de páginas
$C^k_{\mathrm{n}}(M)$	Espacio de k-formas cerradas normales a ∂M	22
curl	Operador curl	19
$C(X,Y)$	Funciones continuas de X en Y	30
$C(X,Y)_c$	Espacio $C(X,Y)$ dotado de la topología compacto-abierta	30
$C^r(M,N)$	Funciones de M en N con r-derivadas continuas	30
$C^\infty(M,E)$	Espacio de funciones suaves de M en E	16
d	Diferencial exterior	17
δ	Operador co-diferencial	18
δ	Derivada logarítmica a izquierda	27, 32
δ^r	Derivada logarítmica a derecha	28, 34
div	Divergencia de un campo	19
$D^k_{\mathrm{t}}(M)$	Espacio de k-formas co-cerradas tangentes a ∂M	22
$\mathrm{Diff}(M)$	Difeomorfismos de M en M	23
$\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(M)$	Difeomorfismos de M que preservan el volumen	54
$\mathrm{Diff}_{\mathrm{iso}}(M)$	Isometrías de M	82
$\mathrm{Diff}_{\mathrm{Sp}}(M)$	Difeomorfismos de M que preservan la estructura simpléctica	86
$\mathrm{Diff}^{\mathrm{ex}}_\theta(M)$	Difeomorfismos de contacto exactos de M	94
evol_G	Mapa evolución de G	29
exp_G	Mapa exponencial de G	29
Exp	Exponencial riemanniana	36, 43
$End(\mathfrak{g})$	Endomorfismos del álgebra $\mathfrak{g}$	26
Fl	Flujo de un campo	35
g	Métrica riemanniana	39
$\mathfrak{g}$	Álgebra de Lie de un grupo G	23
$\mathfrak{g}^*$	Dual del álgebra $\mathfrak{g}$	26
$\mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}$	Dual regular del álgebra $\mathfrak{g}$	27
$\mathfrak{g}^\bullet$	Espacio isomorfo a $\mathfrak{g}^*$	51
grad	Operador gradiente	18
$GL(E)$	Operdores inversibles de E en E	35

Entrada	Descripción	Lista de páginas
$\mathcal{H}^k(M)$	Espacio de k-formas diferenciales armónicas	21
$H^k_{dR}(M, E)$	k-ésimo espacio de cohomología de de-Rham	17
i	Producto interior (o contracción con la métrica)	18
$\boldsymbol{I}$	Matriz asociada al tensor de inercia	53
II	Segunda forma fundamental	65
$\mathcal{K}$	Forma de Killing	71
$\pounds$	Derivada de Lie	18
$\mathcal{L}$	Operador de pairing	51
L_g	Traslación a izquierda en G	23
m_G	Multiplicación en G	23
η_G	Inversión en G	23
NM	Fibrado normal de M	65
$\Omega^k(M, E)$	Espacio de k-formas diferenciales de la variedad M	16
$\Omega^k_{\mathrm{n}}(M)$	Espacio de k-formas diferenciales normales a ∂M	21
$\Omega^k_{\mathrm{t}}(M)$	Espacio de k-formas diferenciales tangentes a ∂M	21
$\boldsymbol{\pi}$	Momento angular	53
R_g	Traslación a derecha en G	23
$T_p(f)$	Diferencial de una función f en un punto p	14
T_pM	Espacio de vectores tangentes a p	13
TM	Fibrado tangente de M	14
T^*M	Fibrado cotangente de M	15
vol	Forma de volumen	18
$\boldsymbol{\omega}$	Velocidad angular	53

Entrada	Descripción	Lista de páginas
$X^\top$	Proyección tangencial de un campo X	65
$X^\perp$	Proyección normal de un campo X	65
$\mathfrak{X}(M)$	Campos suaves de la variedad M	14
$\mathfrak{X}_{\mathrm{t}}(M)$	Campos suaves tangentes a ∂M	14
$\mathfrak{X}_{\mathrm{vol}}(M)$	Campos suaves de divergencia nula	54
$\mathfrak{X}_{\mathrm{vol,\,t}}(M)$	Campos suaves de divergencia nula y tangentes a ∂M	54
$\mathfrak{X}_{\mathrm{iso}}(M)$	Campos de Killing de M	82
$\mathfrak{X}_{\mathrm{iso,t}}(M)$	Campos de Killing tangenciales	82
$\mathfrak{X}_{\mathrm{vol}}^{\mathrm{ex}}(M)$	Campos suaves exactos de divergencia nula	59
$\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$	Campos hamiltonianos de M	86
$Z^k_{dR}(M,E)$	Espacio de k-formas diferenciales cerradas	17