UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

ÁLGEBRAS CUANTIZADAS Y ÁLGEBRAS DE LIE ASOCIADAS A SOLUCIONES CONJUNTISTAS DE LA ECUACIÓN DE YANG-BAXTER

Agustín Muñoz González

Director: Pablo Zadunaisky

Marzo 2020

Índice general

Introducción

La primera aparición de la ecuación cuántica de Yang-Baxter fue en el contexto de la física teórica en un paper de Yang [22] en el año 1967, y en un trabajo de Baxter sobre mecánica estadística [1, 2] en 1972 y 1982 respectivamente.

Resultó ser una de las ecuaciones básicas de la física matemática aunque también juega un rol crucial en tópicos como: teoría de nudos, categorías trenzadas, teoría cuántica, geometría no conmutativa, y muchos otros.

La noción de solución de la ecuación cuántica de Yang-Baxter es la siguiente. Consideremos V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $R : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ un operador lineal. Se dice que R es solución de la ecuación cuántica si satisface la identidad siguiente:

$$R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12}, \tag{1}$$

en $End(V \otimes V \otimes V)$, donde R^{ij} es R actuando en las coordenadas i y j, y la identidad en la coordenada restante.

Existe otra noción de la ecuación de Yang-Baxter conocida como la ecuación clásica. Consideremos V un espacio vectorial y R un endomorfismo de $V \otimes V$ como recién. Entonces R es solución clásica si satisface la relación de trenzas

$$(R \otimes Id)(Id \otimes R)(R \otimes Id) = (Id \otimes R)(R \otimes Id)(Id \otimes R), \tag{2}$$

en $End(V \otimes V \otimes V)$.

Notemos que si llamamos τ al operador flip, $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$, entonces R satisface 2 si y solo sí $R \circ \tau$ satisface 1 si y solo sí $\tau \circ R$ satisface 1.

Muchos científicos han usado resultados de diversas estructuras algebraicas (álgebras de Hopf, categorías Yetter-Drinfeld, acciones de grupos, álgebras de Lie, relaciones en conjuntos, etc.) o cálculos computacionales con el objetivo de producir soluciones para la ecuación. Aunque en los últimos 30 años se han encontrado muchas soluciones y las estructuras algebraicas asociadas han sido muy estudiadas, la clasificación completa de estas es aún un problema abierto.

En 1992 Drinfeld [3] propone el estudio de un tipo mas simple de soluciones, las llamadas soluciones a la ecuación conjuntista de Yang-Baxter. Consideremos un conjunto X y una aplicación $r : X \times X \longrightarrow X \times X$. El par (X, r) es una solución conjuntista si r satisface la ecuación de trenzas 2 en las funciones de $X \times X \times X$, es decir

$$(r \times id)(id \times r)(r \times id) = (id \times r)(r \times id)(id \times r). \tag{3}$$

Una notación útil para este tipo de soluciones es $r(x, y) = (\mathcal{L}_x(y), \mathcal{R}_y(x))$, para ciertas funciones $\mathcal{L}_x, \mathcal{R}_y : X \longrightarrow X$, de modo que queda evidenciado que las funciones subyacentes al operador r dependen de los elementos en los que estamos evaluando. Una solución (X, r) se dice no degenerada siempre que los operadores $\mathcal{L}_x$ y $\mathcal{R}_y$ sean biyectivos para cualesquiera $x, y \in X$, y se dice involutiva siempre que $r^2 = Id$. En este trabajo entendemos por solución a una solución conjuntista no degenerada.

Los primeros trabajos en soluciones conjuntistas no degeneradas e involutivas son los de Etingof, Schedler y Soloviev [4] y Gateva–Ivanova y Van den Bergh [8]. Luego les siguieron otros como Lu, Yan y Zhu [16], Rump [17, 18], Jespers y Okniński [14, 15] y muchos mas.

En 1989 Faddeev, Reshetikhin y Takhtajan [5] presentan las nociones de algebras cuantizadas sobre funciones de V y de $End(V)$, con V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, que son un tipo de álgebras cuánticas asociadas a una solución cuántica. Gateva-Ivanova y Majid [7] logran caracterizar una de esas álgebras para soluciones conjuntistas que satisfacen ciertas propiedades. Nosotros tomaremos la posta y continuaremos con la caracterización de ambas álgebras.

En el primer capítulo veremos algunos resultados y nociones clásicas sobre álgebra lineal, extensiones de Ore, semigrupos de tipo I (definidos por Gateva-Ivanova y Van den Bergh [8]) y álgebras de Lie, que usaremos a lo largo de la tesis.

En el segundo capítulo presentamos las definiciones y primeras propiedades de las soluciones conjuntistas (por el resto de la introducción las llamaremos 'solución') de la ecuación de Yang-Baxter y la relación entre estas y las soluciones clásicas. Definiremos una relación de equivalencia en el conjunto subyacente a una solución y daremos las nociones de retracción y de nivel de multipermutación. Además daremos diversos ejemplos para mostrar al lector la variedad de soluciones que existen.

En el tercer capítulo presentamos la noción de álgebra cuantizada de funciones sobre V, donde V es el $\mathbb{C}$-espacio vectorial generado por una solución, que fue definida por Faddeev, Reshetikhin y Takhtajan [5] y que notaremos $A(X, r)$. Se trata de una estructura algebraica muy ligada con cierto semigrupo inducido por la solución. La idea será entender el comportamiento de este álgebra y desarrollar una teoría monomial que facilite el manejo de la misma cuando sea posible. Daremos varios ejemplos que inducen a pensar que bajo ciertas hipótesis tal teoría puede resultar exitosa. Hacia el final del capítulo asociamos a una solución el álgebra cuantizada de funciones sobre $End(V)$ también definida por Faddeev, Reshetikhin y Takhtajan [5], que notaremos $Q(X, r)$. Veremos algunas propiedades de $Q(X, r)$ aunque no analizaremos con profundidad el tema pues no es el objetivo primordial del trabajo.

En el cuarto capítulo presentamos el álgebra de Lie asociada a una solución, denotada $\mathfrak{g}(X, r)$. Se trata de otra estructura algebraica asociada a una solución (X, r) y por medio de la cual intentaremos obtener información sobre el comportamiento monomial del álgebra $A(X, r)$ definida en el Capítulo 3. Observaremos que las mismas hipótesis que en el capítulo anterior nos garantizaban información sobre $A(X, r)$, en este contexto nos garantizan que $\mathfrak{g}(X, r)$ es abeliana. Además daremos varios ejemplos que inducen a pensar que si $\mathfrak{g}(X, r)$ no es abeliana entonces tampoco es resoluble. Finalmente proponemos seguir estudiando la relación entre $\mathfrak{g}(X, r)$ y el comportamiento monomial de $A(X, r)$, además del desarrollo de otras técnicas para caracterizar $\mathfrak{g}(X, r)$.

El quinto capítulo es un apéndice en el cual definimos y explicamos las funciones del sistema GAP (Groups, Algorithms and Programming) que utilizamos a lo largo del trabajo. GAP es un sistema algebraico computacional especialmente orientado a teoría de grupos, aunque también es útil para otras ramas de la matemática. Utilizaremos especialmente el paquete YangBaxter, desarrollado por Vendramin y Konovalov, que no sólo provee herramientas para construir soluciones conjuntistas de la ecuación de Yang-Baxter sino que posee en su base de datos un gran número de soluciones. De hecho, este paquete será nuestro principal proveedor de ejemplos.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo daremos las nociones y propiedades básicas de álgebra lineal, extensiones de Ore, semigrupos de tipo I y álgebras de Lie, que usaremos a lo largo del trabajo.

1.1. Álgebra lineal

En esta sección mencionaremos dos lemas que garantizan la diagonalización simultánea de una familia de endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión finita y un lema que relaciona los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales $End(V \otimes V)$ y $End(V) \otimes End(V)$.

En primer lugar tenemos el resultado que asegura que todo endomorfismo diagonalizable de un espacio de dimensión finita sigue siendo diagonalizable al restringirlo a un subespacio A-invariante.

Lema 1.1.1. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita y sean $A : V \longrightarrow V$ un operador lineal diagonalizable y W un subespacio A-invariante de V. Entonces la restricción $A|_W : W \longrightarrow W$ es diagonalizable.

Demostración. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ los distintos autovalores de A y escribimos $V = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} E_{\lambda_i}$, con E_{λ_i} el autoespacio asociado a λ_i en V. Para $w \in W$, tenemos $w = v_1 + \cdots + v_r$ donde $v_i \in E_{\lambda_i}$.

Afirmamos que cada v_i está en W. Como W es A-invariante, $A^k(w) \in W$ para todo $k \geq 0$ y podemos escribir $A^k w = \lambda_1^k v_1 + \cdots + \lambda_r^k v_k$. Tomando $k = 0, 1, \dots, r-1$ tenemos la siguiente ecuación en V^r:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ Aw \\ \vdots \\ A^{r-1}w \end{bmatrix}.$$

El vector de la derecha está en W^r (subespacio de V^r) y la matriz de $r \times r$ de la izquierda es inversible (matriz de Vandermonde con λ_i distintos). Por lo tanto el vector de la izquierda está en W^r, por lo que cada v_i lo está.

Luego $W = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \left(E_{\lambda_i} \cap W \right)$ y $A|_W : W \longrightarrow W$ es diagonalizable. $\square$

Tenemos el siguiente lema que garantiza la diagonalización simultánea de todo conjunto de operadores lineales que conmuten entre ellos.

Lema 1.1.2. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita y sean $A_1, \ldots, A_r$ endomorfismos diagonalizables sobre V. Entonces $A_1, \ldots, A_r$ son simultáneamente diagonalizables si y solo sí conmutan entren ellos.

Demostración. Supongamos primero que los morfismos conmutan entre sí. La demostración será por inducción en r. El resultado está claro si $r = 1$, por lo que suponemos $r \geq 2$. Como A_r es diagonalizable sobre V, V es la suma directa de los autoespacios de A_r. Sean λ un autovalor de A_r y E_λ el autoespacio asociado a λ en V. El hecho de que los A_i conmuten implica que E_λ es A_i-invariante, pues dado $v \in E_\lambda$ tenemos

$$A_r(A_i v) = A_i(A_r v) = A_i(\lambda v) = \lambda(A_i v),$$

para todo $1 \leq i \leq r-1$. Es decir, cada A_i se restringe a un operador lineal sobre E_λ y los operadores lineales $A_1|_{E_\lambda}, \ldots, A_{r-1}|_{E_\lambda}$ conmutan pues conmutan como operadores sobre V. Por el Lema 1.1.1 las restricciones $A_1|_{E_\lambda}, \ldots, A_{r-1}|_{E_\lambda}$ son cada una diagonalizables sobre E_λ. Dado que estos operadores son $r-1$ y conmutan, por hipótesis inductiva existe una base de E_λ formada por autovectores simultáneos de $A_1|_{E_\lambda}, \ldots, A_{r-1}|_{E_\lambda}$. Los elementos de esta base son también autovectores de $A_r|_{E_\lambda}$ por definición de E_λ. Finalmente como $A_1|_{E_\lambda}, \ldots, A_r|_{E_\lambda}$ son todos diagonalizables y V es la suma directa de los autoespacios E_λ de A_r, juntando las bases halladas para cada autovalor obtenemos una base de V formada por autovectores simultáneos.

Supongamos ahora que los morfismos son simultáneamente diagonalizables y sea $\mathcal{B}$ una base formada por autovectores simultáneos. Basta ver que los morfismos conmutan sobre la base $\mathcal{B}$. En efecto, sean $v \in \mathcal{B}$ y $\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{C}$ los correspondientes autovalores de A_i y A_j respectivamente, para ciertos $1 \leq i, j \leq r$, entonces

$$A_i A_j(v) = A_i(\lambda_j v) = \lambda_j A_i(v) = \lambda_j \lambda_i v = \lambda_i(\lambda_j v) = \lambda_i(A_j v) = A_j(\lambda_i v) = A_j A_i(v).$$

□

Por último damos un lema que prueba que los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales $End(V \otimes V)$ y $End(V) \otimes End(V)$ son isomorfos.

Lema 1.1.3. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces $End(V \otimes V) \simeq End(V) \otimes End(V)$.

Demostración. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Consideremos el morfismo $\Psi : End(V) \times End(V) \longrightarrow End(V \otimes V)$ tal que $\Psi(g_1, g_2)(v_i \otimes v_j) = g_1(v_i) \otimes g_2(v_j)$. Como Ψ es bilineal, por la propiedad universal del producto tensorial podemos tomar $\Psi : End(V) \otimes End(V) \longrightarrow End(V \otimes V)$ tal que $\Psi(g_1 \otimes g_2)(v_i \otimes v_j) = g_1(v_i) \otimes g_2(v_j)$.

Por otro lado, si llamamos $E_j^i : V \longrightarrow V$ al morfismo dado por $v_i \mapsto v_j$, entonces $\{E_j^i\}_{1 \leq i,j \leq n}$ es base de $End(V)$. Con lo cual es claro que $\{E_j^i \otimes E_l^k\}_{1 \leq i,j,k,l \leq n}$ es base de $End(V) \otimes End(V)$. Análogamente tenemos que $\{E_{j,k}^{i,l}\}_{1 \leq i,j,k,l \leq n}$ es base de $End(V \otimes V)$ con $E_{j,k}^{i,l}(v_i \otimes v_l) = v_j \otimes v_k$. Como Ψ manda $E_j^i \otimes E_l^k$ en $E_{j,k}^{i,l}$, resulta isomorfismo.

□

1.2. Extensiones de Ore

A continuación definimos las extensiones de Ore y extensiones de Ore iteradas. Seguimos el enfoque de [9].

Sean R un anillo, σ un automorfismo de R y x una indeterminada. Sea S el conjunto de todas las expresiones formales $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $a_i \in R$. A menudo es conveniente escribir tal expresión como $\sum_i a_ix^i$, dejando sobreentendido que la suma es sobre una secuencia finita de enteros no negativos i. Definimos una operación de suma en S por

$$\big(\sum_i a_ix^i\big) + \big(\sum_i b_ix^i\big) = \sum_i (a_i + b_i)x^i.$$

En cuanto a la multiplicación, quisieramos que los coeficientes se multipliquen con la operación usual de R y que las potencias de x cumplan la regla de los exponentes. Tomamos el producto de un elemento $a \in R$ con una potencia x^i como el monomio ax^i. Definimos $xa = \sigma(a)x$ e iteramos esa regla para obtener $x^ia = \sigma^i(a)x^i$. Esto nos guía para definir la siguiente multiplicación en S:

$$\big(\sum_i a_ix^i\big)\big(\sum_j b_jx^j\big) = \sum_{i,j} (a_i\sigma^i(b_j))x^{i+j}.$$

Observación 1.2.1. La suma y el producto así definidos hacen de S un anillo, y cuando identificamos R con el conjunto de elementos de S que no involucran potencias positivas de x, R se convierte en subanillo de S.

Una descripción más formal de S es la siguiente. Notemos por $\overline{S}$ al conjunto de secuencias infinitas $a = (a_0, a_1, \ldots)$ de elementos de R tales que $a_i = 0$ salvo para finitos índices i. Para cualesquiera elementos $a, b \in \overline{S}$ definimos $a + b$ y ab como las secuencias en $\overline{S}$ dadas por

$$(a + b)_i = a_i + b_i; \qquad (ab)_k = \sum_{i+j=k} a_i\sigma^i(b_j),$$

para todo $i, k \in \mathbb{N}$.

Observación 1.2.2. Estas operaciones proveen a $\overline{S}$ de una estructura de anillo, y aún más $\overline{S} \simeq S$ vía la asignación $a \mapsto \sum_i a_ix^i$. Por lo que, $\sum_i a_ix^i = \sum_i b_ix^i$ si y solo sí $a_i = b_i$ para todo i.

Usando el lenguaje de álgebra lineal, podemos decir que los elementos $1, x, x^2, \ldots$ en S son linealmente independientes sobre R. Como todo elemento de S es una combinación lineal de estas potencias, S es un R-módulo libre.

Definición 1.2.3. Sean R un anillo y σ un automorfismo de R. Escribimos

$$S = R[x, \sigma]$$

para indicar que

(a) S es un anillo que contiene a R como subanillo;

(b) x es un elemento de S;

(c) S es un R-módulo libre con base $\{1, x, x^2, \dots\}$.

(d) $xr = \sigma(r)x$, para todo $r \in R$;

Siempre que $S = R[x, \sigma]$ decimos que S es una *extensión de Ore sobre R*.

Análogamente se define la extensión de Ore sobre un álgebra R, reemplazando las condiciones de anillo y subanillo por las de álgebra y subálgebra, respectivamente. En tal caso, S resulta un álgebra.

Veamos ahora un ejemplo.

Ejemplo 1.2.4. Sea $R = \mathbb{C}[x]$ el anillo de polinomios ordinario sobre $\mathbb{C}$. Dado un escalar no nulo $q \in \mathbb{C}$ podemos definir un automorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras sobre R dado por $\sigma(y) = qy$, es decir, $\sigma(p(y)) = p(qy)$ para $p \in R$. Si tomamos $S = R[x, \sigma]$, entonces $xy = \sigma(y)x = qyx$ es la regla de conmutación en S.

Tenemos la propiedad universal de las extensiones de Ore, Lema 1.11 de [9].

Lema 1.2.5. Sean R un anillo (resp. álgebra), σ un automorfismo de R y $S = R[x, \sigma]$. Supongamos que existe un anillo (resp. álgebra) T, un morfismo de anillos (resp. de álgebras) $\Phi : R \longrightarrow T$ y un elemento $y \in T$ tal que

$$y\Phi(r) = \Phi(\sigma(r))y, \text{ para todo } r \in R.$$

Entonces existe un único morfismo de anillos (resp. de álgebras) $\Psi : S \longrightarrow T$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, hook] & T \\ S \arrow[ur, dashed, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

Es decir, tal que $\Psi|_R = \Phi$ y $\Psi(x) = y$.

Veamos un ejemplo clásico de extensión de Ore.

Observación/Definición 1.2.6. Sea $q \in \mathbb{C}^{\times}$. El *anillo coordenado cuantizado de $\mathbb{C}^2$* o *álgebra de polinomios torcidos en 2 variables* (correspondiente a la elección de q) es una $\mathbb{C}$-álgebra, denotada como $\mathbb{C}_q[x, y]$ o $\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)$, presentada por dos generadores x e y y la relación $xy = qyx$. Es decir,

$$\mathbb{C}_q[x, y] = \mathbb{C}\langle x, y | xy = qyx\rangle.$$

Otra forma de escribir a $\mathbb{C}_q[x, y]$ es

$$\mathbb{C}_q[x, y] = \mathbb{C}[y][x, \sigma],$$

con $\mathbb{C}[y]$ el anillo de polinomios usual y σ el automorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras sobre $\mathbb{C}[y]$ dado por $\sigma(y) = qy$. Es decir, $\mathbb{C}_q[x, y]$ es una extensión de Ore sobre $\mathbb{C}[x]$.

Observación 1.2.7. Lo que suponemos tácitamente es que x e y no satisfacen relaciones extras en la definición de $\mathbb{C}_q[x,y]$, es decir, no satisfacen ninguna otra relación mas allá de las consecuencias de $xy = qyx$. La forma de precisar más esta idea de que no haya relaciones extras es la de empezar con un álgebra libre y cocientar por las relaciones mínimas necesarias. Esto es, si $\mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ es el álgebra libre en dos letras X e Y (que no satisfacen ninguna relación), y $\langle XY - qYX\rangle$ denota el ideal de $\mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ generado por $XY - qYX$, entonces estamos definiendo

$$\mathbb{C}_q[x,y] = \mathbb{C}\langle X, Y\rangle / \langle XY - qYX\rangle.$$

Los elementos x e y en $\mathbb{C}_q[x,y]$ son las coclases de X e Y respectivamente.

Tenemos una noción que generaliza las extensiones de Ore, que es la de extensiones iteradas de Ore.

Definición 1.2.8. Sean R un anillo y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ automorfismos de R. Escribimos

$$S = R[x_1, \sigma_1] \ldots [x_n, \sigma_n]$$

para indicar que

(a) $R[x_1, \sigma_1]$ es una extensión de Ore sobre R.

(b) $R[x_1, \sigma_1] \ldots [x_{i+1}, \sigma_{i+1}]$ es una extensión de Ore sobre $R[x_1, \sigma_1] \ldots [x_i, \sigma_i]$

Siempre que $S = R[x_1, \sigma_1] \ldots [x_n, \sigma_n]$ decimos que S es una extensión de Ore *iterada* sobre R.

Análogamente se define la extensión de Ore iterada sobre un álgebra R. En tal caso, S resulta un álgebra.

Veamos un ejemplo clásico de extensión de Ore iterada.

Observación/Definición 1.2.9. Una *matriz multiplicativa antisimétrica* sobre $\mathbb{C}$ es una matriz $\mathbf{q} = (q_{i,j})$ de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}^\times$ tal que $q_{i,i} = 1$ para todo i y $q_{i,j} = q_{j,i}^{-1}$ para todo i, j. Dada una matriz así, el correspondiente *anillo cuantizado coordinado multiparamétrico del n-espacio afín*, o simplemente *n-espacio multiparamétrico cuántico*, es la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbb{C}_{\mathbf{q}}[x_1, \ldots, x_n]$ presentada por los generadores $x_1, \ldots, x_n$ y relaciones $x_i x_j = q_{i,j} x_j x_i$ para todo i, j. Es decir,

$$\mathbb{C}_{\mathbf{q}}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n | x_i x_j = q_{i,j} x_j x_i \text{ para } 1 \leq i, j \leq n\rangle.$$

Otra notación usual para este álgebra es $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n)$.

Notar que la condición $q_{i,j} = q_{j,i}^{-1}$ implica que $\mathbb{C}_{\mathbf{q}}[x_1, \ldots, x_n]$ es un álgebra íntegra. Cuando $\mathbf{q} = (q_{i,j})$ no satisface esa condición se la llama simplemente *álgebra de polinomios torcidos* sobre $\mathbb{C}$.

Al igual que en el caso $\mathbb{C}_q[x,y]$, el anillo $\mathbb{C}_{\mathbf{q}}[x_1, \ldots, x_n]$ puede pensarse como una extensión de Ore iterada sobre $\mathbb{C}[x_1]$ de la forma siguiente. Lo vemos por inducción en

n. Si $n = 2$ estamos en el caso $\mathbb{C}_q[x_1, x_2] = \mathbb{C}[x_1][x_2, \sigma]$ de la Observación/Definición 1.2.6. Si $n > 2$

$$\mathbb{C}_{\mathbf{q}}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{C}_{\mathbf{q}'}[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n, \sigma_n],$$

para cierta $\mathbf{q}' \in \mathbb{C}^{n-1 \times n-1}$ y donde $\sigma(x_i x_n) = \mathbf{q}_{i,n} x_n x_i$. Por hipótesis inductiva se tiene

$$\mathbb{C}_{\mathbf{q}'}[x_1, \ldots, x_{n-1}] = \mathbb{C}[x_1][x_2, \sigma_2] \ldots [x_{n-1}, \sigma_{n-1}].$$

Por lo que finalmente,

$$\mathbb{C}_{\mathbf{q}}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{C}[x_1][x_2, \sigma_2] \ldots [x_{n-1}, \sigma_{n-1}][x_n, \sigma_n].$$

Dos ejemplos más son los siguientes.

Ejemplo 1.2.10. Sean $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y $\mathbf{q}$ tal que $q_{(i,j)} = 1$ para cada $1 \leq i, j \leq n$. Las relaciones quedan $\{x_i x_j - x_j x_i\}_{1 \leq i,j \leq n}$ y se tiene $\mathbb{C}_{\mathbf{q}}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, i.e. el anillo de polinomios ordinario sobre $\mathbb{C}$ en n variables.

Ejemplo 1.2.11. Sean $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y $\mathbf{q}$ dada por $q_{(i,j)} = -1$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Las relaciones son $\{x_i x_j + x_j x_i\}_{1 \leq i,j \leq n}$. Entonces $\mathbb{C}_{\mathbf{q}}[x_1, \ldots, x_n]$ es el álgebra exterior en n variables sobre $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C}_{\mathbf{q}}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n | x_i x_j = -x_j x_i]$.

1.3. Semigrupos de tipo *I*

Veremos aquí la noción de semigrupos de tipo I que fue presentada por primera vez por Gateva-Ivanova y Van den Bergh [8], que a su vez se basaron en un trabajo de Tate y Van den Bergh [20]. A lo largo de la sección suponemos que todos los semigrupos considerados tienen elemento neutro.

Empecemos tomando $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de generadores y el semigrupo $S = \langle X | Rel \rangle$ donde Rel es un conjunto de relaciones cuadráticas

$$Rel = \{x_i x_j = u_{j,i} | 1 \leq j < i \leq n\},$$

que satisface:

Condición (*).

(a) $u_{j,i} = x_{j'} x_{i'}$, $j' < i'$, $j' < i$;

(b) A medida que variamos (i, j), cada par (i', j') ocurre exáctamente una vez;

(c) Las superposiciones $x_k x_i x_j$ para $k > i > j$ no aportan nuevas relaciones en S.

Definimos lo que significa que un semigrupo sea de tipo I.

Definición 1.3.1. Sean $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito, S el semigrupo generado por X y $\mathcal{U}$ el semigrupo libre conmutativo generado por un conjunto de variables $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Decimos que S es de *tipo I* (a izquierda) si existe una biyección $v : \mathcal{U} \longrightarrow S$ (una *I-estructura*) tal que $v(1) = 1$ y tal que para todo $a \in \mathcal{U}$

$$\{v(u_1 a), \ldots, v(u_n a)\} = \{x_1 v(a), \ldots, x_n v(a)\}. \tag{1.1}$$

Tenemos la observación siguiente.

Observación 1.3.2. Asumamos que S es de tipo I con I-estructura v. La ecuación 1.1 implica que para cada $a \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe un único $x_{a,i} \in X$ tal que

$$x_{a,i}v(a) = v(au_i),$$

y $X = \{x_{a,i} | i = 1, \ldots, n\}$.

Por último el siguiente lema asegura que si S es de tipo I, entonces es graduado y obtenemos una descomposición del álgebra de semigrupo $\mathbb{C}[S]$.

Lema 1.3.3. Sea S un semigrupo de tipo I. Entonces S es graduado y tenemos la descomposición

$$S = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} S_k,$$

con $S_k = \{x_{i_1} \ldots x_{i_k} | i_j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Más aún, la estructura graduada de S induce

$$\mathbb{C}[S] = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{C}S_k,$$

con $dim(\mathbb{C}S_k) = dim(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_k) = \binom{n+k-1}{k}$.

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ un semigrupo libre conmutativo generado por el conjunto de variables $\{u_1, \ldots, u_n\}$ y $v : \mathcal{U} \longrightarrow S$ una I-estructura. Escribimos $\mathcal{U}_k = \{u_{i_1} \ldots u_{i_k} | i_1 \leq \cdots \leq i_k \in \{1, \ldots, n\}\}$ y afirmamos que v induce una biyección

$$v|_{\mathcal{U}_k} : \mathcal{U}_k \longrightarrow S_k, \; u_{i_1} \ldots u_{i_k} \mapsto v(u_{i_1} \ldots u_{i_k}).$$

Debemos ver en primer lugar que está bien definida, es decir, que $v(\mathcal{U}_k) \subset S_k$, y luego que es biyectiva.

Lo probamos por inducción en k. Supongamos que $k = 1$. Es claro que $v(u_i) \in S_1$ para todo i. Además, como v es biyectiva, $v|_{\mathcal{U}_k}$ es inyectiva. Resta ver la sobreyectividad. Dado $x \in S_1$, por la Observación 1.3.2 como $X = \{x_{a,i} | i = 1, \ldots, n\}$, para $a = 1$ existirá $1 \leq i \leq n$ tal que $x = x_{1,i} = v(u_i)$.

Supongamos $k > 1$. Debemos ver que $v(\mathcal{U}_{k+1}) \subset S_{k+1}$. Sea $u_{i_1} \ldots u_{i_{k+1}} \in \mathcal{U}_{k+1}$ y llamemos $u' = u_{i_2} \ldots u_{i_{k+1}}$, entonces

$$v(u_{i_1} \ldots u_{i_{k+1}}) = v(u_{i_1} u').$$

Por la ecuación 1.1 como

$$\{v(u_1 u'), \ldots, v(u_{i_1} u'), \ldots, v(u_n u')\} = \{x_1 v(u'), \ldots, x_n v(u')\},$$

existe $1 \leq j \leq n$ tal que $v(u_{i_1} u') = x_j v(u')$. Por hipótesis inductiva como $u' \in \mathcal{U}_k$ entonces

$$v(u_{i_1} \ldots u_{i_{k+1}}) = v(u_{i_1} u') = x_j v(u') \in S_{k+1},$$

como queríamos ver.

La inyectividad se sigue nuevamente de la biyectividad de v. Falta ver la sobreyectividad. Sea $x_{i_1} \dots x_{i_{k+1}} \in S_{k+1}$. Por hipótesis inductiva existe $u \in \mathcal{U}_k$ tal que $v(u) = x_{i_2} \dots x_{i_{k+1}}$. De nuevo aplicando la ecuación 1.3.2, como

$$\{x_1 v(u), \dots, x_{i_1} v(u), \dots, x_n v(u)\} = \{v(u_1 u), \dots, v(u_n u)\},$$

existe $1 \leq j \leq n$ tal que $x_{i_1} v(u) = v(u_j u)$, como queríamos.

Por otro lado, es claro que S puede descomponerse como

$$S = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} S_k, \tag{1.2}$$

y que la aplicación

$$S_k \times S_l \longrightarrow S_{k+j}, \ (x_{i_1} \dots x_{i_k}, x_{j_1} \dots x_{j_l}) \mapsto x_{i_1} \dots x_{i_k} x_{j_1} \dots x_{j_l}$$

está bien definida para todo $k, j \in \mathbb{N}$. Entonces S resulta graduado y la descomposición 1.2 induce

$$\mathbb{C}[S] = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{C}S_k.$$

Finalmente, como $|S_k| = |\mathcal{U}_k|$, tenemos

$$dim(\mathbb{C}S_k) = dim(\mathbb{C}\mathcal{U}_k) = dim(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

$\square$

1.4. Álgebras de Lie

En esta sección repasaremos algunas nociones básicas y resultados clásicos de la teoría de álgebras de Lie. Nos basamos en [12].

Empecemos por la definición de álgebra de Lie.

Definición 1.4.1. Sea $\mathfrak{g}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, con una operación $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ denotada $(x, y) \mapsto [x, y]$ llamada el *corchete* de x e y. Decimos que $(\mathfrak{g}, [,])$ (o sólo $\mathfrak{g}$) es un *álgebra de Lie* si satisface

(1) El corchete es un operador bilineal;

(2) Para todo $x \in \mathfrak{g}$ se tiene $[x, x] = 0$;

(3) Para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$ se satisface la *Identidad de Jacobi*

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Notar que los axiomas (1) y (2) aplicados a $[x + y, x + y]$, implican anticonmutatividad: (2′) $[x, y] = -[y, x]$. Si $char(\mathbb{K}) \neq 0$ está claro que (2′) implica (2). En general nuestro cuerpo base será $\mathbb{C}$.

Recordemos la noción de subálgebra de un álgebra de Lie.

Definición 1.4.2. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$. Un subespacio $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$ se llama *subálgebra de Lie* si para todo $x, y \in \mathfrak{g}'$, $[x, y] \in \mathfrak{g}'$. En particular, $(\mathfrak{g}', [\ ,\ ]|_{\mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}'})$ es un álgebra de Lie con las operaciones heredadas.

Ejemplo/Definición. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita n, denotamos por $End(V)$ el conjunto de transformaciones lineales $V \to V$. Como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, $End(V)$ tiene dimensión n^2, y $End(V)$ es un anillo respecto del producto habitual. Definimos una nueva operación en $End(V)$ dada por $[f, g] = fg - gf$. Con esta operación $End(V)$ resulta un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$: las condiciones (1) y (2) son inmediatas, mientras que (3) se sigue por un breve cálculo. Con el fin de distinguir esta nueva estructura de $End(V)$ de la estructura asociativa usual se define el *álgebra lineal general* $\mathfrak{gl}(V) = (End(V), [\ ,\ ])$.

1.4.1. Ideales y morfismos

Repasemos las nociones de ideales y morfismos de álgebras de Lie. Empecemos por definir la noción de ideal.

Definición 1.4.3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$. Un subespacio I de $\mathfrak{g}$ se dice un *ideal* de $\mathfrak{g}$ si para todo $x \in \mathfrak{g}, y \in I$ se tiene $[x, y] \in I$.

Los ideales de las álgebras de Lie juegan un rol análogo a los subgrupos normales en la teoría de grupos y a los ideales biláteros en la teoría de anillos: se obtienen como núcleos de morfismos (ver 1.4.6).

Observación/Definición 1.4.4. Obviamente el 0 (el subespacio que consiste sólo del vector cero) y $\mathfrak{g}$ son ideales de $\mathfrak{g}$. Un ideal menos trivial es el *centro de* $\mathfrak{g}$, $Z(\mathfrak{g}) = \{z \in \mathfrak{g} | [x, z] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}\}$. Otro ejemplo importante es el *álgebra derivada* de $\mathfrak{g}$, denotada $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, que es análogo al subgrupo conmutador de un grupo. Es decir, consiste de todas las combinaciones lineales de conmutadores $[x, y]$, y es claramente un ideal.

Si $\mathfrak{g}$ no tiene ideales excepto el 0 y el mismo $\mathfrak{g}$, se dice que $\mathfrak{g}$ es *simple*. Notar que $\mathfrak{g}$ simple implica $Z(\mathfrak{g}) = 0$ y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Observación 1.4.5. La construcción del cociente de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ por un ideal I es análoga a la de la teoría de anillos: como espacio vectorial $\mathfrak{g}/I$ es el espacio cociente, donde la multiplicación de Lie correspondiente está dada por $[x+I, y+I] = [x, y] + I$.

Damos la definición de un morfismo de álgebras de Lie.

Definición 1.4.6. Sean $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ dos álgebras de Lie sobre $\mathbb{C}$. Un *morfismo de álgebras de Lie* es una transformación lineal $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ que satisface $\Phi([x, y]) = [\Phi(x), \Phi(y)]$, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Decimos que Φ es *monomorfismo* si $Ker(\Phi) = 0$, *epimorfismo* si $Im(\Phi) = \mathfrak{g}'$ e *isomorfismo* si es monomorfismo y epimorfismo.

Recordemos lo que es una representación de un álgebra de Lie.

Definición 1.4.7. Una *representación* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$ es un morfismo $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ con V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Un ejemplo importante de representación es la representación adjunta $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dada por $x \mapsto ad_x$ con $ad_x(y) = [x, y]$. Es claro que ad_x es una transformación lineal, veamos que además preserva el corchete.

$$\begin{aligned}
[ad_x, ad_y](z) &= ad_x ad_y(z) - ad_y ad_x(z) \\
&= ad_x([y, z]) - ad_y([x, z]) \\
&= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\
&= [x, [y, z]] + [[x, z], y] && (L_2') \\
&= [[x, y], z] && (L_3) \\
&= ad_{[x,y]}(z).
\end{aligned}$$

Notar que $Ker(ad) = Z(\mathfrak{g})$. Luego si $\mathfrak{g}$ es simple, entonces $Z(\mathfrak{g}) = 0$ y $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es un monomorfismo. Esto significa que toda álgebra de Lie simple es isomorfa a un álgebra de Lie lineal.

1.4.2. Resolubilidad y nilpotencia

Es natural estudiar un álgebra de Lie a partir de sus ideales. Para ello definiremos dos secuencias de ideales del álgebra que nos aportarán información sobre ella.

Resolubilidad

Definición 1.4.8. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$. Se definen $\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^{(2)} := [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}], \ldots, \mathfrak{g}^{(i)} := [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}]$. La secuencia $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^{(i)} \supset \mathfrak{g}^{(i+1)} \supset \cdots$ se llama la *serie derivada* de $\mathfrak{g}$. Decimos que $\mathfrak{g}$ es *resoluble* si existe $n \in \mathbb{N}$ para el cual $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$.

Por ejemplo, las álgebras de Lie abelianas son claramente resolubles mientras que las álgebras de Lie simples no lo son.

Nilpotencia

Definición 1.4.9. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$. Se definen $\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}](= \mathfrak{g}^{(1)}), \mathfrak{g}^2 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1], \ldots, \mathfrak{g}^{i+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i]$. La secuencia $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^i \supset \mathfrak{g}^{i+1} \supset \cdots$ se llama la *serie central descendente* de $\mathfrak{g}$. Se dice que $\mathfrak{g}$ es *nilpotente* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^n = 0$.

Notar que toda álgebra abeliana es nilpotente.

Observación 1.4.10. Es claro que $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^i$ para todo i, por lo que nilpotencia implica resolubilidad.

Podemos expresar la noción de nilpotencia a partir de los elementos de $\mathfrak{g}$ de la siguiente manera.

Observación/Definición 1.4.11. Dado $x \in \mathfrak{g}$ decimos que es *ad-nilpotente* si $ad_x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es un morfismo nilpotente. Entonces la nilpotencia de $\mathfrak{g}$ puede escribirse como: para cierto $n \in \mathbb{N}$, $ad_{x_1} ad_{x_2} \dots ad_{x_n}(y) = 0$ para todo $x_i, y \in \mathfrak{g}$. En particular, x es ad-nilpotente pues $(ad_x)^n = 0$. Por lo tanto, si $\mathfrak{g}$ es nilpotente todo elemento de $\mathfrak{g}$ es ad-nilpotente.

Tenemos el Teorema de Engel que asegura que la afirmación recíproca es cierta también.

Teorema. (Engel) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$. Si todo elemento de $\mathfrak{g}$ es ad-nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.

Existe una versión equivalente de este teorema. Primero una definición.

Definición 1.4.12. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$. Una *bandera* en V es una cadena de subespacios $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ con $dim(V_i) = i$. Dado $x \in \mathfrak{g}$ decimos que x *estabiliza* la bandera si $x \cdot V_i \subset V_i$ para todo i.

Y ahora damos la formulación equivalente del Teorema de Engel.

Teorema. Sea $\mathfrak{gl}(V)$ el álgebra de Lie de los endomorfismos de un espacio vectorial V de dimensión finita n y sea $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra. Son equivalentes

I. Cada $A \in \mathfrak{g}$ es un endomorfismo nilpotente de V;

II. Existe una bandera (V_i) en V estable por $\mathfrak{g}$ tal que $x \cdot V_i \subset V_{i-1}$ para todo i. Es decir, existe una base de V tal que todo operador de $\mathfrak{g}$ es triangular superior respecto de esa base.

Capítulo 2

Soluciones conjuntistas de la ecuación de Yang-Baxter

En este primer capítulo analizamos las nociones básicas sobre lo que se conoce como soluciones conjuntitas de la ecuación de Yang-Baxter. Veremos algunos ejemplos clásicos como las soluciones flip y las soluciones de permutación. Definiremos la retracción y el nivel de multipermutación de una solución conjuntista. Analizaremos la construcción de otras soluciones conjuntistas a partir de una fijada. Y por último daremos un breve repaso de las definiciones de brazas, brazas torcidas y conjuntos cíclicos, que son construcciones en las que se basan las soluciones del paquete Yang-Baxter del sistema GAP que utilizamos en los ejemplos de todo el trabajo.

2.1. Definiciones y ejemplos

En esta sección veremos la definición de solución conjuntista de la ecuación de Yang-Baxter. Definiremos además el $\mathbb{C}$-espacio vectorial generado por una solución conjuntista, mediante el cual relacionaremos las nociones de solución conjuntista y de solución clásica de la ecuación de Yang-Baxter, y el cual nos permitirá hablar de ciertas estructuras algebraicas que se le asocian a una solución conjuntista en los capítulos siguientes. Y finalmente daremos algunos ejemplos de soluciones conjuntistas. Primero una notación que usaremos a lo largo del trabajo.

Notación. Los ejemplos del trabajo los obtuvimos gracias a las funciones SmallIYB(n,m) y SmallSkewbrace(n,m) del paquete YangBaxter del sistema GAP. Notaremos por SI(n,m) a SmallIYB(n,m) y por SS(n,m) a SmallSkewbrace(n,m). Ver Apéndice 5.

Definición 2.1.1. Sea X un conjunto no vacío y sea $r : X \times X \to X \times X$ una función. El par (X, r) se llama *conjunto cuadrático.* Dados $x, y \in X$ escribimos

$$r(x, y) = (\mathcal{L}_x(y), \mathcal{R}_y(x));$$

en ocasiones es útil escribir también $r(x, y) = (x \triangleright y, x \triangleleft y)$.

Dado (X, r) un conjunto cuadrático, decimos que es

- Un conjunto *trenzado* si r satisface la relación de trenzas

$$(r \times Id)(Id \times r)(r \times Id) = (Id \times r)(r \times Id)(Id \times r), \tag{2.1}$$

entre funciones de $X \times X \times X$. Una forma abreviada de escribir la ecuación de trenzas es

$$r^{12}r^{23}r^{12} = r^{23}r^{12}r^{23}, \tag{2.2}$$

donde r^{ij} denota la aplicación $X \times X \times X \to X \times X \times X$ que consiste en aplicar r a las coordenadas ij y la identidad en la coordenada restante.

- *No degenerado* si las funciones $\mathcal{L}_y, \mathcal{R}_z : X \to X$ definidas por $x \mapsto y \triangleright x$ y $x \mapsto x \triangleleft z$ respectivamente, son biyectivas para cada $y, z \in X$.
- *Involutivo* si
$$r^2 = id_{X \times X}.$$

Todo conjunto trenzado (X, r) que es involutivo se llama un conjunto *simétrico*. En la literatura a todo par trenzado se lo conoce como *solución de la versión conjuntista de la ecuación de Yang-Baxter*. En el presente trabajo llamamos *solución* a un conjunto trenzado no degenerado.

La relación de trenza se suele representar gráficamente de la siguiente manera

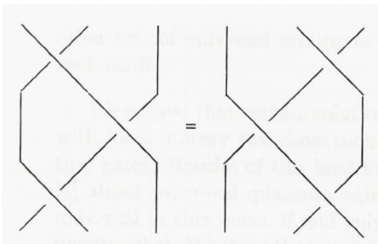


Figura 2.1: Diagrama de trenzas.

donde cada línea representa la coordenada i-ésima, cada cruce significa que aplicamos r en esas dos variables, y la línea recta significa que aplicamos la identidad.

Se conoce como una *solución clásica* de la ecuación de Yang-Baxter a una aplicación $R : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$, con V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y tal que R satisface la ecuación de trenzas

$$(R \otimes Id)(Id \otimes R)(R \otimes Id) = (Id \otimes R)(R \otimes Id)(Id \otimes R), \tag{2.3}$$

en $End(V \otimes V \otimes V)$.

Dada una solución conjuntista podemos hallar una solución clásica de la siguiente forma.

Definición 2.1.2. Sea (X, r) una solución conjuntista. Definimos

- El espacio V_X como el $\mathbb{C}$-espacio vectorial generado por X, es decir, el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de base $\mathcal{B} = \{v_x\}_{x \in X}$.
- La función $R = R(X, r) : V_X \otimes V_X \longrightarrow V_X \otimes V_X$ como la extensión lineal de r a V_X, que puede definirse sobre la base de $V_X \otimes V_X$ inducida por $\mathcal{B}$ como
$$R(v_x \otimes v_y) = v_{x \triangleright y} \otimes v_{x \triangleleft y}.$$

La función R resulta una solución clásica. Consideramos a V_X como un espacio Hermitiano con producto interno unívocamente determinado por el hecho de que $\mathcal{B}$ es una base ortogonal. Dado un conjunto $S \subset V_X$ denotamos por p_S a la proyección ortogonal al espacio generado por S.

Veamos algunos ejemplos de soluciones de la ecuación de Yang-Baxter. Empecemos por dos de los ejemplos más simples de una solución.

Ejemplo 2.1.3. Sea X un conjunto y sea $r(x,y) = (y,x)$, la función *flip*. Esta solución se conoce como *solución trivial.*

Para ser solución debe satisfacer la ecuación de trenzas 2.1. Debemos ver que

$$(x,y,z) \xmapsto{r^{12}} (y,x,z) \xmapsto{r^{23}} (y,z,x) \xmapsto{r^{12}} (z,y,x),$$

coincide con

$$(x,y,z) \xmapsto{r^{23}} (x,z,y) \xmapsto{r^{12}} (z,x,y) \xmapsto{r^{23}} (z,y,x).$$

Como coinciden, se satisface la relación de trenzas.

Además es no degenerada pues $\mathcal{L}_x = \mathcal{R}_y = Id_X$ para todo $x, y \in X$. Por último, es involutiva

$$r \circ r(x,y) = r(y,x) = (x,y).$$

Ejemplo 2.1.4. Dado un conjunto cualquiera X, la función biyectiva $r(x,y) = (x,y)$ satisface la ecuación de trenzas 2.1 y la solución resulta involutiva. Sin embargo, como $\mathcal{L}_x(y) = x$ para todo $y \in X$, la solución es degenerada.

Existen por supuesto ejemplos más sofisticados, como el que sigue de cardinal 2.

Ejemplo 2.1.5. Consideremos la solución SI(2,2) tal que $X = \{1,2\}$ y r tiene la tabla

r	1	2
1	(2,2)	(1,2)
2	(2,1)	(1,1)

Una forma mas compacta de describir la solución es escribiendo los operadores $\mathcal{L}_x$ y $\mathcal{R}_y$ como permutaciones

x	1 2
$\mathcal{L}_x$	(12)
$\mathcal{R}_x$	(12)

Chequeamos la ecuación de trenzas para $(x,y,z) = (1,2,2)$, los demás casos son similares. Debemos ver que las siguientes ternas son iguales:

$$(1,2,2) \xmapsto{r^{12}} (1,2,2) \xmapsto{r^{23}} (1,1,1) \xmapsto{r^{12}} (2,2,1);$$

$$(1,2,2) \xmapsto{r^{23}} (1,1,1) \xmapsto{r^{12}} (2,2,1) \xmapsto{r^{23}} (2,2,1).$$

Coinciden como queremos.

Además como r está dada por las permutaciones (12), el par es no degenerado. Por último veamos que resulta involutiva:

$$r \circ r(1,1) = r(2,2) = (1,1);\ \ r \circ r(2,2) = r(1,1) = (2,2);$$

$$r \circ r(1,2) = r(1,2) = (1,2);\ \ r \circ r(2,1) = r(2,1) = (2,1).$$

En general existen soluciones de cardinal $n \in \mathbb{N}$ arbitrario como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.6. Sea $X = \mathbb{Z}_n$ y sea $r(x, y) = (y + 1, x - 1)$.

Se satisface la ecuación de trenzas, pues por un lado tenemos

$$(x, y, z) \xmapsto{r^{12}} (y + 1, x - 1, z) \xmapsto{r^{23}} (y + 1, z + 1, x - 2) \xmapsto{r^{12}} (z + 2, y, x - 2),$$

y por otro

$$(x, y, z) \xmapsto{r^{23}} (x, z + 1, y - 1) \xmapsto{r^{12}} (z + 2, x - 1, y - 1) \xmapsto{r^{23}} (z + 2, y, x - 2).$$

Notemos que $r(x, y) = (\mathcal{L}(y), \mathcal{R}(x))$ con $\mathcal{L}(y) = y + 1$ y $\mathcal{R}(x) = x - 1$ para cualesquiera $x, y \in X$. Además, como $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$ son biyectivas el par es no degenerado. Por último, el par es involutivo

$$r \circ r(x, y) = r(y + 1, x - 1) = (x, y).$$

El ejemplo que sigue es una suerte de generalización del ejemplo anterior.

Ejemplo 2.1.7. Dado $X = \mathbb{Z}_n$ podemos considerar $r(x, y) = (y+a, x+b)$ con $a, b \in \mathbb{Z}_n$ y el par (X, r) resulta solución.

Debemos chequear la ecuación de trenzas. Tenemos

$$(x, y, z) \xmapsto{r^{12}} (y + a, x + b, z) \xmapsto{r^{23}} (y + a, z + a, x + 2b) \xmapsto{r^{12}} (z + 2a, y + a + b, x + 2b);$$

que es igual a

$$(x, y, z) \xmapsto{r^{23}} (x, z + a, y + b) \xmapsto{r^{12}} (z + 2a, x + b, y + b) \xmapsto{r^{23}} (z + 2a, y + a + b, x + 2b).$$

Como $r(x, y) = (\mathcal{L}(y), \mathcal{R}(x))$ con $\mathcal{L}(y) = y + a$ y $\mathcal{R}(x) = x + b$ para todo $x, y \in X$, la solución resulta no degenerada.

Finalmente el par resultará involutivo si y solo sí

$$(x, y) = r \circ r(x, y) = r(y + a, x + b) = (x + a + b, y + a + b),$$

es decir, si y solo sí $a = -b$.

Los ejemplos vistos hasta el momento pertenecen a un tipo particular de soluciones de la forma siguiente.

Ejemplo 2.1.8. Sean X un conjunto arbitrario y no vacío, $\mathcal{L}, \mathcal{R} : X \longrightarrow X$ dos funciones y consideremos la aplicación dada por $r(x, y) = (\mathcal{L}(y), \mathcal{R}(x))$. Veamos las condiciones que deben cumplir $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$ para que (X, r) sea una solución.

Primeramente debe cumplir la ecuación de trenzas. Es decir

$$(x, y, z) \xmapsto{r^{12}r^{23}r^{12}} (\mathcal{L} \circ \mathcal{L}(z), \mathcal{R} \circ \mathcal{L}(y), \mathcal{R} \circ \mathcal{R}(x)),$$

debe coincidir con

$$(x, y, z) \xmapsto{r^{23}r^{12}r^{23}} (\mathcal{L} \circ \mathcal{L}(z), \mathcal{L} \circ \mathcal{R}(y), \mathcal{R} \circ \mathcal{R}(x)).$$

Esto ocurre si y solo sí $\mathcal{R}\circ\mathcal{L} = \mathcal{L}\circ\mathcal{R}$, es decir, si y solo sí $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$ conmutan. Por otro lado, el par (X, r) será no degenerado si y solo sí $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$ son biyectivas. Finalmente la solución será involutiva si y solo sí

$$(x, y) = r \circ r(x, y) = r(\mathcal{L}(y), \mathcal{R}(x)) = (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}(x), \mathcal{R} \circ \mathcal{L}(y)),$$

es decir, si y solo sí $\mathcal{L}$ es la inversa de $\mathcal{R}$.

Este tipo de soluciones se llaman *soluciones de permutación*.

Existen ejemplos de soluciones que no son de permutación.

Ejemplo 2.1.9. Sea la solución SS(8,25) dada por $X = \{1, 2, \dots, 8\}$ y r con tabla

x	1 2	3 4	5 6	7 8
$\mathcal{L}_x$	e	(34)(78)	(34)(78)	e
$\mathcal{R}_x$	e	(34)(56)	e	(34)(56)

Sólo mostraremos que se cumple la ecuación de trenzas para el caso $(x, y, z) = (3, 5, 7)$. Los demás casos se siguen de forma análoga.

$$(3,5,7) \overset{r^{12}}{\longmapsto} (5,3,7) \overset{r^{23}}{\longmapsto} (5,8,4) \overset{r^{12}}{\longmapsto} (7,6,4);$$

$$(3,5,7) \overset{r^{23}}{\longmapsto} (3,8,6) \overset{r^{12}}{\longmapsto} (7,4,6) \overset{r^{23}}{\longmapsto} (7,6,4).$$

Coinciden, como queríamos.

Además, como todos los operadores que definen a r están dados por elementos de $\mathbb{S}_X$, la solución es no degenerada. Por último, la solución no es involutiva porque por ejemplo

$$(3, 7) \neq r \circ r(3, 7) = r(8, 4) = (4, 8).$$

2.2. Retracciones y nivel de multipermutación

En esta sección definiremos una relación de equivalencia en el conjunto solución que nos guiará hacia las nociones de retracción, de soluciones retráctiles y de nivel de multipermutación, que fueron definidas por Etingof, Schedler y Soloviev en [4].

Definición 2.2.1. Sea (X, r) una solución. Definimos una relación de equivalencia en X por: $x \sim y$ si y solo sí $\mathcal{L}_x = \mathcal{L}_y$ y $\mathcal{R}_x = \mathcal{R}_y$. Denotamos por $\overline{x}$ a la clase de equivalencia de x y por $\mathcal{L}_{\overline{x}}$ (resp. $\mathcal{R}_{\overline{x}}$) a la función $z \mapsto x \triangleright z$ (resp. $z \mapsto z \triangleleft x$). Por abuso de notación también denotamos por $\mathcal{L}_{\overline{x}}$ y $\mathcal{R}_{\overline{x}}$ a la extensión lineal a V_X de la función correspondiente. Finalmente notamos con $\overline{X}$ al cociente $X/\sim$.

En la siguiente proposición observaremos varias relaciones entre los operadores que definen a una solución y veremos además que $\overline{X}$ induce una solución $(\overline{X}, \overline{r})$.

Proposición 2.2.2. Sean (X, r) un conjunto cuadrático y $V = V_X$. Tenemos que (X, r) es una solución si y solo sí las siguientes igualdades se satisfacen en $End(V)$

$$\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ \mathcal{L}_{\overline{y}} = \mathcal{L}_{\overline{x \triangleright y}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x \triangleleft y}};$$

$$\mathcal{R}_{\overline{z}} \circ \mathcal{R}_{\overline{y}} = \mathcal{R}_{\overline{y \triangleleft z}} \circ \mathcal{R}_{\overline{y \triangleright z}};$$

$$\mathcal{R}_{\overline{(x \triangleleft y) \triangleright z}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}} = \mathcal{L}_{\overline{x \triangleleft (y \triangleright z)}} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{y}}.$$

Más aún, si (X,r) es solución entonces r induce una función $\overline{r}:\overline{X}\times\overline{X}\longrightarrow\overline{X}\times\overline{X}$ y $(\overline{X},\overline{r})$ es una solución.

Demostración. Para $x,y,z\in X$ tenemos

$$r^{12}r^{23}r^{12}(x,y,z)=(\mathcal{L}_{\overline{x\rhd y}}\circ\mathcal{L}_{\overline{x\lhd y}}(z),\mathcal{R}_{\overline{(x\lhd y)\rhd z}}\circ\mathcal{L}_{\overline{x}}(y),\mathcal{R}_{\overline{z}}\circ\mathcal{R}_{\overline{y}}(x));$$
$$r^{23}r^{12}r^{23}(x,y,z)=(\mathcal{L}_{\overline{x}}\circ\mathcal{L}_{\overline{y}}(z),\mathcal{L}_{\overline{x\lhd(y\rhd z)}}\circ\mathcal{R}_{\overline{z}}(y),\mathcal{R}_{\overline{y\lhd z}}\circ\mathcal{R}_{\overline{y\rhd z}}(x)).$$

Como r es solución, la igualdad de las expresiones anteriores nos asegura que las identidades del resultado son ciertas en $X\times X$, pero además como $v_y=p_{\overline{y}}(v_y)$ se deduce que son ciertas también en $V\otimes V$.

Por otro lado, si $\overline{x}=\overline{x'}$ entonces $\overline{x\rhd y}=\overline{x'\rhd y}$. Luego

$$\mathcal{L}_{\overline{x\lhd y}}=\mathcal{L}_{\overline{x}}\circ\mathcal{L}_{\overline{y}}\circ\mathcal{L}^{-1}_{\overline{x\rhd y}}=\mathcal{L}_{\overline{x'}}\circ\mathcal{L}_{\overline{y}}\circ\mathcal{L}^{-1}_{\overline{x'\rhd y}}=\mathcal{L}_{\overline{x'\lhd y}},$$

y $\mathcal{R}_{\overline{x\lhd y}}=\mathcal{R}_{\overline{x'\lhd y}}$. Así, $\overline{x\lhd y}$ depende sólo de $\overline{x}$ y de $\overline{y}$. Análogamente $\overline{y\rhd x}=\overline{y\rhd x'}$ y este resultado depende sólo de $\overline{x}$ y de $\overline{y}$. Esto dice que la función $\overline{r}:\overline{X}\times\overline{X}\longrightarrow\overline{X}\times\overline{X}$ dada por $\overline{r}(\overline{x},\overline{y})=(\overline{x\rhd y},\overline{x\lhd y})$ está bien definida. Como r es solución, también lo es $\overline{r}$. $\square$

Habiendo definido la relación de equivalencia en X y el conjunto inducido $\overline{X}$, podemos hablar de soluciones retráctiles y del nivel de multipermutación de una solución.

Notación. Dado X un conjunto finito, notamos por $|X|$ al cardinal de X.

Definición 2.2.3. La solución $Ret(X,r)=(\overline{X},\overline{r})$ se llama la *retracción* de (X,r). Decimos que una solución es *retráctil* si $|\overline{X}|<|X|$. Más aún, puede pasar que la retracción de una solución retráctil sea a su vez retráctil, en tal caso definimos inductivamente $Ret^{n+1}(X,r)=Ret^{n}(\overline{X},\overline{r})$. Se define el *nivel de multipermutación* de (X,r), denotado $mpl(X,r)$, como el ínfimo de los $n\in\mathbb{N}$ tales que $Ret^{n}(X,r)$ es una solución de cardinal 1. Si $|X|=1$ se toma $mpl(X,r)=0$.

Notación/Observación 2.2.4. Sean (X,r) una solución y $x\in X$, para evitar notaciones sobrecargadas escribimos $[\overline{x}]$ a la clase de $\overline{x}$ en $Ret^2(X,r)$ y $[[\overline{x}]]$ a la clase de $[\overline{x}]$ en $Ret^3(X,r)$.

Dados $x,y\in X$, como $x\rhd y$ depende sólo de la clase de x, tiene sentido escribir $\overline{x}\rhd y$. Con el mismo razonamiento escribimos $\overline{(\overline{x}\rhd y)}=[\overline{x}]\rhd\overline{y}$ y $\overline{([\overline{x}]\rhd\overline{y})}=[[\overline{x}]]\rhd[\overline{y}]$. Así, las igualdades de la proposición anterior pueden reescribirse como

$$\mathcal{L}_{\overline{x}}\circ\mathcal{L}_{\overline{y}}=\mathcal{L}_{[\overline{x}]\rhd\overline{y}}\circ\mathcal{L}_{\overline{x}\lhd[\overline{y}]};$$
$$\mathcal{R}_{\overline{z}}\circ\mathcal{R}_{\overline{y}}=\mathcal{R}_{\overline{y}\lhd[\overline{z}]}\circ\mathcal{R}_{[\overline{y}]\rhd\overline{z}};$$
$$\mathcal{R}_{([\overline{x}]\lhd[[\overline{y}]])\rhd\overline{z}}\circ\mathcal{L}_{\overline{x}}\circ p_{\overline{y}}=\mathcal{L}_{\overline{x}\lhd([[\overline{y}]]\rhd[\overline{z}])}\circ\mathcal{R}_{\overline{z}}\circ p_{\overline{y}}.$$

Además notemos que

$$\mathcal{L}_{\overline{x}}\circ p_{\overline{y}}=p_{[\overline{x}]\rhd\overline{y}}\circ\mathcal{L}_{\overline{x}};$$
$$\mathcal{R}_{\overline{z}}\circ p_{\overline{y}}=p_{\overline{y}\lhd[\overline{z}]}\circ\mathcal{R}_{\overline{z}};$$
$$p_{\overline{x}}\circ p_{\overline{y}}=p_{\overline{y}}\circ p_{\overline{x}}=\delta_{\overline{x},\overline{y}}p_{\overline{x}},$$

donde $\delta_{\overline{x},\overline{y}}$ es 1 si $\overline{x} = \overline{y}$ y 0 si no.

Juntando todo lo anterior y denotando $V = V_X$ podemos escribir al operador inducido $R : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ como

$$R \circ \tau = \sum_{\overline{x} \in \overline{X}} \sum_{\overline{y} \in \overline{X}} \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}} \otimes \mathcal{R}_{\overline{y}} \circ p_{\overline{x}},$$

donde τ es la función flip. En efecto, dados $z, w \in X$,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\overline{x} \in \overline{X}} \sum_{\overline{y} \in \overline{X}} \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}} \otimes \mathcal{R}_{\overline{y}} \circ p_{\overline{x}}\right)\tau(v_z \otimes v_w) &= \sum_{\overline{x} \in \overline{X}} \sum_{\overline{y} \in \overline{X}} \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}}(v_w) \otimes \mathcal{R}_{\overline{y}} \circ p_{\overline{x}}(v_z) \\ &= \mathcal{L}_{\overline{z}}(v_w) \otimes \mathcal{R}_{\overline{w}}(v_z) \\ &= R(v_z \otimes v_w).\end{aligned}$$

El nivel de multipermutación nos da características sobre la solución. Veamos dos observaciones sólo para hacernos una idea del tipo de información que esta noción nos brinda.

Observación 2.2.5. Sea (X, r) una solución.

- Notemos que $mpl(X, r) = 1$ es por definición tener una solución de permutación. En particular, la retracción de una solución de permutación es una solución trivial. En general, si $mpl(X, r) = n$ tenemos que $Ret^{n-1}(X, r)$ es una solución de permutación.

- Supongamos que $(\overline{X}, \overline{r})$ es una solución trivial. Entonces $mpl(X, r) \leq 2$, pues $mpl(\overline{X}, \overline{r}) = 1$ por ser una solución de permutación.

Analicemos el nivel de multipermutación de algunos ejemplos. Comenzamos por el Ejemplo 2.1.9.

Ejemplo 2.2.6. Tenemos $X = \{1, 2, \dots, 8\}$ y r dada por

x	1 2	3 4	5 6	7 8
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	e	(34)(78)	(34)(78)	e
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	e	(34)(56)	e	(34)(56)

Se tiene que $1 \sim 2$, $3 \sim 4$, $5 \sim 6$ y $7 \sim 8$, es decir, $\overline{X} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$ y $\overline{r}$ está dada por

$\overline{x}$	$\overline{1}\ \overline{3}\ \overline{5}\ \overline{7}$
$\mathcal{L}_{[\overline{x}]}$	e
$\mathcal{R}_{[\overline{x}]}$	e

Por lo que $mpl(X, r) = 2$.

Existen soluciones con nivel de multipermutación mayor a 2. El siguiente es un ejemplo de nivel de multipermutación 3.

Notación. Para simplificar la notación escribiremos $(\overline{X}^n, \overline{r}^n)$ para referirnos a $Ret^n(X, r)$.

Ejemplo 2.2.7. Sea la solución SI(5,7), i.e. $X = \{1, 2, \ldots, 5\}$ y r dada por la tabla siguiente:

x	1 2 3	4	5
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	e	(45)	$(23)(45)$
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	e	(45)	$(23)(45)$

Tenemos las siguientes relaciones $1 \sim 2 \sim 3$. Entonces $\overline{X} = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{5}\}$ y $\overline{r}$ es tal que

$\overline{x}$	$\overline{1}$	$\overline{4}\ \overline{5}$
$\mathcal{L}_{[\overline{x}]}$	e	$(\overline{45})$
$\mathcal{R}_{[\overline{x}]}$	e	$(\overline{45})$

Podemos cocientar $\overline{X}$ nuevamente por la relación de equivalencia y nos quedan las relaciones $\overline{4} \sim \overline{5}$. Donde $\overline{X}^2 = \{[\overline{1}], [\overline{4}]\}$ y $\overline{r}^2$ está dado por

$[\overline{x}]$	$[\overline{1}]\ [\overline{4}]$
$\mathcal{L}_{[[\overline{x}]]}$	e
$\mathcal{R}_{[[\overline{x}]]}$	e

Luego $mpl(X, r) = 3$.

Veamos un ejemplo con nivel de multipermutación 4.

Ejemplo 2.2.8. Consideremos ahora SI(6,130), donde $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$ y r es tal que

x	1 2	3	4	5	6
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	e	(3456)	(3654)	$(12)(3456)$	$(12)(3654)$
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	e	(3456)	(3654)	$(12)(3456)$	$(12)(3654)$

Como $1 \sim 2$, es $\overline{X} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$ y $\overline{r}$ tal que

$\overline{x}$	$\overline{1}$	$\overline{3}\ \overline{5}$	$\overline{4}\ \overline{6}$
$\mathcal{L}_{[\overline{x}]}$	e	$(\overline{3456})$	$(\overline{3654})$
$\mathcal{R}_{[\overline{x}]}$	e	$(\overline{3456})$	$(\overline{3654})$

Tomando cociente nuevamente obtenemos las relaciones $\overline{3} \sim \overline{5}$ y $\overline{4} \sim \overline{6}$. Por lo que nos queda $\overline{X}^2 = \{[\overline{1}], [\overline{3}], [\overline{4}]\}$ y $\overline{r}^2$ dada por

$[\overline{x}]$	$[\overline{1}]$	$[\overline{3}]\ [\overline{4}]$
$\mathcal{L}_{[[\overline{x}]]}$	e	$([\overline{34}])$
$\mathcal{R}_{[[\overline{x}]]}$	e	$([\overline{34}])$

La retracción $\overline{X}^3$ es trivial pero no un singleton, por lo que $mpl(X, r) = 4$.

En general, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe una solución con nivel de multipermutación m. Ver [6], Ejemplo 9.3.

Mostramos un ejemplo de solución no retráctil.

Ejemplo 2.2.9. Consideremos la solución tal que $X = \{1, 2, \ldots, 5\}$ y r de tabla

x	1	2	3	4	5
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	(13)	(24)	(1234)	(2143)	(12)(34)
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	(14)	(23)	(2134)	(1243)	(12)(34)

Como los operadores que definen a r son todos distintos, no hay elementos en X relacionados, por lo que la solución no es retráctil.

Existen ejemplos con una (o varias) retracción que se estacionan en una solución no retráctil.

Ejemplo 2.2.10. Sean $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$ y r con tabla

x	1	2	3	4	5 6
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	(13)(56)	(24)(56)	(1234)(56)	(2143)(56)	(12)(34)(56)
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	(14)(56)	(23)(56)	(2134)(56)	(1243)(56)	(12)(34)(56)

donde la única relación es $5 \sim 6$. Por lo que $\overline{X} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ y $\overline{r}$ tal que

$\overline{x}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\mathcal{L}_{[\overline{x}]}$	$(\overline{13})$	$(\overline{24})$	$(\overline{1234})$	$(\overline{2143})$	$(\overline{12})(\overline{34})$
$\mathcal{R}_{[\overline{x}]}$	$(\overline{14})$	$(\overline{23})$	$(\overline{2134})$	$(\overline{1243})$	$(\overline{12})(\overline{34})$

que no es retráctil por ser el ejemplo anterior.

2.3. Otras construcciones

Dada una o más soluciones es posible inferir o construir otras soluciones a partir de ellas. En esta sección trataremos estas construcciones.

2.3.1. Subsoluciones

Sean (X, r) una solución e Y un subconjunto r-invariante de X, podemos considerar el par (Y, r_Y), donde $r_Y = r|_{Y \times Y}$. En tal caso, (Y, r_Y) cumple la ecuación de trenzas pues r la cumple. Veamos dos ejemplos. Empecemos por uno con nivel de multipermutación 3.

Ejemplo 2.3.1. Consideremos SI(6,17) tal que $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$ y r con tabla

x	1 2	3	4	5 6
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	e	(34)	(34)(56)	(56)
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	e	(34)	(34)(56)	(56)

Un cálculo directo muestra que $mpl(X, r) = 3$.

Tomemos $Y_1 = \{1\}$, $Y_2 = \{1, 2\}$ e $Y_3 = \{1, 2, 5, 6\}$. Como los tres subconjuntos son r-invariantes tiene sentido considerar (Y_1, r_{Y_1}), (Y_2, r_{Y_2}) e (Y_3, r_{Y_3}). Nuevamente directos cálculos muestran que $mpl(Y_1, r_{Y_1}) = 0$, $mpl(Y_2, r_{Y_2}) = 1$ y $mpl(Y_3, r_{Y_3}) = 2$. Es decir, a partir de una solución con nivel de multipermutación 3 conseguimos otras con nivel de multipermutación menor.

Ahora veamos un ejemplo con nivel de multipermutación 5.

Ejemplo 2.3.2. Sea SI(8,3384) tal que $X = \{1, 2, \dots, 8\}$ y r con la tabla siguiente

x	1 2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	e	(56)	(12)(56)	(34)	(12)(34)	(78)	(35)(46)(78)
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	e	(56)	(12)(56)	(34)	(12)(34)	(78)	(35)(46)(78)

Donde $mpl(X, r) = 5$.

Tomemos $Y_1 = \{1\}$, $Y_2 = \{1, 2\}$ e $Y_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Como todos los subconjuntos son r-invariantes inducen soluciones (Y_1, r_{Y_1}), (Y_2, r_{Y_2}) e (Y_3, r_{Y_3}), tales que $mpl(Y_1, r_{Y_1}) = 0$, $mpl(Y_2, r_{Y_2}) = 1$ y $mpl(Y_3, r_{Y_3}) = 3$.

Un caso particular de subsolución es el de considerar como subconjunto Y a la clase de equivalencia de algún elemento de X. Si (X, r) es una solución finita y hay unicidad en la cardinalidad de las clases de equivalencia, entonces r depende exclusivamente de cómo actúa en las clases y está definida por la restricción a ellas. Veamos esta idea en la proposición que sigue.

Proposición 2.3.3. Sea (X, r) una solución de cardinal finito, sea C una clase de equivalencia y sea $n = |C|$. Supongamos que C es la única clase de cardinal n. Entonces (C, r_C) es una subsolución. Más aún, $mpl(C, r_C) = 1$.

Demostración. Por la Proposición 2.2.2 tenemos que dado $x \in X$ los operadores $\mathcal{L}_{\overline{x}} : C \longrightarrow \mathcal{L}_{\overline{x}}(C)$ y $\mathcal{R}_{\overline{x}} : C \longrightarrow \mathcal{R}_{\overline{x}}(C)$ están bien definidos. Como (X, r) es no degenerada tenemos $\mathcal{L}_{\overline{x}} \in \mathbb{S}_X$ y existe un número natural m tal que $\mathcal{L}_{\overline{x}}^m = Id$. En particular, $\mathcal{L}_{\overline{x}}$ es inyectivo y se tiene $|C| \leq |\mathcal{L}_{\overline{x}}(C)|$.

Iterando la aplicación de $\mathcal{L}_{\overline{x}}$ tenemos

$$|C| \leq |\mathcal{L}_{\overline{x}}(C)| \leq \cdots \leq |\mathcal{L}_{\overline{x}}^m(C)| = |C|.$$

Es decir, $|\mathcal{L}_{\overline{x}}(C)| = |C|$. Análogamente $|\mathcal{R}_{\overline{x}}(C)| = |C|$. Como la única clase de equivalencia de cardinal n es C tenemos que r_C está bien definida.

Ahora que vimos que C es r-invariante, veamos que es subsolución. Debemos ver que (C, r_C) es un par trenzado y no degenerado. Como r_C depende de la solución r, entonces satisface la ecuación de trenzas. Para ver que es no degenerado hay que ver que dado z en C las funciones $\mathcal{L}_{\overline{z}} : C \longrightarrow C$ y $\mathcal{R}_{\overline{z}} : C \longrightarrow C$ son biyectivas. Como son funciones de un conjunto finito en si mismo, basta ver sólo la inyectividad. Pero esto último está claro pues son restricciones de los operadores $\mathcal{L}_{\overline{z}} : X \longrightarrow X$ y $\mathcal{R}_{\overline{z}} : X \longrightarrow X$, que son biyectivos por ser (X, r) no degenerado.

Finalmente es claro que $mpl(C, r_C) = 1$. □

Analicemos dos aplicaciones de esta proposición. Primero un ejemplo donde $(C, r|_{C\times C})$ es una solución simple.

Ejemplo 2.3.4. Consideremos SI(6,6) dada por $X = \{1, 2, \dots, 6\}$ y r tal que

x	1 2 3 4	5	6
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	e	(56)	(34)(56)
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	e	(56)	(34)(56)

Tenemos las siguientes clases de equivalencia $\overline{1} = \{1,2,3,4\}$, $\overline{5} = \{5\}$ y $\overline{6} = \{6\}$. Como $\overline{1}$ es la única clase de cardinal 4, por la Proposición 2.3.3 podemos considerar $(\overline{1}, r_{\overline{1}})$ que resulta una subsolución trivial con $mpl(\overline{1}, r_{\overline{1}}) = 1$.

Veamos ahora un ejemplo con (C, r_C) un poco mas elaborada.

Ejemplo 2.3.5. Sea SI(5,83) con $X = \{1,2,\ldots,5\}$ y r tal que

x	1 2	3 4 5
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	(12)	(12)(345)
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	(12)	(12)(354)

Tenemos las relaciones $1 \sim 2$, $3 \sim 4 \sim 5$. Como $\overline{3}$ es la única clase de cardinal 3, por la Proposición 2.3.3 podemos considerar $(\overline{3}, r_{\overline{3}})$ dada por:

x	3 4 5
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	(345)
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	(354)

donde su nivel de multipermutación es 1.

2.3.2. Solución producto cartesiano

Sean (X, r_X) y (Y, r_Y) dos soluciones. Se tiene que $(X \times Y, r_X \times r_Y)$ es también una solución y se llama el *producto cartesiano* de X e Y. Donde

$$\begin{aligned} r_X \times r_Y\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) &= \big((\overline{x_1} \triangleright x_2, \overline{y_1} \triangleright y_2), (x_1 \triangleleft \overline{x_2}, y_1 \triangleleft \overline{y_2})\big) \\ &= \big(\overline{(x_1,y_1)} \triangleright (x_2,y_2), (x_1,y_1) \triangleleft \overline{(x_2,y_2)}\big). \end{aligned}$$

Definición 2.3.6. Sea (X, r) una solución y consideremos la solución producto cartesiano $(X \times X, r \times r)$.

- Sea $V_{X\times X}$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial generado por $X \times X$, es decir, el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de base $\{v_{(x,y)}\}_{x,y\in X}$.
- Notamos por $\tilde{V} = V_{X\times X}$ y definimos la función $\tilde{R} = R(X\times X, r\times r) : \tilde{V}\otimes\tilde{V} \longrightarrow \tilde{V} \otimes \tilde{V}$ como la extensión de $r \times r$ a $\tilde{V}$

$$\tilde{R}\big(v_{(x,y)} \otimes v_{(z,w)}\big) = v_{(\overline{x}\triangleright z, \overline{y}\triangleright w)} \otimes v_{(x\triangleleft\overline{z}, y\triangleleft\overline{w})}.$$

La función $\tilde{R}$ resulta una solución clásica.

Notación/Observación 2.3.7. Sea (X, r) una solución y sea $(X\times X, r\times r)$ la solución producto cartesiano inducida.

- Si escribimos $r(x,y) = \big(\mathcal{L}_{\overline{x}}(y), \mathcal{R}_{\overline{y}}(x)\big)$, usamos la siguiente notación para $r\times r$:

$$r \times r\big((x,y),(z,w)\big) = \big(\mathcal{LL}_{\overline{(x,y)}}(z,w), \mathcal{RR}_{\overline{(z,w)}}(x,y)\big),$$

donde $\mathcal{LL}_{\overline{(x,y)}}(z,w) = (\mathcal{L}_{\overline{x}}(z), \mathcal{L}_{\overline{y}}(w))$ y $\mathcal{RR}_{\overline{(z,w)}}(x,y) = (\mathcal{R}_{\overline{z}}(x), \mathcal{R}_{\overline{w}}(y))$.

- Sean los morfismos de espacios vectoriales $\Phi : V_{X\times X} \longrightarrow V_X \otimes V_X$ y $\Psi : V_X \otimes V_X \longrightarrow V_{X\times X}$ dados por $v_{(x,y)} \mapsto v_x \otimes v_y$ y $v_x \otimes v_y \mapsto v_{(x,y)}$ respectivamente. Al estar definidos sobre bases de los correspondientes espacios están bien definidos. Es evidente que $\Phi = \Psi^{-1}$ por lo que $V_{X\times X} \simeq V_X \otimes V_X$. En tal caso nos queda

$$\tilde{R}\big((v_x \otimes v_y) \otimes (v_z \otimes v_w)\big) = \big(v_{\overline{x}\triangleright z} \otimes v_{\overline{y}\triangleright w}\big) \otimes \big(v_{x\triangleleft\overline{z}} \otimes v_{y\triangleleft\overline{w}}\big).$$

Veamos un ejemplo de una solución producto cartesiano.

Ejemplo 2.3.8. Sean $X = \{1,2\}$, $Y = \{1,2,3\}$, r_X la función flip y r_Y dado por

y	1	2	3
$\mathcal{L}_{\overline{y}}$	(123)	(123)	(123)
$\mathcal{R}_{\overline{y}}$	(132)	(132)	(132)

La solución producto cartesiano resulta,

$r_X \times r_Y$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
$(1,1)$	$((1,2),(1,3))$	$((1,3),(1,3))$	$((1,1),(1,3))$
$(1,2)$	$((1,2),(1,1))$	$((1,3),(1,1))$	$((1,1),(1,1))$
$(1,3)$	$((1,2),(1,2))$	$((1,3),(1,2))$	$((1,1),(1,2))$
$(2,1)$	$((1,2),(2,3))$	$((1,3),(2,3))$	$((1,1),(2,3))$
$(2,2)$	$((1,2),(2,1))$	$((1,3),(2,1))$	$((1,1),(2,1))$
$(2,3)$	$((1,2),(2,2))$	$((1,3),(2,2))$	$((1,1),(2,2))$

$r_X \times r_Y$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
$(1,1)$	$((2,2),(1,3))$	$((2,3),(1,3))$	$((2,1),(1,3))$
$(1,2)$	$((1,2),(1,1))$	$((1,3),(1,1))$	$((1,1),(1,1))$
$(1,3)$	$((1,2),(1,2))$	$((1,3),(1,2))$	$((1,1),(1,2))$
$(2,1)$	$((1,2),(2,3))$	$((1,3),(2,3))$	$((1,1),(2,3))$
$(2,2)$	$((1,2),(2,1))$	$((1,3),(2,1))$	$((1,1),(2,1))$
$(2,3)$	$((1,2),(2,2))$	$((1,3),(2,2))$	$((1,1),(2,2))$

Podemos presentarla de forma más compacta como

x	(i,j)
$\mathcal{L}_{\overline{(x,y)}}$	$e \times (123)$
$\mathcal{R}_{\overline{(x,y)}}$	$e \times (132)$

Tenemos el siguiente resultado sobre el nivel de multipermutación de la solución producto cartesiano.

Proposición 2.3.9. Sean (X, r_X) y (Y, r_Y) dos soluciones con niveles de multipermutación n y $m \in \mathbb{N}$ respectivamente. Entonces el nivel de multipermutación de $(X \times Y, r_X \times r_Y)$ es el máximo entre n y m.

Demostración. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ en $X \times Y$. Por definición de la relación de equivalencia definida en $X \times Y$ tenemos que

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$

si y solo sí

$$\mathcal{L}_{(x_1,y_1)} = \mathcal{L}_{(x_2,y_2)} \text{ y } \mathcal{R}_{(x_1,y_1)} = \mathcal{R}_{(x_2,y_2)}. \tag{2.4}$$

Por 2.3.7 como $\mathcal{L}\mathcal{L}_{(x_1,y_1)} = (\mathcal{L}_{x_1}, \mathcal{L}_{y_1})$ y $\mathcal{R}\mathcal{R}_{(x_1,y_1)} = (\mathcal{R}_{x_1}, \mathcal{R}_{y_1})$, entonces la condición (1.4) es equivalente a

$$\mathcal{L}_{x_1} = \mathcal{L}_{x_2}; \qquad \mathcal{L}_{y_1} = \mathcal{L}_{y_2}; \qquad \mathcal{R}_{x_1} = \mathcal{R}_{x_2}; \qquad \mathcal{R}_{y_1} = \mathcal{R}_{y_2}.$$

Que es equivalente a que $x_1 \sim x_2$ e $y_1 \sim y_2$. Luego $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$.

En general, por inducción tenemos $Ret^k(X \times Y, r_X \times r_Y) = Ret^k(X, r_X) \times Ret^k(Y, r_Y)$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Entonces $Ret^k(X \times Y, r_X \times r_Y)$ tendrá cardinal 1 cuando $Ret^k(X, r_X)$ y $Ret^k(Y, r_Y)$ tengan cardinal 1. Por lo tanto, habrá que tomar tantas retracciones como el máximo entre n y m. $\square$

De lo que se deduce un corolario inmediato.

Corolario 2.3.10. Sea (X, r) una solución cuyo nivel de multipermutación es $n \in \mathbb{N}$, entonces el nivel de multipermutación de $(X \times X, r \times r)$ es n.

Consideremos el producto cartesiano de una solución trivial de cardinal 2 y el ejemplo 2.2.7.

Ejemplo 2.3.11. Sean $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, r_X el flip y r_Y dada por SI(5,7)

y	1 2 3	4	5
$\mathcal{L}_{\overline{y}}$	e	(45)	$(23)(45)$
$\mathcal{R}_{\overline{y}}$	e	(45)	$(23)(45)$

Donde la solución producto cartesiano queda definida por

(x, y)	$(1, i)$, $(2, i)$	$(j, 4)$	$(j, 5)$
$\mathcal{L}_{\overline{(x,y)}}$	$e \times e$	$e \times (45)$	$e \times (23)(45)$
$\mathcal{R}_{\overline{(x,y)}}$	$e \times e$	$e \times (45)$	$e \times (23)(45)$

con $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$. Por la proposición 2.3.9 como $mpl(X, r_X) = 1$ y $mpl(Y, r_Y) = 3$ tenemos que $mpl(X \times Y, r_X \times r_Y) = 3$.

2.4. Brazas, brazas torcidas y conjuntos cíclicos

En esta última sección damos una breve descripción de la noción de brazas, brazas torcidas y de conjuntos cíclicos. Una braza es una estructura algebraica muy ligada a las soluciones involutivas. Las brazas torcidas son una generalización de las brazas y fueron definidas por primera vez en [11] para facilitar el estudio de soluciones no involutivas. Los conjuntos cíclicos fueron presentados por Rump [17] y sirven para proveer ejemplos de soluciones. La información que presentamos se basa en la tesis de licenciatura de Guarnieri [10].

Comencemos con la definición de braza a derecha.

Definición 2.4.1. Una *braza a derecha* es una terna $(B, +, \cdot)$ tal que $(B, +)$ es un grupo abeliano, $(B, \cdot)$ es un grupo, y para cualesquiera $a, b, c \in B$ se tiene

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c - c. \tag{2.5}$$

Llamamos a $(B, +)$ el *grupo aditivo* y a $(B, \cdot)$ el *grupo multiplicativo* de la braza B.

Se define una *braza a izquierda* de manera análoga, reemplazando la ecuación 2.5 por

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c - a.$$

Una braza es *bilátera* si es braza a izquierda y a derecha. Notamos el elemento neutro aditivo como 0 y el multiplicativo como 1, y omitiremos $\cdot$ cuando resulte conveniente escribiendo el producto como la yuxtaposición.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.4.2. Sea $(A, +)$ un grupo abeliano. Si definimos un producto en A dado por $a \cdot b = a + b$, $(A, +, \cdot)$ resulta una braza bilátera, pues

$$a(b + c) = a + b + c = a + b + a + c - a = ab + ac - a,$$

$$(b + c)a = a + b + c = b + a + c + a - a = ba + ca - a.$$

Es inmediato que $(A, \cdot) \simeq (A, +)$.

Ejemplo 2.4.3. Sea $A = \mathbb{Z}_{p^2}$. Si definimos el producto como

$$a \cdot b = a + b + pab,$$

la terna $(A, +, \cdot)$ es braza bilátera. En este caso $(A, \cdot) \simeq \mathbb{Z}_{p^2}$ si $p \neq 2$ y $(A, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ si $p = 2$.

Veremos sin demostración algunas de las propiedades básicas de las brazas que nos guiarán hacia su relación con las soluciones involutivas de la ecuación de Yang-Baxter. Para una completa demostración de cada resultado ver [10].

Observación/Definición 2.4.4. Sea B una braza a derecha y $a \in B$. Definimos la función $\rho_a \in \mathbb{S}_B$ como $\rho_a(b) = ba - a$ y tenemos que la función $\rho : B \longrightarrow \mathbb{S}_B$, $a \mapsto \rho_a$ determina una acción a derecha de $(B, \cdot)$ en $(B, +)$ por automorfismos. Además, $r_B : B \times B \longrightarrow B \times B$ dada por

$$r_B(a, b) = (\rho^{-1}_{\rho_b(a)}(b), \rho_b(a)),$$

es una solución involutiva no degenerada.

Finalmente, si X es un conjunto finito y (X, r) una solución involutiva, existe una braza a derecha finita $(B, +, \cdot)$ tal que (X, r) es una subsolución de (B, r_B).

Veamos la noción de braza torcida.

Definición 2.4.5. Una *braza torcida a derecha* (o *skew right brace*) es una terna $(B, \cdot, \circ)$ tal que $(B, \cdot)$ y $(B, \circ)$ son grupos, y para todo $a, b, c \in B$ se verifica

$$(a \cdot b) \circ c = (a \circ c) \cdot c^{-1} \cdot (b \circ c),$$

donde c^{-1} denota el inverso de c en $(B, \cdot)$. Las *brazas torcidas a izquierda* se definen análogamente.

Una braza torcida a derecha puede pensarse como un par de grupos cuyas operaciones satisfacen cierta compatibilidad. Cabe observar que si la estructura de $(B, \cdot)$ es abeliana, estamos en presencia de una braza a derecha como las que vimos antes.

En lo que sigue, notaremos el producto $\cdot$ yuxtaponiendo elementos para simplificar la notación. Dado un elemento $a \in B$, a^{-1} hará siempre referencia al inverso con respecto a la estructura $(B, \cdot)$.

Veamos algunos ejemplos de brazas torcidas.

Ejemplo 2.4.6. Sea $(G, \cdot)$ un grupo. Entonces G tiene una estructura de braza torcida a derecha definiendo $(G, \circ)$ vía $g \circ h = gh$ para todo $g, h \in G$.

Ejemplo 2.4.7. Este ejemplo fue motivado por el trabajo de Weinstein y Xu, [21]. Sea A un grupo y A_+, A_- subgrupos tales que A admite factorización única como $A = A_+A_-$. Así, cada $a \in A$ puede expresarse de manera única como $a = a_+a_-$ para ciertos $a_+ \in A_+, a_- \in A_-$. La función

$$A_+ \times A_- \longrightarrow A, \ (a_+, a_-) \mapsto a_+(a_-)^{-1},$$

es biyectiva. Podemos transportar la estructura del producto directo $A_+ \times A_-$ al conjunto A. Para $a = a_+a_- \in A$ y $b = b_+b_- \in A$ sea

$$a \star b = a_+ b a_-.$$

Entonces $(A, \star)$ es un grupo y A es una braza torcida a derecha.

Tenemos la siguiente Observación/Definición para brazas torcidas.

Observación/Definición 2.4.8. Sea B una braza torcida a derecha y $a \in B$. Definimos la función $\rho_a \in \mathbb{S}_B$ como $\rho_a(b) = (b \circ a)a^{-1}$ y tenemos que la función $\rho : B \longrightarrow \mathbb{S}_B$, $a \mapsto \rho_a$ determina una acción a derecha de $(B, \circ)$ en $(B, \cdot)$ por automorfismos. Además, $r_B : B \times B \longrightarrow B \times B$ dada por

$$r_B(a, b) = (\rho^{-1}_{\rho_b(a)}((a \circ b)b(a \circ b)^{-1}), \rho_b(a)),$$

es una solución no degenerada.

Por último, existe otra construcción que sirve para proveer ejemplos de soluciones.

Definición 2.4.9. Sea X un conjunto arbitrario y sea $\cdot : X \times X \longrightarrow X$ una función que satisface

- $(x \cdot y) \cdot (x \cdot z) = (y \cdot x) \cdot (y \cdot z)$ para todo $x, y, z \in X$.
- La aplicación $y \mapsto x \cdot y$ es biyectiva para todo $x \in X$.

Estas estructuras fueron definidas por primera vez por Rump [17], quien las llamó *conjuntos cíclicos*.

Notemos por $\star$ a la aplicación tal que

$$x \star (x \cdot y) = y \text{ para todo } x, y \in X.$$

Rump probó que la función $r : X \times X \longrightarrow X \times X$ dada por $(x, y) \mapsto ((y \star x) \cdot y, y \star x)$ es solución de la ecuación de trenzas.

Mencionamos las nociones de brazas, brazas torcidas y conjunto cíclicos porque las funciones SmallIYB() y SmallSkewBrace() que utilizamos para obtener los ejemplos de la tesis se construyen a partir de estas estructuras. Donde

- SmallIYB(n,m) devuelve la solución asociada al conjunto cíclico m-ésimo de cardinal n de la base de datos del paquete YangBaxter;
- SmallSkewBrace(n,m) devuelve la braza torcida m-ésima de cardinal n de la base de datos del paquete YangBaxter.

Capítulo 3

Álgebras cuantizadas asociadas a soluciones

En este capítulo presentaremos el álgebra $A(X,r)$ asociada a una solución (X,r). Las nociones de extensiones de Ore y de semigrupos de tipo I que vimos en los preliminares, junto con las secciones 3.2 y 3.3, servirán para caracterizar $A(X,r)$. En la sección 3.2 mostraremos que $A(X,r)$ es isomorfa a cierta álgebra de semigrupo inducida por la solución (X,r). En la sección 3.3 veremos que en el caso de soluciones de retracción trivial $A(X,r)$ es isomorfa a un álgebra de polinomios torcidos. En la sección 3.4 analizaremos varios ejemplos con el fin de entender la estructura interna de $A(X,r)$ en distintas situaciones. Además al final de la misma desarrollaremos una teoría monomial para $A(X,r)$ bajo ciertas hipótesis naturales inducidas por los ejemplos. Por último, en la sección 3.5 presentamos el álgebra $Q(X,r)$ que es otra estructura algebraica asociada a una solución (X,r) y que guarda relación con $A(X \times X, r \times r)$. Veremos que $Q(X,r)$ tiene una estructura de biálgebra y daremos las fórmulas del coproducto y la counidad en términos de una base elegida pertinentemente.

3.1. Álgebra cuantizada de funciones sobre V_X

De aquí en adelante consideramos (X,r) una solución conjuntista finita de la ecuación de Yang-Baxter. Recordemos que V_X es el $\mathbb{C}$-espacio vectorial generado por X.

A partir de V_X definiremos el algébra $A(X,r)$ que mencionamos al principio del capítulo. La idea será asociarle a la solución (X,r) una estructura algebraica que guarde información de la aplicación r. La misma se debe a Faddeev, Reshetikhin y Takhtajan [5].

Definición 3.1.1. Se define el *álgebra cuantizada de funciones sobre* V_X como el álgebra cuadrática $A(X,r)$ sobre $\mathbb{C}$ con generadores $\{v_x\}_{x\in X}$, sujetos a las relaciones

$$v_x v_y = v_{x\triangleright y} v_{x\triangleleft y}. \tag{3.1}$$

Observación 3.1.2. Conseguimos una presentación libre del álgebra $A(X,r)$ tomando el cociente del álgebra tensorial $T(V_X)$ por el ideal bilátero generado por la imágen de $Id_{V_X\otimes V_X} - R(X,r)$, es decir, el ideal generado por las relaciones 3.1.

Como hemos visto en el capítulo anterior, una solución (X,r) induce por retracción otra solución denotada $(\overline{X},\overline{r})$. Existe una relación natural entre $A(\overline{X},\overline{r})$ y $A(X,r)$.

Proposición 3.1.3. Sea (X,r) una solución y notemos por $V_{\overline{X}}$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial generado por $\overline{X}$. Sean $A(\overline{X},\overline{r})$ y $A(X,r)$ las álgebras cuantizadas de funciones sobre $V_{\overline{X}}$ y sobre V_X respectivamente y sea I el ideal bilátero de $A(X,r)$ generado por $\{v_x - v_y : x \sim y\}_{x,y\in X}$. Entonces existe un isomorfismo entre las álgebras $\frac{A(X,r)}{I}$ y $A(\overline{X},\overline{r})$.

Demostración. Definimos el morfismo de álgebras $\Phi : T(V_X) \longrightarrow A(\overline{X},\overline{r})$ tal que $v_x \to v_{\overline{x}}$. Notemos que

$$\Phi(v_x v_y - v_{x\triangleright y} v_{x\triangleleft y}) = v_{\overline{x}} v_{\overline{y}} - v_{\overline{x\triangleright y}} v_{\overline{x\triangleleft y}},$$

pero por definición de $A(\overline{X},\overline{r})$ se tiene que $v_{\overline{x}} v_{\overline{y}} = v_{\overline{x}\triangleright\overline{y}} v_{\overline{x}\triangleleft\overline{y}}$. A su vez, hemos visto en la Proposición 2.2.2 que la clase $\overline{x \triangleright y}$ depende sólo de $\overline{x}$ y de $\overline{y}$, esto significa que $\overline{x \triangleright y} = \overline{x} \triangleright \overline{y}$ y $\overline{x \triangleleft y} = \overline{x} \triangleleft \overline{y}$. Por lo tanto

$$\Phi(v_x v_y - v_{x\triangleright y} v_{x\triangleleft y}) = 0,$$

y se tiene que el morfismo $\Phi : A(X,r) \longrightarrow A(\overline{X},\overline{r})$ está bien definido. Más aún, como $v_{\overline{x}} = v_{\overline{y}}$ si y solo sí $x \sim y$, podemos considerar $\Phi : \frac{A(X,r)}{I} \longrightarrow A(\overline{X},\overline{r})$ bien definido.

Definiremos ahora el morfismo inverso de Φ. Consideremos el morfismo de álgebras $\Psi : T(V_{\overline{X}}) \longrightarrow \frac{A(X,r)}{I}$ tal que $v_{\overline{x}} \to \overline{v_x}$. Observamos que

$$\Psi(v_{\overline{x}} v_{\overline{y}} - v_{\overline{x\triangleright y}} v_{\overline{x\triangleleft y}}) = \overline{v_x}\ \overline{v_y} - \overline{v_{x\triangleright y}}\ \overline{v_{x\triangleleft y}},$$

y como $v_x v_y = v_{x\triangleright y} v_{x\triangleleft y}$ en $A(X,r)$, tenemos $\overline{v_x}\ \overline{v_y} = \overline{v_{x\triangleright y}}\ \overline{v_{x\triangleleft y}}$ en $\frac{A(X,r)}{I}$, por lo que el morfismo $\Psi : A(\overline{X},\overline{r}) \longrightarrow \frac{A(X,r)}{I}$ está bien definido.

Es evidente que Φ es el inverso de Ψ y tenemos el isomorfismo buscado. $\square$

3.1.1. Álgebra cuantizada asociada a soluciones de retracción trivial

Cuando la solución (X,r) que estemos considerando es tal que su retracción es una solución trivial, entonces el álgebra $A(X,r)$ queda caracterizada y de hecho no es otra cosa que un álgebra de polinomios torcidos.

El siguiente resultado se debe al Teorema 4.9 de Gateva-Ivanova y Majid [7]. Nuestro resultado es ligeramente más general en tanto que no pedimos que la solución sea libre de cuadrados, involutiva y con nivel de multipermutación 2, sino sólo que tenga primera retracción trivial; esto es automático para soluciones libres de cuadrados con nivel de multipermutación 2. Primero una observación.

Observación 3.1.4. Sea (X,r) una solución tal que $Ret(X,r)$ es una solución trivial. Usando las relaciones de la Observación 2.2.4 tenemos que los operadores $\mathcal{L}_{\overline{x}}$, $\mathcal{R}_{\overline{y}}$ y $p_{\overline{z}}$ conmutan para cualesquiera $x, y, z \in X$.

Ahora sí, el resultado mencionado.

Proposición 3.1.5. Sea (X, r) una solución de cardinal n con $Ret(X, r)$ una solución trivial. Entonces existe una base $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de V_X y un conjunto de raíces de la unidad $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \subset \mathbb{C}$ tales que $A(X, r) \simeq \mathbb{C}_{\mathbf{q}}[w_i|1 \leq i \leq n]$. Más aún, dicha base está formada por autovectores simultáneos de los operadores $\mathcal{L}_{\overline{x}}$ y $\mathcal{R}_{\overline{y}}$, para cada $x, y \in X$, y de los proyectores, resulta ortogonal y puede tomarse ortonormal.

Demostración. Como $p_{\overline{z}}$ es un proyector es diagonalizable y sus autovalores son 1 o 0. Como $\mathcal{L}_{\overline{x}}$ y $\mathcal{R}_{\overline{y}}$ estan inducidas por biyecciones en el conjunto X, entonces tienen orden finito y por lo tanto también son diagonalizables y sus autovalores son raíces de la unidad. Como mencionamos en 3.1.4, el hecho de que $Ret(X, r)$ sea trivial significa que las funciones $\mathcal{L}_{\overline{x}}$ y $\mathcal{R}_{\overline{y}}$ conmutan entre sí y con las proyecciones $p_{\overline{z}}$, para todos $x, y, z \in X$. Además, como X es la unión disjunta de las clases $\overline{z}$, los proyectores $p_{\overline{z}}$ son ortogonales y descomponen a la identidad, por lo que también conmutan entre ellos.

Por el lema 1.1.2, como los operadores son diagonalizables y conmutan, son simultáneamente diagonalizables, es decir, existe una base de V_X que consiste en autovectores simultáneos de estas transformaciones, digamos $\{w_1, \ldots, w_n\}$. Escribimos $\lambda_{i,\overline{x}}$, resp. $\mu_{i,\overline{y}}$, a los autovalores de w_i con respecto a $\mathcal{L}_{\overline{x}}$, resp. $\mathcal{R}_{\overline{y}}$. Usando que

$$R = \left(\sum_{\overline{x},\overline{y}\in\overline{X}} \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}} \otimes \mathcal{R}_{\overline{y}} \circ p_{\overline{x}} \right) \circ \tau,$$

y que para cada i existe un único $\overline{z}(i)$ tal que $p_{\overline{z}}(w_i) \neq 0$ tenemos

$$R(w_i \otimes w_j) = \lambda_{j,\overline{z}(i)}\mu_{i,\overline{z}(j)} w_j \otimes w_i,$$

que junto a la Observación 3.1.2 brinda la presentación deseada.

Para finalizar, dado que $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ es base ortogonal de V_X y los operadores $\mathcal{L}_{\overline{x}}$, $\mathcal{R}_{\overline{y}}$ y $p_{\overline{z}}$ mandan $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ en si misma, resultan ortogonales para todo $x, y, z \in X$. Con lo cual, sus autovectores también forman una base ortogonal de V_X y podemos tomarla ortonormal. □

3.2. Semigrupos de tipo *I* y el álgebra cuantizada

En esta sección veremos que dada una solución (X, r), el semigrupo inducido $S(X, r) = \langle X|Rel\rangle$ con Rel el conjunto de relaciones cuadráticas

$$Rel = \{x_i x_j = (x_i \triangleright x_j)(x_i \triangleleft x_j)\},$$

es de tipo I y de hecho existe una relación entre $\mathbb{C}[S(X, r)]$ y $A(X, r)$.

Primero recordamos los Teoremas 1.2 y 1.4 de [8]. Empecemos por el Teorema 1.2.

Teorema 3.2.1. Supongamos que Rel es un conjunto de relaciones cuadráticas

$$Rel = \{x_i x_j = u_{j,i}\},$$

que satisface las condiciones 1.3 de la Sección 1.3 del Capítulo 1. Definimos $r : X \times X \longrightarrow X \times X$ como $r(x, x) = (x, x)$ y si $(x_i x_j = x_{j'} x_{i'})$ en Rel tomamos $r(x_i, x_j) = (x_{j'}, x_{i'})$ y $r(x_{j'}, x_{i'}) = (x_i, x_j)$. Entonces r cumple

(a) $r^2 = Id_{X \times X}$;

(b) r satisface la versión conjuntista de la ecuación de Yang-Baxter;

(c) Dados $a, b \in \{1, \dots, n\}$ existen únicos c, d tales que

$$r(x_c, x_a) = (x_d, x_b).$$

Más aún, si $a = b$ entonces $c = d$.

Ahora veamos el Teorema 1.4 de [8]. Recordemos que por la Observación 1.3.2 si S es un semigrupo de tipo I generado por cierto conjunto X de cardinal $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}$ es el semigrupo libre conmutativo generado por un conjunto $\{u_1, \dots, u_n\}$ y $v : \mathcal{U} \longrightarrow S$ es la I-estructura asociada, para todo $u_i \in \mathcal{U}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ existe un único $x_{u_i,j} \in X$ tal que

$$x_{u_i,j} v(u_i) = v(u_i u_j),$$

y $X = \{x_{u_i,j} | j = 1, \dots, n\}$.

Teorema 3.2.2. Sea S de tipo I. Definimos $r : X \times X \longrightarrow X \times X$ por

$$r(x_{u_i,j}, x_{1,i}) = (x_{u_j,i}, x_{1,j}).$$

Entonces r satisface las conclusiones del Teorema 3.2.1. Recíprocamente si $r : X \times X \longrightarrow X \times X$ con $r(x_i, x_j) = (x_{j'}, x_{i'})$ satisface las condiciones (a), (b) y (c) de 3.2.1, entonces el semigrupo $S(X, r) = \langle X | x_i x_j = x_{j'} x_{i'} \rangle$ es de tipo I.

De los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2 se sigue que los semigrupos definidos a partir de las relaciones que satisfacen (*a,b,c) son de tipo I. Además, el Teorema 3.2.2 implica que si (X, r) es una solución involutiva entonces $S(X, r)$ es de tipo I.

Tenemos la siguiente observación.

Observación 3.2.3. Dada una solución (X, r), si notamos $S = S(X, r)$, tenemos

$$A(X, r) \simeq \mathbb{C}[S],$$

donde $\mathbb{C}[S]$ es el álgebra de semigrupo inducida por S.

Consideremos el morfismo de álgebras $\Psi : T(V_X) \longrightarrow \mathbb{C}[S]$ tal que $v_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes v_{x_{i_k}} \mapsto x_{i_1} \dots x_{i_k}$. Como

$$\Psi(v_{x_i} \otimes v_{x_j} - v_{x_{j'}} \otimes v_{x_{i'}}) = x_i x_j - x_{j'} x_{i'} = 0,$$

podemos suponer bien definido $\Psi : A(X,r) \longrightarrow \mathbb{C}[S]$. Por otro lado sea la aplicación lineal $\Phi : \mathbb{C}[S] \longrightarrow A(X,r)$ dada por $x_{i_1} \dots x_{i_k} \mapsto v_{x_{i_1}} \dots v_{x_{i_k}}$, bien definida por estar definida sobre S. Es evidente que $\Phi = \Psi^{-1}$ y por tanto Φ resulta isomorfismo de álgebras, como deseábamos.

Notar que Φ se restringe bien a los monomios de largo $k \in \mathbb{N}$, por lo que induce un isomorfismo de espacios vectoriales $\Phi : A(X,r)_k \longrightarrow \mathbb{C}S_k$.

El siguiente corolario es inmediato del Lema 1.3.3 y la observación anterior.

Corolario 3.2.4. Sean (X,r) una solución involutiva finita de n elementos y $S = S(X,r)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $A(X,r)_k$ el conjunto de monomios de largo k de $A(X,r)$, entonces

$$A(X,r) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A(X,r)_k.$$

3.3. Ejemplos

A continuación veremos varias formas de describir el álgebra $A(X,r)$ a partir de lo visto en las secciones anteriores y en los preliminares sobre extensiones de Ore y semigrupos de tipo I. Por el resto de la sección notamos por $\mathcal{B}_X = \{v_x\}_{x \in X}$ a la base canónica del espacio vectorial generado por X, V_X. Recordemos además que si $\{w_1, \dots, w_n\}$ es una base de V_X que diagonaliza simultáneamente a los operadores $\mathcal{L}_{\overline{x}}$, $\mathcal{R}_{\overline{x}}$, para todo $x \in X$, y a las proyecciones, usamos las notaciones $\lambda_{i,\overline{x}}$ y $\mu_{i,\overline{x}}$ para representar a los autovalores asociados al autovector v_i correspondiente a los operadores $\mathcal{L}_{\overline{x}}$ y $\mathcal{R}_{\overline{x}}$ respectivamente. En el caso en que $\overline{X}$ es un singleton, notamos simplemente λ_i y μ_i.

Comencemos analizando el álgebra cuantizada asociada al ejemplo más simple que vimos, el Ejemplo 2.1.3.

Ejemplo 3.3.1. Consideremos $X = \{1,2\}$ y $r(x,y) = (y,x)$. Es decir, la solución flip de cardinal 2. Por definición r es una solución de permutación dada por las funciones $\mathcal{L} = \mathcal{R} = Id_X$.

Como la retracción de la solución es una solución trivial, por la Proposición 3.1.5 sabemos que $A(X,r)$ es un álgebra de polinomios torcidos sobre $\mathbb{C}$. Además, es evidente que $\mathcal{B}_X$ está formada por autovectores de $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ y las proyecciones, con autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$. Entonces

$$A(X,r) \simeq \mathbb{C}_{\mathbf{q}}[v_1, v_2],$$

donde

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_{i,j})_{i,j} = (\lambda_j \mu_i)_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es decir, $A(X,r) \simeq \mathbb{C}[v_1, v_2]$.

En el siguiente ejemplo, aunque sigue siendo de las soluciones más simples, veremos que el análisis de $A(X,r)$ se vuelve arduo. Sin embargo la Proposición 3.1.5 simplifica el estudio.

Ejemplo 3.3.2. Consideremos la solución del Ejemplo 2.1.5, es decir SI(2,2) tal que $X = \{1, 2\}$ y r de tabla

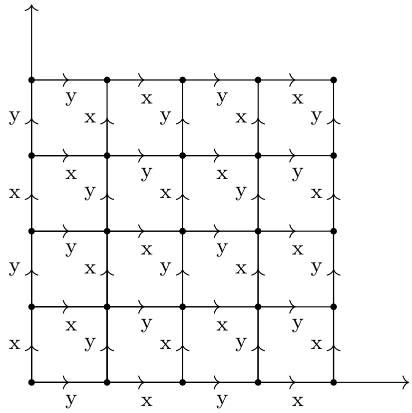
x	1 2
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	(12)
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	(12)

Por definición $A(X, r) = \mathbb{C}\langle xy | x^2 = y^2\rangle$.

Hallaremos dos bases para $A(X, r)$. Por un lado veremos que existe una base que nos permite escribir los monomios de $\mathbb{C}\langle xy|x^2 = y^2\rangle$ de forma explícita a partir de una idea gráfica asociada a las variables x e y; y por otro, aplicaremos la Proposición 3.1.5.

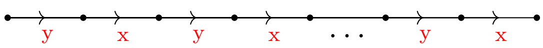
Afirmamos que $\mathcal{B} = \{(yx)^a y^{2\epsilon}(xy)^b x^\eta | a, b \in \mathbb{N}, \epsilon, \eta \in \{0, 1\}\}$ es base de $A(X, r)$. Debemos ver que es un conjunto generador y linealmente independiente.

La correcta demostración de que $\mathcal{B}$ es un conjunto generador no aporta nuevas ideas porque consiste de cálculos prolongados, por lo cual sólo daremos una idea intuitiva de la razón de ser de $\mathcal{B}$ dada por el siguiente grafo que representa a x e y:

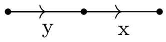


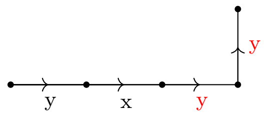
Entendemos a los generadores x e y como movimientos en el grafo anterior y veremos que todo monomio en $\mathbb{C}\langle xy|x^2 = y^2\rangle$, es decir, todo camino en el grafo, puede expresarse a partir de los movimientos definidos por $\mathcal{B}$. Para ello basta ver que cualquier posición del grafo puede alcanzarse a partir de movimientos dados por $(yx)^a y^{2\epsilon}(xy)^b x^\eta$ para ciertos $a, b \in \mathbb{N}, \epsilon, \eta \in \{0, 1\}$.

Analicemos los movimientos que representan los elementos de $\mathcal{B}$. En primer lugar observamos que $(yx)^a$ representa moverse $2a$ unidades sobre el eje x

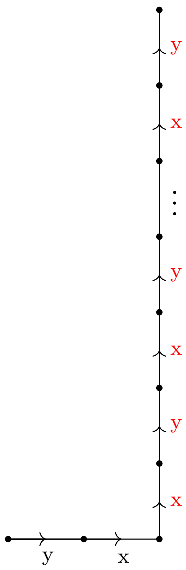


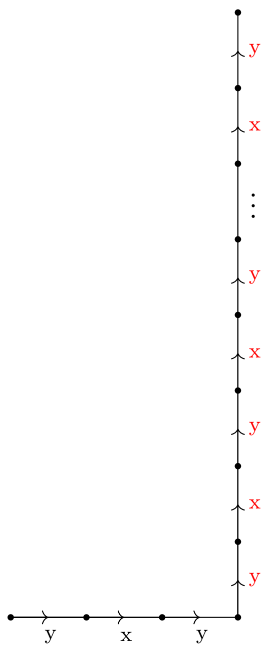
Para entender los movimientos que nos aportan los restantes monomios suponemos por ejemplo $a = 1$. El monomio $y^{2\epsilon}$ representa o bien quedarse en la última posición ($\epsilon = 0$) o bien moverse una unidad más en el eje x y luego una unidad en el eje y ($\epsilon = 1$), es decir

Si $\epsilon = 0$ 

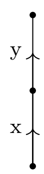
Si $\epsilon = 1$ 

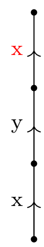
El término $(xy)^b$ representa $2b$ movimientos sobre el eje y

Si $\epsilon = 0$ 

Si $\epsilon = 1$ 

Finalmente supongamos $b = 1$. El monomio restante x^η representa quedarse en la última posición ($\eta = 0$) ó desplazarse una unidad mas en el eje y ($\eta = 1$)

Si $\eta = 0$ 

Si $\eta = 1$ 

Para finalizar, veamos que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente. Para eso consideremos el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $Rep := \langle (n,m) | n, m \in \mathbb{N} \rangle$ y las transformaciones lineales $\cdot x : Rep \longrightarrow Rep$ y $\cdot y : Rep \longrightarrow Rep$ dadas por

$$(n,m) \cdot x = \begin{cases} (n, m+1) & \text{si } n \equiv m \pmod 2 \\ (n+1, m) & \text{si no} \end{cases},$$

y

$$(n,m) \cdot y = \begin{cases} (n+1, m) & \text{si } n \equiv m \pmod 2 \\ (n, m+1) & \text{si no} \end{cases}.$$

Es decir, tenemos un morfismo de álgebras $\Phi : A(X,r) \longrightarrow End(Rep)$, $x \mapsto \big((n,m) \mapsto (n,m) \cdot x\big)$, $y \mapsto \big((n,m) \mapsto (n,m) \cdot y\big)$. Una forma de ver que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente es probando que $\Phi(\mathcal{B})$ lo es. Para eso basta ver que existe un par $(n,m) \in$ *Rep* tal que su imágen vía los elementos de $\mathcal{B}$ está unívocamente determinada por n y m. Nuevamente es útil mirar el grafo. Si tomamos el elemento $(0,0)$ obtenemos

$$(0,0)\cdot(yx)^a y^{2\epsilon}(xy)^b x^\eta = a(2,0)+\epsilon(1,1)+b(0,2)+\eta(0,1) = (2a+\epsilon, 2b+\eta+\epsilon).$$

Si $(n,m) = (2a+\epsilon, 2b+\eta+\epsilon)$, entonces a y ϵ quedan determinados por el algoritmo de división aplicado a n, y por la misma razón b y η quedan determinados por $m-\epsilon$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es base de $A(X,r)$.

Por otro lado, como la retracción de (X,r) es trivial, la Proposición 3.1.5 asegura la existencia de una base $\{w_1,w_2\}$ de V_X formada por autovectores simultáneos de $\mathcal{L}=\mathcal{R}=(12)$ y de las proyecciones tal que $A(X,r)\simeq \mathbb{C}_{\mathbf{q}}[w_1,w_2]$ para cierta $\mathbf{q}\in\mathbb{C}^{2\times 2}$. En efecto, la base dada por

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1+v_2;\\ w_2 &= v_1-v_2, \end{aligned}$$

es base de autovectores de $\mathcal{L}=\mathcal{R}=(12)$ y de las proyecciones, con autovalores $\lambda_1=\mu_1=1$ y $\lambda_2=\mu_2=-1$. Aunque esta no es la base normalizada de la proposición nos sirve para caracterizar $A(X,r)$. Tenemos $A(X,r)\simeq\mathbb{C}_{\mathbf{q}}[w_1,w_2]$, con

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_{i,j})_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Vemos así que la Proposición 3.1.5 simplifica la caracterización del álgebra.

Analicemos un ejemplo un poco más complejo como el Ejemplo 2.1.9 y en el cual el álgebra $A(X,r)$ no resulta íntegra.

Ejemplo 3.3.3. Sean $X=\{1,2,\ldots,8\}$ y r tal que

x	1 2	3 4	5 6	7 8
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	e	$(34)(78)$	$(34)(78)$	e
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	e	$(34)(56)$	e	$(34)(56)$

Es decir, tenemos las relaciones $1\sim 2$, $3\sim 4$, $5\sim 6$ y $7\sim 8$ y los operadores asociados

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\overline{1}} = \mathcal{L}_{\overline{7}} &= e; & \mathcal{L}_{\overline{3}} = \mathcal{L}_{\overline{5}} &= (34)(78);\\ \mathcal{R}_{\overline{1}} = \mathcal{R}_{\overline{5}} &= e; & \mathcal{R}_{\overline{3}} = \mathcal{R}_{\overline{7}} &= (34)(56). \end{aligned}$$

La base $\{w_1,\ldots,w_8\}$ de V_X que sigue está formada por autovectores simultáneos de $\mathcal{L}_{\overline{1}}$, $\mathcal{L}_{\overline{3}}$, $\mathcal{R}_{\overline{1}}$, $\mathcal{R}_{\overline{3}}$ y de los proyectores:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1; & w_2 &= v_2;\\ w_3 &= v_3+v_4; & w_4 &= v_3-v_4;\\ w_5 &= v_5+v_6; & w_6 &= v_5-v_6;\\ w_7 &= v_7+v_8; & w_8 &= v_7-v_8, \end{aligned}$$

con autovalores

$$\begin{aligned}
&\lambda_{i,\overline{1}} = \mu_{i,\overline{1}} = \mu_{i,\overline{5}} = \lambda_{i,\overline{7}} = 1, \text{ para todo } 1 \leq i \leq 8;\\
&\lambda_{i,\overline{3}} = \lambda_{i,\overline{5}} = 1;\ \lambda_{j,\overline{3}} = \lambda_{j,\overline{5}} = -1, \text{ para todo } i \in \{1,2,3,5,6,7\},\ j \in \{4,8\};\\
&\mu_{i,\overline{3}} = \mu_{i,\overline{7}} = 1;\ \mu_{j,\overline{3}} = \mu_{j,\overline{7}} = -1, \text{ para todo } i \in \{1,2,3,5,7,8\},\ j \in \{4,6\}.
\end{aligned}$$

Por la Proposición 3.1.5

$$A(X,r) \simeq \mathbb{C}_{\mathbf{q}}[w_i | 1 \leq i \leq 8],$$

con

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_{i,j})_{i,j} = (\lambda_{j,\overline{i}}\mu_{i,\overline{j}})_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notar que

$$\begin{aligned}
w_3w_8 &= -w_8w_3 = -w_3w_8;\\
w_4w_7 &= -w_7w_4 = w_4w_7;\\
w_5w_4 &= -w_5w_4 = -w_4w_5;\\
w_5w_8 &= -w_8w_5 = -w_5w_8;\\
w_6w_3 &= -w_3w_6 = -w_6w_3;\\
w_6w_7 &= -w_7w_6 = -w_6w_7,
\end{aligned}$$

con lo cual $w_3w_8 = w_4w_7 = w_5w_4 = w_5w_8 = w_6w_3 = w_6w_7 = 0$.

El siguiente ejemplo es una aplicación de la Proposición 3.1.3.

Ejemplo 3.3.4. Sea SI(6,400) tal que $X = \{1,2,\dots,6\}$ y r está dada por

x	1 2 3 4	5	6
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	(34)(56)	(1324)(56)	(1423)(56)
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	(34)(56)	(1324)(56)	(1423)(56)

Sucede que (X,r) es una solución tal que su retracción no es trivial, por lo que no podemos aplicar la Proposición 3.1.5.

Analicemos qué forma tiene la solución inducida $(\overline{X},\overline{r})$. Las clases de equivalencia son $\overline{1} = \{1,2,3,4\}$, $\overline{5} = \{5\}$ y $\overline{6} = \{6\}$, y $\overline{r}$ es tal que

$\overline{x}$	$\overline{1}\ \overline{5}\ \overline{6}$
$\mathcal{L}_{[\overline{x}]}$	$(\overline{5}\overline{6})$
$\mathcal{R}_{[\overline{x}]}$	$(\overline{5}\overline{6})$

Cuya retracción es trivial, por lo que podemos aplicar la Proposición 3.1.5. En efecto, tenemos que $\{w_1, w_2, w_3\}$ tal que

$$\begin{aligned} w_1 &= v_{\overline{1}}; \\ w_2 &= v_{\overline{5}} + v_{\overline{6}}; \\ w_3 &= v_{\overline{5}} - v_{\overline{6}}, \end{aligned}$$

es base de $V_{\overline{X}}$ formada por autovectores simultáneos de los operadores de $\overline{r}$ y de las proyecciones, con autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ y $\lambda_3 = \mu_3 = -1$. Entonces

$$A(\overline{X}, \overline{r}) \simeq \mathbb{C}_{\mathbf{q}}[w_i | 1 \leq i \leq 3],$$

con

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_{i,j})_{i,j} = (\lambda_j \mu_i)_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente por la Proposición 3.1.3 tenemos que $A(\overline{X}, \overline{r}) \simeq \frac{A(X,r)}{I}$, donde I es el ideal bilátero de $A(X, r)$ generado por $\{v_x - v_y : x \sim y\}_{x,y \in X}$. Es decir, si bien no conseguimos caracterizar $A(X, r)$, sí obtuvimos información de un cociente de la misma.

En ocasiones, aunque la solución no tenga retracción trivial, podemos analizar la estructura interna de $A(X, r)$ descomponiéndola en bloques formados por las subálgebras cuantizadas inducidas por ciertas subsoluciones.

Ejemplo 3.3.5. Sea la solución SI(6,532) pero donde intercambiamos $3 \leftrightarrow 5$ y $4 \leftrightarrow 6$ para más comodidad. Es decir, sean $X = \{1, \dots, 6\}$ y r tal que

x	1 2 3 4	5	6
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	(12)(34)	(12)(34)(56)	(13)(24)(56)
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	(12)(34)	(12)(34)(56)	(13)(24)(56)

Sea $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Tenemos las relaciones $1 \sim 2 \sim 3 \sim 4$ por lo que $\overline{Y} = \{\overline{1}\}$ y nos queda una solución trivial. Por la Proposición 3.1.5 sabemos que $A(Y, r_Y) \simeq \mathbb{C}_{\mathbf{q}}[y_1, y_2, y_3, y_4]$, donde una elección de los y_j en términos de la base canónica $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $A(Y, r_Y)$ es

$$y_1 = v_1 + v_2; \qquad y_2 = v_1 - v_2; \qquad y_3 = v_3 + v_4; \qquad y_4 = v_3 - v_4,$$

y donde

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideremos $Z = \{5, 6\}$. Como $5 \sim 6$, la subsolución (Z, r_Z) tiene retracción trivial y por la Proposición 3.1.5 tenemos $A(Z, r_Z) \simeq \mathbb{C}_{\mathbf{q}'}[z_5, z_6]$ donde elegimos $z_5 = v_5$ y $z_6 = v_6$ y con

$$\mathbf{q}' = (\mathbf{q}'_{i,j})_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como Y y Z inducen subsoluciones, tenemos $r(Y \times Y) = Y \times Y$ y $r(Z \times Z) = Z \times Z$, que sumado al hecho de que r es no degenerada implica que $r(Y \times Z) = Z \times Y$ y que $r(Z \times Y) = Y \times Z$, es decir, r es tal que

r	Y	Z
Y	YY	ZY
Z	YZ	ZZ

Esta tabla indica que cada vez que tengamos un producto de la forma yz en $A(X, r)$ con $y \in A(Y, r_Y)$ y $z \in A(Z, r_Z)$, lo podremos reescribir como un producto de la forma $z'y'$ para ciertos $y' \in A(Y, r_Y)$ y $z' \in A(Z, r_Z)$, y viceversa. Por lo que sospechamos que dadas $\mathcal{B}_{A(Y,r_Y)} = \{y_1^{a_1} y_2^{a_2} y_3^{a_3} y_4^{a_4} | a_1, \ldots, a_4 \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{B}_{A(Z,r_Z)} = \{z_5^{a_5} z_6^{a_6} | a_5, a_6 \in \mathbb{N}\}$ las bases de $A(Y, r_Y)$ y de $A(Z, r_Z)$ inducidas por los isomorfismos anteriores, el conjunto

$$\mathcal{B} = \{yz | y \in \mathcal{B}_{A(Y,r_Y)}, z \in \mathcal{B}_{A(Z,r_Z)}\},$$

será cuanto menos un conjunto generador de $A(X, r)$. Nuestro objetivo es ver que de hecho $\mathcal{B}$ es base de $A(X, r)$.

En primer lugar observamos que las variables y_i y z_j se relacionan entre sí para todo $1 \leq i \leq 4, 5 \leq j \leq 6$ de la siguiente forma. Por un lado

$$\begin{aligned} z_5 y_1 &= z_5(v_1 + v_2) = (v_1 + v_2) z_5 = y_1 z_5; \\ z_5 y_2 &= z_5(v_1 - v_2) = (v_2 - v_1) z_5 = -y_2 z_5; \\ z_5 y_3 &= z_5(v_3 + v_4) = (v_3 + v_4) z_5 = y_3 z_5; \\ z_5 y_4 &= z_5(v_3 - v_4) = (v_4 - v_3) z_5 = -y_4 z_5. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Y por otro

$$\begin{aligned} z_6 y_1 &= z_6(v_1 + v_2) = (v_3 + v_4) z_6 = y_3 z_6; \\ z_6 y_2 &= z_6(v_1 - v_2) = (v_3 - v_4) z_6 = y_4 z_6; \\ z_6 y_3 &= z_6(v_3 + v_4) = (v_1 + v_2) z_6 = y_1 z_6; \\ z_6 y_4 &= z_6(v_3 - v_4) = (v_1 - v_2) z_6 = y_2 z_6. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Afirmamos que $\mathcal{B}_{A(Z,r_Z)}$ es una base de $A(X, r)$ como $A(Y, r_Y)$-módulo a izquierda.

Notación. Dados $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{N}^4$ y $B = (a_5, a_6) \in \mathbb{N}^2$ escribimos

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^A &= y_1^{a_1} y_2^{a_2} y_3^{a_3} y_4^{a_4}; \\ \mathbf{Z}^B &= z_5^{a_5} z_6^{a_6}. \end{aligned}$$

Dado un monomio cualquiera de $A(X, r)$ podemos escribirlo como

$$\prod_{1 \leq j \leq k} \mathbf{Z}^{B_j} \mathbf{Y}^{A_j},$$

para cierto $k \in \mathbb{N}$. Omitimos los conjuntos a los que pertenecen A_j y B_j porque son evidentes. Notar que podemos considerar a las variables y_j ordenadas porque sabemos como interactúan entre ellas.

Empecemos por ver que $\mathcal{B}_{A(Z,r_Z)}$ es un conjunto generador. Lo haremos por inducción en k. Supongamos que $k=1$. Usando las reglas de interacción 3.2 y 3.3 obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}^B\mathbf{Y}^A &= z_5^{a_5}z_6^{a_6}y_1^{a_1}y_2^{a_2}y_3^{a_3}y_4^{a_4}\\ &= z_5^{a_5}y_3^{a_1}y_4^{a_2}y_1^{a_3}y_2^{a_4}z_6^{a_6}\\ &= (-1)^{a_5(a_2+a_4)}y_3^{a_1}y_4^{a_2}y_1^{a_3}y_2^{a_4}z_5^{a_5}z_6^{a_6}\\ &= \mathbf{Y}^{A'}\mathbf{Z}^B,\end{aligned}$$

para cierto $A'\in\mathbb{N}^4$. Supongamos $k>1$, se tiene

$$\begin{aligned}\prod_{1\le j\le k}\mathbf{Z}^{B_j}\mathbf{Y}^{A_j} &= \mathbf{Z}^{B_1}\mathbf{Y}^{A_1}\prod_{2\le j\le k}\mathbf{Z}^{B_j}\mathbf{Y}^{A_j}\\ &= \mathbf{Y}^{A'}\mathbf{Z}^{B_1}\prod_{2\le j\le k}\mathbf{Z}^{B_j}\mathbf{Y}^{A_j}\\ &= \mathbf{Y}^{A'}\mathbf{Z}^{B_1}\mathbf{Y}^{A''}\mathbf{Z}^{B'}\\ &= \mathbf{Y}^{A'''}\mathbf{Z}^{B''},\end{aligned}$$

donde en la segunda y cuarta igualdad aplicamos el caso base y en la tercera la hipótesis inductiva. Por lo tanto $\mathcal{B}_{A(Z,r_Z)}$ genera $A(X,r)$ como $A(Y,r_Y)$-módulo a izquierda. Por último, es claro que $\mathcal{B}_{A(Z,r_Z)}$ es linealmente independiente.

Consideremos ahora el conjunto

$$\mathcal{B}_{A(X,r)} = \{\mathbf{Y}^A\mathbf{Z}^B | A\in\mathbb{N}^4, B\in\mathbb{N}^2\},$$

con las notaciones anteriores. Afirmamos que es una base para $A(X,r)$ como álgebra sobre $\mathbb{C}$.

La cuenta anterior nos asegura que todo elemento en $A(X,r)$ puede escribirse en términos de $\mathcal{B}_{A(X,r)}$. Resta ver que es linealmente independiente. Gracias al Corolario 3.2.4 tenemos

$$A(X,r) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} A(X,r)_k. \tag{3.4}$$

Como $\mathcal{B}_{A(X,r)}$ es un conjunto generador el morfismo de espacios vectoriales $\Phi : A(Y,r_Y)\otimes A(Z,r_Z)\longrightarrow A(X,r)$ definido por $\mathbf{Y}^A\otimes\mathbf{Z}^B\mapsto\mathbf{Y}^A\mathbf{Z}^B$ es sobreyectivo. De hecho se restringe bien a los monomios de largo k, i.e. $\Phi : \big(A(Y,r_Y)\otimes A(Z,r_Z)\big)_k\longrightarrow A(X,r)_k$ está bien definido, donde

$$dim\big(\big(A(Y,r_Y)\otimes A(Z,r_Z)\big)_k\big) = \sum_{r,s\in\mathbb{N}|r+s=k} dim(A(Y,r_Y)_r)dim(A(Z,r_Z)_s).$$

Afirmamos que $dim\big(\big(A(Y,r_Y)\otimes A(Z,r_Z)\big)_k\big) = dim(A(X,r)_k)$. Por la Observación 3.2.3 y el Lema 1.3.3,

$$\begin{aligned}dim(A(Y,r_Y)_r) &= dim(\mathbb{C}S(Y,r_Y)_r) = dim(\mathbb{C}[y_1,\dots,y_4]_r);\\ dim(A(Z,r_Z)_s) &= dim(\mathbb{C}S(Z,r_Z)_s) = dim(\mathbb{C}[z_5,z_6]_s),\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\sum_{r,s\in\mathbb{N}|r+s=k} dim(A(Y,r_Y)_r)dim(A(Z,r_Z)_s) &= \sum_{r,s\in\mathbb{N}|r+s=k} dim(\mathbb{C}[y_1,\dots,y_4]_r)dim(\mathbb{C}[z_5,z_6]_s)\\ &= dim(\mathbb{C}[x_1,\dots,x_6]_k)\\ &= dim(\mathbb{C}S(X,r)_k)\\ &= dim(A(X,r)_k).\end{aligned}$$

Por lo que el morfismo $\Phi : \big(A(Y,r_Y)\otimes A(Z,r_Z)\big)_k \longrightarrow A(X,r)_k$ resulta un isomorfismo. Luego $\Phi : A(Y,r_Y)\otimes A(Z,r_Z) \longrightarrow A(X,r)$ es un isomorfismo.

Finalmente, como $\mathcal{B}_{A(X,r)}$ es un conjunto generador que podemos descomponer como

$$\mathcal{B}_{A(X,r)} = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_{A(X,r)_k},$$

con

$$\mathcal{B}_{A(X,r)_k} = \{\mathbf{Y}^A\mathbf{Z}^B | a_1+\cdots+a_6=k\}$$

base de $A(X,r)_k$ y tal que

$$|\mathcal{B}_{A(X,r)_k}| = dim\Big(\big(A(Y,r_Y)\otimes A(Z,r_Z)\big)_k\Big) = dim(A(X,r)_k),$$

entonces

$$|\mathcal{B}_{A(X,r)}| = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\mathcal{B}_{A(X,r)_k}| = \sum_{k\in\mathbb{N}} dim(A(X,r)_k) = dim(A(X,r)),$$

donde la última igualdad se debe a 3.4. Por lo tanto $\mathcal{B}_{A(X,r)}$ es linealmente independiente.

Otra forma de hallar $A(X,r)$ cuando la retracción de (X,r) no es trivial es encontrar una subálgebra $A(Y,r_Y)$ de modo que $A(X,r)$ resulte una extensión de Ore sobre ella. Esto está en línea con el ejemplo anterior en tanto que algunos de los bloques que descomponen a r son singletons. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.3.6. Consideremos la solución SI(6,55) pero intercambiando $4 \leftrightarrow 6$ para más comodidad, i.e. $X = \{1,\dots,6\}$ y r tal que

x	1	2 3	4 5	6
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	e	(45)	(23)	(25)(34)
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	e	(45)	(23)	(25)(34)

Sea $Y = \{1,2,3,4,5\}$. Tenemos las relaciones $2\sim 3$ y $4\sim 5$ por lo que $\overline{Y} = \{\overline{1},\overline{2},\overline{4}\}$ y $\overline{r}_{\overline{Y}}$ está dada por

$\overline{y}$	$\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{4}$
$\mathcal{L}_{[\overline{y}]}$	e
$\mathcal{R}_{[\overline{y}]}$	e

Es decir, $Ret(Y, r_Y)$ es trivial. Aplicando la Proposición 3.1.5 tenemos $A(Y, r_Y) \simeq \mathbb{C}_{\mathbf{q}}[y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]$, donde los y_j son los autovalores simultáneos de los operadores $\mathcal{L}_{\bar{i}}$, $\mathcal{R}_{\bar{i}}$ con $i \in Y$, y las proyecciones, que en términos de la base canónica $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ de $A(Y, r_Y)$ son

$$y_1 = v_1; \qquad y_2 = v_2 + v_3; \qquad y_3 = v_2 - v_3; \qquad y_4 = v_4 + v_5; \qquad y_5 = v_4 - v_5,$$

y

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dado $z_6 = v_6$ tenemos las siguientes reglas de conmutación:

$$z_6 y_1 = v_6 v_1 = v_1 v_6 = y_1 z_6;$$

$$z_6 y_2 = v_6(v_2+v_3) = v_6 v_2 + v_6 v_3 = v_{6\triangleright 2} v_{6\triangleleft 2} + v_{6\triangleright 3} v_{6\triangleleft 3} = v_5 v_6 + v_4 v_6 = (v_4+v_5)v_6 = y_4 z_6;$$

$$z_6 y_3 = v_6(v_2-v_3) = v_6 v_2 - v_6 v_3 = v_{6\triangleright 2} v_{6\triangleleft 2} - v_{6\triangleright 3} v_{6\triangleleft 3} = v_5 v_6 - v_4 v_6 = (v_5-v_4)v_6 = -y_5 z_6;$$

$$z_6 y_4 = v_6(v_4+v_5) = v_6 v_4 + v_6 v_5 = v_{6\triangleright 4} v_{6\triangleleft 4} + v_{6\triangleright 5} v_{6\triangleleft 5} = v_3 v_6 + v_2 v_6 = (v_2+v_3)v_6 = y_2 z_6;$$

$$z_6 y_5 = v_6(v_4-v_5) = v_6 v_4 - v_6 v_5 = v_{6\triangleright 4} v_{6\triangleleft 4} - v_{6\triangleright 5} v_{6\triangleleft 5} = v_3 v_6 - v_2 v_6 = (v_3-v_2)v_6 = -y_3 z_6;$$

Por cuentas análogas al Ejemplo 3.3.5 el conjunto $\mathcal{B}_{A(X,r)} = \{\mathbf{Y}^A z_6^i | A \in \mathbb{N}^5, i \in \mathbb{N}\}$ resulta una base de $A(X, r)$.

Sea $R_0 = A(Y, r_Y)$. Afirmamos que $A(X, r)$ es isomorfa a una extensión de Ore sobre R_0. En efecto, sea $\sigma : R_0 \longrightarrow R_0$ dada por

$$\sigma(y_1) = y_1; \qquad \sigma(y_2) = y_4; \qquad \sigma(y_3) = -y_5; \qquad \sigma(y_4) = y_2; \qquad \sigma(y_5) = -y_3.$$

Debemos ver que $A(X, r) \simeq R_0[z, \sigma]$. Para eso usaremos la propiedad universal de las extensiones de Ore. Sea $\Phi : R_0 \longrightarrow A(X, r)$ el morfismo de álgebras inducido por la inclusión $R_0 = A(Y, r_Y) \subset A(X, r)$. Notar que el elemento $z_6 \in A(X, r)$ es tal que

$$z_6 \Phi(r) = \Phi(\sigma(r)) z_6, \text{ para todo } r \in R_0.$$

Entonces por el Lema 1.2.5 existe un único morfismo de álgebras $\Psi : R_0[z, \sigma] \longrightarrow A(X, r)$ tal que $\Psi|_{R_0} = \Phi$ y $\Psi(z) = z_6$.

Ahora bien, por definición de la extensión de Ore tenemos que el conjunto $\{z^i | i \in \mathbb{N}\}$ es base de $R_0[z, \sigma]$ como módulo sobre R_0. Con lo cual el conjunto $\{\mathbf{Y}^A z^i | A \in \mathbb{N}^5, i \in \mathbb{N}\}$ es base de $R_0[z, \sigma]$. Es decir, Ψ es un morfismo de álgebras que manda $\{\mathbf{Y}^A z^i | A \in \mathbb{N}^5, i \in \mathbb{N}\}$ en $\mathcal{B}_{A(X,r)}$, por lo que resulta un isomorfismo. Por lo tanto $A(X, r)$ es una extensión de Ore sobre R_0.

Puede ocurrir que $A(X, r)$ sea no sólo una extensión de Ore sino una extensión de Ore iterada sobre cierta subálgebra $A(Y, r_Y)$ como veremos a continuación.

Ejemplo 3.3.7. Sea la solución SI(6,348) dada por $X = \{1, \ldots, 6\}$ y r tal que

x	1	2	3 6	4	5
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	(45)	(36)(45)	(14)(25)(36)	(12)	(12)(36)
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	(45)	(36)(45)	(14)(25)(36)	(12)	(12)(36)

Sea $Y = \{1, 2, 4, 5\}$. Tenemos que r_Y está dada por

y	1 2	4 5
$\mathcal{L}_{\overline{y}}$	(45)	(12)
$\mathcal{R}_{\overline{y}}$	(45)	(12)

Cuya retracción es trivial, por lo que aplicando la Proposición 3.1.5 es $A(Y, r_Y) \simeq \mathbb{C}_{\mathbf{q}}[y_1, y_2, y_4, y_5]$, con

$$y_1 = v_1 + v_2; \qquad y_2 = v_1 - v_2; \qquad y_4 = v_4 + v_5; \qquad y_5 = v_4 - v_5;$$

y

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Afirmamos que $A(X, r)$ es una extensión de Ore iterada sobre $A(Y, r_Y)$.
En primer lugar notemos que

$$(z_3+z_6)(v_1+v_2) = z_3(v_1+v_2)+z_6(v_1+v_2) = v_4z_3+v_5z_6+v_4z_6+v_5z_3 = (v_4+v_5)(z_3+z_6);$$

$$(z_3+z_6)(v_1-v_2) = z_3(v_1-v_2)+z_6(v_1-v_2) = v_4z_3-v_5z_6+v_4z_6-v_5z_3 = (v_4-v_5)(z_3+z_6);$$

$$(z_3+z_6)(v_4+v_5) = z_3(v_4+v_5)+z_6(v_4+v_5) = v_1z_3+v_2z_6+v_1z_6+v_2z_3 = (v_1+v_2)(z_3+z_6);$$

$$(z_3+z_6)(v_4-v_5) = z_3(v_4-v_5)+z_6(v_4-v_5) = v_1z_3-v_2z_6+v_1z_6-v_2z_3 = (v_1-v_2)(z_3+z_6);$$

y que

$$(z_3-z_6)(v_1+v_2) = z_3(v_1+v_2)-z_6(v_1+v_2) = v_4z_3+v_5z_6-v_4z_6-v_5z_3 = (v_4-v_5)(z_3-z_6);$$

$$(z_3-z_6)(v_1-v_2) = z_3(v_1-v_2)-z_6(v_1-v_2) = v_4z_3-v_5z_6-v_4z_6+v_5z_3 = (v_4+v_5)(z_3-z_6);$$

$$(z_3-z_6)(v_4+v_5) = z_3(v_4+v_5)-z_6(v_4+v_5) = v_1z_3+v_2z_6-v_1z_6-v_2z_3 = (v_1-v_2)(z_3-z_6);$$

$$(z_3-z_6)(v_4-v_5) = z_3(v_4-v_5)-z_6(v_4-v_5) = v_1z_3-v_2z_6-v_1z_6+v_2z_3 = (v_1+v_2)(z_3-z_6).$$

Por lo que tomando $Z = \{3, 6\}$, como (Z, r_Z) es de retracción trivial, la Proposición 3.1.5 asegura que $A(Z, r_Z) \simeq \mathbb{C}_{\mathbf{q}'}[w_1, w_2]$, con $w_1 = z_3 + z_6$, $w_2 = z_3 - z_6$ y $\mathbf{q}' \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Repitiendo los cálculos del Ejemplo 3.3.5 tenemos que $\mathcal{B}_{A(X,r)} = \{\mathbf{Y}^A(z_3 + z_6)^i(z_3 - z_6)^j | A \in \mathbb{N}^4, i, j \in \mathbb{N}\}$ es base de $A(X, r)$.

Llamemos $R_0 = A(Y, r_Y)$.

Sea $\sigma_0 : R_0 \longrightarrow R_0$ tal que

$$\sigma_0(y_1) = y_4; \sigma_0(y_2) = y_5; \sigma_0(y_4) = y_1; \sigma_0(y_5) = y_2,$$

y tomamos $R_1 := R_0[s, \sigma_0]$.

Sea $\sigma_1 : R_1 \longrightarrow R_1$ dada por

$$\sigma_1(y_1) = y_5; \sigma_1(y_2) = y_4; \sigma_1(y_4) = y_2; \sigma_1(y_5) = y_1; \sigma(s) = -s,$$

y tomamos $R_2 := R_1[t, \sigma_1]$.

Veamos que $A(X,r) \simeq R_2$. Sea $\Phi_0 : R_0 \longrightarrow A(X,r)$ el morfismo de álgebras inducido por la inclusión $R_0 \subset A(X,r)$. Como el elemento $z_3 + z_6 \in A(X,r)$ es tal que

$$(z_3 + z_6)\Phi(r) = \Phi(\sigma(r))(z_3 + z_6), \text{ para todo } r \in R_0,$$

entonces por el Lema 1.2.5 existe un único morfismo de álgebras $\Psi_0 : R_1 \longrightarrow A(X,r)$ tal que $\Psi_0|_{R_0} = \Phi$ y $\Psi_0(s) = z_3 + z_6$. De nuevo, como $z_5 - z_6 \in A(X,r)$ es tal que

$$(z_3 - z_6)\Psi_0(r) = \Psi_0(\sigma(r))(z_3 - z_6), \text{ para todo } r \in R_1,$$

por el Lema 1.2.5 existe un único morfismo de álgebras $\Psi : R_2 \longrightarrow A(X,r)$ tal que $\Psi|_{R_1} = \Phi$ y $\Psi(t) = z_3 - z_6$.

Resta ver que Ψ es isomorfismo. Por definición de extensión de Ore, $\{s^i t^j | i,j \in \mathbb{N}\}$ es base de R_2 como módulo sobre R_0, con lo cual el conjunto $\{\mathbf{Y}^A s^i t^j | A \in \mathbb{N}^4, i,j \in \mathbb{N}\}$ es base de R_2.

Finalmente como Ψ manda $\{\mathbf{Y}^A s^i t^j | A \in \mathbb{N}^4, i,j \in \mathbb{N}\}$ en $\mathcal{B}_{A(X,r)}$, resulta un isomorfismo y por lo tanto $A(X,r)$ es una extensión de Ore iterada sobre $A(Y, r_Y)$.

Por supuesto no siempre ocurre que $A(X,r)$ es una extensión de Ore de alguna subálgebra inducida por una subsolución.

Ejemplo 3.3.8. Sea SI(6,62) donde intercambiamos $2 \leftrightarrow 5$ y $3 \leftrightarrow 6$, es decir, $X = \{1, \dots, 6\}$ y r definida por

x	1	2 3 4	5	6
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	e	(23)(56)	(234)	(243)
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	e	(23)(56)	(234)	(243)

Tomemos los subconjuntos r-invariantes $Y = \{1,2,3,4\}$ y $Z = \{5,6\}$. Como $Ret(Y, r_Y)$ y $Ret(Z, r_Z)$ son triviales la Proposición 3.1.5 asegura $A(Y, r_Y) \simeq \mathbb{C}_{\mathbf{q}}[y_1, y_2, y_3, y_4]$ y $A(Z, r_Z) \simeq \mathbb{C}[z_5, z_6]$ donde podemos elegir

$$y_1 = v_1; \quad y_2 = v_2 + v_3; \quad y_3 = v_2 - v_3; \quad y_4 = v_4; \quad z_5 = v_5; \quad z_6 = v_6,$$

y donde

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las variables y_i y z_j satisfacen las siguientes reglas de conmutación para todo $1 \leq i \leq 4$, $5 \leq j \leq 6$. Por un lado

$$\begin{aligned} z_5 y_1 &= y_1 z_5; \\ z_5 y_2 &= (v_3 + v_4) z_6 = (\frac{1}{2}(y_2 - y_3) + y_4) z_6; \\ z_5 y_3 &= (v_3 - v_4) z_6 = (\frac{1}{2}(y_2 - y_3) - y_4) z_6; \\ z_5 y_4 &= v_2 z_6 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3) z_6. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Y por otro

$$\begin{aligned} z_6 y_1 &= y_1 z_6; \\ z_6 y_2 &= (v_2 + v_4) z_5 = (\frac{1}{2}(y_2 + y_3) + y_4) z_5; \\ z_6 y_3 &= (v_2 - v_4) z_5 = (\frac{1}{2}(y_2 + y_3) - y_4) z_5; \\ z_6 y_4 &= v_3 z_5 = \frac{1}{2}(y_2 - y_3) z_5. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Procediendo de la misma forma que en el Ejemplo 3.3.5, sabemos que $\mathcal{B}_{A(X,r)} = \{\mathbf{Y}^A \mathbf{Z}^B | A \in \mathbb{N}^4, B \in \mathbb{N}^2\}$ es base de $A(X, r)$. Aunque en este caso no es cierto que $A(X, r)$ sea una extensión de Ore iterada sobre $A(Y, r_Y)$ ni sobre $A(Z, r_Z)$.

Supongamos que $A(X, r)$ es una extensión de Ore iterada sobre $A(Y, r_Y)$. Como $\mathcal{B}_{A(X,r)}$ es base de $A(X, r)$, suponemos $A(X, r) \simeq A(Y, r_Y)[u_1, \sigma_1][u_2, \sigma_2]$ con $u = \alpha z_5 + \beta z_6$ y $u' = \alpha' z_5 + \beta' z_6$ para ciertos $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{C}$. En particular, $A(Y, r_Y)[u, \sigma]$ es una subálgebra de $A(X, r)$ donde

$$(\alpha z_5 + \beta z_6) y = \sigma(y)(\alpha z_5 + \beta z_6), \text{ para todo } y \in A(Y, r_Y).$$

Si tomamos $y = y_2$, obtenemos

$$\begin{aligned} (\alpha z_5 + \beta z_6) y_2 &= \alpha(\frac{1}{2}(y_2 - y_3) + y_4) z_6 + \beta(\frac{1}{2}(y_2 + y_3) + y_4) z_5 \\ &= (\frac{1}{2} y_2 + y_4)(\beta z_5 + \alpha z_6) + \frac{1}{2} y_3 (\beta z_5 - \alpha z_6). \end{aligned}$$

Entonces $A(Y, r)u \neq uA(Y, r)$, lo cual es absurdo por definición de $A(Y, r_Y)[u, \sigma]$. Luego $A(X, r)$ no es una extensión de Ore iterada sobre $A(Y, r_Y)$.

Afirmamos que $A(X, r)$ tampoco es una extensión de Ore iterada sobre $A(Z, r_Z)$. Supongamos que sí. De nuevo, como $\mathcal{B}_{A(X,r)}$ es base de $A(X, r)$ podemos suponer $A(X, r) \simeq A(Z, r_Z)[u_1, \sigma_1][u_2, \sigma_2][u_3, \sigma_3][u_4, \sigma_4]$ con $u_i = \alpha_i^1 y_1 + \beta_i^2 y_2 + \gamma_i^3 y_3 + \delta_i^4 y_4$, para ciertos $\alpha_i^1, \beta_i^2, \gamma_i^3, \delta_i^4 \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq 4$. Consideremos la subálgebra $A(Z, r_Z)[u, \sigma]$ de $A(X, r)$ para $u = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 + \delta y_4$, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Se tiene

$$(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 + \delta y_4) z = \sigma(z)(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 + \delta y_4),$$

para todo $z \in A(Z, r_Z)$. Si tomamos $z = z_5$,

$$\begin{aligned}
&(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 + \delta y_4) z_5 \\
&\quad = \alpha y_1 z_5 + \beta y_2 z_5 + \gamma y_3 z_5 + \delta y_4 z_5 \\
&\quad = \alpha z_5 y_1 + \beta z_6 (\frac{1}{2}(y_2 - y_3) + y_4) + \gamma z_6 (\frac{1}{2}(y_2 - y_3) - y_4) + \delta z_6 \frac{1}{2}(y_2 + y_3) \\
&\quad = \alpha z_5 y_1 + z_6 \big(\frac{1}{2}(\beta + \gamma + \delta) y_2 - \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \delta) y_3 + (\beta - \delta) y_4\big).
\end{aligned}$$

Nuevamente tenemos $A(Z, r_Z)u \neq uA(Z, r_Z)$, lo que es absurdo. Por lo tanto $A(X, r)$ no es una extensión de Ore iterada sobre $A(Z, r_Z)$.

Los ejemplos anteriores nos inducen a pensar lo siguiente. Dada una solución (X, r) tenemos dos situaciones: que la retracción sea trivial o que no lo sea. En el caso de que tenga retracción trivial vimos que la Proposición 3.1.5 nos provee una presentación de $A(X, r)$ y, más aún, $A(X, r)$ resulta un álgebra de polinomios torcidos. En el caso en que la retracción no es trivial podemos pensar a $A(X, r)$ como bloques formados por las subálgebras inducidas por ciertas subsoluciones. Supongamos que r puede descomponerse en bloques de la forma

r	X_1	X_2	$\ldots$	X_n
X_1	X_1X_1	X_2X_1	$\ldots$	X_nX_1
X_2	X_1X_2	X_2X_2	$\ldots$	X_nX_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
X_n	X_1X_n	X_2X_n	$\ldots$	X_nX_n

esto es que cada vez que tengamos un producto de la forma $x_i x_j$ con $x_i \in X_i, x_j \in X_j$, lo podamos reescribir como un producto $x'_j x'_i$ para ciertos $x'_i \in X_i, x'_j \in X_j$. Supongamos además que cada $A(X_i, r_i)$ tiene una escritura monomial simple. Entonces podrá desarrollarse una teoría monomial para expresar los elementos de $A(X, r)$ como combinaciones lineales de elementos de las subálgebras $A(X_i, r_i)$.

3.4. Álgebra cuantizada de funciones sobre End(V_X)

En esta última sección veremos otra estructura algebraica asociada a una solución (X, r) que notaremos $Q(X, r)$. Al igual que con $A(X, r)$ la idea será asociarle a la solución un álgebra que guarde relación con la aplicación r. Si bien no es nuestro principal objetivo analizar esta estructura, señalamos que se puede realizar un estudio análogo al realizado para $A(X, r)$. La definición de $Q(X, r)$ se debe a Faddeev, Reshetikhin y Takhtajan [5].

Definición 3.4.1. Se define el *álgebra cuantizada de funciones sobre End(V_X)* como el álgebra cuadrática $Q(X, r)$ sobre $\mathbb{C}$ con generadores $\{v_{(x,z)}\}_{x,z \in X}$, sujetos a las relaciones

$$v_{(x,z)} v_{(y,w)} = v_{x \triangleright y, z \triangleright w} v_{x \triangleleft y, z \triangleleft w}. \tag{3.7}$$

Observación 3.4.2. Obtenemos una presentación libre de $Q(X,r)$ cocientando el álgebra tensorial $T(V_{X\times X})$ por el ideal bilátero generado por las relaciones 3.7.

Tenemos la siguiente relación entre las álgebras $Q(X,r)$ y $A(X\times X, r\times r)$.

Observación 3.4.3. Usando las presentaciones libres para $A(X,r)$ y para $Q(X,r)$, observamos que el álgebra $Q(X,r)$ no es otra cosa que el álgebra cuantizada de funciones sobre $\tilde{V} = V_{X\times X}$, $A(X\times X, r\times r)$. En efecto, es claro que el ideal generado por las relaciones 3.7 es precisamente el ideal de $\tilde{V}\otimes\tilde{V}$ generado por la imágen de $Id_{\tilde{V}\otimes\tilde{V}} - \tilde{R}$, donde $\tilde{R} = R(X\times X, r\times r)$. Con lo cual $Q(X,r) = A(X\times X, r\times r)$ y podemos usar lo visto en el capítulo anterior para el cálculo de $Q(X,r)$.

Por la observación anterior se deduce que existen resultados análogos a las Proposiciones 3.1.3 y 3.1.5 para $Q(X,r)$. Veamos primero el análogo a la Proposición 3.1.3.

Proposición 3.4.4. Sea (X,r) una solución y notemos por $V_{\overline{X}}$ y por V_X los $\mathbb{C}$-espacio vectoriales generados por $\overline{X}$ y por X respectivamente. Sean $Q(\overline{X},\overline{r})$ y $Q(X,r)$ las álgebras cuantizadas de funciones sobre $End(V_{\overline{X}})$ y sobre $End(V_X)$ respectivamente y sea I el ideal bilátero de $Q(X,r)$ generado por $\{v_{(x,y)} - v_{(z,w)} : (x,y)\sim(z,w)\}_{x,y,z,w\in X}$. Entonces existe un isomorfismo entre las álgebras $\frac{Q(X,r)}{I}$ y $Q(\overline{X},\overline{r})$.

Demostración. Como $Q(X,r) = A(X\times X, r\times r)$ y $Q(\overline{X},\overline{r}) = A(\overline{X}\times\overline{X}, \overline{r}\times\overline{r}) = A(\overline{X\times X}, \overline{r\times r})$ el resultado se sigue de la Proposición 3.1.3. □

Y ahora el análogo a la Proposición 3.1.5.

Proposición 3.4.5. Sea (X,r) una solución de cardinal n con $Ret(X,r)$ una solución trivial y sea $\tilde{V} = V_{X\times X}$. Entonces existe una base $\{W_{i,j}\}_{i,j\in X}$ de $\tilde{V}$ y un conjunto de raíces de la unidad $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_{i,j})_{1\le i,j\le n} \subset \mathbb{C}$ tales que $Q(X,r)\simeq \mathbb{C}_{\mathbf{q}}[W_{i,j}|i,j\in X]$. Más aún, dicha base está formada por autovectores simultáneos de los operadores $\mathcal{LL}_{\overline{(x_1,x_2)}}$, $\mathcal{RR}_{\overline{(y_1,y_2)}}$ y de las proyecciones, para todo $x_1,x_2,y_1,y_2\in X$, resulta ortogonal y puede tomarse ortonormal.

Demostración. Como $Ret(X,r)$ es una solución trivial, se infiere por cálculos directos (o repitiendo la demostración de la Proposición 2.3.9) que $Ret(X\times X, r\times r)$ es también una solución trivial. Dado que $Q(X,r) = A(X\times X, r\times r)$, obtenemos lo que queremos invocando la Proposición 3.1.5. □

Recordemos que dada (X,r) una solución y dada $(X\times X, r\times r)$ la solución producto cartesiano inducida escribimos

$$r\times r\big((x,y),(z,w)\big) = \big(\mathcal{LL}_{\overline{(x,y)}}(z,w), \mathcal{RR}_{\overline{(z,w)}}(x,y)\big).$$

La siguiente observación nos servirá para hallar una base de $V_{X\times X}$ formada por autovectores simultáneos de los operadores $\mathcal{LL}_{(x,y)}$, $\mathcal{RR}_{(z,w)}$ y las proyecciones para todo $x,y,z,w\in X$, a partir de conocer una base de V_X formada por autovectores de los operadores $\mathcal{L}_x$, $\mathcal{R}_y$ y las proyecciones, para todo $x,y\in X$. Es consecuencia directa de la Proposición 1.1.3.

Observación 3.4.6. Sean (X, r) una solución y $(X \times X, r \times r)$ la solución producto cartesiano asociada. Si los operadores $\mathcal{L}_{\overline{x}}$ y $\mathcal{R}_{\overline{y}}$ se diagonalizan simultáneamente para cualesquiera $x, y \in X$, entonces los operadores $\mathcal{LL}_{\overline{(x,y)}}$ y $\mathcal{RR}_{\overline{(z,w)}}$ se diagonalizan simultáneamente para cualesquiera $x, y, z, w \in X$. Más aún, si $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es base de autovectores simultáneos de los operadores $\mathcal{L}_{\overline{x}}$, $\mathcal{R}_{\overline{y}}$ y las proyecciones para todo $x, y \in X$, entonces $\{w_i \otimes w_j\}_{1 \leq i,j \leq n}$ es base de autovectores simultáneos de los operadores $\mathcal{LL}_{\overline{(x,y)}}$, $\mathcal{RR}_{\overline{(z,w)}}$ y las proyecciones para todo $x, y, z, w \in X$.

3.4.1. Estructura de biálgebra

Por Faddeev, Reshetikhin y Takhtajan [5] el álgebra $Q(X, r)$ posee una estructura de biálgebra dada por el coproducto $\Delta : Q(X, r) \longrightarrow Q(X, r) \otimes Q(X, r)$ y la counidad $\epsilon : Q(x, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ definidos por

$$\Delta(L) = L^{12}L^{13};$$
$$\epsilon(L) = 1,$$

donde siguiendo la notación utilizada en [4] es $L = \sum E_{x,y} \otimes L_{x,y}$, $E_{x,y} \in End(V_X)$. En general L^{ij} es notación para

$$L^{12} = \sum_{x,y \in X} E_{x,y} \otimes L_{x,y} \otimes 1 \in M_{|X|}(\mathbb{C}) \otimes Q(X, r) \otimes Q(X, r);$$
$$L^{13} = \sum_{x,y \in X} E_{x,y} \otimes 1 \otimes L_{x,y} \in M_{|X|}(\mathbb{C}) \otimes Q(X, r) \otimes Q(X, r).$$

Con lo cual, el coproducto es tal que

$$\begin{aligned}
\Delta(L) &= L^{12}L^{13} \\
&= \sum_{x,y \in X} \sum_{z,w \in X} E_{x,y}E_{z,w} \otimes L_{x,y} \otimes L_{z,w} \\
&= \sum_{x,y,w \in X} E_{x,w} \otimes L_{x,y} \otimes L_{y,w} \\
&= \sum_{x,w \in X} E_{x,w} \otimes \sum_{y \in X} (L_{x,y} \otimes L_{y,w}).
\end{aligned}$$

Es decir, $\Delta(L_{x,w}) = \sum_{y \in X} L_{x,y} \otimes L_{y,w}$.

Y la counidad está dada por

$$\epsilon(L_{x,y}) = \delta_{x,y}.$$

Supongamos por un momento que tenemos una solución finita (X, r) cuya retracción es trivial y sin pérdida de generalidad escribimos $X = \{1, \ldots, n\}$, entonces por la Proposición 3.1.5 existirá una base $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de V_X y un conjunto de raíces de la unidad $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \subset \mathbb{C}$ tales que $A(X, r) \simeq \mathbb{C}_{\mathbf{q}}[w_i | 1 \leq i \leq n]$. Más aún, combinando la Observación 3.4.6 y la Proposición 3.4.5 tenemos que $\{W_{i,j} = w_i \otimes w_j\}_{i,j \in X}$

es base de $V_X \otimes V_X$ respecto de la cual $Q(X,r) \simeq \mathbb{C}_{\mathbf{q}'}[W_{i,j} | i,j \in X]$, para cierto conjunto de raíces de la unidad $\mathbf{q}' = (\mathbf{q}'_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \subset \mathbb{C}$ que depende de $\mathbf{q}$. Además, si notamos $\{v_i\}_{i\in X}$ a la base canónica de V_X, tenemos una escritura $w_i = \sum_k m_i^k v_k$ y si llamamos $M = (m_i^k)_{i,k}$ entonces

$$W_{i,j} = w_i \otimes w_j = \sum_{k,l} m_i^k m_j^l v_k \otimes v_l.$$

Consideremos el tensor elemental $\widetilde{W}_{i,j} = w_i \otimes \overline{w_j} = \sum_{k,l} m_i^k \overline{m_j^l} v_k \otimes v_l$, donde $\overline{m_j^l}$ es el conjugado de m_j^l. Dado que la escritura de los operadores $\mathcal{LL}_{\overline{(x,y)}}$, $\mathcal{RR}_{\overline{(x,y)}}$ y $p_{\overline{(x,y)}}$ en la base canónica $\{v_i \otimes v_j\}_{i,j\in X}$ de $V_X \otimes V_X$ tiene entradas reales para todo $x, y \in X$, y dado que $W_{i,j}$ es autovector simultáneo de esos operadores, entonces $\widetilde{W}_{i,j}$ también lo es. Luego $\{\widetilde{W}_{i,j}\}_{i,j\in X}$ es otra elección posible de la base de la Proposición 3.4.5.

En términos de nuestra notación es $L_{x,y} = v_{(x,y)}$ y como la Notación/Observación 2.3.7 implica $V_{X\times X} \simeq V_X \otimes V_X$ por medio de la asignación $v_{(k,l)} \mapsto v_k \otimes v_l$, hacemos el abuso de notación $L_{k,l} = v_k \otimes v_l$.

Escribamos el coproducto y la counidad en términos de $\widetilde{W}$. Por simplicidad en las cuentas tomamos las bases $\{v_i\}_{i\in X}$ y $\{w_i\}_{i\in X}$ ortonormales, en tal caso

$$\begin{aligned}
\delta_{i,j} = \langle w_i, w_j \rangle &= \langle \sum_k m_i^k v_k, \sum_l m_j^l v_l \rangle \\
&= \sum_{k,l} m_i^k \overline{m_j^l} \langle v_k, v_l \rangle \\
&= \sum_k m_i^k \overline{m_j^k} = (M\overline{M}^t)_{i,j}.
\end{aligned}$$

La counidad está dada por

$$\begin{aligned}
\epsilon(\widetilde{W}_{i,j}) = \epsilon(\sum_{k,l} m_i^k \overline{m_j^l} v_k \otimes v_l) &= \sum_{k,l} m_i^k \overline{m_j^l} \epsilon(v_k \otimes v_l) \\
= \sum_{k,l} m_i^k \overline{m_j^l} \delta_{k,l} &= \sum_k m_i^k \overline{m_j^k} = \delta_{i,j}.
\end{aligned}$$

Veamos el coproducto. Primero observemos que si escribimos $M^{-1} = (c_i^k)_{i,k}$, entonces

$$\begin{aligned}
\delta_{i,j} &= (MM^{-1})_{i,j} = \sum_k M_{i,k}(M^{-1})_{k,j} = \sum_k m_i^k c_k^j; \\
\delta_{i,j} &= (\overline{M}\ \overline{M}^{-1})_{i,j} = \sum_k \overline{M}_{i,k}(\overline{M}^{-1})_{k,j} = \sum_k \overline{m_i^k}\,\overline{c_k^j}; \\
\delta_{i,j} &= (M\overline{M}^t)_{i,j} = \big((\overline{M}^{-1})^t M^{-1}\big)_{i,j} = \sum_k (\overline{M}^{-1})_{k,i}(M^{-1})_{k,j} = \sum_k \overline{c_k^i} c_k^j.
\end{aligned}$$

Tenemos

$$
\begin{aligned}
\Delta(\widetilde{W}_{i,j}) &= \Delta(\sum_{k,l} m_i^k \overline{m_j^l} v_k \otimes v_l) \\
&= \sum_{k,l} m_i^k \overline{m_j^l} \Delta(v_k \otimes v_l) \\
&= \sum_{k,l,t} m_i^k \overline{m_j^l} (v_k \otimes v_t) \otimes (v_t \otimes v_l) \\
&= \sum_{k,l,t} m_i^k \overline{m_j^l} \Big(\sum_r c_k^r w_r \otimes \sum_s \overline{c_t^s} \overline{w_s} \Big) \otimes \Big(\sum_a c_t^a w_a \otimes \sum_b \overline{c_l^b} \overline{w_b} \Big) \\
&= \sum_{k,l,t,r,s,a,b} m_i^k \overline{m_j^l} c_k^r \overline{c_t^s} c_t^a \overline{c_l^b} \widetilde{W}_{r,s} \otimes \widetilde{W}_{a,b} \\
&= \sum_{t,r,s,a,b} \Big(\sum_k m_i^k c_k^r \Big) \Big(\sum_l \overline{m_j^l c_l^b} \Big) \overline{c_t^s} c_t^a \widetilde{W}_{r,s} \otimes \widetilde{W}_{a,b} \\
&= \sum_{t,s,a} \overline{c_t^s} c_t^a \widetilde{W}_{i,s} \otimes \widetilde{W}_{a,j}. \\
&= \sum_{s,a} \Big(\sum_t \overline{c_t^s} c_t^a \Big) \widetilde{W}_{i,s} \otimes \widetilde{W}_{a,j} \\
&= \sum_a \widetilde{W}_{i,a} \otimes \widetilde{W}_{a,j}.
\end{aligned}
$$

Capítulo 4

Álgebras de Lie asociadas a soluciones

En la Observación 2.2.4 del Capítulo 2 hemos visto que dada una solución (X, r) la extensión lineal $R = R(X, r) : V_X \otimes V_X \longrightarrow V_X \otimes V_X$ de r a V_X podía descomponerse como

$$R = \left(\sum_{\overline{x}, \overline{y} \in \overline{X}} \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}} \otimes \mathcal{R}_{\overline{y}} \circ p_{\overline{x}} \right) \circ \tau.$$

En este capítulo asociamos otra estructura algebraica con (X, r) muy ligada con los operadores $\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}}$ y $\mathcal{R}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}}$, que llamaremos el álgebra de Lie asociada a la solución y notaremos $\mathfrak{g}(X, r)$. La razón de ser de $\mathfrak{g}(X, r)$ es que, al involucrar objetos elementales de la escritura de R, si podemos caracterizarla tal vez podamos obtener información sobre (X, r) o sobre $A(X, r)$. Por ejemplo, si logramos establecer condiciones para que $\mathfrak{g}(X, r)$ resulte nilpotente, el teorema de Engel 1.4.2 asegurará la existencia de una base de V_X respecto de la cual los elementos de $\mathfrak{g}(X, r)$ serán triangulares y por tanto podremos desarrollar una teoría monomial en $A(X, r)$. En la sección 4.2 veremos un resultado que permitirá dar características de $\mathfrak{g}(X, r)$ en el caso en que la solución tenga retracción trivial. En la útlima sección veremos ejemplos y aplicaciones de este resultado.

En los ejemplos usaremos la función GeneratorsOfAlgebra() del sistema GAP para obtener los generadores del álgebra $\mathfrak{g}(X, r)$. Ver Apéndice 5.

4.1. Álgebra de Lie inducida por una solución

Definimos una nueva álgebra ligada a una solución (X, r). Primero una observación.

Definición 4.1.1. Sea (X, r) una solución. Sea $\mathfrak{g}(X, r)$ la menor subálgebra de $\mathfrak{gl}(V_X)$ que contiene a los operadores $\{\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}}, \mathcal{R}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}} | x, y \in X\}$. Si $[\ ,\ ]$ es el corchete de Lie de $\mathfrak{gl}(V_X)$, entonces $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]|_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}})$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$ que llamaremos *el álgebra de Lie asociada a la solución* (X, r).

Observación 4.1.2. Sea (X, r) una solución de permutación y sea $\mathfrak{g}(X, r)$ el álgebra de Lie asociada a la solución. Como ya vimos en 3.1.4 todos los operadores conmutan entre sí y con las proyecciones, entonces los conmutadores son 0, y tenemos $[\mathfrak{g}(X, r), \mathfrak{g}(X, r)] = 0$. Luego $\mathfrak{g}(X, r)$ es abeliana.

Tenemos la siguiente observación que nos brinda una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}(X,r)$.

Observación 4.1.3. Sean (X,r) una solución y $(\overline{X},\overline{r})$ la retracción. Sean $\mathfrak{g}(X,r)$ y $\mathfrak{g}(\overline{X},\overline{r})$ las álgebras de Lie asociadas. Existe un morfismo de álgebras de Lie $\pi_* : \mathfrak{g}(X,r) \longrightarrow End(V_{\overline{X}})$ inducido por el morfismo $\pi : V_X \longrightarrow V_{\overline{X}}$ dado por $v_x \mapsto v_{\overline{x}}$. Veamos que efectivamente π_* está bien definido y es morfismo de Lie.

Sabemos que $\pi : V_X \longrightarrow V_{\overline{X}}$ induce un morfismo de ágebras $\pi_* : End(V_X) \longrightarrow Hom(V_X, V_{\overline{X}})$ tal que $f \mapsto \pi \circ f$. Veamos que de hecho si $f \in \mathfrak{g}(X,r)$ se tiene $\pi_*(f) \in End(V_{\overline{X}})$. Sean $x, y \in X$ y $r \in \overline{y}$, entonces

$$\begin{aligned}
\pi_*(\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}})(v_{\overline{r}}) &= \pi(\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}}(v_r)) \\
&= \overline{v_{\overline{x} \triangleright r}} \\
&= v_{\overline{\overline{x} \triangleright r}} \\
&= v_{[\overline{x}] \triangleright \overline{r}}.
\end{aligned}$$

Análogamente $\pi_*(\mathcal{R}_x \circ p_{\overline{y}})(v_{\overline{r}}) = v_{\overline{r} \triangleleft [\overline{x}]}$. Por lo tanto $\pi_*(f) \in End(V_{\overline{X}})$.

Veamos que es morfismo de Lie. Sean $x, y, z, w, r \in X$. Por un lado

$$\begin{aligned}
\pi_*[\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}}, \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}}](v_{\overline{r}}) &= \pi_*(\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}} - \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}})(v_{\overline{r}}) \\
&= \pi_*(\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}})(v_{\overline{r}}) - \pi_*(\mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}})(v_{\overline{r}}) \\
&= \pi_*(\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}}) \circ \pi_*(\mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}})(v_{\overline{r}}) - \pi_*(\mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}}) \circ \pi_*(\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}})(v_{\overline{r}}) \\
&= [\pi_*(\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}}), \pi_*(\mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}})](v_{\overline{r}}),
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se sigue de que

$$\begin{aligned}
\pi_*(\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}}) \circ \pi_*(\mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}})(v_{\overline{r}}) &= \pi_*(\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}})\big(\pi \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}}(v_r)\big) \\
&= \pi \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}}\big(\mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}}(v_r)\big) \\
&= \pi \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}}(v_r) \\
&= \pi_*(\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}})(v_{\overline{r}}),
\end{aligned}$$

y de que análogamente

$$\pi_*(\mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}}) \circ \pi_*(\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}})(v_{\overline{r}}) = \pi_*(\mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}}).$$

De esta manera conseguimos la representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}(X,r)$ dada por $\pi_* : \mathfrak{g}(X,r) \longrightarrow End(V_{\overline{X}})$.

4.1.1. Álgebras de Lie asociadas a soluciones de retracción trivial

En las Proposiciones 3.1.5 y 3.4.5 del capítulo anterior vimos que si (X,r) es una solución con retracción trivial entonces las álgebras cuantizadas asociadas a ella están caracterizadas. Tenemos a partir de las ideas utilizadas allí el siguiente resultado sobre el álgebra de Lie asociada a una solución de retracción trivial.

Proposición 4.1.4. Sea (X,r) una solución y sea $\mathfrak{g}(X,r)$ el álgebra de Lie asociada. Son equivalentes

I. $Ret(X,r)$ es una solución trivial;

II. Los operadores $\mathcal{L}_{\overline{x}}$, $\mathcal{R}_{\overline{y}}$ y $p_{\overline{z}}$ conmutan para cualquier $x,y,z \in X$. Equivalentemente, el álgebra $Lie(\mathcal{L}_{\overline{x}}, \mathcal{R}_{\overline{y}}, p_{\overline{z}}, x,y,z \in X)$ es un álgebra abeliana;

III. $\mathfrak{g}(X,r)$ es un álgebra abeliana.

Demostración. Usando la observación 3.1.4 el hecho de que la retracción sea una solución trivial implica que los operadores $\mathcal{L}_{\overline{x}}$, $\mathcal{R}_{\overline{y}}$ y $p_{\overline{z}}$ conmutan. Tenemos entonces que I implica II. Como $\mathfrak{g}(X,r)$ es una subálgebra de $Lie(\mathcal{L}_{\overline{x}}, \mathcal{R}_{\overline{y}}, p_{\overline{z}}, x,y,z \in X)$, también tenemos que II implica III.

Supongamos por último III. Usando la relaciones de conmutación vistas en 2.2.4, para todo $x,y,z,w \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= [\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}}, \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}}] \\
&= (\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}}) \circ (\mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}}) - (\mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}}) \circ (\mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}}) \\
&= \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}} - \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{\overline{w}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{y}} \\
&= p_{[\overline{x}]\triangleright\overline{y}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ p_{\overline{w}\triangleleft[\overline{z}]} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} - p_{\overline{w}\triangleleft[\overline{z}]} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ p_{[\overline{x}]\triangleright\overline{y}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \\
&= p_{[\overline{x}]\triangleright\overline{y}} \circ p_{[\overline{x}]\triangleright(\overline{w}\triangleleft[\overline{z}])} \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} - p_{\overline{w}\triangleleft[\overline{z}]} \circ p_{([\overline{x}]\triangleright\overline{y})\triangleleft[\overline{z}]} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \\
&= \delta_{[\overline{x}]\triangleright\overline{y},[\overline{x}]\triangleright(\overline{w}\triangleleft[\overline{z}])} p_{[\overline{x}]\triangleright\overline{y}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} - \delta_{\overline{w}\triangleleft[\overline{z}],([\overline{x}]\triangleright\overline{y})\triangleleft[\overline{z}]} p_{\overline{w}\triangleleft[\overline{z}]} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \\
&= \delta_{\overline{y},\overline{w}\triangleleft[\overline{z}]} p_{[\overline{x}]\triangleright\overline{y}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} - \delta_{\overline{w},[\overline{x}]\triangleright\overline{y}} p_{\overline{w}\triangleleft[\overline{z}]} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}}.
\end{aligned}$$

Es decir

$$\delta_{\overline{y},\overline{w}\triangleleft[\overline{z}]} p_{[\overline{x}]\triangleright\overline{y}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} = \delta_{\overline{w},[\overline{x}]\triangleright\overline{y}} p_{\overline{w}\triangleleft[\overline{z}]} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}}. \tag{4.1}$$

Como $\mathcal{L}_{\overline{x}}$ y $\mathcal{R}_{\overline{z}}$ son automorfismos de V_X, su composición también lo es y entonces la imágen del morfismo $p_{[\overline{x}]\triangleright\overline{y}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}}$ es el espacio imágen del proyector. En particular, el morfismo no es cero. Análogamente el morfismo $p_{\overline{w}\triangleleft[\overline{z}]} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}}$ no es cero. Por 4.1 tenemos que para todo x,y,w,z en X se tiene

$$\overline{w} = [\overline{x}] \triangleright \overline{y} \text{ si y solo sí } \overline{y} = \overline{w} \triangleleft [\overline{z}]. \tag{4.2}$$

Sean entonces x,y,z en X arbitrarios y sea w en X tal que $\overline{y} = \overline{w} \triangleleft [\overline{z}]$. La ecuación 4.1 queda

$$p_{[\overline{x}]\triangleright\overline{y}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} = \delta_{\overline{w},[\overline{x}]\triangleright\overline{y}} p_{\overline{w}\triangleleft[\overline{z}]} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}}. \tag{4.3}$$

Como el lado izquierdo de la igualdad no es el morfismo nulo, debe ser $\delta_{\overline{w},[\overline{x}]\triangleright\overline{y}} = 1$, es decir, $\overline{w} = [\overline{x}] \triangleright \overline{y}$, y 4.3 queda

$$p_{[\overline{x}]\triangleright\overline{y}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} = p_{\overline{w}\triangleleft[\overline{z}]} \circ \mathcal{R}_{\overline{z}} \circ \mathcal{L}_{\overline{x}}. \tag{4.4}$$

Es decir, tenemos una igualdad entre imágenes de dos proyectores. Como la imágen de los proyectores son espacios vectoriales generados por clases de equivalencias y como las clases de equivalencia son disjuntas, entonces $\overline{w} = [\overline{x}] \triangleright \overline{y} = \overline{w} \triangleleft [\overline{z}] = \overline{y}$. Luego $\overline{y} \triangleleft [\overline{z}] = \overline{y} = [\overline{x}] \triangleright \overline{y}$. Como y era arbitrario, se tiene que $\mathcal{L}_{\overline{x}} = \mathcal{R}_{\overline{z}} = Id_{\tilde{X}}$. Finalmente como x y z eran también arbitrarios la retracción es una solución trivial. □

4.2. Ejemplos

En esta sección estudiaremos el álgebra de Lie asociada a varios de los ejemplos del Capítulo 2.

Empecemos por la solución flip de cardinal 2.

Ejemplo 4.2.1. Sea $X = \{1, 2\}$ y $r(x, y) = (y, x)$. Como su retracción es trivial, podemos aplicar la Proposición 4.1.4 y tenemos que $\mathfrak{g}(X, r)$ es abeliana y por tanto nilpotente. Más aún, gracias a la función GeneratorsOfAlgebra($\mathfrak{g}(X, r)$) tenemos

$$\mathfrak{g}(X, r) = \langle E_{1,1} + E_{2,2} \rangle,$$

donde $E_{i,j}$ es la matriz que tiene un 1 en la posición (i, j) y 0 en las demás entradas.

Veamos ahora el Ejemplo 3.3.2.

Ejemplo 4.2.2. Sea SI(2,2), es decir, la solución de permutación con $\mathcal{L} = \mathcal{R} = (12)$. Como su retracción es trivial por la Proposición 4.1.4 tenemos que $\mathfrak{g}(X, r)$ es abeliana (y nilpotente), con generadores

$$\mathfrak{g}(X, r) = \langle E_{1,2} + E_{2,1} \rangle.$$

Pasemos a un ejemplo más sofisticado como el Ejemplo 2.1.9.

Ejemplo 4.2.3. Sean $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$ y r tal que

x	1 2	3 4	5 6	7 8
$\mathcal{L}_{\overline{x}}$	e	(34)(78)	(34)(78)	e
$\mathcal{R}_{\overline{x}}$	e	(34)(56)	e	(34)(56)

Como esta solución tiene retracción trivial la Proposición 4.1.4 nos asegura que $\mathfrak{g}(X, r)$ es abeliana y por lo tanto nilpotente. Además está generada por

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(X, r) = \langle &E_{1,1} + E_{2,2}, E_{3,3} + E_{4,4}, E_{5,5} + E_{6,6}, E_{7,7} + E_{8,8} \\ &E_{3,4} + E_{4,3}, E_{5,6} + E_{6,5}, E_{7,8} + E_{8,7} \rangle.\end{aligned}$$

Gracias al sistema GAP observamos que para los ejemplos del Capítulo 2 la serie derivada y la serie central descendente coinciden y se estacionan en el segundo paso. En la tabla siguiente mostramos este hecho y señalamos: si la retracción es trivial o no, el nivel de multipermutación y un sistema de raíces para el segundo elemento de la serie.

Ejemplo	Retracción	mpl	$\mathfrak{g}^2$
3.3.1	Trivial	1	0
3.3.2	Trivial	1	0
3.3.3	Trivial	2	0
3.3.4	No trivial	2	$A_1 \times A_1$
3.3.5	No trivial	3	A_1
3.3.6	No trivial	3	$A_1 \times A_1$
3.3.7	No trivial	4	A_3
3.3.8	No trivial	3	$A_1 \times A_1$

Más aún, al recorrer la mayoría de las soluciones cargadas en el paquete YangBaxter del sistema GAP observamos que la serie derivada y la serie central descendente de $\mathfrak{g}(X,r)$ coinciden, y de hecho $\mathfrak{g}(X,r)$ resulta no resoluble. Es decir, dada una solución (X,r) por experimentación observamos que o bien tiene retracción trivial o bien el álgebra $\mathfrak{g}(X,r)$ no es resoluble. Si la retracción es trivial entonces la Proposición 4.1.4 asegura que $\mathfrak{g}(X,r)$ es abeliana, pero este hecho no provee conocimiento nuevo sobre (X,r) o sobre $A(X,r)$. Si la retracción no es trivial, como $\mathfrak{g}(X,r)$ no es resoluble entonces no es nilpotente y no podemos aplicar el teorema de Engel 1.4.2.

Desconocemos si es cierto en general que dada (X,r) una solución entonces $\mathfrak{g}(X,r)$ es abeliana ó no resoluble, pero es un fenómeno a estudiar. También es un asunto a seguir estudiando la relación entre la estructura interna de $\mathfrak{g}(X,r)$ y el comportamiento monomial de $A(X,r)$.

Capítulo 5

Apéndice

En esta parte de la tesis damos una breve descripción del paquete YangBaxter del sistema GAP y de las funciones que utilizamos a lo largo del trabajo, y proveemos los códigos de las funciones que definimos en GAP y una breve descripción de cada una.

Por medio del paquete YangBaxter, desarrollado por Vendramin y Konovalov, GAP representa a las soluciones conjuntistas de la ecuación de Yang-Baxter como el tipo de dato YBType que consiste de 2 matrices, <l_actions> y <r_actions>, que representan las acciones a izquierda y a derecha, respectivamente, escritas como la imágen de las permutaciones inducidas. Veamos un ejemplo. Consideremos la solución SmallIYB(4,4) dada por $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y r de tabla.

x	1 2	3 4
$\mathcal{L}_x$	e	(34)
$\mathcal{R}_x$	e	(34)

GAP codifica a esta solución como el objeto

$$YB([[1, 2, 3, 4], [1, 2, 3, 4], [1, 2, 4, 3], [1, 2, 4, 3]], [[1, 2, 3, 4], [1, 2, 3, 4], [1, 2, 4, 3], [1, 2, 4, 3]]).$$

A lo largo del trabajo los ejemplos los obtuvimos por medio de las funciones SmallIYB(n,m) y SmallSkewbrace(n,m). Las mismas devuelven la solución m-ésima de cardinal n de la base de datos del paquete YangBaxter. Cabe mencionar que la función SmallSkewbrace(n,m) no devuelve una solución per sé sino la braza torcida m-ésima de cardinal n de la base de datos. Por lo cual, debemos utilizar la función Skewbrace2YB() para obtener las solución SS(n,m).

En el Capítulo 4 utilizamos la función GeneratorsOfAlgebra($\mathfrak{g}$) que devuelve los generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ escritos en notación matricial respecto de la base canónica $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V_X.

Veamos las funciones que definimos, las ordenamos por capítulo en que fueron utilizadas y agregamos una sección con adaptaciones y modificaciones de algunas funciones existentes en el paquete YangBaxter.

Capítulo 1

- La siguiente función toma como argumento la solución `obj` y devuelve el conjunto $\overline{X}$ formado por las clases de equivalencia en forma de la lista `c`.

```
TildeX := function(obj)
local pairs, e, c, x, y;
pairs := [];
for x in [1..Size(obj)] do
for y in [1..Size(obj)] do
if (LPerms(obj)[x] = LPerms(obj)[y]) and
(RPerms(obj)[x] = RPerms(obj)[y]) then
Add(pairs, [x, y]);
fi;
od;
od;

e := EquivalenceRelationByPairs(Domain([1..Size(obj)]),
   pairs);
c := EquivalenceClasses(e);


return c;
end;
```

- Definimos la función ProjectorOfYB() que toma como input la solución `obj` y devuelve la lista `projectors` con las matrices de las proyecciones a los subespacios generados por las clases de equivalencia (i.e. $p_{\overline{x}}$). YBProjector() es una función cuyo input es el natural `n` y una sublista `subSpaceList` de la lista $\{1, 2, \ldots, n\}$ y cuyo output es la matriz `m` de $n \times n$ diagonal con 1's en las entradas (i, i) para cada $i \in$ `subSpaceList`.

```
YBProjector := function(subSpaceList, n)
local m,i;
m := NullMat(n,n);
for i in subSpaceList do
m[i,i]:=1;
od;
return m;
end;

ProjectorsOfYB := function(obj)
local pairs, e, c, projectors, x, y, j;
projectors := [];
pairs := [];
for x in [1..Size(obj)] do
```

```
for y in [1..Size(obj)] do
if (LPerms(obj)[x] = LPerms(obj)[y]) and
(RPerms(obj)[x] = RPerms(obj)[y]) then
Add(pairs, [x, y]);
fi;
od;
od;

e := EquivalenceRelationByPairs(Domain([1..Size(obj)]),
   pairs);
c := EquivalenceClasses(e);

for j in [1..Size(c)] do
Add(projectors, YBProjector(Elements(c[j]),Size(obj)));
od;

return projectors;
end;
```

- Definimos las funciones LeftMatsOfYB() y RightMatsOfYB() cuyas entradas son la solución `obj` y cuyas salidas son las matrices dadas por $LPerms(\texttt{obj}) =< l\_actions >$ y $RPerms(\texttt{obj}) =< r\_actions >$, respectivamente.

```
LeftMatsOfYB := function(obj)
return List(LPerms(obj), x-> PermutationMat(x,Size(obj)))
   ;
end;

RightMatsOfYB := function(obj)
return List(RPerms(obj), x-> PermutationMat(x,Size(obj)))
   ;
end;
```

- Definiremos la función IsOpConmut() cuya entrada es la solución `obj` y que devuelve el booleano `bool_final` que dependerá de si los operadores de la solución conmutan entre sí.

  Primero definimos la función IsMatConmut() que tiene como entrada la lista de matrices `lista` y devuelve el booleano `bool_final` cuyo valor dependerá de si las matrices de la lista conmutan entre sí.

  Precondición: `lista` es una lista de matrices cuadradas.

```
IsMatConmut:=function(lista)
local bool_final, i, j;
bool_final:=true;
for i in [1..Size(lista)] do
```

```
for j in [1..Size(lista)] do
if(lista[i]*lista[j]=lista[j]*lista[i]) then
bool_final:=bool_final and true;
else
bool_final:=bool_final and false;
fi;
od;
od;
return bool_final;
end;
```

Ahora definimos la función IsOpConmut(). Necesita las funciones LeftMatsOfYB() y RightMatsOfYB() del Capítulo 3.

```
IsOpConmut:=function(obj)
local LPerm_mat, RPerm_mat, Mats, bool_final;
LPerm_mat:=LeftMatsOfYB(obj);
RPerm_mat:=RightMatsOfYB(obj);
Mats:=[];
Append(Mats,LPerm_mat);
Append(Mats,RPerm_mat);
bool_final:=IsMatConmut(Mats);
return bool_final;
end;
```

- La función que sigue tiene como input la solución `obj` y devuelve el booleano `bool_final` según si la solución tenga retracción trivial o no. Como usamos RetractNotInv() la función es independiente de que la solución no sea involutiva. Necesita la función RetractNotInv() de la sección Adaptaciones de funciones del paquete YangBaxter.

```
IsRetTrivial := function(obj)
local LPerm_ret,RPerm_ret, bool_final, i, j;
bool_final:=true;
LPerm_ret:=LPerms(RetractNotInv(obj));
RPerm_ret:=RPerms(RetractNotInv(obj));
for i in [1..Size(LPerm_ret)] do
if (LPerm_ret[i]=()) then
bool_final:=bool_final and true;
else
bool_final:=bool_final and false;
fi;
od;
for j in [1..Size(RPerm_ret)] do
if (RPerm_ret[j]=()) then
bool_final:=bool_final and true;
```

```
else
bool_final:=bool_final and false;
fi;
od;
return bool_final;
end;
```

- Definiremos la función Invariantes() cuya entrada es la solución `obj` y cuya salida son los subconjuntos r-invariantes de la solución en forma de la lista `lista_final`. Debemos definir antes las funciones Ordenar_lista_de_listas() y DFS().

  En primer lugar definimos la función Ordenar_lista_de_listas() cuya entrada es la lista de listas `lista_input` y el natural `largo_max` y cuya salida es la misma lista pero ordenada por cardinalidad de cada uno de sus elementos. Si sabemos el largo máximo `largo_max` de las listas de `lista_input` esta técnica funciona.

```
Ordenar_lista_de_listas := function(lista_input,
   largo_max)
local lista_cardinalidades, i;
lista_cardinalidades:=[];
for i in [1..largo_max] do
Add(lista_cardinalidades,[]);
od;
for i in lista_input do
Add(lista_cardinalidades[Size(i)],i);
od;
return lista_cardinalidades;
end;
```

  Definimos ahora la función DFS = Depth First Search (o búsqueda en profundidad) que tiene como input la lista `lista_input` y cuyo output es la lista `lista_output` de todas las sublistas de la `lista_input`. Lo hacemos por backtracking. Tenemos que definir primero el paso iterativo porque en GAP debemos programar en orden.

```
DFS_iterativo := function(lista_input, lista_aux)
local lista_output, lista_aux_1, lista_aux_2, i;
lista_output:=[];
lista_aux_1:=[];
lista_aux_2:=[];
i:=1;
while i < Size(lista_input)+1 do
lista_aux_1:=ShallowCopy(lista_input);
lista_aux_2:=ShallowCopy(lista_aux);
```

```
lista_aux:=Concatenation(lista_aux,[Remove(lista_input,i)
   ]);
Add(lista_output,lista_aux);
lista_output:=Concatenation(lista_output,
DFS_iterativo(lista_input, lista_aux));
i:=i+1;
lista_aux:=ShallowCopy(lista_aux_2);
lista_input:=ShallowCopy(lista_aux_1);
od;
for i in lista_output do
Sort(i);
od;
return Unique(lista_output);
end;
```

Ahora definimos la función general DFS.

```
DFS := function(lista_input)
return DFS_iterativo(lista_input, []);
end;
```

Definimos Invariantes().

```
Invariantes := function(obj)
local lista_DFS, lista_output, lista_aux, lista_final, i,
    j;
lista_output:=[];
lista_final:=[];
lista_DFS:=DFS([1..Size(obj)]);
for i in lista_DFS do
if IsInvariant(obj, i) then
Add(lista_output,i);
fi;
od;

lista_aux:=Ordenar_lista_de_listas(lista_output, Size(obj
   ));
for i in lista_aux do
for j in i do
Add(lista_final,j);
od;
od;

return lista_final;
end;
```

- Definimos la función NoTrivialClass() que tiene como entrada la solución `obj` y cuya salida son las clases de equivalencias C para las que $r|_{CxC}$ no es una solución trivial, en forma de lista.

  Primero tenemos que definir la función auxiliar ListEquivalenceRelYB() que tiene como input la solución `obj` y como output la lista `lista_output` formada por las listas de los elementos relacionados entre sí, i.e. la lista de las clases de equivalencia.

```
ListEquivalenceRelYB := function(obj)
local pairs, e, c, lista_output, x, y;
pairs := [];
for x in [1..Size(obj)] do
for y in [1..Size(obj)] do
if (LPerms(obj)[x] = LPerms(obj)[y]) and
(RPerms(obj)[x] = RPerms(obj)[y]) then
Add(pairs, [x, y]);
fi;
od;
od;

e := EquivalenceRelationByPairs(Domain([1..Size(obj)]),
    pairs);

lista_output:=Unique(Successors(e));
return lista_output;
end;
```

  Ahora NoTrivialClass().

```
NoTrivialClass := function(obj)
local lista, lista_2, i;
lista:=ListEquivalenceRelYB(obj);
lista_2:=[];
for i in lista do
if IsInvariant(obj,i) then
Add(lista_2,i);
fi;
od;
return Filtered(lista_2,i->IsTrivialYB(RestrictedYB(obj,i
    ))=false);
end;
```

- La siguiente función es una adaptación de la función anterior, de forma que tenga como input el natural `n` y devuelva la lista `lista_final` donde cada elemento es NoTrivialClass(SmallIYB(n,j)) para todo $1 \leq j \leq$ NrSmallIYB(n).

Es decir, esta función ahorra el trabajo de probar una por una las soluciones cargadas en SmallIYB(n). Necesita la función NoTrivialClass() anterior.

```
NoTrivialClass_for_all := function(n)
local lista_final, i;
lista_final:=[];
i:=1;
while i<NrSmallIYB(n)+1 do
Add(lista_final, [NoTrivialClass(SmallIYB(n,i)),i]);
i:=i+1;
od;
return Unique(lista_final);
end;
```

Capítulo 2

- La siguiente función tiene como entrada la solución `obj` y devuelve el álgebra $A(X, r)$ como la salida `A/I`.

```
AlgX:=function(obj)
local A, lista_gen, lista_rel, LL, RR, I, i, j;
A:=FreeAssociativeAlgebraWithOne(Rationals, Size(obj), "x
   ");
lista_gen:=[];
lista_rel:=[];
LL:=LPerms(obj);
RR:=RPerms(obj);
for i in [1..Size(obj)] do
lista_gen[i]:=GeneratorsOfAlgebra(A)[i];
od;
for i in [1..Size(obj)] do
for j in [1..Size(obj)] do
Add(lista_rel,lista_gen[i]*lista_gen[j]-lista_gen[j^LL[i
   ]]*lista_gen[i^RR[j]]);
od;
od;
I:=Ideal(A,lista_rel);
return A/I;
end;
```

Capítulo 3

- La siguiente función toma la solución `obj` y devuelve el álgebra de Lie $\mathfrak{g}(X, r)$.

Debemos definir primero la función auxiliar TensorMatricesOfYB() que tiene como input la solución `obj` y como output la lista `mats` que representa el conjunto de todas las matrices de la forma $L{\cdot}p$ y $R{\cdot}p$ con L en LeftMatsOfYB, R en RightMatsOfYB y p en ProjectorsOfYB del Capítulo 1.

```
TensorMatricesOfYB := function(obj)
local mats, pp, ll, rr, i, j;
mats := [];
ll := LeftMatsOfYB(obj);
rr := RightMatsOfYB(obj);
pp := ProjectorsOfYB(obj);
for i in [1..Size(ll)] do
for j in [1..Size(pp)] do
Append(mats,[ll[i]*pp[j], rr[i]*pp[j]]);
od;
od;
return Unique(mats);
end;
```

Ahora LieAlgebraOfYB().

```
LieAlgebraOfYB := function(obj)
return LieAlgebra(Rationals, TensorMatricesOfYB(obj));
end;
```

- La función que sigue LieSubalgebraOfYB() tiene como argumentos la solución `obj` y el subconjunto r-invariante `lista` en forma de lista y tiene como salida el álgebra $\mathfrak{g}(Y, r_Y)$ asociada a una subsolución Y pero pensada como subálgebra de $\mathfrak{g}(X, r)$.

  Pero antes necesitamos definir una adaptación de la función ProyectorsOfYB() para que tome como input la solución `obj` y el subconjunto r-invariante `lista` de la solución en forma de lista, y devuelva la lista `projectors` formada por los proyectores de la subsolución inducida por `lista`, pensados como operadores en el espacio total V_X. Necesita la función YBProjector() del Capítulo 1.

  Pre: `lista` es un subconjunto r-invariante del conjunto subyacente X de la solución `obj`.

```
ProyectorsOfYBSubsol := function(obj,lista)
local LPerms_Y, RPerms_Y, pairs, e, c, projectors, x, y,
   j;
LPerms_Y:=LPerms(obj){lista};
RPerms_Y:=RPerms(obj){lista};
projectors := [];
pairs := [];
for x in [1..Size(lista)] do
for y in [1..Size(lista)] do
```

```
if (LPerms_Y[x] = LPerms_Y[y]) and
(RPerms_Y[x] = RPerms_Y[y]) then
Add(pairs, [x, y]);
fi;
od;
od;

e := EquivalenceRelationByPairs(Domain([1..Size(lista)]),
    pairs);
c := EquivalenceClasses(e);

for j in [1..Size(c)] do
Add(projectors, YBProjector(Elements(c[j]),Size(obj)));
od;

return projectors;
end;
```

Ahora sí, LieSubalgebraOfYB().

```
LieSubalgebraOfYB := function(obj, lista)
local gen_Y,LPerms_Y,RPerms_Y,LPerms_Mat_Y,RPerms_Mat_Y,
Proyectors_Y, lista_aux, i, j, k;
LPerms_Y:=LPerms(obj){lista};
RPerms_Y:=RPerms(obj){lista};

#Defino las matrices de |X|x|X| asociadas a los op de r_Y
   .

LPerms_Mat_Y:=List(LPerms_Y,x->PermutationMat(x,Size(obj)
   ));
RPerms_Mat_Y:=List(RPerms_Y,x->PermutationMat(x,Size(obj)
   ));
Proyectors_Y:=ProyectorsOfYBSubsol(obj,lista);
lista_aux:=[];
for i in LPerms_Mat_Y do
for j in RPerms_Mat_Y do
for k in Proyectors_Y do
Add(lista_aux,i*k);
Add(lista_aux,j*k);
od;
od;
od;
gen_Y:=Unique(lista_aux);
return LieAlgebra(Rationals, gen_Y);
end;
```

- La siguiente función, IdealsOfLieYB(), toma la solución `obj` y devuelve la lista `lista_final` formada por las subsoluciones para las que $\mathfrak{g}(Y, r_Y)$ no sólo es subálgebra de $\mathfrak{g}(X, r)$ sino que además es un ideal.

  Pero primero necesitamos definir la función IsIdealOfLieYB() que tiene como argumentos la solución `obj` y el subconjunto r-invariante Y en forma de la lista `lista`, y como salida el booleano `bool_final` cuyo valor dependerá de si $\mathfrak{g}(Y, r_Y)$ es ideal de $\mathfrak{g}(X, r)$. Necesita las funciones LieAlgebraOfYB(), ProyectorsOfYBSubsol() y LieSubalgebraOfYB() de este Capítulo.

```
IsIdealOfLieYB := function(obj, lista)
local g_X, g_Y, gen_X, gen_Y, bool_final, i, j, k;
g_X:=LieAlgebraOfYB(obj);
gen_X:=GeneratorsOfAlgebra(g_X);
g_Y:=LieSubalgebraOfYB(obj, lista);
gen_Y:=GeneratorsOfAlgebra(g_Y);
bool_final:=true;
for i in gen_X do
for j in gen_Y do
if i*j in g_Y then
bool_final:=bool_final and true;
else bool_final:=false;
fi;
od;
od;
return bool_final;
end;
```

  Ahora sí, IdealsOfLieYB(). Necesita la función Invariantes() del Capítulo 1.

```
IdealsOfLieYB := function(obj)
local i, lista_final, lista_aux;
lista_final:=[];
lista_aux:=Invariantes(obj);
for i in lista_aux do
if IsIdealOfLieYB(obj, i) then
Add(lista_final, i);
fi;
od;
return lista_final;
end;
```

Adaptaciones de funciones del paquete YangBaxter

- Las siguientes son adaptaciones de las funciones Retract(), Multipermutation-Level() e IsMultipermutation() para soluciones no necesariamente involutivas.

Las mismas tienen como input la solución `obj` y como output la retracción de `obj`, el nivel de multipermutación de `obj` y un booleano que dependerá de si la solución es de multipermutación (es decir, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Ret^n(X, r)$ tiene cardinal 1), respectivamente.

```
RetractNotInv := function(obj)
local e, c, s, pairs, x, y, z, ll, rr;

pairs := [];
for x in [1..Size(obj)] do
for y in [1..Size(obj)] do
if (LPerms(obj)[x] = LPerms(obj)[y]) and
(RPerms(obj)[x] = RPerms(obj)[y]) then
Add(pairs, [x, y]);
fi;
od;
od;

e := EquivalenceRelationByPairs(Domain([1..Size(obj)]),
   pairs);
c := EquivalenceClasses(e);
s := Size(c);

ll := List([1..s], x->[1..s]);
rr := List([1..s], x->[1..s]);

for x in [1..s] do
for y in [1..s] do
z := YB_xy(obj, Representative(c[x]), Representative(c[y
   ]));
ll[x][y] := Position(c, First(c, u->z[1] in u));
rr[y][x] := Position(c, First(c, u->z[2] in u));
od;
od;
return YB(ll, rr);
end;


MultipermutationLevelNotInv := function(obj)
local r,s,l;

l := 0;
r := ShallowCopy(obj);

repeat
s := ShallowCopy(r);
r := RetractNotInv(s);
```

```
if Size(r) <> Size(s) then
l := l+1;
else
return fail;
fi;
until Size(r) = 1;
return l;
end;


IsMultipermutationNotInv := function(obj)
if not MultipermutationLevelNotInv(obj) = fail then
return true;
else
return false;
fi;
end;
```

- Ahora definiremos adaptaciones de las funciones YB_ij(), IS_YB(), YB(), DisplayTable() e IsInvolutive() para que tomen como entradas la solución `obj` y dos listas de permutaciones `l` y `r` que representan las acciones a izquierda y a derecha de la solución, respectivamente, donde: YB_ij() tiene como entrada las matrices <l_actions> y <r_actions>, un vector v de largo $|X|$ con X el conjunto subyacente a la solución obj inducida por <l_actions> y <r_actions>, y dos coordenadas i, j, y devuelve el valor de la solución obj actuando en las coordenadas i, j de v; IS_YB() tiene como argumento las matrices <l_actions> y <r_actions> y como salida un booleano que depende de si esas matrices inducen una solución; YB() tiene como entradas las matrices <l_actions> y <r_actions> y como salida la solución inducida por esas matrices; DisplayTable() tiene como input una solución obj y como salida la tabla formada por la imágen del operador r; e IsInvolutive() tiene como argumento una solución obj y como salida un booleano cuyo valor dependerá de si obj es involutiva.

```
YB_ij_by_perm:=function(l, r, v, i, j)
local w;
w := ShallowCopy(v);
w[i] := v[j]^l[v[i]];
w[j] := v[i]^r[v[j]];
return w;
end;


IS_YB_by_perm:=function(l, r)
local x, y, z, v;

if Size(r) <> Size(l) then
```

```
return false;
fi;

for x in [1..Size(l)] do
for y in [1..Size(l)] do
for z in [1..Size(l)] do
v := [x,y,z];
if YB_ij_by_perm(l, r,
YB_ij_by_perm(l, r,
YB_ij_by_perm(l, r, v, 2, 3), 1, 2), 2, 3)
\<>
YB_ij_by_perm(l, r,
YB_ij_by_perm(l, r,
YB_ij_by_perm(l, r, v, 1, 2), 2, 3), 1, 2) then
return false;
fi;
od;
od;
od;
return true;
end;


YB_by_perm :=function(l, r)
local ll, rr, x, y;
if not IS_YB_by_perm(l, r) then
Error("this is not a solution of the YBE\n");
fi;

ll := List([1..Size(l)], x->[1..Size(l)]);
rr := List([1..Size(l)], x->[1..Size(l)]);
for x in [1..Size(l)] do
for y in [1..Size(l)] do
ll[x][y] := y^l[x];
rr[y][x] := x^r[y];
od;
od;
return YB(ll, rr);
end;


DisplayTable_by_perm := function(l,r)
local m, x, y;
m := NullMat(Size(l), Size(l));
for x in [1..Size(l)] do
for y in [1..Size(l)] do
m[x][y] := [y^l[x],x^r[y]];
```

```
od;
od;
return m;
end;


IsInvolutive_by_perm := function(l,r)
local table,x,y,s;
table:=DisplayTable_by_perm(l,r);
for x in [1..Size(l)] do
for y in [1..Size(l)] do
s :=  table[x][y];
if table[s[1]][s[2]] <> [x,y] then
return false;
fi;
od;
od;
return true;
end;
```

Bibliografía

[1] R. J. Baxter. *Partition function of the eight-vertex lattice model.* Ann. Physics, 70:193–228, 1972.

[2] R. J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics.* Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London, 1989. Reprint of the 1982 original.

[3] V. G. Drinfel'd. *On some unsolved problems in quantum group theory.* In Quantum groups (Leningrad, 1990), volume 1510 of Lecture Notes in Math., pages 1–8. Springer, Berlin, 1992.

[4] P. Etingof, T. Schedler and A. Soloviev. *Set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation.* Duke Math. J., 100(2):169–209, 1999.

[5] L.D. Faddeev, N.Yu. Reshetikhin and L.A. Takhtajan. *Quantization of Lie groups and Lie algebras* (in Russian), Algebra i Analiz 1: 178–206, 1989; English translation in Leningrad Math. J. 1: 193–225, 1990.

[6] T. Gateva-Ivanova and P. Cameron. *Multipermutation solutions of the Yang-Baxter equation.* 2009.

[7] T. Gateva-Ivanova and S. Majid. *Quantum spaces associated to multipermutation solutions of level two*, Algebr. Represent. Theory, 14(2): 341–376, 2011.

[8] T. Gateva-Ivanova and M. Van den Bergh. *Semigroups of I-type.* J. Algebra, 206(1):97–112, 1998.

[9] K. R. Goodearl and R. B. Warfield Jr. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*

[10] L. Guarnieri. *La ecuación conjuntista de Yang-Baxter*. 2016.

[11] L. Guarnieri and L. Vendramin. *Skew braces and the Yang-Baxter equation.* Accepted for publication in Math. Comp. DOI:10.1090/mcom/3161.

[12] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer-Verlag. Third printing, revised, 1980.

[13] N. Jacobson. *Structure of rings.* American Mathematical Society Colloquium Publi- cations, Vol. 37. Revised edition. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[14] E. Jespers and J. Okniński. *Monoids and Groups of I-Type*, Algebr. Represent. Theory 8: 709–729, 2005.

[15] E. Jespers and J. Okniński. *Noetherian Semigroup Algebras*, Springer, Dordrecht 2007.

[16] J.-H. Lu, M. Yan, and Y.-C. Zhu. *On the set-theoretical Yang-Baxter equation.* Duke Math. J., 104(1):1–18, 2000.

[17] W. Rump. *A decomposition theorem for square-free unitary solutions of the quantum Yang-Baxter equation.* Adv. Math., 193(1):40–55, 2005.

[18] W. Rump. *Braces, radical rings, and the quantum Yang-Baxter equation.* J. Algebra, 307(1):153–170, 2007.

[19] A. Solotar, M. Farinati and M. Suárez Alvarez. *Anillos y sus categorías de representaciones.* 2006.

[20] J. Tate and M. Van den Bergh. *Homological properties of Sklyanin algebras.* Invent. Math. 124 (1996), 619–647.

[21] A. Weinstein and P. Xu. *Classical solutions of the quantum Yang-Baxter equation.* Comm. Math. Phys., 148(2):309–343, 1992.

[22] C.N. Yang. *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction.* Phys. Rev. Lett., 19:1312–1315, 1967.