



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Aspectos topológicos de la teoría de singularidades

Pablo Gabriel Perrella

Director: Fernando Cukierman

20 de marzo de 2019

Agradecimientos

A toda mi familia, pero especialmente a mis viejos, mis hermanos y mi abuela Lita. Gracias por todo el apoyo que me brindaron.

A Fernando, por aceptar ser mi director y por toda la dedicación invertida. Gracias por compartir tu punto de vista sobre la geometría y de la matemática en general.

A los jurados, Federico Quallbrunn y Pablo Solernó, por su tiempo y todos sus valiosos comentarios. A César Massri, por ser extraoficialmente el tercer jurado de esta tesis.

A mis amigos de toda la vida, Franco, Julián y Pato. En pocas palabras, gracias por tantos años de amistad.

A Bruno, Gastón, Gonza, Martín, Mati, el Tano y Ulises, por acompañarme desde los primeros pasos de la carrera hasta el día de hoy. Agradezco a aquellos que fui conociendo en el camino, gracias a Dante, Henry, Jaqui, Juampi De Rasis, Juani, Mariano, Nico, el Pela y Sergio.

A Bruno, Daro, Juan y Santi, por haber compartido un verano inolvidable.

A Ale, Billy, Caro, Fede, Juampi, Lucho, Lud, Nacho y Sergio, por tantas tardes de juegos de mesa.

A Billy, por estar presente durante este último trayecto, por las palabras alentadoras y por animarse a leer las primeras versiones de esta tesis.

A Mati Saucedo, por su inagotable paciencia y todos sus consejos. Gracias por haber sido un docente apasionado, pero sobre todo un gran amigo.

¡Gracias a todos!

Introducción

El estudio de la topología alrededor de un punto singular de una hipersuperficie compleja se remonta a los comienzos del siglo XX. En uno de sus seminarios del año 1905, el matemático austríaco Wilhelm Wirtinger expuso su investigación sobre las superficies algebraicas de la forma

$$V_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : g(x, y, z) = 0\}.$$

Como era usual en la época, a este tipo de variedades se las veía como un revestimiento ramificado del plano \mathbb{C}^2 a partir de la función $\pi : V_g \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida como $\pi(x, y, z) = (x, y)$, cuyos puntos de ramificación forman una curva plana $\Sigma = \{f(x, y) = 0\}$. Wirtinger observó que la intersección de Σ con una esfera lo suficientemente chica centrada en un punto singular de esta curva es un link K_f embebido en S^3 , y que el complemento $S^3 \setminus K_f$ contenía información de la aplicación π . Este fue el origen de los primeros cálculos de links de singularidades y de grupos fundamentales de nudos.

La construcción de la variedad K_f y sus generalizaciones llamaron la atención de varios matemáticos a lo largo de todo el siglo [Dur99]. Mumford probó en su artículo [Mum61] que un punto de una superficie localmente normal es suave si y sólo si su link es simplemente conexo. Brieskorn se interesó en extender este resultado a dimensiones más altas, pero finalmente descubrió que la variedad $f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 = 0$ resulta ser un contraejemplo [Bri66b]. En ese mismo año demostró que cada uno de los links en el origen de las funciones

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = z_1^{6k-1} + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 \quad (1 \leq k \leq 28)$$

es difeomorfo a una de las 28 posibles esferas exóticas de dimensión 7 [Bri66a]. En 1968, John Milnor publicó su revolucionario libro titulado

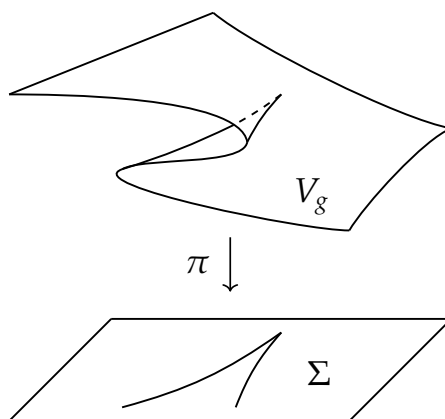


Figura 1: Las ramificaciones de $g = z^3 - 3xz + 2y = 0$.

"Singular points of complex hypersurfaces", posicionándolo como una de las figuras más influyentes de la teoría de singularidades. Este texto introduce la renombrada fibración de Milnor de una singularidad aislada, que hoy en día es uno de los principales objetos de interés de esta rama de la matemática.

En esta tesis estudiaremos la anatomía de una singularidad aislada a partir de algunas de las construcciones topológicas del libro de Milnor, pero desde el punto de vista de Vladimir Arnold. Este trabajo se sostiene esencialmente de los tres pilares [Mil68], [Loo84] y [AGZV88].

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera:

El Capítulo 1 consta de resultados preliminares sobre fibraciones localmente triviales. Aquí se introducen los conceptos de monodromía y variación que serán utilizados posteriormente.

En la primera mitad del Capítulo 2 veremos las definiciones básicas sobre singularidades y sus distintas relaciones de equivalencia, mientras que la segunda parte intenta motivar al lector sobre la importancia de las singularidades simples. Aquí se esbozan algunas de las conexiones que relacionan a esta familia de gérmenes con los grupos de simetrías de los sólidos platónicos y los subgrupos finitos de $SU(2)$.

En el Capítulo 3 construiremos el link de una singularidad y probaremos que determina a la topología de la misma alrededor de un punto crítico. También presentaremos a las fibraciones de Milnor y a los operadores de monodromía y variación asociados a ellas. Por último, deformaremos de forma genérica a una singularidad para obtener una función de Morse y calcularemos su cantidad de valores críticos en un entorno del origen.

El Capítulo 4 se trata sobre la teoría de Picard-Lefschetz. Comenzaremos analizando el escenario local de una singularidad cuadrática para luego poder dar información con respecto a la topología y monodromía de las funciones de Morse holomorfas. Acto seguido aplicaremos estos resultados sobre una morsificación de una singularidad para poder determinar el tipo homotópico de su fibra de Milnor.

Finalmente, en el Capítulo 5 estudiaremos ciertos invariantes combinatorios de una singularidad. Los protagonistas de esta última parte serán los diagramas de Dynkin asociados a bases de ciclos evanescentes. Concluiremos esta exposición enunciando un método para calcular matrices de intersección de la suma directa de dos singularidades a partir de matrices de sus sumandos.

Se asume que el lector está familiarizado con temas de topología diferencial como transversalidad, grado de funciones, índices de intersección y teoría de Morse. También serán necesarios ciertos conocimientos sobre grupos de homotopía y sus resultados clásicos. Los fragmentos bibliográficos [[Mil63](#), Part 1], [[Hat02](#), Chapter 4] y [[GH78](#), Chapter 0,§1], y el libro [[GP74](#)] abarcan ampliamente estos requisitos.

Índice general

Introducción	v
1. Preliminares	1
1.1. Fibraciones localmente triviales	1
1.2. Monodromía	5
1.3. Monodromía relativa	9
1.4. Variación	10
2. Singularidades	13
2.1. Singularidades aisladas	13
2.2. Singularidades simples	15
3. La fibración de Milnor	19
3.1. El link de una singularidad	19
3.2. Representantes buenos	26
3.3. La monodromía de una singularidad	32
3.4. Morsificaciones	34
3.5. El número de Milnor	38

4. Teoría de Picard-Lefschetz	41
4.1. Singularidades cuadráticas	42
4.2. Funciones de Morse	51
4.3. El teorema del bouquet de Milnor	58
5. Diagramas de Dynkin	65
5.1. Bases de ciclos evanescentes	66
5.2. Cambios de base	72
5.3. Estabilizaciones	78
5.4. Suma directa de singularidades	82
Bibliografía	87

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos los conceptos básicos sobre fibraciones localmente triviales que usaremos a lo largo de este trabajo. La primera sección está basada en los libros [Ebe07] y [Ste51], en los cuales se pueden encontrar las demostraciones de los resultados enunciados. Las referencias para las secciones restantes son [Ebe07], [Loo84] y [Loo16].

1.1. Fibraciones localmente triviales

Definición 1.1.1. Sean E una variedad diferenciable con o sin borde, B una variedad diferenciable, y $\pi : E \rightarrow B$ una función suave. Denotemos como E_b a la fibra de π sobre el punto $b \in B$. Diremos que π es una **fibración localmente trivial** si para todo elemento $b \in B$ existen un entorno abierto U de b y un difeomorfismo $\phi : E_b \times U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ que hace conmutar los diagramas

$$\begin{array}{ccc} E_b \times U & \xrightarrow{\phi} & \pi^{-1}(U) \\ \pi_U \searrow & & \swarrow \pi \\ & U & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \partial E_b \times U & \xrightarrow{\phi} & \partial E \cap \pi^{-1}(U) \\ \pi_U \searrow & & \swarrow \pi \\ & U & \end{array}$$

Al espacio B se lo llama la **base** de la fibración π , a E su **espacio total**, y a ϕ una **trivialización**.

Observación 1.1.2. Si la base de una fibración localmente trivial $\pi : E \rightarrow B$ es conexa, entonces todas sus fibras son difeomorfas entre sí. En efecto, si fijamos un punto base $b \in B$, el conjunto formado por todos los elementos de B cuyas fibras son difeomorfas a E_b es un subespacio abierto y cerrado. Generalmente notaremos a cualquiera de las fibras de π como F .

Una de las virtudes de las fibraciones localmente triviales es que poseen la llamada “Propiedad de levantamiento de homotopías”:

Teorema 1.1.3. *Supongamos que $\pi : E \rightarrow B$ es una fibración localmente trivial, y X es un CW-complejo. Sean $H_0 : X \rightarrow E$ y $\eta : X \times I \rightarrow B$ dos funciones continuas tales que $\pi \circ H_0(x) = \eta(x, 0)$, para todo $x \in X$. Entonces existe una homotopía continua $H : X \times I \rightarrow E$ que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{H_0} & E \\ \text{id} \times 0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow \pi \\ X \times I & \xrightarrow{\eta} & B. \end{array}$$

Si además existe un subespacio $A \subseteq X$ tal que la restricción $\eta : A \times I \rightarrow B$ es constante en la segunda variable, entonces podemos encontrar un levantamiento H cuya restricción $H : A \times I \rightarrow E$ satisfaga la misma propiedad.

Corolario 1.1.4. *Si $\pi : E \rightarrow B$ es una fibración localmente trivial y $A \subseteq B$ es un retracto por deformación fuerte, entonces $\pi^{-1}(A) \subseteq E$ también es un retracto por deformación fuerte.*

Demostración. Tomemos una homotopía $\eta' : B \times I \rightarrow B$ tal que $\eta'_0 = \text{id}$, $\eta'_1(B) \subseteq A$, y la restricción $\eta' : A \times I \rightarrow B$ sea constante en la segunda variable. Sea $\eta = \eta'(\pi \times \text{id}) : E \times I \rightarrow B$. El teorema previo nos permite encontrar un levantamiento $H : E \times I \rightarrow E$ que haga conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\text{id}} & E \\
 \text{id} \times 0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow \pi \\
 E \times I & \xrightarrow{\eta} & B,
 \end{array}$$

y que además $H : \pi^{-1}(A) \times I \rightarrow E$ sea constante en la segunda variable. Esto concluye la demostración. \square

Definiciones 1.1.5. Sean $\pi : E \rightarrow B$ y $\pi' : E' \rightarrow B'$ dos fibraciones localmente triviales. Un **morfismo de fibraciones** es un par (Φ, φ) que está compuesto por dos funciones diferenciables $\Phi : E \rightarrow E'$ y $\varphi : B \rightarrow B'$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\Phi} & E' \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\
 B & \xrightarrow{\varphi} & B'
 \end{array}$$

conmuta, y para todo $b \in B$ la restricción $\Phi : E_b \rightarrow E'_{\varphi(b)}$ es un difeomorfismo. Por simplicidad notaremos a un morfismos de fibraciones como $(\Phi, \varphi) : E \rightarrow E'$, o simplemente $\Phi : E \rightarrow E'$. Diremos que dos fibraciones $E \rightarrow B$ y $E' \rightarrow B'$ son **equivalentes** si existe un morfismos de fibrados $(\Phi, \varphi) : E \rightarrow E'$ de manera que las componentes Φ y φ son difeomorfismos. Por último, una fibración localmente trivial $E \rightarrow B$ se dice **trivial** si es equivalente a una proyección $F \times B \rightarrow B$. En otras palabras, $E \rightarrow B$ es trivial si y sólo si existe un difeomorfismo $\phi : F \times B \rightarrow E$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 F \times B & \xrightarrow{\phi} & E \\
 \searrow \pi_B & & \swarrow \pi \\
 & & B.
 \end{array}$$

Teorema 1.1.6. *Toda fibración localmente trivial cuya base es contráctil es trivial.*

El siguiente teorema establece condiciones suficientes sobre una función diferenciable que aseguran que sea una fibración localmente trivial. Este resultado es conocido como “El teorema de la fibración de Ehresmann” y cumplirá un rol central en esta tesis.

Teorema 1.1.7 (Ehresmann). *Sea $f : E \rightarrow B$ una submersión sobreyectiva y propia entre una variedad suave E con o sin borde y una variedad diferenciable B . Si el borde de E es no vacío supondremos adicionalmente que $f : \partial E \rightarrow B$ también es una submersión. Entonces $f : E \rightarrow B$ es una fibración localmente trivial.*

En lo que sigue supondremos que $\pi : E \rightarrow B$ una fibración localmente trivial, B' una variedad diferenciable sin borde, y $\varphi : B' \rightarrow B$ una función diferenciable. Recordemos que el **pullback** del diagrama $B' \rightarrow B \leftarrow E$ en la categoría de espacios topológicos está compuesto por el espacio

$$\varphi^*(E) = \{(e, b') \in E \times B' : \pi(e) = \varphi(b')\}$$

junto con las proyecciones $\pi' : \varphi^*(E) \rightarrow B'$ y $\Phi : \varphi^*(E) \rightarrow E$.¹ Esta terna $(\varphi^*(E), \Phi, \pi')$ satisface la siguiente propiedad universal:

Proposición 1.1.8. *La función $\pi' : \varphi^*(E) \rightarrow B'$ es una fibración localmente trivial, y $(\Phi, \varphi) : \varphi^*(E) \rightarrow E$ es un morfismo de fibraciones. Además, para toda fibración localmente trivial $E' \rightarrow B'$ y todo morfismo $(\Phi', \varphi) : E' \rightarrow E$ existe un morfismo $(\Psi, \text{id}) : E' \rightarrow \varphi^*(E)$ que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 E' & & E \\
 \Psi \swarrow & \Phi' \searrow & \\
 \varphi^*(E) & \xrightarrow{\Phi} & E \\
 \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\
 B' & \xrightarrow{\varphi} & B
 \end{array}$$

¹No todo diagrama en la categoría de variedades diferenciables con borde admite un pullback. Sin embargo, en este caso particular el pullback existe y coincide con $\varphi^*(E)$.

1.2. Monodromía

La teoría de revestimientos se basa en el principio fundamental de levantamiento de caminos de la base al espacio total. De esta manera se define el concepto de monodromía de un lazo, el cual es central a la hora de clasificar este tipo de funciones. Veremos a continuación cómo extender esta construcción al contexto más general de las fibraciones localmente triviales. Como las fibras de estas aplicaciones pueden tener dimensión positiva, no nos restringiremos a transportar únicamente puntos entre ellas, si no que también ciclos geométricos, clases de homología e incluso fibras enteras.

Una de las características principales del levantado de caminos de un revestimiento es su unicidad. Esto se debe a que sus fibras son discretas y los puntos en ellas no tienen ningún grado de libertad para moverse. Esta es otra de las diferencias más notorias con respecto a las fibraciones localmente triviales. Sin embargo, el transporte de objetos es único en un sentido más permisivo: es único salvo isotopía. Comencemos recordando este concepto.

Definición 1.2.1. Sean $f, g : M \rightarrow N$ dos difeomorfismos entre variedades con borde. Decimos que f y g son **isotópicos** si existe una homotopía continua $H : M \times I \rightarrow N$ entre f y g de manera que $H_t : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo para todo $t \in I$.

Pasemos a enunciar el resultado esencial que nos permitirá trasladar objetos entre fibras.

Proposición 1.2.2. *Tomemos una fibración localmente trivial $\pi : E \rightarrow B$ y una curva suave a trozos $\gamma : I \rightarrow B$ que conecta a los puntos $b, b' \in B$. Entonces existe una función continua $\Gamma : E_b \times I \rightarrow E$ que satisface las siguientes propiedades:*

- (i) $\pi \circ \Gamma(x, t) = \gamma(t)$ para todo par $(x, t) \in E_b \times I$,
- (ii) $\Gamma(x, 0) = x$ para todo $x \in E_b$,
- (iii) $\Gamma_t : E_b \rightarrow E_{\gamma(t)}$ es un difeomorfismo para todo $t \in I$.

Más aún, la clase de isotopía de la función $h_\gamma = \Gamma_1 : E_b \rightarrow E_{b'}$ depende únicamente de la clase de homotopía de la curva γ .

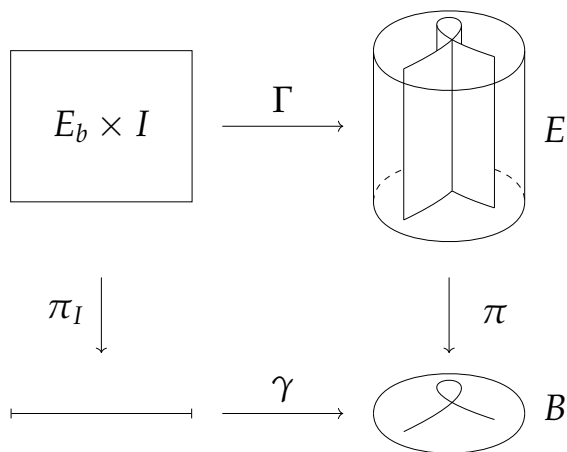


Figura 1.1: El levantamiento Γ del camino γ .

Demostración. Por simplicidad supondremos que γ es un camino suave. Sea $\gamma : J \rightarrow B$ una extensión diferenciable de esta curva a un intervalo abierto J que contenga a I . Como $\gamma^*(E) \rightarrow J$ es una fibración localmente trivial con base contráctil, debe ser trivial (este es el contenido del Teorema 1.1.6). Bajo la identificación $\gamma^*(E) \simeq E_b \times J$, el diagrama conmutativo asociado a este pullback es el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \gamma^*(E) \simeq E_b \times J & \xrightarrow{\bar{\Gamma}} & E \\ \pi_J \downarrow & & \downarrow \pi \\ J & \xrightarrow{\gamma} & B. \end{array}$$

La restricción $\bar{\Gamma} : E_b \times I \rightarrow E$ es casi lo que buscábamos porque cumple tanto la primera como la tercera condición del enunciado, pero no necesariamente la segunda. Esto se puede arreglar fácilmente reemplazando la función $\bar{\Gamma}$ por $\Gamma(x, t) = \bar{\Gamma}(\bar{\Gamma}_0^{-1}(x), t)$.

Para probar la segunda mitad del enunciado tomemos otro camino suave $\tilde{\gamma} : I \rightarrow B$ y una homotopía diferenciables $\eta : I^2 \rightarrow B$ entre am-

bos. Sea $\tilde{\Gamma} : E_b \times I \rightarrow E$ una función continua con propiedades análogas a las de Γ pero asociado al camino $\tilde{\gamma}$. Nuestro objetivo consiste en probar que las funciones $\Gamma_1, \tilde{\Gamma}_1 : E_b \rightarrow E_{b'}$ son isotópicas. Al igual que en el párrafo anterior, consideremos un intervalo abierto $J \supseteq I$, una extensión suave $\eta : J^2 \rightarrow B$, y el diagrama conmutativo asociado al pullback $\eta^*(E)$:

$$\begin{array}{ccc} \eta^*(E) \simeq E_b \times J^2 & \xrightarrow{H} & E \\ \pi_{J^2} \downarrow & & \downarrow \pi \\ J^2 & \xrightarrow{\eta} & B. \end{array}$$

Precomponiendo a H por una función apropiada podemos suponer que $H(x, 0, s) = x$, para todo $x \in E_b$ y todo $s \in I$. Desafortunadamente nada nos asegura que $\Gamma(x, t) = H(x, t, 0)$ como uno sospecharía, pero lo que sí podemos afirmar es que las funciones Γ_1 y $H_{(1,0)}$ son isotópicas. Por ejemplo, la aplicación continua

$$(x, t) \mapsto H_{(1,0)} \left(H_{(1-t,0)}^{-1} (\Gamma_{1-t}(x)) \right)$$

es una isotopía entre ambas. Por el mismo motivo $\tilde{\Gamma}_1$ es isotópica a $H_{(1,1)}$, por lo tanto bastará que encontremos una isotopía entre $H_{(1,0)}$ y $H_{(1,1)}$. Naturalmente, podemos usar la isotopía $(x, s) \mapsto H(x, 1, s)$. \square

Nosotros estaremos interesados especialmente en el caso en el que γ es un lazo, esto es, cuando $b = b'$. Dada una variedad diferenciable M , denotamos por $\text{Diff}(M)$ al grupo de difeomorfismos de M , y por $\text{Is}(M)$ a su subgrupo normal formado por los difeomorfismos isotópicos a la identidad. Se define el **mapping class group** de M como el cociente

$$\text{MCG}(M) = \text{Diff}(M) / \text{Is}(M).$$

Gracias a la proposición anterior, la aplicación

$$\begin{aligned} \pi_1(B, b) &\longrightarrow \text{MCG}(E_b) \\ [\gamma] &\longmapsto [h_\gamma] \end{aligned}$$

es un (anti)morfismo de grupos bien definido. A la clase de isotopía $[h_\gamma]$ se la conoce como la **monodromía geométrica** del lazo γ . Este elemento $[h_\gamma] \in \text{MCG}(E_b)$ desciende a un automorfismo $h_{\gamma*} : \tilde{H}_*(E_b) \rightarrow \tilde{H}_*(E_b)$ al cual llamaremos la **monodromía algebraica** del lazo γ . De esta manera obtenemos una representación²

$$\begin{aligned} \pi_1(B, b) &\longrightarrow \text{Aut } \tilde{H}_*(E_b) \\ [\gamma] &\longmapsto h_{\gamma*}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.3. No es difícil convencerse de que las únicas dos clases de equivalencia de fibraciones sobre S^1 cuyas fibras son difeomorfas a S^1 son el toro y la botella de Klein. Ambas están representadas en la Figura 1.2. Tomemos un lazo $\gamma : I \rightarrow S^1$ que dé una vuelta completa alrededor del origen. La monodromía algebraica asociada a la fibración del toro $T \rightarrow S^1$ es igual a la identidad de $\tilde{H}_1(T_s)$; mientras que en el caso de la botella de Klein $K \rightarrow S^1$, el operador $h_{\gamma*} : \tilde{H}_1(K_s) \rightarrow \tilde{H}_1(K_s)$ coincide con la multiplicación por -1 .

Observación 1.2.4. Si la base de la fibración $\pi : E \rightarrow B$ es conexa podemos identificar dos operadores de monodromía con respecto a puntos base distintos. En efecto, si γ es un camino entre b y b' , entonces los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B, b) \longrightarrow \text{MCG}(E_b) & & \pi_1(B, b) \longrightarrow \text{Aut } \tilde{H}_*(E_b) \\ \gamma^{-1} \cdot \gamma \downarrow & & \downarrow [h_\gamma] \cdot [h_\gamma]^{-1} \\ \pi_1(B, b') \longrightarrow \text{MCG}(E_{b'}) & & \gamma^{-1} \cdot \gamma \downarrow \\ & & \downarrow h_{\gamma*} \cdot h_{\gamma*}^{-1} \\ & & \pi_1(B, b') \longrightarrow \text{Aut } \tilde{H}_*(E_{b'}). \end{array}$$

Por esta razón, vamos a prescindir del punto base b elegido y notar a estos operadores como

$$\pi_1(B) \rightarrow \text{MCG}(F), \quad \pi_1(B) \rightarrow \text{Aut } \tilde{H}_*(F);$$

donde F es la clase de difeomorfismo de las fibras de $\pi : E \rightarrow B$.

²Los operadores de monodromía geométrica y algebraica se pueden pensar como dos (anti)morfismos de grupoides $\pi_1(B) \rightarrow \text{MCG}(E_\bullet)$ y $\pi_1(B) \rightarrow \text{Aut } \tilde{H}_*(E_\bullet)$.

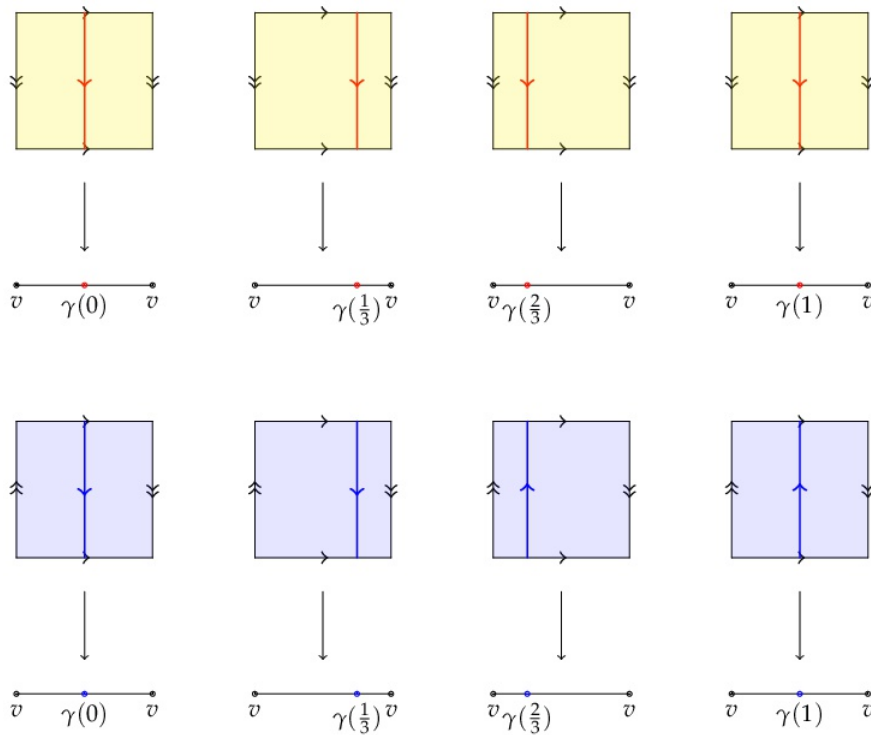


Figura 1.2: Monodromía de las fibraciones $T \rightarrow S^1$ y $K \rightarrow S^1$

1.3. Monodromía relativa

A lo largo de esta tesis nos encontraremos con un tipo particular de fibraciones $\pi : E \rightarrow B$ cuyas restricciones $\pi : \partial E \rightarrow B$ son triviales. Esta propiedad adicional nos permitirá construir operadores de monodromía más restrictivos.

Definiciones 1.3.1. Sean M una variedad diferenciable con borde. Denotamos por $\text{Diff}(M, \partial M)$ al grupo de difeomorfismos de M que se restringen a la identidad de ∂M . Una **isotopía relativa a ∂M** entre dos elementos $f, g \in \text{Diff}(M, \partial M)$ es una isotopía $H : M \times I \rightarrow M$ de manera que $H_t : M \rightarrow M$ es igual a la identidad en ∂M para todo $t \in I$. De manera análoga a la subsección previa definimos el **mapping class group relativo** de M como

$$\text{MCG}(M, \partial M) = \text{Diff}(M, \partial M) / \text{Is}(M, \partial M).$$

Usando las mismas técnicas utilizadas en la demostración de la Proposición 1.2.2 se puede obtener la siguiente mejora de este resultado:

Proposición 1.3.2. *Supongamos que $\pi : E \rightarrow B$ es una fibración localmente trivial de manera que la restricción $\pi : \partial E \rightarrow B$ es trivial. Tomemos una trivialización global $\varphi : \partial E \rightarrow E_b \times I$ de $\pi : \partial E \rightarrow B$, y $\gamma : I \rightarrow B$ un lazo suave a trozos que comience en b . Entonces existe una función continua $\Gamma : E_b \times I \rightarrow E$ como en la Proposición 1.2.2 que cumple la siguiente propiedad adicional:*

$$(iv) \quad \phi \circ \Gamma(x, t) = (x, \gamma(t)) \text{ para todo par } (x, t) \in \partial E_b \times I.$$

Además, la clase de isotopía relativa $h_\gamma^r = [\Gamma_1] \in \text{MCG}(E_b, \partial E_b)$ no depende de la trivialización ϕ ni del representante de la clase $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$.

Observemos que efectivamente Γ_1 es un elemento de $\text{MCG}(E_b, \partial E_b)$ gracias a la propiedad (iv). Análogamente, obtenemos los llamados **operadores de monodromía geométrica y algebraica relativos**:

$$\begin{aligned} \pi_1(B, b) &\longrightarrow \text{MCG}(E_b, \partial E_b) & \pi_1(B, b) &\longrightarrow \text{Aut } \tilde{H}_*(E_b, \partial E_b) \\ [\gamma] &\longmapsto [h_\gamma^r], & [\gamma] &\longmapsto h_{\gamma*}^r. \end{aligned}$$

Comentario 1.3.3. La teoría de fibraciones localmente triviales expuesta hasta el momento sigue siendo válida si a lo largo de este capítulo reemplazamos la palabra “difeomorfismo” por “homeomorfismo”. En particular, si queremos calcular la monodromía algebraica de $\pi : E \rightarrow B$ a lo largo de un lazo γ , bastará encontrar una trivialización continua $\varphi : \partial E \rightarrow E_b \times I$ y una familia continua de homeomorfismos $\Gamma_t : E_b \rightarrow E_{\gamma(t)}$ que satisfagan las condiciones (i), (ii) y (iv).

1.4. Variación

Es fácil comprobar que los difeomorfismos $h_\gamma : E_b \rightarrow E_b$ asociados a una fibración trivial son isotópicos a la identidad. Por este motivo, la diferencia $h_{\gamma*} - \text{id}$ en una fibración localmente trivial arbitraria nos da una forma de medir qué tan lejos está dicha fibración de ser trivial (al menos a lo largo del lazo γ). Esto nos motiva a definir lo siguiente:

Definición 1.4.1. Sean X un espacio topológico, A uno de los subespacios de X , y $h : (X, A) \rightarrow (X, A)$ una función continua de pares de manera que $h|_A = \text{id}_A$. Se define la **variación de h** como la aplicación

$$\begin{aligned} \text{Var}(h) : \tilde{H}_n(X, A) &\rightarrow \tilde{H}_n(X) \\ \text{Var}(h)[c] &= [h_*(c) - c], \end{aligned}$$

donde c es una n -cadena singular de X , cuyo borde ∂c es una $(n-1)$ -cadena del subespacio A .

No queda claro a simple vista si los operadores de variación están bien definidos o no, porque en principio $\text{Var}(h)[c]$ depende del representante c de su clase de homología relativa. Veamos que efectivamente esta es una buena definición. En primer lugar observemos que $h_*(c) - c \in C_n(X)$ es un n -ciclo de X , puesto que $\partial c \in C_{n-1}(A)$ y h se restringe a la identidad de A . Por otro lado, si $[c] = [c']$, tienen que existir cadenas $a \in C_n(A)$, $b \in C_{n+1}(X)$ tales que $c - c' = a + \partial b$. De esta igualdad se sigue que

$$[h_*(c) - c] - [h_*(c') - c'] = [h_*(a) - a + \partial(h_*(b) - b)] = 0,$$

nuevamente gracias a las hipótesis sobre h .

Observación 1.4.2. Supongamos a su vez que X está contenido en un espacio topológico Y , y que la función h admite una extensión continua $\tilde{h} : Y \rightarrow Y$ que es la identidad en $B = A \cup (Y \setminus X)$. Entonces el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_*(X, A) & \xrightarrow{\text{Var}(h)} & \tilde{H}_*(X) \\ j_* \downarrow & & \downarrow i_* \\ \tilde{H}_*(Y, B) & \xrightarrow{\text{Var}(\tilde{h})} & \tilde{H}_*(Y) \end{array}$$

Si además el morfismo j_* inducido por la inclusión $(X, A) \subseteq (Y, B)$ es un isomorfismo, entonces podemos calcular la variación de \tilde{h} a partir de la de h mediante la fórmula

$$\text{Var}(\tilde{h}) = i_* \circ \text{Var}(h) \circ j_*^{-1}.$$

Este es el caso si $(Y; X, B)$ es una CW-terna [Swi02, Proposition 7.5].

Si nuestra intención es aplicar esta construcción sobre los operadores de monodromía geométrica de una fibración, necesitaremos que la variación sea un invariante isotópico. La siguiente proposición afirma más fuertemente que la variación es un invariante homotópico.

Proposición 1.4.3. *Supongamos que $h, h' : (X, A) \rightarrow (X, A)$ son dos funciones continuas tales que existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$ entre ellas que cumple que $H(a, t) = a$, para todo $(a, t) \in A \times I$. Entonces $\text{Var}(h) = \text{Var}(h')$.*

Demostración. A partir de la homotopía H podemos construir un operador prisma $P : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ que satisface la ecuación $\partial P + P\partial = h'_* - h_*$, y que $P(C_n(A)) \subseteq B_n(A)$ (ver la demostración de [Hat02, Corollary 2.11]). Consecuentemente,

$$\text{Var}(h')[c] - \text{Var}(h)[c] = [h'_*(c) - h_*(c)] = [\partial P(c) - P(\partial c)] = 0. \quad \square$$

Definición 1.4.4. Sea $\pi : E \rightarrow B$ una fibración localmente trivial de manera que $\pi : \partial E \rightarrow B$ es trivial. Se define la **variación de un lazo** γ como el operador

$$\begin{aligned} \text{Var}_\gamma &= \text{Var}([h_\gamma]) : \tilde{H}_n(E_b, \partial E_b) \rightarrow \tilde{H}_n(E_b) \\ \text{Var}_\gamma[c] &= [h_{\gamma*}(c) - c], \end{aligned}$$

el cual está bien definido gracias a las proposiciones 1.3.2 y 1.4.3.

Observación 1.4.5. A partir de la definición de los operadores de variación se desprenden las siguientes propiedades:

- (1) Tomemos dos lazos $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(B, b)$. Si $i_* : \tilde{H}_n(E_b) \hookrightarrow \tilde{H}_n(E_b, \partial E_b)$ denota a la inclusión canónica, entonces

$$\text{Var}_{\gamma_1 \circ \gamma_2} = \text{Var}_{\gamma_1} + \text{Var}_{\gamma_2} + \text{Var}_{\gamma_1} \circ i_* \circ \text{Var}_{\gamma_2}. \quad (1.1)$$

- (2) Si $\gamma : I \rightarrow B$ es un camino que une los puntos b y b' , y $\omega \in \pi_1(B, b')$, entonces la variación del lazo $\tau = \gamma \circ \omega \circ \gamma^{-1}$ es igual a

$$\text{Var}_\tau = h_{\gamma*}^{-1} \circ \text{Var}_\omega \circ h_{\gamma*}^r. \quad (1.2)$$

Capítulo 2

Singularidades

2.1. Singularidades aisladas

A continuación presentaremos al objeto de estudio de esta tesis y daremos algunas definiciones básicas. Supongamos que $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa que tiene un punto crítico aislado $p \in \mathbb{C}^n$. Notemos $\alpha = f(p)$ a su valor crítico correspondiente. Para nuestros propósitos no nos convendrá pensar a f como una función, sino como una familia de hipersuperficies $V_\beta = f^{-1}(\beta)$ indexadas por un parámetro $\beta \in \mathbb{C}$. Nuestro objetivo consistirá en entender la forma de la hipersuperficie compleja V_α alrededor del punto singular p , y el modo en el que las fibras regulares cercanas V_β se degeneran en esta fibra singular cerca de p . Como la naturaleza de este problema es local, no necesitamos que el dominio de f sea todo \mathbb{C}^n . Bastará que f esté definida en algún entorno de p , aunque no nos interesa ninguno en particular. Por este motivo reemplazaremos a la función $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ por lo que se conoce como su germen en p :

Definiciones 2.1.1. Fijemos un punto $p \in \mathbb{C}^n$. Diremos que dos funciones holomorfas $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : V \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, definidas en entornos abiertos de p , son **equivalentes** si $f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$. A las clases de equivalencia de esta relación las llamaremos **gérmenes**. A la clase de equivalencia de una función $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ la denotaremos como $f : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow \mathbb{C}$, o $f : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow (\mathbb{C}, f(p))$ si queremos hacer énfasis en su valor en el punto p , o simplemente f cuando los demás datos queden claros por el contexto.

Cometeremos el abuso de notación al denotar como f tanto a un germen como a alguno de sus representantes.

Para simplificar el problema podemos suponer sin perder generalidad que $p = 0$ y $\alpha = 0$, ya que podemos componer y precomponer al germen f para que esto suceda.

Definiciones 2.1.2. Una **singularidad** es un germen $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ de manera que el gradiente ∇f de cualquiera de sus representantes se anula en el origen. Si además existe un representante de f que tiene un único punto crítico en su dominio diremos que esta singularidad es **aislada**.

Por último, el comportamiento de las fibras V_β cerca de $p = 0$ no debería depender de la elección de un sistema de coordenadas de \mathbb{C}^n . Por lo tanto identificaremos a las singularidades salvo cambios de coordenadas.

Definición 2.1.3. Decimos que dos singularidades aisladas f y g son **equivalentes** si existe un germen de biholomorfismo $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $f \circ \varphi = g$.

El caso $n = 1$ es particularmente sencillo, ya que las clases de equivalencia de estas singularidades quedan completamente determinadas por su multiplicidad en el origen.

Ejemplo 2.1.4. Supongamos que $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es una singularidad aislada de una variable compleja. Si f se anula en el origen con multiplicidad m , entonces podemos encontrar una factorización $f(z) = z^m h(z)$, donde $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ es un germen de función holomorfa que no se anula en $0 \in \mathbb{C}$. Como $h(0) \neq 0$, este elemento admite una raíz m -ésima $k : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}$, es decir que $k^m = h$. Como la derivada de la función $\psi(z) = zk(z)$ no se anula en 0 (ya que $\psi'(0) = k(0)$), el teorema de la función inversa nos asegura que ψ es un biholomorfismo entre dos entornos abiertos del origen. Su inversa define un germen de biholomorfismo $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, y por lo tanto f y $g(z) = f \circ \varphi(z) = z^m$ son equivalentes.¹

¹Este ejemplo es un caso particular del teorema de Tougeron, el cual afirma que toda singularidad aislada de multiplicidad μ es equivalente a su polinomio de Taylor de grado $\mu + 1$ [AGZV85, pág. 121].

Para una cantidad arbitraria de variables, el tipo de singularidades más elementales que nos podemos encontrar son las no degeneradas, ya que las mismas están completamente caracterizadas, como veremos en el próximo lema.

Definición 2.1.5. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa definida sobre una variedad compleja de dimensión n . Diremos que un punto crítico p de f es **no degenerado** si existe un sistema de coordenadas complejas z_1, \dots, z_n alrededor del punto p de manera tal que la matriz hessiana

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} (p) \right)_{ij} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

es no singular. Se puede comprobar fácilmente que de ser así, la matriz hessiana correspondiente a cualquier otro sistema de coordenadas también es no singular.

Lema 2.1.6 (Morse). Sea $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si p es un punto crítico no degenerado de f , entonces existe una carta compleja φ definida en un entorno de p de manera que $\varphi(0) = p$, y

$$f \circ \varphi^{-1}(z_1, \dots, z_n) = f(p) + z_1^2 + \dots + z_n^2.$$

En particular, si una singularidad aislada $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ admite un representante que tiene un punto crítico no degenerado en el origen, entonces f es equivalente a la singularidad $Q(z_1, \dots, z_n) = z_1^2 + \dots + z_n^2$.

Este resultado se puede probar esencialmente de la misma manera que la versión del lema de Morse para variedades suaves [Mil63, Lemma 2.2] y por lo tanto omitiremos su demostración.

2.2. Singularidades simples

El objetivo de esta sección consiste en motivar el estudio de una familia de singularidades que está en correspondencia con los subgrupos finitos de $SU(2)$. A estas singularidades se las conoce como **simples**, **kleinianas**,

o **de Du Val**. Al final de esta tesis veremos que, al igual que en otras ramas de la matemática, estos objetos admiten una asignación de diagramas de Dynkin de tipo A, D y E. No es casual entonces que estas singularidades tengan conexiones profundas con las álgebras de Lie semisimples y los grupos de Coxeter finitos [AGLV98, Chapter 2, §5]. Debido al carácter motivacional de esta sección, enunciaremos varios resultados sin sus respectivas demostraciones. El lector interesado puede encontrar los detalles en el libro [Lam86], o en la fuente original [Kle13].

Una de las maneras de enumerar todos los subgrupos finitos de $SU(2)$ es con la ayuda del revestimiento de dos hojas $\rho : SU(2) \rightarrow SO(3)$. Todo subgrupo finito no cíclico de $SU(2)$ es de la forma $G^* = \rho^{-1}(G)$, donde G es un subgrupo finito de $SO(3)$. Este tipo de grupos se llaman **binarios**. Se sabe que hay tres tipos de subgrupos finitos de $SO(3)$: los grupos cíclicos Z_n , los grupos diedrales D_n , y los grupos de movimientos rígidos de los sólidos platónicos. En esta última categoría hay grupos repetidos. Por ejemplo, el grupo de movimientos rígidos del cubo coincide con el del octaedro. Esto se debe a que podemos inscribir el primer poliedro en el segundo y viceversa. Lo mismo ocurre entre el dodecaedro y el icosaedro. Notemos a los grupos de movimientos rígidos del tetraedro, octaedro e icosaedro como T , O e I respectivamente. De esta manera, los subgrupos finitos de $SU(2)$ son Z_n, D_n^*, T^*, O^* e I^* .

La manera de asignarle una singularidad a cada uno de estos subgrupos G de $SU(2)$ es considerando el espacio de órbitas \mathbb{C}^2/G . En general, si $G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ es un subgrupo finito de matrices, le podemos dar una estructura de variedad algebraica afín al espacio cociente \mathbb{C}^n/G . La forma de hacerlo es definiendo primero su anillo de coordenadas homogéneas y luego usar la equivalencia entre la categoría de \mathbb{C} -álgebras íntegras finitamente generadas y variedades algebraicas afines sobre \mathbb{C} . Conjuntísticamente hablando, tener una función $\mathbb{C}^n/G \rightarrow \mathbb{C}$ es lo mismo que tener una función $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que es constante en las órbitas de la acción de G sobre \mathbb{C}^n . De esta manera, el candidato natural a anillo de coordenadas homogéneas para este cociente es

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^G = \{p \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \mid p(gX) = p(X), \quad \forall g \in G\}.$$

Se puede probar que efectivamente esta es una \mathbb{C} -subálgebra finitamente generada de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, la cual es conocida como el **álgebra de in-**

variantes de G . Esta idea puede plasmarse en el siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en [Loo84].

Teorema 2.2.1. Sean p_1, \dots, p_m generadores del álgebra $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^G$. Consideremos la aplicación $\varphi : \mathbb{C}^n/G \rightarrow \mathbb{C}^m$ definida como

$$\varphi([z]) = (p_1(z), \dots, p_m(z)).$$

Entonces la imagen de φ es una subvariedad algebraica $V_G \subseteq \mathbb{C}^m$, y la restricción $\varphi : \mathbb{C}^n/G \rightarrow V_G$ es un homeomorfismo. Además, el anillo de coordenadas homogéneas de V_G es isomorfo a $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^G$.

En el caso en que G es uno de los subgrupos finitos de $SU(2)$, el álgebra de invariantes $\mathbb{C}[X, Y]^G$ está generada por tres polinomios homogéneos p_1, p_2, p_3 , los cuales satisfacen una relación polinomial $f(p_1, p_2, p_3) = 0$. Más aún, la variedad V_G coincide con el conjunto de ceros de $f(x, y, z)$. Este germen $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es la singularidad simple que se obtiene a partir de G . Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.2. Sea \mathbb{Z}_n el subgrupo cíclico de $SU(2)$ generado por la matriz

$$\begin{bmatrix} \xi_n & 0 \\ 0 & \xi_n^{-1} \end{bmatrix},$$

donde ξ_n es una raíz n -ésima primitiva de la unidad. El álgebra de invariantes $\mathbb{C}[X, Y]^{\mathbb{Z}_n}$ está generado por los polinomios

$$p_1 = XY, \quad p_2 = X^n, \quad p_3 = Y^n;$$

los cuales satisfacen la relación

$$p_1^n - p_2 p_3 = 0.$$

La singularidad asociada al subgrupo cíclico es $f(x, y, z) = x^n - yz$, que al precomponer por el cambio de variables $(x, y, z) \mapsto (x, iz - y, y + iz)$ se escribe como $f(x, y, z) = x^n + y^2 + z^2$. Diremos que toda singularidad equivalente a f es de tipo A_{n-1} . La elección de este nombre quedará justificada cuando le asignemos a esta singularidad un diagrama de Dynkin del mismo tipo.

Ejemplo 2.2.3. El subgrupo diedral binario $\mathbb{D}_n^* \subseteq \text{SU}(2)$ está generado por las matrices

$$\begin{bmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix};$$

y su álgebra de invariantes correspondiente por los polinomios

$$p_1 = X^2Y^2, \quad p_2 = X^{2n} + (-1)^n Y^{2n}, \quad p_3 = XY(X^{2n} + (-1)^n Y^{2n}).$$

En este caso, la singularidad que anula a la terna de polinomios (p_1, p_2, p_3) es $f(x, y, z) = 4(-x)^{n+1} + xy^2 - z^2$. Al igual que en el ejemplo previo, si precomponemos por el cambio de variables $(x, y, z) \mapsto (-\sqrt[n+1]{4x}, y, iz)$, obtenemos la singularidad simple $f(x, y, z) = x^{n+1} + xy^2 + z^2$. A las singularidades de esta clase se les dice de tipo D_{n+2} .

Repitiendo este proceso con los subgrupos \mathbb{T}^* , \mathbb{O}^* e \mathbb{I}^* obtenemos la lista completa de las singularidades simples:

Subgrupo de $\text{SU}(2)$	Singularidad	Nomenclatura
\mathbb{Z}_n	$x^n + y^2 + z^2$	A_{n-1}
\mathbb{D}_n^*	$x^{n+1} + xy^2 + z^2$	D_{n+2}
\mathbb{T}^*	$x^3 + y^4 + z^2$	E_6
\mathbb{O}^*	$x^3 + xy^3 + z^2$	E_7
\mathbb{I}^*	$x^3 + y^5 + z^2$	E_8

Capítulo 3

La fibración de Milnor

En este capítulo derivaremos ciertos objetos topológicos a partir de una singularidad aislada. Los mismos nos permitirán entender el comportamiento de los representantes de dicho germen en un entorno del punto crítico. Como el título lo sugiere, uno de ellos será una fibración localmente trivial, y por lo tanto podremos introducir las nociones de monodromía y variación de una singularidad aislada siguiendo las construcciones del primer capítulo. Durante las primeras dos secciones seguiremos principalmente el tratamiento de [Loo84], mientras que la cuarta y quinta sección estarán basadas en los libros [AGZV88] y [Mil68] respectivamente. Algunas de las demostraciones de este capítulo siguen las líneas de [Jou07].

De ahora en más usaremos las notaciones

$$\begin{aligned} B_\varepsilon &= \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < \varepsilon\}, & S_\varepsilon &= \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = \varepsilon\}, \\ \overline{B}_\varepsilon &= \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq \varepsilon\}, & D_\eta &= \{z \in \mathbb{C} : |z| < \eta\}. \end{aligned}$$

3.1. El link de una singularidad

Supongamos que $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa que representa a una singularidad aislada $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Una de las

primeras preguntas que uno podría formularse es cómo es la topología de la variedad $f^{-1}(0)$ alrededor del origen. Para darle un significado más formal a este interrogante nos proponemos estudiar el espacio topológico

$$K_f = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon,$$

donde S_ε denota a la esfera de radio $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño. Este espacio es conocido como el **link** de f .

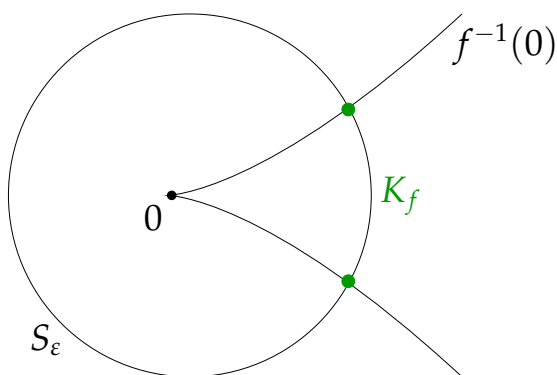


Figura 3.1: El link de una singularidad.

Una de las falencias de la definición del link $K_f = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon$ es la dependencia del radio ε elegido. La siguiente proposición se encarga de solucionar este problema.

Proposición 3.1.1. *Sea $r : U \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $r(z) = |z|^2$. Entonces existe un radio $\varepsilon > 0$ de manera que $r : f^{-1}(0) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ no tiene valores críticos en el intervalo $(0, \varepsilon^2]$.*

Para evitar el uso excesivo de autoreferencias, de aquí en adelante supondremos que todo radio ε es lo suficientemente pequeño como en la tesis de la proposición previa.

Corolario 3.1.2. *El link $K_f = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon$ es una variedad diferenciable de dimensión real $2n - 3$, la cual no depende de la elección del radio ε .*

Demostración. Tomemos un radio $\varepsilon > 0$ como en la Proposición 3.1.1. Por el teorema de Ehresmann 1.1.7, $r : (f^{-1}(0) \setminus \{0\}) \cap B_\varepsilon \rightarrow (0, \varepsilon^2)$ es una fibración localmente trivial cuya base es conexa. Luego, todas sus fibras son difeomorfas y tienen dimensión igual a

$$\dim_{\mathbb{R}}(f^{-1}(0) \setminus \{0\}) - 1 = (2n - 2) - 1 = 2n - 3. \quad \square$$

El origen de esta variedad se remonta al trabajo de Brauer [Bra28], el cual estudió el caso $n = 2$. Para esta cantidad de variables el link K_f es una variedad de dimensión uno embebida en la 3-esfera $S_\varepsilon \subseteq \mathbb{C}^2$. De aquí recibe su nombre.

Para demostrar la Proposición 3.1.1 necesitaremos una generalización de un resultado de Milnor que él mismo bautizó como “The Curve Selection Lemma”. Este lema es altamente técnico y por ende omitiremos su demostración, la cual puede encontrarse en [Mil68].

Lema 3.1.3 (de selección de la curva). *Sean U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m , y funciones analíticas $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l : U \rightarrow \mathbb{R}$. Consideremos el conjunto semianalítico*

$$Z = \{x \in U \mid f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0, g_1(x) > 0, \dots, g_l(x) > 0\}.$$

Si $p \in U$ es un punto de acumulación de Z , entonces existe una curva analítica $\gamma : I \rightarrow U$ que comienza en p tal que $\gamma(t) \in Z$ para todo $0 < t \leq 1$.

La versión original de este lema pide que las funciones $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l$ sean polinomiales, pero la demostración puede adaptarse para el caso analítico mediante modificaciones menores.

Demostración de la Proposición 3.1.1. Sea $\tilde{r} = r : f^{-1}(0) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que podemos encontrar puntos $p \in f^{-1}(0) \setminus \{0\}$ arbitrariamente cerca del origen tales que $\text{grad}_p \tilde{r} = 0$ y lleguemos a una contradicción.¹ Si $f = u + iv$ es la descomposición en partes real e imaginaria de f , entonces el espacio tangente $T_p f^{-1}(0)$ es exactamente el complemento ortogonal del subespacio $\text{span}_{\mathbb{R}}\{\text{grad}_p u, \text{grad}_p v\} \subseteq T_p \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$ con respecto al producto interno real $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. A partir de esta descripción es fácil

¹El gradiente de una función suave $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ sobre una variedad riemanniana M es el único campo $\text{grad } g \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\langle \text{grad}_p g, v \rangle = v(g)$ para todo $v \in T_p M$.

comprobar que $\text{grad}_p \tilde{r}$ es la proyección ortogonal de $\text{grad}_p r$ al subespacio $T_p f^{-1}(0)$, y por lo tanto el conjunto de los puntos críticos de \tilde{r} es

$$\begin{aligned} Z &= \left\{ p \in f^{-1}(0) \setminus \{0\} : \text{grad}_p r = \alpha \text{grad}_p u + \beta \text{grad}_p v, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ p \in U : f(p) = 0, r(p) > 0, \text{rank} \left[\text{grad}_p r, \text{grad}_p u, \text{grad}_p v \right] < 3 \right\}. \end{aligned}$$

Por el lema de selección de la curva 3.1.3 podemos encontrar un camino analítico $\gamma : I \rightarrow U$ que parte del origen tal que $\gamma(t)$ es un punto crítico de \tilde{r} para todo $0 < t \leq 1$. De esta manera tenemos que $(\tilde{r} \circ \gamma)'(t) = 0$ para todo $t \in (0, 1]$, y por lo tanto $\tilde{r} \circ \gamma$ debe ser constantemente igual a cero. Esto absurdo porque $0 \notin Z$. \square

Ejemplo 3.1.4. Consideremos la singularidad aislada $f(x, y) = x^p - y^q$, donde p y q son dos números naturales coprimos mayores o iguales que 2. El conjunto de ceros de f se puede parametrizar mediante la asignación $\alpha \mapsto (\alpha^q, \alpha^p)$, con lo cual

$$\begin{aligned} K_f &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^n : x^p - y^q = 0, |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon^2 \right\} \\ &= \left\{ (\alpha^p, \alpha^q) : |\alpha|^{2p} + |\alpha|^{2q} = \varepsilon^2, \alpha \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ (ae^{2p\pi i\theta}, ae^{2q\pi i\theta}) : \theta \in [0, 1] \right\}, \end{aligned}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es la única solución real positiva de la ecuación $a^{2p} + a^{2q} = \varepsilon^2$. Esta descripción nos dice que el espacio K_f es un nudo de S_ε inscrito en el toro $S_a^1 \times S_a^1$, de manera que K_f da p vueltas alrededor de su primera componente y q vueltas en torno a la segunda (ver la Figura 3.2).

El siguiente ejemplo está extraído del artículo [Mil75].

Ejemplo 3.1.5. Supongamos que $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es una de las singularidades simples correspondiente a uno de los subgrupos finitos G de $SU(2)$. Como mencionamos anteriormente, el álgebra de invariantes $\mathbb{C}[X, Y]^G$ está generado por tres polinomios homogéneos p_1, p_2 y p_3 . Digamos que los grados de estos generadores son n_1, n_2 y n_3 respectivamente. Gracias al Teorema 2.2.1, la función $\varphi([z]) = (p_1(z), p_2(z), p_3(z))$

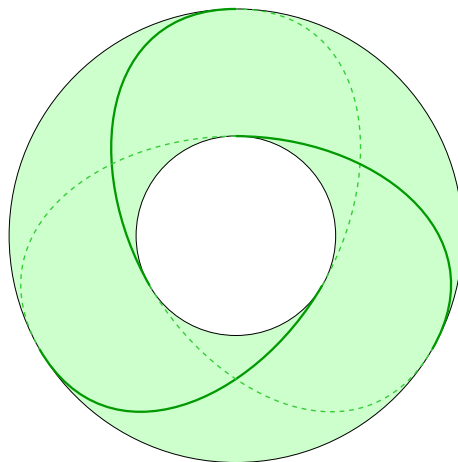


Figura 3.2: El link de la singularidad $f(x, y) = x^3 - y^2$.

es una biyección entre \mathbb{C}^2/G y $V_G = f^{-1}(0)$. Es claro que φ manda la semirecta real $\{[\lambda z] \mid \lambda \geq 0\} \subseteq \mathbb{C}^2/G$ en la curva parametrizada por $\lambda \mapsto (\lambda^{n_1} p_1(z), \lambda^{n_2} p_2(z), \lambda^{n_3} p_3(z))$, la cual interseca a la esfera S_ε en un único punto y de manera transversal. Esto define una función suave e inyectiva $S^3/G \rightarrow K_f$. En el próximo capítulo veremos que en estas condiciones K_f resulta ser conexo (ver el Teorema 4.3.6). Pero una función suave que sale de una variedad compacta tridimensional y llega a una variedad conexa tridimensional debe ser un homeomorfismo. Luego, $K_f \simeq S^3/G$.

Estos espacios S^3/G admiten una descripción explícita como cocientes de poliedros sólidos luego de identificar sus caras de forma conveniente. Incentivamos al lector interesado a inspeccionar [Lam86, Chapter 2, §4].

Al igual que con el link, uno podría preguntarse cómo es la topología de la intersección $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\varepsilon$, para una elección apropiada del radio $\varepsilon > 0$. Este espacio no proporciona información adicional sobre la singularidad pues está completamente determinado por K_f .

Teorema 3.1.6. *Existe un homeomorfismo*

$$f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\varepsilon \cong \text{Cone}(K_f) = K_f \times I / (K_f \times \{0\}).$$

Demostración. Sea $\tilde{\varepsilon} > \varepsilon$ un radio de manera que $r : f^{-1}(0) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ no tenga valores críticos en el intervalo $(0, \tilde{\varepsilon}^2)$. El teorema de Ehresmann nos asegura que $r : (f^{-1}(0) \setminus \{0\}) \cap B_{\tilde{\varepsilon}} \rightarrow (0, \tilde{\varepsilon})$ es una fibración localmente trivial; y como su base es contráctil, es trivial. Cualquier trivialización $(f^{-1}(0) \setminus \{0\}) \cap B_{\tilde{\varepsilon}} \cong K_f \times (0, \tilde{\varepsilon})$ se puede restringir a un difeomorfismo $(f^{-1}(0) \setminus \{0\}) \cap \overline{B}_{\tilde{\varepsilon}} \cong K_f \times (0, \tilde{\varepsilon}]$, que a su vez se extiende a un homeomorfismo como el del enunciado. \square

En lo que queda de la sección veremos que K_f es un invariante de la clase de equivalencia de la singularidad f . Este hecho no resulta evidente a primera vista, porque al precomponer a f por un cambio de coordenadas holomorfo las esferas S_ε son deformadas. En respuesta a esta dificultad ampliaremos el nivel de generalidad de las definiciones utilizadas hasta el momento.

Definición 3.1.7. Diremos que una función analítica $r : U \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ define al origen si cumple que $r^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, y para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se tiene que $r^{-1}([0, \varepsilon^2])$ es un espacio compacto.

Esta definición pretende generalizar a la función distancia $r(z) = |z|^2$, por lo tanto usaremos las notaciones

$$S_{r,\varepsilon} = r^{-1}(\varepsilon^2), \quad B_{r,\varepsilon} = r^{-1}([0, \varepsilon^2]), \quad \overline{B}_{r,\varepsilon} = r^{-1}([0, \varepsilon^2]).$$

Observación 3.1.8. Todas las definiciones, resultados y demostraciones que vimos a lo largo de esta sección se pueden reescribir palabra por palabra reemplazando la aplicación $z \mapsto |z|^2$ por funciones r que definen al origen; y a los conjuntos S_ε , B_ε y \overline{B}_ε por sus versiones análogas $S_{r,\varepsilon}$, $B_{r,\varepsilon}$ y $\overline{B}_{r,\varepsilon}$.

Lema 3.1.9. Sean $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ una singularidad aislada y r, r' dos funciones que definen al origen. Entonces podemos encontrar un par de números positivos $\varepsilon, \varepsilon'$, que cumplen que $\overline{B}_{r',\varepsilon'} \subseteq B_{r,\varepsilon}$; y un difeomorfismo

$$f^{-1}(0) \cap (\overline{B}_{r,\varepsilon} \setminus B_{r',\varepsilon'}) \cong (f^{-1}(0) \cap S_{r,\varepsilon}) \times I,$$

que se restringe a difeomorfismos

$$f^{-1}(0) \cap S_{r,\varepsilon} \cong f^{-1}(0) \cap S_{r,\varepsilon} \times \{0\}, \quad f^{-1}(0) \cap S_{r',\varepsilon'} \cong f^{-1}(0) \cap S_{r,\varepsilon} \times \{1\}.$$

Demostración. Sean \tilde{r} y \tilde{r}' las restricciones respectivas de las funciones r y r' al espacio $f^{-1}(0) \setminus \{0\}$. En primer lugar veamos que los puntos p de $f^{-1}(0) \setminus \{0\}$ para los cuales los vectores $\text{grad}_p \tilde{r}$ y $\text{grad}_p \tilde{r}'$ apuntan en direcciones opuestas no se pueden acumular en el origen. Hablando con mayor precisión, decimos que dichos vectores apuntan en direcciones opuestas cuando son linealmente dependientes y además $\langle \text{grad}_p \tilde{r}, \text{grad}_p \tilde{r}' \rangle < 0$. El conjunto formado por estos puntos es exactamente

$$Z = \left\{ p \in f^{-1}(0) \setminus \{0\} : \langle \text{grad}_p \tilde{r}, \text{grad}_p \tilde{r}' \rangle < 0, \right. \\ \left. \text{rank} \left[\text{grad}_p r, \text{grad}_p r', \text{grad}_p u, \text{grad}_p v \right] < 4 \right\},$$

por ende estamos bajo las hipótesis del lema de selección de la curva 3.1.3. De esta manera podemos hallar una curva analítica γ que comienza en el origen y $\text{grad}_{\gamma(t)} \tilde{r} = \lambda(t) \text{grad}_{\gamma(t)} \tilde{r}'$ para todo $0 < t \leq 1$, para cierta función escalar $\lambda(t) < 0$. Luego,

$$(\tilde{r} \circ \gamma)'(t) = \langle \text{grad}_{\gamma(t)} \tilde{r}, \gamma'(t) \rangle = \lambda(t) \langle \text{grad}_{\gamma(t)} \tilde{r}', \gamma'(t) \rangle = \lambda(t) (\tilde{r}' \circ \gamma)'(t),$$

lo cual es absurdo porque las funciones \tilde{r}, \tilde{r}' no crecen simultáneamente a lo largo de γ .

Tomemos dos números reales positivos $\varepsilon, \varepsilon'$ tales que $\overline{B}_{r', \varepsilon'} \subseteq B_{r, \varepsilon}$, y que los gradientes $\text{grad} \tilde{r}, \text{grad} \tilde{r}'$ no apunten en direcciones opuestas en el conjunto $\overline{B}_{r, \varepsilon}$. El siguiente paso de la demostración consistirá en encontrar un campo vectorial X sobre $(f^{-1}(0) \setminus \{0\}) \cap \overline{B}_{r, \varepsilon}$ que satisfaga las condiciones

$$\langle \text{grad}_p \tilde{r}, X_p \rangle = -1, \quad \langle \text{grad}_p \tilde{r}', X_p \rangle < 0.$$

Este campo nos permitirá construir el difeomorfismo buscado a partir de sus curvas integrales. Bastará construirlo localmente para luego pegarlo usando una partición de la unidad. Tomemos un punto p perteneciente a la intersección $(f^{-1}(0) \setminus \{0\}) \cap \overline{B}_{r, \varepsilon}$. Si $\text{grad}_p \tilde{r}$ y $\text{grad}_p \tilde{r}'$ son linealmente dependientes, entonces $\langle \text{grad}_p \tilde{r}, \text{grad}_p \tilde{r}' \rangle > 0$, dado que no pueden apuntar en direcciones opuestas y ninguno de estos vectores es nulo. Por continuidad, esta desigualdad tiene que seguir valiendo en un entorno abierto U de p . El campo $X_q = -\text{grad}_q \tilde{r} / \|\text{grad}_q \tilde{r}\|^2$ definido en U cumple

las propiedades buscadas. Si por el contrario $\text{grad}_p \tilde{r}$ y $\text{grad}_p \tilde{r}'$ son linealmente independientes, entonces existe un entorno abierto U de p tal que $\langle \text{grad}_q \tilde{r}, X_p \rangle = \langle \text{grad}_q \tilde{r}', X_p \rangle = -1$, para todo $q \in U$.

Sea Φ el flujo asociado al campo X . La primera de las condiciones sobre X implica que $r \circ \Phi^{(p)}(t) = \varepsilon - t$, para todo $p \in f^{-1}(0) \cap S_{r,\varepsilon}$; mientras que la segunda nos asegura que $r' \circ \Phi^{(p)}(t)$ es una función estrictamente decreciente. Como $r : f^{-1}(0) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon} \rightarrow [0, \varepsilon]$ es una función propia tal que $r^{-1}(0) = \{0\}$, el flujo $\Phi^{(p)}(t)$ está definido en el intervalo $[0, \varepsilon]$ y además tiende a 0 cuando t tiende a ε (es una consecuencia del lema del escape [Lee03, Lemma 9.19]). Por lo tanto para cada $p \in f^{-1}(0) \cap S_{r,\varepsilon}$ existe una única solución $t = \tau(p)$ de la ecuación $r' \circ \Phi^{(p)}(t) = \varepsilon'$, la cual define una función analítica real $\tau : f^{-1}(0) \cap S_{r,\varepsilon} \rightarrow [0, \varepsilon)$ gracias al teorema de la función implícita. Finalmente, el difeomorfismo

$$\begin{aligned} (f^{-1}(0) \cap S_{r,\varepsilon}) \times I &\longrightarrow f^{-1}(0) \cap (\bar{B}_{r,\varepsilon} \setminus B_{r',\varepsilon'}) \\ (p, s) &\mapsto \Phi^{(p)}(s\tau(p)). \end{aligned}$$

satisface las propiedades del enunciado. \square

Corolario 3.1.10. *La variedad suave $K_f = f^{-1}(0) \cap S_{r,\varepsilon}$ no depende de la función r ni del número real ε , y es un invariante de la clase de equivalencia de f .*

Demostración. La primera parte del corolario es una consecuencia inmediata del lema previo. Por otro lado, sea $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen de biholomorfismo tal que $g = f \circ \varphi$. Si r es una función que define al origen, entonces la composición $r' = r \circ \varphi$ tiene la misma propiedad. Luego, φ^{-1} resulta ser un difeomorfismo entre K_f y K_g pues

$$\varphi^{-1}(K_f) = \varphi^{-1}(f^{-1}(0) \cap S_{r,\varepsilon}) = g^{-1}(0) \cap S_{r',\varepsilon} = K_g. \quad \square$$

3.2. Representantes buenos

Con la intención de entender la topología del link K_f con mayor profundidad, Milnor definió en su trabajo [Mil68] la función suave

$$\phi = \frac{f}{|f|} : S_\varepsilon \setminus K_f \rightarrow S^1,$$

y probó que la misma es una fibración localmente trivial. En honor a este célebre matemático, hoy en día esta función es conocida como la **fibración de Milnor** de la singularidad f . Parte del interés que motiva el estudio de esta aplicación se debe a que las clausuras de sus fibras son variedades diferenciables que tienen a K_f como borde en común. Esta herramienta le permitió a Milnor probar que K_f resulta ser un espacio topológico $(n - 3)$ -conexo (este teorema será probado al final del siguiente capítulo).

En esta tesis optaremos por implementar una de las versiones alternativas de la fibración de Milnor, siguiendo el enfoque de Arnold [AGZV88]. Para nosotros la fibración de Milnor será la restricción

$$f : f^{-1}(D_\eta \setminus \{0\}) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon} \rightarrow D_\eta \setminus \{0\},$$

donde D_η es un disco abierto del plano complejo de radio $\eta > 0$ lo suficientemente pequeño. La conexión entre ambas fibraciones puede encontrarse en [Zol06, Proposition 4.6]. Una de las ventajas que presenta la construcción de Arnold con respecto a la de Milnor es que a partir de la primera se pueden derivar ciertos invariantes combinatorios tales como matrices de intersección y diagramas de Dynkin (este será el contenido del quinto capítulo).

Proposición 3.2.1. *Existe un radio $\eta = \eta(r, \varepsilon) > 0$ de manera que la restricción*

$$f : f^{-1}(D_\eta) \cap S_{r,\varepsilon} \rightarrow D_\eta$$

es una submersión, y por lo tanto una fibración localmente trivial.

Nuevamente, de aquí en adelante supondremos, sin aclararlo explícitamente, que todos los radios $\eta > 0$ son lo suficientemente pequeños como en la tesis de la Proposición 3.2.1.

Demostración. En primer lugar veremos que el cero es un valor regular de la función $g = f|_{S_{r,\varepsilon}} : S_{r,\varepsilon} \rightarrow \mathbb{C}$. Dado un punto $p \in f^{-1}(0) \cap S_{r,\varepsilon}$, es claro que $\ker d_p g = T_p f^{-1}(0) \cap T_p S_{r,\varepsilon}$, con lo cual tenemos la siguiente cadena

de equivalencias:

$$\begin{aligned}
p \text{ es un punto regular de } g &\iff \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} d_p g = 2 \\
&\iff \dim_{\mathbb{R}} (T_p f^{-1}(0) \cap T_p S_{r,\varepsilon}) = 2n - 3 \\
&\iff \dim_{\mathbb{R}} (T_p f^{-1}(0) + T_p S_{r,\varepsilon}) = 2n \\
&\iff T_p f^{-1}(0) + T_p S_{r,\varepsilon} = T_p \mathbb{C}^n \\
&\iff f^{-1}(0) \pitchfork S_{r,\varepsilon} \text{ en } p.
\end{aligned}$$

Aquí hemos usado los teoremas de la dimensión para espacios vectoriales y la igualdad $\dim_{\mathbb{R}} T_p f^{-1}(0) = 2n - 2$, la cual es válida porque p es un punto regular de f . Por otro lado,

$$\begin{aligned}
f^{-1}(0) \pitchfork S_{r,\varepsilon} \text{ en } p &\iff T_p f^{-1}(0) + T_p S_{r,\varepsilon} = T_p \mathbb{C}^n \\
&\iff T_p f^{-1}(0) \not\subseteq T_p S_{r,\varepsilon} = \ker d_p r \quad (\dim_{\mathbb{R}} S_{r,\varepsilon} = 2n - 1) \\
&\iff d_p r : T_p f^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R} \text{ es no nulo} \\
&\iff p \text{ es un punto regular de } r : f^{-1}(0) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Como hemos supuesto anteriormente (concretamente, en [este](#) párrafo), ε^2 es un valor regular de la restricción $r : f^{-1}(0) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, por ende se sigue de estas dos cadenas de equivalencias que cero es un valor regular de g .

Sea $U \subseteq S_{r,\varepsilon}$ un entorno abierto de $K_f = f^{-1}(0) \cap S_{r,\varepsilon}$ de manera que $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ sea una submersión. Podremos concluir con la demostración si logramos probar que existe un $\eta > 0$ de manera que $g^{-1}(D_\eta)$ está contenido en U . Supongamos por el contrario que existe una sucesión $(z_k)_k$ de elementos de $S_{r,\varepsilon} \setminus U$ cuyas imágenes $(g(z_k))_k$ convergen a cero. Usando la compacidad de $S_{r,\varepsilon} \setminus U$ podemos suponer que $(z_k)_k$ converge a un elemento $z \in S_{r,\varepsilon} \setminus U$. Pero la continuidad de la función g implica que $g(z) = 0$, lo cual es absurdo porque $g^{-1}(0) = K_f \subseteq U$. \square

Apelando al teorema de Ehresmann, de la proposición previa podemos

deducir que la fibración de Milnor es efectivamente una fibración localmente trivial.

Teorema 3.2.2. *La función diferenciable*

$$f : f^{-1}(D_\eta \setminus \{0\}) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon} \rightarrow D_\eta \setminus \{0\}$$

es una fibración localmente trivial.

Para no acarrear demasiados índices, a lo largo de esta tesis usaremos las notaciones

$$\begin{aligned} X &= f^{-1}(D_\eta) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon}, \\ D &= D_\eta, \\ E &= f^{-1}(D_\eta \setminus \{0\}) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon}, \\ B &= D_\eta \setminus \{0\}, \\ F &= f^{-1}(w) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon} \quad (w \in D_\eta \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

Como la base de la fibración de Milnor $f : E \rightarrow B$ es conexa, todas sus fibras son difeomorfas entre sí. A la fibra F la llamaremos la **fibra de Milnor** de f . Esta variedad diferenciable tiene dimensión real $2n - 2$ y su borde es difeomorfo al link K_f (ya que 3.2.1 afirma que $f : \partial X \rightarrow D$ es una fibración localmente trivial, y todas sus fibras son difeomorfas a este espacio). Siguiendo la terminología de Looijenga en [Loo84], diremos que la función $f : X \rightarrow D$ es un **representante bueno** de la singularidad f .

Al igual que hicimos con el link K_f , veremos que la fibración de Milnor es un invariante de la clase de equivalencia de la singularidad f . Pero primero necesitaremos ver de qué manera están relacionados dos de sus representantes buenos.

Teorema 3.2.3. *Sean $f : X \rightarrow D$ y $f' : X' \rightarrow D'$ dos representantes buenos de una singularidad aislada f . Entonces existen dos difeomorfismos $\Phi : X \rightarrow X'$ y $\varphi : D \rightarrow D'$ de manera que φ preserva orientaciones, $\varphi(0) = 0$, y que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ D & \xrightarrow{\varphi} & D'. \end{array}$$

Demostración. Digamos que $X = f^{-1}(D_\eta) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon}$ y $X' = f^{-1}(D_{\eta'}) \cap \bar{B}_{r',\varepsilon'}$. Esta demostración será fragmentada en varios casos.

Caso 1: $r = r', \varepsilon = \varepsilon', \eta > \eta'$. Tomemos un difeomorfismo $\varphi : B \rightarrow B'$ que sea la identidad en un entorno punteado del origen. Como $f : E \rightarrow B$ es una fibración localmente trivial podemos encontrar un levantamiento $\Phi : E \rightarrow E'$ de φ que sea la identidad en un entorno abierto de la fibra singular $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon}$. Este caso sigue luego de extender estas funciones por la identidad.

Caso 2: $r = r'$. Tomemos un tercer representante bueno $f : X'' \rightarrow D''$ de manera que $r'' = r = r'$, y ε'' sea menor que ε y ε' . El caso anterior nos permite suponer que $\eta = \eta' = \eta''$. Por el teorema de Ehresmann, la función diferenciable

$$f : f^{-1}(D_\eta) \cap (\bar{B}_{r,\varepsilon} \setminus B_{r,\varepsilon''}) \rightarrow D_\eta$$

es un fibrado localmente trivial; y como su base es contráctil, además es trivial. Un razonamiento análogo para ε' en conjunción con el Teorema 3.1.6 nos permite obtener una cadena de difeomorfismos

$$\begin{aligned} f^{-1}(D_\eta) \cap (\bar{B}_{r,\varepsilon} \setminus B_{r,\varepsilon''}) &\cong f^{-1}(0) \cap (\bar{B}_{r,\varepsilon} \setminus B_{r,\varepsilon''}) \times D_\eta \\ &\cong K_f \times [\varepsilon'', \varepsilon] \times D_\eta \\ &\cong K_f \times [\varepsilon'', \varepsilon'] \times D_\eta \\ &\cong f^{-1}(0) \cap (\bar{B}_{r,\varepsilon} \setminus B_{r,\varepsilon''}) \times D_\eta \\ &\cong f^{-1}(D_\eta) \cap (\bar{B}_{r,\varepsilon'} \setminus B_{r,\varepsilon''}), \end{aligned}$$

los cuales conmutan con las proyecciones. Observemos que el difeomorfismo $K_f \times [\varepsilon'', \varepsilon] \cong K_f \times [\varepsilon'', \varepsilon']$ puede ser elegido de manera que sea la

identidad en un entorno abierto de $K_f \times \{\varepsilon''\}$. Esta elección nos permite extender a la función $f^{-1}(D_\eta) \cap (\bar{B}_{r,\varepsilon} \setminus B_{r,\varepsilon''}) \cong f^{-1}(D_\eta) \cap (\bar{B}_{r,\varepsilon} \setminus B_{r,\varepsilon''})$ por la identidad en $f^{-1}(D_\eta) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon''}$, y así concluir con este caso.

Caso 3: el caso general. Gracias a los casos 1 y 2 podemos suponer que los radios $\varepsilon, \varepsilon'$ satisfacen las hipótesis del Lema 3.1.9 y que $\eta = \eta'$. La demostración de esta tercera parte es análoga a la segunda haciendo uso del Lema 3.1.9 en lugar del Teorema 3.1.6. \square

Corolario 3.2.4. *La clase de equivalencia de la fibración de Milnor no depende de las elecciones r, ε y η , y además es un invariante de la clase de equivalencia de la singularidad f .*

Demostración. La independencia de las elecciones es consecuencia del teorema previo. Supongamos que $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ son dos singularidades aisladas, y $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ es un germen de biholomorfismo tal que $g = f \circ \varphi$. Si $f : E \rightarrow B$ es el fibrado de Milnor de f determinado por r, ε y η ; entonces $g : \varphi^{-1}(E) \rightarrow B$ es el fibrado de Milnor de g correspondiente a $r' = r \circ \varphi, \varepsilon$ y η . En conclusión, el siguiente diagrama conmutativo es una equivalencia entre ambas fibraciones:

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(E) & \xrightarrow{\varphi} & E \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{\text{id}} & B. \end{array}$$

\square

Para cerrar con esta sección, demostraremos una proposición que nos será de mucha utilidad más adelante. Si $f : X \rightarrow B$ es un representante bueno de la singularidad f , usaremos las notaciones

$$\begin{aligned} \bar{X} &= f^{-1}(\bar{D}_\eta) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon'} \\ \partial \bar{X} &= \left(f^{-1}(\partial D_\eta) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon} \right) \cup \left(f^{-1}(\partial D_\eta) \cap S_{r,\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Proposición 3.2.5. *Si los radios ε y η son lo suficientemente pequeños, entonces existe un homeomorfismo*

$$\bar{X} \cong \text{Cone}(\partial\bar{X}) = \partial\bar{X} \times I / (\partial\bar{X} \times \{0\}).$$

Consecuentemente, el espacio topológico X es contráctil.

Demostración. Repitiendo los mismos pasos de la demostración del Lema 3.1.9 podemos encontrar un campo vectorial X sobre $\bar{X} \setminus \{0\}$ tal que

$$\langle \text{grad}_p r, X_p \rangle = -1, \quad \langle \text{grad}_p |f|^2, X_p \rangle \leq 0.$$

Las curvas integrales de este campo se pueden extender de manera que terminen en el origen, y a lo largo de ellas la función $|f|^2$ es decreciente. El flujo de X determina un homeomorfismo como el del enunciado.

La segunda parte del lema se puede probar usando el Teorema 1.1.3, ya que X y \bar{X} resultan ser retratos por deformación fuerte del subespacio común $f^{-1}(D_{\eta'}) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon}$, donde $\eta' < \eta$. \square

3.3. La monodromía de una singularidad

De la fibración de Milnor de una singularidad se desprenden nuevos invariantes de la misma siguiendo las ideas del primer capítulo. Recordemos que a partir de la fibración $f : E \rightarrow B$ podemos obtener dos operadores de monodromía

$$\begin{aligned} \pi_1(B) &\longrightarrow \text{MCG}(F) & \pi_1(B) &\longrightarrow \text{Aut } \tilde{H}_*(F) \\ [\gamma] &\longmapsto [h_\gamma], & [\gamma] &\longmapsto h_{\gamma*}. \end{aligned}$$

En este caso particular, el grupo fundamental de $B = D_\eta \setminus \{0\}$ es isomorfo a \mathbb{Z} y está generado por la clase del lazo $\gamma(t) = \rho e^{2\pi i t}$, para cierto radio $\rho < \eta$. Por ende, estos operadores quedan determinados por los elementos $[h_\gamma]$ y $h_{\gamma*}$, los cuales son conocidos como las **monodromías geométrica y algebraica de f** respectivamente. Se definen de manera análoga sus versiones relativas ya que $f : \partial E \rightarrow B$ es una fibración trivial (3.2.1). Estas

definiciones no dependen del representante $f : E \rightarrow B$ gracias al Teorema 3.2.3 (acá estamos usando la condición adicional sobre la función $\varphi : D \rightarrow D'$) y por lo tanto son invariantes de la clase de equivalencia de la singularidad f . Por esta razón usaremos las notaciones

$$h_f = h_{\gamma_*} : \tilde{H}_*(F) \rightarrow \tilde{H}_*(F),$$

$$h_f^r = h_{\gamma_*}^r : \tilde{H}_*(F, \partial F) \rightarrow \tilde{H}_*(F, \partial F),$$

$$\text{Var}_f = \text{Var}_\gamma : \tilde{H}_*(F, \partial F) \rightarrow \tilde{H}_*(F).$$

Ejemplo 3.3.1. Calculemos la monodromía algebraica de una singularidad aislada de una variable. Como hemos mencionado en 2.1.4, una singularidad de este tipo es equivalente a $f(z) = z^k$. La fibra de Milnor de f está formada por las raíces k -ésimas de la unidad, es decir, las potencias del número complejo $\zeta_k = e^{2\pi i/k}$. El lazo $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ se levanta a la función $\Gamma : F \times I \rightarrow E$ definida como $\Gamma(x, t) = x \cdot e^{2\pi it/k}$, y en consecuencia la monodromía geométrica de γ es igual a la clase de isotopía de la función $h_\gamma(x) = \Gamma_1(x) = x \cdot \zeta_k$. Por otro lado, todos los grupos de homología reducida de F son nulos salvo $\tilde{H}_0(F)$, el cual está generado por los ciclos $\Delta_i = [\zeta_k^i - \zeta_k^{i+1}]$ ($0 \leq i < k - 1$). Luego,

$$h_f(\Delta_i) = \begin{cases} \Delta_{i+1} & \text{si } 0 \leq i < k - 2, \\ -\sum_{j=0}^{k-2} \Delta_j & \text{si } i = k - 2. \end{cases}$$

En general, calcular la monodromía de una singularidad de varias variables es un problema difícil, incluso en el caso más sencillo de una singularidad cuadrática $Q(z_1, \dots, z_n) = z_1^2 + \dots + z_n^2$. De hecho, dedicaremos gran parte de la primera sección del siguiente capítulo al cómputo de h_Q . Postergaremos otros ejemplos de operadores de monodromía y variación hasta el quinto capítulo para el momento en el que tengamos más herramientas a nuestra disposición.

3.4. Morsificaciones

Un procedimiento muy útil a la hora de estudiar una singularidad aislada consiste en encontrar una perturbación adecuada de la misma. Esto permite descomponer un punto singular, que en principio podría ser muy complejo, en otros más sencillos. Concretamente, el tipo de perturbaciones que estudiaremos son de la forma $f_\lambda(z) = f(z) + \sum_{k=1}^n \lambda_k z_k$, para cierta n -upla de números complejos $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. El tipo de puntos críticos más sencillos que podemos esperar de una deformación f_λ son los no degenerados, ya que el lema de Morse 2.1.6 nos dice cómo se comporta la función f_λ alrededor de cada uno de ellos. Afortunadamente, una perturbación genérica tiene estas características:

Lema 3.4.1. *Para casi toda n -upla $\lambda \in \mathbb{C}^n$, los puntos críticos de la perturbación $f_\lambda(z) = f(z) + \sum_{k=1}^n \lambda_k z_k$ son no degenerados y sus valores críticos son distintos dos a dos.*

Demostración. Observemos que $\nabla f_\lambda(z) = \nabla f(z) + \lambda$, con lo cual los puntos críticos de f_λ son las soluciones de la ecuación $\nabla f(z) = -\lambda$. Además, un punto crítico z de f_λ es no degenerado si y sólo si la matriz hessiana de f en z es no singular. Consecuentemente, los puntos críticos de f_λ son no degenerados si y sólo si $-\lambda$ es un valor regular del campo ∇f , lo cual es cierto para casi todo λ por el teorema de Sard. Como el conjunto de valores regulares de ∇f es abierto, podemos sumarle un término lineal a f_λ de manera que satisfaga la segunda condición. \square

Diremos que una deformación f_λ con estas características es una **morsificación** de f . Con las mismas técnicas que usamos a lo largo de este capítulo podremos construir una fibración localmente trivial a partir de una morsificación f_λ .

Lema 3.4.2. *Existen dos radios η y δ de manera que la función diferenciable*

$$f_\lambda : f_\lambda^{-1}(D_\eta) \cap S_{r,\varepsilon} \rightarrow D_\eta$$

es una submersión para todo $|\lambda| < \delta$. Además, si δ es lo suficientemente pequeño, los puntos críticos de f_λ están contenidos en el abierto $f_\lambda^{-1}(D_\eta) \cap B_{r,\varepsilon}$.

Demostración. Sea $g_\lambda = f_\lambda : S_{r,\varepsilon} \rightarrow \mathbb{C}$. Siguiendo los mismos razonamientos de la demostración de 3.2.1 podemos afirmar que $p \in f_\lambda^{-1}(w) \cap S_{r,\varepsilon}$ es un punto regular de g_λ si y sólo si $f_\lambda^{-1}(w)$ y $S_{r,\varepsilon}$ se intersecan transversalmente en p . Consideremos la función $R : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ definida por $R(z, \lambda) = (f_\lambda(z), \lambda)$, la subvariedad $S = S_{r,\varepsilon} \times \mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, y la restricción $G = R|_S : S \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. El motivo por el cual definimos estos objetos es que están relacionados con nuestro problema vía las siguientes equivalencias. La primera de ellas es

$$\begin{aligned}
R^{-1}(w, \lambda) \pitchfork S \text{ en } (p, \lambda) &\iff T_{(p,\lambda)}R^{-1}(w, \lambda) + T_{(p,\lambda)}S = T_p\mathbb{C}^n \oplus T_\lambda\mathbb{C}^n \\
&\iff (T_p f_\lambda^{-1}(w) \oplus 0) + (T_p S_{r,\varepsilon} \oplus T_\lambda\mathbb{C}^n) = T_p\mathbb{C}^n \oplus T_\lambda\mathbb{C}^n \\
&\iff T_p f_\lambda^{-1}(w) + T_p S_{r,\varepsilon} = T_p\mathbb{C}^n \\
&\iff f_\lambda^{-1}(w) \pitchfork S_{r,\varepsilon} \text{ en } p \\
&\iff p \text{ es un punto regular de } g_\lambda.
\end{aligned}$$

Por otro lado, razonando de manera análoga al Lema 3.2.1,

$$\begin{aligned}
R^{-1}(w, \lambda) \pitchfork S \text{ en } (p, \lambda) &\iff T_{(p,\lambda)}R^{-1}(w, \lambda) + T_{(p,\lambda)}S = T_p\mathbb{C}^n \oplus T_\lambda\mathbb{C}^n \\
&\iff \dim_{\mathbb{R}}(T_{(p,\lambda)}R^{-1}(w, \lambda) + T_{(p,\lambda)}S) = 4n \\
&\iff \dim_{\mathbb{R}}(T_{(p,\lambda)}R^{-1}(w, \lambda) + T_{(p,\lambda)}S) = 2n - 3 \\
&\iff \dim_{\mathbb{R}} \text{Im } d_{(p,\lambda)}G = 2n + 2 \\
&\iff (p, \lambda) \text{ es un punto regular de } G.
\end{aligned}$$

En conjunción con estas dos cadenas de equivalencias, la transversalidad entre $f^{-1}(0) = f_0^{-1}(0)$ y la esfera $S_{r,\varepsilon}$ implica que los elementos de $R^{-1}(0, 0) \cap S$ son puntos regulares de G . Por ende, podemos encontrar un entorno abierto $U \subseteq S$ de $R^{-1}(0, 0) \cap S$ de manera que $G : U \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ sea una submersión. El lema quedará probado si podemos encontrar un entorno del origen $V = D_\eta \times B_\delta \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de manera tal que $R^{-1}(V) \cap S$ esté contenido en U . Supongamos por el contrario que existe una sucesión de pares $(p_k, \lambda_k) \subseteq S \setminus U$ tal que $(f_{\lambda_k}(p_k), \lambda_k)$ tiende a cero. Como la esfera

$S_{r,\varepsilon}$ es compacta, podemos suponer sin perder generalidad que p_k converge a un punto $p \in S_{r,\varepsilon}$. Esto solamente puede ocurrir si $f(p) = 0$, lo cual es absurdo porque $S \setminus U$ es cerrado y $(p, 0) \in \mathbb{R}^{-1}(0, 0) \cap S$. \square

Denotaremos como $D' \subseteq \mathbb{C}$ al disco abierto de radio η al cual se le han removido los valores críticos de la morsificación f_λ . Para reducir la cantidad de índices de la exposición introducimos los conjuntos

$$\begin{aligned} Y &= f_\lambda^{-1}(D_\eta) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon}, \\ Y' &= f_\lambda^{-1}(D') \cap \bar{B}_{r,\varepsilon}, \\ Y_* &= f_\lambda^{-1}(\alpha_*) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon} \quad (\alpha_* \in D'). \end{aligned}$$

El Lema 3.4.2 posiciona a la función $f_\lambda : Y' \rightarrow D'$ bajo las hipótesis del teorema de Ehresmann, y por ende es una fibración localmente trivial. La siguiente proposición revela una estrecha relación entre esta aplicación y la fibración de Milnor de f .

Proposición 3.4.3. *Supongamos que $\gamma : I \rightarrow D'$ es un lazo que comienza en un valor regular $\alpha_* \in D'$ y que rodea a todos los valores críticos de f_λ una única vez en sentido antihorario. Si F es la fibra de Milnor de f , entonces existe un difeomorfismo $F \rightarrow Y_*$ cuyos morfismos inducidos en la homología son parte de los siguientes diagramas conmutativos:*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_{n-1}(F) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(Y_*) & \tilde{H}_{n-1}(F, \partial F) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(Y_*, \partial Y_*) \\ \downarrow h_f & & \downarrow h_{\gamma_*} & \downarrow \text{Var}_f & & \downarrow \text{Var}_\gamma \\ \tilde{H}_{n-1}(F) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(Y_*), & \tilde{H}_{n-1}(F) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(Y_*). \end{array}$$

Demostración. Consideremos los conjuntos $S = S_{r,\varepsilon} \times \mathbb{C}^n$ y $V = D_\eta \times B_\delta$, y la función $R : \bar{B}_{r,\varepsilon} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ definida como $R(z, \lambda) = (f_\lambda(z), \lambda)$. En la demostración del Lema 3.4.2 hemos probado que $R : R^{-1}(V) \cap S \rightarrow V$ es una submersión. Si Σ es el conjunto de valores críticos de $R : R^{-1}(V) \rightarrow V$, entonces la restricción

$$R : \tilde{E} = R^{-1}(V \setminus \Sigma) \rightarrow \tilde{B} = V \setminus \Sigma$$

satisface las hipótesis del teorema de Ehresmann, y por lo tanto es una fibración localmente trivial. Observemos que los puntos críticos de esta función son aquellos pares (p, λ) tales que p es un punto crítico de f_λ , y que su fibra sobre $(w, \lambda) \in V \setminus \Sigma$ es igual a $\tilde{E}_{(w, \lambda)} = f_\lambda^{-1}(w) \cap \bar{B}_{r, \varepsilon} \times \{\lambda\}$. Fijemos un λ lo suficientemente pequeño de manera que los puntos de la imagen de γ sean valores regulares comunes a todas las perturbaciones $f_{t\lambda}$ con $t \in I$. En otros términos, esto significa que el cilindro $\gamma(I) \times [0, \lambda]$ está totalmente contenido en $V \setminus \Sigma$. Si definimos las curvas $\gamma_0(t) = (\gamma(t), 0)$, $\gamma_\lambda(t) = (\gamma(t), \lambda)$ y $\omega(t) = (\alpha_*, t\lambda)$, esta última inclusión implica que las composiciones $\gamma_0 \circ \omega$ y $\omega \circ \gamma_1$ son homotópicas en $V \setminus \Sigma$. En síntesis, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
\tilde{H}_{n-1}(F) & \xleftarrow{\pi_1^*} & \tilde{H}_{n-1}(\tilde{E}_{(\alpha_*, 0)}) & \xrightarrow{h_{\omega^*}} & \tilde{H}_{n-1}(\tilde{E}_{(\alpha_*, \lambda)}) & \xrightarrow{\pi_1^*} & \tilde{H}_{n-1}(Y_*) \\
\downarrow h_f & & \downarrow h_{\gamma_0^*} & & \downarrow h_{\gamma_1^*} & & \downarrow h_{\gamma^*} \\
\tilde{H}_{n-1}(F) & \xleftarrow{\pi_1^*} & \tilde{H}_{n-1}(\tilde{E}_{(\alpha_*, 0)}) & \xrightarrow{h_{\omega^*}} & \tilde{H}_{n-1}(\tilde{E}_{(\alpha_*, \lambda)}) & \xrightarrow{\pi_1^*} & \tilde{H}_{n-1}(Y_*)
\end{array}$$

cuyas flechas son isomorfismos. Esto concluye la conmutatividad del primer diagrama del enunciado. El resto de la proposición se puede probar con un razonamiento similar. \square

El difeomorfismo $F \cong Y_*$ nos permite identificar la monodromía de la singularidad f con el operador $h_{\gamma^*} : \tilde{H}_{n-1}(Y_*) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(Y_*)$. La ventaja de este último morfismo es que se puede descomponer como producto de monodromías más simples. En efecto, si γ_k es un lazo que comienza en α_* y rodea a un único valor crítico α_k de f_λ en sentido antihorario, entonces γ es homotópico al producto $\prod_k \gamma_k$, con lo cual $h_{\gamma^*} = \prod_k h_{\gamma_k^*}$ (donde el orden de la multiplicación está elegido de manera apropiada). Veremos más adelante que cada $h_{\gamma_k^*}$ se corresponde con la monodromía de una singularidad cuadrática, y calcularemos su expresión explícitamente. Retomaremos esta idea en el quinto capítulo luego de desarrollar la teoría de Picard-Lefschetz. Por último lugar, enunciamos una proposición que usaremos más adelante en el siguiente capítulo.

Proposición 3.4.4. *El espacio $Y = f_\lambda^{-1}(D_\eta) \cap \bar{B}_{r, \varepsilon}$ es contráctil.*

Demostración. Usando las ideas de la última demostración se puede probar que existe un difeomorfismo $Y = f_\lambda^{-1}(D_\eta) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon} \cong X = f^{-1}(D_\eta) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon}$. Pero la segunda de estas variedades es contráctil debido a la Proposición 3.2.5. \square

3.5. El número de Milnor

Para cerrar con este capítulo probaremos que todas las morsificaciones de una singularidad aislada tienen la misma cantidad de valores críticos en un disco de radio suficientemente pequeño. Esto nos lleva a introducir el invariante numérico más importante de una singularidad: su número de Milnor. Usualmente a este entero se lo define como la dimensión compleja del álgebra local $\mathcal{O}_n(\mathbb{C})/(\partial f/\partial z_1, \dots, \partial f/\partial z_n)$, donde $\mathcal{O}_n(\mathbb{C})$ denota al anillo de gérmenes de funciones holomorfas en $0 \in \mathbb{C}^n$. De hecho, esta es una de las definiciones más apropiadas a la hora de hacer cálculos. No obstante, optaremos por usar otra de sus definiciones equivalentes que resultará más conveniente para nuestros propósitos. Para una exposición de las múltiples definiciones del número de Milnor y sus equivalencias el lector puede consultar el artículo [Orl78].

Recordemos que si z es un cero aislado de un campo vectorial holomorfo $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, entonces se define el **índice** de g en z como

$$\text{Ind}(g, z) = \deg \left(\frac{g}{|g|} : S_\varepsilon + z \rightarrow S_1 \right),$$

donde el radio $\varepsilon > 0$ está elegido de manera que g no se anula en la bola cerrada $\bar{B}_\varepsilon + z$.

Definición 3.5.1. Se define el **número de Milnor** de una singularidad aislada $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ como el entero $\mu(f) = \text{Ind}(\nabla f, 0)$.

Se puede probar sin muchas dificultades que el número de Milnor de una singularidad aislada no depende de su clase de equivalencia (ver [AGZV85]). Sin embargo, nosotros podremos evitar estos tecnicismos luego de probar en el siguiente capítulo que $\mu(f) = \text{rank } \tilde{H}_{n-1}(F)$, donde F

denota a la fibra de Milnor de f . Como esta variedad es un invariante de la clase de equivalencia de f , entonces $\mu(f)$ también lo es.

Como mencionamos al comienzo, la siguiente proposición es el resultado principal de esta sección:

Proposición 3.5.2. *Si λ es lo suficientemente pequeño, la morsificación f_λ tiene exactamente $\mu(f)$ valores críticos en el disco abierto D_η .*

Para probar este resultado necesitaremos la ayuda de los siguientes tres lemas sobre grado de funciones.

Lema 3.5.3 (Principio de Rouché). *Sean $g, h : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ dos campos vectoriales holomorfos y un punto $z \in \mathbb{C}^n$, de manera que vale la desigualdad $|h| < |g|$ en una esfera $S_\varepsilon + z$. Entonces*

$$\deg \left(\frac{g}{|g|} : S_\varepsilon + z \rightarrow S_1 \right) = \deg \left(\frac{g+h}{|g+h|} : S_\varepsilon + z \rightarrow S_1 \right).$$

Demostración. Esto se debe a que las funciones $g/|g|$ y $(g+h)/|g+h|$ son homotópicas vía la homotopía $H(z, t) = (g(z) + th(z))/|g(z) + th(z)|$. \square

Lema 3.5.4. *Supongamos que $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un campo que no se anula en S_ε y que tiene una cantidad finita de ceros en la bola abierta B_ε . Entonces*

$$\deg \left(\frac{g}{|g|} : S_\varepsilon \rightarrow S_1 \right) = \sum_{z \in B_\varepsilon \cap g^{-1}(0)} \text{Ind}(g, z).$$

Demostración. Sea R la región que se obtiene a partir de \overline{B}_ε luego de removerle bolas abiertas centradas en los ceros de g de radio lo suficientemente pequeño. En la variedad con borde R , la función $g/|g|$ está bien definida y es diferenciable. Esto implica que la restricción $g/|g| : \partial R \rightarrow S_1$ tiene grado cero, y el lema sigue. \square

Lema 3.5.5. *Si z es un cero aislado no degenerado de un campo $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, entonces $\text{Ind}(g, z) = 1$.*

Demostración. Sea $g(w) = A(w - z) + R(w)$ el desarrollo de Taylor de g alrededor de z . Como z es un cero no degenerado, entonces A es inversible,

y por lo tanto el valor mínimo m de la función $|A| : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ es positivo. Por definición $R(w)/|w-z|$ tiende a cero cuando w tiende a z , con lo cual podemos encontrar un radio $\varepsilon > 0$ de manera que $|R(w)|/|w-z| < m$ para todo $w \in S_\varepsilon + z$. Manipulando esta desigualdad llegamos a que $|R(w)| < |A(w-z)|$ para todo $w \in S_\varepsilon + z$. Por el principio de Rouché,

$$\text{Ind}(g(w), z) = \text{Ind}(A(w-z), z) = \text{Ind}(A(w), 0).$$

Por otra parte, la transformación lineal $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es homotópica a la identidad, ya que el grupo topológico $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ es arcoconexo. Esto nos permite concluir que

$$\text{Ind}(A(w), 0) = \text{Ind}(\text{Id}, 0) = 1. \quad \square$$

Estamos en condiciones de probar la Proposición 3.5.2.

Demostración de la Proposición 3.5.2. En esta demostración asumiremos que $r(z) = |z|$, simplemente porque los lemas previos están enunciados en estos términos, pero la prueba para el caso general es la misma. Anteriormente vimos que los puntos críticos de f_λ son exactamente las soluciones de la ecuación $\nabla f(z) = -\lambda$. Tomemos un vector λ de manera que $|\lambda| < |\nabla f(z)|$ en S_ε . Entonces,

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \deg \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} : S_\varepsilon \rightarrow S_1 \right) \\ &= \deg \left(\frac{\nabla f + \lambda}{|\nabla f + \lambda|} : S_\varepsilon \rightarrow S_1 \right) \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

$$= \sum_{z \in B_\varepsilon \cap \{\nabla f = -\lambda\}} \text{Ind}(\nabla f + \lambda, z) \quad (3.5.4)$$

$$= |\{z \in B_\varepsilon : \nabla f(z) = -\lambda\}| \quad (3.5.5)$$

$$= |\{z \in B_\varepsilon : z \text{ es un punto crítico de } f_\lambda\}|. \quad \square$$

Capítulo 4

Teoría de Picard-Lefschetz

La teoría de Picard-Lefschetz es, vagamente hablando, la versión compleja de la teoría de Morse para variedades diferenciables. El objetivo común de ambas teorías consiste en investigar la evolución de las fibras de una función cuyos puntos críticos son no degenerados. En la teoría de Morse clásica, las fibras regulares experimentan un cambio en su topología luego de atravesar una fibra crítica. Esta es la diferencia fundamental que presenta con respecto a su pariente complejo, ya que las fibras regulares de una función de Morse holomorfa son todas difeomorfas entre sí. Por este motivo, estudiaremos la manera en la que las fibras regulares son alteradas al dar una vuelta completa alrededor de un valor crítico. Estas acciones de monodromía sobre una fibra regular admiten descripciones explícitas conocidas como las fórmulas de Picard-Lefschetz.

Estas fórmulas aparecieron por primera vez en el trabajo de Picard y Simart [PS97] para el caso de una superficie algebraica, y fueron generalizadas posteriormente por Lefschetz para dimensiones superiores [Lef24]. Las ideas de Lefschetz, las cuales preceden a las de Morse, consisten en estudiar la topología de una variedad proyectiva compleja a partir de sus intersecciones con una familia apropiada de hiperplanos. De esta construcción se puede producir una función de Morse cuyas fibras son dichas intersecciones. Este análisis le permitió probar su renombrado teorema de las secciones hiperplanas. Para una exposición más moderna de estos temas se puede consultar [Lam81].

En las primeras dos secciones de este capítulo desarrollaremos la teoría de Picard-Lefschetz siguiendo principalmente las exposiciones de Looijenga [Loo84] y [Loo16], y el artículo de Lamotke [Lam81]. Acto seguido implementaremos los resultados obtenidos sobre una morsificación de una singularidad aislada. De esta manera podremos determinar el tipo homotópico de su fibra de Milnor siguiendo las ideas de los trabajos [AF59] y [Mil68].

4.1. Singularidades cuadráticas

Recordemos que gracias a la versión compleja del lema de Morse 2.1.6, la apariencia de una función holomorfa alrededor de uno de sus puntos críticos no degenerados es

$$Q(z_1, \dots, z_n) = \alpha + z_1^2 + \dots + z_n^2.$$

Por este motivo, antes de embarcarnos en el estudio de una función de Morse general, nos será de mucha utilidad realizar un análisis local de este tipo de singularidades, a las cuales llamaremos **cuadráticas** (o de tipo A_1).

A la hora de estudiar las fibras y la monodromía de Q , el término constante α no cumplirá ningún rol relevante, así que de ahora en adelante supondremos que es nulo. Tomemos dos radios ε y η siguiendo las convenciones del capítulo anterior con respecto a la función $r(z) = |z|^2$. Dado $\rho < \eta$, definimos los conjuntos

$$T = \bar{B}_\varepsilon \cap Q^{-1}(\bar{D}_\rho), \quad F = \bar{B}_\varepsilon \cap Q^{-1}(\rho), \quad e = T \cap \mathbb{R}^n.$$

En las siguientes dos proposiciones investigaremos la topología de los espacios F y T respectivamente.

Proposición 4.1.1. *La fibra de Milnor F de una singularidad cuadrática es difeomorfa al fibrado DS^{n-1} formado por los vectores del fibrado tangente TS^{n-1} que tienen norma menor o igual que uno, es decir,*

$$DS^{n-1} = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \|u\| = 1, \|v\| \leq 1, \langle u, v \rangle = 0 \right\}.$$

Demostración. Descomponiendo a los vectores $z \in \mathbb{C}^n$ como $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}^n$, podemos obtener la siguiente descripción de la fibra de Milnor:

$$\begin{aligned} F &= \left\{ z \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \leq \varepsilon^2, z_1^2 + \cdots + z_n^2 = \rho \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \|x\|^2 + \|y\|^2 \leq \varepsilon^2, \|x\|^2 - \|y\|^2 + i2\langle x, y \rangle = \rho \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \|y\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2 - \rho}{2}, \|x\|^2 - \|y\|^2 = \rho, \langle x, y \rangle = 0 \right\}. \end{aligned}$$

A partir de este punto es fácil comprobar que la función $\varphi : F \rightarrow DS^{n-1}$ definida como

$$\varphi(x + iy) = \left(\frac{x}{\|x\|}, \sqrt{\frac{2}{\varepsilon^2 - \rho}} y \right) \quad (4.1)$$

es un difeomorfismo, cuya inversa es

$$\varphi^{-1}(u, v) = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon^2 - \rho}{2}\right) \|v\|^2 + \rho} u + i \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - \rho}{2}} v. \quad \square$$

Procediendo de la misma manera podemos ver que el subespacio e es igual a la celda n -dimensional $e = \{z \in \mathbb{C}^n : \|x\| \leq \sqrt{\rho}, y = 0\}$. Como la intersección entre F y e es igual a ∂e , entonces la unión $F \cup e$ es un espacio de adjunción.

Proposición 4.1.2. $F \cup e \subseteq T$ es un retracto por deformación fuerte.

Esto es una consecuencia del siguiente hecho sobre CW-complejos, el cual usaremos nuevamente más adelante. La demostración del mismo se puede leer en [Hat02, Theorem 4.5].

Proposición 4.1.3. Supongamos que (X, A) es un CW-par de manera que la inclusión $A \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica. Entonces A es un retracto por deformación fuerte de X .

Demostración de la proposición 4.1.2. Como $F \cap e = \partial e$ se corresponde con la sección nula de DS^{n-1} vía el difeomorfismo 4.1, esta intersección es un retracto por deformación fuerte de F . Esto implica que e es un retracto de

$F \cup e$, y por lo tanto, al igual que T , este último espacio es contráctil. La proposición se sigue de 4.1.3. \square

Como la fibra de Milnor F se retrae a la esfera $(n - 1)$ -dimensional ∂e , todos los grupos de homología reducida de F son nulos salvo el de grado $n - 1$, el cual está generado por la clase

$$\Delta = [\partial e] \in \tilde{H}_{n-1}(F),$$

con respecto a alguna de las orientaciones del borde de la n -celda e . Tanto a Δ como a su inverso aditivo $-\Delta$ se los conoce como los **ciclos evanescentes** de F . La elección de este nombre se debe a que, cuando ρ tiende al valor crítico 0, el representante geométrico ∂e de estas clases de homología colapsa a un punto. Las figuras 4.1 y 4.2 ilustran esta situación en el caso $n = 2$, en el cual la fibra $F \cong DS^1$ es difeomorfa a un cilindro.

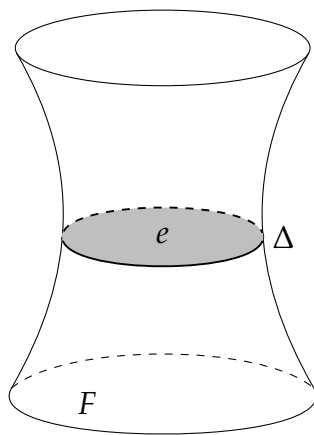


Figura 4.1: Adjuncción de la celda e .

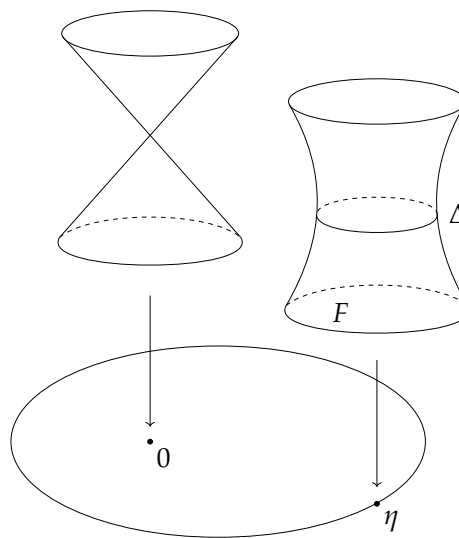


Figura 4.2: Un ciclo evanescente de una singularidad cuadrática.

En lo que queda de la sección encontraremos fórmulas explícitas para los operadores de monodromía y variación de una singularidad cuadrática. Los mismos quedan completamente determinados por el índice de intersección

$$(\cdot \circ \cdot) : \tilde{H}_{n-1}(F, \partial F) \times \tilde{H}_{n-1}(F) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

El lector que quiera recordar la definición de este pairing y sus propiedades puede encontrarlas en [GH78]. Para empezar calculemos explícitamente el autoíndice de intersección de un ciclo evanescente, el cual nos será de utilidad en el siguiente capítulo.

Proposición 4.1.4. *El índice de intersección del ciclo evanescente $\Delta \in \tilde{H}_{n-1}(F)$ contra sí mismo es igual a*

$$(\Delta \circ \Delta) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (1 + (-1)^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ 2 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ -2 & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Aclaración 4.1.5. En principio, la definición del índice de intersección es ambigua, ya que la misma depende de una orientación prefijada de F . Sin embargo esto no resulta un problema porque, al ser una variedad compleja, F posee una orientación distinguida.

En general, si M es una variedad compleja, se define la **orientación compleja** de M de la siguiente manera. Dado un sistema de coordenadas complejas (z_1, \dots, z_n) alrededor de un punto $p \in M$, orientamos al espacio tangente $T_p M$ usando la base ordenada dada por los ganchos

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_n} \Big|_p \right\}.$$

Usando que todo biholomorfismo de \mathbb{C}^n preserva la orientación (que a su vez es consecuencia de que toda matriz de $GL_n(\mathbb{C})$ vista como un elemento de $GL_{2n}(\mathbb{R})$ tiene determinante positivo), es fácil comprobar que estas orientaciones de los espacios tangentes no dependen de los sistemas de coordenadas usados y que definen una orientación para M .¹

Demostración. Bajo el difeomorfismo $\varphi : F \rightarrow DS^{n-1}$ definido en la demostración de la proposición 4.1.1 el representante geométrico ∂e del ciclo evanescente Δ se corresponde con la sección cero S^{n-1} del fibrado tangente TS^{n-1} . Es bien sabido que si S es una variedad diferenciable compacta

¹En el caso patológico 0-dimensional, una orientación en M es una asignación de signos $+$ o $-$ en cada uno de sus puntos. La orientación compleja de M es aquella que otorga únicamente signos positivos.

y orientada, el índice de intersección de la sección cero $S \subseteq TS$ contra sí misma es igual a la característica de Euler de S . En esta afirmación se sobreentiende que la orientación del fibrado tangente TS es la siguiente. Tomamos un sistemas de coordenadas positivo (u_1, \dots, u_n) definido en un entorno de un punto $p \in S$, y coordenadas positivas globales (v_1, \dots, v_n) de $T_p S$. La orientación del espacio tangente $T_{(p,v)} TS$ es la clase de equivalencia de la base orientada

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial v_1} \Big|_v, \dots, \frac{\partial}{\partial v_n} \Big|_v \right\}.$$

El caso particular que nos interesa es cuando $S = S^{n-1}$, porque de esta manera tenemos que

$$(S^{n-1} \circ S^{n-1}) = \chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}.$$

Dicho esto, solamente resta ver cómo se relacionan los índices de intersección $(\Delta \circ \Delta)$ y $(S^{n-1} \circ S^{n-1})$. Estos dos números difieren de un signo, el cual es igual a $+1$ si $\varphi : F \rightarrow DS^{n-1}$ preserva la orientación, y -1 en caso contrario. Recordemos que dado un punto interior $p \in F$, la función $\varphi : F \rightarrow DS^{n-1}$ preserva la orientación si y sólo si la transformación lineal $d_p \varphi : T_p F \rightarrow T_{\varphi(p)} DS^{n-1}$ lo hace. Tomemos por ejemplo el punto $p = (\sqrt{\rho}, 0, \dots, 0)$. Como el espacio tangente a F en p consiste en los vectores $z \in \mathbb{C}^n$ cuya primera componente es nula, podemos afirmar que la tira de funciones (z_2, \dots, z_n) es un sistema de coordenadas complejas para F en algún entorno de p . Por lo mencionado en 4.1.5 y en el párrafo anterior, la orientación de $T_p F$ está dada por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_n} \Big|_p \right\}, \quad (*)$$

mientras que la orientación de $T_{\varphi(p)} DS^{n-1}$ está determinada por la base ordenada

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_{e_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n} \Big|_{e_1}, \frac{\partial}{\partial v_2} \Big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial v_n} \Big|_0 \right\}. \quad (**)$$

Observemos que $\partial e = \{z \in \mathbb{C}^n : \|x\| = \sqrt{\rho}, y = 0\}$ es una subvariedad de F que pasa por el punto p , cuyo tangente está generado por

los ganchos $\partial/\partial x_2|_p, \dots, \partial/\partial x_n|_p$. La restricción de φ a ∂e se simplifica a $\varphi(x) = (x/\sqrt{\rho}, 0)$, con lo cual

$$d_p\varphi \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p \right) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial u_k} \Big|_{e_1};$$

mientras que por otro lado es evidente que

$$d_p\varphi \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p \right) = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon^2 - \rho}} \frac{\partial}{\partial v_k} \Big|_0.$$

Finalmente, $d_p\varphi$ manda la base orientada $(*)$ en la clase de equivalencia

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_{e_1}, \frac{\partial}{\partial v_2} \Big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n} \Big|_{e_1}, \frac{\partial}{\partial v_n} \Big|_0 \right\},$$

la cual se obtiene a partir de $(**)$ mediante una permutación de signo $(-1)^{(n-1)(n-2)/2}$. \square

Estamos en condiciones de probar las fórmulas de Picard-Lefschetz sobre la monodromía y variación de la singularidad Q . Seguiremos la demostración de Looijenga [Loo84, §3.A]. En [AGZV88] se puede encontrar otra prueba alternativa más conceptual que utiliza la fibración original de Milnor.

Teorema 4.1.6 (Picard-Lefschetz). *Dada un elemento $\delta \in \tilde{H}_{n-1}(F, \partial F)$,*

$$\text{Var}_Q(\delta) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\delta \circ \Delta) \Delta.$$

Consecuentemente, para todo $\alpha \in \tilde{H}_{n-1}(F)$,

$$h_Q(\alpha) = \alpha + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\alpha \circ \Delta) \Delta.$$

Demostración. Como primer paso necesitamos construir un levantamiento $\Gamma : F \times I \rightarrow E$ del lazo $\gamma(t) = \rho e^{2\pi it}$ como el de la Proposición 1.3.2 a partir de una trivialización $\phi : \partial E \rightarrow \partial F \times B$. Si no nos importara la condición (iv) podríamos considerar simplemente la función $\Gamma(z, t) = e^{\pi it} \cdot z$, pero el

problema es que la involución $\Gamma_1(z) = -z$ no se restringe a la identidad de ∂F . La idea de lo que sigue será modificar esta aplicación y encontrar una trivialización adecuada de manera que satisfagan esta cuarta propiedad. Definimos la familia de homeomorfismos $g_t : DS^{n-1} \rightarrow DS^{n-1}$ como

$$g_t(u, v) = \left(u \cos(\pi|v|t) + \frac{v}{|v|} \operatorname{sen}(\pi|v|t), -u|v| \operatorname{sen}(\pi|v|t) + v \cos(\pi|v|t) \right),$$

los cuales están bien definidos incluso para $v = 0$ gracias a las características de la función seno. Con la ayuda del difeomorfismo $\varphi : F \rightarrow DS^{n-1}$ introducido en 4.1 definimos las funciones

$$\Gamma_t = e^{\pi it} \cdot (\varphi^{-1} \circ g_t \circ \varphi) : F \rightarrow E.$$

Este levantamiento $\Gamma : F \times I \rightarrow E$ corrige el problema con respecto al borde de ∂F que teníamos antes. Por otro lado, si φ_δ^{-1} es la función que se obtiene a partir de la fórmula de φ al reemplazar el radio ρ por δ , entonces la igualdad

$$\phi^{-1}(x + iy, \delta e^{2\pi it}) = e^{\pi it} \cdot (\varphi_\delta^{-1} \circ g_t \circ \varphi)(x + iy)$$

define una trivialización compatible con Γ . En resumen, el homeomorfismo $\Gamma_1 = -\varphi^{-1} \circ g_1 \circ \varphi$ representa a la monodromía geométrica de Q (1.3.3). De esta manera simplificamos el problema a calcular la variación de $-g_1 : DS^{n-1} \rightarrow DS^{n-1}$. Sin embargo, como el enunciado del teorema involucra ciertos índices de intersección en la fibra de Milnor F , será conveniente que preservemos la orientación compleja de DS^{n-1} para poder identificar completamente a estas dos variedades.

Observemos que el $(n-1)$ -ésimo grupo de homología de DS^{n-1} es isomorfo a \mathbb{Z} dado que la sección cero es un retracto por deformación fuerte del fibrado DS^{n-1} . Por la dualidad de Poincaré-Lefschetz (en la página 53 del libro [GH78] se encuentra una versión para variedades sin borde que puede ser adaptada para este caso), el índice de intersección

$$(\cdot \circ \cdot) : \tilde{H}_{n-1}(DS^{n-1}, \partial DS^{n-1}) \times \tilde{H}_{n-1}(DS^{n-1}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

resulta ser un pairing perfecto, el cual induce un isomorfismo de grupos

$$\tilde{H}_{n-1}(DS^{n-1}, \partial DS^{n-1}) \simeq \tilde{H}^{n-1}(DS^{n-1}) \simeq \tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Afirmo que este grupo de homología relativa está generado por la clase de la bola cerrada

$$\bar{B} = \{(e_1, v) : v_1 = 0, |v| \leq 1\},$$

o equivalentemente, que el índice de intersección entre \bar{B} y la sección nula $S^{n-1} \subseteq DS^{n-1}$ es distinto de cero (con respecto a cualquiera de las orientaciones de estas variedades). Orientemos a \bar{B} de manera que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial v_2} \Big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial v_n} \Big|_0 \right\}$$

sea una base ordenada positiva del espacio tangente $T_{(e_1,0)}\bar{B}$; mientras que la orientación que le damos a S^{n-1} en el espacio tangente $T_{(e_1,0)}S^{n-1}$ está determinada por la base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_{e_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n} \Big|_{e_1} \right\}.$$

Es claro que \bar{B} y S^{n-1} se intersecan únicamente en el punto $(e_1, 0)$, y que allí se cortan de manera transversal. Luego, el índice de intersección que buscamos es igual al signo de la permutación

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_{e_1}, \frac{\partial}{\partial v_2} \Big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n} \Big|_{e_1}, \frac{\partial}{\partial v_n} \Big|_0 \right\} \mapsto \left\{ \frac{\partial}{\partial v_2} \Big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial v_n} \Big|_0, \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_{e_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n} \Big|_{e_1} \right\},$$

es decir que $(\bar{B} \circ S^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2}$.

Bajo la identificación $\tilde{H}_{n-1}(F, \partial F) \simeq \tilde{H}_{n-1}(DS^{n-1}, \partial DS^{n-1})$, una clase de homología δ como la del enunciado del teorema puede escribirse como $\delta = m [\bar{B}]$, para cierto número entero m . Aplicando el operador $(\cdot \circ \Delta)$ a ambos lados de esta igualdad llegamos a que $m = (-1)^{n(n-1)/2}(\delta \circ \Delta)$, y en consecuencia podemos escribir más explícitamente a esta clase como

$$\delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(\delta \circ \Delta) [\bar{B}].$$

Gracias a esta descripción, solamente resta calcular $\text{Var}(-g_1) [\bar{B}]$. Como la proyección canónica $\pi : DS^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ es una equivalencia homotópica, y $\pi_*[\bar{B}] = [(e_1, 0)] = 0$; tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{H}_{n-1}(DS^{n-1}, \partial DS^{n-1}) & \xrightarrow{\text{Var}(-g_1)} & \tilde{H}_{n-1}(DS^{n-1}) \\
\uparrow i_* & & \downarrow \pi_* \\
\tilde{H}_{n-1}(\bar{B}, \partial \bar{B}) & \xrightarrow{(-\pi \circ g_1)_*} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})
\end{array}$$

es conmutativo, y que las flechas verticales son isomorfismos. Se puede comprobar fácilmente que la función $-\pi \circ g_1 : \bar{B} \rightarrow S^{n-1}$, cuya fórmula es

$$-\pi \circ g_1(e_1, v) = -e_1 \cos(\pi|v|) - \frac{v}{|v|} \text{sen}(\pi|v|),$$

resulta ser un difeomorfismo entre la bola abierta B y la esfera punteada $S^{n-1} \setminus \{(e_1, 0)\}$, y que manda todo el borde $\partial \bar{B}$ en el punto $(e_1, 0)$. De esta manera,

$$\text{Var}(-g_1) [\bar{B}] = \text{deg}(-\pi \circ g_1) \Delta = (-1)^n \text{deg}(\pi \circ g_1).$$

Como $e_1 \in S^{n-1}$ es un valor regular de $\pi \circ g_1$ cuya única preimagen es el punto $(e_1, 0)$, el grado de esta función se puede calcular como el signo del determinante de la transformación lineal $d_{(e_1, 0)}(\pi \circ g_1)$ con respecto a bases positivas de los espacios tangentes. Finalmente, como

$$\begin{aligned}
d_{(e_1, 0)}(\pi \circ g_1) \left(\frac{\partial}{\partial v_k} \Big|_0 \right) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\pi \circ g_1)(e_1, te_k) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(e_1 \cos(\pi|t|) + e_k \frac{t}{|t|} \text{sen}(\pi|t|) \right) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (e_1 \cos(\pi t) + e_k \text{sen}(\pi t)) \\
&= \pi \frac{\partial}{\partial v_k} \Big|_0,
\end{aligned}$$

la variación de δ es igual a

$$\text{Var}_Q(\delta) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (\delta \circ \Delta) (-1)^n \text{deg}(\pi \circ g_1) \Delta = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\delta \circ \Delta) \Delta.$$

□

Observación 4.1.7. El efecto de las funciones $g_t : DS^{n-1} \rightarrow DS^{n-1}$ puede ser visualizado cuando la cantidad de variables es $n = 2$. En este caso el fibrado DS^1 es difeomorfo al cilindro $S^1 \times [-1, 1]$. Usando coordenadas cilíndricas (θ, r) en $S^1 \times [-1, 1]$ podemos exhibir un difeomorfismo explícito entre ambas variedades:

$$(\theta, r) \mapsto ((\cos \theta, \sin \theta), (-r \sin \theta, r \cos \theta)).$$

Mediante esta identificación, la función $g_t : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow S^1 \times [-1, 1]$ se escribe como

$$g_t(\theta, r) = (\theta + \pi r t, r).$$

A partir de esta descripción se sigue que g_t retuerce al cilindro al girar las dos circunferencias de su borde en sentidos opuestos. A la función $-g_1$ se la conoce como el **Dehn twist** (ver la Figura 4.3).

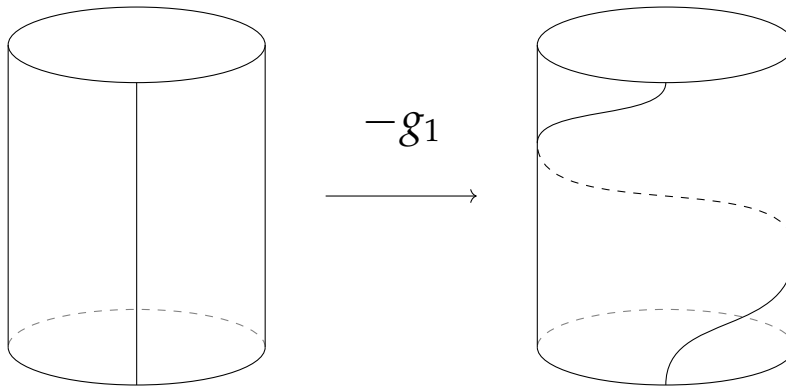


Figura 4.3: El Dehn twist.

4.2. Funciones de Morse

El objetivo de esta sección es implementar los resultados obtenidos sobre la estructura local de una singularidad cuadrática para obtener información sobre la topología de una función de tipo Morse. Nuestro principal ejemplo de interés son las morsificaciones de una singularidad aislada, las cuales están definidas sobre variedades complejas con borde suave. Esto

nos conduce a ampliar la noción de función de Morse para poder contemplar estos casos con dominios más generales.

Definición 4.2.1. Supongamos que Y es una variedad diferenciable con o sin borde, de manera que $Y \setminus \partial Y$ es una variedad compleja n -dimensional. Sea D un disco abierto contenido en el plano complejo. Diremos que una función diferenciable $f : Y \rightarrow D$ es **de Morse** si satisface las siguientes propiedades:

- (i) $f : Y \setminus \partial Y \rightarrow D$ es una función holomorfa que tiene una cantidad finita de puntos críticos p_k ($1 \leq k \leq \mu$), los cuales son no degenerados.
- (ii) Los valores críticos $\alpha_k = f(p_k)$ ($1 \leq k \leq \mu$) son distintos entre sí.
- (iii) $f : Y \rightarrow D$ es una función propia y sobreyectiva.
- (iv) Si $\partial Y \neq \emptyset$, la restricción $f : \partial Y \rightarrow D$ es una submersión.

En conjunción con el lema de Morse 2.1.6, la primera condición impuesta sobre la función $f : Y \rightarrow D$ nos permite encontrar cartas complejas φ_k de $Y \setminus \partial Y$ centradas en los puntos críticos p_k respectivamente de manera que

$$f \circ \varphi_k^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \alpha_k + z_1^2 + \dots + z_n^2.$$

Tomemos un radio ε de manera que los conjuntos $\bar{B}_k = \varphi_k^{-1}(\bar{B}_\varepsilon)$ sean disjuntos dos a dos; y discos cerrados $\bar{D}_k \subseteq D$ centrados en los valores críticos α_k respectivamente y de radio ρ , también disjuntos entre sí. Podemos asumir además que los radios ε y ρ son lo suficientemente pequeños al igual que lo hicimos al comienzo de la sección anterior cuando definimos los espacios T, F y e . Con la intención de aplicar los resultados previos sobre singularidades cuadráticas, consideraremos los conjuntos

$$\begin{aligned} T_k &= \varphi_k^{-1}(T) = \bar{B}_k \cap f^{-1}(\bar{D}_k), \\ F_k &= \varphi_k^{-1}(F) = \bar{B}_k \cap f^{-1}(\alpha_k + \rho), \\ \tilde{e}_k &= \varphi_k^{-1}(e) = T_k \cap \varphi_k^{-1}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

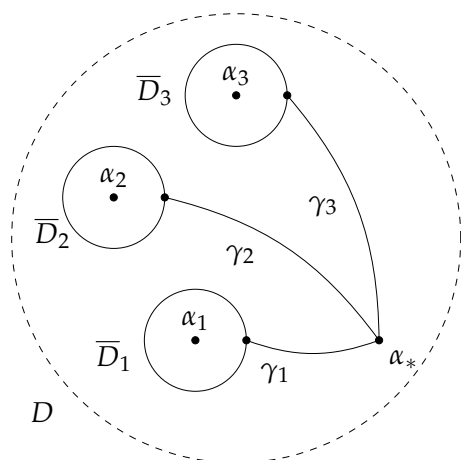


Figura 4.4

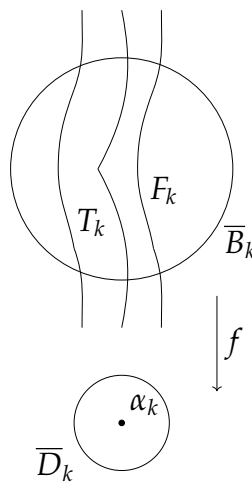


Figura 4.5

Por último, sean $\gamma_k : I \rightarrow D$ segmentos diferenciables que unan un valor regular $\alpha_* \in D$ de f con los puntos $\alpha_k + \rho$ respectivamente. Pedimos adicionalmente que estos caminos no tengan autointersecciones, y que dos de ellos se intersequen únicamente en α_* . Para incorporar la nueva notación las figuras 4.4 y 4.5 pueden resultar de ayuda.

Las condiciones (iii) y (iv) de la definición de función de Morse nos aseguran que la sumersión $f : Y \setminus f^{-1}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}) \rightarrow D \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$ satisface las hipótesis del teorema de Ehresmann, y por ende es una fibración localmente trivial. Notemos a las fibras regulares sobre α_* y $\alpha_k + \rho$ respectivamente como

$$Y_* = f^{-1}(\alpha_*), \quad Y_k = f^{-1}(\alpha_k + \rho).$$

Denotemos por γ_k^{-1} a la curva γ recorrida en sentido opuesto. Cada una de ellas se levanta a una función continua $\Gamma_k : Y_k \times I \rightarrow Y$ como en la proposición 1.2.2. El espacio topológico $\Gamma_k(\partial\tilde{e}_k \times I)$ es homeomorfo al producto $\partial\tilde{e}_k \times I$. Como $\Gamma_{k,0} : Y_k \rightarrow Y_k$ es igual a la identidad, una de las caras de este cilindro es igual a $\Gamma_k(\partial\tilde{e}_k \times \{0\}) = \partial\tilde{e}_k$; mientras que la otra está contenida en la fibra Y_* . De esta manera obtenemos μ celdas n -dimensionales

$$e_k = \tilde{e}_k \cup \Gamma_k(\partial\tilde{e}_k \times I)$$

cuyos bordes están contenidos en Y_* ; que a su vez determinan clases de

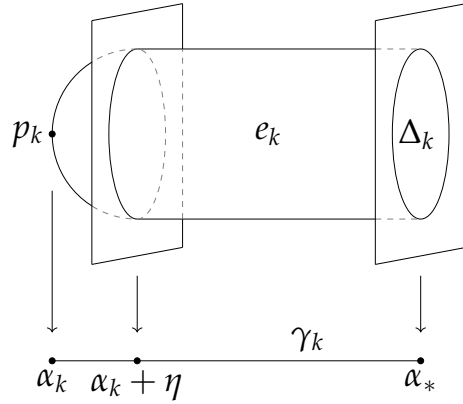


Figura 4.6: Adjunción de la celda e_k .

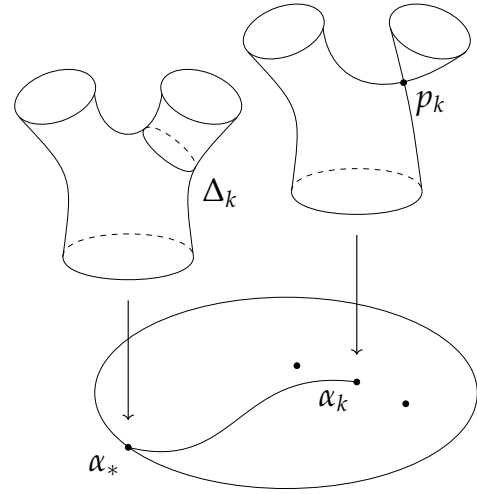


Figura 4.7: Un ciclo evanescente de una función de Morse.

homología

$$\Delta_k = [\partial e_k] \in \tilde{H}_{n-1}(Y_*),$$

para alguna de las orientaciones del borde de e_k . Tanto a ellas como a sus inversos aditivos las llamaremos **ciclos evanescentes de Y_*** . Nuevamente, el nombre se debe a que el ciclo geométrico ∂e_k es transportado a lo largo de γ_k hasta $\partial \tilde{e}_k$, y este último colapsa al punto p_k cuando se aproxima a la fibra singular sobre α_k (ver las figuras 4.6 y 4.7).

Como $Y_* \cap e_k = \partial e_k$, entonces $Y_* \cup_{k=1}^n e_k$ es un espacio de adjunción. Estamos en condiciones de enunciar y demostrar uno de los resultados centrales de esta sección, el cual es análogo al teorema de adjunción de celdas de la teoría de Morse clásica.

Teorema 4.2.2. $Y_* \cup_{k=1}^n e_k \subseteq Y$ es un retracto por deformación fuerte.

Demostración. La prueba está basada en las notas [Loo16] y será fragmentada en varios pasos. Antes de empezar introduzcamos más notación, la cual será utilizada únicamente en esta demostración:

$$B_k = \varphi_k^{-1}(B_\varepsilon), \quad S_k = \varphi_k^{-1}(S_\varepsilon), \quad Z_k = f^{-1}(\bar{D}_k),$$

$$K = f^{-1} \left(\bigcup_{k=1}^{\mu} \overline{D}_k \cup \text{Im } \gamma_k \right), \quad L = f^{-1} \left(\bigcup_{k=1}^{\mu} \text{Im } \gamma_k \right).$$

Paso 1: K es un retracto por deformación fuerte de Y . Observemos que la unión de los discos punteados $\overline{D}_k \setminus \{\alpha_k\}$ y las imágenes de los caminos γ_k es un retracto por deformación fuerte de $D \setminus \{\alpha_k\}_k$. Consecuentemente, $K \setminus f^{-1}(\{\alpha_k\}_k)$ es un retracto por deformación fuerte de $Y \setminus f^{-1}(\{\alpha_k\}_k)$ debido a la propiedad de levantamiento de homotopías 1.1.3 aplicada sobre la fibración localmente trivial $f : Y \setminus f^{-1}(\{\alpha_k\}_k) \rightarrow D \setminus \{\alpha_k\}_k$.

Paso 2: $Y_k \cup \tilde{e}_k$ es un retracto por deformación fuerte de Z_k . Gracias a la proposición 4.1.2 sabemos que $F_k \cup \tilde{e}_k \subseteq T_k$ es un retracto por deformación fuerte; y como $Y_k \cap T_k = F_k$, la inclusión $Y_k \cup \tilde{e}_k \subseteq Y_k \cup T_k$ también lo es. Para concluir con este paso bastará probar que $Z_k \setminus B_k$ se retrae por deformación fuerte al subespacio $(Y_k \setminus B_k) \cup (Z_k \cap S_k)$. Supongamos que \tilde{D}_k es un disco abierto que contiene a \overline{D}_k y a su vez no interseca a los otros discos cerrados. Entonces $f : f^{-1}(\tilde{D}_k) \setminus B_k \rightarrow \tilde{D}_k$ es una fibración trivial por los teoremas 1.1.7 y 1.1.6 (aquí estamos usando la condición (ii) para asegurarnos que esta función sea una submersión). Con la ayuda de una trivialización global podemos concluir que las inclusiones

$$Y_k \setminus B_k \subseteq Z_k \setminus B_k, \quad Y_k \cap S_k \subseteq Z_k \cap S_k$$

son retratos por deformación fuerte. A partir de la segunda podemos decir lo mismo de

$$Y_k \setminus B_k \subseteq (Y_k \setminus B_k) \cup (Z_k \cap S_k),$$

y por ende $(Y_k \setminus B_k) \cup (Z_k \cap S_k)$ y $Z_k \setminus B_k$ tienen el mismo tipo homotópico ya que ambos se retraen al subespacio común $Y_k \setminus B_k$. Solamente resta aplicar la proposición 4.1.3.

Paso 3: $L \cup_{k=1}^{\mu} \tilde{e}_k$ es un retracto por deformación fuerte de K . Esta parte es una consecuencia directa del paso anterior ya que $L \cap Z_k = Y_k$.

Paso 4: $Y_* \cup_{k=1}^{\mu} e_k$ es un retracto por deformación fuerte de $L \cup_{k=1}^{\mu} \tilde{e}_k$. Como L e $Y_* \cup_{k=1}^{\mu} \Gamma_k(\partial \tilde{e}_k \times I)$ se retraen por deformación fuerte al subespacio común Y_* , entonces el primero es un retracto del segundo gracias a la proposición 4.1.3.

La demostración se sigue de los pasos 1, 3 y 4. □

Corolario 4.2.3. El par (Y, Y_*) es $(n-1)$ -conexo y sus grupos de homología son

$$\tilde{H}_i(Y, Y_*) = \begin{cases} \mathbb{Z}^\mu & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{si } i \neq n. \end{cases}$$

Además, el grupo $\tilde{H}_n(Y, Y_*)$ está generado por las clases de las n -celdas e_k para cualquier elección de sus orientaciones.

Demostración. Comencemos por la afirmación sobre los grupos de homología. Observemos que existe un abierto de $Y_* \cup_{k=1}^\mu e_k$ que se retrae por deformación fuerte al subespacio cerrado Y_* (por ejemplo, si $N_k \subseteq e_k$ es un entorno tubular de ∂e_k para cada k , podemos tomar el abierto $Y_* \cup_{k=1}^\mu N_k$). Por este motivo, $(Y_* \cup_{k=1}^\mu e_k, Y_*)$ es por definición un par bueno. Luego, por el Teorema 4.2.2 y la Proposición [Hat02, Proposition 2.22], tenemos una cadena de isomorfismos

$$\tilde{H}_i(Y, Y_*) \simeq \tilde{H}_i\left(Y_* \cup_{k=1}^\mu e_k, Y_*\right) \simeq \tilde{H}_i\left(Y_* \cup_{k=1}^\mu e_k / Y_*\right) \simeq \tilde{H}_i\left(\bigvee_{k=1}^\mu S^n\right).$$

Por otra parte, como Y tiene el mismo tipo homotópico que el espacio que se obtiene a partir de Y_* luego de adjuntar las n -celdas e_k , entonces el par (Y, Y_*) es $(n-1)$ -conexo (ver [Whi12, Corollary 3.10]). \square

Para concluir con el estudio de las funciones de Morse calcularemos los operadores de monodromía y variación de la fibración localmente trivial $f : Y \setminus f^{-1}(\{\alpha_k\}_k) \rightarrow D \setminus \{\alpha_k\}_k$ con la ayuda de las fórmulas de Picard-Lefschetz 4.1.6. Denotemos por ω_k y τ_k a los lazos

$$\omega_k(t) = \alpha_k + \rho e^{2\pi i t}, \quad \tau_k(t) = \gamma_k \circ \omega_k \circ \gamma_k^{-1}(t).$$

Como el grupo fundamental $\pi_1(D \setminus \{\alpha_k\}, \alpha_*)$ está generado por las clases $[\tau_k]$ ($1 \leq k \leq \mu$), la monodromía y la variación de f quedan determinadas por sus valores en estos elementos.

Teorema 4.2.4. Dada una clase de homología $\delta \in \tilde{H}_{n-1}(Y_*, \partial Y_*)$,

$$\text{Var}_{\tau_k}(\delta) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\delta \circ \Delta_k) \Delta_k.$$

Consecuentemente, para todo $\alpha \in \tilde{H}_{n-1}(Y_*)$,

$$h_{\tau_k}(\alpha) = \alpha + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\alpha \circ \Delta_k) \Delta_k.$$

Demostración. Consideremos los ciclos evanescentes $\tilde{\Delta}_k = [\partial\tilde{e}_k] \in \tilde{H}_{n-1}(Y_k)$, donde la orientación de $\partial\tilde{e}_k$ fue elegida de manera compatible con la de ∂e_k . Dicho en otras palabras, esto quiere decir que $h_{\gamma_k^*}(\Delta_k) = \tilde{\Delta}_k$. Bastará que probemos que la variación del lazo ω_k sobre una clase $\beta \in \tilde{H}_{n-1}(Y_k, \partial Y_k)$ es igual a

$$\text{Var}_{\omega_k}(\beta) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\beta \circ \tilde{\Delta}_k) \tilde{\Delta}_k.$$

En efecto, si asumimos esta fórmula,

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\tau_k}(\delta) &= h_{\gamma_k^*}^{-1} \circ \text{Var}_{\omega_k} \circ h_{\gamma_k^*}^r(\delta) & (1.2) \\ &= h_{\gamma_k^*}^{-1} \left((-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (h_{\gamma_k^*}^r(\delta) \circ \tilde{\Delta}_k) \tilde{\Delta}_k \right) \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (h_{\gamma_k^*}^r(\delta) \circ \tilde{\Delta}_k) h_{\gamma_k^*}^{-1}(\tilde{\Delta}_k) \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (h_{\gamma_k^*}^r(\delta) \circ h_{\gamma_k^*}(\Delta_k)) \Delta_k \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\delta \circ \Delta_k) \Delta_k. \end{aligned}$$

Supongamos que \tilde{D}_k es un disco abierto centrado en el valor crítico α_k y de radio $\eta > \rho$ suficientemente pequeño. Entonces

$$f : E_k = f^{-1}(\tilde{D}_k \setminus \{\alpha_k\}) \cap \bar{B}_k \rightarrow \tilde{D}'_k = \tilde{D}_k \setminus \{\alpha_k\}$$

es un representante de la fibrición de Milnor de la singularidad cuadrática. Tomemos una trivialización $\phi : \partial E_k \rightarrow F_k \times \tilde{D}'_k$ de $f : \partial E_k \rightarrow \tilde{D}'_k$, y un levantamiento $\Omega_k : F_k \times I \rightarrow E_k$ del lazo ω_k como en la Proposición 1.3.2. Por el teorema de Ehresmann, $f : f^{-1}(\tilde{D}_k) \setminus B_k \rightarrow \tilde{D}_k$ es una fibrición localmente trivial, y por lo tanto trivial pues su base es contráctil. Esto implica que

$$f : \tilde{E}_k = f^{-1}(\tilde{D}_k \setminus \{\alpha_k\}) \setminus B_k \rightarrow \tilde{D}'_k = \tilde{D}_k \setminus \{\alpha_k\}$$

también es una fibrición trivial. A su fibra sobre $\alpha_k + \rho$ la notaremos como \tilde{F}_k . Como los bordes de los espacios $\partial\tilde{E}_k$ y $\partial\tilde{F}_k$ son las uniones disjuntas

$$\begin{aligned} \partial\tilde{E}_k &= \partial E_k \sqcup (f^{-1}(\tilde{D}_k \setminus \{\alpha_k\}) \cap \partial Y), \\ \partial\tilde{F}_k &= \partial F_k \sqcup \partial Y_k; \end{aligned}$$

podemos encontrar una trivialización $\tilde{\phi} : \partial\tilde{E}_k \rightarrow \partial\tilde{F}_k \times \tilde{D}'_k$ que extiende a ϕ . Sea $\tilde{\Omega}_k : \partial\tilde{F}_k \times I \rightarrow \partial\tilde{E}_k$ el levantamiento del lazo ω_k asociado a $\tilde{\phi}$. Por construcción, Ω_k y $\tilde{\Omega}_k$ coinciden en el conjunto $\partial F_k \times I$, y por ende podemos pegar ambas funciones para obtener una familia de homeomorfismos $\bar{\Omega}_k = \Omega_k \cup \tilde{\Omega}_k : Y_k \times I \rightarrow E_k$. Esta aplicación es un levantamiento de ω_k para la fibración $f : f^{-1}(\tilde{D}_k \setminus \{\alpha_k\}) \rightarrow \tilde{D}'_k$ y $\bar{\Omega}_{k,1} : Y_k \rightarrow Y_k$ representa a la monodromía geométrica. Pero como $f : \tilde{E}_k \rightarrow \tilde{D}'_k$ es trivial, el difeomorfismo $\tilde{\Omega}_{k,1}$ es isotópico a la identidad relativo a $\partial\tilde{F}_k$. Luego, podemos asumir que $\bar{\Omega}_{k,1}$ es igual a la identidad en $Y_k \setminus B_k$. La fórmula de la variación Var_{ω_k} se sigue del teorema de Picard-Lefschetz 4.1.6 y la Observación 1.4.2. \square

4.3. El teorema del bouquet de Milnor

A continuación retomaremos el análisis de la clase de equivalencia de una singularidad aislada $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ y aplicaremos la teoría de Picard-Lefschetz desarrollada en la sección previa sobre una de sus morficaciones f_λ . Tomemos una función $f_\lambda : Y = f_\lambda^{-1}(D_\eta) \cap \bar{B}_{r,\varepsilon} \rightarrow D = D_\eta$ como en el segundo capítulo, la cual resulta ser de tipo Morse gracias a los lemas 3.4.1 y 3.4.2, y la Proposición 3.5.2. Recordemos que, para elecciones apropiadas de ε , η y λ , su fibra regular Y_* es difeomorfa a la fibra de Milnor de f (3.4.3) y su dominio Y es una variedad contráctil (3.4.4). La siguiente proposición es una consecuencia inmediata de 4.2.3.

Proposición 4.3.1. *Supongamos que F es la fibra de Milnor de una singularidad aislada $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ cuyo número de Milnor es μ . Entonces*

$$\tilde{H}_i(F) = \begin{cases} \mathbb{Z}^\mu & \text{si } i = n - 1, \\ 0 & \text{si } i \neq n - 1; \end{cases} \quad \pi_i(F) = \begin{cases} \mathbb{Z}^\mu & \text{si } i = n - 1 > 1, \\ 0 & \text{si } i < n - 1. \end{cases}$$

Más aún, el $(n - 1)$ -ésimo grupo de homología reducida $\tilde{H}_{n-1}(F) \simeq \tilde{H}_{n-1}(Y_*)$ está generado por los ciclos evanescentes $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$.

Demostración. Los grupos de homología reducida de $F \cong Y_*$ se calculan a partir de la sucesión exacta larga del par (Y, Y_*) . Si en su lugar se usa la sucesión exacta larga de grupos de homotopía asociada a (Y, Y_*) podemos

deducir que F es un espacio $(n - 1)$ -conexo. Solamente hace falta probar la afirmación sobre el $(n - 1)$ -ésimo grupo de homotopía de F . Si $n - 1 > 1$, entonces F es simplemente conexo, y por lo tanto el teorema de Hurewicz [Hat02, Theorem 4.32] nos asegura que $\pi_{n-1}(F) \simeq \tilde{H}_{n-1}(F) \simeq \mathbb{Z}^\mu$. \square

Esta proposición impone fuertes restricciones sobre la topología de la fibra F . De hecho, el tipo homotópico de una variedad compleja con estas características queda completamente determinado. Este es el contenido del teorema del bouquet de Milnor, el cual fue probado por este matemático en el contexto de la fibración $\phi = f/|f| : S_\varepsilon \setminus K_f \rightarrow S^1$. No obstante, implementaremos esencialmente las mismas ideas que contiene su demostración original.

Teorema 4.3.2 (Milnor). *Si $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es una singularidad aislada, su fibra de Milnor tiene el tipo homotópico de un wedge de $\mu(f)$ esferas $(n - 1)$ -dimensionales.*

En primer lugar necesitaremos una proposición auxiliar de interés independiente perteneciente a los matemáticos Andreotti y Frankel. En su artículo [AF59] ambos aplicaron la teoría de Morse real junto con este resultado para dar una demostración alternativa del teorema de las secciones hiperplanas de Lefschetz.

Proposición 4.3.3 (Andreotti-Frankel). *Supongamos que M es una subvariedad compleja m -dimensional de un espacio euclídeo \mathbb{C}^N . Sean z^0 un punto que no pertenece a M , y $r : M \rightarrow \mathbb{R}$ la función $r(z) = |z - z^0|^2$. Entonces todo punto crítico de r tiene índice menor o igual que m .*

Parte de la demostración de esta proposición consiste en probar el siguiente lema.

Lema 4.3.4. *Supongamos que $Q : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ es una forma cuadrática compleja. Entonces el índice de la forma cuadrática real $\operatorname{Re} Q$ es menor o igual que m .*

Demostración. Sea $C \in M_m(\mathbb{C})$ una matriz compleja tal que $Q(z) = z^t C z$. Si escribimos a esta matriz como $C = A + iB$ con $A, B \in M_m(\mathbb{R})$, y a

las coordenadas complejas de \mathbb{C}^m como $z_l = x_{2l-1} + ix_{2l}$ obtenemos la igualdad

$$\operatorname{Re} Q(x_1, \dots, x_{2m}) = x^t \begin{bmatrix} A & -B \\ -B & -A \end{bmatrix} x.$$

De esta manera es fácil ver que si $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{2m})$ es un autovector de la matriz de la forma cuadrática $\operatorname{Re} Q$ con autovalor asociado λ , entonces $(-x_{m+1}, \dots, -x_{2m}, x_1, \dots, x_m)$ es un autovector con autovalor $-\lambda$. \square

Demostración de la Proposición 4.3.3. Primero que nada observemos que un elemento $z \in M$ es un punto crítico de r si y sólo si $z - z^0$ es perpendicular al espacio tangente $T_z M$ (con respecto al producto interno real de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$). Dado un punto crítico z , podemos asumir luego de un cambio de coordenadas afín de \mathbb{C}^n que $z = 0$, y que el espacio tangente $T_0 M$ está dado por las ecuaciones $z_{m+1} = \dots = z_n = 0$. Luego de este cambio de coordenadas el vector $0 - z^0$ sigue siendo perpendicular a $T_0 M$ (porque tanto las traslaciones como los isomorfismos lineales complejos son ortogonales con respecto al producto interno de \mathbb{R}^{2n}), por lo tanto las primeras m coordenadas complejas de z^0 son nulas. Nuevamente, luego de un segundo cambio de coordenadas, podemos suponer que $z_k^0 = 0$ para $k \neq n$, y $z_n^0 = a > 0$.

Por el teorema de la función implícita tenemos que en un entorno abierto del origen la variedad M está formada por las soluciones de un sistema de ecuaciones de la forma

$$z_l = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m c_{jk}^l z_j z_k + O(|(z_1, \dots, z_m)|^3), \quad m < l \leq n,$$

y si descomponemos las coordenadas complejas en parte real e imaginaria como $z_l = x_{2l-1} + ix_{2l}$ el sistema previo se puede reescribir como

$$x_h = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2m} a_{jk}^h x_j x_k + O(|(x_1, \dots, x_{2m})|^3), \quad 2m < h \leq 2n.$$

Mediante una transformación lineal ortogonal en las variables x_1, \dots, x_{2m} podemos suponer que el término cuadrático de la ecuación que involucra

a x_{2n-1} está escrito en forma diagonal:

$$x_{2n-1} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2m} a_j x_j^2 + O(|(x_1, \dots, x_{2m})|^3).$$

De esta manera la función $r : M \rightarrow \mathbb{R}$ se expresa en el sistema de coordenadas x_1, \dots, x_{2m} de M como

$$r(z) = \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq 2n-1}}^{2n} x_h^2 + (x_{2n-1} - a)^2 = \sum_{h=1}^{2m} (1 - a_j a) x_h^2 + O(|(x_1, \dots, x_{2m})|^3),$$

y por lo tanto la matriz hessiana de r en la base de ganchos $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_{2m}$ del tangente T_0M es

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} (0) \right)_{ij} = (2(1 - a_j a) \delta_{ij})_{ij}.$$

Esta expresión nos dice que el índice de 0 como punto crítico de r es la cantidad de índices j tales que $a_j > \frac{1}{a} > 0$. El teorema de sigue a partir del Lema 4.3.4 tomando $Q(z_1, \dots, z_m) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} c_{jk}^n z_j z_k$. \square

Como F es una variedad con borde de dimensión real $2n$, entonces debe ser homotópicamente equivalente a un CW-complejo de dimensión a lo sumo $2n$. Pero el hecho de que F es una variedad compleja nos permite mejorar esta última afirmación. El segundo paso en la dirección hacia la demostración del teorema de Milnor consiste en probar lo siguiente:

Proposición 4.3.5. *La fibra de Milnor de una singularidad aislada de n variables tiene el tipo homotópico de un CW-complejo de dimensión a lo sumo $n - 1$.*

Demostración. Tomemos dos radios ε y ρ lo suficientemente pequeños de manera que la variedad $F = f^{-1}(\rho) \cap \bar{B}_\varepsilon$ sea difeomorfa a la fibra de Milnor de una singularidad aislada $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Aquí hemos optado por usar deliberadamente la función $r(z) = |z|^2$ que define al origen. Observemos que el tipo homotópico de F no cambia luego de removerle su borde. Esto se puede justificar tomando un entorno tubular $U \subseteq F$ de ∂F

y retrayendo a las variedades F y $F \setminus \partial F$ a su subespacio común $F \setminus U$. Si usamos la Proposición 4.3.3 en el caso particular $M = f^{-1}(\rho) \cap B_\varepsilon$ y $z_0 = 0$, podemos afirmar que los puntos críticos de $r : M \rightarrow \mathbb{R}$ tienen índices menores o iguales que $n - 1$. Si todos estos puntos críticos fuesen no degenerados, podríamos hacer uso de la teoría de Morse real para concluir con la demostración. Sin embargo, este podría no ser el caso, por lo tanto buscaremos una aproximación de r por una función de Morse evitando perder el control sobre los índices de sus puntos críticos.

Siguiendo [Mor34, Theorem 8.1], podemos encontrar una función suave $s : M \rightarrow \mathbb{R}$ que coincida con r salvo un entorno compacto de sus puntos críticos, de manera que las derivadas primeras y segundas de s aproximen a las de r de manera uniforme en dichos entornos. Como los puntos críticos de r tienen índices menores o iguales que $n - 1$, si la aproximación es lo suficientemente pequeña, s también tendrá la misma propiedad (ver [Mil63, Lemma 22.4]).

Para aplicar la teoría de Morse sobre la función s solamente resta comprobar que las preimágenes $s^{-1}(\mathbb{R}_{\leq \delta}) \subseteq M$ son compactas si $0 < \delta < \varepsilon$. Afirmando que los puntos críticos de r no se pueden acumular en el borde de M . De no ser así, la compacidad de la fibra de Milnor F implicaría que existe una sucesión de puntos críticos de r que converge a un punto de ∂F . Usando el lema de selección de la curva 3.1.3, podemos encontrar un camino γ tal que $\gamma((0, 1]) \subseteq M$, $\gamma(0) \in \partial F$, y $(r \circ \gamma)'(t) = 0$. Pero esto es absurdo, porque $\gamma(t)$ no puede tener norma constante. Combinando esto con lo dicho en el párrafo anterior llegamos a que existe un radio $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que $s = r$ en $M \setminus B_{\varepsilon'}$. De esto se desprende fácilmente que los puntos de $s^{-1}(\mathbb{R}_{\leq \delta})$ no se pueden acumular en ∂F , por lo tanto esta preimagen es compacta. \square

Finalmente, estamos en condiciones de probar el teorema de Milnor.

Demostración del Teorema 4.3.2. Supongamos primero que $n > 2$. Por la Proposición 4.3.1 sabemos que el grupo de homotopía $\pi_{n-1}(F) \simeq \mathbb{Z}^\mu$ está generado por la clase de μ funciones continuas $(S^{n-1}, s) \rightarrow (F, p)$. Al pegarlas todas obtenemos una nueva función continua $(\vee S^{n-1}, s) \rightarrow (F, p)$ que induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía de grado menor o igual que $n - 1$. Por el teorema de Whitehead [May99, pág. 76], esta función resulta ser una equivalencia homotópica (aquí estamos usando la

Proposición 4.3.5).

Resta probar el teorema para $n = 2$. En este caso, la fibra de Milnor F tiene el tipo homotópico de un CW-complejo G de dimensión a lo sumo uno, es decir, un grafo. Este espacio resulta ser conexo gracias a la Proposición 4.3.1, y en consecuencia G contiene un árbol maximal T . Como la proyección $G \rightarrow G/T$ es una equivalencia homotópica, podemos concluir que $F \simeq G \simeq G/T \simeq \bigvee_{k=1}^{\mu} S^1$. \square

Corolario 4.3.6. *El link K_f de una singularidad de n variables es $(n - 3)$ -conexo.*

Demostración. En la demostración de la Proposición 4.3.5 vimos que existe una función de Morse $s : F \rightarrow \mathbb{R}$ cuyos puntos críticos tienen índices menores o iguales que $n - 1$. Tomando s lo suficientemente cerca de r , podemos suponer que $s^{-1}(\varepsilon) = \partial F \cong K_f$. Observemos que $-s : F \rightarrow \mathbb{R}$ también es una función de Morse, y los índices de sus puntos críticos son mayores o iguales que $\dim_{\mathbb{R}}(F) - (n - 1) = n - 1$. Por ende, F se obtiene a partir de K_f adjuntando celdas de dimensión mayor o igual que $n - 1$, las cuales no modifican los grupos de homotopía de grado menor o igual que $n - 3$. Luego, $\pi_k(K_f) = \pi_k(F) = 0$ para todo $k \leq n - 3$. \square

Capítulo 5

Diagramas de Dynkin

Esta última parte pretende ser una breve introducción sobre ciertos invariantes combinatorios de las singularidades tales como matrices de intersección y diagramas de Dynkin. Esta teoría fue desarrollada durante la década de los 70 por matemáticos como Arnold, Gusein-Zade y Gabrielov entre otros. La exposición del tema está basada principalmente en los libros [AGZV88] y [AGLV98].

A lo largo de este capítulo $f_\lambda : Y \rightarrow D$ será una morsificación de una singularidad aislada f con valores críticos $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$. Supondremos que todas las curvas $\varphi : I \rightarrow D$ utilizadas son suaves a trozos, empiezan en un valor regular α_* prefijado, terminan en un punto crítico α_i , y que además $\varphi(t) \notin \{\alpha_*, \alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$ si $t \in (0, 1)$. También nos serán útiles las notaciones

$$Y' = Y \setminus f^{-1}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\})$$

$$D' = D \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$$

$$Y_q = f_\lambda^{-1}(q)$$

$$Y_* = f_\lambda^{-1}(\alpha_*)$$

Algunos de los objetos que definiremos dependerán en principio de la morsificación f_λ elegida y de la clase de equivalencia de la singularidad f . Para probar la buena definición de los mismos se necesitan herramientas de la teoría de deformaciones de gérmenes de funciones que escapan a los

alcances de este trabajo.¹

5.1. Bases de ciclos evanescentes

A continuación desarrollaremos más en profundidad la noción de ciclo evanescente de una singularidad introducida en el capítulo anterior. Tomemos un camino φ en $D' \cup \{\alpha_k\}$ entre α_* y α_k . Por continuidad podemos encontrar un número $c \in (0, 1)$ de manera que $\varphi([c, 1]) \subseteq \overline{D}_k$. Como la variedad $\overline{B}_k \cap Y_{\varphi(c)}$ es difeomorfa a la fibra de Milnor de la singularidad cuadrática de n variables, su $(n - 1)$ -ésimo grupo de homología reducida es isomorfo a \mathbb{Z} y está generado por un ciclo geométrico $\tilde{\Delta}_\varphi$. Si $i_* : \tilde{H}_{n-1}(\overline{B}_k \cap Y_{\varphi(c)}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(Y_{\varphi(c)})$ denota al morfismo inducido por la inclusión, entonces podemos trasladar a $i_* \tilde{\Delta}_\varphi$ a lo largo de φ para obtener una clase

$$\Delta_\varphi = h_{\varphi|_{[0,c]}}^{-1} (i_* \tilde{\Delta}_\varphi) \in \tilde{H}_{n-1}(Y_*).$$

A los elementos Δ_φ y $-\Delta_\varphi$ los llamaremos los **ciclos evanescentes** asociados al camino φ . La siguiente proposición no solamente nos asegura que la definición del par $\pm\Delta_\varphi$ no depende del número c , si no que también afirma que está determinado por la clase de homotopía de φ .

Proposición 5.1.1. *Supongamos que φ y ψ son dos caminos homotópicos en $D' \cup \{\alpha_k\}$ que conectan los valores α_* y α_k . Si Δ_φ y Δ_ψ son dos ciclos evanescentes asociados a φ y ψ respectivamente, entonces $\Delta_\varphi = \pm\Delta_\psi$.*

Demostración. Por definición, estos ciclos son de la forma

$$\Delta_\varphi = h_{\varphi|_{[0,c]}}^{-1} (i_* \tilde{\Delta}_\varphi) \quad \text{y} \quad \Delta_\psi = h_{\psi|_{[0,d]}}^{-1} (i_* \tilde{\Delta}_\psi).$$

Como φ y ψ son caminos homotópicos, podemos encontrar una curva suave a trozos $\gamma : I \rightarrow \overline{D}_k \setminus \{\alpha_k\}$ que comience en $\varphi(c)$, termine en $\psi(d)$, y que $\varphi|_{[0,c]} \circ \gamma$ sea homotópica a $\psi|_{[0,d]}$ en D' . Esto implica que el operador

¹Todos los ingredientes necesarios están en [AGZV85, §8]. La idea central consiste en implementar la construcción [AGLV98, pág. 68], siguiendo las líneas de los capítulos 3 y 5 de esta tesis.

$h_{\gamma^*} : \tilde{H}_{n-1}(Y_{\varphi(c)}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(Y_{\psi(d)})$ asociado a la fibrición $f_\lambda : Y' \rightarrow D'$ satisface la ecuación

$$h_{\psi|_{[0,d]^*}} = h_{\gamma^*} \circ h_{\varphi|_{[0,c]^*}}.$$

Cometeremos un abuso de notación al llamar de la misma manera al morfismo $h_{\gamma^*} : \tilde{H}_{n-1}(\bar{B}_k \cap Y_{\varphi(c)}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(\bar{B}_k \cap Y_{\psi(d)})$ asociado a la fibrición de Milnor de la singularidad cuadrática de n variables. Repitiendo los pasos de la demostración del Teorema 4.2.4 se puede probar que estos operadores están relacionados vía el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \langle \tilde{\Delta}_\varphi \rangle = \tilde{H}_{n-1}(\bar{B}_k \cap Y_{\varphi(c)}) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_{n-1}(Y_{\varphi(c)}) \\ h_{\gamma^*} \downarrow & & \downarrow h_{\gamma^*} \\ \langle \tilde{\Delta}_\psi \rangle = \tilde{H}_{n-1}(\bar{B}_k \cap Y_{\psi(d)}) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_{n-1}(Y_{\psi(d)}). \end{array}$$

Como el morfismo de la cara izquierda de este cuadrado es biyectivo, este debe mandar el ciclo $\tilde{\Delta}_\varphi$ en alguno de los generadores $\pm \tilde{\Delta}_\psi$, y por lo tanto $h_{\gamma^*}(i_* \tilde{\Delta}_\varphi) = \pm i_* \tilde{\Delta}_\psi$. Finalmente,

$$\Delta_\psi = h_{\psi|_{[0,d]^*}}^{-1}(i_* \tilde{\Delta}_\psi) = \left(h_{\gamma^*} \circ h_{\varphi|_{[0,c]^*}} \right)^{-1}(i_* \tilde{\Delta}_\psi) = \pm h_{\varphi|_{[0,c]^*}}^{-1}(i_* \tilde{\Delta}_\psi) = \pm \Delta_\varphi.$$

□

Definición 5.1.2. Supongamos que φ es un camino en D que une al valor regular α_* con algún valor crítico α_i . El **lazo simple** asociado a φ es el elemento $\tau_\varphi \in \pi_1(D', \alpha_*)$ que se obtiene siguiendo el recorrido de φ hasta un punto cercano a α_i , seguido de un giro completo en el sentido antihorario alrededor de α_i , y luego regresando por φ hasta llegar a α_* .

Al combinar la Proposición 5.1.1 con el Teorema 4.2.4 obtenemos las siguientes fórmulas de la monodromía y variación de la fibrición localmente trivial $f_\lambda : Y' \rightarrow D'$ a lo largo de un lazo simple τ_φ : dadas dos clases de homología $\alpha \in \tilde{H}_{n-1}(Y_*)$ y $\delta \in \tilde{H}_{n-1}(Y_*, \partial Y_*)$,

$$h_{\tau_\varphi^*}(\alpha) = \alpha + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\alpha \circ \Delta_\varphi) \Delta_\varphi, \quad (5.1)$$

$$\text{Var}_{\tau_\varphi}(\delta) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\delta \circ \Delta_\varphi) \Delta_\varphi. \quad (5.2)$$

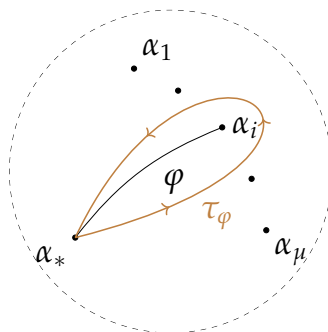


Figura 5.1: El lazo simple τ_φ asociado al camino φ .

Definición 5.1.3. Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_\mu$ caminos en D que comienzan en α_* y terminan en los valores críticos $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ respectivamente. Diremos que el conjunto ordenado $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\mu\}$ es un **sistema de caminos débilmente distinguido** si los lazos simples $\tau_{\varphi_1}, \dots, \tau_{\varphi_\mu}$ generan al grupo fundamental $\pi_1(D', \alpha_*)$. Por simplicidad usaremos la notación $\tau_i = \tau_{\varphi_i}$ en este contexto. Un sistema de caminos débilmente distinguido se dice **distinguido** si satisface las siguientes condiciones adicionales:

- Los caminos φ_i no tienen autointersecciones;
- Dos caminos distintos φ_i y φ_j se intersecan únicamente en α_* ;
- Las curvas φ_i están indexadas de manera que la secuencia de números $\arg \varphi_i'(0)$ es decreciente. Informalmente hablando, estas curvas están ordenadas en sentido horario cerca del punto α_* (Figura 5.2).

Por convención asignaremos la numeración de los valores críticos de f_λ en función de un sistema de caminos y no al revés. Estos rótulos irán cambiando a medida que fijemos otros sistemas (Figura 5.2).

Ejemplo 5.1.4. El primero de los sistemas de caminos de la Figura 5.2 es distinguido. Por el contrario, el segundo de ellos es un sistema débilmente distinguido que no es distinguido ya que no satisface ninguna de las condiciones de la definición. Por último, veamos que el tercero ni siquiera es débilmente distinguido. El grupo fundamental $\pi_1(D', \alpha_*)$ es libre y está generado por las letras $x_i = \tau_{\varphi_i}$. Los lazos simples asociados al conjunto

$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ se escriben en términos de este abecedario como

$$\tau_{\omega_1} = x_1, \quad \tau_{\omega_2} = x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}, \quad \tau_{\omega_3} = x_3.$$

Estas palabras no generan $\pi_1(D', \alpha_*)$ porque no es posible escribir la letra x_2 como una concatenación de estos tres elementos y sus inversos.

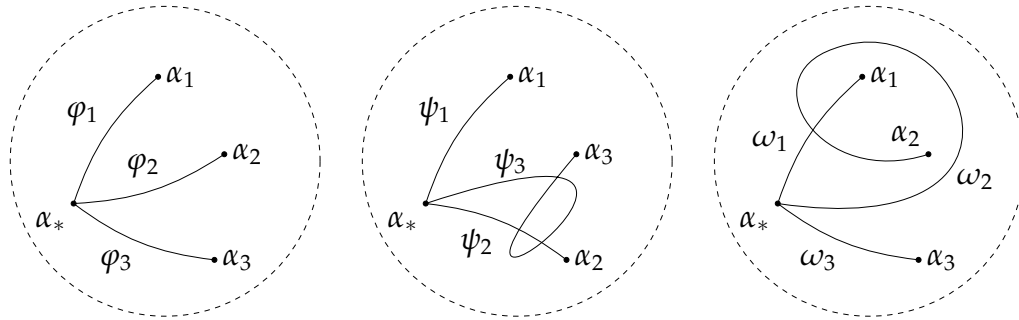


Figura 5.2: Tipos de sistemas de caminos.

Definición 5.1.5. Sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\mu\}$ un sistema (débilmente) distinguido de caminos. Diremos que un subconjunto ordenado $\{\Delta_1, \dots, \Delta_\mu\}$ de $\tilde{H}_{n-1}(Y_*)$ es un **sistema (débilmente) distinguido de ciclos evanescentes** asociado a $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\mu\}$ si cada clase Δ_i es un ciclo evanescente asociado a φ_i .

En estos términos, y con la ayuda de la Proposición 5.1.1, el Teorema 4.3.1 afirma que todo sistema distinguido de ciclos evanescentes forma una base de $\tilde{H}_{n-1}(Y_*)$. Lo mismo ocurre para sistemas débilmente distinguidos de ciclos evanescentes, como muestra el próximo teorema. Esta es la razón por la cual frecuentemente reemplazaremos la palabra “sistema” por “base” para referirnos a este tipo de conjuntos.

Teorema 5.1.6. *Un sistema débilmente distinguido de ciclos evanescentes forma una base para el grupo $\tilde{H}_{n-1}(Y_*)$.*

Demostración. Supongamos que $\{\Delta_1, \dots, \Delta_\mu\}$ es un sistema débilmente distinguido de ciclos evanescentes correspondientes al sistema de caminos

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_\mu\}$, y sean τ_1, \dots, τ_μ sus lazos simples asociados. Como todo sistema distinguido de ciclos evanescentes forma una base de $\tilde{H}_{n-1}(Y_*)$, basta probar que todo ciclo evanescente es una combinación entera de los elementos $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$. Supongamos entonces que Δ_φ es un ciclo evanescente que colapsa a lo largo de un camino φ que termina en α_i . Usando una homotopía de caminos si es necesario, podemos asumir que existe un número real $c \in (0, 1)$ de manera que $\varphi|_{[c,1]} = \varphi_i|_{[c,1]}$. De esta manera, el lazo $\gamma = (\varphi_i|_{[0,c]})(\varphi|_{[0,c]})^{-1}$ es un elemento del grupo fundamental $\pi_1(D', \alpha_*)$ que cumple que $\Delta = \pm h_{\gamma_*}(\Delta_i)$. Por hipótesis sabemos que γ es una palabra en las letras τ_1, \dots, τ_μ , por lo tanto h_{γ_*} se escribe como un producto de las transformaciones h_{τ_j} y sus inversos. A esta altura el teorema es una consecuencia de la fórmula 5.1. \square

La principal razón que motiva la definición de un sistema distinguido de caminos es que las monodromías de sus lazos simples asociados determinan la monodromía de la singularidad f . Concretamente, si τ_1, \dots, τ_μ son lazos con estas características, entonces $\gamma = \tau_\mu \circ \dots \circ \tau_1$ es un lazo en α_* que rodea a todos los valores críticos de f_λ una única vez y en sentido antihorario. La Proposición 3.4.3 nos permite identificar las monodromías h_f y h_{γ_*} salvo conjugación por un isomorfismo $\tilde{H}_{n-1}(F) \simeq \tilde{H}_{n-1}(Y_*)$, y por ende obtenemos una descomposición

$$h_f = h_{\tau_1*} \circ \dots \circ h_{\tau_\mu*}. \quad (5.3)$$

Similarmente, iterando la fórmula 1.1 llegamos a la igualdad

$$\text{Var}_f = \text{Var}_{\tau_\mu \circ \dots \circ \tau_1} = \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \text{Var}_{\tau_{i_1}} \circ i_* \circ \dots \circ i_* \circ \text{Var}_{\tau_{i_k}}, \quad (5.4)$$

donde $i_* : \tilde{H}_{n-1}(F) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(F, \partial F)$ es la inclusión canónica. El siguiente resultado es un aplicación de esta última expresión.

Proposición 5.1.7. $\text{Var}_f : \tilde{H}_{n-1}(F, \partial F) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(F)$ es un isomorfismo.

Demostración. Sea $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$ una base distinguida de ciclos evanescentes correspondientes a un sistema de caminos $\varphi_1, \dots, \varphi_\mu$. Por la dualidad de Lefschetz, podemos encontrar ciclos relativos $\nabla_1, \dots, \nabla_\mu \in \tilde{H}_{n-1}(F, \partial F)$

de manera que $(\nabla_i \circ \Delta_j) = \delta_{ij}$. Evaluando en ∇_i a ambos lados de la fórmula 5.4 obtenemos una igualdad de la forma

$$\text{Var}_f(\nabla_i) = (-1)^{n(n+1)/2} \Delta_i + \sum_{j < i} c_{ij} \Delta_j,$$

para ciertas constantes enteras c_{ij} . Esto prueba que la matriz de Var_f con respecto a las bases $\{\nabla_1, \dots, \nabla_\mu\}$ y $\{\Delta_1, \dots, \Delta_\mu\}$ es triangular superior, y que sus entradas diagonales son iguales a $(-1)^{n(n+1)/2}$. \square

Como consecuencia de las fórmulas 5.1 y 5.3, la matriz del operador de monodromía h_f con respecto a una base distinguida $\{\Delta_1, \dots, \Delta_\mu\}$ queda totalmente determinada por los índices de intersección $(\Delta_i \circ \Delta_j)$. Recíprocamente, se puede probar que estos enteros determinan a dicha matriz [AGZV88, Theorem 2.7]. En general, si $\{\Delta_1, \dots, \Delta_\mu\}$ es una base débilmente distinguida de ciclos evanescentes, se define su **matriz de intersección** como el arreglo $[(\Delta_i \circ \Delta_j)]_{ij}$. Como $(\alpha \circ \beta) = (-1)^{(n-1)^2} (\beta \circ \alpha)$, esta matriz es simétrica si n es impar, y antisimétrica en caso contrario. Además sus entradas diagonales solamente dependen de n (ver la Proposición 4.1.4).

Ejemplo 5.1.8. Sea $f(z) = z^{\mu+1}$ una singularidad de tipo A_μ , la cual tiene una morsificación de la forma $f_\lambda(z) = z^{\mu+1} - \lambda z$. Consideremos la raíz μ -ésima primitiva de la unidad $\xi = e^{-2\pi i/\mu}$. Es claro que los puntos críticos de f_λ son los números complejos

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu+1} \right)^{\frac{1}{\mu}} \xi^k \quad (0 \leq k \leq \mu-1),$$

y que sus respectivos valores críticos son

$$\alpha_k = -\frac{\lambda\mu}{\mu+1} \left(\frac{\lambda}{\mu+1} \right)^{\frac{1}{\mu}} \xi^k \quad (0 \leq k \leq \mu-1).$$

Si fijamos el valor regular $\alpha_* = 0$, entonces las μ curvas $\varphi_k(t) = t\alpha_k$ forman un sistema distinguido de caminos. La fibra regular Y_* está compuesta por los elementos $0, \lambda^{1/\mu}\xi, \lambda^{1/\mu}\xi^2, \dots, \lambda^{1/\mu}\xi^{\mu-1}$, y se puede probar que $\Delta_k = [\lambda^{1/\mu}\xi^k - 0]$ es un ciclo evanescente asociado al camino φ_k . Luego,

las entradas de la matriz de intersección asociada a la base $\{\Delta_1, \dots, \Delta_\mu\}$ son

$$(\Delta_k \circ \Delta_l) = \begin{cases} 2 & \text{si } k = l, \\ 1 & \text{si } k \neq l. \end{cases}$$

Para calcular estos enteros hemos usado nuestra **convención** sobre las orientaciones complejas de variedades de dimensión cero.

5.2. Cambios de base

En la sección previa vimos que a cada elección de un sistema de caminos se le puede asignar ciertos objetos, entre ellos bases de ciclos evanescentes y matrices de intersección (y como veremos posteriormente, diagramas de Dynkin). Naturalmente uno puede preguntarse de qué manera se relacionan dos de estos objetos correspondientes a dos sistemas distintos. La finalidad de esta sección es responder esta pregunta, pero primero necesitaremos caracterizar a todas las posibles elecciones de estos conjuntos de curvas. La Proposición 5.1.1 nos permite reducir este problema a uno discreto, lo cual motiva la siguiente definición.

Definición 5.2.1. Diremos que dos sistemas débilmente distinguidos de caminos $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\mu\}$ y $\{\psi_1, \dots, \psi_\mu\}$ son **homotópicos** si φ_i es homotópico a ψ_i en $D' \cup \{\alpha_i\}$ para cada $1 \leq i \leq \mu$.

Observemos el conjunto de lazos simples $\{\tau_1, \dots, \tau_\mu\}$ asociado a un sistema débilmente distinguido $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\mu\}$ sólo depende de su clase de homotopía. Más aún, visto como un subconjunto ordenado de $\pi_1(D', \alpha_*)$, $\{\tau_1, \dots, \tau_\mu\}$ determina al sistema $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\mu\}$ salvo homotopía.

Definición 5.2.2. Sean $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\mu\}$ un sistema distinguido de caminos en D' , y $\{\tau_1, \dots, \tau_\mu\}$ su conjunto de lazos simples asociados. Dado un índice $1 \leq i \leq \mu - 1$, se define la operación

$$t_i : \{\varphi_1, \dots, \varphi_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_\mu\} \mapsto \{\varphi_1, \dots, \tau_i^{-1} \circ \varphi_{i+1}, \varphi_i, \dots, \varphi_\mu\},$$

donde $\tau_i^{-1} \circ \varphi_{i+1}$ es el camino que se obtiene al recorrer al lazo τ_i en su sentido opuesto, seguido por la curva φ_{i+1} .

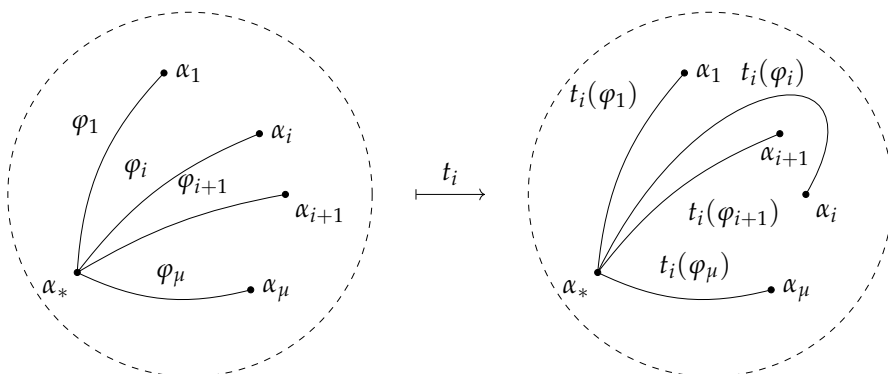


Figura 5.3: La operación t_i .

Como la curva $\tau_i \circ \varphi_{i+1}$ se autointerseca en α_* , el conjunto ordenado $\{\varphi_1, \dots, \tau_i \circ \varphi_{i+1}, \varphi_i, \dots, \varphi_\mu\}$ no es un sistema distinguido. Sin embargo, podemos reemplazar a este camino por uno homotópico en $D' \cup \{\alpha_i\}$ que no se interseque a si mismo ni a ninguno de los otros elementos del conjunto (Figura 5.3). Cometeremos el abuso notacional al denotar a t_i y a su modificación de igual modo. De esta manera, t_i opera sobre el conjunto de sistemas distinguidos de caminos módulo homotopía. Es claro que t_i es biyectiva y que su inversa es

$$t_i^{-1} : \{\varphi_1, \dots, \varphi_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_\mu\} \mapsto \{\varphi_1, \dots, \varphi_{i+1}, \tau_i \circ \varphi_i, \dots, \varphi_\mu\}.$$

Por otro lado, las operaciones t_i y t_j conmutan si y sólo si $|i - j| \geq 2$, mientras que t_i y t_{i+1} satisfacen la relación $t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1}$ (ver la Figura 5.4). En resumen, tenemos una acción del grupo de trenzas de μ hebras

$$\text{Br}(\mu) = \left\langle t_1, \dots, t_{\mu-1} \left| \begin{array}{ll} t_i t_j = t_j t_i & \text{si } |i - j| \geq 2, \\ t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq \mu - 2 \end{array} \right. \right\rangle$$

sobre el conjunto de caminos distinguidos módulo homotopía. Como muestra el siguiente teorema, las operaciones t_i y sus inversas nos alcanzan para poder describir todas las posibles clases de sistemas distinguidos.

Teorema 5.2.3. *El grupo de trenzas $\text{Br}(\mu)$ actúa de manera transitiva sobre el conjunto de sistemas de caminos distinguidos módulo homotopía.*

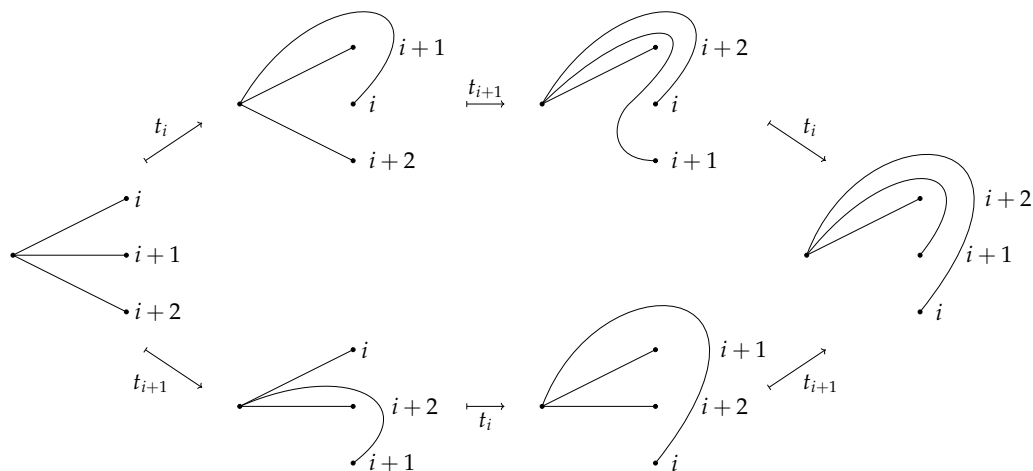


Figura 5.4: La relación $t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1}$.

Demostración. Seguiremos la prueba de Gusein-Zade [GZ77, pág. 44]. Sean $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\mu\}$ y $\{\psi_1, \dots, \psi_\mu\}$ dos sistemas distinguidos de caminos. Sin perder generalidad podemos suponer que existe un $c \in (0, 1)$ de manera que $\varphi_i|_{[0,c]} = \psi_i|_{[0,c]}$ para todo $1 \leq i \leq \mu$. Las curvas $\gamma_i = \varphi_i|_{[c,1]}^{-1} \circ \psi_i|_{[c,1]}$ unen dos de los valores críticos de f_λ , y además cumplen que $\gamma_i(t) \neq \gamma_j(t)$ si $t \in I$. Las hebras $t \mapsto (\gamma_i(t), t) \in D \times I$ forman una trenza que por construcción manda un sistema en el otro (Figura 5.5). \square

El grupo de trenzas $\text{Br}(\mu)$ también actúa sobre el conjunto de bases distinguidas de ciclos evanescentes. La acción del generador t_i viene dada por

$$\begin{aligned} t_i : \{\Delta_1, \dots, \Delta_i, \Delta_{i+1}, \dots, \Delta_\mu\} &\mapsto \{\Delta_1, \dots, h_{\tau_i}(\Delta_{i+1}), \Delta_i, \dots, \Delta_\mu\} \\ &= \{\Delta_1, \dots, \Delta_{i+1} + (-1)^{n(n+1)/2} (\Delta_{i+1} \circ \Delta_i) \Delta_i, \Delta_i, \dots, \Delta_\mu\}. \end{aligned}$$

Esta definición está elegida para que sea compatible con la acción sobre los sistemas de caminos: si $\{\Delta_1, \dots, \Delta_\mu\}$ es una base distinguida de ciclos

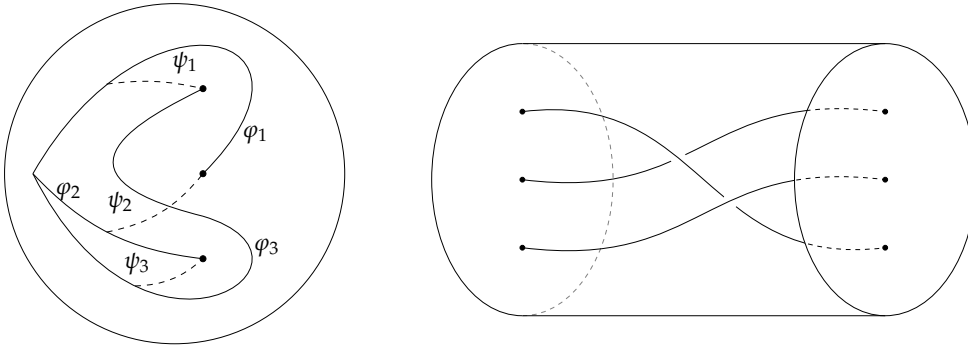


Figura 5.5: Demostración del Teorema 5.2.3.

evanescentes inducida por un sistema de caminos $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\mu\}$, entonces la base $t_i(\{\Delta_1, \dots, \Delta_\mu\})$ se corresponde con $t_i(\{\varphi_1, \dots, \varphi_\mu\})$.

A diferencia de lo que pasaba con las acción sobre los sistemas de caminos, la acción sobre las bases no es transitiva. Esto se debe a que a cada una de estas curvas se le asignan exactamente dos ciclos evanescentes (uno es el inverso aditivo del otro). Esto nos motiva a definir las operaciones

$$s_i : \{\Delta_1, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_\mu\} \mapsto \{\Delta_1, \dots, -\Delta_i, \dots, \Delta_\mu\} \quad (1 \leq i \leq \mu),$$

las cuales determinan una acción de \mathbb{Z}_2^μ . Es claro que s_i conmuta con t_j siempre y cuando $i \notin \{j, j+1\}$. Para los demás casos tenemos las relaciones

$$s_i \circ t_i = t_i \circ s_{i+1}, \quad s_{i+1} \circ t_i = t_i \circ s_i.$$

El siguiente resultado es consecuencia del Teorema 5.2.3 y lo que mencionamos en este último párrafo.

Teorema 5.2.4. *El producto semidirecto $\text{Br}(\mu) \rtimes \mathbb{Z}_2^\mu$ actúa transitivamente sobre el conjunto de bases distinguidas de ciclos evanescentes de una singularidad.*

Observemos que el Teorema 5.2.3 deja de ser válido si reemplazamos sistemas distinguidos por débilmente distinguidos. En efecto, la multiplicación por un elemento de $\text{Br}(\mu)$ preserva la propiedad de ser distinguido, y no todo sistema débilmente distinguido de caminos es homotópico a uno con estas características. Como las construcciones hechas hasta el momento no alcanzan para caracterizar esta familia más general de sistemas,

necesitaremos ampliar la cantidad de operaciones disponibles. Para cada $i \neq j$, se definen las aplicaciones

$$\begin{aligned} t_{ij} : \{\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_\mu\} &\mapsto \{\varphi_1, \dots, \tau_i^{-1} \circ \varphi_j, \dots, \varphi_\mu\}, \\ \{\Delta_1, \dots, \Delta_j, \dots, \Delta_\mu\} &\mapsto \{\Delta_1, \dots, h_{\tau_i}(\Delta_j), \dots, \Delta_\mu\}, \\ \{\tau_1, \dots, \tau_j, \dots, \tau_\mu\} &\mapsto \{\tau_1, \dots, \tau_i^{-1} \circ \tau_j \circ \tau_i, \dots, \tau_\mu\}; \end{aligned}$$

las cuales son biyectivas y sus inversas son

$$\begin{aligned} t_{ij}^{-1} : \{\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_\mu\} &\mapsto \{\varphi_1, \dots, \tau_i \circ \varphi_j, \dots, \varphi_\mu\}, \\ \{\Delta_1, \dots, \Delta_j, \dots, \Delta_\mu\} &\mapsto \{\Delta_1, \dots, h_{\tau_i}^{-1}(\Delta_j), \dots, \Delta_\mu\}, \\ \{\tau_1, \dots, \tau_j, \dots, \tau_\mu\} &\mapsto \{\tau_1, \dots, \tau_i \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1}, \dots, \tau_\mu\}. \end{aligned}$$

Nuevamente, estas funciones son compatibles entre sí. Si queremos probar que las mismas operan de manera transitiva sobre los sistemas débilmente distinguidos módulo homotopía, bastará ver que esta acción es transitiva sobre los sistemas de lazos simples módulo homotopía, ya que ambos conjuntos están en correspondencia uno a uno.

Lema 5.2.5. *Supongamos que φ y ψ son dos caminos que unen α_* con α_i . Entonces sus lazos simples asociados τ_φ y τ_ψ son conjugados en $\pi_1(D', \alpha_*)$.*

Demostración. Sin perder generalidad podemos asumir que existe un número $c \in (0, 1)$ tal que $\varphi(t) = \psi(t) = \alpha_i + (1 - t)$ para todo $t \in [c, 1]$. Sea $\gamma(t) = \alpha_i + (1 - c)e^{2\pi it}$. A partir de la definición es claro que

$$\tau_\varphi = \varphi|_{[0,c]} \circ \gamma \circ \varphi|_{[0,c]}^{-1} \quad \text{y} \quad \tau_\psi = \psi|_{[0,c]} \circ \gamma \circ \psi|_{[0,c]}^{-1}.$$

Luego, el lazo $\tau = \varphi|_{[0,c]} \circ \psi|_{[0,c]}^{-1}$ satisface la igualdad $\tau^{-1}\tau_\varphi\tau = \tau_\psi$, lo cual concluye con la demostración. \square

El siguiente resultado nos asegura que las transformaciones t_{ij} y sus inversas nos alcanzan para obtener todos los posibles sistemas de lazos simples. El mismo fue conjeturado por Gusein-Zade en [GZ77] y demostrado por Humphreys en el artículo [Hum85].

Teorema 5.2.6. Sean $X = \{x_1, \dots, x_\mu\}$ e $Y = \{y_1, \dots, y_\mu\}$ dos conjuntos ordenados de generadores del grupo libre F_μ de μ letras. Supongamos que x_i e y_i son conjugados en F_μ para todo $1 \leq i \leq \mu$. Entonces X se puede obtener a partir de Y mediante una secuencia de las operaciones t_{ij}, t_{ij}^{-1} .

Demostración. Supongamos que $w_1, \dots, w_\mu \in F_\mu$ son palabras en las letras x_1, \dots, x_μ de longitud mínima $|w_i|$ tales que $y_i = w_i x_i w_i^{-1}$. Definimos el número $|Y| = |w_1| + \dots + |w_\mu|$, es decir, la suma de las longitudes de las palabras w_i . Esta cantidad depende del conjunto X , pero omitiremos índices adicionales para no sobrecargar la notación. Es claro que $|Y| = 0$ si y sólo si $X = Y$. Por ende el problema se reduce a probar que, bajo la hipótesis $|Y| > 0$, existe una transformación t como las del enunciado de manera que $|t(Y)| < |Y|$.

Asumiendo que $|Y| > 0$, no es posible que todas las letras de X pertenezcan al conjunto Y simultáneamente. Sin perder generalidad supondremos que $x_1 \notin Y$. Por hipótesis sabemos que Y genera al grupo F_μ , así que podemos encontrar una descomposición

$$x_1 = y_{i_1}^{n_1} y_{i_2}^{n_2} \dots y_{i_k}^{n_k} = (w_{i_1}^{n_1} x_{i_1}^{n_1} w_{i_1}^{-n_1}) (w_{i_2}^{n_2} x_{i_2}^{n_2} w_{i_2}^{-n_2}) \dots (w_{i_k}^{n_k} x_{i_k}^{n_k} w_{i_k}^{-n_k}), \quad (*)$$

para ciertos índices $1 \leq i_l \leq \mu$, y números enteros $n_l \in \mathbb{Z}$ no nulos. Sin perder generalidad podemos suponer que $i_l \neq i_{l+1}$, para que no se cancelen factores consecutivos enteros. Por otro lado, por la minimalidad de la longitud, la palabra w_i debe ser reducida y no puede terminar con las letras x_i o x_i^{-1} . Esto implica que $|y_i| = 1 + 2|w_i|$. Afirmando que el número natural k es mayor estricto que uno. Si por el contrario $k = 1$, de la igualdad $1 = |x_1| = |n_1| + 2|w_{i_1}|$ podríamos concluir que $|w_1| = 0$. Sin embargo, w_1 no puede ser el elemento neutro de F_μ porque hemos asumido que x_1 no pertenece a Y .

El siguiente paso de la demostración consiste en probar que al menos una de las palabras w_j puede escribirse como $w_j = w_i x_i^n w$ en forma reducida, donde $i \neq j$, n es un entero no nulo, y w es un elemento de F_μ . Para probarlo, supongamos que esto no ocurre y lleguemos a una contradicción. De esto y la suposición $i_l \neq i_{l+1}$ se desprende que los factores $x_{i_1}^{n_1}, x_{i_2}^{n_2}, \dots, x_{i_k}^{n_k}$ de la igualdad (*) no se pueden cancelar luego de reducir la palabra del miembro derecho. Esto nos dice que este elemento tiene longitud mayor o igual que $k > 1 = |x_1|$, lo cual es absurdo.

Tomemos entonces dos índices $i \neq j$ tales que $w_j = w_i x_i^n w$ como en el párrafo anterior. Si $n < 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 t_{ij}(y_j) &= y_i y_j y_i^{-1} \\
 &= w_i x_i w_i^{-1} w_j x_j w_j^{-1} w_i^{-1} x_i^{-1} w_i \\
 &= w_i x_i w_i^{-1} w_i x_i^n w x_j w^{-1} x_i^{-n} w_i w_i^{-1} x_i^{-1} w_i \\
 &= (w_i x_i^{n+1} w) x_j (w_i x_i^{n+1} w)^{-1} \\
 &= \tilde{w}_j x_j \tilde{w}_j^{-1},
 \end{aligned}$$

donde $\tilde{w}_j = w_i x_i^{n+1} w$. Como $|n+1| < |n|$, la longitud de \tilde{w}_j es menor que la de w_j , con lo cual $|t_{ij}(Y)| < |Y|$. El caso $n > 0$ se resuelve de manera similar. \square

Corolario 5.2.7. *Dos sistemas débilmente distinguidos de caminos módulo homotopía (resp. ciclos evanescentes) se pueden obtener uno a partir del otro mediante una secuencia de las operaciones t_{ij} , t_{ij}^{-1} (resp. t_{ij} , t_{ij}^{-1} , s_i).*

5.3. Estabilizaciones

Hasta el momento solamente hemos vinculado dos singularidades bajo la relación de equivalencia que surge por precomponer por un germen de biholomorfismo. No obstante existen otras relaciones menos finas que nos permiten comparar gérmenes de funciones con distintas variables, por ejemplo la equivalencia estable. La incorporación de esta noción no sólo será vital a la hora de dar la definición de diagrama de Dynkin, si no que también es el objeto correcto al cual se le asigna este invariante combinatorio.

Definición 5.3.1. Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ una singularidad aislada. Una **estabilización** de f es un germen $\tilde{f} : (\mathbb{C}^{n+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ de la forma

$$\tilde{f}(z_1, \dots, z_{n+k}) = f(z_1, \dots, z_n) + z_{n+1}^2 + \dots + z_{n+k}^2.$$

Observación 5.3.2. Si f_λ es una morsificación de la singularidad f , entonces $\tilde{f}_\lambda = \tilde{f} + z_{n+1}^2 + \dots + z_{n+k}^2$ es una morsificación de la estabilización

\tilde{f} . Es claro que los puntos críticos de \tilde{f}_λ son de la forma $(p, 0)$, donde p es un punto crítico de f_λ . Esto implica que los valores críticos de f_λ y \tilde{f}_λ coinciden, y por ende $\mu(f) = \mu(\tilde{f})$.

Una singularidad no sólo comparte el mismo número de Milnor con cualquiera de sus estabilizaciones, sino que también presentan conexiones más profundas como indica el siguiente teorema. Este resultado fue probado por Gabrielov en su trabajo [Gab73].

Teorema 5.3.3. *Supongamos que $\{\Delta_1, \dots, \Delta_\mu\}$ es una base distinguida de ciclos evanescentes de una singularidad f . Si \tilde{f} es una estabilización de $n + k$ variables de f , entonces existe una base distinguida $\{\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_\mu\}$ de \tilde{f} de manera que*

$$(\tilde{\Delta}_i \circ \tilde{\Delta}_j) = \text{sgn}(j - i)^k (-1)^{kn + \frac{k(k-1)}{2}} (\Delta_i \circ \Delta_j), \quad \text{si } i \neq j.$$

Más aún, podemos elegir este último conjunto de manera que las bases distinguidas $\{\Delta_1, \dots, \Delta_\mu\}$ y $\{\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_\mu\}$ estén asociados al mismo sistema de caminos.

Observemos que esta fórmula solamente depende del residuo módulo 4 del entero k , y que los índices de intersección $(\tilde{\Delta}_i \circ \tilde{\Delta}_j)$ y $(\Delta_i \circ \Delta_j)$ se determinan mutuamente. Como los autoíndices de intersección de estos ciclos quedan determinados por n y k (Proposición 4.1.4), el Teorema 5.3.3 establece una biyección entre las matrices intersección de bases distinguidas de f y las de su estabilización \tilde{f} . Por este motivo podemos restringir el estudio de estas matrices al caso en el que el residuo módulo 4 de n está prefijado. La elección $n \equiv 3 \pmod{4}$ es la más común en la bibliografía². Esto promueve naturalmente la siguiente definición.

Definición 5.3.4. Sean $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ y $g : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ dos singularidad aisladas. Diremos que f y g son **establemente equivalentes** si existe un entero l tal que las estabilizaciones

$$f(z_1, \dots, z_n) + z_{n+1}^2 + \dots + z_l^2 \quad \text{y} \quad g(z_1, \dots, z_m) + z_{m+1}^2 + \dots + z_l^2$$

son equivalentes como singularidades.

²Este residuo está elegido de manera que las formas de intersección de las singularidades simples sean simétricas y definidas negativas. Esto se deduce de la forma de sus diagramas de Dynkin (ver la tabla al final del capítulo) y del teorema de la página 146 del libro [EGH⁺11]. En estos casos las transformaciones de Picard-Lefschetz $h_{\tau_\varphi}(\delta) = \delta + (\delta \circ \Delta_\varphi)\Delta_\varphi$ son reflexiones con respecto al producto interno $-(\cdot \circ \cdot)$, y los ciclos evanescentes de estas singularidades forman un sistema de raíces de $\tilde{H}_{n-1}(Y_*)$.

Finalmente estamos en condiciones formular la definición de un diagrama de Dynkin de una singularidad. Estos grafos condensan la información de una matriz de intersección de manera más legible.

Definición 5.3.5. Supongamos que \tilde{f} es una estabilización de m variables de f tal que $m \equiv 3 \pmod{4}$, y que $\{\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_\mu\}$ es una base débilmente distinguida de la singularidad \tilde{f} . El **diagrama de Dynkin** asociado a dicha base es el grafo no dirigido que se define de la siguiente manera:

- Los vértices de este grafo están en correspondencia biyectiva con los ciclos evanescentes de esta base. El vértice asociado al elemento Δ_i es etiquetado con el índice i ;
- Dos vértices i, j están conectados por $|(\tilde{\Delta}_i \circ \tilde{\Delta}_j)|$ aristas (resp. aristas punteadas) si $(\tilde{\Delta}_i \circ \tilde{\Delta}_j) > 0$ (resp. $(\tilde{\Delta}_i \circ \tilde{\Delta}_j) < 0$).

Como los diagramas de Dynkin de una estabilización \tilde{f} están en correspondencia biunívoca con sus matrices de intersección, las funciones t_{ij} , t_{ij}^{-1} y s_i operan de manera transitiva sobre ambos conjuntos. Lo mismo ocurre con las aplicaciones t_i , t_i^{-1} y s_i en el caso distinguido. En general no agregaremos rótulos a los vértices de un diagrama de Dynkin asociado a una base débilmente distinguida, pues cualquier reordenamiento de estas etiquetas produce otro diagrama de la misma singularidad. Sin embargo, esto no es cierto si trabajamos con bases distinguidas, y por ende preservaremos la numeración en este caso. El diagrama de Dynkin vinculado a una base distinguida $\{\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_\mu\}$ contiene información adicional sobre la singularidad, por ejemplo, a partir de él se puede obtener la matriz del operador de monodromía h_f con respecto a $\{\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_\mu\}$ (basta usar las identidades 5.1 y 5.3).

Ejemplo 5.3.6. En el Ejemplo 5.1.8 construimos una base distinguida de ciclos evanescentes $\{\Delta_1, \dots, \Delta_\mu\}$ de la singularidad $f(z) = z^{\mu+1}$ de manera que $(\Delta_k \circ \Delta_l) = 1$, si $k \neq l$. El Teorema 5.3.3 nos permite encontrar una base distinguida $\{\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_\mu\}$ de la estabilización $\tilde{f}(z_1, z_2, z_3) = z_1^{\mu+1} + z_2^2 + z_3^2$ tal que $(\tilde{\Delta}_k \circ \tilde{\Delta}_l) = -1$, si $k \neq l$. De esta manera, el diagrama de Dynkin de f asociado a esta base tiene μ vértices, y dos de ellos están conectados por una arista punteada. Este grafo está ilustrado en la parte izquierda

de la Figura 5.6. Siguiendo la notación de la sección previa, definimos la operación $t = t_1 \circ \cdots \circ t_{\mu-1}$. Observemos que

$$\begin{aligned} \{\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_\mu\} &\xrightarrow{t_{\mu-1}} \{\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_{\mu-2}, \tilde{\Delta}_\mu - \tilde{\Delta}_{\mu-1}, \tilde{\Delta}_{\mu-1}\} \\ &\xrightarrow{t_{\mu-2}} \{\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_\mu - \tilde{\Delta}_{\mu-1}, \tilde{\Delta}_{\mu-2}, \tilde{\Delta}_{\mu-1}\} \\ &\dots \\ &\xrightarrow{t_1} \{\tilde{\Delta}_\mu - \tilde{\Delta}_{\mu-1}, \tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_{\mu-2}, \tilde{\Delta}_{\mu-1}\}. \end{aligned}$$

La Figura 5.1.8 representa el efecto de la aplicación t sobre los diagramas de Dynkin asociados a estas bases distinguidas de ciclos evanescentes. Similarmente, la operación $t_2 \circ \cdots \circ t_{\mu-1}$ transforma esta segunda base en el conjunto $\{\tilde{\Delta}_\mu - \tilde{\Delta}_{\mu-1}, \tilde{\Delta}_{\mu-1} - \tilde{\Delta}_{\mu-2}, \tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_{\mu-2}\}$. Razonando de manera inductiva podemos encontrar un cambio de base

$$\{\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_\mu\} \mapsto \{\tilde{\Delta}_\mu - \tilde{\Delta}_{\mu-1}, \dots, \tilde{\Delta}_2 - \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_1\}.$$

El diagrama de Dynkin correspondiente a esta última base está compuesto por μ vértices alineados y $\mu - 1$ aristas que conectan dos vértices sucesivos (ver la Figura 5.7).

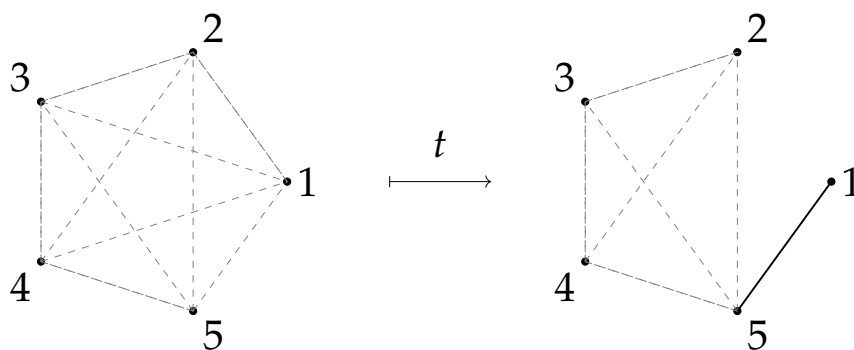


Figura 5.6: La operación $t = t_1 \circ \cdots \circ t_{\mu-1}$ en el caso $\mu = 5$.

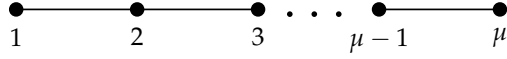


Figura 5.7: Un diagrama de Dynkin de la singularidad $f(z) = z^{\mu+1}$.

5.4. Suma directa de singularidades

Para terminar con esta tesis describiremos un método desarrollado por Gabrielov para calcular diagramas de Dynkin de ciertas singularidades que se pueden descomponer en otras más sencillas. Todos los resultados y sus demostraciones están contenidos en el artículo [Gab73].

Definición 5.4.1. Sean $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ y $g : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ dos singularidades aisladas. La **suma directa** entre f y g es la singularidad $f \oplus g : (\mathbb{C}^{n+m}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ dada por la igualdad

$$(f \oplus g)(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m) = f(z_1, \dots, z_n) + g(w_1, \dots, w_m).$$

Observación 5.4.2. Si f_λ y g_κ son morsificaciones de las singularidades f y g respectivamente, entonces $f_\lambda \oplus g_\kappa = f_\lambda + g_\kappa$ es una morsificación de la suma directa. Los puntos críticos de $f_\lambda \oplus g_\kappa$ son de la forma (p, q) , donde p es un punto crítico de f_λ , y q es un punto crítico de g_κ . Para elecciones genéricas de los vectores λ y κ , la función holomorfa $f_\lambda \oplus g_\kappa$ tiene exactamente $\mu(f)\mu(g)$ valores críticos. Esto prueba que $\mu(f \oplus g) = \mu(f)\mu(g)$.

Pasemos a enunciar el teorema central de esta sección. El mismo es, en cierto aspecto, una generalización del Teorema 5.3.3.

Teorema 5.4.3. Sean $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ y $g : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ dos singularidades aisladas. Sean $\{\Delta_i\}$ y $\{\Delta'_j\}$ dos bases distinguidas de las singularidades f y g respectivamente. Entonces existe una base distinguida $\{\Delta_{ij}\}$ de la suma directa $f \oplus g$, ordenada lexicográficamente, de manera que

$$(\Delta_{ij_1} \circ \Delta_{ij_2}) = \operatorname{sgn}(j_2 - j_1)^n (-1)^{nm + \frac{n(n-1)}{2}} (\Delta'_{j_1} \circ \Delta'_{j_2}) \quad \text{si } j_1 \neq j_2,$$

$$(\Delta_{i_1j} \circ \Delta_{i_2j}) = \operatorname{sgn}(i_2 - i_1)^m (-1)^{nm + \frac{m(m-1)}{2}} (\Delta_{i_1} \circ \Delta_{i_2}) \quad \text{si } i_1 \neq i_2,$$

$$(\Delta_{i_1j_1} \circ \Delta_{i_2j_2}) = \operatorname{sgn}(i_2 - i_1) (-1)^{nm} (\Delta_{i_1} \circ \Delta_{i_2}) (\Delta'_{j_1} \circ \Delta'_{j_2}) \quad \text{si } (i_2 - i_1)(j_2 - j_1) > 0,$$

$$(\Delta_{i_1j_1} \circ \Delta_{i_2j_2}) = 0 \quad \text{si } (i_2 - i_1)(j_2 - j_1) < 0.$$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de los teoremas 5.4.3 y 5.3.3.

Corolario 5.4.4. Sean f y g dos singularidades aisladas con una cantidad de variables congruentes a 3 módulo 4. Sean $\{\Delta_i\}$, $\{\Delta'_j\}$ y $\{\Delta_{ij}\}$ bases distinguidas de ciclos evanescentes como las del Teorema 5.4.3. Si $\{\tilde{\Delta}_{ij}\}$ es la base de la estabilización $f \oplus g + z^2$ construida en el Teorema 5.3.3, entonces

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\Delta}_{ij_1} \circ \tilde{\Delta}_{ij_2}) &= (\Delta'_{j_1} \circ \Delta'_{j_2}) && \text{si } j_1 \neq j_2, \\
 (\tilde{\Delta}_{i_1j} \circ \tilde{\Delta}_{i_2j}) &= (\Delta_{i_1} \circ \Delta_{i_2}) && \text{si } i_1 \neq i_2, \\
 (\tilde{\Delta}_{i_1j_1} \circ \tilde{\Delta}_{i_2j_2}) &= -(\Delta_{i_1} \circ \Delta_{i_2})(\Delta'_{j_1} \circ \Delta'_{j_2}) && \text{si } (i_2 - i_1)(j_2 - j_1) > 0, \\
 (\tilde{\Delta}_{i_1j_1} \circ \tilde{\Delta}_{i_2j_2}) &= 0 && \text{si } (i_2 - i_1)(j_2 - j_1) < 0.
 \end{aligned}$$

Este corolario nos permite construir un diagrama de Dynkin de la suma directa $f \oplus g$ de dos singularidades a partir de diagramas de sus sumandos. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 5.4.5. Sean $f(z) = z^4$ y $g(w) = w^3$ dos singularidades de tipo A_3 y A_2 respectivamente. La suma directa $f \oplus g = z^4 + w^3$ es una singularidad de clase E_6 , la cual tiene un diagrama de Dynkin como el de la Figura 5.8.

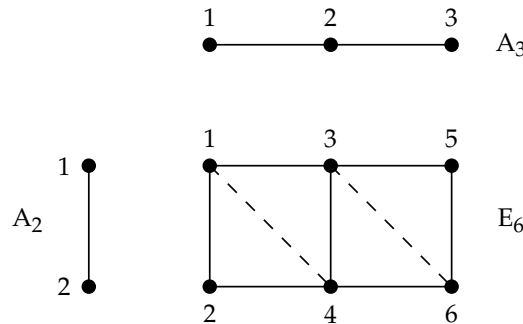


Figura 5.8: Un diagrama de Dynkin de la singularidad E_6 .

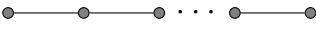
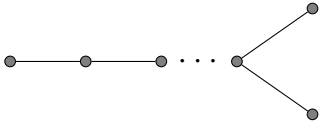
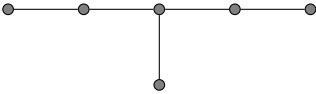
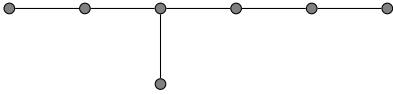
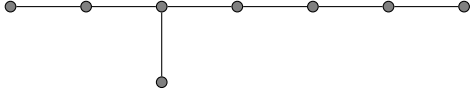
Más generalmente, podemos calcular el diagrama de Dynkin con respecto a una base distinguida de cualquiera de las singularidades de la

forma $f = z_1^{k_1} + \cdots + z_s^{k_s}$ ($k_i \geq 2$). Estos gérmenes reciben el nombre de **singularidades de Pham-Brieskorn** en honor a estos matemáticos por sus trabajos [Pha65] y [Bri66a]. Aplicando inductivamente el Corolario 5.4.4 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.4.6. *Si $f = z_1^{k_1} + \cdots + z_s^{k_s}$ es una singularidad de Pham, una de sus estabilizaciones con una cantidad de variables congruente a 3 módulo 4 tiene una base distinguida $\{\Delta_I : I = (i_1, \dots, i_n) \ 0 \leq i_s \leq k_s - 2\}$, ordenada lexicográficamente, tal que*

$$\begin{aligned} (\Delta_I \circ \Delta_I) &= -2, \\ (\Delta_I \circ \Delta_J) &= (-1)^{1+|I-J|} \quad \text{si } I \neq J \text{ y } 0 \leq j_s - i_s \leq 1 \text{ para todo } s, \\ (\Delta_I \circ \Delta_J) &= (-1)^{1+|I-J|} \quad \text{si } I \neq J \text{ y } 0 \leq i_s - j_s \leq 1 \text{ para todo } s, \\ (\Delta_I \circ \Delta_J) &= 0 \quad \text{en otro caso.} \end{aligned}$$

En particular, este corolario nos permite calcular un diagrama de Dynkin de la singularidad $f(x, y) = x^3 + y^5$ de tipo E_8 . Los diagramas de las singularidades simples restantes se pueden obtener a partir de las técnicas desarrolladas por Gusein-Zade en los artículos [GZ74b] y [GZ74a], o mediante el método de la curva polar de Gabrielov [Gab79]. En la siguiente página se encuentra la lista completa de los diagramas de Dynkin de estos gérmenes.

A_μ	$x^{\mu+1}$	
D_μ	$x^{\mu-1} + xy^2$	
E_6	$x^3 + y^4$	
E_7	$x^3 + xy^3$	
E_8	$x^3 + y^5$	

Bibliografía

- [AF59] Aldo Andreotti and Theodore Frankel. The Lefschetz theorem on hyperplane sections. *Annals of Mathematics*, pages 713–717, 1959.
- [AGLV98] Vladimir I. Arnold, Victor V. Goryunov, O.V. Lyashko, and Victor A. Vasiliev. *Singularity theory I*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [AGZV85] Vladimir I. Arnold, Sabir M. Gusein-Zade, and Alexander N. Varchenko. *Singularities of differentiable maps: the classification of critical points, caustics and wave points*. Birkhäuser, Boston, 1985.
- [AGZV88] Vladimir I. Arnold, Sabir M. Gusein-Zade, and Alexander N. Varchenko. *Singularities of differentiable maps: monodromy and asymptotics of integrals*. Birkhäuser, Boston, 1988.
- [Bra28] Karl Brauner. Zur geometrie der funktionen zweier komplexer veränderlicher. *Abh. Math Sem. Hamburg*, 6:1–54, 1928.
- [Bri66a] Egbert Brieskorn. Beispiele zur differentialtopologie von singularitäten. *Inventiones mathematicae*, 2(1):1–14, 1966.
- [Bri66b] Egbert Brieskorn. Examples of singular normal complex spaces which are topological manifolds. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 55(6):13–95, 1966.
- [Dur99] Alan H. Durfee. *Singularities, History of topology*. North Holland, Amsterdam, 1999.

- [Ebe07] Wolfgang Ebeling. *Functions of several complex variables and their singularities*, volume 83. American Mathematical Soc., 2007.
- [EGH⁺11] Pavel I. Etingof, Oleg Golberg, Sebastian Hensel, Tiankai Liu, Alex Schwendner, Dmitry Vaintrob, and Elena Yudovina. *Introduction to representation theory*, volume 59. American Mathematical Soc., 2011.
- [Gab73] Andrei M. Gabrielov. Intersection matrices for certain singularities. *Functional Analysis and its Applications*, 7(3):182–193, 1973.
- [Gab79] Andrei M. Gabrielov. Polar curves and intersection matrices of singularities. *Inventiones mathematicae*, 54(1):15–22, 1979.
- [GH78] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. John Wiley & Sons, 1978.
- [GP74] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, MIT, 1974.
- [GZ74a] Sabir M. Gusein-Zade. Dynkin diagrams for certain singularities of functions of two real variables. *Functional Analysis and Appl*, 8:295–300, 1974.
- [GZ74b] Sabir M. Gusein-Zade. Intersection matrices for certain singularities of functions of two variables. *Functional Analysis and its Applications*, 8(1):10–13, 1974.
- [GZ77] Sabir M. Gusein-Zade. The monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces. *Russian Mathematical Surveys*, 32(2):23–69, 1977.
- [Hat02] Allen Hatcher. Algebraic topology. 2002. *Cambridge UP, Cambridge*, 606(9), 2002.
- [Hir66] Friedrich Hirzebruch. Singularities and exotic spheres. *Séminaire Bourbaki*, 10:13–32, 1966.
- [Hum85] Stephen P. Humphries. On weakly distinguished bases and free generating sets of free groups. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 36(2):215–219, 1985.

- [Jou07] Paul Joubert. The topology of isolated singularities on complex hypersurfaces. Master's thesis, Universiteit Leiden, 2007.
- [Kle13] Felix Klein. Lectures on the icosahedron. *London, Kegan Paul*, 1913.
- [Lam81] Klaus Lamotke. The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz. *Topology*, 20(1):15–51, 1981.
- [Lam86] Klaus Lamotke. *Regular Solids and Isolated Singularities*. Braunschweig, Wiesbaden, 1986.
- [Lee03] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, 2003.
- [Lef24] Solomon Lefschetz. *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, volume 27. Gauthier-Villars Paris, 1924.
- [Loo84] Eduard J. N. Looijenga. *Isolated singular points on complete intersections*, volume 77. Cambridge University Press, 1984.
- [Loo16] Eduard J. N. Looijenga. Topology of algebraic varieties. <https://www.staff.science.uu.nl/~looi101/Topalgvar.pdf>, 2016.
- [May99] Jon Peter May. *A concise course in algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1999.
- [Mil63] John Milnor. Morse theory. *Annals of Mathematics Studies*, 51, 1963.
- [Mil68] John Milnor. Singular points of complex hypersurfaces. *Annals of Mathematics Studies*, 61, 1968.
- [Mil75] John Milnor. On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p, q, r)$. *Knots and groups*, pages 175–225, 1975.
- [Mor34] Marston Morse. *The calculus of variations in the large*, volume 18. American Mathematical Soc., 1934.
- [Mum61] David Mumford. The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 9:5–22, 1961.

- [Orl78] Peter Orlik. The multiplicity of a holomorphic map at an isolated critical point. *Real and complex singularities*, 1978.
- [Pha65] Frédéric Pham. Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 93:333–367, 1965.
- [PS97] Emile Picard and Georges Simart. *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, volume 1. Gauthier-Villars, 1897.
- [Ste51] Norman E. Steenrod. *The topology of fibre bundles*. Princeton University Press, 1951.
- [Swi02] Robert Switzer. *Algebraic topology homology and homotopy*, 2002.
- [Whi12] George W Whitehead. *Elements of homotopy theory*, volume 61. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Zol06] Henryk Zoladek. *The monodromy group*, volume 67. Springer Science & Business Media, 2006.