UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

La 2-localización de una categoría de modelos

Jaqueline Girabel

Director: Eduardo J. Dubuc

Fecha de Presentación: 2 de Octubre de 2019

A mamá y papá

Introducción

El concepto de *categoría de modelos* fue introducido por Quillen previendo una de sus consecuencias más significativas, y particularmente atractiva: la teoría de homotopía abstracta asociada a una estructura de modelos dada. Se define la *categoría homotópica* como la localización de la categoría original con respecto a una clase distinguida de morfismos que no necesariamente son inversibles, pero " se asemejan " a los isomorfismos . Con el desarrollo de esta teoría, Quillen provee una maquinaria ampliamente utilizada en diversos contextos.

En nuestra definición de localización, la categoría con dicha propiedad universal está determinada salvo equivalencia de categorías, a diferencia de las definiciones de Gabriel y Zisman, y de Quillen, para quienes la localización queda determinada en un sentido más fuerte: salvo isomorfismo de categorías.

Desarrollamos este trabajo con el objetivo de construir una *2-categoría homotópica* para una categoría de modelos, provista de un 2-funtor con la propiedad universal de la 2-localización de dicha categoría con respecto a la clase de *equivalencias débiles*. Presentamos, así, una versión 2-dimensional análoga a la teoría de homotopía elaborada por Quillen para una categoría de modelos. Aplicando el funtor π_o de componentes conexas en las categorías de flechas de la 2-localización se obtienen los resultados de Quillen.

A su vez, entendemos esta exposición como un caso particular de la versión 2-dimensional original [1], en la que Descotte, Dubuc y Szyld introducen el concepto de *bicategoría de modelos* y construyen la *bicategoría homotópica* asociada. Consideramos una categoría de modelos como una bicategoría de modelos trivial en su estructura 2-dimensional. En el desarrollo de este caso particular se producen demostraciones más simples que no son una mera adaptación de aquellas demostraciones correspondientes al caso general.

Dada una categoría de modelos $\mathscr{C}$, las homotopías de Quillen pueden interpretarse como las 2-celdas de la 2-categoría buscada, en la que los objetos y las flechas son como en $\mathscr{C}$. Pero, aunque las homotopías de Quillen se componen bajo ciertas condiciones, no determinan directamente una estructura de 2-categoría.

Generalizando el concepto de cilindro de Quillen y, luego, el concepto de homotopía de Quillen, una apropiada relación de equivalencia entre estas homotopías nos permite definir una 2-categoría en la que, efectivamente, objetos y morfismos son como en $\mathscr{C}$, y las *clases de equivalencia de homotopías* se componen vertical y horizontalmente, verificando todos los axiomas requeridos. De hecho, estos cilindros que generalizan los cilindros de Quillen, y con los que trabajamos en todo el desarrollo de la tesis, se definen en una categoría $\mathscr{C}$ con una única clase distinguida de flechas, Σ, conteniendo a todas las identidades, y la construcción de esta 2-categoría es independiente del contexto de categorías de modelos. Nos referimos a ella con el nombre de *2-categoría homotópica de* $\mathscr{C}$, respecto de la clase Σ, y es denotada $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$. El 2-funtor $i : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{H}o(\mathscr{C})$, dado por la inclusión, tiene la propiedad universal correspondiente a la 2-localización de $\mathscr{C}$, pero no es precisamente la 2-localización debido a que los morfismos de la clase Σ no necesariamente son equivalencias en $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$.

Cuando $\mathscr{C}$ es una categoría de modelos y Σ es la clase de equivalencias débiles, que denotamos $\mathcal{W}$, estudiamos las condiciones bajo las cuales el 2-funtor $i : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{H}o(\mathscr{C})$ manda equivalencias débiles en equivalencias. Restringiendo i a la subcategoría $\mathscr{C}_{fc}$ de objetos fibrantes-cofibrantes, obtenemos una sub-2-categoría $\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}) \subseteq \mathcal{H}o(\mathscr{C})$, y podemos demostrar que la inclusión $i : \mathscr{C}_{fc} \hookrightarrow \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ es la 2-localización de $\mathscr{C}_{fc}$ respecto de $\mathcal{W}$. Además, como una aplicación de esta construcción, tomando el 2-funtor $\pi_0 : \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}) \longrightarrow \pi(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}))$ de componentes conexas se tiene una categoría $\pi(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}))$ isomorfa a la categoría homotópica de Quillen de $\mathscr{C}_{fc}$, denotada $\pi\mathscr{C}_{fc}$ en [11].

Las conclusiones ya obtenidas para la subcategoría $\mathscr{C}_{fc}$ nos permiten ahora producir resultados concernientes a la categoría $\mathscr{C}$ mediante un reemplazo fibrante-cofibrante. Podemos percibir, así como en la exposición de Quillen, el rol fundamental que tienen las clases $\mathcal{F}$, de *fibraciones*, y $co\mathcal{F}$, de *cofibraciones* que hacen posible la construcción de la 2-localización con respecto a una tercera clase, $\mathcal{W}$. Al momento de definir un 2-funtor con la propiedad universal de la 2-localización de $\mathscr{C}$, asumimos que las factorizaciones de las que disponemos en una categoría de modelos son funtoriales. De esta forma, denotando $\mathscr{C}_f$ y $\mathscr{C}_c$ a las subcategorías de objetos fibrantes y cofibrantes de $\mathscr{C}$, respectivamente, los reemplazos fibrante $R : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}_f$ y cofibrante $Q : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}_c$ resultan funtores, más que simples asignaciones, como lo son en el caso tratado por Quillen, que no asume funtorialidad en las factorizaciones. Consideramos, entonces, el 2-funtor $\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[rrr, bend left, "q"] & \mathscr{C}_c \arrow[r, "R"] & \mathscr{C}_{fc} \arrow[r, "i"] & \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}) \end{tikzcd}$, y demostramos que este tiene la propiedad universal esperada.

Aplicando el funtor de componentes conexas a la 2-localización de $\mathscr{C}$, lo que obtenemos en este caso es una categoría equivalente a la categoría homotópica de $\mathscr{C}$ de Quillen, pero no isomorfa a ella. De todas maneras, esto se condice con nuestra definición de localización de categorías, determinada salvo equivalencias.

Destacamos, por último, que las homotopías con las que trabajamos son siempre homotopías a izquierda, y no necesitamos de las homotopías a derecha para generar los resultados esperados. Esto se debe a la funtorialidad de los reemplazos fibrante y cofibrante. Imitando la construcción de $\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ considerando sólo homotopías a derecha se tiene, en principio, otra versión de la 2-localización de $\mathscr{C}$, pero demostramos que coincide con la 2-categoría obtenida con las homotopías a izquierda. Estas conclusiones son una consecuencia de un resultado esencial que nos permite asegurar, además, que las categorías de flechas $Hom(X, Y)$ de la 2-localización de una categoría de modelos son localmente pequeñas.

Índice

1. Preliminares

En esta sección incluiremos las definiciones, las notaciones y los resultados básicos que ultilizaremos a lo largo de este trabajo. Luego de recordar los conceptos de equivalencia de categorías y de localización, adaptaremos estas nociones al contexto más general de 2-categorías.

1.1. Equivalencias de categorías y localización

Definición 1.1. Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ dos categorías. Un funtor $F : \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{Y}$ es una *equivalencia de categorías* si existen un funtor $G : \mathscr{Y} \longrightarrow \mathscr{X}$ e isomorfismos naturales $FG \simeq Id$ y $GF \simeq Id$. En tal caso, G también es una equivalencia de categorías y decimos que $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son categorías equivalentes.

Decimos que F es un *isomorfismo de categorías* si las transformaciones naturales $FG \simeq Id$ y $GF \simeq Id$ son las identidades.

Definiciones 1.2. Sea $F : \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{Y}$ un funtor.

1) Decimos que F es

(i) *pleno* si para todo X, Y en $\mathscr{X}$, $F : \mathscr{X}[X, Y] \longrightarrow \mathscr{Y}[FX, FY]$ es suryectivo,

(ii) *fiel* si para todo X, Y en $\mathscr{X}$, $F : \mathscr{X}[X, Y] \longrightarrow \mathscr{Y}[FX, FY]$ es inyectivo,

(iii) *plenamente fiel* si a la vez pleno y fiel.

2) Decimos que F es *esencialmente suryectivo* si todo objeto de $\mathscr{Y}$ es isomorfo a uno de la forma FX para X en $\mathscr{X}$.

Una caracterización importante de las equivalencias de categorías es la siguiente ([8] Ch.IV §4):

Proposición 1.3. *Consideramos un funtor $F : \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{Y}$. Son equivalentes:*

(i) F es una equivalencia de categorías;

(ii) F es plenamente fiel y esencialmente suryectivo.

Recordemos la construcción de los anillos de fracciones: dado un anillo conmutativo con unidad A y un subconjunto multiplicativo $S \subset A$ tal que $0 \notin S$, localizar A con respecto a S es construir de algún modo un anillo A_S que contenga a los inversos multiplicativos de los elementos en S: se tiene un morfismo de anillos $\lambda : A \longrightarrow A_S$ tal que $\lambda(s)$ es inversible para todo $s \in S$, y cualquier otro morfismo de anillos $\phi : A \longrightarrow B$ con esta propiedad se extiende a A_S en forma única.

$$\exists\phi(a)^{-1}\ \forall a\in S \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\lambda"] \arrow[dr, "\phi"'] & A_S \arrow[d, dashed, "\exists!\bar{\phi}\ /\ \bar{\phi}\lambda=\phi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Notar que la misma definición tiene sentido sin requerir que S sea multiplicativo, y cuando $0 \in S$ se tiene que A_S es el anillo trivial.

Como un caso particular disponemos del álgebra de gérmenes de funciones $\mathscr{D}_p(M)$, donde M es una variedad diferencial y $p \in M$, que guarda la información local alrededor de p. Este es un anillo local cuyo único ideal maximal $\overline{m}_p$ consiste de los gérmenes de funciones que se anulan en p. Resulta que $\mathscr{D}_p(M)$ es la localización del anillo $\mathscr{C}^\infty(M)$ con respecto al complemento del ideal maximal $m_p = \{f \in \mathscr{C}^\infty(M)/f(p) = 0\}$. Notar que si $f(p) \neq 0$, entonces f no se anula en todo un entorno de p.

Dada una categoría $\mathscr{C}$ y una clase Σ de flechas en $\mathscr{C}$, la idea de la localización consiste en encontrar una nueva categoría $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ que aproxime o extienda a la categoría original adjuntando los inversos de los morfismos en Σ, en el sentido de asegurar la existencia de un funtor $q : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ que mande los elementos de Σ en isomorfismos, de manera tal que el par $(\mathscr{C}[\Sigma^{-1}], q)$ sea universal con esta propiedad.

Definición 1.4. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y Σ una subclase de morfismos de $\mathscr{C}$. La *localización* de $\mathscr{C}$ con respecto a Σ es una categoría $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ junto con un funtor $q : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ tales que:

1. para todo $s \in \Sigma$, $q(s)$ es un isomorfismo;

2. para toda categoría $\mathscr{D}$, q induce una equivalencia en las categorías de funtores dada por la precomposición

$$Hom(\mathscr{C}[\Sigma^{-1}], \mathscr{D}) \xrightarrow{q^*} Hom_+(\mathscr{C}, \mathscr{D}),$$

donde los elementos de $Hom_+(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ son aquellos funtores que mandan la clase Σ en la clase $Isos(\mathscr{D})$.

Observación 1.5. Si $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ existe, es única salvo equivalencia de categorías. Gabriel y Zisman ([3]), quienes introducen este concepto, y muchos autores después, requieren que q^* en la definición 1.4 sea un *isomorfismo* de categorías.

Comentario 1.6. Una construcción formal permite ver que $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ siempre existe, pero sus hom-sets no necesariamente son conjuntos, aún cuando la categoría $\mathscr{C}$ sí es localmente pequeña. En el contexto de categorías de modelos, la construcción de Quillen ([11]) muestra que la localización de una categoría de modelos localmente pequeña también es localmente pequeña.

Cuando la clase Σ satisface ciertas condiciones, análogas a las propiedades de un subconjunto multiplicativo en un anillo no conmutativo, $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ puede describirse en términos de "fracciones"; es decir, se construye una *categoría de fracciones* que satisface la definición de localización. Dicha descripción de la localización $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ es útil y necesaria en la práctica para demostrar una serie de propiedades, pero el problema conjuntístico en los hom-sets que mencionamos anteriormente aún persiste con esta definición explícita.

1.2. 2-Categorías

El concepto de 2-categoría se entiende como una generalización de las categorías, admitiendo, además de objetos y morfismos, una estructura adicional dada por las *2-celdas* (o *2-morfismos*), que pueden componerse de dos maneras distintas respetando cierta condicion de compatibilidad. Un ejemplo que clarifica esta noción de 2-celdas es el de las transformaciones naturales, que proveen a la categoría **Cat** de una estructura de 2-categoría, cuyos objetos son las categorías (pequeñas) y los morfismos son los funtores.

Definición 1.7. Una 2-categoría $\mathscr{C}$ consiste de:

1. Una familia de objetos X, Y, Z, ...

2. Para cada par de objetos X, Y en $\mathscr{C}$, una categoría $\mathscr{C}[X, Y]$. Los objetos de esta categoría son flechas $f : X \longrightarrow Y$ mientras que los morfismos son 2-celdas $\alpha : f \Longrightarrow g$ entre flechas de X a Y. La composición en esta categoría es la *composición vertical*, denotada por $\circ$. La identidad de una flecha f es la 2-celda denotada "Id_f".

Para cada objeto X se tiene un morfismo distinguido $id_X \in \mathscr{C}[X, X]$.

3. Dados objetos X, Y, Z, un funtor $\mathscr{C}[Y, Z] \times \mathscr{C}[X, Y] \longrightarrow \mathscr{C}[X, Z]$ que define una *composición horizontal* asociativa (tanto en los morfismos como en las 2-celdas), y es denotada por $*$. Las identidades para esta composición son las flechas id_X y las 2-celdas Id_{id_X}, para todo X. Además, para cada par de morfismos $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$, dicha composición horizontal satisface $Id_g * Id_f = Id_{g*f}$.

4. Un axioma de compatibilidad entre las composiciones horizontal y vertical, conocido como “Interchange law”:

   Dada una configuración en $\mathscr{C}$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left=8, "f"] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\alpha\Downarrow"] \arrow[r, "g"] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\beta\Downarrow"] \arrow[r, shift right=8, "l"'] & Y \arrow[r, shift left=8, "f'"] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\alpha'\Downarrow"] \arrow[r, "g'"] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\beta'\Downarrow"] \arrow[r, shift right=8, "l'"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

   se verifica $(\beta' * \beta) \circ (\alpha' * \alpha) = (\beta' \circ \alpha') * (\beta \circ \alpha)$.

Notación 1.8. En general, las identidades de la composición vertical se denotarán simplemente como flechas “f ” en lugar de “Id_f”. Además, omitiremos la notación $*$ cuando las 2-celdas se compongan horizontalmente con los morfismos. De manera que, si por ejemplo α e Id_f son componibles en el sentido $Id_f * \alpha = f * \alpha$, muchas veces escribiremos $f\alpha$.

Observación 1.9. En presencia de composición vertical, para determinar una composición horizontal de 2-celdas compatible basta definir una composición horizontal entre 2-celdas y morfismos (interpretando a los morfismos como 2-celdas identidades), a la que algunos autores llaman *wishkering*:

Para cada $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "l"] & Y \arrow[r, shift left=3, "f"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, shift right=3, "g"'] & Z \arrow[r, "r"] & W \end{tikzcd}$, supongamos que tenemos definidas 2-celdas $r\alpha$ y αl. Si se verifican los axiomas

1. Para cada $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, se tiene $Id_g f = g Id_f = Id_{gf}$;

2. Para cada $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "l"] & Y \arrow[r, shift left=6, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[r, shift right=6, "k"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\alpha\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\beta\Downarrow"] & Z \arrow[r, "r"] & W \end{tikzcd}$, vale $(\beta l) \circ (\alpha l) = (\beta \circ \alpha) l$

   y $(r\alpha) \circ (r\beta) = r(\beta \circ \alpha)$;

3. Para cada $\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & Y \arrow[r, bend left, "f'"] \arrow[r, bend right, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha'"] & Z \end{tikzcd}$, $(g'\alpha) \circ (\alpha' f) = (\alpha' g) \circ (f'\alpha)$

entonces cualquier composición horizontal $\alpha' * \alpha$ como en el último axioma queda definida por $(g'\alpha) \circ (\alpha' f) = (\alpha' g) \circ (f'\alpha)$.

El ejemplo prototípico de 2-categoría es el de **Cat**, en donde las 2-celdas son las transformaciones naturales. La composición vertical de transformaciones naturales $\tau : F \Longrightarrow G$, $\sigma : G \Longrightarrow R$, donde F, G, R son funtores con iguales dominio y codomio, se define como $(\sigma \circ \tau)_X = \sigma_X \tau_X$. Por otro lado, si tenemos $\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left, "R"] \arrow[r, bend right, "S"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$, la composición horizontal es definida como la tranformación natural cuyas componentes son $(\beta \circ \alpha)_X = \beta_{GX} R\alpha_X$ para cada X en $\mathscr{C}$. Notamos que de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} RFX \arrow[r, "\beta_{FX}"] \arrow[d, "F\alpha_X"'] & SFX \arrow[d, "S\alpha_X"] \\ RGX \arrow[r, "\beta_{GX}"'] & SGX \end{tikzcd}$$

también $(\beta \circ \alpha)_X = S\alpha_X \beta_{FX}$.

Definiciones 1.10. Un *2-funtor* $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ entre 2-categorías manda objetos de $\mathscr{C}$ en objetos de $\mathscr{D}$, morfismos de $\mathscr{C}$ en morfismos de $\mathscr{D}$ y 2-celdas de $\mathscr{C}$ en 2-celdas de $\mathscr{D}$, preservando todas las estructuras: composiciones vertical y horizontal e identidades.

Si G es otro 2-funtor entre las mismas 2-categorías, una *transformación 2-natural* $\eta : F \Longrightarrow G$ consiste de una familia de flechas $\eta_X : FX \longrightarrow GX$ en $\mathscr{D}$, con X variando en $\mathscr{C}$, de forma tal que para cada 2-celda $\alpha : f \Longrightarrow g$ se verifique la ecuación $\eta_Y F(\alpha) = G(\alpha)\eta_X$:

$$
\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, "\eta_X"] \arrow[d, shift right=3, "Fg"'] \arrow[d, shift left=3, "Ff"] \arrow[d, phantom, "\overset{F(\alpha)}{\Leftarrow}"] & & GX \arrow[d, shift right=3, "Gg"'] \arrow[d, shift left=3, "Gf"] \arrow[d, phantom, "\overset{G(\alpha)}{\Leftarrow}"] \\
FY \arrow[rr, "\eta_Y"'] & & GY
\end{tikzcd}
$$

Cuando α es una identidad, la igualdad anterior es la conmutatividad del diagrama correspondiente a la naturalidad de las transformaciones naturales que ya conocíamos.

Más generalmente, decimos que $\eta : F \Longrightarrow G$ es una *transformación pseudonatural* entre 2-funtores si asigna a cada objeto X en $\mathscr{C}$ una flecha $\eta_X : FX \longrightarrow GX$ en $\mathscr{D}$ y a cada flecha $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{C}$ una 2-celda inversible $\eta_f : Gf\eta_X \longrightarrow \eta_Y Ff$ en $\mathscr{D}$

$$
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow \eta_f"] & GX \arrow[d, "Gf"] \\
GY \arrow[r, "\eta_Y"'] & GY
\end{tikzcd}
$$

satisfaciendo los siguientes axiomas:

1. Para cada X en $\mathscr{C}$, $\eta_{id_X} = Id_{\eta_X}$;

2. Dadas $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ en $\mathscr{C}$, se tiene que $\eta_g F(f) \circ G(g)\eta_f = \eta_{gf}$, de acuerdo a 1.8.

$$
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow \eta_f"] & GX \arrow[d, "Gf"] \\
FY \arrow[r, "\eta_Y"'] \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow \eta_g"] & GY \arrow[d, "Gg"] \\
FZ \arrow[r, "\eta_Z"'] & GZ
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "Fgf"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow \eta_{gf}"] & GX \arrow[d, "Ggf"] \\
FZ \arrow[r, "\eta_Z"'] & GZ
\end{tikzcd}
$$

3. Para cada 2-celda $\alpha : f \Longrightarrow g : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{C}$, vale la ecuación $\eta_g \circ G(\alpha)\eta_X = \eta_Y F(\alpha) \circ \eta_f$:

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \eta_g"] & GX \arrow[d, shift right=3, "Gf"'] \arrow[d, shift left=3, "Gg"] \arrow[d, phantom, "\overset{G(\alpha)}{\Longrightarrow}"] \\
FY \arrow[r, "\eta_Y"'] & GY
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, shift right=3, "Fg"'] \arrow[d, shift left=3, "Ff"] \arrow[d, phantom, "\overset{F(\alpha)}{\Longleftarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \eta_f"] & GX \arrow[d, "Gf"] \\
FY \arrow[r, "\eta_Y"'] & GY
\end{tikzcd}$$

Notamos que una transformación 2-natural es una transformación pseudo-natural tal que η_f es la identidad para cada f, en cuyo caso las primeras dos condiciones son triviales y la tercera es el axioma de 2-naturalidad que mencionamos anteriormente.

Supongamos ahora que $\tau, \sigma : F \Longrightarrow G$ son transformaciones 2-naturales entre 2-funtores $F, G : \mathscr{C} \Longrightarrow \mathscr{D}$. Una *modificación* $\mu : \tau \longrightarrow \sigma$ asigna a cada objeto X de $\mathscr{C}$ una 2-celda $\mu_X : \tau_X \Longrightarrow \sigma_X$ en $\mathscr{D}$, de manera tal que para todo par de flechas $f, g : X \longrightarrow Y$ y para toda 2-celda $\alpha : f \Longrightarrow g$ en $\mathscr{C}$ se verifica la igualdad $\mu_Y F(\alpha) = G(\alpha)\mu_X$:

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, shift left=3, "Ff"] \arrow[r, shift right=3, "Fg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\alpha"] & FY \arrow[r, shift left=3, "\tau_Y"] \arrow[r, shift right=3, "\sigma_Y"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mu_Y"] & GY
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, shift left=3, "\tau_X"] \arrow[r, shift right=3, "\sigma_X"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mu_X"] & GX \arrow[r, shift left=3, "Gf"] \arrow[r, shift right=3, "Gg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow G\alpha"] & GY.
\end{tikzcd}$$

Si τ y σ son pseudonaturales, una modificación $\mu : \tau \longrightarrow \sigma$ será una asignación como antes satisfaciendo la igualdad $(\mu_Y F(\alpha)) \circ \tau_f = \sigma_g \circ (G(\alpha)\mu_X)$ para cada $\alpha : f \Longrightarrow g$ en $\mathscr{C}$.

Observación 1.11. Las transformaciones 2-naturales (pseudonaturales) y las modificaciones se componen verticalmente y horizontalmente (ver, por ejemplo, [5] I.2.4, p. 25).

Si $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son 2-categorías, entonces $Hom(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ es la 2-categoría de 2-funtores, que puede ser interpretada de dos maneras a partir de las definiciones anteriores:

En el sentido débil, denotaremos $Hom_p(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ a la 2-categoría en la que los objetos son los 2-funtores de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$, las flechas son las transformaciones pseudonaturales y las 2-celdas son las modificaciones.

En el sentido estricto, $Hom_s(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ será la 2-categoría cuyos objetos son los 2-funtores de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$, las flechas son las transformaciones 2-naturales y las 2-celdas son las modificaciones.

Notamos que se tiene un 2-funtor $Hom_s(\mathscr{C}) \to Hom_p(\mathscr{C})$ que es fiel pero no es pleno. Y para cualquier par de 2-funtores F, G, el funtor

$$Hom_s(\mathscr{C})[F,G] \to Hom_p(\mathscr{C})[F,G]$$

sí es plenamente fiel.

1.3. Equivalencias de 2-categorías y 2-localización

Decimos que una flecha $f : X \longrightarrow Y$ es una *equivalencia* si existe otra flecha $g : Y \longrightarrow X$ que es interpretada como una "inversa" de f en el sentido más general posible, según el contexto, y que recibe el nombre de *cuasi-inversa* de f:

Si f es un morfismo en una categoría, entonces es una equivalencia si tiene una cuasi-inversa g que es una verdadera inversa (es decir, f es un isomorfismo).

Si f es un morfismo en una 2-categoría, entonces es una equivalencia si tiene una cuasi-inversa $g : Y \longrightarrow X$ en el sentido de que existen 2-celdas inversibles $id_X \Longrightarrow gf$, $fg \Longrightarrow id_Y$. Cuando estamos en la 2-categoría **Cat**, estas son precisamente las equivalencias de categorías consideradas en la definición 1.1.

Observación 1.12. La cuasi-inversa g está determinada salvo una 2-celda inversible.

Siempre pueden elegirse una tal g y 2-celdas inversibles $\alpha : id_X \Longrightarrow fg$ y $\beta : gf \Longrightarrow id_Y$ de forma tal que se verifiquen las *ecuaciones triangulares*:

$$\begin{tikzcd} & fgf \arrow[dr, "f\beta"] & \\ f \arrow[ur, "\alpha f"] \arrow[rr, equal] & & f \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} & gfg \arrow[dr, "g\alpha"] & \\ g \arrow[ur, "\beta g"] \arrow[rr, equal] & & g. \end{tikzcd}$$

Observación 1.13. Si $s : X \longrightarrow Y$ en una 2-categoría $\mathscr{C}$ es una equivalencia, entonces induce equivalencias en las categorías de morfismos:

Para cada objeto Z en $\mathscr{C}$, el funtor $s^* : \mathscr{C}[Y,Z] \longrightarrow \mathscr{C}[X,Z]$ dado por la precomposición $f \longmapsto fs$ es una equivalencia de categorías. En efecto, se tienen $t : Y \longrightarrow X$ y 2-celdas inversibles $\alpha : ts \Longrightarrow id_X$, $\beta : st \Longrightarrow id_Y$ que nos permiten definir isomorfismos naturales $\eta : Id_{\mathscr{C}[Y,Z]} \Longrightarrow (st)^* = t^*s^*$ y $\theta : Id_{\mathscr{C}[X,Z]} \Longrightarrow (ts)^* = s^*t^*$. Para cada f en $\mathscr{C}[Y,Z]$, tenemos una flecha $\eta_f := f\beta : fst \Longrightarrow f$ (una 2-celda en $\mathscr{C}$) que es un isomorfismo por ser una composición $Id_f * \beta$ de isomorfismos. Además, η es natural en f y esto es una consecuencia de la compatibilidad de las composiciones vertical y horizontal en $\mathscr{C}$. Análogamente, θ_g es un isomorfismo natural en $g \in Ob(\mathscr{C}[X,Z])$, y por lo tanto t^* es una cuasi-inversa para s^*.

Del mismo modo puede verse que $s_* : \mathscr{C}[Z,X] \longrightarrow \mathscr{C}[Z,Y]$ es una equivalencia de categorías.

Más aún, se tiene la siguiente

Proposición 1.14. *Dada $s : X \longrightarrow Y$ en una 2-categoría $\mathscr{C}$, entonces s es una equivalencia si y sólo si $s^* : \mathscr{C}[Y,Z] \longrightarrow \mathscr{C}[X,Z]$ es una equivalencia para todo Z en $\mathscr{C}$ si y sólo si $s_* : \mathscr{C}[Z,X] \longrightarrow \mathscr{C}[Z,Y]$ es una equivalencia para todo Z en $\mathscr{C}$.*

En una 3-categoría, una flecha $f : X \longrightarrow Y$ será una equivalencia si tiene una cuasi-inversa $g : Y \longrightarrow X$ en el sentido de que existen 2-celdas $id_X \Longrightarrow gf$, $fg \Longrightarrow id_Y$ que son equivalencias en las 2-categorías de flechas $Hom(X,X)$ y $Hom(Y,Y)$.

Notamos que 2-**Cat** es una 3-categoría. De esta manera, el concepto de equivalencia entre categorías (es decir, una equivalencia en **Cat**) se extiende a 2-categorías, usualmente con el nombre de *pseudoequivalencia* de 2-categorías:

Definiciones 1.15. Sean $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ 2-categorías, $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ 2-funtores.

1. Una transformación 2-natural $F \Longrightarrow G$ es una equivalencia si lo es en la 2-categoría de 2-funtores $Hom_s(\mathscr{C}, \mathscr{D})$.

2. Una transformación pseudonatural $F \Longrightarrow G$ es una equivalencia si lo es en la 2-categoría $Hom_p(\mathscr{C}, \mathscr{D})$.

Definición 1.16. Decimos que un 2-funtor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es una *pseudoequivalencia de 2-categorías* si existen $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ y tranformaciones pseudonaturales $\eta : Id_{\mathscr{C}} \Longrightarrow GF$, $\theta : FG \Longrightarrow Id_{\mathscr{D}}$ que son equivalencias en $Hom_p(\mathscr{C}, \mathscr{C})$ y en $Hom_p(\mathscr{D}, \mathscr{D})$, respectivamente.

El 2-funtor F será una pseudoequivalencia de 2-categorías en el sentido estricto cuando η y θ sean equivalencias en $Hom_s(\mathscr{C},\mathscr{C})$ y en $Hom_s(\mathscr{D},\mathscr{D})$, respectivamente.

Dada $\eta : F \Longrightarrow G$, una transformación pseudonatural entre 2-funtores $F, G \in Hom(\mathscr{C},\mathscr{D})$, tal que cada componente η_X es una equivalencia con cuasi-inversa θ_X en la 2-categoría $\mathscr{D}$, entonces es posible darle una estructura pseudonatural a la familia $\{\theta_X\}_X$ para definir así una cuasi-inversa θ de η en la 2-categoría $Hom_p(\mathscr{C},\mathscr{D})$. Este hecho es utilizado frecuentemente en la literatura pero no hemos podido encontrar una demostración del mismo, es por ello que aquí incluimos una.

Proposición 1.17. *Sea $\eta : F \Longrightarrow G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ una transformación pseudonatural entre 2-funtores. Entonces η es una equivalencia en $Hom_p(\mathscr{C},\mathscr{D})$ si y sólo si cada componente η_X es una equivalencia en la 2-categoría $\mathscr{D}$.*

Demostración. Si η es una equivalencia con cuasi-inversa θ, es claro que θ_X es una cuasi inversa para η_X, para cada X en $\mathscr{C}$.

Supongamos ahora que cada componente η_X es una equivalencia en $\mathscr{D}$ con cuasi-inversa θ_X, y sean $\alpha_X : \theta_X\eta_X \Rightarrow id_{FX}$, $\beta_X : \eta_X\theta_X \Rightarrow id_{GX}$ inversibles. Podemos tomar α y β satisfaciendo las identidades triangulares

$$\begin{tikzcd} & \theta\eta\theta \arrow[dr, Rightarrow, "\theta\beta"] & \\ \theta \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha^{-1}\theta"] \arrow[rr, equal] & & \theta \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} & \eta\theta\eta \arrow[dr, Rightarrow, "\alpha\eta"] & \\ \eta \arrow[ur, Rightarrow, "\beta^{-1}\eta"] \arrow[rr, equal] & & \eta. \end{tikzcd}$$

Queremos definir una transformación pseudonatural θ cuasi-inversa de η.

Dado que η es pseudonatural, para cada $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{C}$ existe una 2-celda inversible $\eta_f : Gf\eta_X \Longrightarrow \eta_Y Ff$ en $\mathscr{D}$

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \eta_f"] & GX \arrow[d, "Gf"] \arrow[l, dashed, bend right, "\theta_X"'] \\ FY \arrow[r, "\eta_Y"'] & GY. \arrow[l, dashed, bend left, "\theta_Y"] \end{tikzcd}$$

Definimos $\theta_f : Ff\theta_X \Longrightarrow \theta_Y Gf$ como la composición

$$Ff\theta_X \xRightarrow{\alpha_Y^{-1}Ff\theta_X} \theta_Y\eta_Y Ff\theta_X \xRightarrow{\theta_Y\eta_f^{-1}\theta_X} \theta_Y Gf\eta_X\theta_X \xRightarrow{\theta_Y Gg\beta_X} \theta_Y Gf.$$

Por ser una composición de isomorfismos,

$$\theta_f = (\theta_Y Gf\beta_X) \circ (\theta_Y\eta_f^{-1}\theta_X) \circ (\alpha_Y^{-1}Ff\theta_X)$$

también es un isomorfismo.

Teniendo en cuenta los axiomas de la definición de tranformación pseudonatural en 1.10, veamos que θ satisface cada uno de estos.

1) Se verifica $\theta_{id_X} = Id_{\theta_X}$. En efecto, como $\eta_{id_X} = Id_{\eta_X}$ y se cumplen las identidades triangulares para α y β, entonces

$$\begin{aligned}\theta_{id_X} &= (\theta_X id_{GX}\beta_X) \circ (\theta_X Id_{\eta_X}\theta_X) \circ (\alpha_X^{-1} Id_{FX}\theta_X)\\ &= (\theta_X\beta_X) \circ (\theta_X\eta_X\theta_X) \circ (\alpha_X^{-1}\theta_X)\\ &= (\theta_X\beta_X) \circ (\alpha_X^{-1}\theta_X) = Id_{\theta_X}.\end{aligned}$$

2) Dadas $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, se tiene el segundo axioma de pseudonaturalidad $(\theta_g Gf) \circ (Fg\theta_f) = \theta_{gf}$:

Como η es pseudonatural, entonces $\eta_{gf}^{-1} = (Gg\eta_f^{-1}) \circ (\eta_g^{-1}Ff)$ y escribimos

$$\begin{aligned}\theta_{gf} &= (\theta_Z GgGf\beta_X) \circ (\theta_Z\eta_{gf}^{-1}\theta_X) \circ (\alpha_Z^{-1}FgFf\theta_X)\\ &= (\theta_Z GgGf\beta_X) \circ (\theta_Z Gg\eta_f^{-1}\theta_X) \circ (\theta_Z\eta_g^{-1}Ff\theta_X) \circ (\alpha_Z^{-1}FgFf\theta_X)\end{aligned} \tag{1.1}$$

y

$$
\begin{aligned}
(\theta_g Gf) \circ (Fg\theta_f) = {} & (\theta_Z Gg\beta_Y Gf) \circ [\ (\theta_Z \eta_g^{-1} \theta_Y Gf) \circ (\alpha_Z^{-1} Fg\theta_Y Gf)\ ] \circ \\
& [\ (Fg\theta_Y Gf\beta_X) \circ (Fg\theta_Y \eta_f^{-1}\theta_X)\ ] \circ (Fg\alpha_Y^{-1} Ff\theta_X) \\
\\
= {} & (\theta_Z Gg\beta_Y Gf) \circ [\ (\theta_Z \eta_g^{-1}) \circ (\alpha_Z^{-1} Fg)\ ] \theta_Y Gf \circ \\
& Fg\theta_Y [\ (Gf\beta_X) \circ (\eta_f^{-1}\theta_X)\ ] \circ (Fg\alpha_Y^{-1} Ff\theta_X) \\
\\
= {} & (\theta_Z Gg\beta_Y Gf) \circ [\ (\theta_Z \eta_g^{-1}) \circ (\alpha_Z^{-1} Fg)\ ] \theta_Y [\ (Gf\beta_X) \circ (\eta_f^{-1}\theta_X)\ ] \\
& \circ (Fg\alpha_Y^{-1} Ff\theta_X).
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

El diagrama que sigue representa el lado derecho de la ecuación (1.2).

$$
\begin{tikzcd}
GX \arrow[rr, "Ff\theta_X" description] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow \alpha_Y^{-1}Ff\theta_X"] & & FY \arrow[r, "Fg" description] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Id"] & FZ \\
GX \arrow[rr, "\theta_Y\eta_Y Ff\theta_X" description] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow Id"] & & FY \arrow[r, "Fg" description] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & FZ \\
GX \arrow[r, "\eta_Y Ff\theta_X" description] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow (Gf\beta_X)\circ(\eta_f^{-1}\theta_X)"] & GY \arrow[r, "\theta_Y" description] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Id"] & FY \arrow[r, "Fg" description] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow (\theta_Z\eta_g^{-1})\circ(\alpha_Z^{-1}Fg)"] & FZ \\
GX \arrow[r, "Gf" description] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Id"] & GY \arrow[r, "\theta_Y" description] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow Id"] & FY \arrow[r, "\theta_Z Gg\eta_Y" description] & FZ \\
GX \arrow[r, "Gf" description] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Id"] & GY \arrow[rr, "\theta_Z Gg\eta_Y\theta_Y" description] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow \theta_Z Gg\beta_Y"] & & FZ \\
GX \arrow[r, "Gf" description] & GY \arrow[rr, "\theta_Z Gg" description] & & FZ
\end{tikzcd}
$$

Como consecuencia de la compatibilidad entre las composiciones horizontal y vertical, puede reescribirse de la siguiente manera:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
GX \arrow[rr, "Ff\theta_X"] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow Id"] & FY \arrow[rr, "Fg"] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow (\theta_Z \eta_g^{-1}) \circ (\alpha_Z^{-1} Fg)"] & FZ \\
GX \arrow[rr, "Ff\theta_X"] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow \alpha_Y^{-1} Ff\theta_X"] & FY \arrow[rr, "\theta_Z Gg \eta_Y"] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow Id"] & FZ \\
GX \arrow[rr, "\theta_Y \eta_Y Ff\theta_X"] & {} & FY \arrow[rr, "\theta_Z Gg \eta_Y"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow Id"] & {} & FZ \\
GX \arrow[rr, "\eta_Y Ff\theta_X"] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow Id"] & GY \arrow[rr, "\theta_Z Gg \eta_Y \theta_Y"] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow \theta_Z Gg \beta_Y"] & FZ \\
GX \arrow[rr, "\eta_Y Ff\theta_X"] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow (Gf\beta_X) \circ (\eta_f^{-1} \theta_X)"] & GY \arrow[rr, "\theta_Z Gg"] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow Id"] & FZ \\
GX \arrow[rr, "Gf"] & {} & GY \arrow[rr, "\theta_Z Gg"] & {} & FZ.
\end{tikzcd}
$$

Componiendo las 2-celdas en el diagrama anterior, horizontalmente y luego verticalmente, y usando las identidades triangulares ya mencionadas, nos queda la expresión de la ecuación (1.1).

3) Dada $\phi : f \Longrightarrow g : X \longrightarrow Y$ una 2-celda en $\mathscr{C}$, veamos que

$$\theta_g \circ G(\phi)\eta_X = \eta_Y F(\phi) \circ \eta_f$$

.

Tenemos

$$\theta_g \circ F(\phi)\theta_X = [(\theta_Y Gg\beta_Y) \circ (\theta_Y \eta_g^{-1} \theta_X)] \circ [(\alpha_Y^{-1} Fg\theta_X) \circ (F(\phi)\theta_X)]$$

$$= [(\theta_Y Gg\beta_Y) \circ (\theta_Y \eta_g^{-1} \theta_X)] \circ [(\theta_Y \eta_Y F(\phi)\theta_X) \circ (\alpha_Y^{-1} Ff\theta_X)] \tag{1.3}$$

y

$$\theta_Y G(\phi) \circ \theta_f = (\theta_Y Gg\beta_X) \circ (\theta_Y G(\phi)\eta_X \theta_X) \circ (\theta_Y \eta_f^{-1} \theta_X) \circ (\alpha_Y^{-1} Ff\theta_X)$$

$$= (\theta_Y Gg\beta_X) \circ \theta_Y[(G(\phi)\eta_X) \circ (\eta_f^{-1})]\theta_X \circ (\alpha_Y^{-1} Ff\theta_X).$$

Como el axioma se verifica para η, entonces

$$\eta_g^{-1} \circ \eta_Y F(\phi) = G(\phi)\eta_X \circ \eta_f^{-1}.$$

Reemplazando esta expresión en (1.3) obtenemos la igualdad que queriamos probar.

Lo que queda de la demostración consiste en exhibir modificaciones inversibles $\mu : \eta \circ \theta \longrightarrow Id_G : G \Longrightarrow G$ y $\lambda : \theta \circ \eta \longrightarrow Id_F : F \Longrightarrow F$.

Definimos $\mu_X = \beta_X : \eta_X \theta_X \Longrightarrow id_{GX}$, para cada X. Dada $f : X \longrightarrow Y$, queremos ver que

$$(Id_G)_g \circ (Gf\mu_X) = \mu_Y Gf \circ (\eta \circ \theta)_f.$$

Como $(Id_G)_g = g$, $\mu_Y = \beta_Y$, $\mu_X = \beta_X$ y $(\eta \circ \theta)_f = (\eta_Y \theta_f) \circ (eta_f \theta_X)$, entonces la igualdad requerida es

$$(Gf\beta_X) = \beta_Y Gf \circ (\eta_Y \theta_f) \circ (\eta_f \theta_X).$$

Por definición de θ_f y usando la ecuación $\eta_Y \alpha_Y^{-1} Ff = \beta_Y^{-1} \eta_Y Ff$ se tiene

$$\begin{aligned}
(\beta_Y Gf) \circ (\eta_Y \theta_f) \circ (\eta_f \theta_X) &= \eta_Y [(\theta_Y Gf\beta_X) \circ (\theta_Y \eta_f^{-1} \theta_X) \circ (\alpha_Y^{-1} Ff\theta_X)] \circ (\eta_f \theta_X) \\
&= (\beta_Y Gf) \circ (\eta_Y \theta_Y Gf\beta_X) \circ (\eta_Y \theta_Y \eta_f^{-1} \theta_X) \\
&\qquad \circ (\eta_Y \alpha_Y^{-1} Ff\theta_X) \circ (\eta_f \theta_X) \\
&= (\beta_Y Gf) \circ (\eta_Y \theta_Y Gf\beta_X) \circ (\beta_Y^{-1} Gf\eta_X \theta_X) \\
&= (\beta_Y Gf) \circ (\beta_Y^{-1} Gf\beta_X) \\
&= Gf\beta_X.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, μ es una 2-celda inversible en $Hom_p(F, F)$.

Definiendo $\lambda_X = \alpha_X$ para cada X, podemos demostrar con una cuenta similar que λ es una modificación inversible.

□

Observación 1.18. La proposición anterior no vale para transformaciones 2-naturales. Es decir, una transformación 2-natural que es una equivalencia punto a punto no necesariamente es una equivalencia en $Hom_s(\mathscr{C}, \mathscr{D})$.

Definición 1.19. Sean $\mathscr{C}$ una 2-categoría y Σ una subclase de morfismos. La *2-localización* de $\mathscr{C}$ con respecto a Σ es una 2-categoría $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ junto con un 2-funtor $q : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ tales que

1. $q(s)$ es una equivalencia para todo $s \in \Sigma$;
2. para toda 2-categoría $\mathscr{D}$, q induce una pseudoequivalencia de 2-categorías dada por la precomposición

$$q^* : Hom_p(\mathscr{C}[\Sigma^{-1}], \mathscr{D}) \longrightarrow Hom_{p+}(\mathscr{C}, \mathcal{D}),$$

   donde $Hom_{p+}(\mathscr{C}, \mathcal{D})$ consiste de los 2-funtores que mandan los elementos de Σ en equivalencias.

Observación 1.20. La 2-categoría $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ queda caracterizada salvo pseudoequivalencias.

Observación 1.21. La definición de 2-localización que hemos dado es una adaptación al contexto de 2-categorías de la definición de localización de bicategorias (ver [10]).

Decimos que el 2-funtor q es la 2-localización en el sentido *estricto* si el 2-funtor inducido q^* es una pseudoequivalencia de 2-categorías en el sentido estricto, de acuerdo a la definición 1.15.

2. Categorías de Modelos

Las categorías de modelos fueron introducidas por Quillen ([11]) como un escenario en el cual es posible desarrollar una teoría de homotopía abstrayendo ciertas propiedades que encontramos en el contexto particular de espacios topológicos y que son comunes a muchos ejemplos conocidos. Una categoría de modelos consiste de tres clases distinguidas de flechas $\mathcal{F}$ (fibraciones), $co\mathcal{F}$ (cofibraciones) y $\mathcal{W}$ (equivalencias débiles) cumpliendo ciertos axiomas que codifican sus propiedades. Si bien en la teoría de homotopía asociada a una categoría de modelos lo que se quiere es invertir formalmente los elementos de la clase $\mathcal{W}$, tanto fibraciones como cofibraciones son esenciales a la hora de hacer posible una teoría que va más allá de una simple localización.

La definición que usaremos nosotros es más fuerte que la definicion original y es la que Quillen introduce con el nombre de *categoría de modelos cerrada*, en la que cualesquiera dos de las tres clases distinguidas de morfismos determinan la tercera.

En general, no es fácil demostrar que una categoría admite una estructura de modelos, por lo que sólo mencionaremos algunos de los ejemplos más usuales, haciendo especial énfasis en la categoría $\mathcal{T}op$ de espacios topológicos.

2.1. Axiomas y definiciones

Definición 2.1. Sea $\mathscr{X}$ una categoría. Decimos que un morfismo f en $\mathscr{X}$ tiene la *propiedad de levantamiento a izquierda* con respecto a un morfismo g si todo problema de la forma

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h"] & \cdot \end{tikzcd}$$

tiene una solución h, no necesariamente única, que hace conmutar ambos triángulos. Equivalentemente, decimos que g tiene la *propiedad de levantamiento a derecha* con respecto a f.

Definición 2.2. Dadas $f : X \longrightarrow Y$, $g : X' \longrightarrow Y'$ en una categoría $\mathscr{X}$, entonces f *es retracto de* g si existe un diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "id_X"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "id_Y"'] & Y' \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}
$$

La siguiente es una definición tratada por Goerss y Jardine en [4], e introducida por Quillen ([11]) de manera equivalente.

Definición 2.3. Una *categoría de modelos* es una categoría $\mathscr{C}$ provista de tres clases de morfismos $\mathcal{F}$, $co\mathcal{F}$ y $\mathcal{W}$, que llamamos, respectivamente, Fibraciones, Cofibraciones y Equivalencias Débiles, satisfaciendo los siguientes axiomas.

M1 $\mathscr{C}$ tiene límites finitos y colímites finitos.

M2 Si una cofibración es además una equivalencia débil, entonces tiene la propiedad de levantamiento a izquierda con respecto a cualquier fibración.

Si una fibración es además una equivalencia débil, entonces tiene la propiedad de levantamiento a derecha con respecto a cualquier cofibración.

M3 Si f es retracto de g y g es una fibración, una cofibración o una equivalencia débil, entonces f también lo es. Además, las tres clases son cerradas por composición y contienen todas las identidades.

M4 Todo morfismo f en $\mathscr{C}$ puede ser factorizado de dos maneras:

(i) $f = pi$, donde p es una fibración e i es una cofibración y también es una equivalencia débil;

(ii) $f = pi$, donde p es una fibración y también es una equivalencia débil e i es una cofibración.

M5 Sean $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ en $\mathscr{C}$. Si dos de los tres morfismos f, g y gf son equivalencias débiles, entonces los tres lo son.

2.4 Dualidad. Un objeto $X \in \mathscr{C}$ pensado en la categoría dual formal se denota $\overline{X} \in \mathscr{C}^{op}$. Los morfismos no cambian la notación y se tiene que una flecha $\overline{X} \xrightarrow{f} \overline{Y}$ en $\mathscr{C}^{op}$ es una flecha $Y \xrightarrow{f} X$ en $\mathscr{C}$.

Los axiomas de la definición 2.3 son auto-duales. Dada una categoría de modelos $\mathscr{C}$, la categoría opuesta también admite una estructura de modelos, donde un morfismo $f : \overline{Y} \longrightarrow \overline{X}$ en $\mathscr{C}^{op}$ es

1. una *equivalencia débil* si $f : X \longrightarrow Y$ lo es en $\mathscr{C}$.
2. una *cofibración* si f es una fibración en $\mathscr{C}$.
3. una *fibración* si f es una cofibración en $\mathscr{C}$.

Observamos que, por el axioma M1, en una categoría de modelos siempre disponemos de un objeto inicial y de un objeto terminal, denotados 0 y 1, respectivamente.

Definición 2.5. Un objeto X en una categoría de modelos $\mathscr{C}$ es *fibrante* si $X \longrightarrow 1$ es una fibración, y es *cofibrante* si $0 \longrightarrow X$ es una cofibración.

Definición 2.6. Una (co)fibración es *trivial* si además es una equivalencia débil. Usaremos la siguiente notación:

(i) $\cdot \xrightarrow{\circ} \cdot$ (equivalencias débiles)

(ii) $\cdot \twoheadrightarrow \cdot$ (fibraciones) y $\cdot \overset{\circ}{\twoheadrightarrow} \cdot$ (fibraciones triviales)

(iii) $\cdot \rightarrowtail \cdot$ (cofibraciones) y $\cdot \overset{\circ}{\rightarrowtail} \cdot$ (cofibraciones triviales)

2.2. Ejemplos

2.2.1. Espacios Topológicos

Definición 2.7. Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos es una *equivalencia homotópica débil* si induce un isomorfismo de grupos de homotopía $f_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$ para todo $n \geq 0$, para todo $x_0 \in X$.

Definición 2.8. Una función continua $p : X \longrightarrow Y$ es una *fibración de Serre* si tiene la propiedad de levantamiento a derecha con respecto a las inclusiones $D^n \rightarrowtail D^n \times [0, 1]$, $n \geq 0$.

$$\begin{tikzcd}
D^n \arrow[r] \arrow[d, tail] & X \arrow[d, "p"] \\
D^n \times [0,1] \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y
\end{tikzcd}$$

La categoría $\mathcal{T}op$ de espacios topológicos admite una estructura de categoría de modelos, donde las equivalencias débiles $\mathcal{W}$ son las equivalencias homotópicas débiles, las fibraciones $\mathcal{F}$ son las fibraciones de Serre y las cofibraciones $\mathcal{C}o\mathcal{F}$ son aquellas funciones continuas con la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de toda función en $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$.

Algunas caracterizaciones de las clases $\mathcal{F}$ y $\mathcal{C}o\mathcal{F}$ resultan útiles a la hora de demostrar los axiomas:

1. las fibraciones triviales son aquellas funciones continuas que tienen la propiedad de levantamiento a derecha respecto de las inclusiones $S^{n-1} \rightarrowtail D^n$, $n \geq 0$;

2. una función continua es una cofibración trivial si y sólo si es una cofibración y un retracto por deformación fuerte.

Con estas caracterizaciones se puede ver que cualquier espacio topológico es un objeto fibrante y la clase de objetos cofibrantes incluye a la familia de CW-complejos.

La categoría $\mathcal{T}op$ tiene todos los límites y colímites pequeños. Además, por la definición de equivalencia débil, es evidente que el axioma M5 se verifica. En cuanto a M3, por funtorialidad de π_n y la conmutatividad del diagrama de la definición 2.2 puede verse que la clase $\mathcal{W}$ es cerrada por retractos. Tanto para $\mathcal{F}$ como para $co\mathcal{F}$ el argumento es muy similar y está basado en el siguiente resultado categórico (junto con su versión dual):

Si i es retracto de j y j tiene la propiedad de levantamiento a derecha con respecto a f, entonces i tiene la propiedad de levantamiento a derecha con respecto a f.

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] \arrow[d, "i"'] \arrow[rr, bend left, "id"] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\
\cdot \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "id"'] & \cdot \arrow[r] \arrow[urr, dashed] & \cdot \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \cdot
\end{tikzcd}$$

En relación al axioma de levantamiento M2, sólo hay que ver la segunda parte, ya que la primera es inmediata de la definición de cofibración. Dada una función $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, consideramos una factorización $f = pi$ donde p es una fibración e i es una cofibración trivial y, luego, las tres funciones están en $\mathcal{W}$. Como f es cofibración y p una fibración trivial, existe un levantamiento d en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "p"] \\ \cdot \arrow[r, equal] \arrow[ur, dashed, "d"] & \cdot \end{tikzcd}$$

y, por lo tanto, f es retracto de i. Dado que la clase de morfismos con la propiedad de levantamiento es cerrada por retractos, f tiene dicha propiedad.

Notamos que, partiendo de las caracterizaciones de fibraciones trivales y cofibraciones triviales que mencionamos antes, estas demostraciones de los axiomas sólo usan argumentos puramente categóricos.

Resta la mayor dificultad, que está en probar la existencia de las factorizaciones de M4, y para ello se emplean ciertas propiedades de los espacios topológicos y las funciones continuas. La demostración de este axioma suele basarse en un argumento introducido por Quillen en [11] con el nombre *"small object argument"*, que es una manera de producir factorizaciones cuando las fibraciones están caracterizadas por tener la propiedad de levantamiento a derecha respecto de cierto conjunto de morfismos.

Podemos encontrar estas demostraciones con todo detalle en [2] y [7].

2.2.2. Complejos de cadenas de módulos sobre un anillo

Sean A un anillo con unidad y Mod_A la categoría de A-módulos a izquierda.

Se define la categoría Ch_A de complejos de cadenas (graduados positivamente) sobre Mod_A como aquella en la que cada objeto $M_\bullet$ consiste de una familia $\{C_k\}_{k \geq 0}$ de A-módulos junto con morfismos de borde $\partial : M_k \longrightarrow M_{k-1}$ para todo $k \geq 1$ tales que $\partial^2 = 0$; y una flecha $f : M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ en Ch_A es una colección de morfismos de A-módulos $f_k : M_k \longrightarrow N_k$ tales que $f_{k-1}\partial = \partial f_k$.

La categoría Ch_A resulta una categoría de modelos, donde un morfismo $f : M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ es

1. una *equivalencia débil* si f induce isomorfismos $f_k : H_k(M) \longrightarrow H_k(N)$ para todo $k \geq 0$, siendo $H_k(\cdot)$ el k- ésimo grupo de homología;

2. una *cofibración* si f_k es un monomorfismo y además su co-núcleo es un A-módulo proyectivo, para cada $k \geq 0$;

3. una *fibración* si f_k es un epimorfismo, $k \geq 0$.

Como en el caso de espacios topológicos con los funtores π_n, los axiomas M3 y M5 son una consecuencia de la funtorialidad de la homología $H_n : Ch_A \longrightarrow Mod_A$. La categoría Ch_A tiene todos los límites y colímites pequeños, que se calculan gradualmente. En cuanto a los axiomas de factorización y levantamiento de morfismos, estos se obtienen de algunas construcciones que requieren de las siguientes caracterizaciones:

1. Sea $f : M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ un morfismo en Ch_A.

   Consideramos el pullback
   $$\begin{tikzcd} Z_{n-1}(M) \underset{Z_{n-1}(N)}{\times} N_n \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & N_n, \arrow[d] \\ Z_{n-1}(M) \arrow[r] & Z_{n-1}(N) \end{tikzcd}$$
   donde $Z_n(\cdot)$ denota el n-ésimo ciclo del complejo.

   Son equivalentes:

   i. f es una fibración trivial;

   ii. el morfismo inducido $M_n \longrightarrow Z_{n-1}(M) \underset{Z_{n-1}(N)}{\times} N_n$ es un epimorfismo para todo $n \geq 0$.

2. Para cada $n > 0$, denotamos $D^n_\bullet$ al complejo tal que $D^n_n = D^n_{n-1} = A$, $D^n_k = 0$ para todo $k \neq n, n-1$ y $\partial : D^n_n \longrightarrow D^n_{n-1}$ es la identidad.

   Un morfismo $f : M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ es una fibración si y sólo si tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de $0 \longrightarrow D^n_\bullet$ para todo $n > 0$:

   $$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & M_k \arrow[d, "f_k"] \\ D^n_k \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & M_k. \end{tikzcd}$$

Las demostraciones de estas caracterizaciones y de los axiomas se encuentran en [12]. En otra versión [2], contamos con una demostración del axioma de factorización basada en el argumento del objeto pequeño.

2.2.3. Conjuntos simpliciales

Sea $\mathcal{SS}et$ la categoría de conjuntos simpliciales $X : \Delta^{op} \longrightarrow Set$ y transformaciones naturales. Denotamos $d_i : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ (para cada n) a la *i-ésima cara* de X y $s_i : X_n \longrightarrow X_{n+1}$ a la *i-ésima degeneración* de X. Un n-simplex de X es *no degenerado* si no está en la imagen de ningún s_i.

Recordemos algunos ejemplos de conjuntos simpliciales:

1. Para $n \in \mathbb{N}$, el funtor representable $\Delta^n := Hom_\Delta(-, [n]) : \Delta^{op} \longrightarrow Set$ es el n- *símplex estándar*. Por el Lema de Yoneda ([8] Ch.III §2), existe una biyección $Hom_{SSet}(\Delta^n, X) \simeq X_n$, natural en X.

   Si consideramos la categoría $\Delta \downarrow X$ (la categoría de "elementos" de X), donde los objetos son las flechas $\Delta^n \longrightarrow X$ ($n \geq 0$), entonces podemos escribir a X como un colímite de funtores representables [1]:
   $X \simeq \varinjlim_{\Delta^n \longrightarrow X} \Delta^n$

2. El conjunto simplicial $\partial\Delta^n$ es el subconjunto de Δ^n formado por todos sus símplices menos el único n-símplex no degenerado. Este es el *borde* de Δ^n.

3. El funtor $\Lambda^n_k : \Delta^{op} \longrightarrow Set$ es el conjunto simplicial formado por la unión de todas las caras de Δ^n menos la k-ésima.

Uno de los conceptos importantes a considerar en esta categoría es el de la *realización geométrica*, que nos permite interpretar a los conjuntos simpliciales (que se obtienen "pegando" símplices a través de sus bordes) como CW-complejos (que se obtienen pegando celdas a través de sus bordes), y viceversa. Se define la realización geométrica de Δ^n como la cápsula convexa de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$ dotada de la topología subespacio (es decir, es el n-símplex topológico estándar). Esta definición se extiende a cualquier conjunto simplicial X tomando el colímite $|X| := \varinjlim_{\Delta^n \longrightarrow X} |\Delta^n|$. De hecho, $|X|$ es un CW-complejo con una n-celda por cada n-símplex no degenerado de X (ver [9]).

[1]Este es un caso particular de la caracterización de todo funtor contravariante a valores en Set ("prehaz") como colímite de funtores representables (ver [8] Ch.III §7).

La realización geométrica $|\cdot| : \mathcal{SS}et \longrightarrow \mathcal{T}op$ es funtorial y tiene un adjunto a izquierda, que es el *funtor singular* $S : X \in \mathcal{T}op \longmapsto S(X) \in \mathcal{SS}et$ definido como $S(X)_n := Hom(\Delta^n, X)$, $n \geq 0$.

La categoría $\mathcal{SS}et$ es una categoría de modelos, donde $f : X \longrightarrow Y$ es

1. una *equivalencia débil* si su realización geométrica $|f| : |X| \longrightarrow |Y|$ es una equivalencia débil de espacios topológicos;

2. una *fibración* si tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de las inclusiones $\Lambda^n_k \longrightarrow \Delta^n$, para todo $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq n$ (fibración de Kan);

3. una *cofibración* si es un monomorfismo (es decir, $f_n : X_n \longrightarrow Y_n$ es una función inyectiva para todo n).

Los objetos fibrantes en $\mathcal{SS}et$ son los complejos de Kan y cualquier objeto es cofibrante.

Observación 2.9. En $\mathcal{SS}et$, así como en $\mathcal{T}op$, las fibraciones triviales son aquellos morfismos con la propiedad de levantamiento a derecha respecto a las inclusiones $\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$, $n \geq 1$,

$$\begin{tikzcd} \partial\Delta^n \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y. \end{tikzcd}$$

Como consecuencia de la adjunción $S \dashv |\cdot|$, una flecha $p : E \longrightarrow B$ en $\mathcal{T}op$ es una fibración trivial si y sólo si $S(p)$ lo es en $\mathcal{SS}et$. En efecto, existe una correspondencia entre los diagramas que son de la forma

$$\begin{tikzcd} {|\partial\Delta^n|} \arrow[r] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ {|\Delta^n|} \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \partial\Delta^n \arrow[r] \arrow[d, hook] & S(E) \arrow[d, "S(p)"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & S(B) \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{T}op$ y $\mathcal{SS}et$, respectivamente.

2.2.4. Categorías pequeñas (Estructura de modelos de Thomason)

La categoría **Cat** de categorías pequeñas puede verse como una categoría de modelos de dos formas diferentes. Una de ellas es la estructura canónica, donde las equivalencias débiles son las equivalencias de categorías. La otra es la estructura de modelos de Thomason, en la que un morfismo F en **Cat** es una equivalencia débil si y sólo si tomando el nervio obtenemos una equivalencia débil NF en $\mathcal{SS}et$.

Para explicitar un poco más la estructura de Thomason necesitamos algunas definiciones previas:

Dada una categoría pequeña $\mathcal{C}$, definimos $N(\mathscr{C})$, el *nervio de* $\mathscr{C}$, como el conjunto simplicial cuyos vértices son los objetos de $\mathscr{C}$ y, para $n \geq 1$, los n-símplices son las n-tuplas de morfismos componibles en $\mathscr{C}$. La i-ésima cara $d_i : N(\mathscr{C})_n \longrightarrow N(\mathscr{C})_{n-1}$ es la función dada por

$$(f_1, ..., f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, ..., f_n) \mapsto (f_1, ..., f_{i-1}, f_{i+1}, ..., f_n),$$

mientras que la i-ésima degeneración $s_i : N(\mathscr{C})_n \longrightarrow N(\mathscr{C})_{n+1}$ consiste en insertar la flecha identidad correspondiente en el lugar i-ésimo de cada tupla

$$(f_1, ..., f_i, f_{i+1}, ..., f_n) \mapsto (f_1, ..., f_i, id, f_{i+1}, ..., f_n).$$

Por ejemplo, tomando la categoría $\mathscr{C}$ con objetos x, y, z y dos morfismos componibles $f : x \to y$, $g : y \to z$, entonces $N(\mathscr{C}) = \Delta^2$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "gf"] & y \arrow[r, "g"] & z \end{tikzcd} \xrightarrow{\qquad N \qquad} \begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "gf"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "(f,g)"] & & z \end{tikzcd}$$

Más generalmente, pensando al conjunto ordenado $[n] = \{0, 1, ..., n\}$ como una categoría, se tiene $N([n]) = \Delta^n$.

Dada una flecha $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ en **Cat**, $N(F) : N(\mathscr{C}) \longrightarrow N(\mathscr{D})$ es la transformación natural cuyas componentes $N(F)_n : N(\mathscr{C})_n \longrightarrow N(\mathscr{D})_n$ son $(f_0, ..., f_{n-1}) \longmapsto (Ff_0, ..., Ff_{n-1})$. Obtenemos de esta manera una asignación funtorial $N : \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathcal{SS}et$.

El nervio N tiene un adjunto a izquierda, denotado $c : \mathcal{SS}et \longrightarrow \mathbf{Cat}$. Para cada conjunto simplicial X, $c(X)$ es una categoría tomando como objetos a los vértices de X, y los morfismos son generados libremente por los

1-símplices de X y cocientando por las relaciones $d_1x = d_0xd_2x$ para todo 2-símplex x ([3] Ch.II §4).

La *subdivisión* del n-símplex estándar es un conjunto simplicial $Sd\Delta^n$ que se define como el nervio aplicado al poset de subconjuntos no vacíos de $[n]$. Así, por ejemplo, $Sd\Delta^2$ está dado por los siguientes vértices, 1-símplices no degenerados y 2-símplices no degenerados:

$$\begin{tikzcd}
 & & \{1\} \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[dr] & & \\
 & \{0,1\} \arrow[dr] & & \{1,2\} \arrow[dl] & \\
 & & \{0,1,2\} & & \\
\{0\} \arrow[uur] \arrow[urr] \arrow[rr] & & \{0,2\} \arrow[u] & & \{2\} \arrow[ll] \arrow[ull] \arrow[uul]
\end{tikzcd}$$

Esta definición se extiende a cualquier conjunto simplicial X tomando el colímite $SdX := \underset{\Delta^n \longrightarrow X}{\underrightarrow{colim}}\ Sd\Delta^n$. La asignación $Sd : \mathcal{SS}et \longrightarrow \mathcal{SS}et$ también es funtorial y tiene un adjunto a derecha $E\mathrm{x}(X)_n := Hom_{\mathcal{SS}et}(Sd\Delta^n, X)$. Luego, se tiene una adjunción $(Sd)^2 \dashv (E\mathrm{x})^2$, donde $(Sd)^2(X) = Sd(Sd(X))$ y $(E\mathrm{x})^2(X) = E\mathrm{x}(E\mathrm{x}(X))$.

Esto induce un par de funtores adjuntos entre la categoría $\mathcal{SS}et$ y la categoría **Cat** dados por las composiciones $c(Sd)^2$ y $(E\mathrm{x})^2N$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{SS}et \arrow[r, bend left, "(Sd)^2"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{SS}et \arrow[l, bend left, "(\mathrm{Ex})^2"] \arrow[r, bend left, "c"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Cat}. \arrow[l, bend left, "N"]
\end{tikzcd}$$

Un morfismo F en **Cat** es

1. una equivalencia débil si $(E\mathrm{x})^2NF$ es una equivalencia débil en $\mathcal{SS}et$,
2. una fibración si $(E\mathrm{x})^2NF$ es una fibración en $\mathcal{SS}et$,
3. una cofibración si tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de las fibraciones triviales.

La categoría **Cat** es una categoría de modelos con $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$ y $co\mathcal{F}$ como acabamos de definir. Thomason ([13]) demuestra que, efectivamente, se verifican los axiomas de categorías de modelos, y toda la dificultad se concentra en M2 (la parte no trivial de M2 en este caso) y en M4.

Con esta estructura se tiene que

$$F \text{ es una equivalencia débil en } \mathbf{Cat} \text{ si y sólo si } NF \text{ lo es en } \mathcal{SS}et,$$

y puede verse que el nervio N induce una equivalencia entre las categorías homotópicas de Quillen $\mathbf{Ho}(\mathbf{Cat})$ y $\mathbf{Ho}(\mathcal{SS}et)$.

Por otro lado, los funtores $\mathbf{Cat} \underset{c(Sd)^2}{\overset{(Ex)^2N}{\rightleftarrows}} \mathcal{SS}et$ satisfacen las hipótesis del teorema de equivalencia entre teorías de homotopía establecido por Quillen ([11], Ch.I §4.) y, luego, este par de funtores adjuntos también induce una equivalencia entre la clásica localización de $\mathcal{SS}et$ y la localización de **Cat** con respecto a las equivalencias débiles.

2.3. Determinación

En una categoría $\mathscr{C}$ la estructura de modelos queda determinada por dos de las tres clases distinguidas $\mathcal{F}$, $co\mathcal{F}$, $\mathcal{W}$. Esto será una consecuencia de los siguientes resultados.

Lema 2.10. *Si $f = hg$ es un morfismo en una categoría $\mathscr{X}$ tal que f tiene la propiedad de levantamiento a izquierda con respecto a h, entonces f es retracto de g. Dualmente, si f tiene la propiedad de levantamiento a derecha con respecto a g, entonces f es retracto de h.*

Demostración. Si escribimos $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Z$ y $h : Z \longrightarrow Y$, como f tiene la propiedad de levantamiento con respecto a h y $f = hg$, existe un morfismo l que hace conmutar ambos triangulos en el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, equal] \arrow[ur, dashed, "l"] & Y. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "l"'] & Z \arrow[r, "h"'] & Y,
\end{tikzcd}$$

donde $hl = id_Y$, y luego f es retracto de g.

Por dualidad, f es retracto de h si tiene la propiedad de levantamiento con respecto a g.

□

Proposición 2.11. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría de modelos.*

(i) Un morfismo en $\mathscr{C}$ es una cofibración (cofibración trivial) si y sólo si tiene la propiedad de levantamiento a izquierda con respecto a toda fibración trivial (fibración).

(ii) Un morfismo en $\mathscr{C}$ es una fibración (fibración trivial) si y sólo si tiene la propiedad de levantamiento a derecha con respecto a toda cofibración trivial (cofibración).

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{C}$ con la propiedad de levantamiento a izquierda respecto a la clase $\mathcal{F}$ y sea $f = pi$ una factorización, con i una cofibración trivial y p una fibración. Por el lema previo, f es retracto de i. Dado que las tres clases son cerradas por retractos, f es también una cofibración trivial. Por otro lado, el axioma M2 garantiza que toda cofibración trivial tiene dicha propiedad de levantamiento.

Como para el resto de los casos el argumento es muy similiar, podemos concluir la demostración.

□

Observación 2.12. La proposición anterior nos dice que la clase $\mathcal{F}$ queda determinada por $(co\mathcal{F}, \mathcal{W})$ y la clase $co\mathcal{F}$ está determinada por $(\mathcal{F}, \mathcal{W})$.

Además, un morfismo f es una equivalencia débil si y sólo si admite una factorización $f = pi$, donde p es una fibración trivial e i es una cofibración trivial: la implicación $(\Rightarrow)$ se debe a los axiomas M4 y M5, mientras que la recíproca es evidente ya que la clase $\mathcal{W}$ es cerrada por composición.

Proposición 2.13. *Si $\mathscr{C}$ es una categoría de modelos, entonces las clase de cofibraciones y de cofibraciones triviales son ambas estables por pushouts. Las fibraciones y las fibraciones triviales son clases estables por pullbacks.*

Demostración. Nuevamente, la segunda afirmación del enunciado se obtendrá de la primera por un argumento de dualidad.

Sean $i : X \longrightarrow Y$ una cofibración y $f : X \longrightarrow Z$ cualquier morfismo en $\mathscr{C}$. Consideramos el pushout de i y f

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & Z \arrow[d, "j"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & W \end{tikzcd} ,$$

y queremos ver que $j \in \mathcal{C}o\mathcal{F}$. Por la proposición anterior, es equivalente ver que j tiene la propiedad de levantamiento a izquierda con respecto a toda fibración trivial. Sea, entonces, $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, junto con un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "j"'] & X' \arrow[d, "p"] \\ W \arrow[r, "g'"'] & Y' \end{tikzcd} .$$

Como i tiene dicha propiedad de levantamiento, existe un morfismo diagonal $d : Y \longrightarrow Y'$ haciendo conmutar un nuevo diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Z \arrow[r, "f'"] & X' \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "g"'] \arrow[urr, dashed, "d"] & W \arrow[r, "g'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

De la propiedad universal del pushout se obtiene una flecha $h : W \longrightarrow X'$ tal que $hg = d$ y $hp = f'$. Además, de la unicidad del morfismo que sale de W como consecuencia de la misma propiedad universal se deduce que $ph = g'$.

Para el caso en el que i es una cofibración trivial la demostración es análoga: la diferencia está en usar la correspondiente versión de la proposición 2.11. $\square$

Aclaración 2.14. Si bien $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$) y $co\mathscr{F}$ ($co\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$) son clases cerradas por pullbacks y pushouts, respectivamente, *no* es cierto que la clase $\mathcal{W}$ de equivalencias débiles tenga alguna de estas propiedades.

Los siguientes ejemplos, propuestos por Jonathan Barmak, muestran que las equivalencias débiles no son estables por pullbacks ni por pushouts en la categoría de modelos de espacios topológicos.

Sea $I = [0,1]$. Tomamos el pullback del diagrama
$$\begin{tikzcd} & \{*\}, \arrow[d] \\ S^0 \arrow[r, hook, "i"] & I \end{tikzcd}$$
donde i es la inclusión de $S^0 = \{0,1\}$ en el intervalo, y la función $\{*\} \to I$ es una equivalencia homotópica (en particular, equivalencia débil). Si esta última manda al punto en el 0 o el 1, el pullback es

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r] \arrow[d] & \{*\} \arrow[d] \\ S^0 \arrow[r, hook, "i"] & I, \end{tikzcd}$$

y si manda al punto en cualquier otro elemento de I distinto de 0 y 1 el pullback es
$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & \{*\} \arrow[d] \\ S^0 \arrow[r, hook, "i"] & I. \end{tikzcd}$$
Cualquiera sea el caso, el pullback de $\{*\} \to I$ no es equivalencia débil. Esto muestra que la clase $\mathcal{W}$ no es cerrada por pullbacks en $\mathcal{T}op$.

Por otro lado, sean $I \to \{*\}$ la función al punto y $exp : I \to D^2$ la función dada por $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Tomando el pushout, obtenemos

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "exp"] \arrow[d] & D^2 \arrow[d] \\ \{*\} \arrow[r, "i"] & D^2/S^1. \end{tikzcd}$$

La función del intervalo al punto es una equivalencia homotópica, pero el cociente $D^2 \longrightarrow D^2/S^1 \simeq S^2$ no es equivalencia débil. Así, las equivalencias débiles no son estables por pushouts en $\mathcal{T}op$.

3. La 2-categoría homotópica $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$

Quillen ([11]) introduce las nociones de *cilindro* y de *homotopía* desarrollando una teoría asociada a una categoría de modelos $\mathscr{C}$. Demuestra que las homotopías definen una relación de equivalencia en los morfismos de la subcategoría plena $\mathscr{C}_{fc}$ de objetos fibrantes-cofibrantes y, cocientando por esta relación de equivalencia, construye una categoría $\pi\mathscr{C}_{fc}$ cuyos objetos son los objetos de $\mathscr{C}_{fc}$ y los morfismos son clases de flechas en $\mathscr{C}_{fc}$. El funtor $\mathscr{C}_{fc} \longrightarrow \pi\mathscr{C}_{fc}$ resulta equivalente a la localización que se obtiene inviertiendo los elementos de la clase $\mathcal{W}$ de equivalencias débiles.

En esta sección estudiaremos una versión análoga a la construcción de la categoría homotópica de Quillen. Fijada una *categoría de modelos* $\mathscr{C}$, queremos definir una 2-categoría $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$ cuyos objetos y flechas sean como en $\mathscr{C}$ y cuyas 2-celdas estén dadas por homotopías entre flechas, con el objetivo de obtener resultados relativos a la 2-localización de $\mathscr{C}$ respecto de la clase $\mathcal{W}$. Este será un caso particular de la versión 2-dimensional presentada por Descotte, Dubuc y Szyld ([1]) en una exposición en la que introducen el concepto de *bicategoría de modelos* y desarrollan, en este contexto, una teoría cuyo resultado principal es el teorema de la 2-localización.

Daremos una definición de cilindro más general que la definición de Quillen, y consecuentemente obtendremos una definición de homotopía también más general. Con q-cilindro y q-homotopía nos referiremos a las nociones originales introducidas por Quillen, para distinguirlas de estas nuevas definiciones. Esto nos permitirá establecer una apropiada relación de equivalencia entre homotopías, que depende sólo de la clase de equivalencias débiles $\mathcal{W}$, y además nos permitirá componer homotopías de forma tal que esta composición resulte compatible con dicha relación, y se verifiquen los axiomas de 2-categoría.

Una vez definida la 2-categoría $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$, la inclusión $i : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{H}o(\mathscr{C})$ no será precisamente la 2-localización de $\mathscr{C}$ ya que, en general, no manda equivalencias débiles en equivalencias, y es por esta razón que necesitaremos restringir el funtor i a la subcategoría de objetos fibrantes-cofibrantes para quedarnos con una sub-2-categoría $\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ de $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$. Usando los axiomas de la definición 3.3, podremos ver que $i : \mathscr{C}_{fc} \longrightarrow \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ es la 2-localización de $\mathscr{C}_{fc}$ respecto de $\mathcal{W}$.

Tomando el funtor π_0 de componentes conexas, obtendremos los resultados de Quillen como una consecuencia de esta construcción.

3.1. Homotopías de Quillen

Definición 3.1. Un *q-cilindro* $C = (W, d_0, d_1, s)$ para un objeto X en $\mathscr{C}$ es una factorización de la codiagonal

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[r, "\binom{d_0}{d_1}"] \arrow[rr, bend left, "\nabla_X"] & W \arrow[r, "s"] & X, \end{tikzcd}$$

donde $\binom{d_0}{d_1}$ es una cofibración y s es una equivalencia débil.

Dualmente, un *q-path object* $P = (V, \delta_0, \delta_1, \sigma)$ para un objeto Y es una factorización de la diagonal

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\sigma"] \arrow[rr, bend left, "\Delta_Y"] & V \arrow[r, "(\delta_0,\delta_1)"] & Y \times Y, \end{tikzcd}$$

con (δ_0, δ_1) una fibración y σ una equivalencia débil.

Observación 3.2. Dado X en $\mathscr{C}$, diremos que un q-cilindro C es *fibrante* si $s : W \longrightarrow X$ es una fibración.

Por el axioma M4, existe al menos un q-cilindro fibrante para X, que se obtiene factorizando la codiagonal ∇_X de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[rr, "\nabla_X"] \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}"'] & & X, \\ & W \arrow[ur, two heads, "s"'] & \end{tikzcd}$$

Lema 3.3. *Si X es cofibrante y $C = (W, d_0, d_1, s)$ es un q-cilindro para X, entonces d_0 y d_1 son cofibraciones triviales.*

Demostración. Dado que id_X y s son equivalencias débiles, y que $sd_0 = id_X$ y $sd_1 = id_X$, por el axioma M5 obtenemos que d_0 y d_1 son equivalencias débiles.

Por otro lado, tenemos el pushout

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "i_0"] \\ X \arrow[r, "i_1"'] & X \coprod X \end{tikzcd}$$

Como $0 \longrightarrow X$ es una cofibración y la clase $\mathcal{C}o\mathcal{F}$ es cerrada por pushouts, se tiene que i_0 e i_1 son cofibraciones y, luego, $d_0 = \binom{d_0}{d_1} \circ i_0$ y $d_1 = \binom{d_0}{d_1} \circ i_1$ lo son también. $\square$

Definición 3.4. Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{C}$. Una *q-homotopía a izquierda* $H : f \rightsquigarrow g$ con q-cilindro $C = (W, d_0, d_1, s)$ (para X) es un morfismo $h : W \longrightarrow Y$ tal que $hd_0 = f$ y $hd_1 = g$.

$$\begin{tikzcd}
X \coprod X \arrow[rr, tail, "\binom{d_0}{d_1}"] \arrow[dr, "\nabla_X"'] & & W \arrow[r, "h"] \arrow[dl, "s", "\circ"'] & Y, \\
& X & &
\end{tikzcd}$$

Diremos que H es *fibrante* si es una homotopía con cilindro fibrante.

Análogamente, una *q-homotopía a derecha* $K : f \rightsquigarrow g$ con q-path-object $P = (V, \delta_0, \delta_1, \sigma)$ (para Y) es un morfismo $k : X \longrightarrow V$ satisfaciendo $\delta_0 k = f$ y $\delta_1 k = g$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "k"] & V \arrow[rr, two heads, "(\delta_0,\delta_1)"] & & Y \times Y \ , \\
& & Y \arrow[ul, "\sigma", "\circ"'] \arrow[ur, "\Delta_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

En adelante, trabajaremos sólo con homotopías a izquierda.

Lema 3.5. *Sean $f, g, l : X \longrightarrow Y$, y sean $H : f \rightsquigarrow g$, $H' : g \rightsquigarrow l$ dos q-homotopías con cilindros C y C', respectivamente. Si X es cofibrante, entonces existe una q-homotopía $H'' : f \rightsquigarrow l$ con cilindro C'', donde C'' se obtiene del pushout de d_1 y d'_0.*

Demostración. Como X es cofibrante, d_0, d_1, d'_0 y d'_1 son cofibraciones triviales.
El pushout de d_1 y d'_0 nos permite definir un cilindro C'' como podemos ver en el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
& W \arrow[dr, dashed, "\alpha"] \arrow[rrd, bend left, "s"] & & \\
X \arrow[ur, shift left, "d_0"] \arrow[ur, shift right, "d_1"'] \arrow[dr, shift left, "d_0'"] \arrow[dr, shift right, "d_1'"'] & & W'' \arrow[r, dashed, "\exists s''"] & X. \\
& W' \arrow[ur, dashed, "\beta"'] \arrow[rru, bend right, "s'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Dado que $sd_0 = id_X = s'd_1'$, por la propiedad universal de W'', exite s'' que factoriza tanto a s como a s'. Además, como d_1 y d_0' son cofibraciones triviales, por M3 α y β también lo son. Luego, del axioma M5 y del hecho de que s y s' son equivalencias débiles, se deduce que s'' es una equivalencia débil. Si escribimos $d_0'' = \alpha d_0$ y $d_1'' = d_1'\beta$, entonces se tiene que $\binom{d_0''}{d_1''}$ es una cofibración:

Consideramos los pushouts

$$
\begin{tikzcd}
X \coprod X \arrow[r, "\binom{d_0'}{d_1'}"] \arrow[d, "d_1+id_X"'] & W' \arrow[d, "\beta"] \\
W \coprod X \arrow[r, "\binom{\alpha}{d_1}"'] & W''
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "i_0"'] & W \arrow[d, "i_0"] \\
X \coprod X \arrow[r, "d_0+id_X"'] & W \coprod X,
\end{tikzcd}
$$

y se tiene que $\binom{\alpha}{d_1}$ y $d_0 + id_X$ son ambas cofibraciones, porque $\binom{d_0'}{d_1'}$ y d_0 lo son. Luego,

$$
\begin{tikzcd}
X \coprod X \arrow[r, "d_0+id_X"] \arrow[rr, bend left, "\binom{d_0''}{d_1''}"] & W \coprod X \arrow[r, "\binom{\alpha}{d_1}"] & W''.
\end{tikzcd}
$$

es también una cofibración.

Así, $C'' = (W'', d_0'', d_1'', s'')$ es, efectivamente, un q-cilindro para X.

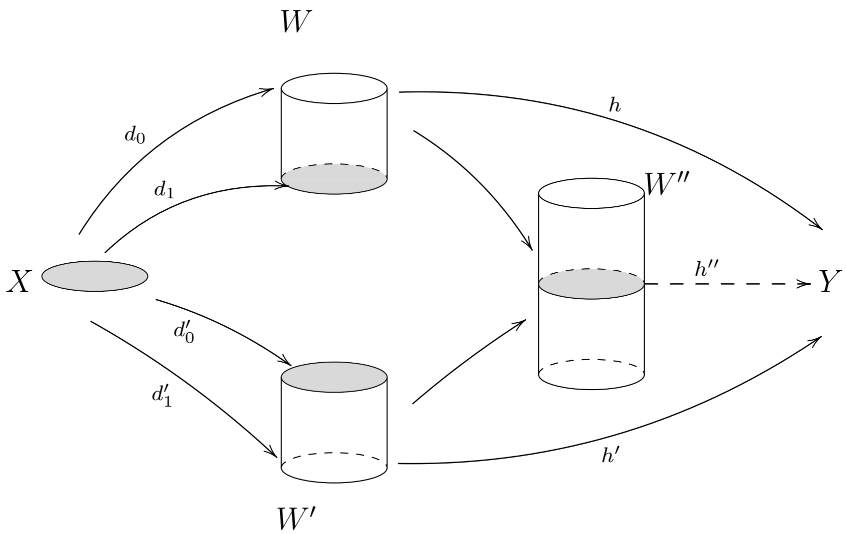
Nuevamente, de la propiedad universal del pushout se tiene una q-homotopía H'' de f a l con cilindro C''. En efecto, ampliamos el diagrama anterior de la siguiente forma

$$
\begin{tikzcd}
& W \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[drr, "s"] \arrow[drrr, bend left, "h"] & & & \\
X \arrow[ur, shift left, "d_0"] \arrow[ur, shift right, "d_1"'] \arrow[dr, shift left, "d_0'"] \arrow[dr, shift right, "d_1'"'] & & W'' \arrow[r, dashed, "s''"] \arrow[rr, dashed, bend right, "h''"'] & X & Y \\
& W' \arrow[ur, "\beta"'] \arrow[urr, "s'"'] \arrow[urrr, bend right, "h'"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

donde la existencia del morfismo h'' se debe a que $hd_1 = g = h'd_0'$, y obtenemos, por lo tanto, $H'' : f \rightsquigarrow l$ dada por $H'' = (C'', h'')$. $\square$

Observación 3.6. Para construir la categoría homotópica de una categoría de modelos $\mathscr{C}$, Quillen demuestra que las homotopías definen una relación de equivalencia entre los morfismos de la subcategoría plena de objetos cofibrantes, y el lema anterior se corresponde con la transitividad de esta relación entre flechas. En nuestro caso, dadas $H : f \rightsquigarrow g$ y $H' : g \rightsquigarrow l$, podemos pensar a la homotopía H'' de este resultado como una manera de definir la composición vertical $H \circ H'$. Sin embargo, si bien las homotopías se componen cuando los objetos son cofibrantes, esta composición que acabamos de exhibir no determina ni una 2-categoría ni una bicategoría. Es necesario, por lo tanto, definir una adecuada relación de equivalencia entre homotopías, de manera que si tomamos como 2-celdas a las clases de equivalencia se verifiquen, entonces, los axiomas de 2-categorías. La categoría así obtenida tendrá todas sus 2-celdas inversibles (ver lema 3.21).

Comentario 3.7. En $\mathcal{T}op$, el pushout que permite definir la composición vertical anterior es precisamente el cilindro que se obtiene pegando los primeros dos, definiendo así una nueva homotopía como consecuencia del lema del pegado:



3.2. Construcción de $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$

Recordemos que el problema que queremos resolver consiste en definir una 2-categoría $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$ junto con un 2-funtor $i : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{H}o(\mathscr{C})$ que tenga la propiedad universal de la 2-localización:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{H}o(\mathscr{C}) \arrow[dl, dashed, "\exists \widetilde{F}"] \\ & \mathscr{D} & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

para todo 2- funtor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ tal que $F(W) \subseteq Equiv(\mathscr{D})$.

Con el objetivo de establecer una relación entre homotopías para que sean parte de la estructura de 2-categoría de $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$, en adelante vamos a trabajar con una generalización de los cilindros y de las homotopías de Quillen que ya conocemos. Estas nuevas definiciones pueden ser introducidas en el contexto de una categoría con una única clase de morfismos Σ conteniendo a las identidades, y por el momento trabajaremos con estas nociones prescindiendo de la estructura de modelos de $\mathscr{C}$.

Definición 3.8. Sea Σ una familia de morfismos en una categoría $\mathscr{C}$ conteniendo a todas las identidades. Un *cilindro* $C = (W, Z, d_0, d_1, s, x)$ para un objeto X en $\mathscr{C}$ es una configuración

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, shift left, "d_0"] \arrow[rr, shift right, "d_1"'] \arrow[dr, "x"'] & & W, \arrow[dl, "s"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

donde $s \in \Sigma$ y $sd_0 = sd_1 = x$.

Una *homotopía (a izquierda)* $H = (C, h)$ de f a g con cilindro $C = (W, Z, d_0, d_1, s, x)$ es una flecha $h : W \longrightarrow Y$ cumpliendo $hd_0 = f$ y $hd_1 = g$. Notamos, como antes, $H : f \rightsquigarrow g$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, shift left, "d_0"] \arrow[rr, shift right, "d_1"'] \arrow[dr, "x"'] \arrow[rrrr, bend left=40, shift left, "f"] \arrow[rrrr, bend left=40, shift right, "g"'] & & W \arrow[dl, "s"] \arrow[rr, "h"] & & Y. \\
& Z & & &
\end{tikzcd}$$

3.2.1. Clases de equivalencia de homotopías

La relación de equivalencia que buscamos se desprenderá de la siguiente observación, que además sugiere cómo debemos definir el 2-funtor $\widetilde{F}$ del diagrama 3.1 en las clases de homotopía.

Observación 3.9. Sea $\mathscr{D}$ una 2-categoría y consideremos en $\mathscr{D}$ el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, shift left, "d_0"] \arrow[rr, shift right, "d_1"'] \arrow[dr, "x"'] \arrow[rrrr, bend left=40, shift left, "f"] \arrow[rrrr, bend left=40, shift right, "g"'] & & W \arrow[dl, "s"] \arrow[rr, "h"] & & Y \\
& Z & & &
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo s es una verdadera *equivalencia* .

Para cada objeto X' en $\mathscr{D}$, s induce un funtor plenamente fiel

$$\mathscr{D}[X',W] \xrightarrow{\quad s_* \quad} \mathscr{D}[X',Z]$$

y, tomando $X' = X$, existe entonces una única 2-celda $\widehat{C} : d_0 \Longrightarrow d_1$ tal que $s\widehat{C} = x$ (ver 1.13):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "d_0"] \arrow[r, bend right, "d_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\hat{C}"] & W \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, bend left, "sd_0=x"] \arrow[rr, bend right, "sd_1=x"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow id_x"] & & Z \end{tikzcd}$$

Sean ahora $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ un 2-funtor que manda las flechas de la clase Σ en equivalencias, y $H = (C, h)$ una homotopía de f a g en $\mathscr{C}$ con cilindro $C = (W, Z, d_0, d_1, s, x)$.

Aplicando F al diagrama en la definición 3.8 resulta

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[rr, bend left=40, "Ff"] \arrow[rr, bend left=30, "Fg"'] \arrow[r, shift left, "Fd_0"] \arrow[r, shift right, "Fd_1"'] \arrow[dr, "Fx"'] & FW \arrow[r, "Fh"] \arrow[d, "Fs"] & FY, \\ & FZ & \end{tikzcd}$$

que es un diagrama conmutativo en $\mathscr{D}$.

Como Fs es una equivalencia, hay una única 2-celda $\widehat{FC} : Fd_0 \Longrightarrow Fd_1$ que satisface $Fs\widehat{FC} = Fx$.

Definición 3.10. Dada una homotopía $H = (C, h)$ en $\mathscr{C}$ y dado un 2-funtor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ que manda la clase Σ en equivalencias, definimos una 2-celda $\widehat{FH}$ en $\mathscr{D}$ como $\widehat{FH} := Fh\widehat{FC} : Ff \Longrightarrow Fg$, donde $\widehat{FC} : Fd_0 \Longrightarrow Fd_1$ es la única tal que $Fs\widehat{FC} = Fx$.

Definición 3.11. Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ morfismos en $\mathscr{C}$ y $H, H' : \ f \rightsquigarrow g$ dos homotopías. Decimos que $H \sim H'$ si y sólo si $\widehat{FH} = \widehat{FH'}$ para todo 2-funtor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ tal que $F(\Sigma) \subseteq Equiv(\mathscr{D})$, para toda 2-categoría $\mathscr{D}$.

Más generalmente, dadas homotopías $f \overset{H}{\rightsquigarrow} g \overset{K}{\rightsquigarrow} l$ y $f \overset{H'}{\rightsquigarrow} g' \overset{K'}{\rightsquigarrow} l$, decimos que $(K, H) \sim (K', H')$ si y sólo si $\widehat{FK} \circ \widehat{FH} = \widehat{FK'} \circ \widehat{FH'}$, para todo 2-funtor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ que manda la clase Σ en equivalencias de $\mathscr{D}$.

Es claro cómo de esta manera podemos establecer una relación de equivalencia entre secuencias de homotopías componibles. Definimos una 2-celda en $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$ como la clase $[H_n, ..., H_1]$ de una secuencia finita de homotopías $f_0 \overset{H_1}{\rightsquigarrow} f_1 \dots f_{n-1} \overset{H_n}{\rightsquigarrow} f_n$, donde

$$(H_n, ..., H_1) \sim (K_m, ..., K_1) \text{ si y sólo si } \widehat{FH_n} \circ ... \circ \widehat{FH_1} = \widehat{FK_m} \circ ... \circ \widehat{FK_1}.$$

Veamos que, así, $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$ es efectivamente una 2-categoría.

3.2.2. Composición vertical

Definimos la composición vertical de homotopías como la yuxtaposición $[K] \circ [H] = [K, H]$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left=60, "f"{name=U}] \arrow[r, "g"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=60, "l"'{name=D}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=M, "{[H]}"] \arrow[Rightarrow, from=M, to=D, "{[K]}"] & Y \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left=60, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "l"'{name=D}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "{[K,H]}"] & Y \end{tikzcd}$$

La asociatividad es una consecuencia de la asociatividad de la composición vertical en $\mathscr{D}$. En efecto, para todo $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ tal que $F(\Sigma) \subseteq Equiv(\mathscr{D})$

$$[L, K] \circ [H] = [L] \circ [K, H] \text{ si y sólo si } (\widehat{FL} \circ \widehat{FK}) \circ \widehat{FH} = \widehat{FL} \circ (\widehat{FK} \circ \widehat{FH}).$$

Observación 3.12. Las clases de secuencias de una sola homotopía generan las 2-celdas en $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$.

3.13 Identidades para la composición vertical. Sea $f \in \mathscr{C}[X, Y]$ y sea $H : f \rightsquigarrow f$ una homotopía con cilindro C.

Por cómo está definida la relación de equivalencia entre secuencias de homotopías, es claro que $[H] = Id_f$ en $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$ si y sólo si $\widehat{FH} = Id_{Ff}$ en $\mathscr{D}$ para todo $F \in Hom_+(\mathscr{C}, \mathscr{D})$.

Así, por ejemplo, la homotopía H dada por

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "id_X"] \arrow[r, shift right, "id_X"'] \arrow[rr, bend left=40, "f"] \arrow[rr, bend left=30, "f"'] \arrow[dr, "id_X"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\circ" marking, "id_X"] & Y. \\
& X &
\end{tikzcd}$$

es tal que $[H] = Id_f$. En efecto, por definición tenemos que $\widehat{FH} = Ff\widehat{FC}$, donde $\widehat{FC} : id_{FX} \Longrightarrow id_{FX}$ es como en la definición 3.10, y la 2-celda $Id_{id_{FX}}$ satisface $id_{FX} * Id_{id_{FX}} = id_{FX}$, entonces $\widehat{FC} = Id_{id_{FX}}$, y luego $\widehat{FId_f} = Id_{Ff}$.

Análogamente puede verse que si H es la homotopía

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f"'] \arrow[rr, bend left=40, "f"] \arrow[rr, bend left=30, "f"'] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[r, "id_Y"] \arrow[dl, "\circ" marking, "id_Y"] & Y, \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

entonces $[H] = Id_f$.

Denotamos I_f a cualquier homotopía H tal que $\widehat{FH} = Id_{Ff}$.

De esta forma, $\mathscr{C}[X, Y]$ es una categoría para cada par de objetos X, Y en $\mathscr{C}$.

3.2.3. Composición horizontal

Dado que ya tenemos composición vertical, si definimos la composiciones horizontales con las identidades $l * [H] = [Id_l] * [H]$ y $[H] * r = [H] * [Id_r]$, la composición horizontal de 2-celdas se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow H"] & Y \arrow[r, bend left=50, "f'"] \arrow[r, bend right=50, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow H'"] & Y'
\end{tikzcd}
\underset{\text{def}}{=}
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left=50, "f'f"] \arrow[r, "\Downarrow f'*H", "\Downarrow H'*g"'] \arrow[r, bend right=50, "g'g"'] & Y'
\end{tikzcd}
\underset{(1)}{=}
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left=50, "f'f"] \arrow[r, "\Downarrow H'*f", "\Downarrow g'*H"'] \arrow[r, bend right=50, "g'g"'] & Y',
\end{tikzcd}$$

siempre y cuando se verifique la igualdad (1), de acuerdo a la observación 1.9.

Sean $X' \xrightarrow{l} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{r} Y'$ y $H = (C, h) : f \rightsquigarrow g$ una homotopía con cilindro $C = (W, Z, d_0, d_1, s, x)$.

Consideramos $Hl = (Cl, h) : fl \rightsquigarrow gl$ y $rH = (C, rh) : rf \rightsquigarrow rg$, donde $Cl = (W, Z, d_0 l, d_1 l, s, xl)$ es un cilindro para X'.

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "l"] \arrow[drr, bend right, "xl"'] & X \arrow[rr, shift left, "d_0"] \arrow[rr, shift right, "d_1"'] \arrow[dr, "x"] \arrow[rrr, bend left=40, "f"] \arrow[rrr, bend left=25, "g"'] & & W \arrow[r, "h"] \arrow[dl, "s", "\circ"'] & Y \arrow[r, "r"] & Y' \\
& & Z & & &
\end{tikzcd}
$$

Es claro que tanto Hl como rH resultan homotopías. Además, se tienen las ecuaciones

$$\widehat{F(Hl)} = \widehat{FH}Fl \text{ y } \widehat{F(rH)} = Fr\widehat{FH}, \tag{3.2}$$

ya que, como $\widehat{F(Hl)} = Fh\widehat{F(Cl)}$ y $Fs(\widehat{FC}Fl) = (Fs\widehat{FC})Fl = xl$, por la unicidad de $\widehat{F(Cl)}$ en la definición 3.10 se tiene que $\widehat{F(Cl)} = \widehat{FC}Fl$ y, luego, $\widehat{F(Hl)} = \widehat{FH}Fl$. La segunda ecuación es evidente, dado que H y rH tienen el mismo cilindro.

Definimos $[H] * l = [Hl]$ y $r * [H] = [rH]$. Más generalmente,

$$[K, H] * l := [Kl, Hl] \quad \text{y} \quad r * [K, H] := [rK, rH].$$

Ahora, si $H \sim H'$, entonces

$$\widehat{F(Hl)} = \widehat{FHFl} = \widehat{FH}Fl = \widehat{FH'}Fl = \widehat{FH'Fl} = \widehat{F(H'l)}.$$

Esto nos dice que la composición con l está bien definida, y de la misma manera se ve la buena definición de la composición con r.

De las ecuaciones $\widehat{F(Hl)} = \widehat{FH}Fl$ y $\widehat{F(rH)} = Fr\widehat{FH}$, y de la compatibilidad entre las composiciones vertical y horizontal en $\mathscr{D}$, se deduce la igualdad (1) requerida, correspondiente al último axioma en 1.9.

Además, por definición también se tiene que

$$([K] * l) \circ ([H] * l) = ([Kl]) \circ ([Hl]) = [Kl, Hl] = [K, H] * l = ([K] \circ [H]) * l,$$

$$[I_f] * l = [I_f l] = [I_{fl}].$$

Luego, los axiomas de la observación 1.9 se verifican, por lo que la composición horizontal de 2-celdas en $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$ queda determinada y es compatible con la composición vertical.

En virtud de las mismas ecuaciones (3.2) se tiene que la composición horizontal también es asociativa, y las identidades en este caso son como en $\mathscr{C}$: para cada objeto X, tenemos la 2-celda $[I_{id_X}] = [Id_{id_X}]$, que escribimos $[Id_X]$ para simplificar la notación.

Comentario 3.14. En el caso en el que Σ es la clase $\mathcal{W}$ de equivalencias débiles de una categoría de modelos, la composición $r[H] = [rH]$ está bien definida incluso si H es una q-homotopía, ya que rH también lo es, pero no ocurre lo mismo con Hl. Sin embargo, veremos más adelante que cuando nos restringimos a la subcategoría $\mathscr{C}_{fc}$, dada cualquier homotopía H existe una homotopía de Quillen que está en la misma clase, de manera que será posible definir la composición con l cuando los objetos sean fibrantes y cofibrantes (ver 3.29).

3.3. Propiedades de $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$ y 2-localización de $\mathscr{C}_{fc}$

Junto con la 2-categoría $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$ se obtiene un 2-funtor $i : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{H}o(\mathscr{C})$ dado por la inclusión, y si bien no manda equivalencias débiles en equivalencias de $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$, tiene la siguiente propiedad universal.

Proposición 3.15. *Sean $i : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{H}o(\mathscr{C})$ la inclusión, $\mathscr{D}$ una 2-categoría y $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un 2-funtor que manda los elementos de Σ en equivalencias. Entonces, existe un único 2-funtor $\widetilde{F} : \mathcal{H}o(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathscr{D}$ tal que $\widetilde{F}X = FX$ y $\widetilde{F}f = Ff$:*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{H}o(\mathscr{C}) \arrow[d, dashed, "\exists! \widetilde{F}"] \\ & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

Demostración. Definimos $\widetilde{F}$ en las clases de homotopías como

$$\widetilde{F}([H]) = \widehat{FH}, \tag{3.3}$$

y por la observación 3.12 podemos extender funtorialmente esta definición a cualquier 2-celda en $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$, siendo

$$\widetilde{F}([H_n, ..., H_1]) = \widehat{FH_n} \circ ... \circ \widehat{FH_1}.$$

De este modo, $\widetilde{F}$ resulta un funtor para la composición vertical.

Como $\widetilde{F}l\widetilde{F}([H]) = Fl\widehat{FH} = \widehat{FlFH} = \widehat{F(lH)} = \widetilde{F}([lH])$ y, análogamente, $\widetilde{F}([H])\widetilde{F}r = \widetilde{F}([Hr])$, entonces de la definición 3.2.3 se sigue que $\widetilde{F}$ es funtorial respecto a la composición horizontal.

Queremos ver ahora la unicidad de $\widetilde{F}$.

Sea $R : \mathcal{H}o(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathscr{D}$ un 2-funtor tal que $Ri = F$. Si $H = (C, h)$ es una homotopía en $\mathscr{C}$ con cilindro $C = (W, Z, d_0, d_1, s, x)$, escribimos $H = hH_0$ donde $H_0 = (C, id_W)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[dr, "x"'] & W \arrow[r, "id_W"] \arrow[d, "s"] & W \arrow[r, "h"] & Y \\ & Z & & \end{tikzcd}$$

Como $R([H]) = RhR([H_0]) = FhR([H_0])$ y $\widetilde{F}(H) = \widehat{FH} = Fh\widehat{Fc}$, para probar que R coincide con $\widetilde{F}$ en $[H]$, alcanza con ver que $R([H_0]) = \widehat{Fc}$.

Sabemos que $\widehat{Fc} : Fd_0 \Longrightarrow Fd_1$ es la única tal que $Fs\widehat{Fc} = id_x$. Por otro lado $FsR([H_0]) = RsR([H_0]) = R(s[H_0]) = R([sH_0])$, y $[sH_0] = [id_x]$ ya que $Fid_x id_{Fx} = id_{Fx} = Fs\widehat{Fc}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[dr, "x"'] & W \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s"] & Z \\ & Z & \end{tikzcd} \sim \begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "x"'] \arrow[dr, "x"'] & Z \arrow[r, "id_Z"] \arrow[d, "id_Z"] & Z \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Luego, $FsR([H_0]) = R([id_{Fx}]) = id_{Rx} = id_{Fx}$ y, por unicidad de $\widehat{Fc}$, es $R([H_0]) = \widehat{Fc}$.

□

Denotaremos $Hom_{p+}(\mathscr{C},\mathscr{D})$ y $Hom_{s+}(\mathscr{C},\mathscr{D})$ a las subcategoría de $Hom_p(\mathscr{C},\mathscr{D})$ y $Hom_s(\mathscr{C},\mathscr{D})$, respectivamente, cuyos objetos son los funtores F tales que $F(\Sigma)\subseteq Equiv(\mathscr{D})$.

La última proposición nos dice que la precomposición

$$i^*: Hom_{s+}(\mathcal{H}o(\mathscr{C}),\mathscr{D}) \longrightarrow Hom_{s+}(\mathscr{C},\mathscr{D})$$

es un funtor biyectivo en los objetos; en particular, es esencialmente suryectivo. Veamos que además es plenamente fiel.

Lema 3.16. *Sean $\mathscr{D}$ una 2-categoría, $F,G\in Hom_+(\mathscr{C},\mathscr{D})$ y un cilindro $C=(W,Z,d_0,d_1,s,x)$ para un objeto $X\in\mathscr{C}$. Si $\theta: F\Longrightarrow G$ es una transformación natural, entonces vale $\theta_W\widehat{FC}=\widehat{GC}\theta_X$.*

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[rrr, "\theta_X"] \arrow[dd, shift right=3, "Fd_0"'] \arrow[dd, shift left=3, "Fd_1"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\widehat{FC}}{\Rightarrow}"] & & & GX \arrow[dd, shift right=3, "Gd_0"'] \arrow[dd, shift left=3, "Gd_1"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\widehat{GC}}{\Rightarrow}"] \\ & & & \\ FW \arrow[rrr, "\theta_W"'] & & & GW \end{tikzcd}$$

Demostración. Como $\widehat{GC}: Gd_0\Longrightarrow Gd_1$ es la única 2-celda que satisface $Gs\widehat{GC}=Gx$, entonces $\widehat{GC}\theta_X$ es la única tal que $Gs(\widehat{GC}\theta_X)=Gx\theta_X$. Luego, basta ver que $Gs(\theta_W\widehat{FC})=Gx\theta_X$.

De la naturalidad de η se obtiene $Gs\theta_W=\theta_Z Fs$ y $\theta_Z Fx=Gx\theta_X$.

$$\begin{tikzcd} FW \arrow[r, "Fs"] \arrow[d, "\theta_W"'] & FZ \arrow[d, "\theta_Z"] \\ GW \arrow[r, "Gs"'] & GZ \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} FX \arrow[r, "Fx"] \arrow[d, "\theta_X"'] & FX \arrow[d, "\theta_Z"] \\ GX \arrow[r, "Gx"'] & GZ \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $Gs(\theta_W\widehat{FC})=(Gs\theta_W)\widehat{FC}=(\theta_Z Fs)\widehat{FC}=\theta_Z Fx=Gx\theta_X$. □

Proposición 3.17. *Si $F,G:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{D}$ mandan las flechas de Σ en equivalencias y $\theta: F\Longrightarrow G$ es una transformación natural, entonces existe una única transformación 2-natural $\widetilde{\theta}:\widetilde{F}\Longrightarrow\widetilde{G}$ tal que $\widetilde{\theta}i=\theta$.*

Demostración. Para cada X en $\mathscr{C}$, sabemos que $\widetilde{F}i = F$ y $\widetilde{G}i = G$. Definimos $\widetilde{\theta}_X : \widetilde{F}X \longrightarrow \widetilde{G}X$ como $\widetilde{\theta}_X = \theta_X$ y veamos, entonces, que $\widetilde{\theta}$ satisface las condiciones de 2-naturalidad.

Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ y $[H] : f \Longrightarrow g$ una 2-celda en $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$. Queremos probar la igualdad $\widetilde{\theta}_Y \widetilde{F}[H] = \widetilde{G}[H]\widetilde{\theta}_X$. Si $H = (C, h)$, de la naturalidad de θ se tiene $\theta_Y Fh = Gh\theta_X$, por lo que $\theta_Y \widehat{FH} = \theta_Y Fh\widehat{FC} = Gh\theta_W \widehat{FC}$. Además, $\widehat{GH}\theta_X = Gh\widehat{GC}\theta_X$. Del lema anterior obtenemos $\theta_W \widehat{FC} = \widehat{GC}\theta_X$ y, luego, $\theta_Y \widehat{FH} = \widehat{GH}\theta_X$, que por definición de $\widetilde{F}, \widetilde{G}$ y de $\widetilde{\theta}$, es exactamente lo que queríamos ver.

□

Como consecuencia de los resultados anteriores obtenemos que la precomposición con i induce, para toda 2-categoría $\mathscr{D}$, una equivalencia de categorías, que de hecho es un isomorfismo. En cuanto al aspecto 2-categórico, se tiene el siguiente

Lema 3.18. *Sean $F, G \in Hom_+(\mathscr{C}, \mathscr{D})$. Si η, θ: $F \Longrightarrow G$ son transformaciones naturales y $\mu : \eta \longrightarrow \theta$ una modificación, existe una única $\tilde{\mu} : \tilde{\eta} \longrightarrow \tilde{\theta}$ tal que $\tilde{\mu}i = \mu$.*

Demostración. Definimos $\tilde{\mu} : \tilde{\eta} \longrightarrow \tilde{\theta}$ como $\tilde{\mu}_X = \mu_X$ para cada X.

Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ y H una homotopía de f a g. Queremos ver que $\tilde{\mu}_Y \tilde{F}[H] = \tilde{G}[H]\tilde{\mu}_X$; es decir, $\mu_Y \widehat{FH} = \widehat{GH}\mu_X$. Como μ es una modificación, $\theta_Y Fg = Gg\mu_X$, y por el lema 3.16 también tenemos $\eta_W \widehat{FC} = \widehat{GC}\eta_X$, de manera que

$$\begin{aligned} \mu_Y \widehat{FH} &= \mu_Y Fg \circ \eta_Y \widehat{FH} = Gg\mu_X \circ \eta_Y Fh\widehat{FC} = Gg\mu_X \circ Gh\eta_W \widehat{FC} \\ &= Gg\mu_X \circ Gh\widehat{GC}\eta_X = Gg\mu_X \circ \widehat{GH}\eta_X = \widehat{GH}\mu_X. \end{aligned}$$

□

Corolario 3.19. *El funtor $i^* : Hom_{s+}(\mathcal{H}o(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \longrightarrow Hom_{s+}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ es un isomorfismo de 2-categorías.*

Observación Importante 3.20. El corolario anterior también puede obtenerse en términos de 2-funtores y transformaciones pseudonaturales con una demostración muy similar a la que exhibimos para los resultados 3.16, 3.17 y 3.18. Es decir, la inclusión i induce un isomorfismo de 2-categorías

$$i^* : Hom_{p+}(\mathcal{H}o(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \longrightarrow Hom_{p+}(\mathscr{C}, \mathscr{D}).$$

Fijamos ahora una categoría de modelos $\mathscr{C}$. Para que la 2-categoría $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$ sea la localización de $\mathscr{C}$ con respecto a la clase $\mathcal{W}$, sólo necesitamos que la inclusión $i : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{H}o(\mathscr{C})$ mande las equivalencias débiles en equivalencias. Sin embargo, vamos a poder demostrar esto si nos restringimos a la subcategoría plena $\mathscr{C}_{fc}$ de objetos fibrantes-cofibrantes, obteniendo de esta forma la propiedad universal de la 2-localización para $\mathscr{C}_{fc}$ respecto de $\mathcal{W}$. La demostración requiere del siguiente lema.

Lema 3.21. *Toda 2-celda en $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$ es inversible.*

Demostración. Fijemos $H = (C, h)$ una homotopía de f a g con cilindro $C = (W, Z, d_0, d_1, s, x)$. Definimos $H^{-1} = (C^{-1}, h)$, donde C^{-1} es el cilindro que se obtiene de C intercambiando d_0 y d_1, por lo que H^{-1} es una homotopía de g a f. Veamos que $[H^{-1}] \circ [H] = [Id_f]$.

Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un 2-funtor. Tenemos $\widehat{FC} : Fd_0 \Longrightarrow Fd_1$ y $\widehat{FC^{-1}} : Fd_1 \Longrightarrow Fd_0$ satisfaciendo las ecuaciones $Fs\widehat{FC} = Fx$ y $Fs\widehat{FC^{-1}} = Fx$. Luego, para la composición se tiene $Fs(\widehat{FC^{-1}} \circ \widehat{FC}) = Fx \circ Fx = Fx$, pero como existe una única 2-celda de Fd_0 en Fd_0 que satisface la igualdad anterior, entonces $\widehat{FC^{-1}} \circ \widehat{FC} = Id_{Fd_0} = Fd_0$. De esta forma,

$$\widehat{FH^{-1}} \circ \widehat{FH} = Fh\widehat{FC^{-1}} \circ Fh\widehat{FC} = Fh(\widehat{FC^{-1}} \circ \widehat{FC}) = FhFd_0 = Ff;$$

es decir, $[H^{-1}, H] = [Id_f]$. Una cuenta similar muestra que $[H, H^{-1}] = [Id_g]$, por lo tanto $[H]$ es inversible y su inversa es $[H]^{-1} = [H^{-1}]$.

□

Definición 3.22. Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ es una *sección* si admite una inversa a izquierda; es decir, existe $g : Y \longrightarrow X$ que satisface $gf = id_X$.

Dualmente, decimos que f es una *retracción* si tiene una inversa a derecha.

Teorema 3.23. *Sea $s : X \longrightarrow Y$ una equivalencia débil en una categoría de modelos $\mathscr{C}$. Si X es fibrante e Y es cofibrante, entonces s es una equivalencia en $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$.*

Demostración. Consideramos una factorización $s = pi$, donde p es una fibración, i una cofibración y alguna de las dos es una equivalencia débil, usando el axioma M4. Como s es una equivalencia débil, por M5 obtenemos que los tres morfismos lo son.

Ahora, dado que X es fibrante, i resulta una sección: como es una cofibración trivial y además $X \longrightarrow 1$ es una fibración, la propiedad de levantamiento garantiza la existencia de la flecha punteada en el diagrama conmutativo
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d] \\ Z \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & 1 \end{tikzcd}$$
, por lo que i tiene una inversa a izquierda.

Dualmente, p es una retracción gracias a que Y es cofibrante. Luego, basta ver que si una equivalencia débil es además una sección o una retracción, es una equivalencia en $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$, ya que las equivalencias son cerradas por composición.

Supongamos entonces que s es una sección con $r : Y \longrightarrow X$ una inversa a izquierda. Para ver que es una equivalencia en $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$, tenemos que mostrar que hay un isomorfismo entre id_Y y la composición sr, pero como en $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$ toda 2-celda es inversible, entonces sólo necesitamos probar la existencia de una homotopía $sr \rightsquigarrow id_Y$.

Dado que $rsr = r$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, shift left, "sr"] \arrow[r, shift right, "id_Y"'] \arrow[dr, "r"'] & Y \arrow[r, "id_Y"] \arrow[dl, "r"] & Y \\ & X & \end{tikzcd}$$

es conmutativo y, efectivamente, nos da una homotopía de sr a id_Y.

Como el caso en el que s es una retracción es completamente análogo, podemos concluir la demostración.

$\square$

Denotaremos $\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ a la subcategoría de $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$ cuyos objetos y flechas son como en $\mathscr{C}_{fc}$ y cuyas 2-celdas son clases de homotopías en $\mathscr{C}$.

Observación 3.24. Dado que toda equivalencia débil es una equivalencia en $\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$, entonces todo 2-funtor $\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathscr{D}$ manda equivalencias débiles en equivalencias; es decir, $Hom_{s+}(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) = Hom_s(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{D})$ y $Hom_{p+}(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) = Hom_p(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{D})$.

Teorema 3.25. *La inclusión $i : \mathscr{C}_{fc} \longrightarrow \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ es la 2-localización, en el sentido estricto, de la subcategoría $\mathscr{C}_{fc}$ con respecto a la clase $\mathcal{W}$ (ver definición 4.13).*

Más aún, los 2-funtores $i^* : Hom_s(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \longrightarrow Hom_{s+}(\mathscr{C}_{fc}, \mathscr{D})$ e $i^* : Hom_p(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \longrightarrow Hom_{p+}(\mathscr{C}_{fc}, \mathscr{D})$ son ambos isomorfismos de 2-categorías.

3.4. Localización de Quillen de $\mathscr{C}_{fc}$

Fijamos una categoría de modelos $\mathscr{C}$ y consideramos $\mathscr{C}_{fc} \subseteq \mathscr{C}$. Quillen define la categoría homotópica de $\mathscr{C}$ como la localización (en el sentido estricto) con respecto a la clase de equivalencias débiles, denotada $\mathbf{Ho}(\mathscr{C})$. Los objetos de esta categoría coinciden con los objetos de $\mathscr{C}$ y las flechas son clases de equivalencia de morfismos en $\mathscr{C}_{fc}$ que se obtienen mediante reemplazos fibrante y cofibrante, donde las clases de equivalencia se definen por la relación de homotopía. Quillen demuestra que $\mathbf{Ho}(\mathscr{C})$ es *equivalente* a la categoría de objetos fibrantes-cofibrantes $\mathscr{C}_{fc}$ cocientada por la misma relación en los morfismos, denotada $\pi\mathscr{C}_{fc}$. Cuando la categoría que se quiere localizar es $\mathscr{C}_{fc}$, dicha localización $\mathbf{Ho}(\mathscr{C}_{fc})$ es isomorfa a $\pi\mathscr{C}_{fc}$.

En lo que sigue veremos cómo obtener la categoría homotópica de $\mathscr{C}_{fc}$ a partir de la 2-categoría $\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$. Comenzamos introduciendo el concepto de *morfismo de cilindros*, y probaremos que si dos homotopías se conectan por un morfismo de estos, entonces ambas definen la misma 2-celda en $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$, lo que facilitará, luego, algunas demostraciones.

Definición 3.26. Sean $C = (W, Z, d_0, d_1, s, x)$, $C' = (W', Z', d_0', d_1', s', x')$ dos cilindros para X en $\mathscr{C}$. Un *morfismo de cilindros* $C \longrightarrow C'$ consiste de un par de morfismos $\phi : W \longrightarrow W'$ y $\psi : Z \longrightarrow Z'$ que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dr, "\phi"] \arrow[dd, "s"] & \\
X \arrow[ur, shift left, "d_0"] \arrow[ur, shift right, "d_1"'] \arrow[rr, bend right=10, shift left, "d_0'"] \arrow[rr, bend right=10, shift right, "d_1'"'] \arrow[dd, equal] & & W' \arrow[dd, "s'"] \\
 & Z \arrow[dr, "\psi"] & \\
X \arrow[ur, "x"] \arrow[rr, bend right=10, "x'"] & & Z'
\end{tikzcd}$$

Definición 3.27. La *relación de gérmenes* entre homotopías es la relación de equivalencia generada por los morfismos de cilindros: dadas $H = (C, h)$ y $H' = (C', h')$ dos homotopías de f a g, decimos que $H \underset{g}{\sim} H'$ si existe un morfismo de cilindros $C \xrightarrow{(\phi,\psi)} C'$ tal que $h' \circ \phi = h$.

Lema 3.28. *Si H, $H' :\ f \rightsquigarrow g$ son dos homotopías tales que $H \underset{g}{\sim} H'$, entonces $[H] = [H']$.*

Demostración. Escribimos $H = (C, h)$ y $H' = (C', h')$, $C = (W, Z, d_0, d_1, s, x)$ y $C' = (W', Z', d_0', d_1', s', x')$. Sea $C \xrightarrow{(\phi,\psi)} C'$ un morfismo de cilindros tal que $h'\phi = h$.

Si $\mathscr{D}$ es una 2-categoría y $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es un funtor que manda equivalencias débiles en equivalencias, como $F\psi F s = F s' F\phi$, entonces se tiene $Fx = F\psi F x = F\psi F s \widehat{FC} = F s' F\phi \widehat{FC}$, y $F\phi\widehat{FC} : F d_0' \Longrightarrow F d_1'$. Por unicidad de $\widehat{FC'}$, resulta $F\phi\widehat{FC} = \widehat{FC'}$, y luego, de la ecuación $h\phi = h'$ obtenemos $\widehat{FH'} = F h' F\psi \widehat{FC} = F h \widehat{FC} = \widehat{FH}$.

$\square$

Lema 3.29. *Sean X e Y ambos fibrantes y cofibrantes, $f, g : X \longrightarrow Y$ y H una homotopía de f a g. Entonces existe H', una q-homotopía en $\mathscr{C}_{fc}$ tal que $[H] = [H']$.*

Demostración. Podemos suponer que H es una homotopía fibrante (ver definición 3.4). En efecto, si H es de la forma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[dr, "x"'] & W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s"] & Y \\ & Z & \end{tikzcd}$$

consideramos una factorización de s dada por $\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "j"'] & & Z \\ & \widetilde{W} \arrow[ur, "\tilde{s}"'] & \end{tikzcd}$, y un morfismo $\tilde{h} : \widetilde{W} \longrightarrow Y$ haciendo conmutar el diagrama $\begin{tikzcd} W \arrow[r, "h"] \arrow[d, tail, "j"'] & Y \arrow[d] \\ \widetilde{W} \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\tilde{h}"] & 1 \end{tikzcd}$.

Tomando $\tilde{d}_0 := jd_0$ y $\tilde{d}_1 := jd_1$ queda definida una homotopía de f a g dada por

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "\tilde{d}_0"] \arrow[r, shift right, "\tilde{d}_0"'] \arrow[dr, "x"'] & \widetilde{W} \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "\tilde{s}"] & Y \\ & Z & \end{tikzcd}$$

, que es fibrante y está en la misma clase que H ya que (j, id_Z) es un morfismo de cilindros tal que $\tilde{h}j = h$.

Suponiendo entonces que s es una fibración trivial, tomando el pullback de x y s obtenemos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, shift right, "\delta_0"'] \arrow[d, dashed, shift left, "\delta_1"] \arrow[dd, equal, bend right] & X \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\ P \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, phantom, "p.b."] & W \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "x"'] & Z \end{tikzcd}$$

donde σ es también una fibración trivial por ser el pullback de s que es un morfismo en la misma clase, y la existencia de δ_0 y δ_1 se debe a la propiedad universal.

Luego, $(P, X, \delta_0, \delta_1, \sigma, id_X)$ es un cilindro para X, y con $k := ht : P \longrightarrow Y$ tenemos una homotopía de f a g

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "\delta_0"] \arrow[r, shift right, "\delta_1"'] \arrow[dr, "id_X"'] & P \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\sigma"] & Y \\ & X & \end{tikzcd}$$

, que está en la clase de H dado que (t, x) es un morfismo de cilindros satisfaciendo $ht = k$. Notamos que P es fibrante porque X lo es y, luego, la composición $P \xrightarrow{\sigma} X \longrightarrow 1$ es una fibración.

Como $\binom{\sigma_0}{\sigma_1}$ no necesariamente es una cofibración, el diagrama anterior no necesariamente es una q-homotopía. Consideramos, entonces, la siguiente factorización

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[rr, "\binom{\sigma_0}{\sigma_1}"] \arrow[dr, "\binom{d'_0}{d'_1}"'] & & P \\ & W' \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

, junto con $s' := \sigma p : W' \longrightarrow X$ y

$h' := kp : W' \longrightarrow Y$, y definimos H' como

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "d'_0"] \arrow[r, shift right, "d'_1"'] \arrow[dr, "x"'] & W' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "s'"] & Y \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Dado que $h'd'_0 = kpd'_0 = k\delta_0 = f$ y $h'd'_1 = k\delta_1 = g$, entonces H' es una q-homotopía de f a g que está en la misma clase que H.

Además, como P es fibrante y p es una fibración, W' también es fibrante, y de la composición $0 \rightarrowtail X \xrightarrow{i_0} X \coprod X \xrightarrow{\binom{d'_0}{d'_1}} W'$ se deduce que W' es cofibrante; por lo que H' es una q-homotopía en $\mathscr{C}_{fc}$.

$\square$

Lema 3.30. *Dadas $f, g, l : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{C}_{fc}$ y dos homotopías componibles $H : f \rightsquigarrow g$ y $H' : g \rightsquigarrow l$, existe $H'' : f \rightsquigarrow l$ tal que $[H''] = [H', H]$.*

Demostración. Como X e Y son fibrantes y cofibrantes, por el lema anterior podemos suponer que tanto H como H' son q-homotopías. Si $H = (C, h)$ y $H' = (C', h')$, consideremos la homotopía $H'' = (C'', h'')$ del lema 3.5 y veamos que $\widehat{FH''} = \widehat{FH'} \circ \widehat{FH}$ para todo 2-funtor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ que manda equivalencias débiles en equivalencias.

La homotopía H'' queda determinada por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[drr, "s"] \arrow[drrr, bend left, "h"] & & & \\
X \arrow[ur, shift left, "d_0"] \arrow[ur, shift right, "d_1"'] \arrow[dr, shift left, "d'_0"] \arrow[dr, shift right, "d'_1"'] & & W'' \arrow[r, "s''"] \arrow[rr, bend right, "h''"'] & X & Y \\
& W' \arrow[ur, "\beta"] \arrow[urr, "s'"'] \arrow[urrr, bend right, "h'"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Como $\widehat{FH'} \circ \widehat{FH} = Fh''F\beta\widehat{FC'} \circ Fh''F\alpha\widehat{FC} = Fh''(F\beta\widehat{FC'} \circ F\alpha\widehat{FC})$, basta ver que $F\beta\widehat{FC'} \circ F\alpha\widehat{FC} = \widehat{FC''}$. De las ecuaciones $s = s''\alpha$ y $s' = s''\beta$ se deduce que $id_{FX} = id_{FX} \circ id_{FX} = Fs''F\alpha\widehat{FC} \circ Fs''F\beta\widehat{FC'} = Fs''(F\beta\widehat{FC'} \circ F\alpha\widehat{FC})$ y, luego, $F\alpha\widehat{FC} \circ F\beta\widehat{FC'} = \widehat{FC''}$.

$\square$

Con lo visto hasta el momento podemos asegurar que cuando nos restringimos a la subcategoría $\mathscr{C}_{fc}$ existe una correspondencia entre las clases de q-homotopías y las clases de secuencias finitas de homotopías componibles, y se tiene de esta manera la siguiente proposición

Proposición 3.31. *La 2-categoría $\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ es aquella cuyos objetos y morfismos son como en $\mathscr{C}_{fc}$ y cuyas 2-celdas son las clases de q-homotopías, donde dos q-homotopías se identifican conforme a la relación de equivalencia definida en 3.11.*

Comentario 3.32. La relación de gérmenes (3.27) permitiría definir otra 2-categoría homotópica. Pueden definirse las composiciones vertical y horizontal, y demostrarse todos los requisitos, salvo el axioma que relaciona ambas composiciones.

Quillen también define una relación de equivalencia entre homotopías (ver [11] Ch.I §2), y demuestra que las clases de homotopías pueden componerse verticalmente y horizontalmente, pero no hace mención de la compatibilidad entre ambas composiciones, lo que sugiere que dicha compatibilidad no puede demostrarse o no sería válida. De hecho, la relación entre homotopías definida por Quillen es equivalente a la relación de gérmenes.

Obtendremos la categoría homotópica de $\mathscr{C}_{fc}$ aplicando el funtor de componentes conexas $\pi_0 : 2\text{-}Cat \longrightarrow Cat$, definido como:

1. Por cada 2-categoría $\mathscr{D}$, $\pi_0(\mathscr{D})$ es una categoría cuyos objetos son los de $\mathscr{D}$ y, por cada par de objetos X, Y en $\mathscr{D}$, $\pi_0(\mathscr{D})[X,Y] = {}^{\mathscr{D}[X,Y]}\!/_{\equiv}$, donde " $\equiv$ " es la clausura transitiva de la relación

$$f \sim g \Leftrightarrow \text{existe una 2-celda } f \Longrightarrow g \text{ o existe una 2-celda } g \Longrightarrow f.$$

2. Dado un 2-funtor $G : \mathscr{D}_1 \longrightarrow \mathscr{D}_2$, $\pi_0(G) : \pi_0(\mathscr{D}_1) \longrightarrow \pi_0(\mathscr{D}_2)$ es $\pi_0(G)X = GX$ para todo X en $\mathscr{D}_1$ y $\pi_0(G)[f] = [Gf]$ para toda f en $\mathscr{D}_1$.

Observación 3.33. Sea $d : Cat \longrightarrow 2\text{-}Cat$ el funtor que asocia cada categoría $\mathscr{X}$ consigo misma vista como 2-categoría discreta. Entonces, π_0 es adjunto a izquierda de d:

Para cada 2-categoría $\mathscr{D}$, existe un 2-funtor $\theta_{\mathscr{D}} : \mathscr{D} \longrightarrow \pi_0\mathscr{D}$ tal que para toda categoría $\mathscr{X}$ y para todo 2-funtor $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{X}$ existe un único funtor $\widetilde{F} : \pi_0\mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{X}$ satisfaciendo $\widetilde{F}\theta_{\mathscr{D}} = F$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D} \arrow[r, "\theta_{\mathscr{D}}"] \arrow[d, "\forall F"'] & \pi_0\mathscr{D}. \arrow[dl, dashed, "\exists!\widetilde{F}"] \\
\mathscr{X} &
\end{tikzcd}$$

El 2-funtor $\theta_{\mathscr{D}}$ se define de la siguiente manera. En los objetos, $\theta_{\mathscr{D}}(X) = X$ para todo X en $\mathscr{D}$; en las flechas, $\theta_{\mathscr{D}}(f) = [f]$ para toda f en $\mathscr{D}$; y, además, $\theta_{\mathscr{D}}$ manda toda 2-celda de $\mathscr{D}$ en la 2-celda trivial correspondiente. Queda definida, así, una transformación $\theta : Id_{2-Cat} \Longrightarrow d\pi_0$ natural en la variable $\mathscr{D}$.

Dado que esto quiere decir que $\pi_0 : 2\text{-}Cat \longrightarrow Cat$ es adjunto a izquierda del funtor d, ambas categorías $\mathscr{X}$ y $\pi_0\mathscr{D}$ son interpretadas como 2-categorías; es decir, el diagrama anterior es un diagrama en $2\text{-}Cat$, y tenemos $d(\mathscr{X})$ en lugar de $\mathscr{X}$ y $d(\pi_0\mathscr{D})$ en lugar de $\pi_0\mathscr{D}$, pero hacemos aquí un abuso de notación.

Además, en adelante denotaremos π_0 en lugar de $\theta_{\mathscr{D}}$.

Para cada 2-categoría $\mathscr{D}$, el 2-funtor $\pi_0 : \mathscr{D} \longrightarrow \pi_0\mathscr{D}$ induce un isomorfismo en las categorías de funtores:

Proposición 3.34. *El funtor $\pi_0^* : Hom(\pi_0\mathscr{D}, \mathscr{X}) \longrightarrow Hom(\mathscr{D}, \mathscr{X})$ es un isomorfismo de categorías.*

Demostración. Sólo resta probar que es plenamente fiel.

Dados 2-funtores $F, G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{X}$ y $\eta : F \Longrightarrow G$ una transformación 2-natural, definimos $\tilde{\eta} : \widetilde{F} \Longrightarrow \widetilde{G}$ como $\tilde{\eta}_X = \eta_X$. La buena definición de $\tilde{\eta}$ se debe a que π_0 es la identidad en los objetos, y entonces $FX = \widetilde{F}X$, $GX = \widetilde{G}X$ para todo X. Por otro lado, como además $\widetilde{F}[f] = Ff$ para toda f, de la naturalidad de η obtenemos que $\tilde{\eta}$ es una transformación natural, y $\tilde{\eta}\pi_0 = \eta$.

$\square$

Proposición 3.35. *Dados los 2-funtores* $i : \mathscr{C}_{fc} \longrightarrow \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ *del teorema 3.25 y* $\pi_0 : \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}))$ *de la observación 3.33, el funtor definido por la composición* $\pi_0 i : \mathscr{C}_{fc} \longrightarrow \pi_0(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}))$ *es la localización de* $\mathscr{C}_{fc}$ *con respecto a la clase* $\mathcal{W}$.

Más aún, la precomposición

$$(\pi_0 i)^* : Hom_+(\pi_0(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})), \mathscr{X}) \longrightarrow Hom(\mathscr{C}_{fc}, \mathscr{X})$$

es un isomorfismo de categorías, para toda categoría $\mathscr{X}$.

Demostración. El funtor $\pi_0 i$ manda equivalencias débiles en isomorfismos ya que $i(\mathcal{W}) \subseteq Equiv(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}))$ y, por cómo está definido π_0 en las 2-celdas, este manda equivalencias en isomorfismos.

Por otro lado, como i^* es un isomorfismo por 3.19 y π_0^* es un isomorfismo por 3.34

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}_{fc} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}) \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[dl, dashed, "\exists! \widehat{F}"] & \pi_0(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})), \arrow[dll, dashed, "\exists! \tilde{F}"] \\
\mathscr{X} & &
\end{tikzcd}$$

entonces la composición $i^* \pi_0^*$ es también un isomorfismo de categorías. $\square$

4. La 2-localización de la categoría $\mathscr{C}$

Queremos definir ahora un funtor $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}_{fc}$ y tomar la composición con $i : \mathscr{C}_{fc} \longrightarrow \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$. Probaremos que este 2-funtor, que llamaremos $q : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$, es la 2-localización de la categoría $\mathscr{C}$ respecto de la clase $\mathcal{W}$, que es nuestro principal objetivo. Para esto vamos a considerar las subcategorías plenas $\mathscr{C}_f$ y $\mathscr{C}_c$ de objetos fibrantes y cofibrantes, respectivamente, y dos asignaciones $R : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}_f$ y $Q : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}_c$ que pueden construirse a partir de los axiomas de categorías de modelos de la definición 2.3, pero que *no necesariamente* son funtoriales; en ese caso, la composición q no será exactamente un 2-funtor y en consecuencia no podrá determinar la localización buscada. Por esta razón, vamos a pedir que la factorización del axioma M4 sea funtorial, y si bien esto modifica la definición original de categoría de modelos que hemos dado, gran parte de los ejemplos conocidos cumplen esta axiomática (por ejemplo, todas las categorías de modelos *cofibrantemente generadas* - ver 4.5), que también es ampliamente utilizada en la literatura. Asumiendo que la estructura de modelos de $\mathscr{C}$ admite una factorización funtorial, las flechas $\mathscr{C} \xrightarrow{Q} \mathscr{C}_c \xrightarrow{R} \mathscr{C}_{fc}$ determinarán efectivamente un funtor y, junto con lo que vimos en la sección 3 para la subcategoría $\mathscr{C}_{fc}$, nos permitirá concluir el teorema de la localización.

4.1. Reemplazos fibrante y cofibrante

Definición 4.1. Un *sistema de factorización débil* en una categoría $\mathscr{X}$ es un par $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ de clases distinguidas de morfismos tales que

1. Todo morfismo h en $\mathscr{X}$ puede ser factorizado como $h = gf$, con $f \in \mathcal{L}$ y $g \in \mathcal{R}$.

2. $\mathcal{L}$ es precisamente la clase de morfismos que tienen la propiedad de levantamiento a izquierda con respecto a todo morfismo de $\mathcal{R}$.

   $\mathcal{R}$ es la clase de morfismos que tienen la propiedad de levantamiento a derecha con respecto a todo morfismo en $\mathcal{L}$.

Ejemplos 4.2. En las categorías *Set*, *Grp* y *R-Mod*, donde R es un anillo con unidad, las clases $\mathcal{L} = monomorfismos$ y $\mathcal{R} = epimorfismos$ forman un sistema de factorización débil.

Si $\mathscr{C}$ es una categoría de modelos, las clases $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ son un sistema de factorización débil, asi como también lo son $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$.

Definición 4.3. Decimos que una factorización débil $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ es *funtorial* si cada vez que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\
\cdot \arrow[r, "v"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

existen morfismos (λ_f, ρ_f), (λ_g, ρ_g) y un morfismo $F(u, v)$ haciendo conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\lambda_f"'] \arrow[dd, bend right, "f"'] & \cdot \arrow[d, "\lambda_g"] \arrow[dd, bend left, "g"] \\
\cdot \arrow[r, dashed, "F(u,v)"'] \arrow[d, "\rho_f"'] & \cdot \arrow[d, "\rho_g"] \\
\cdot \arrow[r, "v"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

donde λ_f, $\lambda_g \in \mathcal{L}$, ρ_f, $\rho_g \in \mathcal{R}$, y $F(u, v)$ depende funtorialmente de u y v; es decir, $F(u \circ u', v \circ v') = F(u, v) \circ F(u', v')$ y si $f = g$ entonces $F(id, id) = id$.

Observación 4.4. Denotamos $\overrightarrow{\mathscr{C}}$ a la categoría cuyos objetos son los morfismos de $\mathscr{C}$ y una flecha de f a g en $\overrightarrow{\mathscr{C}}$ es un par (u, v) de morfismos de $\mathscr{C}$ tales que $gu = vf$. Sean $dom, codom : \overrightarrow{\mathscr{C}} \longrightarrow \mathscr{C}$ los funtores que proyectan a dominio y codominio, respectivamente. La definición anterior nos dice precisamente que un sistema $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ es funtorial si existen un funtor $F : \overrightarrow{\mathscr{C}} \longrightarrow \mathscr{C}$ y transformaciones naturales $\lambda : dom \longrightarrow F$ y $\rho : F \longrightarrow codom$ tales que para toda f en $\mathscr{C}$ se tiene

$$\begin{tikzcd}
dom(f) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\lambda_f"'] & & codom(f) \\
& F(f) \arrow[ur, "\rho_f"'] &
\end{tikzcd}$$

con $\lambda_f \in \mathcal{L}$, $\rho_f \in \mathcal{R}$.

Decimos que (F, λ, ρ) es una *realización funtorial (functorial realization)* para la factorización débil $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$. Ver [12].

En adelante trabajaremos sobre una categoría de modelos $\mathscr{C}$ en la que las factorizaciones del axioma M4 pueden elegirse funtorialmente en el sentido de la definición 4.3.

Comentario 4.5. La mayoría de las estructuras de modelos conocidas son *cofibrantemente generadas*, es decir que la clase $\mathcal{R}$ de la factorización débil es definida como aquellos morfismos que tienen la propiedad de levantamiento a derecha con respecto a cierto *conjunto* de flechas (y, consecuentemente, la clase $\mathcal{L}$ consiste precisamente de aquellos morfismos que tienen la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de la clase $\mathcal{R}$), donde además dicho conjunto permite el *argumento del objeto pequeño (small object argument)*, que es un proceso de factorización asociado a este conjunto, y es la principal herramienta para producir factorizaciones funtoriales. Las categorías $\mathcal{T}op$, $\mathcal{SS}et$, Ch_A y **Cat** que mencionamos en la sección 3 son ejemplos de estructuras cofibrantemente generadas. Podemos encontrar en [7] una descripción más precisa de este tipo de estructuras junto con algunos ejemplos que también son presentados con todo detalle.

Definición 4.6. Sea $\mathscr{C}_c \subseteq \mathscr{C}$ la subcategoría de objetos cofibrantes. Definimos un funtor $Q : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}_c$ de la siguiente forma:

1. Para cada X en $\mathscr{C}$, factorizamos $0 \longrightarrow X$ obteniendo un objeto cofibrante QX y una fibración trivial $p_X : QX \longrightarrow X$.

   Si $F : \overrightarrow{\mathscr{C}} \longrightarrow \mathscr{C}$ es el funtor de la realización funtorial asocida a esta factorización, entonces $QX = F(0 \to X)$.

2. Dada $f : X \longrightarrow Y$, se define $Qf : QX \longrightarrow QY$ cumpliendo la ecuación $p_Y Qf = f p_X$ como vemos en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & & QY \arrow[d, two heads, "p_Y"] \\
QX \arrow[urr, dashed, "Qf"] \arrow[r, two heads, "p_X"'] & X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Notamos que $Qf = F(id_0, f)$. Además, por el axioma M5, si $f \in \mathcal{W}$ entonces $Qf \in \mathcal{W}$.

De la funtorialidad de F se deduce que Q también es un funtor:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
QX \arrow[r, "id_{QX}"] \arrow[d, two heads, "p_X"'] & QX \arrow[d, two heads, "p_X"] \\
X \arrow[r, "id_X"'] & Y
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
QX \arrow[r, "Qf"'] \arrow[rr, bend left, "Q(gf)"] \arrow[d, two heads, "p_X"'] & QY \arrow[r, "Qg"'] \arrow[d, two heads, "p_Y"'] & QZ \arrow[d, two heads, "p_Z"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Dualmente, obtenemos también un funtor $R : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}_f$ con RX un objeto fibrante y una cofibración trivial $i_X : X \longrightarrow RX$ factorizando el morfismo $X \longrightarrow 1$, para todo X; y una flecha $Rf : RX \longrightarrow RY$ satisfaciendo $Rfi_X = i_Y f$, para cada $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{C}$. Además, si f es una equivalencia débil, entonces Rf también.

Los funtores Q y R se conocen como *reemplazo cofibrante (cofibrant replacement)* y *reemplazo fibrante (fibrant replacement)*, respectivamente.

Observación 4.7. Pensando a Q y a R como funtores de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$ se obtienen transformaciones naturales $p : Q \Longrightarrow Id$ e $i : Id \Longrightarrow R$ definidas por p_X e i_X, respectivamente, para cada X en $\mathscr{C}$: de las definiciones de Q y R en los morfismos se tienen las ecuaciones que demuestran la naturalidad de p e i.

Notamos que, por definición, p_X e i_X son equivalencias débiles.

Definición 4.8. Restringiendo R a la subcategoría $\mathscr{C}_c$ y precomponiendo con Q tenemos un funtor $RQ : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}_{fc}$. Definimos $q : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ como la composición

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[rrr, bend left, "q"] & \mathscr{C}_c \arrow[r, "R"] & \mathscr{C}_{fc} \arrow[r, hook, "i"] & \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}) \end{tikzcd}$$

Observación Importante 4.9. Si s es una equivalencia débil en $\mathscr{C}$, RQs es una equivalencia débil en $\mathscr{C}_{fc}$ y, luego, resulta una equivalencia en $\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$, por lo que q manda la clase $\mathcal{W}$ en equivalencias.

4.2. El teorema de 2-localización

Queremos ver que tenemos una pseudoequivalencia de 2-categorías

$$Hom_p(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \xrightarrow{q^*} Hom_{p+}(\mathscr{C}, \mathscr{D}),$$

para toda 2-categoría $\mathscr{D}$.

Recordemos que el funtor $i : \mathscr{C}_{fc} \longrightarrow \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ se obtiene restringiendo $i : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{H}o(\mathscr{C})$ como es indicado en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}_{fc} \arrow[r, "i"] \arrow[d, hook] & \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}) \arrow[d, hook] \\ \mathscr{C} \arrow[r, "i"] & \mathcal{H}o(\mathscr{C}). \end{tikzcd}$$

Si bien esta última inclusión no manda equivalencias débiles en equivalencias, sí cumple la propiedad universal de la proposicion 3.15:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[dr, phantom, "F(\mathcal{W})\subseteq Equiv(\mathscr{D})"', shift right=8] & \arrow[d, phantom, "\equiv"] & \mathcal{H}o(\mathscr{C}) \arrow[dl, dashed, "\exists!\ \bar{F}"] & \mathcal{H}o(\mathscr{C}) \arrow[dl, dashed, "\bar{q}"] \\ & \mathscr{D} & \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}) & \end{tikzcd}$$

.

Tomando $\mathscr{D} = \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ y $F = q$, existe entonces un único 2-funtor $\bar{q}$ tal que $\bar{q}i = q$.

Proposición 4.10. *Dado* $F : \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathscr{D}$*, el 2-funtor* $F\bar{q}$ *manda la clase* $\mathcal{W}$ *en equivalencias.*

Demostración. Como $\bar{q}i = q$ y q manda equivalencias débiles en equivalencias, entonces $\bar{q}$ también. Luego, necesariamente $F\bar{q}(\mathcal{W}) \subseteq Equiv(\mathscr{D})$.

□

Fijemos una 2-categoría $\mathscr{D}$. Tenemos el 2-funtor dado por la precomposición

$$\bar{q}^* : Hom_p(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \longrightarrow Hom_{p+}(\mathcal{H}o(\mathscr{C}), \mathscr{D}).$$

Como $q^* = i^*\bar{q}^*$, para probar que q^* es una pseudoequivalencia será suficiente ver que tanto $\bar{q}^*$ como $i^* : Hom_{p+}(\mathcal{H}o(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \longrightarrow Hom_{p+}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ son ambos pseudoequivalencias de 2-categorías. En cuanto a i^*, ya vimos (3.20) que, de hecho, es un isomorfismo.

Consideremos la inclusión $j : \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathcal{H}o(\mathscr{C})$ y el 2-funtor inducido $j^* : Hom_{p+}(\mathcal{H}o(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \longrightarrow Hom_p(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{D})$.

Teorema 4.11. *Los 2-funtores*

$$\begin{tikzcd} Hom_p(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \arrow[r, shift left, "\bar{q}^*"] & Hom_{p+}(\mathcal{H}o(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \arrow[l, shift left, "j^*"] \end{tikzcd}$$

determinan una pseudoequivalencia de 2-categorías.

Demostración. Sea $\bar{q}^*j^* : Hom_{p+}(\mathcal{H}o(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \longrightarrow Hom_{p+}(\mathcal{H}o(\mathscr{C}), \mathscr{D})$. Definimos una transformación pseudonatural $\eta : id_{Hom_{p+}(\mathcal{H}o(\mathscr{C}), \mathscr{D})} \Longrightarrow \bar{q}^*j^*$ de la siguiente forma:

Sea $F \in Hom_+(\mathcal{H}o(\mathscr{C}), \mathscr{D})$. Para cada objeto X en $\mathscr{C}$, sabemos que i_X y p_X son equivalencias débiles, y aplicando F obtenemos equivalencias $FRQX \xleftarrow{Fi_{QX}} FQX \xrightarrow{Fp_X} FX$. Tomando la inversa de Fp_X, se tiene una equivalencia

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[rr, bend left, "(\eta_F)_X"] & FQX \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & FRQX . \end{tikzcd}$$

Definimos $\eta_F : F \Longrightarrow Fj\bar{q}$ asociando a cada $X \in Ob(\mathcal{H}o(\mathscr{C}))$ el morfismo $(\eta_F)_X : FX \longrightarrow FRQX$. Notamos que η_F es una transformación natural porque p e i lo son; es decir que para toda flecha $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{H}o(\mathscr{C})$ se tiene $Fj\bar{q}(f)(\eta_F)_X = (\eta_F)_Y Ff$. Usando el lema 3.16 y con una demostración análoga a la de la proposición 3.17 puede verse que η_F es 2-natural. En particular, η_F es una flecha en $Hom_{p+}(\mathcal{H}o(\mathscr{C}), \mathscr{D})$, y es además una equivalencia, ya que lo es punto a punto (ver proposición 1.17).

A su vez, si η es pseudonatural, entonces será una equivalencia en la correspondiente 2-categoría de 2-funtores, ya que por lo anterior cada componente η_F lo es.

En los objetos de $Hom_{p+}(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{D})$, tenemos a η ya definida. Ahora, dada $\sigma : F \Longrightarrow G$ una flecha en $Hom_{p+}(\mathcal{H}o(\mathscr{C}), \mathscr{D})$, queremos definir una modificación inversible $\eta_\sigma : q^*j^*(\sigma) \circ \eta_F \longrightarrow \eta_G \circ \sigma$

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, Rightarrow, "\eta_F"] \arrow[d, Rightarrow, "\sigma"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \eta_\sigma"] & Fqj \arrow[d, Rightarrow, "q^*j^*(\sigma)"] \\
G \arrow[r, Rightarrow, "\eta_G"'] & Gqj.
\end{tikzcd}$$

Definimos η_σ punto a punto de la siguiente manera:

Para cada X en $\mathscr{C}$ tenemos $(\eta_F)_X = F(i_{QX})F(p_X)^{-1}$, $(\eta_G)_X = G(i_{QX})G(p_X)^{-1}$ y el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, dashed, bend left, "(\eta_F)_X"] \arrow[d, "\sigma_X"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \sigma_{p_X}"] & FQX \arrow[l, "F(p_X)"'] \arrow[r, "F(i_{QX})"] \arrow[d, "\sigma_{QX}"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \sigma_{i_{QX}}"] & FRQX \arrow[d, "\sigma_{RQX}"] \\
GX \arrow[rr, dashed, bend right, "(\eta_G)_X"'] & GQX \arrow[l, "G(p_X)"] \arrow[r, "G(i_{QX})"'] & GRQX,
\end{tikzcd}$$

donde $F(p_X)^{-1}$ y $G(p_X)^{-1}$ denotan las respectivas cuasi-inversas de $F(p_X)$ y $G(p_X)$, y σ_{p_X}, $\sigma_{i_{QX}}$ son 2-celdas inversibles en $\mathscr{D}$.

Tenemos $\alpha_G : id_{GQX} \Longrightarrow G(p_X)^{-1}G(p_X)$ y $\beta_F : F(p_X)F(p_X)^{-1} \Longrightarrow id_{FX}$ 2-celdas, también inversibles, y podemos considerar las siguientes composiciones

$$\sigma_{RQX}(\eta_F)_X \underset{(1)}{\overset{\simeq}{\Longrightarrow}} G(i_{QX})\sigma_{QX}F(p_X)^{-1} \underset{(2)}{\overset{\simeq}{\Longrightarrow}} (\eta_G)_X G(p_X)\sigma_{QX}F(p_X)^{-1}$$

y

$$(\eta_G)_X G(p_X)\sigma_{QX}F(p_X)^{-1} \underset{(3)}{\overset{\simeq}{\Longrightarrow}} (\eta_G)_X\sigma_X F(p_X)F(p_X)^{-1} \underset{(4)}{\overset{\simeq}{\Longrightarrow}} (\eta_G)_X\sigma_X,$$

donde (1) es la 2-celda $\sigma_{i_{QX}}F(p_X)^{-1}$, (2) es la 2-celda $G(i_{QX})\alpha_G\sigma_{QX}F(p_X)^{-1}$, (3) es $(\eta_G)_X\sigma_{p_X}^{-1}F(p_X)^{-1}$ y (4) es $(\eta_G)_X\sigma_X\beta_F$. Notamos que α_G y β_F dependen de X. Tomamos η_{σ_X} como la composición de ambas secuencias:

$$(\eta_\sigma)_X = [(\eta_G)_X\sigma_X\beta_F]\circ[(\eta_G)_X\sigma_{p_X}^{-1}F(p_X)^{-1}]\circ[G(i_{QX})\alpha_G\sigma_{QX}F(p_X)^{-1}]\circ \\ [(\sigma_{i_{QX}}F(p_X)^{-1}].$$

Se puede ver que η_σ es efectivamente una modificación y, con esta definición, η satisface los axiomas de pseudonaturalidad. Luego, η es una equivalencia en la 2-categoría de 2-funtores de $Hom_{p+}(\mathcal{H}o(\mathscr{C}),\mathscr{D})$ en $Hom_{p+}(\mathcal{H}o(\mathscr{C}),\mathscr{D})$.

De la misma forma puede definirse $\theta : j^*\overline{q}^* \Longrightarrow id_{Hom(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}),\mathscr{D})}$ tomando $(\theta_F)_X$ como la composición

$$\begin{tikzcd} FRQX \arrow[rr, bend left, "(\theta_F)_X"] & FQX \arrow[l, "Fi_{QX}"'] \arrow[r, "Fp_X"] & FX \end{tikzcd},$$

para cada $F \in Hom_p(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}),\mathscr{D})$, $X \in Ob(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}))$. Además, θ también es una equivalencia en la correspondiente 2-categoría de 2-funtores y, por lo tanto, podemos concluir la demostración.

$\square$

Observación 4.12. El teorema anterior nos dice que la composición de los reemplazos fibrante y cofibrante $QR : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}_{fc}$ induce una pseudoequivalencia de 2-categorías

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "QR"] \arrow[d, "i"'] & \mathscr{C}_{fc} \arrow[d, "i"] \\ \mathcal{H}o(\mathscr{C}) \arrow[r, dashed, "\overline{QR}"'] & \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}). \end{tikzcd}$$

Como consecuencia del teorema 4.11 obtenemos el resultado principal de esta tesis:

Teorema 4.13. *Dada una categoría de modelos $\mathscr{C}$, se tiene que el funtor $q : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ de la definición 4.8 es la 2-localización de $\mathscr{C}$ con respecto a la clase $\mathcal{W}$, en el sentido que manda los elementos de $\mathcal{W}$ en equivalencias y, además, el 2-funtor $q^* : Hom_p(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \longrightarrow Hom_{p+}(\mathscr{D}, \mathscr{D})$ es una pseudoequivalencia de 2-categorías para toda 2-categoría $\mathscr{D}$.*

Aplicando el funtor de componentes conexas π_0 concluimos un resultado análogo a la proposición 3.35. Más precisamente, lo que se tiene es la localización de la categoría $\mathscr{C}$ con respecto a la clase de equivalencias débiles en el sentido de la definición 1.4. A diferencia de lo hecho en la sección 4, donde pudimos obtener la categoría homotópica de la subcategoría $\mathscr{C}_{fc}$, en este caso obtenemos un funtor $\pi_0 q : \mathscr{C} \longrightarrow \pi_0(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}))$ con la propiedad universal de la localización pero no en el sentido estricto, por lo que no es exactamente la localización de Quillen, sino que es equivalente a ella.

Observación 4.14. Consideremos una categoría $\mathscr{X}$. El 2-funtor q^* del teorema 4.13, tomando $\mathscr{D} = \mathscr{X}$, ahora es un funtor entre las categorías de 2-funtores

$$q^* : Hom(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{X}) \longrightarrow Hom_+(\mathscr{C}, \mathscr{X}),$$

ya que $Hom_p(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{X}) = Hom_s(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{X}) = Hom(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{X})$, $Hom_{p+}(\mathscr{C}, \mathscr{X}) = Hom_+(\mathscr{C}, \mathscr{X})$, y todas las modificaciones son identidades.

Además, q^* es una equivalencia de categorías. Notamos que esto quiere decir que existe una cuasi-inversa para q^* tal que la unidad y la counidad, digamos η y θ, son isomorfismos naturales. En principio, el teorema 4.13 afirma que η y θ son equivalencias como transformaciones pseudonaturales, pero, de nuevo, una transformacion pseudonatural entre funtores es una transformación natural y las modificaciones son necesariamente identidades, de manera que tanto la unidad como la counidad son isomorfismos. Tenemos entonces:

Proposición 4.15. *Dados los 2-funtores $q : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ de la definición 4.8 y $\pi_0 : \mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}))$ de 3.33, se tiene que la composición $\pi_0 q : \mathscr{C} \longrightarrow \pi_0(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}))$ es la localización de $\mathscr{C}$ con respecto a la clase $\mathcal{W}$ en el sentido de la definición 1.4.*

Demostración. Como q manda equivalencias débiles en equivalencias y π_0 manda equivalencias en isomorfismos, entonces la composición manda la clase $\mathcal{W}$ en $Isos(\pi(\mathcal{H}(\mathscr{C})))$.

Por otro lado, hay que ver que

$$q^*\pi_0^* : Hom(\pi_0(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})), \mathscr{D}) \longrightarrow Hom_+(\mathscr{C}, \mathscr{D})$$

es una equivalencia de categorías para toda categoría $\mathscr{D}$. Pero como se tiene un isomorfismo $\pi_0^* : Hom(\pi_0(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})), \mathscr{X}) \longrightarrow Hom(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{X})$ y además $q^* : Hom(\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C}), \mathscr{X}) \longrightarrow Hom_+(\mathscr{C}, \mathscr{X})$ es una equivalencia por la observación anterior, entonces la composición define una equivalencia de categorías. □

4.3. Homotopías a derecha

De lo hecho en 4.1 vemos que, en presencia de funtorialidad en las factorizaciones, las homotopías a derecha no son necesarias, a diferencia del caso con las factorizaciones no funtoriales de los axiomas de Quillen.

La categoría $\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ también puede obtenerse tomando como 2-celdas a las clases de secuencias finitas de homotopías a derecha. Generalizando el concepto de path-object como lo hicimos para los cilindros, obtenemos una versión de homotopías a derecha también más general que la de Quillen. Decimos que dos homotopías a derecha K y K' están en la misma clase si y sólo si $\widehat{FK} = \widehat{FK'}$ para todo 2-funtor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ tal que $F(\mathcal{W}) \subseteq Equiv(\mathscr{D})$, para toda 2-categoría $\mathscr{D}$. Definimos las composiciones vertical y horizontal como lo hicimos antes, construyendo de esta forma una 2-categoría que llamamos $\mathcal{H}o(\mathscr{C})^r$ para distinguirla de $\mathcal{H}o(\mathscr{C})^l := \mathcal{H}o(\mathscr{C})$.

Considerando la inclusión $j : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{H}o(\mathscr{C})^r$, la precomposición también nos da un isomorfismo como en el corolario 3.19, pero esto no quiere decir que ambas categorías sean isomorfas, ya que ni i ni j mandan equivalencias débiles en equivalencias.

Por otro lado, una homotopía a derecha $K = (P, k)$ y una homotopía a izquierda $H = (C, h)$ están relacionadas si $\widehat{FK} = \widehat{FH}$ para todo $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ que manda equivalencias débiles en equivalencias. Si bien $\mathcal{H}o(\mathscr{C})^r$ y $\mathcal{H}o(\mathscr{C})^l$ no tienen por qué coincidir, el siguiente resultado nos permitirá establecer cierta correspondencia cuando los objetos sean fibrantes y cofibrantes.

Observación 4.16. Por el axioma M4 en la definición 2.3, dado un objeto Y existe al menos un path-object $P = (V, \delta_0, \delta_1, \sigma)$ para Y que se obtiene factorizando la diagonal Δ_Y de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\Delta_Y"] \arrow[dr, "\circ" description] & & Y \times Y\ . \\ & V \arrow[ur, "(\delta_0,\delta_1)"'] & \end{tikzcd}$$

Proposición 4.17. *Sean* $f, g : X \longrightarrow Y$, $H :\ f \overset{l}{\rightsquigarrow} g$ *una* q*-homotopía y* $P = (V, \delta_0, \delta_1, \sigma)$ *un path-object de* Y. *Si* X *es cofibrante, entonces existe una* q*-homotopía a derecha* $K :\ f \overset{r}{\rightsquigarrow} g$ *con path-object* P *tal que* $[K] = [H]$.

Demostración. Si H es de la forma
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[dr, "id"'] & W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s"] & Y, \\ & X & \end{tikzcd}$$
por el lema 3.3 tanto d_0 como d_1 son cofibraciones triviales, de manera que existe un morfismo $k' : W \longrightarrow V$ que hace conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma f"] \arrow[d, tail, "d_0"'] & V \arrow[d, two heads, "(\delta_0,\delta_1)"] \\ W \arrow[r, "(fs,h)"'] \arrow[ur, dashed, "\exists\, k'"] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

Definiendo $k = K'd_1$ se obtiene una q-homotopía a derecha K dada por

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "k"] & V \arrow[r, shift left, "\delta_o"] \arrow[r, shift right, "\delta_1"'] & Y. \\ & Y \arrow[u, "\sigma"] \arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd}$$

Si $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, veamos que $\widehat{FH} = \widehat{FK}$. Escribimos $\widehat{FH} = Fh\widehat{Fc}$ y $\widehat{FK} = \widehat{Fp}Fk$, donde además $Fh = F\delta_1 Fk'$ y $Fk = Fk'Fd_1$. Luego,

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, bend left, "Ff"] \arrow[r, bend right, "Fg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \widehat{FH}"] & FY \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} FX \arrow[r, bend left, "Ff"] \arrow[r, bend right, "Fg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \widehat{FH}"] & FY \arrow[r, "F\sigma"] & FV \arrow[r, bend left, "F\delta_0"] \arrow[r, bend right, "F\delta_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \widehat{Fp}"] & FY \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
= FX \arrow[r, bend left=50, "F\sigma f"] \arrow[r, bend right=50, "F\sigma g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\sigma\widehat{FH}"] & FV \arrow[r, bend left=50, "F\delta_0"] \arrow[r, bend right=50, "F\delta_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \widehat{Fp}"] & FY
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
= FX \arrow[r, bend left=50, "F\sigma f"] \arrow[r] \arrow[r, bend right=50, "F\sigma g"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow Id_{F\sigma f}"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow F\sigma\widehat{FH}"] & FV \arrow[r, bend left=50, "F\sigma_0"] \arrow[r] \arrow[r, bend right=50, "F\sigma_1"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow \widehat{Fp}"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow Id_{F\sigma_1}"] & FY
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
= FX \arrow[r, bend left=50, "Fd_0"] \arrow[r] \arrow[r, bend right=50, "Fd_1"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow d_0"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \widehat{Fc}"] & FW \arrow[r, "Fk'"] & FV \arrow[r, bend left=50, "F\sigma_0"] \arrow[r] \arrow[r, bend right=50, "F\sigma_1"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow \widehat{Fp}"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow Id_{F\sigma_1}"] & FY
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
= FX \arrow[r, bend left=50, "Fd_0"] \arrow[r] \arrow[r, bend right=50, "Fd_1"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow \widehat{Fc}"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow d_1"] & FW \arrow[r, "Fk'"] & FV \arrow[r, bend left=50, "F\sigma_0"] \arrow[r] \arrow[r, bend right=50, "F\sigma_1"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow Id_{F\sigma_0}"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \widehat{Fp}"] & FY
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
= FX \arrow[r, bend left=50, "Ff"] \arrow[r, "Ff"] \arrow[r, bend right=50, "Fg"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow Ffs\widehat{Fc}"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \widehat{Fp}Fk"] & FY = FX \arrow[r, bend left=50, "Ff"] \arrow[r, bend right=50, "Fg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \widehat{FK}"] & FY.
\end{tikzcd}
$$

Esto nos dice entonces que $K \sim H$, concluyendo la demostración.

$\square$

De la proposición anterior junto con su versión dual se deduce que cuando los objetos son fibrantes y cofibrantes las clases de q-homotopías a derecha se corresponden con las clases de q-homotopías a izquierda. Dado que, asi como ocurre con las homotopías a izquierda, en $\mathscr{C}_{fc}$ no distinguimos entre clases de secuencias de homotopías y clases de q-homotopías a derecha, entonces

$\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ es la misma 2-categoría para cualquiera de las dos versiones.

Además, de este último resultado se deduce también que las hom-categorías de la 2-categoría $\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})$ son localmente pequeñas:

Corolario 4.18. *Sean X, Y fibrantes-cofibrantes, y sean $f, g : X \longrightarrow Y$ morfismos en $\mathscr{C}$. Entonces $\mathcal{H}o_{fc}(\mathscr{C})[X, Y][f, g]$ es un conjunto.*

Demostración. Dado un path-object fijo, las clases de q-homotopías a derecha de f a g correspondientes a este path-object forman un conjunto y, como X e Y son cofibrantes y fibrantes, por la proposición anterior junto con su versión dual dicho conjunto está en biyección con las clases de q-homotopías a izquierda de f a g. □

Referencias

[1] M.E. Descotte, E.J. Dubuc, M. Szyld, *Model bicategories and their homotopy bicategories*, arXiv:1805.07749 (2018).

[2] W. G. Dwyer, J. Spalinski, *Homotopy theories and model categories*, Handbook of Algebraic Topology (I. M. James, ed.), Elsevier Science B.V., 1995.

[3] P. Gabriel, M. Zisman: *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, Springer-Verlag, New York, 1967.

[4] P. G. Goerss, J. F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*, Progress in Math., vol. 174, Birkhauser Verlag, Basel, 1999.

[5] J. W. Gray, *Formal Category theory: Adjointness for 2-categories*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 391, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[6] P. Hirschhorn, *Model Categories and Their Localizations*, Mathematical Surveys and Monographs Volume 99 (2003).

[7] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[8] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics Volume 5 (1971).

[9] J. Milnor, *The geometric realization of a semi–simplicial complex*, Ann. of Math., vol. 65 (1957), 357–362.

[10] D. A. Pronk, *Etendues and stacks as bicategories of fractions*, Compositio Mathematica, Volume 102 (1996) no. 3, p. 243-303.

[11] D. Quillen, *Homotopical Algebra*, Springer Lecture Notes in Mathematics 43 (1967).

[12] E. Riehl, *Higher Dimensional Categories Model Categories and Weak Factorization Systems*, `http://www.math.jhu.edu/~eriehl/essay.pdf`

[13] R. W. Thomason, *Cat as a Closed Model Category*, Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle XXI-3. (1980), 305-324.