



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

El Laplaciano conforme y la geometría de las variedades
Riemannianas cerradas.

Juan Rodrigo Zuccotti

Director: Guillermo Henry

Julio de 2018

Índice general

1. Introducción	2
2. Preliminares	7
2.1. Variedades Riemannianas	7
2.2. Isomorfismos musicales y contracción métrica	11
2.3. Densidad Riemanniana	14
2.4. Conexión de Levi-Civita	15
2.5. Geodésicas y transporte paralelo	21
2.6. Aplicación exponencial y coordenadas normales	24
2.7. Distancia geodésica	27
2.8. Tensor de curvatura	28
2.9. Campos de Jacobi	30
2.10. Curvatura seccional	32
2.11. Curvatura de Ricci y curvatura escalar	33
2.12. Operadores diferenciales	35
2.13. Teorema de la divergencia y fórmulas de Green	39
2.14. Análisis en variedades Riemannianas	40
3. Laplaciano conforme	43
3.1. Curvatura escalar de una métrica conforme	43
3.2. Invarianza conforme de L_g	51
3.3. Enfoque variacional del problema de Yamabe	53
3.4. Constante de Yamabe	56
3.5. Constante de Yamabe de la esfera	60
4. Problema de Yamabe	68
4.1. Problema de Yamabe subcrítico	68
4.2. Solución del problema de Yamabe	73
5. Espectro del Laplaciano conforme	83
5.1. Caracterización variacional de los autovalores del Laplaciano conforme	83
5.2. Relación entre el primer autovalor y la constante de Yamabe	88
5.3. Signo de los autovalores del Laplaciano conforme	91

6. Productos Riemannianos	96
6.1. Multiplicidad de métricas de curvatura escalar constante	96
6.2. Métricas conformes de curvatura escalar constante deformando solo una variable	98
6.3. Cantidad de autovalores negativos del Laplaciano conforme en pro- ductos Riemannianos	99
6.4. Productos warped	104
Bibliografía	109

Agradecimientos

A Guillermo Henry, en primer lugar por la paciencia y predisposición que tuvo conmigo, en segundo lugar por enseñarme geometría Riemanniana y en tercer lugar por los dibujos que aparecen en la tesis.

Al jurado, que se tomó el tiempo para leer esta tesis.

A mis viejos y mi hermana, que me apoyaron económica y psicológicamente.

A mi abuelo Ricardo, que fue la persona que me enseñó a ser curioso.

A Estefi, que me soportó estos últimos años.

A mis compañeros y amigos de la facultad. En especial a José, Lucho el trucho, Juan D., Javi, Bujía y Aye, que me prestaron material y me ayudaron a preparar parciales y finales (y con quienes también compartí varios asados y whiskys). Hago un apartado especial para Lucho el trucho por todo lo que me ayudó con el tema de LaTeX (y también para Bujía, a quien le robé el esquema para la presentación).

A mis amigos de la vida. En particular Mamona, el Viejo, el Vampiro, Warles, Peters, el Virola, etc., por hacerme llorar de la risa.

A los buenos profesores y jtps que tuve a lo largo de la carrera, como por ejemplo F. Cukierman, G. Larotonda, L. Vendramín, A. Dickenstein, P. Amster, C. di Fiore, M. Paredes, P. Zadunaisky, etc. (me olvidé de un montón), por haberme enseñado tanto. También a los profesores malos, por enseñarme a arreglármelas por mi cuenta.

A la Universidad de Buenos Aires, el Estado argentino y los contribuyentes, por brindar educación de gratuita y de calidad. En especial a aquellos que aportan pero, por cuestiones económicas, no tienen acceso a todo esto.

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de esta tesis es estudiar la relación que hay entre la geometría de una variedad Riemanniana (M, g) cerrada, es decir compacta y sin borde, de dimensión $n \geq 3$ y el operador Laplaciano Conforme, en especial ciertas propiedades de su espectro.

El Laplaciano conforme es un operador diferencial lineal elíptico que se define de la siguiente manera. Para cada función suave $u \in C^\infty(M)$ el Laplaciano conforme de u esta dado por

$$L_g(u) := a_n \Delta_g u + S_g u,$$

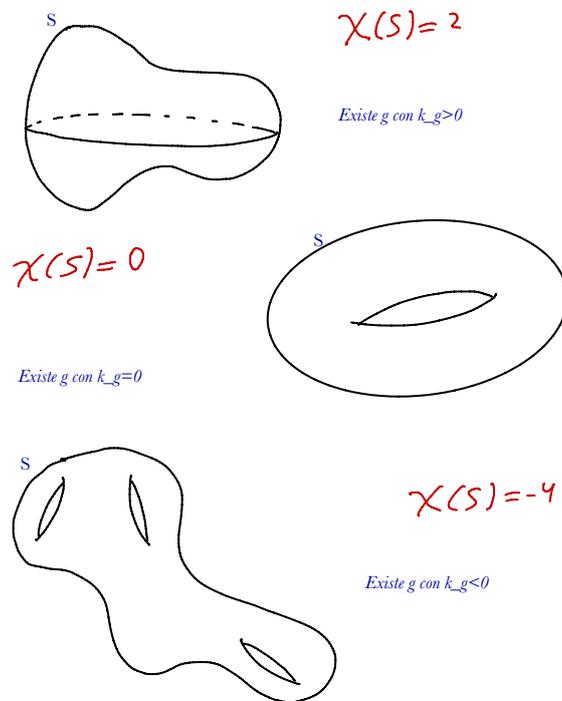
donde Δ_g es operador de Laplace-Beltrami, S_g es la curvatura escalar de (M, g) y $a_n = 4(n-1)/(n-2)$. La importancia del Laplaciano conforme está dada porque aparece naturalmente al estudiar el problema sobre cuáles son las “mejores” métricas Riemannianas que una variedad diferencial puede admitir. Cuando hablamos de las mejores nos referimos a métricas que resulten lo más uniforme, lo más “redonda” o “pareja” posible en terminos de su tensor de curvatura. En general, no podemos pretender dotar a una variedad diferencial con cualquier tipo de métrica Riemanniana. La topología y la estructura diferencial de la variedad suelen imponer restricciones sobre el conjunto de las geometrías posibles. Por ejemplo, si (M, g) es una superficie cerrada en \mathbb{R}^3 y κ_g es la curvatura Gaussiana, tenemos el siguiente resultado importante (ver [28], [13]):

Teorema 1.0.1 (Gauss-Bonnet). *Sea (M, g) una superficie Riemanniana cerrada, entonces*

$$\int_M \kappa_g dV_g = 2\pi \chi(M),$$

donde κ_g es la curvatura Gaussiana de (M, g) y $\chi(M)$ es la característica de Euler de M .

Luego, la característica de Euler de la variedad, que depende únicamente de la topología, nos impone restricciones sobre las métricas que disponemos en la variedad. En efecto, si la característica de Euler es positiva, no existe una métrica Riemanniana cuya curvatura Gaussiana sea no positiva en toda la superficie.



No obstante, en 1907 H. Poincaré y P. Koebe probaron el siguiente resultado, conocido como Teorema de Uniformización (Ver [8]):

Teorema 1.0.2 (Teorema de Uniformización). *Sea (M, g) una superficie Riemanniana compacta. Entonces existe una métrica h conforme a g de curvatura Gaussiana constante.*

En el caso de superficies, una métrica lo más “pareja”, “redonda” o uniforme posible puede entenderse como una métrica de curvatura Gaussiana constante. El teorema anterior no solo nos dice que podemos encontrar métricas de curvatura Gaussiana constante, sino que además podemos obtenerlas deformando cualquier métrica de modo que la deformación preserve la noción de ángulo.

La pregunta natural que podemos hacernos es cómo generalizar este resultado para dimensiones superiores.

Si buscamos métricas de curvatura seccional constante, encontraremos que el enunciado del teorema anterior no es cierto. De hecho, son muy pocas las variedades que admiten métricas de curvatura seccional constante. Admitir una métrica de curvatura escalar constante es una condición bastante restrictiva. En efecto, son bien conocidos los siguientes teoremas de clasificación (ver [28], [13]):

Teorema 1.0.3. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana completa, simplemente conexa de dimensión n y con curvatura seccional constante $c \in \{-1, 0, 1\}$. Entonces, (M, g) es isométrica a uno de los espacios de formas:*

- al espacio Euclídeo (\mathbb{R}^n, g_e^n) si $c = 0$,
- a la esfera con su métrica estandar de curvatura 1, que notamos con (\mathbb{S}^n, g_0^n) , si $c = 1$,
- o a el espacio hiperbólico (\mathbb{H}^n, g_h^n) de curvatura -1 , si $c = -1$.

Teorema 1.0.4. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana completa y conexa de dimensión n con curvatura seccional constante. Entonces (M, g) es difeomorfa a \tilde{M}/Γ , donde \tilde{M} su cubrimiento universal, es uno de los espacios de formas y Γ es un subgrupo de isometrías de \tilde{M} que actúa de forma totalmente discontinua en \tilde{M} , con la métrica inducida por $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$.*

Luego, una variedad que admita una métrica de curvatura seccional constante debe ser difeomorfa a uno de los cocientes anteriores, por lo cual no toda variedad admite métricas de este tipo.

Como la curvatura seccional es muy restrictiva, el paso natural es considerar otras nociones de curvatura, como por ejemplo la curvatura de Ricci. Una métrica g se dice de Einstein si en cada punto su tensor de Ricci es un múltiplo escalar de la misma, es decir, si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$Ricc = \lambda g.$$

Tomando traza en la ecuación anterior, se obtiene que

$$\lambda = \frac{1}{n} S_g.$$

Es decir,

$$Ricc = \frac{1}{n} S_g g.$$

Notar que si g es una métrica de Einstein en M , entonces g es una métrica de curvatura escalar constante (ver [28]). D. Hilbert probó (ver [10]) que las métricas de Einstein son los puntos críticos del funcional de Hilbert-Einstein, definido en el espacio de métricas Riemannianas sobre M como

$$\mathfrak{E}(g) := \frac{\int_M S_g dV_g}{Vol_g(M)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Es decir, la ecuación de Euler-Lagrange de este funcional es

$$Ricc(g) - \frac{1}{n} S_g g = 0.$$

Luego, las métricas de Einstein podrían considerarse como generalizaciones de las superficies con métricas de curvatura Gaussiana constante. Por lo que una forma posible encontrar métricas más uniformes sería buscar métricas de Einstein. Sin embargo, a pesar de que la familia de variedades que admiten métricas de Einstein es

mucho más grande que la familia de aquellas que admiten métricas de curvatura seccional constante, existen variedades cerradas que no admiten métricas de Einstein. Por ejemplo, de este tipo de variedades son $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ o la suma conexa de dos toros 4–dimensionales (ver [10], Capítulo 6). Para más ejemplos sobre variedades de dimensión 3 y 4 que no admiten métricas de Einstein, el lector puede ver [32], [26]) y las referencias allí mencionadas.

El inconveniente con estos enfoques es que el problema está sobredeterminado. El tensor curvatura tiene n^4 componentes y el tensor de Ricci tiene n^2 (sin contar las simetrías). Pero al realizar una deformación conforme de una métrica solo podemos elegir una única función escalar. Un camino en el que podemos tener esperanza de generalizar el Teorema de Uniformización a dimensiones superiores es considerando la curvatura escalar. La curvatura escalar nos dice cuánto difiere el volumen de una bola de radio muy pequeño en la variedad con respecto al volumen que una bola del mismo radio tendría en el espacio Euclídeo (ver Sección 2.11). Este enfoque es conocido como el problema de Yamabe y el siguiente teorema es consecuencia de su resolución.

Teorema 1.0.5. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión $n \geq 3$. Entonces existe una métrica \tilde{g} conforme a g de curvatura escalar constante.*

El problema Yamabe fue introducido por H. Yamabe en 1960, en el artículo [44] publicado póstumamente. En el artículo mencionado, Yamabe da una resolución al Teorema 1.0.5. Sin embargo, en 1968 N. Trüdinger ([41]) encontró una falla en la demostración dada por Yamabe, pero logró demostrar que el teorema anterior resultaba cierto al considerar métricas que eran conformes a métricas de curvatura escalar negativa. El gap en la demostración de Yamabe se debió básicamente a que en a principios de la década del '60 del siglo pasado todavía no se tenía un buen entendimiento de ciertas ecuaciones elípticas no lineales con exponente crítico, como las que aparecen naturalmente en este problema. De todas formas, la idea de la prueba de Yamabe era la correcta, como se terminó viendo en las dos décadas siguientes.

El enfoque de Yamabe consistió en describir a las métricas en la clase conforme de g como $\tilde{g} = u^{p_n-2}g$ donde $u \in C_{>0}^\infty(M)$ y $p_n = \frac{2n}{n-2}$. Entonces probó que \tilde{g} es una métrica de curvatura escalar c (constante) si y solo si u satisface la siguiente ecuación diferencial elíptica, conocida como ecuación de Yamabe:

$$L_g(u) = cu^{p_n-1}. \tag{1.1}$$

Notar que la parte lineal de la ecuación de Yamabe está dada por el Laplaciano conforme de (M, g) . Para que la Ecuación (1.1) tenga soluciones positivas, la constante c no puede tener cualquier signo. Veremos que dicho signo está íntimamente relacionado con el espectro de L_g .

La ecuación de Yamabe es la ecuación de Euler-Lagrange del funcional de Hilbert-Einstein restringido a la clase conforme de la métrica g . Este funcional no tiene ni mínimos ni máximos locales en el espacio de métricas Riemannianas, y como ya mencionamos puede que no tenga ningún punto crítico. Sin embargo es fácil de ver

que este funcional esta acotado inferiormente en cualquier clase conforme. El ínfimo de este funcional en la clase conforme recibe el nombre de constante de Yamabe. Luego, la pregunta natural que podemos hacernos es ¿Se trata en realidad de un mínimo? Si así lo fuera, tendríamos un punto crítico del funcional del funcional, y por lo tanto, una solución positiva de la ecuación de la Ecuación (1.1), lo que implicaría que hay una métrica de curvatura escalar constante en la clase conforme.

En 1976, Aubin ([6]) probó el problema de Yamabe para clases conformes que poseen métricas con energías (constante de Yamabe) no muy altas (de hecho menor que la energía de la métrica redonda en la esfera). En particular, resolvió el problema para variedades no localmente conformes a \mathbb{R}^n de dimensión $n \geq 6$. Finalmente en 1984, R. Schoen probó [38] los casos restantes utilizando el Teorema de Masa Positiva probado por él mismo y S.T. Yau en [37] y [35] para dimensiones bajas, y por E. Witten para variedades spin en [43].

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 2 incluimos las nociones de geometría Riemanniana y análisis geométrico necesarias para desarrollar los temas tratados en la tesis. En el Capítulo 3 introducimos el operador Laplaciano conforme y estudiamos algunas de sus propiedades básicas. En el Capítulo 4 discutimos la solución del problema de Yamabe. El Capítulo 5 está dedicado a estudiar las propiedades del espectro del Laplaciano conforme. Por último, en el Capítulo 6 utilizamos productos Riemannianos para construir ejemplos de variedades Riemannianas con distintas propiedades geométricas. Veremos resultados sobre multiplicidad de métricas de curvatura escalar constante en clases conformes que admiten métricas de curvatura escalar positiva y resultados sobre la cantidad de autovalores negativos del Laplaciano conforme.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo introduciremos las definiciones y resultados elementales de geometría Riemanniana y análisis geométrico que serán utilizados a lo largo de la tesis. No es intención dar prueba detallada de los mismos. El lector interesado en estos resultados puede consultar, por ejemplo, la siguiente bibliografía: [13], [28], [33], [25].

2.1. Variedades Riemannianas

La geometría Riemanniana tiene como objeto de estudio a las variedades Riemannianas. Éstas están constituidas por un espacio, que es una variedad diferencial, dotado de una estructura que le confiere geometría. Esta estructura se llama métrica Riemanniana y consiste precisamente en un tensor de tipo $(0, 2)$ covariante, simétrico y definido positivo.

Definición 2.1.1. Una Variedad Riemanniana (M, g) es una variedad diferencial M dotada de una métrica Riemanniana g .

Notemos que una métrica Riemanniana g induce en cada espacio tangente $T_p M$ un producto interno, dado por

$$\langle X_p, Y_p \rangle_p := g_p(X_p, Y_p)$$

para cada par de vectores tangentes $X_p, Y_p \in T_p M$.

Este producto interno que varía suavemente en la variedad diferencial M nos permite definir la noción de ángulo y longitud de vectores tangentes, con lo cual obtenemos una geometría en M . Uno de los objetivos principales de la geometría Riemanniana es tratar de entender todas las geometrías que puede soportar una variedad.

Un *marco local* $\{e_1, \dots, e_n\}$ de la variedad M de dimensión n es un conjunto de campos tangentes definidos en un abierto U de la variedad, tales que en cada $p \in U$, $\{e_1(p), \dots, e_n(p)\}$ es una base de $T_p M$. Por ejemplo, si (U, x) es una carta de M , los

campos tangentes canónicos $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ inducidos por este sistema de coordenadas forman un marco local. Notaremos $\{e^1, \dots, e^n\}$ a su marco dual.

Si g es una métrica Riemanniana, la podemos describir localmente utilizando un marco local como

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} e^i \otimes e^j,$$

donde g_{ij} es la función suave $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g_{ij}(p) := g_p(e_i(p), e_j(p)).$$

En particular, si consideramos una carta (U, x) , localmente la métrica será de la forma

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Notemos que la matriz (g_{ij}) es inversible en cada punto $p \in U$ y además varía suavemente. Luego, su inversa, a la que notaremos (g^{ij}) , también varía de forma suave.

El siguiente teorema nos dice que la teoría de variedades Riemannianas no es vacía.

Teorema 2.1.1. *Toda variedad diferencial M admite una métrica Riemanniana g .*

De hecho, de la demostración del Teorema 2.1.1 (ver por ejemplo [27] Proposición 13.3) se desprende que no hay una única métrica Riemanniana, sino que sobre una misma variedad se pueden definir infinitas métricas Riemannianas y, posiblemente, geometrías muy diversas.

A continuación daremos algunos ejemplos importantes de variedades Riemannianas, y veremos un caso de variedades Riemannianas difeomorfas que no tienen la misma geometría.

Ejemplo 2.1.1. *Llamamos espacio Euclídeo a la variedad Riemanniana (\mathbb{R}^n, g_e^n) , donde la métrica g_e^n está dada por producto interno usual de \mathbb{R}^n en cada espacio tangente. Con el sistema de coordenadas usuales tenemos que*

$$g_e^n = \sum_{i,j} \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_i dx^i \otimes dx^i.$$

Ejemplo 2.1.2. *Sean M y N dos variedades diferenciales y g una métrica Riemanniana definida sobre N . Si $f : M \rightarrow N$ es una inmersión, es decir $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es una aplicación inyectiva para todo $p \in M$, el tensor f^*g inducido por el pullback de g por f es una métrica Riemanniana en M . Más precisamente, esta métrica está definida por*

$$(f^*g)_p(X_p, Y_p) := g_{f(p)}(d_p f X_p, d_p f Y_p).$$

*En este caso decimos que (M, f^*g) es una subvariedad Riemanniana inmersa de (N, g) . Si además f es una sumersión, decimos que (M, f^*g) es una subvariedad sumergida de (N, g) .*

De forma un poco más general, tenemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1.3. Sean M y N dos variedades diferenciales, g una métrica sobre N y $f : M \rightarrow N$ una función suave. Si el tensor f^*g es definido positivo, lo llamamos métrica inducida por el pullback de f sobre M .

Un caso particular del ejemplo 2.1.2 es el siguiente:

Ejemplo 2.1.4. Sea $\mathbb{S}_R^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = R\}$ la esfera n -dimensional de radio R . Llamamos métrica estándar o métrica redonda de \mathbb{S}_R^n a la métrica g_0^n que resulta de la restricción de la métrica Euclídea a la esfera. Es decir, $g_0^n = i^*g_e^{n+1}$, donde $i : \mathbb{S}_R^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es la inclusión. De ahora en adelante, para simplificar notación, a la esfera de radio 1 la notaremos \mathbb{S}^n .

Ejemplo 2.1.5. Sea \mathbb{B}_R^n la bola de radio R en \mathbb{R}^n . Consideremos la métrica dada en las coordenadas usuales por

$$g_h^n = \frac{4R^4}{(R^2 - |x|^2)^2} \sum_i dx^i \otimes dx^i.$$

(\mathbb{B}_R^n, g_h^n) es un modelo de la geometría hiperbólica conocido como la bola de Poincaré. Cuando $n = 2$, este modelo es conocido como el disco de Poincaré. De ahora en más notaremos (\mathbb{H}_R^n, g_h^n) a cualquier modelo de la geometría hiperbólica (ver [28], Proposición 3.5 y [13], Capítulo 8).

A lo largo de la tesis, $\mathfrak{X}(M)$ denotará el espacio de campos tangentes (suaves) de la variedad diferencial M .

Ejemplo 2.1.6. Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas. Podemos dotar de forma natural una métrica Riemanniana al producto $M \times N$. Esta métrica, que llamaremos métrica producto, está definida por

$$g + h := \pi_M^*g + \pi_N^*h,$$

donde $\pi_M : M \times N \rightarrow M$ y $\pi_N : M \times N \rightarrow N$ son las proyecciones canónicas. De forma más explícita,

$$(g + h)(X, Y) := g(d\pi_M X, d\pi_M Y) + h(d\pi_N X, d\pi_N Y)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M \times N)$.

Ejemplo 2.1.7. Sea G un grupo de Lie. Dado $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno en $\mathfrak{g} := T_e G$, el álgebra de Lie asociada, podemos definir una métrica Riemanniana g en G vía la traslación a izquierda del producto interno. Es decir,

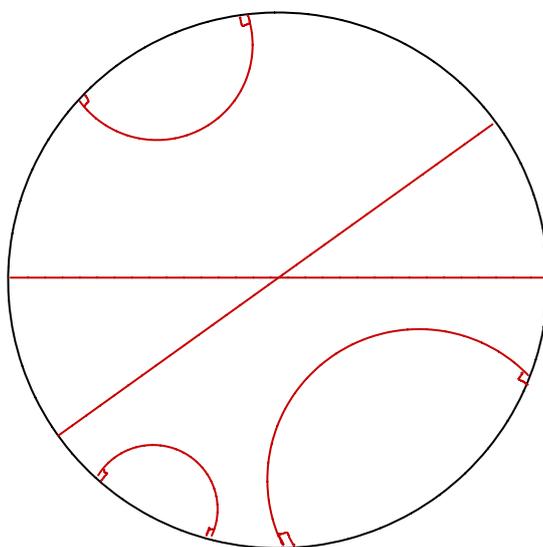
$$g(X_v, Y_v) := \langle d_v L_{v^{-1}} X_v, d_v L_{v^{-1}} Y_v \rangle$$

para todo $X_v, Y_v \in T_v G$, donde L_v es la función definida por

$$L_v(w) := vw.$$

La métrica g satisface que es invariante por las funciones L_v , es decir $L_v^*(g) = g$ para todo $v \in G$ (ver Ejemplo 2.1.8).

Notemos que en el Ejemplo 2.1.5 tenemos un caso de una variedad Riemanniana difeomorfa al disco de \mathbb{R}^n pero cuya geometría es diferente. En efecto, como es bien sabido, en el espacio Euclídeo las curvas que minimizan la distancia entre dos puntos son las rectas. Sin embargo, como ilustramos en el siguiente dibujo, esto no es así en el disco de Poincaré.



Disco de Poincaré.

Las funciones entre variedades Riemannianas que preservan las propiedades geométricas son aquellas que respetan la métrica.

Definición 2.1.2. Sean (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) dos variedades Riemannianas. Diremos que un difeomorfismo $f : M \rightarrow \tilde{M}$ es una isometría si $f^*\tilde{g} = g$. Es decir, si en cada punto $p \in M$ tenemos que

$$\tilde{g}_{f(p)}(d_p f(X_p), d_p f(Y_p)) = g_p(X_p, Y_p)$$

para todo par de vectores tangentes $X_p, Y_p \in T_p M$. Una isometría local es una función suave $f : M \rightarrow \tilde{M}$ para la cual en cada punto $p \in M$ existe un abierto U entorno a p tal que $f|_U : U \rightarrow f(U)$ es una isometría.

Ejemplo 2.1.8. Si G es un grupo de Lie dotado con la métrica Riemanniana construida en el Ejemplo 2.1.7, entonces todas las traslaciones a izquierda resultan isometrías.

En esta tesis trataremos con una familia de funciones que incluye a las isometrías. Esta es la familia de los difeomorfismos conformes, que son aplicaciones que preservan los ángulos pero no necesariamente las distancias.

Definición 2.1.3. Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas. Decimos que un difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo conforme si existe una función positiva $\varphi \in C^\infty(M)$ tal que $f^*h = \varphi g$. En particular si $M = N$, decimos que dos métricas g_1 y g_2 son conformemente equivalentes punto a punto si la identidad es un difeomorfismo conforme, es decir, si existe una función positiva $\varphi \in C^\infty(M)$ tal que $g_2 = \varphi g_1$. Claramente esto define una relación de equivalencia en el espacio de métricas Riemannianas sobre M . Sus clases de equivalencia se denominan clases conformes.

Ejemplo 2.1.9. Sea \mathbb{S}^n la esfera de radio 1 y N el punto dado por $N := (0, \dots, 0, 1)$. Entonces, la proyección estereográfica desde el polo norte $\phi_N : \mathbb{S}^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$\phi_N(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) := \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}} \right),$$

es un difeomorfismo conforme.

En efecto,

$$(\phi_N^{-1})^* g_0^n = \frac{4R^4}{(|x|^2 + R^2)^2} g_e^n,$$

donde

$$\phi_N^{-1}(x^1, \dots, x^n) := \left(\frac{2x^1}{1 + \|x\|^2}, \dots, \frac{2x^n}{1 + \|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right)$$

es su inversa (ver [28], Lema 3.4).

2.2. Isomorfismos musicales y contracción métrica

Una métrica Riemanniana g induce un isomorfismo canónico entre el fibrado tangente TM y el fibrado cotangente T^*M que nos permite identificar tanto campos tangentes con 1-formas como también tensores de tipo (k, r) con tensores de tipo $(k + 1, r - 1)$ o $(k - 1, r + 1)$.

Definición 2.2.1. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos la 1-forma $X^\flat \in \mathfrak{X}^*(M)$ como

$$X^\flat(Y) := g(X, Y)$$

para cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Similarmente, dado $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ llamamos ω^\sharp al único campo tangente que satisface

$$g(\omega^\sharp, Y) = \omega(Y)$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Las asignaciones $X \mapsto X^\flat$ y $\omega \mapsto \omega^\sharp$ son mutuamente inversas, y por lo tanto inducen un par de isomorfismos $\flat : TM \rightarrow T^*M$ y $\sharp : T^*M \rightarrow TM$ que llamaremos *isomorfismos musicales*.

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Las expresiones locales para el campo X y la forma ω respecto a un marco local $\{e_1, \dots, e_n\}$ y su marco dual $\{e^1, \dots, e^n\}$ son

$$X = \sum_i X^i e_i$$

y

$$\omega = \sum_i \omega_i e^i.$$

Luego, las expresiones locales para X^\flat y ω^\sharp son las siguientes:

$$X^\flat = \sum_j \left(\sum_i g_{ij} X^i \right) e^j$$

y

$$\omega^\sharp = \sum_j \left(\sum_i g^{ij} \omega_i \right) e_j.$$

Para extender esta idea al fibrado tensorial $T_r^k(M)$, simplemente hay que indicar en qué índice covariante estamos aplicando \flat o en qué índice contravariante estamos aplicando \sharp .

Un ejemplo importante es el siguiente. Dado un tensor de tipo $(0, 2)$

$$T = \sum_{i,j} T_{ij} e^i \otimes e^j$$

obtenemos el tensor de tipo $(1, 1)$

$$T^\sharp = \sum_{i,j,k} g^{jk} T_{ij} e^i \otimes e_k.$$

Entonces definimos la traza de X por g como

$$tr_g(T) := C_{ki}(T^\sharp),$$

donde C_{ki} es la contracción en los índices k e i (ver [28]).

En coordenadas, tenemos que

$$tr_g(T) = C_{ki} \left(\sum_{i,j,k} g^{jk} T_{ij} e^i \otimes e_k \right) = \sum_{i,j} g^{ji} T_{ij}.$$

Por la simetría del tensor métrico g , podemos hacer el mismo procedimiento considerando el tensor

$$T^\sharp = \sum_{i,j,k} g^{ki} T_{ij} e_i \otimes e^j$$

y obtenemos el mismo resultado.

Los isomorfismos musicales nos permiten extender a cualquier variedad Riemanniana la noción de campo gradiente de una función diferenciable del espacio Euclídeo. Si (M, g) es una variedad Riemanniana y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave, el *gradiente de f* es el campo tangente

$$\nabla_g f := (df)^\sharp.$$

Es decir, $\nabla_g f$ es el único campo tangente que satisface

$$g(\nabla_g f, Y) = df(Y)$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Sea (U, x) una carta. Si escribimos localmente

$$\nabla_g f = \sum_i (\nabla_g f)^i \partial_i,$$

entonces,

$$\partial_j f = df(\partial_j) = g(\nabla_g f, \partial_j) = g\left(\sum_i (\nabla_g f)^i \partial_i, \partial_j\right) = \sum_i g_{ij} (\nabla_g f)^i.$$

Luego, para cada k nos queda que

$$\begin{aligned} \sum_j g^{jk} \partial_j f &= \sum_j \sum_i (\nabla_g f)^i g_{ij} g^{jk} = \sum_i (\nabla_g f)^i \sum_j g_{ij} g^{jk} \\ &= \sum_i (\nabla_g f)^i \delta_{ik} = (\nabla_g f)^k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos la siguiente expresión local para el gradiente:

$$\nabla_g f = \sum_j \left(\sum_i g^{ij} \partial_i f \right) \partial_j. \quad (2.1)$$

Al igual que el gradiente Euclídeo, el gradiente Riemanniano nos da la dirección de mayor crecimiento de la función f en términos de la métrica.

2.3. Densidad Riemanniana

Para desarrollar una teoría de integración en variedades Riemannianas, como no nos queremos restringir únicamente al estudio de variedades orientables, debemos introducir la noción de densidad.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n . Una *densidad* en V es una función

$$\mu : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n\text{-veces}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface

$$\mu(T(v_1), \dots, T(v_n)) = |\det T| \mu(v_1, \dots, v_n)$$

para toda transformación lineal $T : V \longrightarrow V$. Notaremos por $\mathfrak{D}(V)$ al conjunto de densidades definidas en V .

Si M es una variedad diferencial, el conjunto

$$\mathfrak{D}(M) := \coprod_{p \in M} \mathfrak{D}(T_p M)$$

junto con la proyección canónica $\pi : \mathfrak{D}(M) \longrightarrow M$ tiene estructura de fibrado vectorial suave de rango 1. Llamaremos *densidad sobre M* a cualquier sección suave de este fibrado. Un desarrollo de este tópico se puede encontrar en [27].

Sea (M, g) una variedad Riemanniana. La métrica g induce sobre M una densidad canónica μ_g , la cual nos permite calcular volúmenes e integrales de funciones. En el espacio euclídeo, la propiedad fundamental que satisface la forma canónica de volumen es que el volumen del cubo unitario es 1. Si (M, g) es una variedad Riemanniana cualquiera, la propiedad que debe satisfacer μ_g es que para cualquier marco local ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$, valga que $\mu_g(e_1, \dots, e_n) = 1$. Notemos que siempre tenemos un marco ortonormal alrededor de cualquier punto $p \in M$, ya que si tomamos una carta (U, x) centrada en p y aplicamos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmith al marco coordenado, obtendremos un marco ortonormal en cada punto $q \in U$.

Teorema 2.3.1. *Dada una variedad riemanniana (M, g) , existe una única densidad μ_g tal que $\mu_g(e_1, \dots, e_n) = 1$ para todo marco local $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal respecto de g .*

Demostración. Ver [27], Proposición 15.29 y Proposición. 16.45. □

A μ_g la llamaremos *densidad Riemanniana* y la denotaremos dV_g .

Si (U, x) es una carta, la expresión local para dV_g (ver [27], Proposición 15.31) está dada por

$$dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})} |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|.$$

Así, si (U, x) es una carta y $A \subseteq U$ es un subconjunto medible, podemos calcular el volumen de A como

$$\text{Vol}_g(A) = \int_A dV_g = \int_{x(A)} \sqrt{\det(g_{ij})} \circ x^{-1} dx^1 \dots dx^n.$$

Para calcular el volumen de un subconjunto medible $B \subseteq M$, simplemente tomamos un atlas $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ y una partición de la unidad subordinada $\{\rho_\alpha\}$ y obtenemos que

$$\text{Vol}_g(B) = \sum_\alpha \int_{x_\alpha(B \cap U_\alpha)} \rho_\alpha \sqrt{\det(g_{ij})} \circ x_\alpha^{-1} dx^1 \dots dx^n.$$

Fácilmente se puede ver que esta expresión no depende del atlas ni de la partición de la unidad elegida. De forma similar, si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua de soporte compacto, la integral de f sobre M se define por

$$\int_M f dV_g := \sum_\alpha \int_{x_\alpha(U_\alpha)} \rho_\alpha f \sqrt{\det(g_{ij})} \circ x_\alpha^{-1} dx^1 \dots dx^n.$$

2.4. Conexión de Levi-Civita

Sea M una variedad diferencial. Dada una función $f \in C^\infty(M)$ y un campo tangente $X \in \mathfrak{X}(M)$ sabemos que la derivada de f en la dirección de X está dada por $X(f) = df(X)$. Una conexión afín es una regla para identificar espacios tangentes de puntos cercanos, lo que nos permite extender la noción de derivada a campos vectoriales y tensoriales.

Si bien la derivada direccional de una función es una noción intrínseca de la variedad diferencial, en principio no podemos derivar los campos intrínsecamente de una manera canónica. Veamos qué ocurre cuando tratamos con superficies regulares de \mathbb{R}^3 . Consideremos S una superficie regular en \mathbb{R}^3 y X un campo tangente a S . Si imaginamos un individuo bidimensional que vive sobre la superficie, este solo podrá percibir la componente tangencial de cualquier aceleración. Por ejemplo, si el individuo se mueve a velocidad constante sobre el meridiano de una esfera, este percibirá que la que la derivada de su campo velocidad (es decir, su aceleración) es cero. Sin embargo, para un individuo tridimensional que lo observa desde afuera, el movimiento anterior claramente está acelerado. Por lo tanto, intrínsecamente en la superficie únicamente se perciben las componentes tangenciales de las derivadas direccionales de los campos tangentes. En el caso de superficies regulares en \mathbb{R}^3 , estas son las proyecciones ortogonales de las mismas sobre el plano tangente respectivo. De forma un poco más precisa, consideremos un campo $X : S \rightarrow TS \subseteq \mathbb{R}^3$, un punto $p \in S$ y un vector tangente $v \in T_p S$. Si $D_v X(p) \in \mathbb{R}^3$ es la derivada del campo X en p en la dirección de v , entonces la podemos descomponer como

$$D_v X(p) = D_v X^T(p) + D_v X^\perp(p),$$

donde $D_v X^T(p) \in T_p S$ es la componente tangencial, $D_v X^\perp(p) \in T_p S^\perp$ es la componente ortogonal y el complemento ortogonal $T_p S^\perp$ lo tomamos con respecto a la métrica Euclídea de \mathbb{R}^3 . Luego, la parte de $D_v X(p)$ que no percibe el individuo es $D_v X^\perp(p)$. Notemos que estamos utilizando fuertemente dos hechos. El primero es que S es subvariedad \mathbb{R}^3 y por lo tanto, $TS \subseteq T\mathbb{R}^3$. El segundo es que determinamos un complemento del espacio tangente en cada punto de S utilizando la métrica

Euclídea de \mathbb{R}^3 , de hecho estamos considerando en S con la métrica inducida por la métrica Euclídea, y con esto la componente de la aceleración que no se percibe desde la superficie.

En una variedad diferencial cualquiera sucede exactamente lo mismo. Para definir el concepto de derivadas de orden superior deberíamos determinar el complemento del espacio tangente que no queremos que se aprecie intrínsecamente desde la variedad. Esta elección no es para nada canónica. Podremos definir muchas derivadas covariantes para una misma variedad. No obstante, más adelante veremos que en el caso de variedades Riemannianas existe una derivada covariante especial que estará determinada por la conexión de Levi-Civita.

A continuación introduciremos el concepto de conexión afín:

Definición 2.4.1. Una Conexión Afín es una función $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ denotada por $(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$ que satisface las siguientes propiedades:

1. Es $C^\infty(M)$ -lineal en X . Es decir,

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y$$

para todo $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ y $X_1, X_2, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

2. Es \mathbb{R} -lineal en Y . Esto es,

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

3. Satisface la regla de Leibniz. Es decir,

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$$

para toda $f \in C^\infty(M)$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Al campo vectorial $\nabla_X Y$ se lo llama *derivada covariante de Y en la dirección de X* .

Cada conexión afín ∇ tiene asociada una función K , llamada *función de conexión*, que nos facilita interpretar geoméricamente lo que sucede con las derivadas de orden superior con respecto a la conexión afín. El siguiente resultado puede verse en [23].

Teorema 2.4.1. *Sea M una variedad diferencial con una conexión afín ∇ . Entonces existe una única función diferenciable $K : TTM \longrightarrow TM$, llamada función de conexión, que satisface:*

1. Si $v \in TM$ y $\pi(v) = p$, donde $\pi : TM \longrightarrow M$ es la proyección canónica, entonces $K(T_v TM) \subseteq T_p M$.
2. $K_v := K|_{T_v TM} : T_v TM \longrightarrow T_p M$ es lineal.

3. Si $v \in TM$ y $w \in T_vTM$ son tales que $w = d_pX(Y)$, donde $Y \in T_pM$ y $X \in \{X \in \mathfrak{X}(M) : X(p) = v\}$, entonces $K(w) = \nabla_Y X$.

Sea $v \in TM$. Consideremos las funciones lineales $d_v\pi : T_vTM \rightarrow T_{\pi(v)}M$ y $K_v : T_vTM \rightarrow T_{\pi(v)}M$ inducidas por la proyección canónica y por la conexión ∇ , respectivamente. Entonces obtenemos la siguiente descomposición del subespacio T_vTM :

$$T_vTM = T_v^vTM \oplus T_v^hTM, \quad (2.2)$$

donde $T_v^vTM := \text{Ker}(d_v\pi)$ y $T_v^hTM := \text{Ker}(K_v)$ (ver [23]). A los subespacios T_v^vTM y T_v^hTM los llamamos *subespacio vertical* y *subespacio horizontal*, respectivamente. Claramente, el subespacio vertical está determinado únicamente por la información del atlas de la variedad, mientras el subespacio horizontal depende de la conexión elegida.

Notemos que esta descomposición nos permite interpretar la derivada covariante, tal como hicimos para superficies en \mathbb{R}^3 . Concretamente, consideremos un campo $X : M \rightarrow TM$, un punto $p \in M$ y un vector tangente $v \in T_pM$. Luego, si $d_pX : T_pM \rightarrow T_{X_p}TM$ es la diferencial de X en p , entonces $d_pX(v) \in T_{X_p}TM$ es la derivada de X en la dirección de v . Utilizando (2.2), podemos descomponer $T_{X_p}TM$ de la siguiente manera:

$$T_{X_p}TM = T_{X_p}^vTM \oplus T_{X_p}^hTM.$$

Luego, podemos escribir a $d_pX(v)$ de forma única como

$$d_pX(v) = d_pX(v)^v + d_pX(v)^h$$

con $d_pX(v)^v \in T_{X_p}^vTM$ y $d_pX(v)^h \in T_{X_p}^hTM$. Así, aplicando el Teorema 2.4.1, tenemos que

$$\nabla_v X = K(d_pX(v)) = K(d_pX(v)^v + d_pX(v)^h) = K(d_pX(v)^v).$$

Esto nos dice que si elegimos una conexión afín ∇ (que nos determina una función de conexión K), entonces podemos identificar T_pM con $T_{X_p}^vTM$ y $\nabla_v X$ con $d_pX(v)^v$ y $d_pX(v)^h$ es la componente de $d_pX(v)$ que no puede percibir un individuo que vive en M . Notemos que en particular $\nabla_v X = 0$ si y solo si $d_pX(v) \in T_{X_p}^hTM$. Esto quiere decir que el individuo percibe como movimiento no acelerado a aquel que tiene componente vertical nula.

Una propiedad importante de las conexiones afines es que el valor del campo $\nabla_X Y$ en un punto $p \in M$ depende solo de los valores de Y en un entorno de p y del valor de X en p .

Dada una conexión afín ∇ en M y dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, nos sería de mucha utilidad tener una descripción local de la derivada covariante $\nabla_X Y$. Para esto consideremos un marco local $\{e_1, \dots, e_n\}$ (generalmente consideraremos marcos inducidos por los sistemas de coordenadas). Llamamos *símbolos de Christoffel* a las funciones suaves Γ_{ij}^k determinadas por

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k.$$

Luego, dados un abierto $U \subseteq M$, X e Y dos campos definidos en U y $\{e_1, \dots, e_n\}$ un marco local, podemos escribir localmente a los campos X e Y como

$$X = \sum_i X^i e_i$$

e

$$Y = \sum_j Y^j e_j.$$

Los símbolos de Christoffel determinan la conexión ∇ en U mediante la siguiente fórmula:

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(X(Y^k) + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) e_k.$$

Con una conexión afín ∇ también podemos extender la noción de derivada covariante a campos tensoriales de cualquier tipo. En efecto, se puede ver que dada una variedad diferencial M dotada de una conexión afín ∇ , existe una única conexión $\tilde{\nabla}$ definida sobre cada fibrado tensorial $T_k^r(M)$ que satisface las siguientes propiedades:

1. Coincide con la derivada direccional usual en $C^\infty(M)$. Es decir,

$$\tilde{\nabla}_X f = X(f) = df(X) \quad (2.3)$$

para toda función $f \in C^\infty(M)$ y todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

2. Coincide con la conexión original sobre los campos tangentes. Esto es,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y \quad (2.4)$$

para todo par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

3. Dados dos campos tensoriales F y G de cualquier tipo y un campo tangente $X \in \mathfrak{X}(M)$, vale la siguiente regla del producto:

$$\tilde{\nabla}_X (F \otimes G) = (\tilde{\nabla}_X F) \otimes G + F \otimes (\tilde{\nabla}_X G). \quad (2.5)$$

4. $\tilde{\nabla}$ conmuta con cualquier contracción. Es decir,

$$\tilde{\nabla}_X (C(Y)) = C(\tilde{\nabla}_X Y) \quad (2.6)$$

donde X e Y son dos campos y C es la contracción en cualquier par de índices.

Para simplificar la notación también notaremos a $\tilde{\nabla}$ como ∇ .

Las propiedades (1)-(4) que caracterizan a ∇ nos sirven para calcular cuánto vale la derivada covariante de un campo tensorial de cualquier tipo sabiendo cuánto vale sobre los campos vectoriales. Por ejemplo, si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo tangente y $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ es una 1-forma, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_X (\omega(Y)) &= \nabla_X (C(\omega \otimes Y)) = C(\nabla_X (\omega \otimes Y)) \\ &= C(\nabla_X \omega \otimes Y + \omega \otimes \nabla_X Y) = (\nabla_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y) \end{aligned}$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. De forma similar, si F es un campo tensorial de tipo (r, k) , tenemos que

$$\begin{aligned} (\nabla_X F)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_k) &= X(F(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_k)) \\ &- \sum_{j=1}^r F(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_k) \\ &- \sum_{i=1}^k F(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_k). \end{aligned}$$

En general, dada una variedad diferencial M dotada de una conexión afín ∇ , si F es un campo tensorial de tipo (r, k) entonces definimos la Derivada Covariante Total como el campo tensorial de tipo $(r, k + 1)$

$$\nabla F : \mathfrak{X}^*(M) \times \dots \times \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

dado por

$$\nabla F(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_k, X) := \nabla_X F(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_k).$$

Notemos que en particular si $f \in C^\infty(M)$, entonces $\nabla f = df$, ya que para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos que $\nabla f(X) = \nabla_X f = X(f) = df(X)$.

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo, entonces ∇X es el tensor $(1, 1)$ dado por

$$\nabla X(\omega, Y) = \omega(\nabla_Y X)$$

Pensado como un elemento de $\text{End}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M))$, es la aplicación $Y \mapsto \nabla_Y X$. Inductivamente, definimos la k -ésima derivada covariante del campo X como el tensor $\nabla^k X := \nabla(\nabla^{k-1} X)$. Localmente, si (U, x) es una carta y escribimos

$$X = \sum_i X^i \partial_i,$$

entonces

$$\nabla X = \sum_{i,j} a_j^i \partial_i \otimes dx^j,$$

donde

$$\begin{aligned} a_j^i &= \nabla X(dx^i, \partial_j) = dx^i(\nabla_{\partial_j} X) = dx^i \left(\sum_k \nabla_{\partial_j} (x^k \partial_k) \right) \\ &= \sum_k dx^i (\partial_j X^k + X^k \nabla_{\partial_j} \partial_k) = \sum_k dx^i \left(\partial_j X^k \partial_k + X^k \sum_l \Gamma_{jk}^l \partial_l \right) \\ &= \sum_k \left(\partial_j X^k \delta_{ik} + X^k \sum_l \Gamma_{jk}^l \delta_{il} \right) = \partial_j X^i + \sum_k X^k \Gamma_{jk}^i. \end{aligned}$$

Como mencionamos al principio de la sección, las variedades Riemannianas tienen asociada una conexión especial que generaliza la conexión canónica del espacio Euclídeo.

Teorema 2.4.2. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Entonces existe una única conexión ∇ , llamada Conexión de Levi-Civita, que satisface las siguientes propiedades:*

1. *Es compatible con la métrica:*

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (2.7)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Es decir, $\nabla g \equiv 0$.

2. *Es libre de torsión:*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (2.8)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Ver [28], Teorema 5.3 o [13], Teorema 3.6, Capítulo 2. \square

Más adelante, cuando hablemos de curvas y geodésicas, podremos interpretar geoméricamente el significado de estas propiedades.

De la demostración del teorema anterior se desprenden dos fórmulas que además de caracterizar la conexión de Levi-Civita nos permitirán realizar varios cálculos. La primera es la Fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = & X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ & - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X]) + g(X, [Z, Y]) \end{aligned} \quad (2.9)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ (ver [13], [28]). A partir de esta fórmula obtenemos la segunda, que nos permite calcular los símbolos de Christoffel respecto a una carta (U, x) en términos de los coeficientes de la métrica:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (2.10)$$

Por último debemos mencionar que, como es de esperar, la conexión de Levi-Civita es preservada por isometrías; tal como dice la siguiente proposición.

Proposición 2.4.1. *Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas y sea $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ una isometría. Si notamos por ∇ y $\tilde{\nabla}$ a las conexiones de Levi-Civita de M y N respectivamente, entonces*

$$df(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{df(X)}(df(Y))$$

para todo par de campos tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

2.5. Geodésicas y transporte paralelo

En esta sección introduciremos la noción de curva geodésica, que son las curvas que juegan el rol que tienen las rectas en la geometría clásica. En el espacio Euclídeo podemos caracterizar a las rectas de distintas maneras. Una forma posible de hacerlo es como las curvas que minimizan la distancia entre dos puntos dados. Más adelante veremos que si consideramos puntos lo suficientemente cercanos esta caracterización también vale para las geodésicas. Otra forma de caracterizar a las rectas es como las curvas de aceleración nula.

Dada una curva suave $\gamma : I \rightarrow M$, donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, un *campo tangente sobre γ* es una función suave $V : I \rightarrow TM$ tal que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ para todo tiempo $t \in I$. Llamemos $\mathfrak{X}(\gamma)$ al espacio de campos vectoriales sobre la curva γ . La siguiente proposición nos muestra cómo actúa una conexión afín sobre los campos tangentes a una curva.

Proposición 2.5.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y ∇ la conexión de Levi-Civita. Dada una curva suave $\gamma : I \rightarrow M$, tenemos que ∇ determina un único operador $D_t : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. *Es \mathbb{R} -lineal:*

$$D_t(aV + bW) = aD_t(V) + bD_t(W)$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

2. *Vale la regla del producto:*

$$D_t(fV) = \frac{df}{dt}V + fD_tV$$

para toda $f \in C^\infty(M)$ y para todo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

3. *Si $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ y $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(M)$ es tal que $\tilde{V}|_\gamma = V$, entonces*

$$D_tV(t) = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}(t)}\tilde{V}.$$

Llamamos a D_tV *Derivada Covariante de V sobre γ* .

Demostración. Ver [28] Lema 4.9 o [13], Proposición 2.2, Capítulo 2. □

Si (U, x) es una carta y escribimos

$$V(t) = \sum_j V^j(t)\partial_j,$$

la expresión local para la derivada covariante de un campo sobre una curva en un punto $t_0 \in I$ es

$$D_tV(t_0) = \sum_k \left[\frac{dV^k}{dt}(t_0) + \sum_{i,j} V^j(t_0) \frac{d\gamma^i}{dt}(t_0) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0)) \right] \partial_k.$$

Observemos que del punto 3 de la proposición anterior se sigue que el valor del campo $\nabla_X Y$ en un punto $p \in M$ depende solo de los valores de Y sobre una curva tangente a X_p .

La derivada covariante para campos vectoriales sobre una curva γ nos permite hablar de la aceleración de la misma, definida como la derivada covariante del campo tangente $\frac{d\gamma}{dt}$. Diremos que una curva γ es una geodésica si su aceleración es nula, es decir

$$D_t \frac{d\gamma}{dt} = 0.$$

Sea K la función de conexión definida en la sección anterior. Si V es un campo sobre la curva γ entonces

$$K \left(d_t V \left(\frac{d\gamma}{dt}(t) \right) \right) = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}(t)} V = D_t V.$$

En particular, si V es el vector velocidad de la curva γ , la función K nos determina la componente de la derivada del campo V que puede percibir un individuo que vive en la variedad. Luego, las geodésicas resultan ser las curvas tales que

$$K \left(\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) \right) = 0.$$

El siguiente teorema, consecuencia del teorema de existencia y unicidad local para ecuaciones diferenciales ordinarias, nos dice que por cada punto $p \in M$, dado v un vector tangente a M en p , pasa una única geodésica con velocidad inicial v . Su demostración puede encontrarse en [28], Teorema 4.10.

Teorema 2.5.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y ∇ La conexión de Levi-Civita. Dados un punto $p \in M$, un vector $v \in T_p M$ y un tiempo inicial $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces existe un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ y una geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ tales que $t_0 \in I$, $\gamma(t_0) = p$ y $\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = v$. Además cualquier par de geodésicas que pasan por p y tienen la misma velocidad inicial coinciden en la intersección de sus dominios.*

De la unicidad se sigue que por cada punto $p \in M$, dada una velocidad inicial $v \in T_p M$ pasa una geodésica maximal, en el sentido de que no se puede extender a un intervalo mayor. Notaremos como γ_v a la geodésica maximal tal que $\gamma_v(0) = p$ y $\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = v$; y denotaremos I_v al intervalo maximal donde está definida.

Si (U, x) es una carta y $x^i(t) = x^i \circ \gamma_v(t)$, entonces la geodésica maximal satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x^k}{dt^2}(t) + \sum_{i,j} \frac{dx^i}{dt}(t) \frac{dx^j}{dt}(t) \Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0 & \text{para todo } 1 \leq k \leq n \text{ y } t \in I_v, \\ \frac{dx^i}{dt}(0) = v_i & \text{para todo } 1 \leq i \leq n, \\ x_i(0) = p_i & \text{para todo } 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

donde

$$v = \sum_i v_i \partial_i$$

y $x(p) = (p_1, \dots, p_n)$.

Una propiedad que cumplen las geodésicas maximales es la siguiente.

Lema 2.5.1. Para todo $v \in TM$, si $c, t \in \mathbb{R}$ entonces vale que

$$\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct),$$

siempre que la igualdad tenga sentido.

Demostración. Ver [28], Lema 5.8. □

Definición 2.5.1. Sea (M, g) una variedad Riemanniana y sea $\gamma : I \rightarrow M$ una curva en M . Un campo vectorial V sobre γ se dice paralelo respecto de ∇ si

$$D_t V(t) = 0$$

para todo $t \in I$. Un campo vectorial X definido en todo M se dice paralelo si es paralelo sobre toda curva (o equivalentemente si $\nabla X = 0$).

La definición anterior nos dice que una geodésica es una curva cuyo campo de velocidad es paralelo sobre toda la curva. Como consecuencia del Teorema de existencia y unicidad global para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales tenemos el siguiente resultado que nos permitirá definir el transporte paralelo, que no es otra cosa que la generalización de la traslación de vectores tangentes en el espacio Euclídeo.

Teorema 2.5.2. Sea (M, g) una variedad Riemanniana, y sea $\gamma : I \rightarrow M$ una curva en M definida sobre un intervalo I . Dado un tiempo $t_0 \in I$ y un vector v_0 tangente a M en $\gamma(t_0)$, entonces existe un único campo vectorial V paralelo sobre γ tal que $V(t_0) = v_0$. A este campo vectorial lo llamamos transporte paralelo de v_0 a lo largo de γ .

Demostración. Ver [28] Teorema 4.11 o [13] Proposición 2.6, Capítulo. 2. □

Dada una curva $\gamma : I \rightarrow M$ y dos tiempos $t_0, t_1 \in I$, podemos definir una aplicación $P_{t_0, t_1}^\gamma : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$ como

$$P_{t_0, t_1}^\gamma(v) := V(t_1),$$

donde V es el único campo paralelo a lo largo de γ tal que $V(t_0) = v$. Por el teorema anterior P_{t_0, t_1}^γ está bien definido y fácilmente se puede ver que es un isomorfismo lineal. A esta aplicación la llamamos transporte paralelo entre $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t_1)$ a lo largo de γ . La traslación paralela nos permite identificar vectores que están en distintos espacios tangentes, con lo cual podemos expresar la derivada covariante a lo largo de una curva como el siguiente cociente incremental (ver [28]):

$$D_t(v) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} [(P_{t_0, t}^\gamma)^{-1}V(t) - v].$$

La compatibilidad de la conexión de Levi-Civita con la métrica nos dice que el transporte paralelo de cualquier vector a lo largo de una curva forma un ángulo constante con el vector velocidad de la misma. En realidad tenemos lo siguiente.

Proposición 2.5.2. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y ∇ la conexión de Levi-Civita, entonces para toda curva $\gamma : I \rightarrow M$ tenemos que:*

1. *Si $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$, entonces*

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g(D_t V, W) + g(V, D_t W).$$

2. *Si $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ son dos vectores paralelos respecto de γ , entonces $g(V, W)$ es constante.*

3. *Para todo par de números $t_1, t_2 \in I$, $P_{t_1, t_2} : T_{\gamma(t_1)}(M) \rightarrow T_{\gamma(t_2)}(M)$ es una isometría lineal.*

Demostración. Ver [13] Proposición 3.2, Capítulo. 2. □

De hecho, estas últimas tres propiedades equivalen a la compatibilidad con la métrica (2.7).

Notar que si γ es una geodésica, entonces su vector velocidad es un campo paralelo a lo largo de γ . Luego, la proposición anterior en particular nos dice que las geodésicas en una variedad Riemanniana son curvas de rapidez constante, es decir existe un número $c \in \mathbb{R}$ tal que $|\frac{d\gamma}{dt}(t)| = c$ para todo $t \in I$.

2.6. Aplicación exponencial y coordenadas normales

En esta sección introduciremos dos herramientas centrales en el estudio de las variedades Riemannianas. La primera es la función exponencial, que resulta muy importante para entender la geometría local de las variedades, en particular resulta fundamental en el estudio de cómo se comportan las geodésicas localmente. Esta aplicación mapea rectas del espacio tangente en geodésicas de la variedad. La otra herramienta es el sistema de coordenadas normales, cuya principal utilidad es que simplifica numerosos cálculos, gracias a que codifica de forma elegante y económica las propiedades fundamentales para el estudio de la geometría local de la variedad.

Sea \widetilde{TM} el subconjunto del fibrado tangente dado por

$$\widetilde{TM} := \{v \in TM : 1 \in I_v\}.$$

Notemos que por el Teorema 2.5.1, $0_p \in \widetilde{TM}$ para todo $p \in M$ y que el conjunto $\widetilde{T}_p M := \widetilde{M} \cap T_p M$ es estrellado con respecto al origen.

Llamamos *función exponencial* a la asignación $exp : \widetilde{TM} \rightarrow M$ dada por

$$v \mapsto \gamma_v(1).$$

Además, para cada $p \in M$ definimos la exponencial restringida como la restricción de exp al espacio tangente $T_p M$. Es decir, $exp_p := exp|_{\widetilde{T}_p M}$.

Notemos que \widetilde{TM} puede ser un subconjunto propio de TM . De hecho lo será si la variedad no es completa (ver próxima sección). En general estaremos interesados en estudiar variedades compactas, con lo cual las geodésicas están definidas en todo \mathbb{R} y por lo tanto $\widetilde{TM} = TM$ y $\widetilde{T_pM} = T_pM$.

Cada carta (U, x) induce naturalmente una carta (TU, \tilde{x}) en el fibrado tangente. Esta carta está definida de la siguiente manera: $TU := \pi^{-1}(U)$ donde $\pi : TM \rightarrow M$ es la proyección canónica y $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{x}^{n+1}, \dots, \tilde{x}^{2n})$ donde

$$\tilde{x}^i(v) := x^i \circ \pi(v)$$

y

$$\tilde{x}^{n+i}(v) := v(x^i)$$

para todo $1 \leq i \leq n$.

Al proyectar por π las curvas integrales del campo

$$G(v) := \sum_{k=1}^n \left(\tilde{x}^{n+k}(v) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} - \sum_{i,j} \tilde{x}^{n+i}(v) \tilde{x}^{n+j}(v) (\Gamma_{ij}^k \circ \pi)(v) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{n+k}} \right)$$

definido en TU se puede ver que obtenemos geodésicas de M y, recíprocamente, fijando $p \in U$ y una velocidad inicial $v \in T_pM$, la geodésica γ_v se levanta a una curva integral de G . Es decir, si $c : I \rightarrow TM$ es una curva integral de G , entonces $\pi \circ c$ es una geodésica en M , y si $\gamma : I \rightarrow M$ es una geodésica en M , entonces $(\gamma, \frac{d\gamma}{dt})$ es una curva integral de G .

El campo G se puede extender a un campo global que llamamos campo geodésico. Como consecuencia del Lema 2.5.1 y de la suavidad del flujo global de G tenemos que la función exponencial satisface las siguientes propiedades (ver [28], [13]):

Proposición 2.6.1. *Propiedades de la aplicación exponencial:*

1. \widetilde{TM} es un abierto de TM que contiene a la sección nula.
2. $\widetilde{T_pM}$ es un conjunto estrellado respecto de $0_p \in T_pM$.
3. Para cada $v \in TM$ la geodésica γ_v está dada por

$$\gamma_v(t) = \exp(tv)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ donde la igualdad tenga sentido.

4. La exponencial es una función suave.

Para introducir las cartas normales, necesitaremos el siguiente lema, que es consecuencia del teorema de la función inversa (ver [28] Proposición 5.7 o [13] Capítulo 3, Sección 2).

Lema 2.6.1. *La función \exp_p es un difeomorfismo local. Es decir, para todo punto $p \in M$ existe un entorno abierto Ω de $0 \in T_pM$ y un entorno abierto U de p tales que $\exp_p : \Omega \rightarrow U$ es un difeomorfismo.*

Así, llamamos *entorno normal* de p a cualquier abierto U que contenga a p y que sea la imagen por \exp_p de un abierto Ω estrellado respecto de $0 \in T_pM$ tal que $\exp_p : \Omega \rightarrow U$ es un difeomorfismo. También llamamos bola geodésica o bola normal $B_r(p)$ a la imagen por \exp_p de cualquier bola $B_r(0)$ de radio r centrada en $0 \in T_pM$ tal que $\exp_p|_{B_r(0)}$ sea un difeomorfismo con su imagen. De forma completamente análoga se definen la bola geodésica cerrada y la esfera geodésica

Definición 2.6.1. Sea U un entorno normal de p y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de T_pM . Si consideramos el isomorfismo lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow T_pM$ dado por

$$T(x^1, \dots, x^n) := \sum_j x^j e_j,$$

entonces decimos que (U, φ) con $\varphi := T^{-1} \circ \exp_p^{-1}|_U$ es una carta normal o un sistema de coordenadas normales centrado en p .

Para cada $p \in M$ las cartas normales centradas en p se corresponden con las bases ortonormales de T_pM .

Dado (U, x) con $x = (x^1, \dots, x^n)$ un sistema de coordenadas normales centrado en p , llamamos función de distancia radial a la función dada por

$$r(x) := \sqrt{\sum_i (x^i)^2}$$

y vector radial unitario al campo vectorial dado por

$$\frac{\partial}{\partial r} := \sum_i \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Para terminar la sección enunciaremos una serie de propiedades que tienen las cartas normales que nos servirán tanto para hacer cálculos como para realizar interpretaciones geométricas.

Proposición 2.6.2. Sea (U, x) una carta normal centrada en p , entonces vale que:

1. Sea $v = \sum_i v_i \partial_i \in T_pM$ y γ_v la geodésica tal que $\gamma_v(0) = p$ y $\frac{d\gamma_v}{dt}(0) = v$. Luego se tiene que $x \circ \gamma_v(t) = (tv_1, \dots, tv_n)$ para todo t tal que $\gamma_v(t) \in U$.
2. Las coordenadas de p son $(0, \dots, 0)$, es decir $x(p) = (0, \dots, 0)$.
3. Las componentes de la métrica en el punto p son $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$, y por lo tanto, las de su inversa también.
4. Toda bola $\{x : r(x) < \epsilon\}$ contenida en U es una bola geodésica de M .
5. Para todo punto $q \in U - \{p\}$, $\frac{\partial}{\partial r}$ es el vector velocidad de la geodésica de rapidez unitaria que une p y q , y por lo tanto tiene norma unitaria.
6. Las derivadas parciales de primer orden de las componentes de la métrica y los símbolos de Christoffel se anulan en p , es decir $\partial_k g_{ij}(p) = 0$ y $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ para todo $i, j, k = 1, \dots, n$.

2.7. Distancia geodésica

Una consecuencia importante de la Igualdad (2.8), es decir la propiedad de ser que la conexión sea libre de torsión, es que las geodésicas minimizan localmente la distancia entre dos puntos. Para esto, primero hay que especificar cuál es la distancia que estamos considerando. Empecemos enumerando algunas definiciones necesarias.

Definición 2.7.1. Decimos que la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es regular si γ es una inmersión (con un campo de velocidad que no se anula nunca). En particular, salvo que sean constantes, las geodésicas son regulares.

Definición 2.7.2. Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una curva regular, definimos la longitud de γ como:

$$L(\gamma) := \int_a^b \left| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right| dt.$$

Notemos que esta definición no depende de la parametrización elegida, es decir, si $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es un difeomorfismo y $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$, entonces $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$.

Definición 2.7.3. Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ se dice admisible si existe una partición del intervalo $[a, b]$, $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$, tal que $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ es regular para todo $i = 1, \dots, k$.

Así, si γ es una curva admisible, podemos definir la longitud de γ como la suma de las longitudes de los segmentos de curva $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$.

De manera similar podemos definir el transporte paralelo para curvas admisibles.

Definición 2.7.4. Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Si $p, q \in M$, entonces definimos la distancia Riemanniana por

$$d(p, q) := \inf_{\gamma \in A(p, q)} L(\gamma)$$

donde $A(p, q)$ es el conjunto conformado por las curvas admisibles $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ tales que $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$.

Como se puede ver en [28], Lema 6.2, la variedad Riemanniana (M, g) con la distancia definida arriba es un espacio métrico y su topología coincide con la topología inducida por la estructura de variedad.

Definición 2.7.5. Una curva admisible $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ se dice minimizante si $L(\gamma) \leq L(\tilde{\gamma})$ para toda curva admisible $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow M$ tal que $\tilde{\gamma}(a) = \gamma(a)$ y $\tilde{\gamma}(b) = \gamma(b)$.

Los siguientes teoremas nos permiten interpretar a las geodésicas como las curvas que minimizan la distancia entre dos puntos, al menos si estos están suficientemente cerca.

Teorema 2.7.1. Si γ es una curva minimizante y está parametrizada con velocidad unitaria entonces es una geodésica.

Demostración. Ver [28], Teorema 6.6. □

Teorema 2.7.2. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una geodésica Riemanniana, entonces para cada $t_0 \in [a, b]$ existe un intervalo $(c, d) \subseteq [a, b]$ que contiene a t_0 tal que $\gamma|_{(c,d)}$ es una curva minimizante.

Demostración. [28] Teo. 6.12. □

Para terminar la sección daremos una última definición.

Definición 2.7.6. Una variedad Riemanniana (M, g) se dice geodésicamente completa si toda geodésica maximal está definida en todo \mathbb{R} .

El Teorema de Hopf-Rinow (ver [28] Teorema 6.13 o [13] Teorema 2.8, Capítulo 7) dice que toda variedad Riemanniana conexa es geodésicamente completa si y solo si es completa como espacio métrico. En particular, las variedades compactas son completas.

2.8. Tensor de curvatura

Ahora introduciremos el principal invariante de la geometría Riemanniana, que es el tensor curvatura. Este es un objeto invariante por isometrías locales que codifica, de manera un poco oscura, la información geométrica de la variedad. En secciones posteriores introduciremos la curvatura seccional, la curvatura de Ricci y la curvatura escalar que ofrecen interpretaciones mucho más fáciles de entender desde el punto de vista geométrico.

Definición 2.8.1. Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Llamamos *tensor de curvatura* de M al tensor $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ de tipo $(1, 3)$ dado por

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

En términos de una carta (U, x) el tensor curvatura se escribe localmente como

$$R = \sum_{i, j, k, l} R_{ijk}^l \partial_l \otimes dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k,$$

donde los coeficientes R_{ijk}^l están dados por

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l R_{ijk}^l \partial_l.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_l R_{ijk}^l \partial_l &= R(\partial_i, \partial_j) \partial_m = \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k \\
&= \nabla_{\partial_i} \left(\sum_l \Gamma_{jk}^l \partial_l \right) - \nabla_{\partial_j} \left(\sum_l \Gamma_{ik}^l \partial_l \right) \\
&= \sum_l \left[\partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \sum_m (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l) \right] \partial_l.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \sum_m (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l).$$

Si contraemos el tensor R por la métrica en el índice l obtenemos un tensor de tipo $(0, 4)$, que notaremos Rm y también llamaremos tensor curvatura. Es decir, Rm está dado por

$$Rm(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. En coordenadas tenemos que

$$Rm = \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l,$$

donde

$$R_{ijkl} = g(R(\partial_i, \partial_j) \partial_k, \partial_l) = g \left(\sum_m R_{ijk}^m \partial_m, \partial_l \right) = \sum_m R_{ijk}^m g(\partial_m, \partial_l) = \sum_m g_{ml} R_{ijk}^m.$$

Una de las razones por la que es útil utilizar el tensor Rm en lugar de R es que tiene las siguientes simetrías que en cierta forma lo caracterizan y lo hacen razonablemente manejable.

Proposición 2.8.1. Sean $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, entonces:

1. $Rm(W, X, Y, Z) = -Rm(X, W, Y, Z)$.
2. $Rm(W, X, Y, Z) = -Rm(W, X, Z, Y)$.
3. $Rm(W, X, Y, Z) = Rm(Y, Z, W, X)$.
4. $Rm(W, X, Y, Z) + Rm(X, Y, W, Z) + Rm(Y, W, X, Z) = 0$ (*Identidad de Bianchi*).

Demostración. Ver [28], Proposición 7.4 o [13] Proposición 2.4 y 2.5, Capítulo 4. \square

Por último, enunciemos la propiedad fundamental que cumplen los tensores R y Rm (ver [28]).

Teorema 2.8.1. *Los tensores R y Rm son invariantes por isometrías locales. Es decir, si $f : (M, g) \longrightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ es una isometría local, entonces*

$$f^* \tilde{R}m = Rm$$

y

$$\tilde{R}(dfX, dfY)dfZ = df(R(X, Y)Z).$$

2.9. Campos de Jacobi

En esta sección introduciremos los campos de Jacobi, que nos permitirán ver cómo afecta la curvatura el comportamiento de las geodésicas.

Definición 2.9.1. Una familia biparamétrica de curvas es una función suave

$$\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \longrightarrow M.$$

Sea $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \longrightarrow M$ una familia biparamétrica de curvas. Llamamos campo tangente sobre Γ a cualquier función suave $V : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \longrightarrow TM$ tal que $V(s, t) \in T_{\Gamma(s, t)}M$ para todo s y t .

Notemos que toda familia biparamétrica de curvas Γ induce dos familias de curvas de un parámetro. Precisamente, para cada $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ tenemos una curva $\Gamma_s : [a, b] \longrightarrow M$ dada por

$$\Gamma_s(t) := \Gamma(s, t).$$

A estas curvas las denominamos curvas principales.

Similarmente, para cada $t \in [a, b]$ fijo, definimos la curva $\Gamma^{(t)} : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ como

$$\Gamma^{(t)}(s) := \Gamma(s, t).$$

Éstas se denominan curvas transversales.

Claramente, los vectores velocidad de estas curvas,

$$\partial_t \Gamma(s, t) := \frac{d}{dt} \Gamma_s(t)$$

y

$$\partial_s \Gamma(s, t) := \frac{d}{ds} \Gamma(s, t)$$

son campos definidos sobre la familia biparamétrica Γ .

Definición 2.9.2. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ una curva suave. Una variación de γ es una familia biparamétrica de curvas Γ tal que $\Gamma_0(t) = \gamma(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Si Γ es una variación de γ , llamamos campo variacional de Γ al vector velocidad $V(t) := \partial_s \Gamma(0, t)$ definido sobre γ .

Los campos de Jacobi aparecen al estudiar las variaciones geodésicas, que definimos a continuación.

Definición 2.9.3. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ una geodésica y $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \longrightarrow M$ una variación de γ . Decimos que Γ es una variación geodésica si todas las curvas principales Γ_s son geodésicas.

Por ejemplo, sea $p \in M$ un punto y (U, x) una carta normal centrada en p . Consideremos un número r tal que la bola $B_r(0) \in T_p M$ esté propiamente incluida en la imagen de \exp_p . Si $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow T_p M$ es cualquier curva cuya imagen esté contenida en $\partial B_r(0)$ (es decir, $\|\sigma(s)\| = r$ para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$), entonces la variación dada por

$$\Gamma(s, t) := \exp_p(t\sigma(s))$$

es una variación geodésica, ya que $\sigma(s)$ es un vector de longitud constante r para cada $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, y por lo tanto Γ_s es una geodésica.

El siguiente teorema (ver [28], Teorema 10.2) exhibe la relación entre el tensor curvatura y el comportamiento de las geodésicas.

Teorema 2.9.1. *Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ una geodésica. Si V es el campo variacional de una variación geodésica Γ , entonces satisface la siguiente ecuación (denominada ecuación de Jacobi):*

$$D_t^2 V(t) + R\left(V(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)\right) \frac{d\gamma}{dt}(t) = 0$$

para todo $t \in [a, b]$.

Definición 2.9.4. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ una geodésica y V un campo definido sobre γ . Decimos que V es un campo de Jacobi si satisface la ecuación de Jacobi.

El próximo teorema nos dice que no hay más campos de Jacobi que aquellos dados por el teorema anterior.

Teorema 2.9.2. *Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ una geodésica. Si V es un campo de Jacobi sobre γ , entonces es el campo variacional de alguna variación geodésica de γ .*

Demostración. Ver [13] Proposición 2.4, Capítulo 5. □

De la demostración del teorema previo se deduce que si $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ es una geodésica, entonces el campo de Jacobi J sobre γ que satisface $J(0) = 0$ y $D_t J(0) = v$ está dado por

$$J(t) = d_{t \frac{d\gamma}{dt}(0)} \exp_{\gamma(0)}(tv)$$

para cada $0 \leq t \leq a$. La siguiente proposición será útil en la próxima sección para interpretar geoméricamente el tensor curvatura.

Proposición 2.9.1. *Sea $p \in M$ y $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ la geodésica que empieza en p con velocidad inicial v . Sea $w \in T_p T_p M$ un vector unitario y J el campo de Jacobi sobre γ dado por*

$$J(t) = d_{tv} \exp_p(tw) \tag{2.11}$$

para cada $0 \leq t \leq a$. Entonces el desarrollo de Taylor de $|J(t)|^2$ alrededor de 0 está dado por

$$|J(t)|^2 = t^2 - \frac{1}{3}g(R(V, W)V, W)t^4 + o(t^4).$$

Demostración. Ver [13] Proposición 2.7 y Corolario 2.9, Capítulo 5. \square

2.10. Curvatura seccional

La curvatura seccional de una variedad Riemanniana (M, g) se puede pensar, de hecho así fue introducida por Riemann en su disertación *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, del siguiente modo. Sea $p \in M$ un punto y sean $\Pi \subseteq T_p M$ un subespacio de dimensión dos y $\Omega \subseteq T_p M$ un entorno abierto de $0 \in T_p M$ tal que $\exp_p|_\Omega$ es un difeomorfismo. Llamamos sección plana determinada por Π a la subvariedad de dimensión dos $S_\Pi := \exp_p(\Pi \cap \Omega)$ formada por todas las geodésicas que pasan por p y con velocidad inicial en Π . La *curvatura seccional* $K(\Pi)$ de M asociada al plano Π se define como la curvatura Gaussiana de S_Π en el punto p con la métrica inducida por la inclusión. En términos del tensor curvatura Rm , tenemos que

$$K(\Pi) = \frac{-Rm(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

donde $\{X, Y\}$ es cualquier base de Π (Ver [28] Proposición 8.8). La siguiente proposición nos dice que la curvatura seccional determina el tensor curvatura (ver [28] Lema 8.9 o [13] Lema 3.3, Capítulo 4).

Proposición 2.10.1. *Sean R_1 y R_2 dos tensores de tipo $(0, 4)$ definidos sobre un espacio vectorial con producto interno $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que satisfacen las simetrías del tensor Rm (Proposición 2.8.1). Si para cada par de vectores linealmente independientes X e Y se cumple que*

$$\frac{R_1(X, Y, X, Y)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{R_2(X, Y, X, Y)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2},$$

entonces $R_1 = R_2$.

De la Proposición 2.9.1 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.10.1. *Sea $p \in M$ y $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ la geodésica que a tiempo cero pasa por p con velocidad inicial v , $|v| = 1$. Sea $w \in T_v T_p M$ con $|w| = 1$ y $g(w, v) = 0$. Si Π es el plano generado por v y w , entonces tenemos la siguiente expresión para $|J(t)|^2$ donde J es el campo de Jacobi (2.11)*

$$|J(t)|^2 = t^2 - \frac{1}{3}K(\Pi)t^4 + o(t^4).$$

Más aún,

$$|J(t)| = t - \frac{1}{6}K(\Pi)t^3 + o(t^3). \quad (2.12)$$

Demostración. Ver [13] Corolario 2.9, Capítulo 5. □

Este resultado pone de manifiesto la relación entre la curvatura y las geodésicas. Para esto consideremos una curva σ en T_pM que empiece en v con velocidad inicial w y tal que $|\sigma(s)| = 1$ para todo s . Sea Γ la familia biparamétrica de curvas dada por $\Gamma(s, t) := \exp_p(t\sigma(s))$. Entonces, los rayos $t \mapsto t\sigma(s)$ que empiezan en $0 \in T_pM$ se separan de los rayos $t \mapsto tv$ con velocidad

$$|\partial_s \Gamma(0, t)| = |tw| = t.$$

Luego, si Π es el plano en T_pM generado por v y w , entonces $K(\Pi)$ mide cuán rápido se separan las geodésicas que son tangentes a Π en p , ya que la Ecuación (2.12) nos dice que la familia de geodésicas $\Gamma_s(t) := \exp_p(t\sigma(s))$ se separa de la geodésica $\gamma(t) := \exp_p(t\sigma(0))$ a una velocidad que difiere de t por el término $-\frac{1}{6}K(\Pi)t^3$. Así, si $K(\Pi) > 0$ tenemos que las geodésicas que pasan por p se separan más lentamente que los rayos en T_pM . De manera similar, si la curvatura seccional es negativa entonces las geodésicas se separan más rápido que los rayos en T_pM (que es el caso Euclídeo).

Sea θ es el ángulo formado por v y w en T_pM . Si llamamos $\delta(t)$ a la distancia a tiempo t entre las geodésicas γ_v y γ_w que empiezan en p con velocidad inicial v y w respectivamente, entonces

$$\delta(t) = \sqrt{2(1 - \cos \theta)}t \left(1 - \frac{K(\Pi) \cos^2(\theta/2)}{6}t^2 + o(t^2) \right)$$

donde Π es el plano formado por v y w (ver [42]).

2.11. Curvatura de Ricci y curvatura escalar

En esta sección introduciremos dos nociones de curvatura, la curvatura de Ricci y la curvatura escalar, que resultan un poco más débiles que la curvatura seccional. No obstante, en dimensiones bajas ($n \leq 2$ para la curvatura escalar y $n \leq 3$ para la de Ricci) determinan completamente el tensor curvatura de la variedad Riemanniana. Por otro lado, estas curvaturas acarrearán importante información geométrica.

Empecemos por la curvatura de Ricci. Para esto primero necesitamos introducir el *tensor de Ricci*, que es un tensor de tipo $(0, 2)$ simétrico dado por

$$\text{Ricc}(X, Y) := \text{tr}(Z \mapsto R(Z, X)Y)$$

donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y R es el tensor curvatura.

En efecto, si $p \in M$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de T_pM tenemos que

$$\text{Ricc}(v, w) = \sum_i \text{Rm}(v, e_i, w, e_i) \tag{2.13}$$

para todo $v, w \in T_p M$. Luego, de la tercer simetría de la Proposición 2.8.1 se desprende que el tensor de Ricci es simétrico.

Sea

$$Ricc = \sum_{i,j} R_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

la expresión local del tensor de Ricci con respecto a una carta (U, x) . Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} R_{ij} &= Ricc(\partial_i, \partial_j) = tr(Z \mapsto R(Z, \partial_i)\partial_j) \\ &= C_{kl} \left(\sum_{k,l} R_{kij}^l \partial_l \otimes dx^k \right) = \sum_{k,l} R_{kij}^l C_{kl} (\partial_k \otimes dx^k) \\ &= \sum_{k,l} R_{kij}^l dx^k (\partial_l) = \sum_{k,l} R_{kij}^l \delta_{kl} = \sum_k R_{kij}^k. \end{aligned}$$

Esto nos dice que el tensor Ricci se obtiene a partir del tensor curvatura al contraer el primer subíndice con el superíndice. Claramente, la escritura en términos del tensor Rm es

$$R_{ij} = \sum_k R_{kij}^k = \sum_{k,l} g^{kl} R_{kijl}.$$

La *curvatura de Ricci* es la forma cuadrática asociada al tensor de Ricci restringida a los vectores tangentes unitarios. Es decir, si $v \in T_p M$ es un vector unitario con respecto a la norma inducida por la métrica, la curvatura de Ricci de (M, g) en la dirección de v es

$$Ricc_g(v) := Ricc(v, v).$$

En términos de la curvatura seccional tenemos la siguiente expresión. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $T_p M$ tal que $e_1 = v$. De 2.13 obtenemos que

$$Ricc_g(v) = Ricc(v, v) = \sum_{k=2}^n Rm(e_k, v, v, e_k) = \sum_k K(\Pi_k),$$

donde $\Pi_k \subseteq T_p M$ es el subespacio de dimensión 2 generado por v y e_k .

Por último, la *curvatura escalar* es la función diferenciable $S_g : M \rightarrow \mathbb{R}$ obtenida al contraer el tensor de Ricci por la métrica, es decir

$$S_g := tr_g Ricc.$$

Claramente la expresión local de la misma con respecto a una carta (U, x) es

$$S_g = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij}.$$

Usando la misma notación de antes, para la curvatura escalar tenemos que

$$S_g = \sum_i Ricc(e_i, e_i) = \sum_{i,j} Rm(e_j, e_i, e_i, e_j) = \sum_{i \neq j} K(e_i, e_j),$$

donde $K(e_i, e_j)$ es la curvatura seccional asociada al subespacio generado por e_i y e_j .

La curvatura escalar nos permite comparar el volumen de una pequeña bola geodésica en una variedad Riemanniana con el volumen que tiene la bola del mismo radio en el espacio Euclídeo. De hecho, si $r \in \mathbb{R}$ es suficientemente chico, entonces

$$\frac{B_r(p)}{B_r^e(0)} = 1 - \frac{S_g}{6(n+2)}r^2 + o(r^2)$$

donde $B_r(p) \subseteq M$ es la bola geodésica de radio r centrada en p y $B_r^e(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ es la bola euclídea del mismo radio (ver [19], Teorema 3.98). Luego, para r suficientemente chico tenemos que si la curvatura escalar en p es positiva entonces el volumen de la bola geodésica de radio r centrada en p es menor que el de la bola Euclídea del mismo radio. Por otro lado, si la curvatura escalar en p es negativa el volumen de la bola geodésica reslta mayor que el de la bola Euclídea.

2.12. Operadores diferenciales

En la Sección 2 mostramos cómo generalizar el gradiente a variedades Riemannianas. En esta sección haremos lo mismo con el Hessiano, la divergencia y el Laplaciano.

Definición 2.12.1. Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave, llamamos Hessiano de f al campo tensorial de tipo $(0, 2)$ dado por

$$Hess_g(f) := \nabla(\nabla f) = \nabla(df).$$

Usando las propiedades (2.3), (2.4), (2.5) y (2.6) para la conexión de Levi-Civita tenemos que si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\begin{aligned} X(Y(f)) &= \nabla_X(Y(f)) = \nabla_X(\nabla f(Y)) \\ &= \nabla_X(C(\nabla f \otimes Y)) = C(\nabla_X(\nabla f \otimes Y)) \\ &= C(\nabla_X(\nabla f) \otimes Y + \nabla f \otimes \nabla_X Y) = \nabla_X(\nabla f(Y)) + \nabla f(\nabla_X Y) \\ &= \nabla_X(\nabla_Y f) + df(\nabla_X Y) = \nabla_X(\nabla_Y f) + \nabla_X Y(f) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Hess_g(f)(X, Y) = X(Y(f)) - \nabla f(\nabla_X Y).$$

Debido a la compatibilidad de la conexión de Levi-Civita con la métrica, también obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} Hess_g(f)(X, Y) &= X(Y(f)) - df(\nabla_X Y) \\ &= X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) = X(g(\nabla_g f, Y)) - g(\nabla_g f, \nabla_X Y) \\ &= g(\nabla_X \nabla_g f, Y) + g(\nabla_g f, \nabla_X Y) - g(\nabla_g f, \nabla_X Y) = g(\nabla_X \nabla_g f, Y). \end{aligned}$$

Si (U, x) es una carta y escribimos la expresión local del Hessiano

$$Hess_g(f) = \sum_{i,j} H_{ij} dx_i \otimes dx_j,$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} H_{ij} &= Hess_g(f)(\partial_i, \partial_j) = \partial_i \partial_j f - df(\nabla_{\partial_i} \partial_j) \\ &= \partial_i \partial_j f - df\left(\sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k\right) = \partial_i \partial_j f - \sum_k \Gamma_{ij}^k df(\partial_k) = \partial_i \partial_j f - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k f. \end{aligned}$$

Definición 2.12.2. Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos la divergencia de X como

$$div_g(X) := -tr(Z \mapsto \nabla_Z X)$$

donde $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Recordemos que ∇X es un campo tensorial de tipo $(1, 1)$. Si

$$X = \sum_i X^i \partial_i,$$

entonces su expresión local es

$$\nabla X = \sum_{i,j} \left(\partial_j X^i + \sum_k X^k \Gamma_{kj}^i \right) \partial_i \otimes dx^j.$$

Luego,

$$\begin{aligned} div_g(X) &= -tr(Z \mapsto \nabla_Z X) \\ &= -C(\nabla X) = -\sum_{i,j} \left(\partial_j X^i + \sum_k X^k \Gamma_{kj}^i \right) C(dx^j \otimes dx^i) \\ &= -\sum_{i,j} \left(\partial_j X^i + \sum_k X^k \Gamma_{kj}^i \right) \delta_{ij} = -\sum_i \left(\partial_i X^i + \sum_k X^k \Gamma_{ki}^i \right). \end{aligned}$$

Podemos obtener una expresión útil para la divergencia en términos de la métrica g , pero para eso necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.12.1. Sea $A(t)$ una matriz simétrica y no singular cuyas entradas son funciones suaves en M . Entonces

$$\frac{d}{dt} \det A = \det A \operatorname{tr} \left(A^{-1} \frac{d}{dt} A \right).$$

Demostración. Como A es una matriz simétrica y no singular, existe una matriz $C \in GL(C^\infty(M)^{n \times n})$ tal que

$$CAC^{-1} = D$$

con

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det D &= \sum_i \lambda_1 \dots \frac{d}{dt} \lambda_i \dots \lambda_n \\ &= \det D \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \frac{d}{dt} \lambda_i = \det D \operatorname{tr} \left(D^{-1} \frac{d}{dt} D \right). \end{aligned}$$

Como $\det D = \det A$, tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left(D^{-1} \frac{d}{dt} D \right) &= \operatorname{tr} \left(CA^{-1}C^{-1} \frac{d}{dt} (CAC^{-1}) \right) \\ &= \operatorname{tr} \left(CA^{-1}C^{-1} \left(\frac{d}{dt} C \right) AC^{-1} \right) + \operatorname{tr} \left(CA^{-1} \left(\frac{d}{dt} A \right) C^{-1} \right) + \operatorname{tr} \left(C \frac{d}{dt} C^{-1} \right). \end{aligned}$$

Teniendo en consideración que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ para cualquier par de matrices, el primer sumando resulta

$$\operatorname{tr} \left(CA^{-1}C^{-1} \left(\frac{d}{dt} C \right) AC^{-1} \right) = \operatorname{tr} \left(C^{-1} \frac{d}{dt} C \right) = \operatorname{tr} \left(\left(\frac{d}{dt} C \right) C^{-1} \right).$$

Por lo tanto, combinando esto con el tercer sumando se sigue que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left(CA^{-1}C^{-1} \left(\frac{d}{dt} C \right) AC^{-1} \right) + \operatorname{tr} \left(C \frac{d}{dt} C^{-1} \right) &= \operatorname{tr} \left(\left(\frac{d}{dt} C^{-1} \right) + C \frac{d}{dt} C^{-1} \right) \\ &= \operatorname{tr} \left(\frac{d}{dt} (CC^{-1}) \right) = \operatorname{tr}(0) = 0. \end{aligned}$$

Luego, como únicamente sobrevive el sumando del medio, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A &= \frac{d}{dt} \det D = \det A \operatorname{tr} \left(D^{-1} \frac{d}{dt} D \right) \\ &= \det A \operatorname{tr} \left(CA^{-1} \left(\frac{d}{dt} A \right) C^{-1} \right) = \det A \operatorname{tr} \left(C^{-1} CA^{-1} \frac{d}{dt} A \right) = \det A \operatorname{tr} \left(A^{-1} \frac{d}{dt} A \right) \end{aligned}$$

□

Haciendo uso de este lema obtenemos la siguiente expresión local para la divergencia

$$div_g(X) = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_i \partial_i \left(\sqrt{\det g} X^i \right). \quad (2.14)$$

En efecto, de la expresión para los símbolos de Christoffel en términos de la métrica, Igualdad (2.10), tenemos que

$$\Gamma_{ij}^i = \sum_l g^{li} (\partial_i g_{il} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

Luego,

$$\begin{aligned} div_g(X) &= - \left(\sum_i \partial_i X^i + \sum_k X^k \Gamma_{ik}^i \right) \\ &= - \sum_i \left(\partial_i X^i + \sum_k X^k \frac{1}{2} \sum_l g^{li} (\partial_i g_{kl} + \partial_k g_{il} - \partial_l g_{ik}) \right) \\ &= - \sum_i \left(\partial_i X^i + \frac{1}{2} X^i \sum_{k,l} g^{kl} (\partial_k g_{il} + \partial_i g_{kl} - \partial_l g_{ik}) \right). \end{aligned}$$

Notando que

$$\sum_{k,l} g^{kl} (\partial_k g_{il} - \partial_l g_{ik}) = 0,$$

se deduce que

$$\begin{aligned} div_g(X) &= - \sum_i \left(\partial_i X^i + \frac{1}{2} X^i \sum_{k,l} g^{kl} \partial_i g_{kl} \right) \\ &= - \sum_i \left(\partial_i X^i + \frac{1}{2} X^i \operatorname{tr} \left((g^{kl}) \partial_i (g_{kl}) \right) \right) \\ &= - \sum_i \left(\partial_i X^i + \frac{1}{2} X^i \frac{1}{\det g} \partial_i \det g \right), \end{aligned}$$

donde para obtener la última igualdad utilizamos el Lema 2.12.1.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} div_g(X) &= - \sum_i \left(\partial_i X^i + \frac{1}{2} X^i \frac{1}{\det g} \partial_i \det g \right) \\ &= - \sum_i \left(\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sqrt{\det g} \partial_i X^i + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{X^i}{\sqrt{\det g}} \partial_i \det g \right) \\ &= - \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_i \left(\sqrt{\det g} \partial_i X^i + \frac{1}{2} \frac{X^i}{\sqrt{\det g}} \partial_i \det g \right) \\ &= - \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_i \partial_i \left(\sqrt{\det g} X^i \right). \end{aligned}$$

Definición 2.12.3. Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave, definimos el Laplaciano (u operador de Laplace-Beltrami) de f como

$$\Delta_g f := -tr_g Hess_g(f).$$

Claramente, la expresión local para el Laplaciano es

$$\Delta_g f = - \sum_{i,j} g^{ij} H_{ij},$$

donde

$$H_{ij} = \partial_i \partial_j f - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k f.$$

En particular, si tomamos un sistema de coordenadas normales (U, x) centrado en p , tenemos que

$$\Delta_g f(p) = - \sum_{i,j} \delta_{ij} \partial_i \partial_j f(p) = - \sum_i \partial_i \partial_i f(p).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \Delta_g f &= -tr_g Hess_g(f) = -C(Hess_g(f)^\sharp) \\ &= -C(\nabla df^\sharp) = -C(\nabla \nabla_g f) = div(\nabla_g f). \end{aligned}$$

Luego, obtenemos la siguiente expresión local para el Laplaciano

$$\Delta_g f = - \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \partial_i \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \partial_j f \right). \quad (2.15)$$

En efecto, de la expresión local para el gradiente 2.1 y para la divergencia 2.14, se sigue que

$$\begin{aligned} \Delta_g f &= - \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_j \partial_j \left(\sqrt{\det g} \left(\sum_i g^{ij} \partial_i f \right) \right) \\ &= - \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \partial_j \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \partial_i f \right). \end{aligned}$$

2.13. Teorema de la divergencia y fórmulas de Green

En esta sección enunciaremos la extensión de los resultados clásicos del cálculo vectorial en \mathbb{R}^n a variedades Riemannianas.

Teorema 2.13.1. [Teorema de la divergencia] Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo con soporte compacto, entonces

$$\int_M div(X) dV_g = 0.$$

Como

$$\operatorname{div}_g(fX) = f \operatorname{div}_g(X) - g(\nabla_g f, X)$$

para toda $f \in C^\infty(M)$ y todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, si f tiene soporte compacto, entonces con las mismas hipótesis tenemos la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int_M g(\nabla_g f, X) dV_g = \int_M f \operatorname{div}_g(X) dV_g. \quad (2.16)$$

Proposición 2.13.1. [Fórmulas de Green] Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Si $u, v \in C^\infty(M)$ son funciones con soporte compacto, entonces valen las siguientes fórmulas:

1.

$$\int_M (u\Delta_g v - g(\nabla_g u, \nabla_g v)) dV_g = 0.$$

2.

$$\int_M (u\Delta_g v - v\Delta_g u) dV_g = 0.$$

Para una demostración de estos resultados, el lector puede consultar [31].

2.14. Análisis en variedades Riemannianas

En esta sección presentaremos los resultados básicos de análisis en variedades Riemannianas que utilizaremos en los próximos capítulos. El lector puede encontrar una exposición exhaustiva de estos temas en [5], [3], [14] y [24].

Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta y sea P un operador lineal en derivadas parciales definido sobre M . Si $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables, decimos que u es *solución débil* de la ecuación

$$P(u) = f$$

si

$$\int_M u P^* \varphi dV_g = \int_M f \varphi dV_g$$

para toda $\varphi \in C^\infty(M)$, donde P^* es el operador adjunto de P .

Para cada $p \in [1, +\infty)$ notamos con $L^p(M)$ el espacio de Lebesgue, que son el conjunto de funciones integrables u definidas sobre M tales que

$$\left(\int_M |u|^p dV_g \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Con la norma

$$\|u\|_p := \left(\int_M |u|^p dV_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$L^p(M)$ resulta un espacio de Banach.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty)$ definimos el *espacio de Sobolev* $H_k^p(M)$ como el conjunto

$$H_k^p(M) := \{u \in L^p(M) : P(u) \in L^p(M) \text{ para todo operador diferencial } P \text{ de orden } \leq k\}$$

Con la siguiente norma

$$\|u\|_{p,k} := \left(\sum_{i=0}^k \int_M |\nabla^i u|^p dV_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$H_k^p(M)$ también resulta un espacio de Banach.

En el caso particular $p = 2$, tenemos que los espacios de $HL^2(M)$ y $H_k^2(M)$ resultan espacios de Hilbert. El producto interno está dado en cada caso por

$$\langle u, v \rangle_{L^2(M)} := \int_M uv dV_g$$

y

$$\langle u, v \rangle_{H_k^2(M)} := \sum_{i=0}^k \int_M g(\nabla^i u, \nabla^i v) dV_g.$$

En el caso $k = 1$, se tiene que

$$\langle u, v \rangle_{H_1^2(M)} = \int_M g(\nabla_g u, \nabla_g v) dV_g + \int_M uv dV_g.$$

Notamos por $C^k(M)$ al espacio formado por aquellas funciones definidas sobre M con k -ésima derivada continua, y lo dotamos con la norma

$$\|u\|_{C^k(M)} := \sum_{i=1}^k \sup_{p \in M} |\nabla^i u(p)|.$$

Por último, para cada $0 < \alpha < 1$ definimos el espacio de Hölder $C^{k,\alpha}(M)$ como el conjunto de funciones $u \in C^k(M)$ tales que la norma

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(M)} := \|u\|_{C^k(M)} + \sup_{p \neq q} \frac{|\nabla^k u(p) - \nabla^k u(q)|}{d_g(p, q)^\alpha}$$

es finita, donde tomamos el supremo sobre los $p \neq q$ tales que q está contenido en un entorno normal de p y $\nabla^k u(q)$ es el tensor en p obtenido mediante el transporte paralelo a lo largo de la geodésica que une p con q .

Al igual que en el caso Euclídeo, vale el siguiente teorema.

Teorema 2.14.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta. Entonces $H_k^p(M)$ es la completación de $C^\infty(M)$ con respecto a la norma*

$$\|u\|_{p,k} := \left(\sum_{i=0}^k \int_M |\nabla^i u|^p dV_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para terminar la sección enunciaremos dos Teoremas que nos resultarán de mucha utilidad.

Teorema 2.14.2. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta de dimensión n .*

1. Si

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{q} - \frac{k}{n}$$

entonces $H_k^q(M) \subseteq L^r(M)$ y la inclusión $H_k^q(M) \hookrightarrow L^r(M)$ es continua.

2. (Relich-Kondrachov) Si

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{q} - \frac{k}{n}$$

la inclusión además es compacta.

3. Sea $0 < \alpha < 1$ tal que

$$\frac{1}{q} \leq \frac{k - \alpha}{n}$$

entonces $H_k^q(M) \subseteq C^{0,\alpha}(M)$ y la inclusión es continua.

En el caso de $H_1^2(M)$ el exponente crítico es $p_n := \frac{2n}{n-2}$. A este número también lo llamamos exponente crítico de Sobolev.

Teorema 2.14.3. [Desigualdad de Sobolev] *Sea $u \in H_1^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe una constante C tal que*

$$\|u\|_{p_n}^2 \leq C \|\nabla_{g_n} u\|_2^2.$$

A la constante óptima para esta desigualdad la denominamos constante de Sobolev y la notamos $C(n)$.

Capítulo 3

Laplaciano conforme

En este capítulo introduciremos el Laplaciano Conforme, que es un operador diferencial elíptico de segundo orden que resulta conformemente invariante. Como veremos a continuación, este operador aparece cuando estudiamos cómo varía la curvatura escalar en la clase conforme.

3.1. Curvatura escalar de una métrica conforme

En esta sección estudiaremos cómo cambia la curvatura escalar de una variedad Riemanniana cuando deformamos conformemente la métrica e introduciremos el operador Laplaciano Conforme (ver Ecuación (3.4)).

Sea (M, g) una variedad Riemanniana. La clase conforme de g , que notaremos como $[g]$, es el conjunto de métricas Riemannianas sobre M conformes a g . Es decir,

$$[g] := \{e^{2f}g : f \in C^\infty(M)\}.$$

Un problema que surge naturalmente es el de comprender cómo cambian diversos objetos geométricos dentro de la clase conforme. En particular, estaremos interesados en ver cómo cambia la curvatura escalar cuando consideramos distintas métricas de $[g]$. Para ver esto necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.1.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y $\tilde{g} = e^{2f}g$ una métrica en la clase conforme de g . Tenemos la siguiente fórmula para la conexión de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ de (M, \tilde{g}) en términos de la conexión de Levi-Civita ∇ de (M, g) :*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y)\nabla_g f$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Por la fórmula de Koszul (2.9), tenemos que

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = \frac{1}{2}[X(\tilde{g}(Y, Z)) + Y(\tilde{g}(X, Z)) - Z(\tilde{g}(X, Y))]$$

$$-\tilde{g}([X, Z], Y) - \tilde{g}([Y, Z], X) + \tilde{g}([X, Y], Z)].$$

Luego, como $\tilde{g} = e^{2f}g$, resulta que

$$\begin{aligned} e^{2f}g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= \frac{1}{2}[X(e^{2f}g(Y, Z)) + Y(e^{2f}g(X, Z)) - Z(e^{2f}g(X, Y))] \\ &\quad - e^{2f}g([X, Z], Y) - e^{2f}g([Y, Z], X) + e^{2f}g([X, Y], Z)] \\ &= \frac{1}{2}[e^{2f}X(g(Y, Z)) + g(Y, Z)X(e^{2f}) + e^{2f}Y(g(X, Z)) \\ &\quad + g(X, Z)Y(e^{2f}) - e^{2f}Z(g(X, Y)) - g(X, Y)Z(e^{2f}) \\ &\quad - e^{2f}g([X, Z], Y) - e^{2f}g([Y, Z], X) + e^{2f}g([X, Y], Z)] \\ &= e^{2f}g(\nabla_X Y, Z) - e^{2f}[g(Y, Z)X(f) - g(X, Z)Y(f) + g(X, Y)Z(f)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, Z)X(f) + g(X, Z)Y(f) - g(X, Y)Z(f) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(X(f)Y, Z) + g(Y(f)X, Z) - g(X, Y)Z(f). \end{aligned}$$

Así, utilizando la definición del campo gradiente, tenemos que

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(X(f)Y, Z) + g(Y(f)X, Z) - g(X, Y)g(\nabla_g f, Z) \\ &= g(\nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y)\nabla_g f, Z). \end{aligned}$$

Como Z es un campo tangente arbitrario, concluimos que

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y)\nabla_g f.$$

□

Con esto podemos obtener la ecuación que nos dice cómo cambia la curvatura escalar en la presencia de una deformación conforme de la métrica.

Teorema 3.1.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión $n > 2$. Consideremos $\tilde{g} = e^{2f}g$ una métrica en la clase conforme de g . Entonces las curvaturas escalares S_g de (M, g) y $S_{\tilde{g}}$ de (\tilde{M}, \tilde{g}) satisfacen la siguiente ecuación:*

$$S_{\tilde{g}} = e^{-2f}(S_g + 2(n-1)\Delta_g f - (n-1)(n-2)|\nabla_g f|^2). \quad (3.1)$$

Demostración. Recordemos que si (U, x) es una carta cualquiera, tenemos la siguiente expresión local para la curvatura escalar

$$S_g = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij},$$

donde

$$R_{ij} = \sum_{k,l} g^{kl} R_{kijl}$$

y

$$R_{kijl} = g(R(\partial_k, \partial_i)\partial_j, \partial_l).$$

Como

$$R(\partial_k, \partial_i)\partial_j = \nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_k}\partial_j,$$

tenemos que

$$R_{kijl} = g(\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_k}\partial_j, \partial_l). \quad (3.2)$$

La estrategia para probar el teorema será ver cómo cambia la curvatura escalar en cada punto $p \in M$ expresando localmente $S_{\tilde{g}}$ en términos de un sistema de coordenadas normales respecto de la métrica g .

Sea $p \in M$. Tomemos (U, x) una carta normal de M respecto de la métrica g centrada en p . En la demostración usaremos que en un sistema de coordenadas normales centrado en el punto p se satisface que

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij},$$

$$g^{ij}(p) = \delta_{ij},$$

$$\partial_k g_{ij}(p) = 0$$

y

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0$$

para todo $i, j, k = 1, \dots, n$ (Proposición 2.6.2).

A partir de ahora todos los cálculos estarán evaluados en p , pero para no sobrecargar la notación no lo explicitaremos.

Con este sistema de coordenadas tenemos que

$$S_{\tilde{g}} = \sum_{i,j} \tilde{g}^{ij} \tilde{R}_{ij} = \sum_{i,j} e^{-2f} \delta_{ij} \tilde{R}_{ij} = \sum_i e^{-2f} \tilde{R}_{ii}$$

y

$$\tilde{R}_{ii} = \sum_{k,l} \tilde{g}^{kl} \tilde{R}_{kiil} = \sum_{k,l} e^{-2f} \delta_{kl} \tilde{R}_{kiil} = \sum_k e^{-2f} \tilde{R}_{kii k}.$$

Por lo tanto, únicamente tenemos que calcular las componentes del tensor curvatura que son de la forma $\tilde{R}_{kii k}$. Más aún, dado que

$$R_{iiii} = \tilde{R}_{iiii} = 0$$

(ver Ecuación (3.2)), únicamente nos interesan los términos de la forma $\tilde{R}_{kii k}$ con $k \neq i$.

Recordemos que por la compatibilidad de ∇ con respecto a la métrica g (ver Ecuación (2.7)), tenemos que

$$g(\nabla_X Y, Z) = X(g(X, Y)) - g(Y, \nabla_X Z)$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{kii k} &= \tilde{g} \left(\tilde{\nabla}_{\partial_k} \tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_i - \tilde{\nabla}_{\partial_i} \tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_i, \partial_k \right) = \tilde{g} \left(\tilde{\nabla}_{\partial_k} \tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_i, \partial_k \right) - \tilde{g} \left(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_i, \partial_k \right) \\
&= \partial_k \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_i, \partial_k) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_i, \tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_k) - \partial_i \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_i, \partial_k) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_i, \tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_k) \\
&= \partial_k \left(e^{2f} g(\tilde{\nabla}_{\partial_i}, \partial_k) \right) - e^{2f} g(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_i, \tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_k) - \partial_i \left(e^{2f} g(\tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_i, \partial_k) \right) + e^{2f} g(\tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_i, \tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_k) \\
&= \underbrace{\partial_k (e^{2f}) g(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_i, \partial_k)}_{A_{ik}} + \underbrace{e^{2f} \partial_k g(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_i, \partial_k)}_{B_{ik}} - \underbrace{e^{2f} g(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_i, \tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_k)}_{C_{ik}} \\
&\quad - \underbrace{\partial_i (e^{2f}) g(\tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_i, \partial_k)}_{D_{ik}} - \underbrace{e^{2f} \partial_i g(\tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_i, \partial_k)}_{E_{ik}} + \underbrace{e^{2f} g(\tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_i, \tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_k)}_{F_{ik}}.
\end{aligned}$$

Usando el Lema 3.1.1 podemos calcular individualmente cada uno de los 6 términos $A_{ik}, B_{ik}, C_{ik}, D_{ik}, E_{ik}$ y F_{ik} .

Comencemos con A_{ik} .

$$\begin{aligned}
A_{ik} &= \partial_k (e^{2f}) g(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_i, \partial_k) = 2e^{2f} \partial_k f g(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_i, \partial_k) \\
&= 2e^{2f} \partial_k f g(\nabla_{\partial_i} \partial_i + \partial_i f \partial_i + \partial_i f \partial_i - g(\partial_i, \partial_i) \nabla_g f, \partial_k) \\
&= 2e^{2f} \partial_k f (g(\nabla_{\partial_i} \partial_i, \partial_k) + 2\partial_i f g(\partial_i, \partial_k) - g(\partial_i, \partial_i) g(\nabla_g f, \partial_k)) \\
&= 2e^{2f} \partial_k f (2\delta_{ik} \partial_i f - \partial_k f),
\end{aligned}$$

donde para la última igualdad usamos que $g(\partial_i, \partial_k) = g_{ik} = \delta_{ik}$, $g(\partial_i, \partial_i) = g_{ii} = 1$, $g(\nabla_g f, \partial_k) = \partial_k f$ y que $\nabla_{\partial_i} \partial_i|_p = 0$ ya que todos los símbolos de Christoffel de ∇ se anulan en p . Por lo tanto, para $i \neq k$ tenemos que

$$A_{ik} = -2e^{2f} \partial_k f \partial_k f.$$

De manera similar, obtenemos que

$$\begin{aligned}
B_{ik} &= e^{2f} \partial_k g(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_i, \partial_k) = e^{2f} \partial_k g(\nabla_{\partial_i} \partial_i + 2\partial_i f \partial_i - g(\partial_i, \partial_i) \nabla_g f, \partial_k) \\
&= e^{2f} \partial_k (g(\nabla_{\partial_i} \partial_i, \partial_k) + 2\partial_i f g(\partial_i, \partial_k) - g(\partial_i, \partial_i) g(\nabla_g f, \partial_k)) \\
&= e^{2f} \partial_k (g(\nabla_{\partial_i} \partial_i, \partial_k) + 2g_{ik} \partial_i f - g_{ii} \partial_k f) \\
&= e^{2f} (\partial_k g(\nabla_{\partial_i} \partial_i, \partial_k) + 2\partial_k (g_{ik} \partial_i f) - \partial_k (g_{ii} \partial_k f)) \\
&= e^{2f} (g(\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_i} \partial_i, \partial_k) + g(\nabla_{\partial_i} \partial_i, \nabla_{\partial_k} \partial_k) + 2\partial_k g_{ik} \partial_i f + 2g_{ik} \partial_k \partial_i f - \partial_k g_{ii} \partial_k f - g_{ii} \partial_k \partial_k f) \\
&= e^{2f} (g(\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_i} \partial_i, \partial_k) + 2\delta_{ik} \partial_k \partial_i f - \partial_k \partial_k f),
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad usamos nuevamente la compatibilidad de la conexión de Levi-Civita con la métrica. Luego, si $i \neq k$ se sigue que

$$B_{ik} = e^{2f} g(\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_i} \partial_i, \partial_k) - e^{2f} \partial_k \partial_k f.$$

Para el término C_{ik} tenemos que

$$\begin{aligned}
C_{ij} &= e^{2f} g(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_i, \tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_k) \\
&= e^{2f} g(\nabla_{\partial_i} \partial_i + \partial_i f \partial_i + \partial_i f \partial_i - g(\partial_i, \partial_i) \nabla_g f, \nabla_{\partial_k} \partial_k + \partial_k f \partial_k + \partial_k f \partial_k - g(\partial_k, \partial_k) \nabla_g f) \\
&= e^{2f} g(\nabla_{\partial_i} \partial_i + 2\partial_i f \partial_i - \nabla_g f, \nabla_{\partial_k} \partial_k + 2\partial_k f \partial_k - \nabla_g f) \\
&= e^{2f} \left[g(\nabla_{\partial_i} \partial_i, \nabla_{\partial_k} \partial_k) + g(\nabla_{\partial_i} \partial_i, 2\partial_k f \partial_k) - g(\nabla_{\partial_i} \partial_i, \nabla_g f) + g(2\partial_i f \partial_i, \nabla_{\partial_k} \partial_k) \right. \\
&\quad \left. + g(2\partial_i f \partial_i, 2\partial_k f \partial_k) - g(2\partial_i f \partial_i, \nabla_g f) - g(\nabla_g f, \nabla_{\partial_k} \partial_k) - g(\nabla_g f, 2\partial_k f \partial_k) + g(\nabla_g f, \nabla_g f) \right] \\
&= e^{2f} (4\partial_i f \partial_k f g(\partial_i, \partial_k) - 2\partial_i f g(\partial_i, \nabla_g f) - 2\partial_k f g(\nabla_g f, \partial_k) + |\nabla_g f|^2) \\
&= e^{2f} (4\partial_i f \partial_k f \delta_{ik} - 2\partial_i f \partial_i f - 2\partial_k f \partial_k f + |\nabla_g f|^2).
\end{aligned}$$

Si $i \neq k$ tenemos que

$$C_{ik} = e^{2f} (-2\partial_i f \partial_i f - 2\partial_k f \partial_k f + |\nabla_g f|^2).$$

El término D_{ik} nos queda

$$\begin{aligned}
D_{ik} &= \partial_i (e^{2f} g(\tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_i, \partial_k)) = 2e^{2f} \partial_i f g(\tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_i, \partial_k) \\
&= 2e^{2f} \partial_i f g(\nabla_{\partial_k} \partial_i + \partial_k f \partial_i + \partial_i f \partial_k - g(\partial_i, \partial_k) \nabla_g f, \partial_k) \\
&= 2e^{2f} \partial_i f [g(\nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_k) + \partial_k f g(\partial_i, \partial_k) + \partial_i f g(\partial_k, \partial_k) - g(\partial_i, \partial_k) g(\nabla_g f, \partial_k)] \\
&= 2e^{2f} \partial_i f (g_{ik} \partial_k f + g_{kk} \partial_i f - g_{ik} \partial_k f) = 2e^{2f} \partial_i f \partial_i f.
\end{aligned}$$

Para E_{ik} tenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
E_{ik} &= e^{2f} \partial_i g(\tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_i, \partial_k) = \\
&= e^{2f} \partial_i g(\nabla_{\partial_k} \partial_i + \partial_k f \partial_i + \partial_i f \partial_k - g(\partial_k, \partial_i) \nabla_g f, \partial_k) \\
&= e^{2f} \partial_i [g(\nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_k) + \partial_k f g(\partial_i, \partial_k) + \partial_i f g(\partial_k, \partial_k) - g(\partial_k, \partial_i) \partial_k f] \\
&= e^{2f} \partial_i [g(\nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_k) + g_{ik} \partial_k f + g_{kk} \partial_i f - g_{ki} \partial_k f] \\
&= e^{2f} [\partial_i g(\nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_k) + \partial_i (g_{ik} \partial_k f) + \partial_i (g_{kk} \partial_i f) - \partial_i (g_{ki} \partial_k f)] \\
&= e^{2f} [g(\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_k) + g(\nabla_{\partial_k} \partial_i, \nabla_{\partial_i} \partial_k) + \partial_i g_{ik} \partial_k f + g_{ik} \partial_i \partial_k f \\
&\quad + \partial_i g_{kk} \partial_i f + g_{kk} \partial_i \partial_i f - \partial_i g_{ki} \partial_i \partial_k f - g_{ki} \partial_i \partial_k f] \\
&= e^{2f} [g(\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_k) + \delta_{ik} \partial_i \partial_k f + \partial_i \partial_i f - \delta_{ik} \partial_i \partial_k f] \\
&= e^{2f} g(\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_k) + e^{2f} \partial_i \partial_i f.
\end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}
F_{ik} &= e^{2f} g(\tilde{\nabla}_{\partial_k} \partial_i, \tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_k) \\
&= e^{2f} g(\nabla_{\partial_k} \partial_i + \partial_k f \partial_i + \partial_i f \partial_k - g(\partial_k, \partial_i) \nabla_g f, \nabla_{\partial_i} \partial_k + \partial_i f \partial_k + \partial_k f \partial_i - g(\partial_i, \partial_k) \nabla_g f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{2f} [g(\nabla_{\partial_k} \partial_i, \tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_k) + g(\partial_k f \partial_i f, \nabla_{\partial_i} \partial_k) + g(\partial_k f \partial_i, \partial_i f \partial_k) + g(\partial_k f \partial_i, \partial_k f \partial_i) \\
&-g(\partial_i, \partial_k)g(\partial_k f \partial_i, \nabla_g f) + g(\partial_i f \partial_k, \nabla_{\partial_i} \partial_k) + g(\partial_i f \partial_k, \partial_i f \partial_k) + g(\partial_i f \partial_k, \partial_k f \partial_i) \\
&-g(\partial_i, \partial_k)g(\partial_i f \partial_k, \nabla_g f) - g(\partial_k, \partial_i)g(\nabla_g f, \nabla_{\partial_i} \partial_k) - g(\partial_k, \partial_i)g(\nabla_g f, \partial_i f \partial_k) \\
&-g(\partial_k, \partial_i)g(\nabla_g f, \partial_k f \partial_i) + g(\partial_k, \partial_i)g(\partial_i, \partial_k)g(\nabla_g f, \nabla_g f)] \\
&= e^{2f} [\partial_k f \partial_i f g(\partial_i, \partial_k) + \partial_k f \partial_k f g(\partial_i, \partial_i) - g(\partial_i, \partial_k) \partial_k f \partial_i f + \partial_i f \partial_i f g(\partial_k, \partial_k) \\
&+ \partial_i f \partial_k f g(\partial_k, \partial_i) - g(\partial_i, \partial_k) \partial_i f \partial_k f - g(\partial_k, \partial_i) \partial_i f \partial_k f \\
&-g(\partial_k, \partial_i) \partial_k f \partial_i f + g(\partial_k, \partial_i)g(\partial_i, \partial_k)|\nabla_g f|^2] \\
&= e^{2f} [g_{ik} \partial_k f \partial_i f + g_{ii} \partial_k f \partial_k f - g_{ik} \partial_k f \partial_i f + g_{kk} \partial_i f \partial_i f \\
&+ g_{ik} \partial_i f \partial_k f - g_{ik} \partial_i f \partial_k f - g_{ik} \partial_i f \partial_k f - g_{ki} \partial_k f \partial_i f + g_{ik} g_{ik} |\nabla_g f|^2] \\
&= e^{2f} [\partial_k f \partial_k f + \partial_i f \partial_i f - 2\delta_{ij} \partial_i f \partial_k f + \delta_{ik} |\nabla_g f|^2].
\end{aligned}$$

Así, si $i \neq k$

$$F_{ik} = e^{2f} (\partial_k f \partial_k f + \partial_i f \partial_i f).$$

Recordemos que, con este sistema de coordenadas, tenemos las siguientes expresiones para la norma del gradiente y el Laplaciano:

$$|\nabla_g f|^2 = \sum_i \partial_i f \partial_i f$$

y

$$\Delta_g f = - \sum_i \partial_i \partial_i f.$$

Con todo esto, tenemos que para $i \neq k$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{kiiik} &= A_{ik} + B_{ik} - C_{ik} - D_{ik} - E_{ik} + F_{ik} \\
&= -2e^{2f} \partial_k f \partial_k f + e^{2f} g(\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_i} \partial_i, \partial_k) - e^{2f} \partial_k \partial_k f + 2e^{2f} \partial_i f \partial_i f + 2e^{2f} \partial_k f \partial_k f \\
&-e^{2f} |\nabla_g f|^2 - 2e^{2f} \partial_i f \partial_i f - e^{2f} g(\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_k) - e^{2f} \partial_i \partial_i f + e^{2f} \partial_k f \partial_k f + e^{2f} \partial_i f \partial_i f \\
&= e^{2f} [g(\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_i} \partial_i, \partial_k) - g(\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_k)] - 2e^{2f} \partial_k f \partial_k f + 2e^{2f} \partial_k f \partial_k f - e^{2f} \partial_k \partial_k f \\
&+ 2e^{2f} \partial_i f \partial_i f - 2e^{2f} \partial_i f \partial_i f - e^{2f} |\nabla_g f|^2 - e^{2f} \partial_i \partial_i f + e^{2f} \partial_k f \partial_k f + e^{2f} \partial_i f \partial_i f \\
&= e^{2f} R_{kiiik} - e^{2f} \partial_k \partial_k f - e^{2f} \partial_i \partial_i f - e^{2f} |\nabla_g f|^2 + e^{2f} \partial_k f \partial_k f + e^{2f} \partial_i f \partial_i f.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{ii} &= \sum_k e^{-2f} \tilde{R}_{kiiik} = \sum_{k \neq i} e^{-2f} \tilde{R}_{kiiik} \\
&= \sum_{k \neq i} e^{-2f} e^{2f} (R_{kiiik} - \partial_k \partial_k f - \partial_i \partial_i f - |\nabla_g f|^2 + \partial_k f \partial_k f + \partial_i f \partial_i f) \\
&= R_{ii} + \sum_{k \neq i} (-\partial_k \partial_k f - \partial_i \partial_i f - |\nabla_g f|^2 + \partial_k f \partial_k f + \partial_i f \partial_i f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R_{ii} - (n-1)|\nabla_g f|^2 + \sum_{k \neq i} (-\partial_k \partial_k f - \partial_i \partial_i f + \partial_k f \partial_k f + \partial_i f \partial_i f) \\
&= R_{ii} - (n-1)|\nabla_g f|^2 - (n-1)\partial_i \partial_i f + (n-1)\partial_i f \partial_i f + \sum_{k \neq i} (-\partial_k \partial_k f + \partial_k f \partial_k f)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
S_{\tilde{g}} &= e^{-2f} \sum_i \tilde{R}_{ii} \\
&= e^{-2f} \sum_i [R_{ii} - (n-1)|\nabla_g f|^2 - (n-1)\partial_i \partial_i f + (n-1)\partial_i f \partial_i f - \sum_{k \neq i} \partial_k \partial_k f + \sum_{k \neq i} \partial_k f \partial_k f] \\
&= e^{-2f} [S_g - n(n-1)|\nabla_g f|^2 - (n-1) \sum_i \partial_i \partial_i f \\
&\quad + (n-1) \sum_i \partial_i f \partial_i f - \sum_i \sum_{k \neq i} \partial_k \partial_k f + \sum_i \sum_{k \neq i} \partial_k f \partial_k f] \\
&= e^{-2f} [S_g - n(n-1)|\nabla_g f|^2 + (n-1)\Delta_g f + (n-1)|\nabla_g f|^2 \\
&\quad - \sum_i \left(\sum_k \partial_k \partial_k f - \partial_i \partial_i f \right) + \sum_i \left(\sum_k \partial_k f \partial_k f - \partial_i f \partial_i f \right) + \sum_i \partial_i \partial_i f + \sum_i \partial_i f \partial_i f] \\
&= e^{-2f} [S_g - (n-1)(n-1)|\nabla_g f|^2 + (n-1)\Delta_g f - \sum_i \sum_k \partial_k \partial_k f \\
&\quad + \sum_i \partial_i \partial_i f + \sum_i \sum_k \partial_k f \partial_k f - \sum_i \partial_i f \partial_i f] \\
&= e^{-2f} [S_g - (n-1)(n-1)|\nabla_g f|^2 + (n-1)\Delta_g f + \sum_i \Delta_g f - \Delta_g f + \sum_i |\nabla_g f|^2 - |\nabla_g f|^2] \\
&= e^{-2f} [S_g - (n-1)(n-1)|\nabla_g f|^2 + (n-1)\Delta_g f + (n-1)\Delta_g f + (n-1)|\nabla_g f|^2] \\
&= e^{-2f} (S_g - (n-1)(n-2)|\nabla_g f|^2 + 2(n-1)\Delta_g f).
\end{aligned}$$

Como el punto $p \in M$ es arbitrario, podemos concluir que

$$S_{\tilde{g}} = e^{-2f} (S_g + 2(n-1)\Delta_g f - (n-1)(n-2)|\nabla_g f|^2).$$

□

Haciendo la sustitución $e^{2f} = u^{p_n-2}$, donde $u \in C_{>0}^\infty(M)$ y $p_n = 2n/(n-2)$ es el exponente crítico de Sobolev, obtenemos la siguiente expresión:

$$S_{\tilde{g}} = u^{1-p_n} (a_n \Delta_g u + S_g u), \quad (3.3)$$

donde

$$a_n = 4 \left(\frac{n-1}{n-2} \right).$$

En efecto, como $e^{2f} = u^{p_n-2}$, entonces

$$f = \frac{2}{n-2} \log u.$$

Reemplazando en la ecuación (3.1), obtenemos que

$$\begin{aligned} S_{\tilde{g}} &= u^{2-p_n} \left(S_g + 2(n-1)\Delta_g \left(\frac{2}{n-2} \log u \right) - (n-1)(n-2) \left| \nabla_g \left(\frac{2}{n-2} \log u \right) \right|^2 \right) \\ &= u^{2-p_n} \left(S_g + a_n \Delta_g(\log u) - a_n |\nabla_g(\log u)|^2 \right). \end{aligned}$$

Tomando un sistema de coordenadas normales (U, x) , tenemos que

$$\partial_i \log u = \frac{1}{u} \partial_i u,$$

y por lo tanto,

$$\partial_i \partial_i \log u = \partial_i \left(\frac{1}{u} \partial_i u \right) = -\frac{1}{u^2} \partial_i u \partial_i u + \frac{1}{u} \partial_i u \partial_i u.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Delta_g(\log u) &= -\sum_i \partial_i \partial_i \log u \\ &= \frac{1}{u^2} \sum_i \partial_i u \partial_i u - \frac{1}{u} \sum_i \partial_i \partial_i u = \frac{1}{u^2} |\nabla_g u|^2 + \frac{1}{u} \Delta_g u. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$|\nabla_g(\log u)|^2 = \sum_i \partial_i \log u \partial_i \log u = \frac{1}{u^2} |\nabla_g u|^2.$$

De ésta forma, resulta

$$\begin{aligned} S_{\tilde{g}} &= u^{2-p_n} \left(S_g + a_n \left(\frac{1}{u^2} |\nabla_g u|^2 + \frac{1}{u} \Delta_g u \right) - a_n \frac{1}{u^2} |\nabla_g u|^2 \right) \\ &= u^{2-p_n} \left(S_g + a_n \frac{1}{u} \Delta_g u \right) = u^{1-p_n} (a_n \Delta_g u + S_g u). \end{aligned}$$

El operador lineal L_g dado por

$$L_g(u) := a_n \Delta_g u + S_g u \tag{3.4}$$

se denomina Laplaciano conforme. Luego, podemos reescribir la ecuación de la curvatura escalar para $\tilde{g} = u^{p_n-2}g$ en términos del Laplaciano conforme de la siguiente manera:

$$S_{\tilde{g}} = u^{1-p_n} L_g(u). \tag{3.5}$$

La importancia de este operador surge al estudiar el problema de Yamabe (ver [44]) que mencionamos en la introducción. Dada (M, g) una variedad Riemanniana cerrada y conexa de dimensión $n \geq 3$, el problema de Yamabe consiste en hallar una métrica \tilde{g} conforme a g de curvatura escalar constante. Si $\tilde{g} = u^{p_n-2}g$ es de curvatura escalar constante c , entonces por (3.5) se debe satisfacer

$$c = u^{1-p_n} L_g(u).$$

Luego, obtenemos la ecuación de Yamabe

$$L_g(u) = cu^{p_n-1}. \quad (3.6)$$

Para terminar esta sección enunciaremos una propiedad importante del operador L_g .

Lema 3.1.2. *El Laplaciano conforme es un operador autoadjunto con respecto al producto interno de $L^2(M)$.*

Demostración. Por la segunda fórmula de Green tenemos que

$$\begin{aligned} \langle L_g(u), v \rangle_{L^2(M)} &= \int_M L_g(u)v dV_g = \int_M (a_n \Delta_g u + S_g u) v dV_g \\ &= \int_M a_n v \Delta_g u dV_g + \int_M S_g u v dV_g = \int_M u a_n \Delta_g v dV_g + \int_M u S_g v dV_g \\ &= \int_M (a_n \Delta_g v + S_g v) u dV_g = \int_M u L_g(v) dV_g = \langle u, L_g(v) \rangle_{L^2(M)}. \end{aligned}$$

□

3.2. Invarianza conforme de L_g

En esta sección probaremos una de las propiedades más importantes del Laplaciano conforme, que es su invarianza conforme. Previamente necesitamos probar los lemas que siguen a continuación.

Lema 3.2.1. *Sean (M, g) una variedad Riemanniana y $\tilde{g} = u^{p_n-2}g \in [g]$. Luego, si $v \in C^\infty(M)$, tenemos que*

$$\Delta_{\tilde{g}} v = \frac{1}{u^{p_n-2}} \Delta_g v - \frac{2}{u^{p_n-1}} g(\nabla_g u, \nabla_g v).$$

Demostración. Sea (U, x) una carta de M . De la expresión local del Laplaciano (ver Ecuación (2.15)), obtenemos que

$$\Delta_{\tilde{g}} v = -\frac{1}{\sqrt{\det \tilde{g}}} \sum_{i,j} \partial_j \left(\sqrt{\det \tilde{g}} \tilde{g}^{ij} \partial_i v \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{\det(u^{p_n-2}g)}} \sum_{i,j} \partial_j \left(\sqrt{\det(u^{p_n-2}g)} (u^{2-p_n}g)^{ij} \partial_i v \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{u^{n(p_n-2)} \det g}} \sum_{i,j} \partial_j \left(\sqrt{u^{n(p_n-2)} \det g} u^{2-p_n} g^{ij} \partial_i v \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{u^{2p_n} \det g}} \sum_{i,j} \partial_j \left(\sqrt{u^{2p_n} \det g} u^{2-p_n} g^{ij} \partial_i v \right) \\
&= -\frac{1}{u^{p_n} \sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \partial_j \left(u^{p_n} \sqrt{\det g} u^{2-p_n} g^{ij} \partial_i v \right) \\
&= -\frac{1}{u^{p_n} \sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \partial_j \left(u^2 \sqrt{\det g} g^{ij} \partial_i v \right) \\
&= -\frac{1}{u^{p_n} \sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \left[u^2 \partial_j (\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_i v) + \sqrt{\det g} g^{ij} \partial_i v \partial_j u^2 \right] \\
&= -\frac{1}{u^{p_n-2} \sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \partial_j (\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_i v) - \frac{1}{u^{p_n} \sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \sqrt{\det g} g^{ij} 2u \partial_j u \partial_i v \\
&= -\frac{1}{u^{p_n-2}} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \partial_j (\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_i v) - \frac{2}{u^{p_n-1}} \sum_{i,j} g^{ij} \partial_j u \partial_i v \\
&= -\frac{1}{u^{p_n-2}} \Delta_g v - \frac{2}{u^{p_n-1}} g(\nabla_g u, \nabla_g v).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.2.2. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Si $u, v \in C^\infty(M)$, entonces*

$$\Delta_g(uv) = u\Delta_g v + v\Delta_g u - 2g(\nabla_g u, \nabla_g v).$$

Demostración. Sea $p \in M$. Si tomamos (U, x) una carta normal centrada en p , tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta_g(uv) &= -\sum_i \partial_i \partial_i (uv) = -\sum_i \partial_i (v \partial_i u + u \partial_i v) \\
&= -\sum_i (\partial_i v \partial_i u + v \partial_i \partial_i u + \partial_i u \partial_i v + u \partial_i \partial_i v) \\
&= v \left(-\sum_i \partial_i \partial_i u \right) + u \left(-\sum_i \partial_i \partial_i v \right) - 2 \sum_i \partial_i u \partial_i v \\
&= v\Delta_g u + u\Delta_g v - 2g(\nabla_g u, \nabla_g v).
\end{aligned}$$

Como el punto $p \in M$ es arbitrario, obtenemos la igualdad deseada. □

Teorema 3.2.1. *[Invarianza conforme de L_g] Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Si $\tilde{g} = u^{p_n-2}g \in [g]$, entonces para cada $v \in C^\infty(M)$ se satisface*

$$L_{\tilde{g}}(v) = u^{1-p_n} L_g(uv).$$

Demostración. Por el Lema 3.2.1, tenemos que

$$\begin{aligned} L_{\tilde{g}}v &= a_n \Delta_{\tilde{g}}(v) + S_{\tilde{g}}v = a_n \frac{1}{u^{p_n-2}} \Delta_g v - 2 \frac{a_n}{u^{p_n-1}} g(\nabla_g u, \nabla_g v) + S_{\tilde{g}}v \\ &= a_n \frac{u}{u^{p_n-1}} \Delta_g v - 2 \frac{a_n}{u^{p_n-1}} g(\nabla_g u, \nabla_g v) + S_{\tilde{g}}v. \end{aligned}$$

Luego, usando la escritura de $S_{\tilde{g}}$ en términos de S_g y u (ver ecuación (3.3)), obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} L_{\tilde{g}}(v) &= a_n \frac{u}{u^{p_n-1}} \Delta_g v - 2 \frac{a_n}{u^{p_n-1}} g(\nabla_g u, \nabla_g v) + u^{1-p_n} (a_n \Delta_g u + S_g u) v \\ &= \frac{a_n}{u^{p_n-1}} (u \Delta_g v - 2g(\nabla_g u, \nabla_g v) + v \Delta_g u) + \frac{1}{u^{p_n-1}} S_g u v \\ &= \frac{1}{u^{p_n-1}} (a_n \Delta_g(uv) + S_g(uv)) = u^{1-p_n} L_g(uv), \end{aligned}$$

donde para obtener la penúltima desigualdad utilizamos el Lema 3.2.2. \square

3.3. Enfoque variacional del problema de Yamabe

Por la Ecuación (3.6) sabemos que si (M, g) es una variedad Riemanniana cerrada de dimensión al menos 3 y $\tilde{g} = u^{p_n-2}g$ es una métrica conforme a g , entonces (M, \tilde{g}) tiene curvatura escalar constante c si y solo si se satisface la ecuación

$$L_g(u) = cu^{p_n-1}.$$

Un paso importante en la estrategia de la prueba del problema de Yamabe es ver que la ecuación de Yamabe es la ecuación de Euler-Lagrange del funcional de curvatura escalar total. Como veremos, este funcional no es otra cosa que el funcional de Hilbert-Einstein restringido a la clase conforme $[g]$.

Definición 3.3.1. Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Llamamos funcional de Yamabe al funcional $Q : [g] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$Q(\tilde{g}) := \frac{\int_M S_{\tilde{g}} dV_{\tilde{g}}}{Vol_{\tilde{g}}(M)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Si escribimos $\tilde{g} = u^{p_n-2}g$ con $u \in C^\infty(M)$ una función positiva, entonces el elemento de volumen se modifica de la siguiente manera:

$$dV_{\tilde{g}} = u^{p_n} dV_g. \quad (3.7)$$

De hecho, utilizando la expresión local,

$$dV_{\tilde{g}} = \sqrt{\det \tilde{g}_{ij}} |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n| = \sqrt{\det (u^{p_n-2} g_{ij})} |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{u^{n(p_n-2)} \det g_{ij}} |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n| = \sqrt{u^{2p_n} \det g_{ij}} |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n| \\
&= u^{p_n} \sqrt{\det g_{ij}} |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n| = u^{p_n} dV_g.
\end{aligned}$$

Luego, recordando que

$$S_{\tilde{g}} = u^{1-p_n} L_g(u),$$

obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
Q(\tilde{g}) &= \frac{\int_M S_{\tilde{g}} dV_{\tilde{g}}}{\left(\int_M dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\int_M S_{\tilde{g}} u^{p_n} dV_g}{\left(\int_M u^{p_n} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} \\
&= \frac{\int_M u^{1-p_n} L_g(u) u^{p_n} dV_g}{\|u\|_{p_n}^2} = \frac{\int_M u (a_n \Delta_g u + S_g u) dV_g}{\|u\|_{p_n}^2} \\
&= \frac{\int_M (a_n u \Delta_g u + S_g u^2) dV_g}{\|u\|_{p_n}^2} = \frac{\int_M (a_n |\nabla_g u|^2 + S_g u^2) dV_g}{\|u\|_{p_n}^2},
\end{aligned}$$

donde para ver la última igualdad usamos la primer identidad de Green (Proposición 2.13.1).

Identificando cada métrica $\tilde{g} \in [g]$ con la función $u \in C_{>0}^\infty(M)$ tal que $\tilde{g} = u^{p_n-2}g$ queda definido otro funcional $Y_g : C_{>0}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, que para no volver engorrosa la notación también llamaremos funcional de Yamabe. Este funcional está dado por

$$Y_g(u) := Q(u^{p_n-2}g).$$

Luego,

$$Y_g(u) = \frac{\int_M L_g(u) u dV_g}{\|u\|_{p_n}^2}.$$

También nos resultará de utilidad definir, de forma más general, para cada $2 \leq s \leq p_n$, el funcional

$$Y_g^s(u) := \frac{\int_M L_g(u) u dV_g}{\|u\|_s^2},$$

llamado funcional de Yamabe subcrítico.

Como consecuencia del siguiente teorema tendremos que la ecuación Yamabe es la ecuación de Euler-Lagrange del funcional de Yamabe.

Teorema 3.3.1. *Una función $u \in C_{>0}^\infty(M)$ es punto crítico del funcional Y_g^s si y solo si es solución de la ecuación*

$$L_g(u) = cu^{s-1} \tag{3.8}$$

con

$$c = \frac{Y_g^s(u)}{\|u\|_s^{s-2}}.$$

Demostración. Sabemos que la función u es un punto crítico de Y_g^s si y solo si

$$\frac{d}{dt}Y_g^s(u + t\varphi)|_{t=0} = 0$$

para toda función $\varphi \in C_0^\infty(M)$. Pero, como el operador lineal L_g es autoadjunto, tenemos que

$$\begin{aligned} Y_g^s(u + t\varphi) &= \frac{\int_M L_g(u + t\varphi)(u + t\varphi) dV_g}{\|u + t\varphi\|_s^2} = \frac{\int_M (L_g(u) + tL_g(\varphi))(u + t\varphi) dV_g}{\|u + t\varphi\|_s^2} \\ &= \frac{\int_M (L_g(u)u + L_g(u)t\varphi + L_g(\varphi)tu + L_g(\varphi)t^2u) dV_g}{\|u + t\varphi\|_s^2} \\ &= \frac{\int_M (L_g(u)u + 2tL_g(u)\varphi + t^2L_g(\varphi)\varphi) dV_g}{\|u + t\varphi\|_s^2}. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{d}{dt} \int_M (L_g(u)u + 2tL_g(u)\varphi + t^2L_g(\varphi)\varphi) dV_g = \int_M (2L_g(u)\varphi + 2tL_g(\varphi)\varphi) dV_g$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u + t\varphi\|_s^2 &= \frac{d}{dt} \left(\int_M (u + t\varphi)^s dV_g \right)^{\frac{2}{s}} = \\ &= \frac{2}{s} \left(\int_M (u + t\varphi)^s dV_g \right)^{\frac{2}{s}-1} \frac{d}{dt} \int_M (u + t\varphi)^s dV_g \\ &= \frac{2}{s} \left(\int_M (u + t\varphi)^s dV_g \right)^{\frac{2}{s}-1} \int_M s(u + t\varphi)^{s-1} \varphi dV_g \\ &= 2 \left(\int_M (u + t\varphi)^s dV_g \right)^{\frac{2-s}{s}} \int_M (u + t\varphi)^{s-1} \varphi dV_g \\ &= 2 \|u + t\varphi\|_s^{2-s} \int_M (u + t\varphi)^{s-1} \varphi dV_g, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} Y_g^s(u + t\varphi) \\ &= \frac{1}{\|u + t\varphi\|_s^4} \left[\|u + t\varphi\|_s^2 \int_M (2L_g(u)\varphi + 2tL_g(\varphi)\varphi) dV_g \right. \\ &\quad \left. - 2 \|u + t\varphi\|_s^{2-s} \int_M (u + t\varphi)^{s-1} \varphi dV_g \int_M (L_g(u)u + 2tL_g(u)\varphi + t^2L_g(\varphi)\varphi) dV_g \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, evaluando en $t = 0$, tenemos que

$$\frac{d}{dt} Y_g^s(u + t\varphi)|_{t=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|u\|_s^4} \left[\|u\|_s^2 \int_M 2L_g(u)\varphi dV_g - 2\|u\|_s^{2-s} \int_M u^{s-1}\varphi dV_g \int_M L_g(u)u dV_g \right] \\
&= \frac{2}{\|u\|_s^2} \left[\int_M L_g(u)\varphi dV_g - \|u\|_s^{2-s} \int_M u^{s-1}\varphi dV_g \frac{\int_M L_g(u)u dV_g}{\|u\|_s^2} \right] \\
&= \frac{2}{\|u\|_s^2} \left[\int_M L_g(u)\varphi dV_g - \|u\|_s^{2-s} Y_g^s(u) \int_M u^{s-1}\varphi dV_g \right] \\
&= \frac{2}{\|u\|_s^2} \int_M (L_g(u)\varphi - \|u\|_s^{2-s} Y_g^s(u) u^{s-1} \varphi) dV_g.
\end{aligned}$$

Luego, u es punto crítico de Y_g^s si y solo si

$$\int_M (L_g(u) - \|u\|_s^{2-s} Y_g^s(u) u^{s-1}) \varphi dV_g = 0$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(M)$, pero esto ocurre si y solo si

$$L_g(u) - \|u\|_s^{2-s} Y_g^s(u) u^{s-1} = 0.$$

Es decir, si y solo si u es solución de la ecuación (3.8) con $c = \|u\|_s^{2-s} Y_g^s(u)$. \square

Notemos que, tomando $s = p_n$, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.3.1. *Una función $u \in C_{>0}^\infty(M)$ es punto crítico del funcional de Yamabe si y solo si es solución de la ecuación de Yamabe (3.6) con $c = Y_g(u)/\|u\|_{p_n}^{p_n-2}$.*

Para concluir la sección observemos que de la demostración del teorema anterior se deduce directamente que, extendiendo el funcional Y_g al espacio de Sobolev $H_1^2(M)$, u es solución débil de la ecuación de Yamabe si y solo si es un punto crítico del funcional extendido.

3.4. Constante de Yamabe

En esta sección introduciremos la constante de Yamabe, que es un invariante de la clase conforme que resulta fundamental para el estudio del problema de Yamabe.

En cualquier variedad Riemanniana cerrada (M, g) es válida la bien conocida desigualdad de Hölder. Es decir, si $p, q \in (1, +\infty)$ son tales que $1/p + 1/q = 1$, entonces se tiene lo siguiente:

$$\int_M |uv| dV_g \leq \left(\int_M |u|^p dV_g \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_M |v|^q dV_g \right)^{\frac{1}{q}} = \|u\|_p \|v\|_q$$

para toda $u \in L^p(M)$ y $v \in L^q(M)$.

En particular, si $\tilde{g} = u^{p_n-2}g$ es una métrica conforme a g , tenemos que

$$\int_M u^2 dV_g \leq \left(\int_M u^{p_n} dV_g \right)^{\frac{2}{p_n}} \left(\int_M 1 dV_g \right)^{\frac{p_n-2}{p_n}} = \|u\|_{p_n}^2 Vol_g(M)^{\frac{2}{n}}. \quad (3.9)$$

Esto nos permite probar que el funcional de Yamabe está acotado inferiormente en cada clase conforme. En efecto, si $S_g \geq 0$ entonces $Y_g(u) \geq 0$ pues en

$$Y_g(u) = \frac{\int_M (a_n |\nabla_g u|^2 + S_g u^2) dV_g}{\|u\|_{p_n}^2}$$

todos los términos son no negativos. Si existe algún punto $p \in M$ tal que $S_g(p) < 0$, como M es compacta, entonces

$$Y_g(u) = \frac{\int_M (a_n |\nabla_g u|^2 + S_g u^2) dV_g}{\|u\|_{p_n}^2} \geq \frac{\int_M S_g u^2 dV_g}{\|u\|_{p_n}^2} \geq \min S_g \frac{\int_M u^2 dV_g}{\|u\|_{p_n}^2}.$$

Luego, por (3.9), tenemos que

$$Y_g(u) \geq \min S_g \text{Vol}_g(M)^{\frac{2}{n}}.$$

Así, como el funcional de Yamabe de una variedad compacta está acotado inferiormente, tiene sentido definir la constante de Yamabe como

$$Y_g(M) := \inf_{\tilde{g} \in [g]} Q(\tilde{g}) = \inf_{u \in C_{>0}^\infty(M)} Y_g(u). \quad (3.10)$$

Proposición 3.4.1. *La constante de Yamabe $Y_g(M)$ es un invariante de la clase conforme. Es decir, si $h \in [g]$, entonces*

$$\inf_{u \in C_{>0}^\infty(M)} Y_g(u) = \inf_{u \in C_{>0}^\infty(M)} Y_h(u).$$

Demostración. Si $h \in [g]$, entonces podemos escribirla como $h = v^{p_n-2}g$. Luego, por la invarianza conforme de L_g (Teorema 3.2.1), obtenemos que

$$\begin{aligned} Y_h(u) &= \frac{\int_M L_h(u)u dV_h}{\left(\int_M u^{p_n} dV_h\right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\int_M v^{1-p_n} L_g(uv)u dV_h}{\left(\int_M u^{p_n} dV_h\right)^{\frac{n-2}{n}}} \\ &= \frac{\int_M v^{1-p_n} L_g(uv)uv^{p_n} dV_g}{\left(\int_M u^{p_n} v^{p_n} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\int_M L_g(uv)uv dV_g}{\left(\int_M (uv)^{p_n} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} = Y_g(uv). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\inf_{u \in C_{>0}^\infty(M)} Y_h(u) = \inf_{u \in C_{>0}^\infty(M)} Y_g(uv) = \inf_{u \in C_{>0}^\infty(M)} Y_g(u).$$

□

En realidad este ínfimo se trata de un mínimo, como fue probado en una serie de artículos por Yamabe ([44]), Trudinger ([41]), Aubin ([6]) y Schoen (ver [38]). Discutiremos la demostración de este hecho en el próximo capítulo. De todas formas, como lo necesitaremos para el próximo resultado, lo enunciaremos aquí.

Teorema 3.4.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión $n \geq 3$. Entonces existe una métrica $\tilde{g} \in [g]$ que realiza la constante de Yamabe. Es decir,*

$$Y_g(M) = Q(\tilde{g}).$$

En particular, existe una métrica h conforme a g de curvatura escalar constante $S_h = Y_g(M)$.

Como consecuencia de todo esto, se puede ver que el signo de la constante de Yamabe determina el signo de la curvatura escalar. Más precisamente:

Proposición 3.4.2. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión $n \geq 3$. Entonces:*

1. $Y_g(M) > 0$ si y solo si existe $h \in [g]$ con $S_h > 0$.
2. $Y_g(M) = 0$ si y solo si existe $h \in [g]$ tal que $S_h = 0$.
3. $Y_g(M) < 0$ si y solo si existe $h \in [g]$ con $S_h < 0$.

Demostración. La implicación de la ida en los puntos (1), (2) y (3) es consecuencia directa del Teorema anterior, pues éste nos dice que existe una métrica $h \in [g]$ tal que $S_h = Y_g(M)$.

Para la vuelta, primero notemos que en una clase conforme no puede haber dos métricas de curvatura escalar con distinto signo. En efecto, sea g una métrica Riemanniana de curvatura escalar positiva y sea $\tilde{g} = u^{p_n-2}g \in [g]$. La ecuación de curvatura escalar (3.3) nos dice que

$$a_n \Delta_g u + S_g u = S_{\tilde{g}} u^{p_n-1}.$$

Integrando, tenemos que

$$\int_M a_n \Delta_g u + S_g u dV_g = \int_M S_{\tilde{g}} u^{p_n-1} dV_g.$$

Por el Teorema de la divergencia (Teorema 2.13.1), sabemos lo siguiente:

$$\int_M \Delta_g u dV_g = \int_M -\operatorname{div}(\nabla_g u) dV_g = 0.$$

Luego,

$$\int_M S_{\tilde{g}} u^{p_n-1} dV_g = \int_M a_n \Delta_g u + S_g u dV_g = \int_M u S_g dV_g > 0.$$

Por lo tanto, $S_{\tilde{g}}$ no puede ser una función negativa. Es decir, $S_{\tilde{g}}$ es una función no negativa o cambia de signo.

De forma completamente análoga podemos ver que si S_g es negativa entonces $S_{\tilde{g}}$ no puede ser no negativa, y si $S_g = 0$ entonces $S_{\tilde{g}} \equiv 0$ o cambia de signo.

Luego, si existe una métrica $h \in [g]$ con $S_h > 0$, la métrica \tilde{g} de curvatura escalar constante $S_{\tilde{g}} = Y_g(M)$ debe ser positiva, y en consecuencia $Y_g(M)$ también es positiva. Los otros dos casos son completamente análogos.

□

El Teorema 3.4.1 afirma que en cada clase conforme existe al menos una métrica de curvatura escalar constante. Más aún, afirma que existe una métrica de curvatura escalar constante que realiza la constante de Yamabe. La pregunta natural que podemos hacernos es si efectivamente en cada clase conforme hay una única métrica de curvatura escalar constante o si puede haber más.

Primero notemos que en realidad si (M, g) es una variedad Riemanniana y g es una métrica de curvatura escalar constante, entonces al multiplicar g por cualquier número real positivo obtenemos otra métrica de curvatura escalar constante en la clase conforme de g . Por esto último, cuando nos preguntemos por la cantidad de métricas distintas no queremos considerar este caso.

La siguiente Proposición asegura que cuando $Y_g(M) \leq 0$, entonces todas las métricas de curvatura escalar constante se pueden obtener a partir de una de ellas, multiplicando por un número real positivo.

Proposición 3.4.3. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada y conexa de dimensión $n \geq 3$ tal que $Y_g(M) \leq 0$. Si $g_1, g_2 \in [g]$ son de curvatura escalar constante, entonces existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que*

$$g_1 = cg_2.$$

Demostración. Si $Y_g(M) = 0$, por la Proposición 3.4.2, necesariamente debe ser

$$S_{g_1} = S_{g_2} = 0.$$

Por lo tanto, si $g_2 = u^{p_n-2}g_1$, de la Ecuación (3.3), tenemos que

$$\Delta_{g_1} u = 0.$$

Luego, aplicando la primer fórmula de Green (ver Proposición 2.13.1), obtenemos lo siguiente:

$$0 = \int_M u \Delta_{g_1} u dV_{g_1} = \int_M |\nabla_{g_1} u|^2 dV_{g_1}.$$

Como $|\nabla_{g_1} u|^2 \geq 0$, debe ser $\nabla_{g_1} u = 0$, con lo cual u es una función constante.

Si $Y_g(M) < 0$, por la Proposición 3.4.2, tenemos que $S_{g_1} < 0$ y $S_{g_2} < 0$. Por el Teorema 3.1.1, si multiplicamos a g_2 por $c := S_{g_2}/S_{g_1}$ es fácil ver que la métrica $\tilde{g}_2 := cg_2$ satisface que

$$S_{\tilde{g}_2} = S_{g_1}.$$

Luego, si $\tilde{g}_2 = u^{p_n-2}g_1$, por la Ecuación 3.3 tenemos la siguiente igualdad:

$$a_n \Delta_{g_1} u = S_{g_1} (u^{p_n-1} - u). \quad (3.11)$$

Como la variedad M es compacta, entonces la función u alcanza máximo y mínimo absoluto. Sean $p_1 \in M$ el punto en el que u alcanza el máximo y $p_2 \in M$ el punto en el que alcanza en mínimo. Al igual que en el caso Euclídeo, p_1 y p_2 satisfacen las siguientes condiciones:

$$\Delta_{g_1} u(p_1) \leq 0$$

y

$$\Delta_{g_1} u(p_2) \geq 0.$$

Recordar que durante esta tesis estamos considerando el operador de la Laplace-Beltrami negativo, es decir por ejemplo, que cuando la variedad Riemanniana es \mathbb{R} dotada con la métrica Euclídea dt^2 , $\Delta_{dt^2} u = -(\partial^2/\partial t^2)(u)$. Luego, como $S_{g_1} < 0$, de la Ecuación 3.11 se sigue que

$$u^{p_n-1}(p_1) - u(p_1) = a_n \Delta_{g_1} u(p_1) \leq 0.$$

Por lo tanto, $u(p_1) \leq 1$, con lo cual $u(p) \leq u(p_1) \leq 1$ para todo $p \in M$.

De forma completamente análoga tenemos que $u(p) \geq u(p_2) \geq 1$ para todo $p \in M$. Luego, podemos concluir que $u \equiv 1$ y por lo tanto $g_1 = cg_2$. \square

La proposición anterior tiene el siguiente corolario inmediato:

Corolario 3.4.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada y conexa tal que $Y_g(M) \leq 0$. Para cada $c \in \mathbb{R}_{>0}$ existe una única métrica $h_c \in [g]$ de curvatura escalar constante tal que $\text{Vol}_{h_c}(M) = c$.*

Si $Y_g(M) > 0$ en una misma clase conforme puede haber más de una métrica de curvatura escalar constante. En el capítulo 6 utilizaremos productos Riemannianos para construir ejemplos de variedades Riemannianas que tengan más de una métrica de curvatura escalar constante en una misma clase conforme.

3.5. Constante de Yamabe de la esfera

En esta sección calcularemos la constante de Yamabe de la esfera y veremos que ésta es una cota para la constante de Yamabe de cualquier variedad Riemanniana cerrada. Para esto necesitaremos algunos resultados previos.

Lema 3.5.1. *Sea $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ una isometría. Entonces*

1. $df \nabla_g f^* = \nabla_h$. Es decir,

$$df(\nabla_g(v \circ f)) = \nabla_h v \circ f$$

para toda $v \in C^\infty(N)$.

2. $f^* \text{div}_h df = \text{div}_g$. Más explícitamente,

$$\text{div}_h(df(X)) \circ f = \text{div}_g(X)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

3. $\Delta_g f^* = f^* \Delta_h$. De forma más clara,

$$\Delta_g(v \circ f) = (\Delta_h v) \circ f$$

para toda $v \in C^\infty(N)$.

Demostración.

1. Sea $v \in C^\infty(N)$ y $X \in \mathfrak{X}(N)$. Entonces, como f es una isometría,

$$\begin{aligned} h(df \nabla_g f^* v, X) &= h(df \nabla_g f^* v, df df^{-1} X) = g(\nabla_g f^* v, df^{-1} X) \\ &= d(f^* v)(df^{-1} X) = df^{-1} X(f^* v) = X(v) = dv(X) = h(\nabla_h v, X). \end{aligned}$$

Como v y X son arbitrarios,

$$df \nabla_g f^* = \nabla_h.$$

2. Es claro, ya que si notamos por ∇ y $\tilde{\nabla}$ a las conexiones de Levi-Civita en (M, g) y (N, h) , respectivamente, entonces por la Proposición 2.4.1, tenemos que

$$f^* \tilde{\nabla} = \nabla.$$

Luego,

$$\begin{aligned} f^* \operatorname{div}_h df(X) &= f^* \left(-C \left(\tilde{\nabla} df(X) \right) \right) = f^* \left(-C(df(\nabla X)) \right) \\ &= f^* df(-C(\nabla X)) = \operatorname{div}_g(X) \end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

3. Sea $v \in C^\infty(N)$, entonces por (1) y (2)

$$\begin{aligned} \Delta_g f^* v &= -\operatorname{div}_g \nabla_g f^* v = -\operatorname{div}_g df^{-1} df \nabla_g f^* v = -\operatorname{div}_g df^{-1} \nabla_h v \\ &= -f^* \operatorname{div}_h df df^{-1} \nabla_h v = -f^* \operatorname{div}_h \nabla_h v = f^* \Delta_h v. \end{aligned}$$

□

Corolario 3.5.1. *Sea $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ una isometría y $v \in C_{>0}^\infty(M)$. Entonces,*

$$Y_h(v) = Y_g(v \circ f).$$

En particular,

$$Y_g(M) = Y_h(N).$$

Demostración. Por el lema anterior, y como la curvatura escalar es invariante por isometrías, tenemos que

$$\begin{aligned} L_g(v \circ f) &= a_n \Delta_g v \circ f + S_g v \circ f = a_n (\Delta_h v) \circ f + S_h \circ f v \circ f \\ &= (a_n \Delta_h v + S_h v) \circ f = L_h(v) \circ f. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Y_g(v \circ f) = \frac{\int_M L_g(v \circ f) v \circ f dV_g}{\left(\int_M (v \circ f)^{p_n} dV_g \right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\int_M L_h(v) \circ f v \circ f dV_g}{\left(\int_M (v \circ f)^{p_n} dV_g \right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\int_M f^* (L_h(v)v) dV_g}{\left(\int_M (f^*v)^{p_n} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\int_{f(M)} (f^*)^{-1} f^* L_h(v)v (f^{-1})^* dV_g}{\left(\int_{f(M)} (f^{-1})^* f^* v^{p_n} (f^{-1})^* dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} \\
&= \frac{\int_N L_h(v)v dV_h}{\left(\int_N v^{p_n} dV_h\right)^{\frac{n-2}{n}}} = Y_h(v).
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.5.2. Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas. Luego, si $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ es un difeomorfismo conforme, se satisface que

$$Y_g(M) = Y_h(N).$$

Demostración. Si f es un difeomorfismo conforme, podemos escribir

$$f^*(h) = u^{p_n-2}g.$$

Así, si llamamos \tilde{g} a la métrica $\tilde{g} = u^{p_n-2}g$, entonces f es una isometría entre (M, \tilde{g}) y (N, h) . Por lo tanto,

$$Y_g(u(v \circ f)) = Y_{\tilde{g}}(v \circ f) = Y_h(v).$$

Luego, al tomar ínfimo obtenemos que

$$Y_g(M) = Y_h(N).$$

□

Lema 3.5.2. Sea $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ un difeomorfismo conforme, y $u \in C_{>0}^\infty(M)$ tal que $f^*h = u^{p_n-2}g$. Consideremos $v \in C_{>0}^\infty(N)$, una solución de la ecuación de Yamabe 3.6 en (N, h) con constante c . Entonces, $uf^*v = u(v \circ f)$ es solución de la ecuación de Yamabe en (M, g) con la misma constante. Es decir

$$L_g(u(v \circ f)) = c(u(v \circ f))^{p_n-1}.$$

Demostración. Si $\tilde{g} = u^{p_n-2}g$, entonces f es una isometría entre (M, \tilde{g}) y (N, h) . Por lo tanto,

$$(\Delta_h v) \circ f = \Delta_{\tilde{g}}(v \circ f)$$

y

$$S_h \circ f = S_{\tilde{g}}.$$

Luego,

$$L_{\tilde{g}}(v \circ f) = c(v \circ f)^{p_n-1}.$$

Por la invarianza conforme del Laplaciano conforme, obtenemos que

$$L_g(u(v \circ f)) = c(u(v \circ f))^{p_n-1}.$$

□

Con todo esto en mente, para calcular la constante de Yamabe de la esfera, procedemos de la siguiente manera.

Sea $N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ el polo norte de la esfera \mathbb{S}^n . Consideremos, entonces, a $\phi_N : \mathbb{S}^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, la proyección estereográfica sobre el polo norte (ver Ejemplo 2.1.9). Recordemos que $\phi_N : \mathbb{S}^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ viene dada por

$$\phi_N(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}} \right),$$

y su inversa $\phi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ es

$$\phi_N^{-1}(x^1, \dots, x^n) = \left(\frac{2x^1}{1 + \|x\|^2}, \dots, \frac{2x^n}{1 + \|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right).$$

Como hemos mencionado antes, ϕ_N es un difeomorfismo conforme con

$$(\phi_N^{-1})^* g_o^n(x) = \frac{4}{1 + \|x\|^2} g_e^n(x) = \left[\left(\frac{4}{1 + \|x\|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right]^{p_n-2} g_e^n(x)$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Así, si $x \in \mathbb{S}^n - \{N\}$,

$$\phi_N^* g_e^n(x) = \left[\left(\frac{1 + \|\phi_N(x)\|^2}{4} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right]^{p_n-2} g_o^n(x) = \left[(2(1 - x^{n+1}))^{\frac{n-2}{2}} \right]^{p_n-2} g_o^n(x).$$

La estrategia para calcular la constante de Yamabe de \mathbb{S}^n será utilizar el Corolario 3.5.2 con la métrica inducida en \mathbb{R}^n por la proyección estereográfica, que es conforme a la métrica Euclídea.

Si bien el espacio Euclídeo no es compacto, podemos definir la constante de Yamabe para una variedad (M, g) no compacta de la siguiente manera:

$$Y_g(M) := \inf_u \frac{\int_M (a_n |\nabla_g u|^2 + S_g u^2) dV_g}{\|u\|_{p_n}^2},$$

donde el ínfimo lo estamos tomando sobre las funciones no nulas en $C_{\geq 0}^\infty(M)$ de soporte compacto.

Primero notemos que, como la curvatura escalar de \mathbb{S}^n es $(n-1)n$ y además $\phi_N^{-1} : (\mathbb{R}^n, (\phi_N^{-1})^* g_o^n) \rightarrow (\mathbb{S}^n, g_o^n)$ es una isometría, entonces

$$S_{(\phi_N^{-1})^* g_o^n} = (n-1)n.$$

Segundo, recordemos que $\phi_N^{-1} : (\mathbb{R}^n, g_e^n) \rightarrow (\mathbb{S}^n, g_o^n)$ es un difeomorfismo conforme con

$$(\phi_N^{-1})^* g_o^n = u^{p_n-2} g_e^n,$$

donde

$$u = \left(\frac{4}{1 + \|x\|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Entonces, por los Corolarios 3.5.1 y 3.5.2, tenemos que

$$Y_{g_o^n}(v) = Y_{u^{p_n-2}g_e^n}((\phi_N^{-1})^*v) = Y_{g_e^n}(u(\phi_N^{-1})^*v) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} a_n |\nabla_{g_e^n} u(\phi_N^{-1})^*v|^2 dV_{g_e^n}}{\|u(\phi_N^{-1})^*v\|_{p_n}^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} Y_{g_o^n}(\mathbb{S}^n) &= \inf_v Y_{g_o^n}(v) = \inf_v Y_{g_e^n}(v) \\ &= \inf_v \frac{\int_{\mathbb{R}^n} a_n |\nabla_{g_e^n} u(\phi_N^{-1})^*v|^2 dV_{g_e^n}}{\|u(\phi_N^{-1})^*v\|_{p_n}^2} = \inf_w \frac{\int_{\mathbb{R}^n} a_n |\nabla_{g_e^n} w|^2 dV_{g_e^n}}{\|w\|_{p_n}^2}, \end{aligned}$$

donde los primeros ínfimos están tomados sobre las funciones $v \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$ no negativas con soporte en $\mathbb{S}^n - N$, y el último ínfimo está tomado sobre las funciones $w \in C^\infty(M)$ no negativas de soporte compacto.

Recordemos que, por el Teorema 2.14.3,

$$\|w\|_{p_n}^2 \leq C(n) \|\nabla_{g_e^n} w\|_2^2$$

para toda $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, donde $C(n)$ es la constante de Sobolev. En [5] se puede ver que la caracterización variacional de la constante de Sobolev es

$$\frac{1}{C(n)} = \inf_w \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_{g_e^n} w|_{g_e^n}^2 dV_{g_e^n}}{\|w\|_{p_n}^2}.$$

De lo cual obtenemos que

$$C(n) = \frac{a_n}{Y_{g_o^n}(\mathbb{S}^n)}. \quad (3.12)$$

Por otro lado, en [4] y [40], Aubin y Talenti probaron que

$$C(n) = \frac{4}{(n-2)n \text{Vol}_{g_o^n}(\mathbb{S}^n)^{\frac{2}{n}}} \quad (3.13)$$

y que la constante de Sobolev se alcanza con funciones de la forma

$$\psi_\varepsilon(x) := \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \|x\|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} = \varepsilon^{-\frac{n-2}{2}} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (3.14)$$

donde

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{1 + \|x\|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Esto quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ se satisface que

$$\frac{1}{C(n)} = \frac{\|\nabla_{g_e^n} \psi_\varepsilon\|_2^2}{\|\psi_\varepsilon\|_{p_n}^2}.$$

Luego,

$$\frac{Y_{g_o^n}(\mathbb{S}^n)}{a_n} = \frac{\|\nabla_{g_e^n} \psi_\varepsilon\|_2^2}{\|\psi_\varepsilon\|_{p_n}^2}. \quad (3.15)$$

Una propiedad importante de las funciones ψ_ε es que cuando ε tiende a cero, éstas se van concentrando en el origen.

De (3.13) y (3.12) podemos deducir el siguiente teorema.

Teorema 3.5.1. *La constante de Yamabe de la clase conforme $[g_o^n]$ de \mathbb{S}^n es*

$$Y_{g_o^n}(\mathbb{S}^n) = (n-1)n \text{Vol}_{g_o^n}(\mathbb{S}^n).$$

Con esto ya podemos probar que la constante de Yamabe de cualquier variedad Riemanniana compacta está acotada por la constante de Yamabe de la esfera.

Teorema 3.5.2. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta de dimensión $n \geq 3$. Entonces*

$$Y_g(M) \leq Y_{g_o^n}(\mathbb{S}^n).$$

De ahora en más, para no sobrecargar la notación, cuando escribamos $Y(\mathbb{S}^n)$ nos estaremos refiriendo a la constante de Yamabe de la esfera con la métrica redonda.

Demostración. Como $Y_g(M) = \inf_{u \in C^\infty_0} Y_g(u)$, para ver que $Y_g(M) \leq Y(\mathbb{S}^n)$ basta ver que existe una familia de funciones test ϕ_ε tales que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_g(\phi_\varepsilon) \leq Y(\mathbb{S}^n). \quad (3.16)$$

Cada función ϕ_ε la construiremos tomando un punto $p \in M$ y adaptando la función dada en 3.14 a un entorno normal adecuado de p , y extendiendo por cero al resto de M .

Supongamos que $Y_g(M) > 0$, pues si $Y_g(M) \leq 0$ no hay nada que probar.

Sea $p \in M$. Consideremos (U, x) una carta normal centrada en p y un número $\delta > 0$ a determinar posteriormente, de forma tal que la bola geodésica $B_{2\delta}(p)$ esté contenida en U . Tomemos η una función suave con $0 \leq \eta \leq 1$, $|\nabla_g \eta| \leq 2\delta$ que valga constantemente 1 en $B_\delta(p)$ y 0 fuera de $B_{2\delta}(p)$. Con ésto queda bien definida sobre M la función

$$\phi_\varepsilon(q) := \eta(q)\psi_\varepsilon(q) = \eta(q) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + r^2(q)} \right)^{\frac{n-2}{2}}, \quad (3.17)$$

donde $r(q)$ es la distancia entre q y p .

Así, si $A_\delta(p)$ es la región anular $B_{2\delta}(p) - B_\delta(p)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_M a_n |\nabla_g \phi_\varepsilon|^2 + S_g \phi_\varepsilon dV_g &= \int_{B_\delta(p)} a_n |\nabla_g \psi_\varepsilon|^2 dV_g \\ &+ \int_{A_\delta(p)} a_n |\nabla_g(\eta\psi_\varepsilon)|^2 dV_g + \int_{B_{2\delta}(p)} S_g \phi_\varepsilon^2 dV_g. \end{aligned}$$

Como $0 \leq \eta \leq 1$ y $|\nabla_g \eta| \leq 2\delta$, podemos acotar el segundo sumando del lado derecho de la igualdad anterior de la siguiente manera:

$$a_n \int_{A_\delta(p)} |\nabla_g(\eta\psi_\varepsilon)|^2 dV_g = \int_{A_\delta(p)} g(\nabla_g(\eta\psi_\varepsilon), \nabla_g(\eta\psi_\varepsilon)) dV_g$$

$$\begin{aligned}
&= a_n \int_{A_\delta(p)} g(\psi_\varepsilon \nabla_g \eta + \eta \nabla_g \psi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \nabla_g \eta + \eta \nabla_g \psi_\varepsilon) dV_g \\
&= a_n \int_{A_\delta(p)} (\eta^2 |\nabla_g \psi_\varepsilon|^2 + 2\eta \psi_\varepsilon g(\nabla_g \eta, \nabla_g \psi_\varepsilon) + \psi_\varepsilon^2 |\nabla_g \eta|^2) dV_g \\
&\leq a_n \int_{A_\delta(p)} (\eta^2 |\nabla_g \psi_\varepsilon|^2 + 2\eta \psi_\varepsilon |\nabla_g \eta| |\nabla_g \psi_\varepsilon| + \psi_\varepsilon^2 |\nabla_g \eta|^2) dV_g \\
&\leq a_n \int_{A_\delta(p)} |\nabla_g \psi_\varepsilon|^2 dV_g + a_n \int_{A_\delta(p)} (2\psi_\varepsilon 2\delta |\nabla_g \psi_\varepsilon| + 4\delta^2 \psi_\varepsilon^2) dV_g \\
&\leq a_n \int_{A_\delta(p)} |\nabla_g \psi_\varepsilon|^2 dV_g + C_\delta \int_{A_\delta(p)} (\psi_\varepsilon |\nabla_g \psi_\varepsilon| + \psi_\varepsilon^2) dV_g,
\end{aligned}$$

donde la primer desigualdad es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Luego,

$$\begin{aligned}
&\int_M (a_n |\phi_\varepsilon|^2 + S_g \psi_\varepsilon^2) dV_g \leq a_n \int_{B_{2\delta}(p)} |\nabla_g \psi_\varepsilon|^2 dV_g + C_\delta \int_{A_\delta(p)} (\psi_\varepsilon |\nabla_g \psi_\varepsilon| + \psi_\varepsilon^2) dV_g \\
+ \int_{B_{2\delta}(p)} S_g \psi_\varepsilon^2 dV_g &\leq a_n \underbrace{\int_{B_{2\delta}(p)} |\nabla_g \psi_\varepsilon|^2 dV_g}_A + C_\delta \underbrace{\int_{A_\delta(p)} (\psi_\varepsilon |\nabla_g \psi_\varepsilon| + \psi_\varepsilon^2) dV_g}_B + K \underbrace{\int_{B_{2\delta}(p)} \psi_\varepsilon^2 dV_g}_C,
\end{aligned}$$

donde $K := \max S_g$. Como ψ_ε es una función radial y $g^{ii} = 1$ tenemos que, respecto de la carta (U, x) , $\nabla_g \psi_\varepsilon = \nabla_{g_e^n} \psi_\varepsilon = \partial_r \psi_\varepsilon$. Además, en coordenadas normales vale que

$$dV_g = (1 + O(r)) dV_{g_e^n}.$$

Para acotar el primer sumando, recordemos que las funciones ψ_ε realizan la constante de Sobolev en \mathbb{R}^n . Luego, por (3.15), tenemos que

$$a_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_{g_e^n} \psi_\varepsilon|^2 dV_{g_e^n} = Y(\mathbb{S}^n) \|\psi_\varepsilon\|_{p_n}^2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
A &= a_n \int_{B_{2\delta}(p)} |\nabla_g \psi_\varepsilon|^2 dV_g = a_n \int_{B_{2\delta}(0)} |\nabla_{g_e^n} \psi_\varepsilon|^2 (1 + O(r)) dV_{g_e^n} \\
&\leq a_n (1 + \tilde{C}\delta) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_{g_e^n} \psi_\varepsilon|^2 dV_{g_e^n} = (1 + \tilde{C}\delta) Y(\mathbb{S}^n) \|\psi_\varepsilon\|_{p_n}^2.
\end{aligned}$$

Para acotar el segundo sumando, primero notemos que

$$|\psi_\varepsilon| = \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + r^2} \right|^{\frac{n-2}{2}} \leq \varepsilon^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{r^{n-2}}$$

y

$$|\nabla_{g_e^n} \psi_\varepsilon| = |\partial_r \psi_\varepsilon| = \left| \frac{2-n}{\varepsilon} r \left(\frac{r^2 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \right)^{-\frac{n}{2}} \right| \leq (n-2) \varepsilon^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{r^{n-1}}.$$

Además en $A_\delta(0)$, como $\delta \leq r \leq 2\delta$, tenemos que $\frac{1}{2\delta} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{\delta}$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned} B &= \int_{A_\delta(p)} (\psi_\varepsilon |\nabla_g \psi_\varepsilon| + \psi_\varepsilon^2) dV_g \leq (1 + \tilde{C}\delta) \int_{A_\delta(0)} (\psi_\varepsilon |\nabla_{g_\varepsilon} \psi_\varepsilon| + \psi_\varepsilon^2) dV_{g_\varepsilon} \\ &\leq (1 + \tilde{C}\delta) \int_{A_\delta(0)} \left(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{r^{n-2}} (n-2) \varepsilon^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{r^{n-1}} + \varepsilon^{n-2} \frac{1}{r^{2(n-2)}} \right) dV_{g_\varepsilon} \\ &\leq (1 + \tilde{C}\delta) \int_{A_\delta(0)} \left(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\delta^{n-2}} (n-2) \varepsilon^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\delta^{n-1}} + \varepsilon^{n-2} \frac{1}{\delta^{2n-4}} \right) dV_{g_\varepsilon} = O(\varepsilon^{n-2}). \end{aligned}$$

Para el último sumando recordemos que si $d\omega$ es el elemento de volumen de \mathbb{S}^{n-1} , entonces $dV_{g_\varepsilon} = r^{n-1} d\omega dr$. Así, fijando primero δ y después ε lo suficientemente chicos,

$$\begin{aligned} C &= \int_{B_{2\delta}(p)} \psi_\varepsilon^2 dV_g \leq (1 + \tilde{C}\delta) \int_{B_\delta(0)} \psi_\varepsilon^2 dV_{g_\varepsilon} = (1 + \tilde{C}) \int_{B_{2\delta}(0)} \left(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + r^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right)^2 dV_{g_\varepsilon} \\ &\leq (1 + \tilde{C}\delta) \text{Vol}_{g_\varepsilon}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^{2\delta} \varepsilon^{n-2} \frac{1}{r^{2n-4}} dr = \begin{cases} O(\varepsilon^2) & \text{si } n > 4 \\ O(\log(\frac{2\delta}{\varepsilon})\varepsilon) & \text{si } n = 4 \\ O(\varepsilon) & \text{si } n = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_M (a_n |\phi_\varepsilon|^2 + S_g \psi_\varepsilon^2) dV_g \leq A + C_\delta B + KC \leq (1 + \tilde{C}\delta) \left(Y(\mathbb{S}^n) \|\psi_\varepsilon\|_{p_n}^2 + O(\varepsilon^{n-2}) + O(\varepsilon) \right).$$

Por lo tanto, si dividimos ambos lados por $\|\psi_\varepsilon\|_{p_n}^2$ y hacemos primero que δ tienda a cero y luego que ε tienda a cero obtenemos la Desigualdad (3.16) Por lo tanto concluimos que

$$Y_g(M) \leq Y(\mathbb{S}^n).$$

□

Capítulo 4

Problema de Yamabe

En este capítulo discutiremos la solución del problema de Yamabe que fue introducido en el capítulo anterior.

4.1. Problema de Yamabe subcrítico

En esta sección estudiaremos el problema de Yamabe subcrítico, que consiste en buscar soluciones a la Ecuación (3.8) con $2 \leq s < p_n$. De forma más general, probaremos que dada una variedad Riemanniana cerrada y conexa (M, g) , existe una solución positiva $u_s \in C^\infty(M)$ de la ecuación

$$a_n \Delta_g u_s + f u_s = c u_s^{s-1} \quad (4.1)$$

donde $2 \leq s < p_n$, $f \in C^\infty(M)$ y

$$c := \inf_{u \in H_1^2(M) - \{0\}} \frac{\int_M (a_n u \Delta_g u + f u^2) dV_g}{\|u\|_s^2}.$$

En el caso que f sea la función de curvatura escalar S_g , la constante c se denomina constante de Yamabe subcrítica y la notaremos con $Y_g^s(M)$.

Para resolver este problema, previamente necesitaremos enunciar algunos resultados clásicos de la teoría de ecuaciones diferenciales elípticas en variedades Riemannianas, cuyas demostraciones se pueden encontrar en las Secciones 6 y 8 del Capítulo 2 de [5] o en las Secciones 6 y 8 del Capítulo 3 de [3].

Teorema 4.1.1. *[Regularidad elíptica] Sean (M, g) una variedad Riemanniana cerrada y $u \in L_{loc}^1(M)$ una solución débil de la ecuación*

$$Pu = \varphi,$$

donde P es un operador diferencial elíptico.

1. Si $\varphi \in H_k^q(M)$, entonces $u \in H_{k+2}^q(M)$.

2. Si $\varphi \in C^{k,\alpha}(M)$, entonces $u \in C^{k+2,\alpha}(M)$.

Teorema 4.1.2. [Principio fuerte del máximo] Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada y conexa. Sea $h \in C^\infty(M)$ una función no negativa. Si $u \in C^2(M)$ satisface que

$$\Delta_g u + hu \geq 0,$$

entonces u es una función positiva o es la función nula.

Sea $2 \leq s < p_n$ y $f \in C^\infty(M)$. Consideremos el funcional

$$J_f^s(u) := \frac{\int_M a_n |\nabla_g u|^2 + fu^2 dV_g}{\|u\|_s^2}. \quad (4.2)$$

Notemos que este funcional es homogéneo, es decir que si $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, entonces $J_f^s(\alpha u) = J_f^s(u)$.

Definimos la constante

$$\gamma_s(M, g, f) := \inf_{u \in H_1^2(M) - \{0\}} J_f^s(u).$$

Utilizando la primer identidad de Green (Proposición 2.13.1) tenemos que $\gamma_s(M, g, f) = c$ donde c es la constante que aparece en la ecuación (4.1). También notemos que si $f = S_g$, entonces J_f^s y $\gamma_s(M, g, f)$ se corresponden con el funcional subcrítico de Yamabe Y_g^s y la constante subcrítica de Yamabe $Y_g^s(M)$, respectivamente.

Con todo esto ya podemos probar los dos resultados más importantes de la sección.

Teorema 4.1.3. [Regularidad subcrítica] Si $u \in H_1^2(M)$ es una solución débil no negativa de (4.1) con $2 \leq s < p_n$, entonces $u \in C^\infty(M)$. Es decir, u también es una solución clásica. Además, u es una función positiva o la función nula.

Demostración. En el caso que u sea la función nula no hay nada que probar. Supongamos entonces que u no es la función nula. Probaremos que si u es solución débil de la ecuación (4.1), entonces $u \in L^r(M)$ para todo $r > 1$.

Sea $d_1 := p_n$. Como $u \in H_1^2(M)$ y $s \geq 2$, entonces

$$\frac{1}{p_n} \geq \frac{1}{s} - \frac{1}{n}.$$

Luego, por el primer punto del Teorema 2.14.2, $u \in L^{d_1}(M)$ y por lo tanto, $h = cu^{s-1} \in L^{d_1/(s-1)}(M)$. Pero como $L^{d_1/(s-1)}(M) = H_0^{d_1/(s-1)}(M)$, por el primer ítem del Teorema 4.1.1 resulta que $u \in H_2^{d_1/(s-1)}(M)$. Entonces pueden ocurrir dos cosas: $n(s-1) \leq 2d_1$ o $n(s-1) > 2d_1$.

Si estamos en la primer situación, tenemos que

$$\frac{1}{\frac{d_1}{s-1}} - \frac{2}{n} \leq 0 < \frac{1}{r}$$

para todo $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Luego, por el primer ítem del Teorema 2.14.2 tenemos que $u \in L^r(M)$ para todo $r > 0$.

Si $n(s-1) > 2d_1$, definamos

$$d_2 := \frac{nd_1}{n(s-1) - 2d_1}.$$

Notemos que $d_2 > d_1$ ya que $s < p_n$. Además,

$$\frac{1}{d_2} = \frac{1}{\frac{d_1}{s-1}} - \frac{2}{n}.$$

Luego, por el primer ítem del teorema 2.14.2, tenemos que $u \in L^{d_2}(M)$.

Nuevamente, si $n(s-1) \leq 2d_2$, tendremos que $u \in L^r(M)$ para todo $r \in \mathbb{R}_{>0}$; y si $n(s-1) > 2d_2$, definiremos

$$d_3 := \frac{nd_2}{n(s-1) - 2d_2}.$$

En general, si ya tenemos el término d_i , procedemos de la siguiente manera:

1. Si $n(s-1) \leq 2d_i$, tenemos que $u \in L^r(M)$ para todo $r \in \mathbb{R}_{>0}$.
2. Si $n(s-1) > 2d_i$, definimos

$$d_{i+1} := \frac{nd_i}{n(s-1) - 2d_i}.$$

Notemos que la sucesión $\{d_i\}$ es creciente. En efecto, vimos que $d_2 > d_1$. Supongamos por hipótesis inductiva que $d_i > d_{i-1} > \dots > d_1$. Entonces, tenemos que

$$n + 2d_i > n + 2d_1 > n(s-1),$$

con lo cual

$$\frac{n}{n(s-1) - 2d_i} > 1.$$

Luego, $d_{i+1} > d_i$.

Por otro lado,

$$\frac{1}{d_{i+1}} = \frac{1}{\frac{d_i}{s-1}} - \frac{2}{n}.$$

Por lo tanto, $u \in L^{d_{i+1}}(M)$.

Así, si existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $n(s-1) \leq 2d_i$, se tiene que $u \in L^r(M)$ para todo $r > 0$; y en caso contrario, tenemos una sucesión creciente

$$d_1 < d_2 < \dots < d_i < d_{i+1} < \dots$$

Esta sucesión no puede estar acotada superiormente, ya que en ese caso el límite $d := \lim_{i \rightarrow \infty} d_i$ debe satisfacer

$$d = \frac{nd}{n(s-1) - 2d},$$

con lo cual

$$d = \frac{n(s-2)}{2}.$$

Pero esto resulta una contradicción ya que el límite obtenido d es menor que d_1 . Luego, $d_i \rightarrow \infty$ cuando $i \rightarrow \infty$.

Esto nos dice que en cualquier situación $u \in L^r(M)$ para todo $r > 1$. En efecto, si existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $n(s-1) \leq 2d_i$ sabemos que $u \in L^r(M)$ para todo $r \in \mathbb{R}_{>0}$. En caso contrario, dado $r > 1$, como la sucesión $\{d_i\}$ tiende a infinito, podemos tomar un $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_{i_0} > r$ con $u \in L^{d_{i_0}}(M)$. Como M es compacta, por la desigualdad de Hölder, tenemos que $u \in L^r(M)$.

Por lo tanto, tenemos que $h := cu^{s-1}(M) \in L^r(M) = H_0^r(M)$ para todo $r > 1$. Luego, por el primer punto del Teorema 4.1.1, $u \in H_2^r(M)$ para todo $r > 1$.

Tomando $r > 1$ y $0 < \alpha < 1$ tales que

$$\frac{1}{r} \leq \frac{2-\alpha}{n},$$

por el tercer punto del Teorema 2.14.2, tenemos que $u \in C^{0,\alpha}(M)$. Como $s \geq 2$, también $h \in C^{0,\alpha}(M)$; y por el segundo ítem del Teorema 4.1.1, $u \in C^{2,\alpha}(M)$. En particular $u \in C^2(M)$. Luego, como u es no negativa y no es la función nula, por el Teorema 4.1.2, resulta $u > 0$.

Finalmente, como $u \in C^{2,\alpha}(M)$ y $s \geq 2$, tenemos que $cu^{s-1} \in C^{2,\alpha}(M)$. Luego, por el segundo ítem del Teorema 4.1.1, $u \in C^{4,\alpha}(M)$. Repitiendo este argumento concluimos que $u \in C^\infty(M)$. □

De esta manera estamos en condiciones de probar la existencia de soluciones positivas de la ecuación subcrítica de Yamabe.

Teorema 4.1.4. *Para cada $2 \leq s < p_n$ existe una solución suave positiva u_s de la Ecuación (4.1) que satisface $\|u_s\|_s = 1$ y realiza el ínfimo c .*

Demostración. Sea $\{u_k\}$ una sucesión minimizante del funcional J_f^s . Es decir, tal que $J_f^s(u_k) \rightarrow c$ cuando $k \rightarrow \infty$. Por la homogeneidad de J_f^s podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\|u_k\|_s = 1$ para todo k . Como $\Delta_g|u| = \Delta_g u$ en casi todo punto (Ver [5] Prop. 3.49), también tenemos que $J_f^s(|u|) = J_f^s(u)$. Así que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u_k \geq 0$ para todo k . Por la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$\|u_k\|_{2,1}^2 = \int_M (|\nabla_g u_k|^2 + u_k^2) dV_g$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a_n} \int_M (a_n |\nabla_g u_k|^2 + f u_k^2) dV_g + \int_M \left(1 - \frac{f}{a_n}\right) u_k^2 dV_g \\
&= \frac{1}{a_n} J_f^s(u_k) + \int_M \left(1 - \frac{f}{a_n}\right) u_k^2 dV_g \leq \frac{1}{a_n} J_f^s(u_k) + C \|u_k\|_s^2 \leq \tilde{C}.
\end{aligned}$$

Luego, $\{u_k\}$ es acotada en $H_1^2(M)$. Como $H_1^2(M)$ es reflexivo, $\{u_k\}$ es un conjunto precompacto débil y por lo tanto, existe una subsucesión (que también denotaremos u_k para no sobrecargar la notación) que converge débilmente a una función en $H_1^2(M)$, que llamaremos u_s .

Por el Teorema de Rellich-Kondrachov (ver Teorema 2.14.2) la inclusión $H_1^2(M) \subseteq L^s(M)$ es compacta. Como $\{u_k\}$ converge débilmente en $H_1^2(M)$, entonces tiene una subsucesión (denotada nuevamente por $\{u_k\}$) que converge fuertemente a $u_s \in L^s(M)$. Notemos que esto en particular implica que $\|u_s\|_s = 1$. Además, como $L^s(M) \subseteq L^2(M)$, también es una convergencia fuerte en $L^2(M)$. Luego, existe otra subsucesión que converge a u_s en casi todo punto, con lo cual $u_s \geq 0$.

La convergencia débil en $H_1^2(M)$ implica que

$$\begin{aligned}
\int_M a_n |\nabla_g u_s|^2 dV_g &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M a_n g(\nabla_g u_s, \nabla_g u_k) dV_g \\
&\leq \limsup_k a_n \|\nabla_g u_s\|_2 \|\nabla_g u_k\|_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_M a_n |\nabla_g u_s|^2 dV_g \leq \limsup_k a_n \|\nabla_g u_k\|_2^2. \quad (4.3)$$

Además, por la desigualdad de Hölder, la norma en $L^2(M)$ está dominada por la norma en $L^s(M)$, con lo cual

$$\int_M f u_k^2 dV_g \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_M f u_s^2 dV_g.$$

Luego, juntando esto con la desigualdad (4.3), tenemos que

$$J_f^s(u_s) \leq \liminf_k J_f^s(u_k) = c.$$

Pero como $c = \inf_u J_f^s(u)$, concluimos que $J_f^s(u_s) = c$, de donde inferimos que u_s es extremal. Así, u_s resulta ser una solución débil no negativa de la Ecuación (4.1), y por el Teorema 4.1.3 también es una solución clásica positiva. \square

En forma inmediata obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.1.1. *La ecuación de Yamabe subcrítica 3.8 tiene una solución suave positiva.*

4.2. Solución del problema de Yamabe

En esta sección abordaremos el problema de encontrar soluciones positivas de la Ecuación de Yamabe. Es decir, soluciones positivas de la ecuación

$$a_n \Delta_g u + S_g u = c u^{p_n-1},$$

donde c es una constante real. Estas soluciones inducen métricas de curvatura escalar constante en la clase conforme $[g]$. Como hemos mencionado antes, este problema es conocido como el Problema de Yamabe.

Siguiendo la estrategia de H. Yamabe [44], N. Trudinger [20] y T. Aubin [6], veremos que si $Y_g(M) < Y(\mathbb{S}^n)$, entonces existen soluciones positivas de la Ecuación de Yamabe. Si (M, g) es conformemente equivalente a (\mathbb{S}^n, g_o^n) no hay nada que probar. En el final de la sección esbozaremos las ideas de T. Aubin y R. Schoen para probar que a menos que (M, g) sea conforme a la esfera, se tiene que $Y_g(M) < Y(\mathbb{S}^n)$. Con esto se tiene una demostración completa del Teorema 3.4.1.

Primero veamos cómo se puede generalizar la desigualdad de Sobolev (Teorema 2.14.3) a variedades Riemannianas cerradas. El siguiente Teorema es debido a Aubin (ver [4]).

Teorema 4.2.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada y sea $C(n)$ la constante de Sobolev definida en el Teorema 2.14.3. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe una constante C_ε tal que*

$$\|u\|_{p_n}^2 \leq (1 + \varepsilon)C(n) \int_M |\nabla_g u|^2 dV_g + C_\varepsilon \int_M u^2 dV_g$$

para toda $u \in C^\infty(M)$.

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$. Tomemos un punto $p \in M$ y consideremos un sistema de coordenadas normales (U, x) centrado en p . Como $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$, podemos restringir la carta de forma tal que los autovalores de la matriz (g_{ij}) estén entre $(1 + \varepsilon)^{-1}$ y $(1 + \varepsilon)$, y además $dV_g = f dx$ con $(1 + \varepsilon)^{-1} < f < (1 + \varepsilon)$, donde $dx := dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Así, si cubrimos a M con estas cartas, como la variedad es compacta, podemos tomar un subcubrimiento finito $\{U_i\}_i$ y una partición suave de la unidad $\{\nu_i\}$ subordinada a $\{U_i\}$. Si para cada i , consideramos $\rho_i^2 = \nu_i$, entonces

$$\begin{aligned} \|u\|_{p_n}^2 &= \|u^2\|_{\frac{p_n}{2}} = \left\| \sum_i \rho_i^2 u^2 \right\|_{\frac{p_n}{2}} \\ &\leq \sum_i \left(\int_M |\rho_i u|^{p_n} dV_g \right)^{\frac{2}{p_n}} \leq (1 + \varepsilon)^{\frac{2}{p_n}} \sum_i \left(\int_{U_i} |\rho_i u|^{p_n} dx \right)^{\frac{2}{p_n}}. \end{aligned}$$

Así, por la Desigualdad de Sobolev para el caso Euclídeo, tenemos que para cada i

$$\left(\int_{U_i} |\rho_i u|^{p_n} dx \right)^{\frac{2}{p_n}} \leq C(n) \int_{U_i} |\nabla_{g_e}(\rho_i u)|^2 dx \leq (1 + \varepsilon)^2 C(n) \int_{U_i} |\nabla_g(\rho_i u)|^2 dV_g,$$

donde la última desigualdad es consecuencia de la cota para los autovalores de (g_{ij}) y la cota de f .

Por otro lado, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, tenemos que

$$\begin{aligned} |\nabla_g(\rho_i u)|^2 &= \rho_i^2 |\nabla_g u|^2 + 2g(\nabla_g \rho_i, \nabla_g u) \rho_i u + \rho_i^2 |\nabla_g \rho_i|^2 \\ &\leq \rho_i^2 |\nabla_g u|^2 + 2|\nabla_g \rho_i| |\nabla_g u| \rho_i u + \rho_i^2 |\nabla_g \rho_i|^2 \\ &\leq (1 + \varepsilon) \rho_i^2 |\nabla_g u|^2 + (1 + \frac{1}{\varepsilon}) u^2 |\nabla_g \rho_i|^2, \end{aligned}$$

donde para la última desigualdad usamos que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $2ab < \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$.

Juntando todo esto, podemos concluir que si ε es suficientemente pequeño

$$\begin{aligned} \|u\|_{p_n}^2 &\leq (1 + 4\varepsilon) C(n) \sum_i \int_{U_i} \rho_i^2 |\nabla_g u|^2 dV_g + C_\varepsilon \sum_i \int_{U_i} u^2 |\nabla_g \rho_i|^2 dV_g \\ &\leq (1 + 4\varepsilon) C(n) \int_M |\nabla_g u|^2 dV_g + \tilde{C}_\varepsilon \int_M u^2 dV_g; \end{aligned}$$

y el Teorema queda demostrado. \square

A continuación estudiaremos cómo se comporta una familia de soluciones subcríticas $\{u_s\}$ cuando $s \rightarrow p_n$. Notemos que, como la constante de Yamabe es invariante en la clase conforme, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\text{Vol}_g(M) = 1$; pues de no ser así reemplazamos a g por la métrica conforme $h := \text{Vol}_g(M)^{-\frac{2}{n}} g$.

La siguiente proposición nos permitirá entender el comportamiento de las constantes de Yamabe subcríticas $Y_g^s(M)$ cuando $s \rightarrow p_n$.

Proposición 4.2.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada con $\text{Vol}_g(M) = 1$.*

1. *Las constantes subcríticas de Yamabe cumplen que:*

1. $|Y_g^s(M)|$ es una función no creciente en s .
2. Si $Y_g(M) \geq 0$, entonces $Y_g^s(M)$ es continua a izquierda como función de s . En particular

$$\lim_{s \rightarrow p_n^-} Y_g^s(M) = Y_g(M).$$

Demostración.

1. Notemos primero que si $u \in C_{>0}^\infty(M)$ y $s_1, s_2 \in [2, p_n]$, entonces

$$Y_g^{s_2}(u) = \frac{\|u\|_{s_1}^2}{\|u\|_{s_2}^2} Y_g^{s_1}(u). \quad (4.4)$$

Además, como $\text{Vol}_g(M) = 1$, por la desigualdad de Hölder, si $s_1 \leq s_2$ tenemos que $\|u\|_{s_1} \leq \|u\|_{s_2}$.

Luego, por (4.4), resulta que

$$|Y_g^{s_2}(u)| = \frac{\|u\|_{s_1}^2}{\|u\|_{s_2}^2} |Y_g^{s_1}(u)| \leq |Y_g^{s_1}(u)|$$

para todo $u \in C_{>0}^\infty(M)$. Tomando ínfimo obtenemos el resultado deseado.

2. Observemos que si existe un s_0 tal que $Y_g^{s_0}(M) < 0$, entonces podemos elegir u_{s_0} tal que $Y^{s_0}(u_{s_0}) < 0$. Luego, por (4.4), tenemos que $Y_g^s(u_{s_0}) < 0$, y por lo tanto $Y_g^s(M) < 0$ para todo $2 \leq s \leq p_n$. Supongamos entonces que $Y_g(M) \geq 0$. Por la observación hecha, tenemos que $Y_g^s(M) \geq 0$ para todo $2 \leq s \leq p_n$.

Sea $2 \leq s_0 \leq p_n$. Veamos que $Y_g^s(M)$ es continua a izquierda en s_0 .

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $u_\varepsilon \in C_{>0}^\infty(M)$ tal que $Y_g^{s_0}(u_\varepsilon) < Y_g^{s_0}(M) + \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\|u\|_s$ es continua en s , existe un s_ε tal que si $s_\varepsilon \leq s \leq s_0$ entonces $\|u_\varepsilon\|_s^2 / \|u_\varepsilon\|_{s_0}^2$ está lo suficientemente cerca de 1 de forma tal que, por (4.4), tengamos que $Y_g^s(u_\varepsilon) \leq Y_g^{s_0}(u_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}$; y por lo tanto $Y_g^s(u_\varepsilon) \leq Y_g^{s_0}(M) + \varepsilon$. Así, como $Y_g^s(M)$ es positivo para todo s y $s \leq s_0$, por el primer ítem tenemos que

$$Y_g^{s_0}(M) \leq Y_g^s(M) \leq Y_g^s(u_\varepsilon) \leq Y_g^{s_0}(M) + \varepsilon.$$

□

A continuación veremos que si $Y_g(M) < Y(\mathbb{S}^n)$, a partir de un momento las soluciones subcríticas $\{u_s\}$ están uniformemente acotadas en $L^r(M)$ para algún número $r > p_n$.

Proposición 4.2.2. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada tal que la cota dada en el Teorema 3.5.2 es estricta, es decir $Y_g(M) < Y(\mathbb{S}^n)$. Consideremos una familia de soluciones la Ecuación de Yamabe subcrítica exponente $s - 1$ $\{u_s\}$ con $2 \leq s \leq p_n$. Entonces, existen $s_0 < p_n$, $r > p_n$ y $C > 0$ tales que*

$$\|u_s\|_r \leq C$$

para todo $s_0 \leq s < p_n$.

Demostración. Consideremos $\delta > 0$. Sea u_s la solución de la ecuación

$$L_g(u_s) = c_s u_s^{s-1}$$

provista por el Teorema 4.1.4. Si multiplicamos a ambos lados por $u_s^{1+2\delta}$, tenemos que

$$u_s^{1+2\delta} L_g(u_s) = c_s u_s^{s-1} u_s^{1+2\delta} = c_s u_s^{s+2\delta}.$$

Integrando, obtenemos que

$$\int_M u_s^{1+2\delta} L_g(u_s) dV_g = c_s \int_M u_s^{s+2\delta} dV_g.$$

Por la igualdad de Green (Proposición 2.13.1),

$$\int_M u_s^{1+2\delta} \Delta_g u_s dV_g = \int_M g(\nabla_g u_s, \nabla_g (u_s^{1+2\delta})) dV_g = \int_M g(\nabla_g u_s, (1+2\delta) u_s^{2\delta} \nabla_g u_s) dV_g.$$

Entonces,

$$\int_M \left(a_n g(\nabla_g u_s, (1+2\delta) u_s^{2\delta} \nabla_g u_s) + S_g u_s^{2+2\delta} \right) dV_g = c_s \int_M u_s^{s+2\delta} dV_g.$$

Así, si llamamos $w := u_s^{1+\delta}$, como $\nabla_g w = (1 + \delta)u_s^\delta \nabla_g u_s$, podemos reescribir la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\frac{1 + 2\delta}{(1 + \delta)^2} \int_M a_n |\nabla_g w|^2 dV_g = \int_M (c_s w^2 u_s^{s-2} - S_g w^2) dV_g.$$

Luego, por (3.12) y el Teorema 4.2.1, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|w\|_{p_n}^2 &\leq (1 + \varepsilon) \frac{a_n}{Y(\mathbb{S}^n)} \int_M |\nabla_g w|^2 dV_g + C_\varepsilon \int_M w^2 dV_g \\ &= \frac{(1 + \varepsilon)(1 + \delta)^2}{Y(\mathbb{S}^n)(1 + 2\delta)} \int_M (c_s w^2 u_s^{s-1} - S_g w^2) dV_g + C_\varepsilon \|w\|_2^2 \\ &\leq (1 + \varepsilon) \frac{(1 + \delta)^2}{(1 + 2\delta)} \int_M \frac{c_s}{Y(\mathbb{S}^n)} w^2 u_s^{s-2} dV_g + \tilde{C}_\varepsilon \|w\|_2^2 \\ &\leq (1 + \varepsilon) \frac{(1 + \delta)^2}{(1 + 2\delta)} \frac{c_s}{Y(\mathbb{S}^n)} \|w\|_{p_n}^2 \|u_s\|_{\frac{n(s-2)}{2}}^{s-2} + \tilde{C}_\varepsilon \|w\|_2^2, \end{aligned}$$

donde la última línea es consecuencia de la desigualdad de Hölder.

Como $s < p_n$ implica que $\frac{n(s-2)}{2} < s$, aplicando nuevamente la desigualdad de Hölder, resulta que

$$\|u_s\|_{\frac{n(s-2)}{2}} \leq \|u_s\|_s = 1.$$

Además, como $\|u_s\|_s = 1$ implica que $c_s = Y_g^s(M)$, si $0 \leq Y_g(M) < Y(\mathbb{S}^n)$, por la Proposición 4.2.1, existe $s_0 < p_n$ tal que

$$\frac{Y_g^s(M)}{Y(\mathbb{S}^n)} \leq \frac{Y_g^{s_0}(M)}{Y(\mathbb{S}^n)} < 1$$

para todo $s \geq s_0$. Tomando ε y δ de forma tal que

$$(1 + \varepsilon) \frac{(1 + \delta)^2}{(1 + 2\delta)} < 1,$$

como $\frac{c_s}{Y(\mathbb{S}^n)} < 1$ y $\|u_s\|_{\frac{n(s-2)}{2}} \leq 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|w\|_{p_n}^2 &\leq (1 + \varepsilon) \frac{(1 + \delta)^2}{(1 + 2\delta)} \frac{c_s}{Y(\mathbb{S}^n)} \|w\|_{p_n}^2 \|u_s\|_{\frac{n(s-2)}{2}}^{s-2} \\ &+ \tilde{C}_\varepsilon \|w\|_2^2 (1 + \varepsilon) \frac{(1 + \delta)^2}{(1 + 2\delta)} \frac{c_s}{Y(\mathbb{S}^n)} \|w\|_{p_n}^2 \|u_s\|_{\frac{n(s-2)}{2}}^{s-2} + \tilde{C}_\varepsilon \|w\|_2^2 \\ &\leq \alpha \|w\|_{p_n}^2 + \tilde{C}_\varepsilon \|w\|_2^2, \end{aligned}$$

con $\alpha < 1$.

Luego,

$$(1 - \alpha) \|w\|_{p_n}^2 \leq \tilde{C}_\varepsilon \|w\|_2^2.$$

Por lo tanto,

$$\|w\|_{p_n}^2 \leq C \|w\|_2^2$$

con $C := \frac{\tilde{C}_\varepsilon}{1-\alpha}$.

La misma cota vale también si $Y_g(M) < 0$.

Aplicando nuevamente Hölder, tenemos que

$$\|w\|_2 = \|u_s\|_{2(1+\delta)}^{1+\delta} \leq \|u_s\|_s^{1+\delta} = 1.$$

Por lo que se obtiene que $\|w\|^2 \leq C$. Luego, si $r := 2(1 + \delta)$, $\|u_s\|_r^r = \|w\|_{p_n}^2 \leq C$, y la cota no depende de s . □

Teorema 4.2.2. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada con $Y_g(M) < Y(\mathbb{S}^n)$ y sea $\{u_s\}$ una familia de soluciones positivas del problema de Yamabe subcrítico tal que $s \rightarrow p_n$. Entonces, existe una subsucesión que converge uniformemente a una función positiva $u \in C^\infty(M)$ que satisface*

$$Y_g(u) = Y_g(M)$$

y

$$L_g(u) = Y_g(M)u^{p_n-1}.$$

En particular, la métrica $\tilde{g} := u^{p_n-2}g$ tiene curvatura escalar constante $Y_g(M)$.

Demostración. Por el Teorema 4.1.4, sabemos que para todo $2 \leq s < p_n$ existe una función $u_s \in C_{>0}^\infty(M)$ con $\|u_s\|_s = 1$ solución positiva de la ecuación de Yamabe subcrítica

$$a_n \Delta_g u_s + S_g u_s = Y_g^s(M) u_s^{s-1}. \quad (4.5)$$

A partir de ahora consideramos que $\|u_s\|_s = 1$ para todo u_s de la sucesión. La familia $\{u_s\}$ de soluciones subcríticas, a partir de un momento está acotada en $H_1^2(M)$. En efecto, como u_s es minimizante y $\|u_s\|_s = 1$, entonces se satisface que

$$\int_M a_n |\nabla_g u_s|^2 + S_g u_s^2 dV_g = Y_g^s(M).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|u_s\|_{2,1}^2 &= \int_M |\nabla_g u_s|^2 dV_g + \int_M u_s^2 dV_g \\ &= \frac{1}{a_n} \int_M (a_n |\nabla_g u_s|^2 + S_g u_s^2) dV_g + \int_M \left(1 - \frac{S_g}{a_n}\right) u_s^2 dV_g \\ &\leq \frac{1}{a_n} Y_g^s(M) + \tilde{C} \|u_s\|_s^2. \end{aligned}$$

Usando nuevamente que $\|u_s\|_s = 1$ y que $\|u_s\|_2 \leq \|u_s\|_s$ (por la desigualdad de Hölder), se tiene que

$$\|u_s\|_{2,1}^2 \leq \frac{1}{a_n} Y_g^s(M) + \tilde{C} \|u_s\|_s^2 \leq \frac{1}{a_n} Y_g^s(M) + \tilde{C}.$$

Si $Y_g(M) \geq 0$, la Proposición 4.2.1 nos dice que

$$\lim_{s \rightarrow p_n^-} Y_g^s(M) = Y_g(M).$$

Por lo tanto, existe $2 \leq s_0 < p_n$ tal que si $s \geq s_0$ entonces

$$\|u_s\|_{2,1}^2 \leq \frac{1}{a_n} (Y_g(M) + 1) + \tilde{C}.$$

Si en cambio $Y_g(M) < 0$, entonces $Y_g^s(M) < 0$ para todo $2 \leq s < p_n$, con lo cual

$$\|u_s\|_{2,1}^2 \leq \frac{1}{a_n} Y_g^s(M) + \tilde{C} \|u_s\|_s^2 \leq \tilde{C}.$$

En cualquier caso, existe $C > 0$ tal que

$$\|u_s\|_{2,1} \leq C. \quad (4.6)$$

Como $H_1^2(M)$ es reflexivo y la inclusión $H_1^2(M) \subseteq L^2(M)$ es compacta, existe una subsucesión $\{u_{s_i}\}_i$ que converge débilmente en $H_1^2(M)$ y fuertemente en $L^2(M)$ a una función $u \in L^2(M)$ y por lo tanto, existe una subsucesión (que también llamaremos $\{u_{s_i}\}$) que converge a u en casi todo punto. En particular tenemos que $u \geq 0$.

Recordamos el siguiente resultado de convergencia en espacios L^p . Dada una sucesión $\{f_k\}$ acotada en $L^q(M)$ con $1 < q < \infty$ que converge en casi todo punto a una función f , entonces resulta que $f \in L^q(M)$ y $f_k \rightarrow f$ en sentido débil cuando $k \rightarrow \infty$.

Esto implica que $u_{s_i}^{s_i-1}$ converge a u^{p_n-1} débilmente en $L^{\frac{p_n}{p_n-1}}(M)$. En efecto, es claro que $u_{s_i}^{s_i-1}$ tiende a u^{p_n-1} en casi todo punto. Luego, solo basta con ver que $\{u_{s_i}\}$ está uniformemente acotada en $L^{\frac{p_n}{p_n-1}}(M)$. Como la inclusión $H_1^2(M) \subseteq L^{p_n}(M)$ es continua (ver Teorema 2.14.2), de la desigualdad (4.6) obtenemos que

$$\begin{aligned} \|u_{s_i}^{s_i-1}\|_{\frac{p_n}{p_n-1}} &= \int_M (u_{s_i}^{s_i-1})^{\frac{p_n}{p_n-1}} dV_g = \int_M u_{s_i}^{\frac{s_i-1}{p_n-1} p_n} dV_g \\ &\leq \|u_{s_i}\|_{\frac{p_n}{p_n-1}}^{\frac{s_i-1}{p_n-1}} \leq \tilde{D} \|u_{s_i}\|_{2,1}^{\frac{s_i-1}{p_n-1}} \leq D \end{aligned}$$

para una constante D .

Por lo tanto, para toda $\varphi \in C^\infty(M)$ se satisface que

$$\int_M u_{s_i}^{s_i-1} \varphi dV_g \xrightarrow{s_i \rightarrow p_n} \int_M u^{p_n-1} \varphi dV_g. \quad (4.7)$$

Por otro lado, como u_{s_i} tiende débilmente a u en $H_1^2(M)$, tenemos que

$$\int_M g(\nabla_g u_{s_i}, \nabla_g \varphi) dV_g \xrightarrow{s_i \rightarrow p_n} \int_M g(\nabla_g u, \nabla_g \varphi) dV_g \quad (4.8)$$

y

$$\int_M S_g u_{s_i} \varphi dV_g \xrightarrow{s_i \rightarrow p_n} \int_M S_g u \varphi dV_g \quad (4.9)$$

para toda $\varphi \in C^\infty(M)$.

Además, como u_{s_i} es solución de 4.5, para todo s_i se satisface que

$$\int_M a_n g(\nabla_g u_{s_i}, \nabla_g \varphi) dV_g + \int_M S_g u_{s_i} \varphi dV_g = Y_g^{s_i}(M) \int_M u_{s_i}^{s_i-1} \varphi dV_g. \quad (4.10)$$

Consideremos primero el caso en que $Y_g(M) \geq 0$.

Sea $\varphi \in C^\infty(M)$. Haciendo tender s_i a p_n por izquierda en (4.10), por (4.7), (4.8), (4.9) y la Proposición 4.2.1, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_M a_n g(\nabla_g u, \nabla_g \varphi) dV_g + \int_M S_g u \varphi dV_g &= \left(\lim_{s_i \rightarrow p_n^-} Y_g^{s_i}(M) \right) \int_M u^{p_n-1} \varphi dV_g \\ &= Y_g(M) \int_M u^{p_n-1} \varphi dV_g \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C^\infty(M)$. Por lo tanto, u resulta ser una solución débil y no negativa de la ecuación de Yamabe.

Además, $u_{s_i} \rightarrow u$ en casi todo punto y, por la Proposición 4.2.2, existen $s_0 < p_n$ y $r > p_n$ tales que la sucesión $\{u_{s_i}\}$ está uniformemente acotada para todo $s_i \geq s_0$. Luego, $u \in L^r(M)$ con $r > p_n$ con lo cual, argumentando como el Teorema 4.1.3, concluimos que $u \in C^\infty(M)$ es solución clásica de

$$L_g(u) = Y_g(M) u^{p_n-1}. \quad (4.11)$$

Además u es una función positiva o es la función nula. Por lo tanto, si logramos garantizar que u no es la solución nula tendremos que la métrica $u^{p_n-2} g \in [g]$ será una métrica de curvatura escalar constante que minimiza el funcional de Yamabe. En efecto, supongamos que $u > 0$. Por un lado, si multiplicamos la ecuación (4.11) por u e integramos sobre M , tenemos que

$$\int_M u L_g(u) dV_g = \int_M Y_g(M) u^{p_n} dV_g = Y_g(M) \|u\|_{p_n}^{p_n}.$$

Luego,

$$Y_g(u) = \frac{\int_M u L_g(u) dV_g}{\|u\|_{p_n}^2} = Y_g(M) \|u\|_{p_n}^{p_n-2}.$$

Así, como $Y_g(M) \leq Y_g(u)$, inferimos que $\|u\|_{p_n} \geq 1$.

Por otro lado, notando que

$$\left\| u_{s_i}^{\frac{s_i}{p_n}} \right\|_{p_n} = \|u_{s_i}\|_{s_i} = 1$$

y

$$u_{s_i}^{\frac{s_i}{p_n}} \xrightarrow{s_i \rightarrow p_n} u$$

en casi todo punto, tenemos que $u_{s_i}^{\frac{s_i}{p_n}}$ tiende débilmente a u en $L^{p_n}(M)$. Por lo tanto,

$$\|u\|_{p_n} \leq \liminf_{s_i \rightarrow \infty} \left\| u_{s_i}^{\frac{s_i}{p_n}} \right\|_{p_n} = 1.$$

Luego, podemos concluir que $\|u\|_{p_n} = 1$ y que $Y_g(u) = Y_g(M)$.

De esta manera, solo nos falta ver que u no es la función nula. Para esto, consideremos la familia de soluciones minimizantes subcríticas $\{u_{s_i}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, por la desigualdad de Hölder y el Teorema 4.2.1, tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \|u_{s_i}\|_{s_i}^2 \leq \|u_{s_i}\|_{p_n}^2 \\ &\leq (1 + \varepsilon) \frac{a_n}{Y(\mathbb{S}^n)} \int_M |\nabla_g u_{s_i}|^2 dV_g + C_\varepsilon \int_M u_{s_i}^2 dV_g \\ &\leq (1 + \varepsilon) \frac{1}{Y(\mathbb{S}^n)} \int_M (a_n |\nabla_g u_{s_i}|^2 + S_g u_{s_i}) dV_g + \int_M \left(C_\varepsilon - (1 + \varepsilon) \frac{S_g}{Y(\mathbb{S}^n)} \right) u_{s_i}^2 dV_g \\ &\leq (1 + \varepsilon) \frac{Y_g^{s_i}(M)}{Y(\mathbb{S}^n)} + A_\varepsilon \|u_{s_i}\|_2^2. \end{aligned}$$

Como $Y_g(M) < Y(\mathbb{S}^n)$, por la Proposición 4.2.1, existe $s_0 < p_n$ tal que

$$\frac{Y_g^{s_i}(M)}{Y(\mathbb{S}^n)} \leq \frac{Y_g^{s_0}(M)}{Y(\mathbb{S}^n)} < 1$$

para todo $s_i \geq s_0$.

Luego, tomando $s_i \geq s_0$ y ε suficientemente chico, obtenemos que

$$(1 + \varepsilon) \frac{Y_g^{s_i}(M)}{Y(\mathbb{S}^n)} \leq (1 + \varepsilon) \frac{Y_g^{s_0}(M)}{Y(\mathbb{S}^n)} < 1.$$

Por lo tanto, si llamamos

$$B_\varepsilon := 1 - (1 + \varepsilon) \frac{Y_g^{s_0}(M)}{Y(\mathbb{S}^n)}$$

tenemos que

$$0 < B_\varepsilon \leq A_\varepsilon \|u_{s_i}\|_2^2.$$

De este modo, vemos que

$$\|u_{s_i}\|_2^2 \geq \frac{B_\varepsilon}{A_\varepsilon} > 0$$

para todo $s_i \geq s_0$.

Así, como u_{s_i} converge fuertemente a u en $L^2(M)$, resulta $\|u\|_2 > 0$ y en particular u no puede ser la función nula. Para el caso $Y_g(M) < 0$ se procede de forma similar. En efecto, con los mismos argumentos utilizados anteriormente obtenemos una función suave $u \geq 0$ que satisface la ecuación

$$L_g(u) = cu^{p_n-1},$$

donde

$$c := \limsup_{s_i \rightarrow p_n} Y_g^{s_i}(M) \leq Y_g(M).$$

Razonando exactamente de la misma manera en que lo hicimos previamente, podemos ver que u es una función positiva y además satisface que $\|u\|_{p_n} = 1$. Luego,

$$Y_g(M) \leq Y_g(u) = c \leq Y_g(M),$$

con lo cual u es una solución que minimiza el funcional de Yamabe. \square

En la demostración anterior la hipótesis $Y_g(M) < Y(\mathbb{S}^n)$ es esencial. En efecto, si $Y_g(M) = Y(\mathbb{S}^n)$, puede ocurrir que exista una familia de soluciones minimizantes que se concentren en el origen. Por ejemplo, si consideramos la esfera de dimensión n , las funciones $\phi_N^* \psi_\varepsilon$, donde cada $\psi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\psi_\varepsilon(x) := \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \|x\|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

y ϕ_N es la proyección estereográfica en el polo norte, conforman una familia de soluciones positivas y minimizantes de la ecuación de Yamabe que se concentra en el origen cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por lo tanto, el límite de estas funciones cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ es la función nula, que no es una solución positiva minimizante de la ecuación de Yamabe.

Otra manera de probar el Teorema 4.2.2 es la siguiente. Por la Proposición 4.2.2, se puede ver que, a partir de un momento, la familia de soluciones subcríticas $\{u_s\}$ está uniformemente acotada en $C^{2,\alpha}(M)$. Luego, por el Teorema de Arzela-Ascoli, existe una subsucesión que converge uniformemente a una función $u \in C^2(M)$. Con argumentos estándar de regularidad, se puede ver que $u \in C^\infty(M)$ es una solución positiva de ecuación de Yamabe. Para ver los detalles de esta demostración sugerimos al lector ver [29], [5] y [36].

En esta instancia es natural preguntarnos qué tan restrictivas son las hipótesis del Teorema anterior. Es decir, dada una variedad Riemanniana cerrada (M, g) , ¿en qué situaciones vale la desigualdad estricta $Y_g(M) < Y(\mathbb{S}^n)$?

La respuesta a esta pregunta es que exceptuando el caso en que (M, g) es conforme a la esfera, vale la desigualdad estricta. Esto fue probado por T. Aubin y R. Schoen en [6] y [38] (ver también [39]).

Más específicamente, Aubin probó en [6] que vale la desigualdad estricta en el caso que la dimensión de la variedad sea mayor o igual a 6 y esta no sea localmente conforme a la esfera. Una variedad Riemanniana (M, g) se dice localmente conforme a la esfera (o al espacio Euclídeo) si alrededor de cada punto $p \in M$ existe un entorno U_p tal que la métrica g restringida a U_p sea conforme a la esfera.

Teorema 4.2.3. *Sea (M, g) una variedad cerrada de dimensión $n \geq 6$ que no es localmente conforme a la esfera, entonces $Y_g(M) < Y_{g_0}(\mathbb{S}^n)$.*

El resto de los casos fueron probados por Schoen en [38].

Teorema 4.2.4. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión $n \geq 3$. Si $n = 3, 4$ o 5 , o M es localmente conforme a la esfera, entonces $Y_g(M) < Y_{g_o^n}(\mathbb{S}^n)$ salvo que M sea globalmente conforme a \mathbb{S}^n .*

Con esto el problema queda resuelto, ya que si M no es conforme a la esfera entonces los Teoremas 4.2.3 y 4.2.4 nos dicen que $Y_g(M) < Y_{g_o^n}(\mathbb{S}^n)$ y podemos aplicar el Teorema 4.2.2. Si M es conforme a la esfera, entonces existe $f : (M, g) \rightarrow (\mathbb{S}^n, g_o^n)$ un difeomorfismo conforme, y como g_o^n es de curvatura escalar constante, entonces $f^*g_o^n \in [g]$ es de curvatura escalar constante.

La estrategia para probar los Teoremas 4.2.3 y 4.2.4 es encontrar funciones test $\phi \in C^\infty(M)$ tales que

$$Y_g(M) \leq Y_g(\phi) < Y_{g_o^n}(\mathbb{S}^n).$$

Para probar el Teorema 4.2.3 Aubin utilizó las funciones test (3.17) que usamos en la prueba del Teorema 3.5.2.

Para los casos restantes, Schoen construyó las funciones test a partir de la función de Green del Laplaciano conforme, suavizando la singularidad. Específicamente, si $Y_g(M) > 0$, y consideramos un punto $p \in M$, entonces existe una única función $G_p \in C^\infty(M - \{p\})$ (función de Green de L_g con polo en p) tal que

$$L_g(G_p) = \delta_p$$

en sentido distribucional, donde δ_p es la delta de Dirac en p .

Así, dado $p \in M$ y (U, x) un sistema de coordenadas normales conformes centrado en p , es decir un sistema de coordenadas normales para alguna métrica apropiada en la clase conforme de g , la función de Green es de la forma

$$G_p(q) = \frac{1}{r^{n-2}} + A + \alpha(q), \quad (4.12)$$

donde A es una constante y $\alpha = O(r^2)$. Schoen consideró funciones test de la forma

$$\zeta_\varepsilon(q) := \begin{cases} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + r^2(q)} \right)^{\frac{n-2}{2}} & \text{si } r \leq \delta \\ \varepsilon_0 (G(q) - \eta(q)\alpha(q)) & \text{si } \delta \leq r \leq 2\delta \\ \varepsilon_0 G(q) & \text{si } r > 2\delta \end{cases}$$

para ε y δ suficientemente pequeños, donde

$$\varepsilon_0 := \left(\frac{\varepsilon}{(\delta^{2-\delta} + A)^{\frac{2}{n-2}} (\varepsilon^2 + \delta^2)} \right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Utilizando el Teorema de Masa Positiva (ver [36] y [43]), Schoen probó que la constante A en 4.12 resulta positiva y que esto implica que cuando ε es suficientemente chico

$$Y_g(\zeta_\varepsilon) < Y_{g_o^n}(\mathbb{S}^n).$$

Para una exposición detallada de la prueba del problema de Yamabe sugerimos ver el artículo de Lee y Parker [29].

Capítulo 5

Espectro del Laplaciano conforme

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades geométricas que se deducen al analizar el espectro del Laplaciano conforme.

Como hemos visto previamente, el Laplaciano conforme es un operador elíptico y autadjunto con respecto al producto interno de $L^2(M)$. Luego, por el Teorema espectral, sabemos que su espectro es una sucesión no decreciente de autovalores que tiende a infinito:

$$\text{Spec}(L_g) = \{\lambda_1(g), \lambda_2(g), \dots\}$$

con

$$\lambda_1(g) < \lambda_2(g) \leq \dots \leq \lambda_k(g) \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (5.1)$$

donde los autovalores aparecen repetidos según su multiplicidad, es decir, la dimensión del autoespacio asociado. El Teorema Espectral nos dice que todos los autoespacios son de dimensión finita y que $L^2(M)$ posee una base ortonormal $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ donde cada $u_k \in H_1^2(M) - \{0\}$ es una autofunción de L_g asociada al autovalor $\lambda_k(g)$.

5.1. Caracterización variacional de los autovalores del Laplaciano conforme

Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada y conexa de dimensión $n \geq 3$. Notaremos por $Gr^k(H_1^2(M))$ al conjunto formado por los subespacios de $H_1^2(M)$ de dimensión k . Usaremos la siguiente caracterización variacional del espectro del Laplaciano conforme:

Teorema 5.1.1. [Rayleigh] Sea $\{v_k\}$ una base ortonormal de $L^2(M)$ donde v_k es un autovector de L_g de autovalor $\lambda_k(g)$ como en (5.1). Entonces:

1. El primer autovalor está dado por

$$\lambda_1(g) = \min_{v \in A_1} \frac{\int_M (a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2) dV_g}{\|v\|_2^2},$$

donde $A_1 := \{v \in H_1^2(M) : v \neq 0\}$. Además el mínimo es realizado por una función v si y solo si v es autofunción de autovalor $\lambda_1(g)$.

2. Si $i > 1$, el i -ésimo autovalor está dado por

$$\lambda_i(g) = \min_{v \in A_i} \frac{\int_M (a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2) dV_g}{\|v\|_2^2},$$

con $A_i := \{v \in H_1^2(M) : \int_M v v_j dV_g = 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, i-1\}$, donde cada v_j es una autofunción asociada a $\lambda_j(g)$. Además el mínimo es realizado por una función v si y solo si v es autofunción de autovalor $\lambda_i(g)$.

Demostración. Daremos una demostración basada en las técnicas utilizadas en la tesis. Se puede encontrar otra demostración, por ejemplo, la Sección 5 del Capítulo 6 de [18].

1. Por el Teorema 4.1.4, tomando $s = 2$, sabemos que existe $u \in C_{>0}^\infty(M)$ tal que

$$L_g(u) = cu$$

con

$$c = \inf_{u \in A_1} \frac{\int_M u L_g(u) dV_g}{\|u\|_2^2}.$$

Luego, u es autofunción de L_g de autovalor c .

Veamos que c es el primer autovalor. Supongamos que existe λ autovalor de L_g con $\lambda < c$. Si tomamos v una autofunción asociada a λ , tenemos que

$$\frac{\int_M v L_g(v) dV_g}{\|v\|_2^2} = \frac{\int_M v \lambda v dV_g}{\|v\|_2^2} = \lambda < c = \inf_{u \in A_1} \frac{\int_M u L_g(u) dV_g}{\|u\|_2^2},$$

lo cual es absurdo. Luego, $c = \lambda_1(g)$.

2. Solo haremos el caso $i = 2$. Para $i > 2$ se procede de forma similar.

Sea

$$c_2 := \inf_{v \in A_2} \frac{\int_M v L_g(v) dV_g}{\|v\|_2^2}.$$

Como $A_2 = \text{span}\{v_1\}^\perp \subseteq H_1^2(M)$ es subespacio cerrado, argumentando como en el Teorema 4.1.4, encontramos una función $v \in A_2$ que realiza el mínimo. Por el Teorema 3.3.1, v resulta una solución de la ecuación $L_g(v) = \tilde{c}v$ con

$$\tilde{c} = Y_g^2(v) = \frac{\int_M v L_g(v) dV_g}{\|v\|_2^2} = c_2$$

es decir, v es autofunción de L_g de autovalor c_2 .

Notemos que $\lambda_1(g) < c_2$. En efecto, supongamos que $\lambda_1(g) = c_2$. Entonces existe una función $v \in A_2$ que minimiza

$$\lambda_1(g) = \min_{w \in A_1} \frac{\int_M (a_n |\nabla_g w|^2 + S_g w^2) dV_g}{\|w\|_2^2}.$$

Como $v \in A_2$, en particular satisface que

$$\int_M v_1 v dV_g = 0,$$

con v_1 la autofunción positiva hallada en el ítem anterior. Esto nos dice que v cambia de signo. Luego, $|v|$ también es minimizante y solución de la Ecuación $L_g(v) = c_2 v$. Por lo tanto, $v \in C^2(M)$ y por el principio fuerte del máximo (Teorema 4.1.2), v resulta ser una función positiva, lo cual es absurdo.

Veamos que $c_2 = \lambda_2(g)$. Supongamos que existe λ un autovalor de L_g con $\lambda_1(g) < \lambda < c_2$. Tomemos w autofunción de L_g asociada al autovalor λ . Por el Teorema Espectral, w es ortogonal a u_1 . Es decir,

$$\int_M w u_1 dV_g = 0.$$

Luego, $w \in A_2$ y

$$\frac{\int_M w L_g(w) dV_g}{\|w\|_2^2} = \lambda < c_2 = \inf_{v \in A_2} \frac{\int_M v L_g(v) dV_g}{\|v\|_2^2},$$

lo cual es contradicción. Por lo tanto, $c_2 = \lambda_2$.

□

Notemos que caracterización anterior del i -ésimo autovalor depende de los autovalores previos. Es por este motivo, que la siguiente caracterización resulta muy conveniente.

Teorema 5.1.2. *Sea $\lambda_1(g) < \lambda_2(g) \leq \dots \leq \lambda_k(g) \leq \dots$ la sucesión de autovalores de L_g dada en (5.1). Tenemos la siguiente caracterización del k -ésimo autovalor:*

$$\lambda_k(g) = \min_{V \in Gr^k(H_1^2(M))} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_M a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2 dV_g}{\|v\|_2^2}.$$

Demostración. Sea

$$\mu_k := \min_{V \in Gr^k(H_1^2(M))} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_M a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2 dV_g}{\|v\|_2^2}.$$

Consideremos $\{u_i\}$ una base ortonormal de autovectores, donde cada u_i tiene a $\lambda_i(g)$ como autovalor asociado. Sea $V_k := \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$. Claramente V_k satisface que $\dim V_k = k$.

Si $v \in V_k$, entonces podemos escribirlo como

$$v = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i,$$

donde

$$\alpha_i = \int_M u_i v dV_g.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\int_M v L_g(v) dV_g}{\|v\|_2^2} &= \frac{\int_M (\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i) L_g(\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i) dV_g}{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2} \\ &= \frac{\int_M \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j L_g(u_i) u_j dV_g}{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2} = \frac{\int_M \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \lambda_i(g) u_i u_j dV_g}{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2} \\ &= \frac{\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \lambda_i(g) \delta_{ij}}{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \lambda_i(g)}{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2} \leq \lambda_k(g), \end{aligned}$$

donde para la última desigualdad usamos que $\lambda_i(g) \leq \lambda_k(g)$ para $i = 1, \dots, k$. Así,

$$\sup_{v \in V_k} \frac{\int_M v L_g(v) dV_g}{\|v\|_2^2} \leq \lambda_k(g)$$

y por lo tanto,

$$\mu_k = \min_{V \in Gr^k(H_1^2(M))} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_M (a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2) dV_g}{\|v\|_2^2} \leq \lambda_k(g).$$

Para ver la otra desigualdad, consideremos $V \subseteq H_1^2(M)$ un subespacio de dimensión k . Tomemos el subespacio $W := \{u_1, \dots, u_{k-1}\}^\perp$. Claramente, el subespacio W satisface que $\dim V \cap W \geq 1$. Sea $v \in V \cap W$ con $\|v\|_2^2 = 1$. Entonces

$$v = \sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i u_i$$

con

$$\alpha_i = \int_M u_i v dV_g.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\int_M v L_g(v) dV_g}{\|v\|_2^2} &= \int_M v L_g(v) dV_g = \sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i^2 \int_M L_g(u_i) u_i \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i^2 \lambda_i(g) \geq \lambda_k(g) \sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i^2, \end{aligned}$$

donde para la última desigualdad usamos que $\lambda_i(g) \geq \lambda_k(g)$ para todo $i \geq k$. Finalmente, dado que $v \in W$ satisface $\|v\|_2^2 = 1$ y que al escribir w en la base ortonormal $\{u_i\}$ los coeficientes que acompañan a las funciones u_1, \dots, u_{k-1} son todos nulos, tenemos que

$$\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 = 1$$

y por lo tanto,

$$\lambda_k \sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i^2 = \lambda_k(g).$$

Luego,

$$\frac{\int_M v L_g(v) dV_g}{\|v\|_2^2} \geq \lambda_k(g).$$

Así, tomando supremo en V , obtenemos que

$$\sup_{w \in V - \{0\}} \frac{\int_M w L_g(w) dV_g}{\|w\|_2^2} \geq \frac{\int_M v L_g(v) dV_g}{\|v\|_2^2} \geq \lambda_k(g).$$

Como V es arbitrario, podemos deducir que

$$\mu_k = \min_{V \in Gr^k(H_1^2(M))} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_M (a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2) dV_g}{\|v\|_2^2} \geq \lambda_k(g).$$

□

El siguiente corolario nos permitirá estudiar cómo cambian los autovalores en presencia de una deformación conforme.

Corolario 5.1.1. *Sea $\tilde{g} = u^{p_n-2}g$ una métrica conforme a g . Tenemos la siguiente fórmula variacional para los autovalores de $L_{\tilde{g}}$ en términos de la métrica g :*

$$\lambda_k(\tilde{g}) = \min_{V \in Gr^k(H_1^2(M))} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_M a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2 dV_g}{\int_M u^{p_n-2} v^2 dV_g}.$$

Demostración. Utilizando el Teorema anterior, la invarianza conforme de L_g (ver Teorema 3.2.1) y que $dV_{\tilde{g}} = u^{p_n} dV_g$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_k(\tilde{g}) &= \min_{V \in Gr^k(H_1^2(M))} \sup_{w \in V - \{0\}} \frac{\int_M w L_{\tilde{g}}(w) dV_{\tilde{g}}}{\int_M w^2 dV_{\tilde{g}}} \\ &= \min_{V \in Gr^k(H_1^2(M))} \sup_{w \in V - \{0\}} \frac{\int_M w u^{1-p_n} L_g(uw) u^{p_n} dV_g}{\int_M w^2 u^{p_n} dV_g} \\ &= \min_{V \in Gr^k(H_1^2(M))} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_M (a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2) dV_g}{\int_M u^{p_n-2} v^2 dV_g}, \end{aligned}$$

donde $v = uw$.

□

5.2. Relación entre el primer autovalor y la constante de Yamabe

El objetivo de esta sección es estudiar la relación entre el primer autovalor del Laplaciano conforme y la constante de Yamabe definida en (3.10). Inspirados en esto podremos construir una familia de invariantes de la clase conforme.

Proposición 5.2.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada y conexa. Entonces, las autofunciones asociadas al primer autovalor de L_g no cambian de signo.*

Demostración. Nuevamente, por el Teorema 4.1.4, sabemos que existe $u \in C_{>0}^\infty(M)$ tal que

$$L_g(u) = cu$$

con

$$c = \inf_{u \in A_1} \frac{\int_M u L_g(u) dV_g}{\|u\|_2^2}.$$

Además, por el Teorema 5.1.1 sabemos que $c = \lambda_1(g)$. Luego, u es una solución positiva de

$$L_g(u) = \lambda_1(g)u.$$

Esto significa que u es una autofunción positiva de autovalor $\lambda_1(g)$. Pero como el primer autovalor es simple (ver 5.1), toda autofunción asociada a $\lambda_1(g)$ debe ser un múltiplo escalar de u , y por lo tanto no puede cambiar de signo. □

Observemos que como cualquier autofunción de $\lambda_2(g)$ es ortogonal a v respecto del producto interno de $L^2(M)$, necesariamente debe cambiar de signo.

Teorema 5.2.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada y conexa. Entonces:*

1. *El signo del primer autovalor del Laplaciano conforme coincide con el signo de la constante de Yamabe.*
2. *Si $Y_g(M) \geq 0$, entonces*

$$Y_g(M) = \inf_{h \in [g]} \lambda_1(h) Vol_h(M)^{\frac{2}{n}}.$$

Demostración.

Sea v una autofunción de L_g asociada al autovalor $\lambda_1(g)$. Por la Proposición 5.2.1, tenemos que $v > 0$ o $v < 0$. Supongamos que $v > 0$.

Consideremos el caso en que $Y_g(M) > 0$ (los otros casos son completamente análogos). Por la Proposición 3.4.2, esto ocurre si y solo si existe una métrica $h \in [g]$ tal que $S_h > 0$. Como h es conforme a g , existe $u \in C_{>0}^\infty(M)$ tal que $h = u^{p_n-2}g$. Es decir, por la Ecuación (3.3),

$$L_g(u) = S_h u^{p_n-1}.$$

Como las funciones u, v son positivas, entonces

$$\int_M uv \, dV_g > 0.$$

Como L_g es autoadjunto respecto del producto interno de $L^2(M)$ (ver Lema 3.1.2), tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_1(g) \int_M uv \, dV_g &= \int_M u L_g(v) dV_g \\ &= \int_M L_g(u)v \, dV_g = \int_M S_h u^{p_n-1} v \, dV_g > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda_1(g)$ debe ser positivo.

Por la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$\|v\|_2^2 = \int_M v^2 dV_g \leq \left(\int_M v^{p_n} dV_g \right)^{\frac{2}{p_n}} \left(\int_M 1 \, dV_g \right)^{1-\frac{2}{p_n}} = \|v\|_{p_n}^2 \text{Vol}_g(M)^{\frac{2}{n}}.$$

Luego, como $Y_g(M) \geq 0$, tenemos que

$$0 \leq Y_g(v) = \frac{\int_M a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2 dV_g}{\|v\|_{p_n}^2} \leq \frac{\int_M a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2 dV_g}{\|v\|_2^2} \text{Vol}_g(M)^{\frac{2}{n}}$$

para toda función $v \in H_1^2(M) - \{0\}$.

Por el Teorema 5.1.1, tomando ínfimo sobre v en ambos lados de la desigualdad, resulta que

$$Y_g(M) \leq \lambda_1(g) \text{Vol}_g(M)^{\frac{2}{n}}.$$

Luego, como la constante de Yamabe es un invariante de la clase conforme (ver Proposición 3.4.1), obtenemos que

$$Y_g(M) \leq \inf_{h \in [g]} \lambda_1(h) \text{Vol}_h(M)^{\frac{2}{n}}.$$

Para ver la otra desigualdad primero notemos que si $h = u^{p_n-2}g$, por el Teorema 5.1.1 y la demostración del Corolario 5.1.1, resulta que

$$\lambda_1(h) = \min_{w \in A_1} \frac{\int_M w L_h(w) dV_h}{\int_M w^2 dV_h} = \min_{v \in A_1} \frac{\int_M a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2 dV_g}{\int_M u^{p_n-2} v^2 dV_g}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \inf_{h \in [g]} \lambda_1(h) \text{Vol}_h(M)^{\frac{2}{n}} &= \inf_{u \in C_{>0}^\infty(M)} \min_{v \in A_1} \frac{\int_M a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2 dV_g}{\int_M u^{p_n-2} v^2 dV_g} \left(\int_M u^{p_n} dV_g \right)^{\frac{2}{n}} \\ &\leq \inf_{u \in C_{>0}^\infty(M)} \frac{\int_M a_n |\nabla_g u|^2 + S_g u^2 dV_g}{\int_M u^{p_n} dV_g} \left(\int_M u^{p_n} dV_g \right)^{\frac{2}{n}} \\ &= \inf_{u \in C_{>0}^\infty(M)} \frac{\int_M a_n |\nabla_g u|^2 + S_g u^2 dV_g}{\|u\|_{p_n}^2} = Y_g(M). \end{aligned}$$

□

Notemos que para ver la segunda desigualdad en el ítem 2 del Teorema anterior nunca usamos que $Y_g(M) \geq 0$. La siguiente proposición nos dice qué relación hay entre $Y_g(M)$ y la expresión $\inf_{h \in [g]} \lambda_1(g) \text{Vol}_h(M)^{\frac{2}{n}}$ cuando $Y_g(M) < 0$.

Proposición 5.2.2. *Con las hipótesis del Teorema anterior, si $Y_g(M) < 0$, entonces $\lambda_1(g) < 0$ y además*

$$\inf_{h \in [g]} \lambda_1(g) \text{Vol}_h(M)^{\frac{2}{n}} = -\infty.$$

1. *Demostración.* Como $Y_g(M) < 0$, existe una función $v_0 \in C_{>0}^\infty(M)$ tal que

$$Y_g(v_0) = \frac{\int_M L_g(v_0) v_0 dV_g}{\|v_0\|_{p_n}^2} < 0. \quad (5.2)$$

Sean $p \in M$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos una función suave $\rho_\varepsilon \in C^\infty(M)$ tal que $0 \leq \rho_\varepsilon \leq 1$, $\rho_\varepsilon \equiv 0$ en $B_\varepsilon(p)$ y $\rho_\varepsilon \equiv 1$ en $M - B_{2\varepsilon}(p)$. Sea $w_\varepsilon := \rho_\varepsilon v_0$. Como

$$\int_M w_\varepsilon L_g(w_\varepsilon) dV_g \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M v_0 L_g(v_0) dV_g < 0,$$

si tomamos un ε suficientemente pequeño, tenemos que

$$\int_M w_\varepsilon L_g(w_\varepsilon) dV_g < 0.$$

Consideremos la familia de funciones positivas dadas por $u_\delta := u + \delta$ con $u \in C_{\geq 0}^\infty(M)$ con soporte en $B_\varepsilon(p)$ fija y $0 < \delta < 1$. Si tomamos la familia de métricas conformes a g dadas por $\{h_\delta\}_\delta$ con $h_\delta := u_\delta^{p_n-2} g$ entonces, con la misma demostración que el Corolario 5.1.1, tenemos que

$$\inf_{v_0 \in C_{>0}^\infty(M)} \frac{\int_M v_0 L_{h_\delta}(v_0) dV_{h_\delta}}{\int_M v_0^2 dV_{h_\delta}} = \inf_{v_0 \in C_{>0}^\infty(M)} \frac{\int_M v_0 L_g(v_0) dV_g}{\int_M u^{p_n-2} v_0^2 dV_g}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \inf_{h \in [g]} \lambda_1(h) \text{Vol}_h(M)^{\frac{2}{n}} &\leq \lambda_1(h_\delta) \text{Vol}_{h_\delta}(M)^{\frac{2}{n}} = \inf_{v \in C_{>0}^\infty(M)} \frac{\int_M v L_{h_\delta}(v) dV_{h_\delta}}{\int_M v^2 dV_{h_\delta}} \text{Vol}_{h_\delta}(M)^{\frac{2}{n}} \\ &= \inf_{v \in C_{>0}^\infty(M)} \frac{\int_M v L_g(v) dV_g}{\int_M u^{p_n-2} v^2 dV_g} \left(\int_M u_\delta^{p_n} dV_g \right)^{\frac{2}{p_n}} \leq \frac{\int_M w_\varepsilon L_g(w_\varepsilon) dV_g}{\int_M u_\delta^{p_n-2} w_\varepsilon^2 dV_g} \left(\int_M u_\delta^{p_n} dV_g \right)^{\frac{2}{p_n}} \\ &\leq \frac{\int_M w_\varepsilon L_g(w_\varepsilon) dV_g}{\int_M \delta^{p_n-2} w^2 dV_g} \left(\int_M (u+1)^{p_n} dV_g \right)^{\frac{2}{n}} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} -\infty. \end{aligned}$$

□

Luego, cuando la clase conforme admite una métrica de curvatura escalar no negativa, tenemos que

$$Y_g(M) := \inf_{h \in [g]} \lambda_1(h) \text{Vol}_h(M)^{\frac{2}{n}}.$$

Inspirándonos en esta igualdad podemos definir la k -ésima constante de Yamabe como

$$Y_g^k(M) := \inf_{h \in [g]} \lambda_k(h) \text{Vol}_h(M)^{\frac{2}{n}}.$$

Como vimos en el Teorema 5.2.1, si $Y_g(M) \geq 0$ la primer constante de Yamabe coincide con la constante de Yamabe definida en (3.10). Es decir,

$$Y_g^1(M) = Y_g(M).$$

Además, en forma similar a lo hecho en la Proposición 5.2.2, se puede ver que la k -ésima constante de Yamabe es $-\infty$ si $\lambda_k(g) < 0$.

Si $\tilde{g} \in [g]$, entonces

$$Y_{\tilde{g}}^k(M) = \inf_{h \in [\tilde{g}]} \lambda_k(h) \text{Vol}_h(M)^{\frac{2}{n}} = \inf_{h \in [g]} \lambda_k(h) \text{Vol}_h(M)^{\frac{2}{n}} = Y_g^k(M).$$

Es decir, la k -ésima constante de Yamabe es un invariante en la clase conforme. Estas constantes fueron introducidas por Ammann y Humbert en [2]. En general no se dispone de una adecuada interpretación geométrica de la k -ésima constante de Yamabe para $k \geq 2$ como sí tenemos de la primera. Además, estas constantes no son necesariamente alcanzadas por funciones suaves. En [2], [16] y [12] Ammann y Humbert, El Sayed y Canzani y col. estudian la relación entre la segunda constante de Yamabe y las soluciones nodales de la ecuación de Yamabe, es decir, aquellas soluciones que cambian de signo.

5.3. Signo de los autovalores del Laplaciano conforme

Como la constante de Yamabe es un invariante de la clase conforme, el Teorema 5.2.1 y la Proposición 5.2.2 nos dicen que el signo del primer autovalor no depende del representante de la clase conforme. El siguiente Teorema nos muestra que el mismo fenómeno ocurre con todos los autovalores.

Teorema 5.3.1. *El signo del k -ésimo autovalor de L_g es invariante en la clase conforme. Es decir, si $h \in [g]$, entonces el signo de $\lambda_k(h)$ coincide con el signo de $\lambda_k(g)$.*

Demostración. Sea $h \in [g]$. Escribamos $h = u^{p_n-2}g$ con $u \in C_{>0}^\infty(M)$. Supongamos que $\lambda_k(g) > 0$ y $\lambda_k(h) \leq 0$. Por el Corolario 5.1.1, tenemos que

$$\lambda_k(h) = \min_{V \in Gr^k(H_1^2(M))} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_M v L_g(v) dV_g}{\int_M u^{p_n-2} v^2 dV_g}.$$

Tomemos $V_0 \in Gr^k(H_1^2(M))$ que realice el mínimo. Es decir,

$$\lambda_k(h) = \sup_{v \in V_0 - \{0\}} \frac{\int_M v L_g(v) dV_g}{\int_M u^{p_n-2} v^2 dV_g}.$$

Como $\lambda_k(h) \leq 0$, entonces $\int_M v L_g(v) dV_g \leq 0$ para todo $v \in V_0 - \{0\}$. Luego, por el Teorema 5.1.2, resulta

$$0 < \lambda_k(g) \leq \sup_{v \in V_0 - \{0\}} \frac{\int_M v L_g(v) dV_g}{\int_M v^2 dV_g} \leq 0,$$

lo cual es un absurdo. Por lo tanto, debe ser $\lambda_k(h) > 0$.

Por la simetría de la clase conforme, también resulta que si $\lambda_k(g) < 0$, entonces $\lambda_k(h) < 0$.

Únicamente resta ver que $\lambda_k(g) = 0$ implica $\lambda_k(h) = 0$. Pero nuevamente, esto se deduce usando la simetría de la clase conforme, ya que si $\lambda_k(g) = 0$ y $\lambda_k(h) > 0$ estamos en el primer caso, y si $\lambda_k(g) = 0$ y $\lambda_k(h) < 0$ estamos en el segundo. \square

Como el espectro del Laplaciano conforme es una sucesión no decreciente de autovalores que tiende a infinito, éstos serán positivos a partir de un momento. Por lo tanto, la cantidad de autovalores negativos del Laplaciano conforme es finita. Como además el signo de cada autovalor es invariante en la clase conforme, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.3.1. *La cantidad de autovalores negativos y la dimensión del núcleo de L_g son invariantes de la clase conforme.*

La pregunta natural que surge es si dada una variedad cualquiera, la cantidad de autovalores negativos está determinada únicamente por la geometría o tiene obstrucciones topológicas. El resto de esta sección está dedicada a mostrar que en cualquier variedad podemos construir métricas con la cantidad de autovalores negativos que nosotros queramos. Es decir, la estructura diferencial no impone ninguna restricción sobre la cantidad de autovalores negativos del Laplaciano conforme. Para esto necesitaremos el siguiente resultado debido a Eliasson (ver [17]). La demostración aquí presentada se debe a L. B. Bergery (ver [9] y [10]).

Teorema 5.3.2. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión $n \geq 3$. Entonces, existe una métrica h sobre M de curvatura escalar constante y negativa.*

Demostración. Para probar el Teorema, basta con ver que existe una métrica h tal que

$$\int_M S_h dV_g < 0.$$

En efecto, si esto ocurre, entonces

$$Q(h) = \frac{\int_M S_h dV_h}{Vol_h(M)^{\frac{n-2}{n}}} < 0,$$

con lo cual

$$Y_h(M) < 0.$$

Luego, por el Teorema 3.4.1, existe $\tilde{h} \in [h]$ de curvatura escalar constante y negativa.

Para esto, consideremos D^n un disco abierto centrado en $p \in M$. Tomemos un subconjunto de la forma $\mathbb{S}^r \times D^s \subseteq D^n$ con $r \geq 1$ y $s \geq 2$ tales que $r + s = n$. Sea f una función positiva en D^s y radial respecto p que valga idénticamente 1 en un entorno del borde de D^s . Si h_2 y h_3 son las métricas estándar en \mathbb{S}^r y D^s , respectivamente, entonces

$$h_1 := f^{-2\frac{r}{n}-1} (f^2 h_2 + h_3)$$

define una métrica en $\mathbb{S}^r \times D^s$ que se extiende a una métrica h de M . Luego,

$$\int_M S_h dV_h = \int_{M-\mathbb{S}^r \times D^s} S_h dV_h + \int_{\mathbb{S}^r \times D^s} S_h dV_h.$$

Claramente el primer sumando no depende de f . En cambio, para el segundo sumando tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^r \times D^s} S_h dV_h &= \int_{\mathbb{S}^r \times D^s} S_{h_1} dV_{h_1} \\ &= \text{Vol}_{h_2}(\mathbb{S}^r) \int_{D^s} f^{\frac{r}{n-1}-2} \left(S_{h_2} - \frac{r(n-1-r)}{n-1} |\nabla_{h_3} f|^2 \right) dV_{h_3}. \end{aligned}$$

Notemos que, como $r \leq n-2$, entonces

$$-\frac{r(n-1-r)}{n-1} < 0,$$

con lo cual el coeficiente de $|\nabla_{h_3} f|^2$ es negativo.

Luego, eligiendo f de forma tal que $1 \leq f \leq 2$ y que $|\nabla_{h_3} f|^2$ sea lo suficientemente grande, obtenemos que

$$\int_M S_h dV_h < 0.$$

Con lo cual queda demostrado el Teorema. □

En [17], Eliasson considera métricas de la forma

$$h(X, Y) = g(\psi X + d\varphi(X) \nabla_g \varphi, Y)$$

con $\psi, \varphi \in C^\infty(M)$, $\psi > 0$. Luego, para una elección adecuada de estas funciones, prueba que la métrica h satisface lo querido. Es decir que

$$\int_M S_h dV_g < 0.$$

Una primer consecuencia del Teorema 5.3.2 es la siguiente:

Proposición 5.3.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión $n \geq 3$ de curvatura escalar no negativa. Entonces existe otra métrica h de curvatura escalar constantemente cero.*

Demostración. Como $S_g \geq 0$, entonces, por la Proposición 3.4.2, necesariamente debe ser $Y_g(M) \geq 0$. Más aún, si $Y_g(M) = 0$, entonces existe $h \in [g]$ tal que $S_h \equiv 0$.

Si $Y_g(M) > 0$, por el Teorema 5.2.1 resulta $\lambda_1(g) > 0$. Además, por el Teorema 5.3.2, existe una métrica h con $S_h < 0$. Luego $Y_h(M) < 0$ y, nuevamente por el Teorema 5.2.1, debe ser $\lambda_1(h) < 0$. Como el espacio de métricas Riemannianas es convexo, para cada $t \in [0, 1]$ podemos definir la métrica

$$g_t := tg + (1 - t)h.$$

Consideremos la función continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) := \lambda_1(g_t).$$

Como $f(0) = \lambda_1(h) < 0$ y $f(1) = \lambda_1(g) > 0$, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $\lambda_1(g_{t_0}) = 0$. Luego, por la Proposición 5.2.1, tenemos que $Y_{g_{t_0}} = 0$. Por la Proposición 3.4.2, esto implica que existe $h_{t_0} \in [g_{t_0}]$ tal que $S_{h_{t_0}} \equiv 0$. □

Proposición 5.3.2. *Sea M una variedad Riemanniana cerrada de dimensión $n \geq 3$. Para todo $k \geq 1$ existe una métrica g con $\lambda_k(g) < 0$.*

La siguiente demostración se debe a El Sayed (ver [16]).

Demostración. Consideremos k esferas \mathbb{S}^n de dimensión $n = \dim M$. Por el Teorema 5.3.2, podemos dotar a cada esfera con la misma métrica g de curvatura escalar negativa. En particular, por la Proposición 3.4.2, $Y_g(\mathbb{S}^n) < 0$.

Sea $p \in \mathbb{S}^n$. Como $Y_g(\mathbb{S}^n) < 0$, para todo $\varepsilon, \delta > 0$ podemos tomar una función $u \in C_{>0}^\infty(\mathbb{S}^n)$ con soporte en $\mathbb{S}^n - B_\varepsilon(p)$ tal que

$$\frac{\int_{\mathbb{S}^n} u L_g(u) dV_g}{\int_{\mathbb{S}^n} u^2 dV_g} < -\delta. \quad (5.3)$$

En efecto, sea ρ_ε una función suave tal que $0 \leq \rho_\varepsilon \leq 1$, $\rho_\varepsilon \equiv 0$ en $B_\varepsilon(p)$, $\rho_\varepsilon \equiv 1$ en $\mathbb{S}^n - B_{2\varepsilon}(p)$ y $|\nabla_g \rho_\varepsilon| \leq \frac{2}{\varepsilon}$. Como $Y_g(\mathbb{S}^n) < 0$, existe $v \in C_{>0}^\infty(\mathbb{S}^n)$ tal que

$$Y_g(v) = \frac{\int_{\mathbb{S}^n} v L_g(v) dV_g}{\int_{\mathbb{S}^n} v^2 dV_g} < -2\delta.$$

Así, si ε es suficientemente chico, $u := \rho_\varepsilon v$ satisface (5.3).

Sean p_1, \dots, p_k puntos distintos en M . Consideremos la suma conexa

$$\tilde{M} := M \# (\mathbb{S}^n)_1 \# \dots \# (\mathbb{S}^n)_k$$

pegando cada $(\mathbb{S}^n)_i$ en p con $p_i \in M$ de forma tal que $B_\varepsilon(p)$ coincida con $B_\varepsilon(p_i)$. Notemos que \tilde{M} es difeomorfa a M .

Consideremos en \tilde{M} cualquier métrica h que satisfaga

$$h|_{(\mathbb{S}^n)_i - B_\varepsilon(p_i)} = g.$$

Definamos en \tilde{M} la función

$$u_i = \begin{cases} u & \text{en } (\mathbb{S}^n)_i - B_\varepsilon(p_i) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}.$$

Como las u_i tienen soporte disjunto, si $V := \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ con v_i autofunción asociada a λ_i , por el Teorema 5.1.2, resulta que

$$\begin{aligned} \lambda_k(h) &\leq \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_{\tilde{M}} v L_g(v) dV_h}{\int_{\tilde{M}} v^2 dV_h} \\ &= \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_k} \frac{\int_{\tilde{M}} L_g(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k)(\lambda_1 v_1 + \dots, \lambda_k v_k) dV_h}{\int_{\tilde{M}} (\lambda_1 v_1 + \dots, \lambda_k v_k)^2 dV_h} \\ &\leq \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_k} \frac{(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2) \int_{\mathbb{S}^n} u L_g(u) dV_g}{(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2) \int_{\mathbb{S}^n} u^2 dV_g} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{S}^n} u L_g(u) dV_g}{\int_{\mathbb{S}^n} u^2 dV_g} < -\delta. \end{aligned}$$

□

Capítulo 6

Productos Riemannianos

En este capítulo utilizaremos productos Riemannianos para construir ejemplos de variedades Riemannianas que satisfagan distintas propiedades geométricas.

6.1. Multiplicidad de métricas de curvatura escalar constante

En el capítulo 3 vimos que dada (M, g) una variedad Riemanniana cerrada y conexa de dimensión $n \geq 3$ tal que $Y_g(M) \leq 0$, entonces en cada clase conforme existe una única métrica de curvatura escalar constante distinta salvo dilataciones escalares (ver Proposición 3.4.3 y Corolario 3.4.1). En esta sección utilizaremos productos Riemannianos para mostrar que esto no siempre es cierto si $Y_g(M) > 0$. Para esto primero necesitamos el siguiente Lema.

Lema 6.1.1. *Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas cerradas tales que $\dim M = m$ y $\dim N = n$, y sea $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Entonces tenemos que*

1.
$$S_{tg} = \frac{1}{t} S_g. \tag{6.1}$$

2.
$$S_{g+h} = S_g + S_h. \tag{6.2}$$

Demostración.

1. Al multiplicar una métrica Riemanniana por una constante t positiva obtenemos una deformación conforme de la misma. Luego, la Ecuación (6.1) se obtiene de aplicar el Teorema 3.1.1.
2. Veamos que vale la Igualdad (6.2). Sea $(p, q) \in M \times N$. Tomemos $(U \times V, (x, y))$ una carta de $M \times N$ centrada en (p, q) donde (U, x) es carta de M centrada en p y (V, y) es una carta de N centrada en q . Si $\{\partial_1, \dots, \partial_m, \partial_{m+1}, \dots, \partial_{m+n}\}$ es la

base estándar de vectores tangentes de $T_{(p,q)}M \times N$ inducida por el sistema de coordenadas mencionado y $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$, $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ son las proyecciones canónicas, entonces $\{d\pi_1\partial_1, \dots, d\pi_1\partial_m\}$ y $\{d\pi_2\partial_{m+1}, \dots, d\pi_2\partial_{m+n}\}$ son las bases de T_pM y T_qN inducidas por las cartas (U, x) y (V, y) , respectivamente.

Luego, podemos describir localmente al tensor de curvatura como

$$\begin{aligned} R_{ijkl}^{g+h} &= (g+h)(R^{g+h}(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l) \\ &= g(R^g(d\pi_1\partial_i, d\pi_1\partial_j)d\pi_1\partial_k, d\pi_1\partial_l) + h(R^h(d\pi_2\partial_i, d\pi_2\partial_j)d\pi_2\partial_k, d\pi_2\partial_l). \end{aligned}$$

Notemos que si $i > m$ entonces $d\pi_1\partial_i = 0$, y si $i \leq m$, $d\pi_2\partial_i = 0$. Por lo tanto,

$$R_{ijkl}^{g+h} = \begin{cases} R_{ijkl}^g & \text{si } 1 \leq i, j, k, l \leq m, \\ R_{ijkl}^h & \text{si } m+1 \leq i, j, k, l \leq m+n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como la matriz de $g+h$ en esta base es de la forma

$$\left((g+h)_{ij} \right) = \begin{pmatrix} (g_{ij}) & 0 \\ 0 & (h_{ij}) \end{pmatrix},$$

al contraer por la métrica primero en los índices k, l y luego en i, j obtenemos que

$$S_{g+h} = S_g + S_h.$$

□

Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas cerradas de dimensión $m \geq 3$ y $n \geq 3$, respectivamente, tales que $Vol_g(M) = 1$, $Vol_h(N) = 1$, $S_g = c$ y $S_h = d$, donde c y d son constantes positivas. Para cada $t > 0$ consideremos el producto Riemanniano $(M \times N, g_t)$, donde

$$g_t := t^{-n}g + t^m h.$$

Por el Lema 6.1.1, tenemos que

$$S_{g_t} = t^n S_g + t^{-m} S_h = t^n c + t^{-m} d.$$

En particular, S_{g_t} es de curvatura escalar constante. Además, de la expresión local de los elementos de volumen deducimos fácilmente que

$$dV_{g_t} = \sqrt{t^{-nm} t^{nm}} dV_g dV_h = dV_g dV_h.$$

Luego,

$$Vol_{g_t}(M \times N) = \int_{M \times N} dV_g dV_h = Vol_g(M) Vol_h(N) = 1.$$

Por lo tanto, al evaluar el funcional de Yamabe en la métrica g_t obtenemos que

$$\begin{aligned} Q(g_t) &= \int_{M \times N} (t^n S_g + t^{-m} S_h) dV_g dV_h \\ &= t^n S_g \text{Vol}_g(M) + t^{-m} S_h \text{Vol}_h(N) = t^n c + t^{-m} d. \end{aligned}$$

Claramente, haciendo $t \rightarrow \infty$ o $t \rightarrow 0$, resulta que $t^n c + t^{-m} d \rightarrow \infty$. Luego, si elegimos t_0 suficientemente grande o suficientemente pequeño, por el Teorema 3.5.2, tenemos que

$$Q(g_{t_0}) > Y(\mathbb{S}^n)$$

Pero por el Teorema 3.5.2 sabemos que

$$Y(\mathbb{S}^n) \geq Y_{g_{t_0}}(M \times N).$$

Por lo tanto, si bien g_{t_0} es de curvatura escalar constante, esta métrica no minimiza el funcional de Yamabe. No obstante, por el Teorema 3.4.1, sabemos que existe una métrica de curvatura escalar constante que minimiza el funcional de Yamabe, con lo cual en la clase conforme $[g_{t_0}]$ hay al menos dos métricas (esencialmente) distintas de curvatura escalar constante.

En general cuando una variedad Riemanniana admite métricas de curvatura escalar positiva existen clases conformes con tantas métricas de curvatura escalar constante y volumen dado como queramos. Más precisamente, Pollack probó en [34] que dada una variedad Riemanniana cerrada (M, g) de dimensión al menos tres y de curvatura escalar positiva, y dado k un entero positivo y $\varepsilon > 0$, existe una clase conforme $[h]$ tal que existe $h' \in [h]$ de modo que $\|g - h'\|_{C^0} < \varepsilon$ y $[h]$ tiene k métricas de curvatura escalar constante y volumen dado.

6.2. Métricas conformes de curvatura escalar constante deformando solo una variable

Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión m y curvatura escalar constante b y sea (N, h) otra variedad Riemanniana cerrada de dimensión n de forma tal que $n + m \geq 3$. Consideremos el producto Riemanniano $(M \times N, g + h)$. En esta sección mostraremos que existe una métrica \tilde{h} en la clase conforme $[g + h]$ de curvatura escalar constante de la forma

$$\tilde{h} = u^{p_{n+m}}(g + h)$$

con $u \in C_{>0}^\infty(M)$.

Claramente, tal métrica existe si y solo si u satisface la ecuación

$$a_{m+n} \Delta_{g+h} u + S_{g+h} u = \lambda u^{p_{n+m}-1} \quad (6.3)$$

para alguna constante λ .

Como u solo depende de N , podemos reescribir la Ecuación (6.3) de la siguiente manera

$$a_n \Delta_h u + \frac{a_n}{a_{n+m}}(b + S_h)u = \frac{a_n}{a_{n+m}} \lambda u^{p_{n+m}-1}.$$

Notemos que de esta forma la ecuación no depende de M .

Por lo tanto, como $p_{n+m} < p_n$, si tomamos

$$f = \frac{a_n}{a_{n+m}}(b + S_h)$$

y

$$c = \frac{a_n}{a_{n+m}} \lambda$$

obtenemos una ecuación subcrítica como en 4.1.

Luego, por el Teorema 4.1.4 sabemos que existe una solución u suave y positiva de la Ecuación (6.3).

6.3. Cantidad de autovalores negativos del Laplaciano conforme en productos Riemannianos

En el capítulo anterior vimos que dada una variedad diferencial M cerrada de dimensión $n \geq 3$, para todo $k \geq 1$ existe una métrica Riemanniana g tal que el k -ésimo autovalor de L_g es negativo (ver Proposición 5.3.2). Como los autovalores están ordenados de forma no decreciente, esto es equivalente a decir que L_g tiene al menos k autovalores negativos. Es decir, en cualquier variedad diferencial podemos encontrar métricas Riemannianas tales que el Laplaciano conforme tenga una cantidad arbitrariamente grande de autovalores negativos.

En esta sección estudiaremos el espectro del Laplaciano conforme en variedades Riemannianas de la forma $(M \times N, g_t)$ con $g_t := g + th$, donde (M, g) y (N, h) son variedades Riemannianas cerradas y $t \in \mathbb{R}_{>0}$; y veremos que bajo ciertas condiciones podemos deformar la métrica variando únicamente el parámetro t para conseguir que el Laplaciano conforme también tenga una cantidad arbitrariamente grande de autovalores negativos.

El problema de autovalores consiste en encontrar todos los pares de la forma (u, λ) con $u \in C^\infty(M \times N)$ no nula y $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfagan la siguiente ecuación

$$a_{n+m} \Delta_{g+th} u + S_{g+th} u = \lambda u.$$

Por el Lema 6.1.1 es claro que la curvatura escalar de $(M \times N, g_t)$ es

$$S_{g+th} = S_g + \frac{1}{t} S_h.$$

Luego, una autofunción de L_{g_t} de autovalor asociado λ satisface la siguiente ecuación

$$a_{m+n}\Delta_{g+th}u + (S_g + \frac{1}{t}S_h)u = \lambda u. \quad (6.4)$$

Consideremos el caso en que (M, g) y (N, h) tienen curvatura escalar constante. Notemos con $c_1 = S_g$ y $c_2 = S_h$. Luego, la ecuación 6.4 queda

$$a_{m+n}\Delta_{g+h}u + (c_1 + \frac{1}{t}c_2)u = \lambda u.$$

Despejando, tenemos que u es autofunción de L_{g_t} de autovalor λ si y solo si u es autovector de Δ_{g+th} de autovalor μ con

$$\mu := \frac{\lambda - (c_1 + t^{-1}c_2)}{a_{m+n}}.$$

Recíprocamente, los autovalores de L_{g_t} son de la forma $a_{n+m}\mu + (c_1 + t^{-1}c_2)$ con μ autovalor de Δ_{g+th} . Con esto, hemos probado que cuando las variedades son de curvatura escalar constante tenemos que

$$Spec(L_{g_t}) = a_{m+n}Spec(\Delta_{g+th}) + (c_1 + \frac{1}{t}c_2).$$

Luego, para estudiar el espectro de L_{g_t} , basta entender el espectro de Δ_{g+th} .

Lema 6.3.1. *Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas cerradas (no necesariamente de curvatura escalar constante). Tenemos lo siguiente*

1.

$$Spec(\Delta_{th}) = \frac{1}{t}Spec(\Delta_h). \quad (6.5)$$

2.

$$Spec(\Delta_{g+h}) = Spec(\Delta_g) + Spec(\Delta_h). \quad (6.6)$$

Demostración.

1. Multiplicar una métrica por una constante positiva es una deformación conforme. Luego, por el Lema 3.2.1 tenemos que

$$\Delta_{th} = \frac{1}{t}\Delta_h.$$

Por lo tanto, v es autofunción de Δ_{th} con autovalor asociado μ si y solo si v es autofunción de Δ_h con autovalor asociado $t\mu$. Es decir, los autovalores de Δ_{th} son de la forma $t^{-1}\lambda$ con λ autovalor de Δ_h .

2. Por el Teorema de Stone–Weierstrass, es fácil ver que las funciones de la forma $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, con $f_1 \in C^\infty(M)$ y $f_2 \in C^\infty(N)$ son densas en $L^2(M \times N)$.

Si $u \in C^\infty(M)$ es autofunción de Δ_g con autovalor asociado λ y $v \in C^\infty(N)$ es autofunción de Δ_h con autovalor asociado μ , por el Lema 3.2.2 tenemos que

$$\Delta_{g+h}(uv) = v\Delta_{g+h}u + u\Delta_{g+h}v - 2(g+h)(\nabla_{g+h}u, \nabla_{g+h}v).$$

Como u depende solo de M y v depende solo de N , se tiene que

$$\begin{aligned}\Delta_{g+h}u &= \Delta_g u, \\ \Delta_{g+h}v &= \Delta_h v, \\ \nabla_g v &= 0,\end{aligned}$$

y

$$\nabla_h u = 0.$$

Luego,

$$(g+h)(\nabla_{g+h}u, \nabla_{g+h}v) = g(\nabla_g u, \nabla_h v) + h(\nabla_h u, \nabla_h v) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\Delta_{g+h}(uv) = v\Delta_g u + u\Delta_h v = v\lambda u + u\mu v = (\lambda + \mu)uv.$$

Es decir, uv es autovector de Δ_{g+h} con autovalor asociado $\lambda + \mu$. Luego, si $\{u_i\}$ es una base ortonormal de $L^2(M)$ formada por autovectores de Δ_g con autovalores $\{\lambda_i\}$ y $\{v_j\}$ es una base ortonormal de $L^2(N)$ formada por autovectores de Δ_h con autovalores $\{\mu_j\}$, entonces $\{u_i v_j\}$ es un conjunto de autovectores de Δ_{g+h} con autovalores $\{\lambda_i + \mu_j\}$ que generan un subespacio denso, y por lo tanto conforman una base ortonormal de $L^2(M \times N)$ formada por autovectores. □

Con esto tenemos que

$$\begin{aligned}Spec(L_{g_t}) &= a_{m+n}(Spec(\Delta_g) + Spec(\Delta_{t_h})) + (c_1 + \frac{1}{t}c_2) \\ &= a_{m+n}(Spec(\Delta_g) + \frac{1}{t}Spec(\Delta_h)) + c_1 + \frac{1}{t}c_2.\end{aligned}$$

Es decir, los autovalores de L_{g_t} son de la forma

$$\lambda_{i+j}(g_t) = a_{n+m} \left(\alpha_i + \frac{1}{t}\beta_j \right) + c_1 + \frac{1}{t}c_2,$$

donde α_i es el i -ésimo autovalor de Δ_g y β_j es el j -ésimo autovalor de Δ_h .

Es sabido que el primer autovalor de Δ_h es cero, cuyo autoespacio asociado está conformado por las funciones constantes. Luego, tenemos infinitos autovalores de la forma

$$\lambda_i(g_t) = a_{n+m}\alpha_i + c_1 + \frac{1}{t}c_2$$

con autofunciones que solo dependen de M . Por lo tanto, si $c_2 < 0$, tomando t suficientemente chico resulta que $\lambda_i(g_t) < 0$. Es decir, tomando t suficientemente chico obtenemos una métrica con cantidad arbitrariamente grande de autovalores negativos.

A continuación mostraremos que, utilizando un resultado de Grigoryan, Netrusov y Yau, podemos relajar la hipótesis de que g sea de curvatura escalar constante. Es decir, dadas (M, g) una variedad Riemanniana cerrada no necesariamente de curvatura escalar constante y (N, h) una variedad Riemanniana cerrada de curvatura escalar constante y negativa, probaremos que la cantidad de autovalores negativos de L_{g_t} tiende a infinito cuando t tiende a cero.

Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada. Un operador de Schrödinger es un operador de la forma

$$P = \Delta - f$$

con $f \in L^\infty(M)$. Si llamamos $Neg(P)$ a la cantidad de autovalores negativos del operador, entonces el siguiente Teorema nos da una cota inferior para la cantidad de autovalores negativos del operador P .

Teorema 6.3.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión m . Entonces vale la siguiente desigualdad*

$$Neg(P) \geq \frac{C}{Vol_g(M)^{\frac{m-2}{2}}} \left(\int_M f dV_g \right)_+^{\frac{m}{2}}$$

donde C es una constante que depende únicamente de la clase conforme de g si $m \geq 3$ y si $m = 2$ depende únicamente del género de M .

Este resultado fue probado para $f \geq 0$ por Grigoryan, Netrusov y Yau en [22] y para el caso general por Grigor'yan, Nadirashvili y Sire en [21]. Notemos que los operadores de la forma

$$\tilde{L}_g := \frac{1}{a_n} L_g$$

son operadores de Schrödinger con $f = -a_n^{-1} S_g$. Como $a_n > 0$, la cantidad de autovalores negativos de L_g coincide con la cantidad de autovalores negativos de \tilde{L}_g . Volviendo al problema planteado, (M, g) y (N, h) son dos variedades Riemannianas cerradas y (N, h) tiene curvatura escalar constante $S_h = c < 0$. Luego, por el Lema 6.1.1, la curvatura escalar de g_t satisface que

$$S_{g_t} = S_g + \frac{1}{t} c.$$

Llamemos $Neg(L_{g_t})$ a la cantidad de autovalores negativos de L_{g_t} y $Neg(L_{g_t})|_M$ a la cantidad de autovalores negativos de L_{g_t} cuyas autofunciones asociadas dependen únicamente de M .

Notemos que los autovalores negativos de L_{g_t} cuyas autofunciones dependen solo de M son las soluciones del siguiente problema de autovalores en M :

$$a_{m+n} \Delta_g u + \left(S_g + \frac{1}{t} c \right) u = \lambda u.$$

Como M es compacta, podemos tomar t lo suficientemente pequeño de forma tal que

$$\sup_{p \in M} \left\{ S_g(p) + \frac{1}{t}c \right\} < 0.$$

Por lo tanto,

$$\left(\int_M -\frac{1}{a_{n+m}} S_{g_t} dV_{g_t} \right)_+ = \int_M -\frac{1}{a_{n+m}} S_{g_t} dV_{g_t}.$$

Además,

$$\begin{aligned} \text{Neg}(L_{g_t}) &= \text{Neg}(\tilde{L}_{g_t}) \geq \text{Neg}(\tilde{L}_{g_t})|_M \\ &= \text{Neg} \left(\Delta_g + \frac{S_{g_t}}{a_{m+n}} \right) = \text{Neg} \left(\Delta_g + \frac{S_g + \frac{1}{t}c}{a_{m+n}} \right). \end{aligned}$$

Observemos que el operador

$$\Delta_g + \frac{S_g + \frac{1}{t}c}{a_{m+n}}$$

es un operador de Schrodinger definido sobre M con

$$f = -\frac{S_g + \frac{1}{t}c}{a_{m+n}}.$$

Luego, podemos aplicar la cota dada por el Teorema 6.3.1, y para $m \geq 3$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{Neg}(L_{g_t}) &\geq \text{Neg} \left(\Delta_g + \frac{S_g + \frac{1}{t}c}{a_{m+n}} \right) \geq \frac{C}{\text{Vol}_g(M)^{\frac{m-2}{2}}} \left(\frac{\int_M -(S_g + \frac{1}{t}c) dV_g}{a_{m+n}} \right)^{\frac{m}{2}} \\ &= \frac{C}{a_{m+n}^{\frac{m}{2}}} \left(\frac{-\int_M S_g dV_g - \frac{1}{t}c \int_M 1 dV_g}{\text{Vol}_g(M)^{\frac{m-2}{2}}} \right)^{\frac{m}{2}} = \frac{C}{a_{m+n}^{\frac{m}{2}}} \left(-Q(g) - \frac{1}{t}c \text{Vol}_g(M)^{\frac{2}{m}} \right)^{\frac{m}{2}}, \end{aligned}$$

ya que

$$Q(g) = \frac{\int_M S_g dV_g}{\text{Vol}_g(M)^{\frac{m-2}{2}}}.$$

De forma similar, cuando M es una superficie, es decir para $m = 2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Neg}(L_{g_t}) &\geq \text{Neg} \left(\Delta_g + \frac{S_g + \frac{1}{t}c}{a_{m+n}} \right) \\ &\geq C \left(-4\pi\chi(M) - \frac{1}{t}c \text{Vol}_g(M) \right) \end{aligned}$$

donde para la última desigualdad usamos que la curvatura escalar es el doble de la curvatura Gaussiana y el Teorema de Gauss-Bonnet. Por lo tanto teniendo en

cuenta que la característica de Euler es $\chi(M) = 2 - 2\gamma$, donde γ es el genero de M , tenemos que

$$\text{Neg}(L_{g_t}) \geq C \left(8\pi(\gamma - 1) - \frac{1}{t} c \text{Vol}_g(M) \right)$$

La cota C solo depende de la clase conforme de g si $m \geq 3$ o del género de M si $m = 2$. Como la constante c es un número negativo, haciendo tender t a cero, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.3.2. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada y (N, h) una variedad Riemanniana de curvatura escalar constante y negativa. Entonces, la cantidad de autovalores negativos del operador L_{g_t} donde $g_t = g + th$ tiende a infinito cuando t tiende a cero.*

6.4. Productos warped

Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas cerradas. Sea $f \in C_{>0}^\infty(M)$. Llamamos producto warped de (M, g) y (N, h) por f a la variedad Riemanniana $(M \times N, g +_f h)$ donde $g +_f h := g + f^2 h$. La noción de producto warped generaliza a la de superficie de revolución. Fueron introducidos por Bishop y O'Neill en [11] para estudiar variedades Riemannianas de curvatura negativa. En esta sección empezaremos comentando algunos resultados de Dobarro y Lami Dozo en [15] sobre cómo elegir a la función f de forma tal que el producto warped $(M \times N, g +_f h)$ sea de curvatura escalar constante. Luego mostraremos cómo elegir f de forma tal que la cantidad de autovalores negativos del Laplaciano conforme se arbitrariamente grande.

Para poder hacer todo esto, primero necesitamos estudiar cómo cambia la curvatura escalar de un producto warped $(M \times N, g +_f h)$ cuando cambia f . Para no sobrecargar la notación llamaremos S_f a la curvatura escalar de $(M \times N, g +_f h)$ y Δ_f al Laplaciano. Antes necesitaremos un Lema.

Lema 6.4.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión n , $u \in C_{>0}^\infty(M)$ y $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$. Entonces se satisface la siguiente igualdad:*

$$\Delta_g u^\alpha = \alpha u^{\alpha-1} \Delta_g u - \alpha(\alpha - 1)g(\nabla_g u, \nabla_g u).$$

Demostración. Tomando (U, x) una carta normal, tenemos que

$$\partial_i u^\alpha = \alpha u^{\alpha-1} \partial_i u$$

y

$$\partial_i \partial_i u^\alpha = \partial_i (\alpha u^{\alpha-1} \partial_i u) = \alpha(\alpha - 1)u^{\alpha-2} \partial_i u \partial_i u + \alpha u^{\alpha-1} \partial_i \partial_i u$$

para cada $1 \leq i \leq n$. Luego,

$$\Delta_g u^\alpha = - \sum_i \partial_i \partial_i u^\alpha$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_i (\alpha(\alpha - 1)u^{\alpha-2} \partial_i u \partial_i u + \alpha u^{\alpha-1} \partial_i \partial_i u) \\
&= -\alpha u^{\alpha-1} \sum_i \partial_i \partial_i u - \alpha(\alpha - 1)u^{\alpha-2} \sum_i \partial_i u \partial_i u \\
&= \alpha u^{\alpha-1} \Delta_g u - \alpha(\alpha - 1)u^{\alpha-2} g(\nabla_g u, \nabla_g u).
\end{aligned}$$

□

Teorema 6.4.1. Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas cerradas de dimensión m y n respectivamente. Sea $f \in C_{>0}^\infty(M)$. Consideremos el producto warped $(M \times N, g +_f h)$. Entonces se satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{4n}{n+1} \Delta_g u + S_g u + S_h u^{\frac{n-3}{n+1}} = S_f u \quad (6.7)$$

donde

$$u = f^{\frac{n+1}{2}}.$$

Demostración. Notemos que $g + f^2 h = f^2(f^{-2}g + h)$. Luego, $g +_f h$ es una métrica Riemanniana conforme a $f^{-2}g + h$ en $M \times N$ y $f^{-2}g$ es conforme a g en M . Si llamamos $\tilde{g} := f^{-2}g \in [g]$, entonces podemos aplicar la ecuación 3.3 en M y obtenemos que

$$a_m \Delta_g v + S_g v = v^{p_m-1} S_{\tilde{g}} \quad (6.8)$$

donde

$$v^{\frac{4}{m-2}} = f^{-2}.$$

De forma similar, si llamamos $\hat{g} := f^{-2}g + h$, en $M \times N$ se tiene que

$$a_{m+n} \Delta_{\hat{g}} w + S_{\hat{g}} w = S_f w^{p_{m+n}-1} \quad (6.9)$$

con

$$w^{\frac{4}{m+n-2}} = f^2.$$

Observando que w no depende de N , es decir $w \in C^\infty(M)$, vemos que

$$\Delta_{\hat{g}} w = \Delta_{\tilde{g}} w.$$

Luego, del Lema 3.2.1, se sigue que

$$\Delta_{\tilde{g}} w = (v \Delta_g w - 2g(\nabla_g v, \nabla_g w)) v^{1-p_m}. \quad (6.10)$$

Además, del Lema 3.2.2, sabemos que

$$\Delta_g(vw) = v \Delta_g w + w \Delta_g v - 2g(\nabla_g v, \nabla_g w). \quad (6.11)$$

Juntando las ecuaciones (6.10) y (6.11) llegamos a que

$$v^{p_m-1} \Delta_{\tilde{g}} w = \Delta_g(vw) - w \Delta_g v. \quad (6.12)$$

Por otro lado, del Lema 6.1.1 podemos inferir que

$$S_{\tilde{g}} = S_{\tilde{g}} + S_h.$$

Utilizando todo esto en la ecuación (6.9) y multiplicando por v^{p_m-1} , tenemos que

$$a_{m+n}(\Delta_g(vw) - w\Delta_g v) + v^{p_m-1}(S_{\tilde{g}} + S_h)w = S_f w^{p_{m+n}-1} v^{p_m-1}.$$

Por la ecuación (6.8), lo anterior nos queda

$$\frac{4}{(m+n-2)(m-2)} w \Delta_g v + a_{m+n} \Delta_g(vw) + S_g v w + S_h v^{p_m-1} w = S_f w^{\frac{4}{m+n-2}+1} v^{\frac{4}{m-2}+1}.$$

Notando que

$$w^{\frac{4}{m+n-1}} v^{\frac{4}{m-2}} = 1$$

y llamando $u = f^{\frac{n+1}{2}}$, podemos reescribir la ecuación anterior en términos de u ; y al multiplicar por $u^{1-\frac{n}{n+1}}$ obtenemos que

$$\frac{4n}{(m+n-2)(m-2)} \Delta_g u^{\frac{m+n-1}{n+1}} + \frac{4(m+n-2)}{m+n-2} u^{\frac{1}{n+1}} \Delta_g u^{\frac{1}{n+1}} + S_g u + S_h u^{\frac{n-3}{n+1}} = S_f u.$$

Luego, aplicando el Lema 6.4.1 con $\alpha = \frac{n}{n+1}$ en la ecuación anterior, obtenemos la Ecuación (6.7). \square

Como $u = f^{\frac{n+1}{2}} \in C^\infty(M)$, $S_g \in C^\infty(M)$ y $S_h \in C^\infty(N)$, el Teorema anterior implica que para obtener f de forma tal que la curvatura escalar S_f del producto warped $(M \times N, g +_f N)$ sea constante, S_h necesariamente debe ser constante. A continuación estudiaremos el problema de encontrar una función $f \in C^\infty(M)$ de forma tal que $(M \times N, g +_f h)$ sea de curvatura escalar constante en el caso que $S_h \equiv 0$ y en el caso que $S_h = c < 0$. Los siguientes dos teoremas fueron probados por Dobarro y Lami Dozo en [15].

Teorema 6.4.2. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada y conexa. Sea (N, h) una variedad Riemanniana cerrada de curvatura escalar nula. Entonces existe $f \in C^\infty(M)$ tal que la curvatura escalar de $(M \times N, g +_f h)$ es una constante c_1 . Además f es única salvo una multiplicación escalar positiva y λ_1 es única y está dada por*

$$\lambda_1 = \inf_{v \in B_1} \int_M \left(\frac{4n}{n+1} |\nabla_g v|^2 + S_g v^2 \right) dV_g$$

donde $B_1 := \{v \in H_1^2(M) : \|v\|_2 = 1\}$.

Demostración. Del Teorema 6.4.1 es claro que estamos buscando una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ y una función positiva $u \in C^\infty(M)$ tales que

$$L(u) = \lambda u, \tag{6.13}$$

donde

$$L(u) = \frac{4n}{n+1} \Delta_g u + S_g u.$$

El operador L es elíptico y autoadjunto en $L^2(M)$. Luego, por el Teorema espectral, existe una única función $u_1 \in C_{>0}^\infty(M)$ autofunción del operador L , de autovalor λ_1 con $\|u_1\|_2 = 1$. Claramente, $f := u_1^{\frac{2}{n+1}} > 0$ es la función buscada. Además, como el autovalor λ_1 es simple, toda solución es un múltiplo constante de f . \square

Teorema 6.4.3. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada y conexa. Supongamos que (N, h) es una variedad Riemanniana de dimensión $n \geq 3$ con curvatura escalar constante y negativa, $S_h = c$. Sea λ_1 el primer autovalor del operador*

$$L := \frac{4n}{n+1} \Delta_g + S_g.$$

Entonces, para todo $\lambda < \lambda_1$ existe una única $f_\lambda \in C^\infty(M)$ tal que $(M \times N, g +_f h)$ es de curvatura escalar constante λ . Además, si $\lambda \geq \lambda_1$, no existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $S_f = \lambda$.

Demostración. Nuevamente, por el Teorema 6.4.1, el problema consiste en buscar $u \in C^\infty(M)$ solución positiva de

$$L(u) + cu^\alpha = \lambda u \tag{6.14}$$

donde

$$L(u) = \frac{4n}{n+1} \Delta_g u + S_g u$$

y $0 \leq \alpha := \frac{n-3}{n+1} < 1$. Llamemos u_1 a la autofunción positiva de $L(u) = \lambda_1 u$ tal que $\|u_1\|_2 = 1$. Si u es solución positiva de (6.14), multiplicando la ecuación (6.14) por u_1 e integrando, obtenemos que

$$\lambda_1 \int_M uu_1 dV_g + c \int_M u^\alpha u_1 dV_g = \lambda \int_M uu_1 dV_g.$$

Luego,

$$(\lambda - \lambda_1) \int_M uu_1 dV_g = c \int_M u^\alpha u_1 dV_h.$$

Como $u, u_1 \in C^\infty(M)$ son funciones positivas y $c < 0$, necesariamente debe ser $\lambda < \lambda_1$.

Fijemos $\lambda < \lambda_1$. Como $0 \leq \alpha < 1$, si $t > 0$ es suficientemente chico, tenemos que

$$(L - \lambda I) tu_1 \leq |c|t^\alpha u_1^\alpha.$$

Luego, tu_1 es subsolución de (6.14).

Por otro lado, si $r > 0$ es suficientemente grande, entonces

$$(L - \lambda I) ru_1 \geq |c|r^\alpha u_1^\alpha.$$

Por lo tanto, ru_1 es supersolución de (6.14).

El operador $(L - \lambda I) : C^{2,\alpha}(M) \rightarrow C^\alpha(M)$ es inversible, y su inversa $(L - \lambda I)^{-1}$ es continua respecto de las normas $\|\cdot\|_\infty$ en $C^\alpha(M)$ y $\|\cdot\|_{C^{1,\alpha}(M)}$ en $C^{2,\alpha}(M)$. Además, $(L - \lambda I)^{-1}$ es fuertemente positivo, es decir, $(L - \lambda I)^{-1}w > 0$ para toda $w \in C_{\geq 0}^\alpha(M)$ no nula. Luego, se extiende a un operador compacto, que notaremos de la misma manera, $(L - \lambda I)^{-1} : C(M) \rightarrow C(M)$ que también es fuertemente positivo (ver [1]). Para cada $w \in C(M)$, $(L - \lambda I)^{-1}w$ es solución débil de $L(u) - \lambda u = w$.

El operador (no lineal) compacto $v \mapsto (L - \lambda I)^{-1}(|c||v|^\alpha) : C_{>0}(M) \rightarrow C_{>0}(M)$ preserva el orden del intervalo $[tu_1, ru_1] \subseteq C(M)$, por lo tanto tiene un punto fijo $u \in C(M)$, con $0 < tu_1 \leq u \leq ru_1$. Es decir, $u = (L - \lambda I)^{-1}(|c||u|^\alpha)$. Por argumentos estándar de regularidad, $u \in C^\infty(M)$. Luego, u es una solución clásica y positiva de (6.14) (ver [1]). Finalmente, la no linealidad en (6.14) implica que u es única (ver [30] y [7]). Por lo tanto, la función $f := u^{\frac{2}{n+1}}$ es la única tal que $(M \times N, g +_f h)$ es de curvatura escalar constante. □

Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión m y (N, h) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión n de curvatura escalar constante $c < 0$. En la sección anterior vimos que si hacemos tender t a cero entonces la cantidad de autovalores negativos del Laplaciano conforme de la variedad Riemanniana $(M \times N, g + th)$ tiende a infinito. Luego, es claro que podemos elegir una función $f \in C_{>0}^\infty(M)$ tal que el Laplaciano conforme del producto warped $(M \times N, g +_f h)$ tenga una cantidad de autovalores negativos arbitrariamente grande (tomando funciones constantes lo suficiente mente chicas). La pregunta que nos hacemos ahora es si partimos de un producto warped $(M \times N, g +_f h)$, entonces ¿podemos deformar la función $f \in C_{>0}^\infty(M)$ de forma tal que la cantidad de autovalores negativos del Laplaciano conforme sea arbitrariamente grande? Como veremos a continuación la respuesta no cambia con respecto al problema anterior. En efecto, si consideramos una deformación de la métrica $g + f^2h$ de la forma $g + tf^2h$ con $t > 0$, entonces $g + tf^2h = f^2(f^{-2}g + th)$. Es decir, $f^{-2}g + th$ es una métrica conforme a $g + tf^2h$ y $f^{-2}g$ es conforme a g . Luego, como la cantidad de autovalores negativos es un invariante de la clase conforme, resulta que

$$Neg(L_{g+tf^2h}) = Neg(L_{f^{-2}g+th}).$$

Por lo tanto, denotando $\tilde{g} := f^{-2}g$ de la misma manera que en la demostración del Teorema 6.3.2 tenemos que

$$\begin{aligned} Neg(L_{g+tf^2h}) &= Neg(L_{\tilde{g}+th}) \\ &\geq Neg\left(\Delta_{\tilde{g}} + \frac{S_{\tilde{g}} + \frac{1}{t}c}{a_{m+n}}\right) \geq \frac{C}{a_{m+n}^{\frac{m-2}{m}}} \left(-Q(\tilde{g}) - \frac{1}{t}cVol_g(M)^{\frac{2}{m}}\right)^{\frac{m}{2}} \end{aligned}$$

si $m \geq 3$, y

$$\begin{aligned} Neg(L_{g+tf^2h}) &= Neg(L_{\tilde{g}+th}) \\ &\geq Neg\left(\Delta_{\tilde{g}} + \frac{S_{\tilde{g}} + \frac{1}{t}c}{a_{m+n}}\right) \geq C \left(-4\pi\chi(M) - \frac{1}{t}cVol_{\tilde{g}}(M)\right) \end{aligned}$$

si $m = 2$. En cualquiera de los dos casos, si $t \rightarrow 0$ entonces $Neg(L_{g+tf^2h}) \rightarrow \infty$.

Bibliografía

- [1] Herbert Amann. «Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces». *SIAM Rev.* 18 (1976), págs. 620-709.
- [2] B. Ammann y E. Humbert. «The second Yamabe invariant». *J. Funct. Anal.* 245 (2006).
- [3] Thierry Aubin. *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations.* Springer-Verlag, 1982.
- [4] Thierry Aubin. «Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev». *J. Differential Geom.* 11 (1976), págs. 573-598.
- [5] Thierry Aubin. *Some Non-Linear Problems in Riemannian Geometry.* Springer-Verlag, 1998.
- [6] Thierry Aubin. «Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire». *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 55 (1976), págs. 269-296.
- [7] Henri Berestycki. «Le nombre de solutions de certains problèmes semi-linéaires elliptiques». *J. Funct. Anal.* 40 (1981), págs. 1-29.
- [8] Marcel Berger. *A panoramic View of Riemannian Geometry.* Springer-Verlag, 2003.
- [9] B. Bergery. «Scalar curvature and isometry group». *Kaigai Publications* 92 (1983), págs. 9-28.
- [10] Arthur L. Besse. *Einstein Manifolds.* Springer-Verlag, 1987.
- [11] R. L. Bishop y B. O'Neill. «Manifolds of negative curvature». *Trans. Amer. Math. Soc.* 145 (1969), págs. 1-49.
- [12] Yaiza Canzani y col. «Conformal Invariants from nodal sets. I. Negative eigenvalues and curvature prescription». *International Mathematics Research Notices. IMRN* 9 (2014), págs. 2356-2400.
- [13] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian Geometry.* Birkhäuser, 1992.
- [14] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian Geometry.* Academic Press, 1984.
- [15] F. Dobarro y E. Lami Dozo. «Scalar curvature and warped products of Riemannian manifolds». *Trans. Amer. Math. Soc.* 303 (1987), págs. 161-168.

- [16] S. El Sayed. «Second eigenvalue of the Yamabe operator and applications». *Calc. Var. Partial Differential Equations* 3 (2014).
- [17] H. I. Eliasson. «On Variations of Metrics». *Math. Scand.* 3 (1971), págs. 1317-327.
- [18] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [19] S. Gallot, D. Hulin y J. Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Springer, 1987.
- [20] David Gilbarg y Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, 1998.
- [21] Alexander Grigor'yan, Nikolai Nadirashvili y Yannick Sire. «A lower bound for the number of negative eigenvalues of Schrödinger Operators». *J. Differential Geom.* 3 (2016), págs. 395-408.
- [22] Alexander Grigoryan, Yuri Netrusov y Shing-Tung Yau. «Eigenvalues of elliptic operators and and geometric applications». *Surveys in Differential Geometry IX* (2004), págs. 147-217.
- [23] D. Gromoll, W. Klingenberg y W. Meyer. *Riemannsche geometrie im großen*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 55. Springer, 1975.
- [24] Emmanuel Hebey. *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [25] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Universitext. Springer, 2017.
- [26] C. Lebrum. «Einstein metrics and the Yamabe problem». *Trends in Mathematical Physics* (1999), págs. 327-349.
- [27] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2.^a ed. Springer, 2013.
- [28] J.M. Lee. *Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature*. Springer, 1997.
- [29] John M. Lee y Thomas H. Parker. «The Yamabe Problem». *Bull. Amer. Math. Soc.* 17 (1987), págs. 37-91.
- [30] Pierre-Louis Lions. «On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations». *SIAM Rev.* 24 (1982), págs. 441-467.
- [31] T. M. Rassias M. Craivoneau M. Puta. *Old and New Aspects in Spectral Geometry*. Springer, 2009.
- [32] J. Petean. «Computations of the Yamabe invariant». *Mathematical Research Letters* 5 (1998), págs. 703-709.
- [33] Peter Petersen. *Riemannian Geometry*. Springer, 1998.
- [34] Daniel Pollack. «Nonuniqueness and high energy solutions for a conformally invariant scalar equation». *Comm. Anal. Geom.* 1.3-4 (1993), págs. 347-414.

- [35] Richard Schoen y Shing Tung Yau. «Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature». *Invent. Math.* 92 (1988), págs. 47-71.
- [36] Richard Schoen y Shing Tung Yau. «Lectures in Differential Geometry». *Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology*. Vol. 1. International Press Publications, 1986.
- [37] Richard Schoen y Shing Tung Yau. «On the proof of the positive mass conjecture in general relativity». *Comm, Math, Phys.* 65 (1979), págs. 45-76.
- [38] Richard M. Schoen. «Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature». *J. Diff. Geom.* 20 (1984), págs. 479-495.
- [39] Richard M. Schoen. «Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics». *Lecture Notes in Mathematics*. Vol. 1365. Berlin: Springer-Verlag, 1987, págs. 120-154.
- [40] Giorgio Talenti. «Best constants in Sobolev inequality». *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 110.10 (1976), págs. 353-372.
- [41] Neil S. Trudinger. «Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds». *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)* 22.22 (1968), págs. 265-274.
- [42] Cedric Villani. *Optimal transport, old and new*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer, 2009.
- [43] Edward Witten. «A new proof of the positive energy theorem». *Comm. Math. Phys.* 80.3 (1981), págs. 381-402.
- [44] Hidehiko Yamabe. «On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds». *Osaka Mathematical Journal* 12 (1960), págs. 21-37.