



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Matrices de Representación, Ideales de Fitting  
y puntos múltiples de superficies racionales

Juan Desimoni

Director: Dr. Nicolás Botbol

9 de febrero de 2018



## Resumen

En las aplicaciones al modelado de superficies asistido por computadora, es frecuente representar superficies y curvas mediante parametrizaciones racionales. Es además útil, principalmente en las aplicaciones, tener una representación implícita, proceso conocido como implicitación. Representaciones implícitas de superficies parametrizadas pueden obtenerse en forma de ecuaciones o en forma matricial.

Esta tesis de licenciatura consiste en una revisión de los trabajos realizados durante la última década por Jouanolou, Busé, Chardin y Botbol en el área de implicitación de (hiper)superficies del espacio proyectivo tridimensional, parametrizadas por mapas racionales. Explicamos detalladamente la construcción y las propiedades de las Matrices de Representación y de los Ideales de Fitting asociados. Luego utilizamos estas herramientas para encontrar la ecuación implícita, hallar el locus de la superficie cuya preimagen vía la parametrización consiste en  $k$  o más puntos y estudiar la estructura geométrica de las fibras. Al final presentamos ejemplos concretos en los que analizamos la aplicación de las herramientas desarrolladas a otras áreas de la matemática, así como las aplicaciones industriales que de éstas se desprenden.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1. Lema de Nakayama . . . . .	8
1.2. Propiedades locales . . . . .	10
1.3. Descomposición primaria . . . . .	11
1.4. Polinomio de Hilbert . . . . .	18
<b>2. Complejos de aproximación</b>	<b>26</b>
2.1. El complejo de Koszul . . . . .	27
2.2. Complejos de aproximación . . . . .	32
<b>3. Ideales de Fitting</b>	<b>36</b>
3.1. Resoluciones libres y minimales . . . . .	36
3.2. La unicidad de las resoluciones minimales . . . . .	39
3.3. Ideales de Fitting . . . . .	42
<b>4. Superficies parametrizadas</b>	<b>48</b>
4.1. Matrices de representación . . . . .	48
4.2. Ideales de Fitting . . . . .	54
4.3. Descripción de la fibra de un punto . . . . .	61
4.4. Cálculo de preimágenes . . . . .	64
<b>5. Ejemplos</b>	<b>66</b>
5.1. Circunferencia . . . . .	66
5.2. Esfera . . . . .	67
5.3. Cilindro . . . . .	69
5.4. Cilindro curva alfa . . . . .	70
<b>Bibliografía</b>	<b>72</b>

# Agradecimientos

Tengo muchas personas a quienes agradecer, que me acompañaron en distintas etapas durante todos estos años y forman parte de este logro.

En primer lugar a Nicolás, por aceptarme como alumno y dirigir esta tesis de manera impecable. Por bancarse todas mis vueltas y nervios, aconsejarme y ayudarme siempre que lo necesité.

A los jurados, Alicia y Mariano, por tomarse el trabajo de leer la tesis y darme una mano en este último paso antes de pasar a la próxima etapa.

A mis viejos por apoyarme todos estos años, por todo el cariño, la confianza, paciencia y los consejos. Por todo.

Conozco algunas personas que no se llevan bien con su hermano. Creo que se debe a que no tienen el mejor hermano del mundo, porque lo tengo yo =). ¡Muchas gracias Pancho, te quiero muchísimo! Y preparate porque aunque estemos lejos no te vas a librar tan fácilmente de mí xD.

A mis amigos de toda la vida. Nahue, sos una persona increíble, de verdad. Y Fran, sabés que me bancaste en todas, y todo lo que te quiero. No me cabe duda de que sin vos no habría llegado hasta acá. Ahora que escribo esto recuerdo con cariño la salsa camping y los arranques de inspiración random de Nahue<sup>1</sup>.

A Manu, por ser un gran amigo y siempre estar cuando lo necesito. Y Vera, entre otras cosas porque me compartiste música increíble que solo no habría conocido ni a palos.

A los amigos que me quedan del secundario. Ale (BR), por más que a veces nos distanciamos sé que vos siempre estás. Y Mati, te debo una visita a VP y unos partidos en la plaza =).

A mi grupo de estudio: Lucho, José y Juan. Junto con ustedes aprendí muchísimo e hicieron más llevaderas las largas tardes en las que preparamos finales, parciales y recus. Espero que en el doctorado tenga la suerte de formar parte de un grupo de estudio y de trabajo que no me haga extrañarlos tanto. Y que cuando estemos todos acá en Buenos Aires no colguemos con los asados, claro.

A mis amigos de RM por todas las juntadas, salidas, discusiones y partidos de fútbol.

A Hui y a Joe, aunque ya nos veamos poco siempre recuerdo con cariño las charlas de política y las tardes de estudio y Super Smash Bros.

A Diego por aconsejarme tantas veces con la carrera y la matemática.

---

<sup>1</sup>Como la sopa de tortuga o la partuza automática.

Y a todos los que fui conociendo a lo largo de la carrera, con los que tuve el placer de compartir materias, largas horas de estudio, mesa en la biblioteca, en el bar del 1 y en deportes.

Por último quiero agradecer a la Universidad de Buenos Aires por poner a mi disponibilidad una educación libre, gratuita y de excelencia, llena de profesores e investigadores de un altísimo nivel, con los que tuve la suerte de aprender un montón.

# Introducción

Esta tesis de licenciatura consiste en una revisión de los trabajos realizados durante la última década por Botbol, Busé, Chardin y Jouanolou en el área de implicitación de (hiper)superficies racionales definidas paramétricamente y del estudio del locus singular de la superficie imagen y de la parametrización. El enfoque está centrado en las herramientas geométrico-algebraicas que se utilizan fundamentalmente en [BBC14] y en estudios previos al mismo, como por ejemplo en los artículos [BJ03], [BC05] y [BCJ09].

Los métodos desarrollados en estos trabajos utilizan herramientas avanzadas de álgebra homológica, álgebra conmutativa y geometría algebraica. Si bien estas herramientas no son para nada elementales, en muchos casos pueden ser resumidas en ideas concretas y sencillas, dando como resultado algoritmos compuestos por rutinas simples que sólo emplean álgebra lineal y no precisan de un gran poder de cómputo para poder ser ejecutados.

Al mismo tiempo que utilizan herramientas de un alto nivel de abstracción los resultados obtenidos en el área tienen aplicaciones tanto dentro de la matemática como fuera de la misma. Muchas de estas aplicaciones aparecen en el diseño de superficies asistido por computador y se usan en la industria automotriz, naval y aeronáutica (ver [Hof89]). En estas aplicaciones muchas veces es necesario detectar pliegues o cuñas de superficies, que habitualmente se hacen visibles cuando dichas superficies son iluminadas desde distintos ángulos. Aquí se plantean problemas como el cálculo de proyecciones sobre las superficies y de distancias a las mismas, y problemas de intersección. Para resolverlos es de suma utilidad tener una descripción implícita de las superficies a estudiar, la mayoría de las veces en forma de ecuaciones. Por esta razón no es de extrañar que el llamado problema de implicitación haya sido ampliamente estudiado y continúe siendo tratado hoy en día.

Básicamente hay tres tipos de métodos para calcular tales ecuaciones implícitas: los cálculos con bases de Gröbner, los métodos basados en resultantes y los que utilizan syzygies. Los primeros, basados en las bases de Gröbner, son métodos generales y si bien funcionan teóricamente, no están bien adaptados para los problemas de implicitación y las implementaciones funcionan lentamente o exceden rápidamente la memoria disponible. Los métodos que utilizan resultantes proveen formulaciones más compactas y algoritmos eficientes, pero que únicamente funcionan cuando la parametrización está definida globalmente, y en algunos casos muy particulares (ver [BuséPhD], [Busé01], [BCD03] y [BEM03]). Por último están los métodos basados en las syzygies, que son las relaciones (polinomiales en nuestro contexto) entre los

generadores de un módulo o un ideal.

Dentro del tercer tipo de métodos aparece el método de las “moving surfaces”, que utiliza las syzygies de las coordenadas de la parametrización para calcular la ecuación implícita. Esta técnica fue introducida por Sederberg y Chen en [SC95]. Para implicitación de curvas el método es muy eficiente y general. Para superficies pierde generalidad pero sigue siendo muy eficiente. En [CGZ00] y [D’An01] se prueba su validez cuando no hay puntos base, es decir lugares donde la parametrización no está definida. Posteriormente surge un abordaje más abstracto pero con el mismo espíritu presentado por Busé y Jouanolou en [BJ03] y perfeccionado luego en [BC05], [Cha06], [BD07], [BCJ09], [BDD09], [Bot09], [Bot10], [Bot11] y [Bot11]. Estos trabajos son una presentación más general y algebraica del método original de moving surfaces y utilizan los llamados complejos de aproximación introducidos por Herzog, Simis y Vasconcelos en [SV81], [HSV82] y [HSV83] a principios de los años 80. El objetivo original del paper fundacional de Busé y Jouanolou es extender y abstraer las técnicas de implicitación para el caso de hipersuperficies racionales de  $\mathbb{P}^n$  cuyos puntos base son aislados y localmente una intersección (casi) completa, y dar propiedades geométrico-algebraicas de las ecuaciones que definen la imagen. En los trabajos mencionados se generalizan las condiciones sobre el lugar base y el dominio de la parametrización. Esta tesis está basada fundamentalmente en los resultados expuestos en un posterior artículo de Botbol, Busé y Chardin [BBC14], donde se explotan las herramientas subyacentes en dicho método para el caso de curvas y superficies, y se estudia la geometría singular de la parametrización y del objeto imagen.

Concretamente, dada  $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}_k^3$  una superficie parametrizada por un mapa racional  $\phi$  nos proponemos encontrar una ecuación implícita para  $\mathcal{S}$ , investigar el locus cuya preimagen vía  $\phi$  consiste en  $k$  o más puntos y estudiar la estructura geométrica de las fibras.

Explicamos brevemente, y en las más sencillas palabras, en que consiste el método desarrollado en los trabajos mencionados en el párrafo anterior, ya que representa el punto nodal de este trabajo, dejando de lado los detalles más técnicos y los desarrollos para los capítulos correspondientes.

Partimos de  $\phi: \mathbb{P}_k^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^3$  un mapa racional definido por polinomios  $f_0, f_1, f_2, f_3 \in k[s_0, s_1, s_2]$  homogéneos del mismo grado. Sea  $I$  el ideal homogéneo generado por estos polinomios y notemos con  $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}_k^3$  a la clausura Zariski de la imagen de  $\phi$ . Más adelante veremos que la forma conjuntista no es lo suficientemente rica y dotaremos a  $\mathcal{S}$  de una estructura de esquema para poder estudiar su geometría singular. Dado que la parametrización  $\phi$  es un mapa racional, puede tener puntos de indefinición, es decir el lugar base  $V(I)$  puede ser no vacío, lo cual genera dificultades algebraicas. El mecanismo que los trabajos mencionados utilizan para sortear dichas dificultades consiste en considerar el gráfico de  $\phi$  junto con su proyección  $\pi_2$  a  $\mathbb{P}_k^3$ , que es un morfismo de esquemas proyectivos, y reemplazar el objeto imagen de  $\phi$  por la imagen de  $\pi_2$ . El álgebra asociada al gráfico de  $\phi$  es el Álgebra de Rees del ideal de puntos base  $I$ . Debido a que esta álgebra no admite resoluciones del tipo universal nos vemos en

la necesidad de “aproximarla” por otra, el Álgebra Simétrica de  $I$ . Esto es posible gracias a que bajo las condiciones que le pedimos a la parametrización  $\phi$ , su gráfico resulta ser isomorfo al esquema proyectivo definido por el Álgebra Simétrica. Utilizando complejos de Koszul construimos el complejo de aproximación de ciclos que bajo las hipótesis adecuadas es una resolución libre del Álgebra Simétrica. Miramos la parte de grado  $\nu$  del último morfismo de este complejo de aproximación y así obtenemos para cada  $\nu$  una matriz cuyos coeficientes son polinomios en las variables que definen  $\mathbb{P}_k^3$  conocidas en la literatura como Matrices de Representación. Estas matrices fueron definidas por Busé y Dohm en [BD07] y bastante estudiadas por Busé, Chardin, Botbol y Dickenstein entre otros. Para valores de  $\nu$  lo suficientemente elevados contienen toda la información geométrica que buscamos sobre la superficie  $\mathcal{S}$  y su parametrización.

Al evaluarlas en un punto  $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_k^3$  su rango baja si y sólo si  $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}$ , por lo que cumplen el rol de ecuación implícita. Esto nos da información de sobre cómo se comportan sus menores maximales. Siendo que las entradas de las Matrices de Representación son polinomios en las variables que definen  $\mathbb{P}_k^3$ , el conjunto de menores maximales forma un ideal que se conoce como Ideal de Fitting inicial de la parametrización, aunque más correctamente ideal inicial de Fitting del Álgebra Simétrica asociada. Este ideal no sólo define un cerrado que contiene a la superficie imagen, sino que además es una posible forma de definir la imagen de  $\phi$  en sentido esquemático, la “imagen de Fitting de  $\phi$ ”. Además nos permite obtener la ecuación implícita.

Los otros Ideales de Fitting nos dan información sobre los puntos de  $\mathcal{S}$  cuya preimagen tiene más de un elemento. Más precisamente, estos ideales forman una cadena de inclusiones, que en términos geométricos definen una estratificación de la imagen en subesquemas singulares con distintos niveles de singularidad.

Más aún, dado un punto  $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_k^3$ , calculando las Matrices de Representación para valores distintos de  $\nu$  y evaluándolas en  $\mathfrak{p}$  podemos obtener el polinomio de Hilbert de la fibra de  $\mathfrak{p}$  y así conocer la dimensión y el grado de la misma. De esta forma sabremos si la fibra es finita y cuántos puntos tiene, o si es una curva en cuyo caso conoceremos su grado. Todos estos aspectos geométricos serán explicados más detalladamente en el Capítulo 4.

Habiendo presentados los objetos, podemos resumir que el objetivo de esta tesis es explicar detalladamente la construcción y las propiedades de las Matrices de Representación y de sus Ideales de Fitting, las aplicaciones a la comprensión geométrico-algebraica de las singularidades intrínsecas de la superficie imagen y las introducidas “artificialmente” por la parametrización, así como las aplicaciones al diseño asistido por computador y a la modelización geométrica que se desprenden de forma natural.

La tesis está ordenada de la siguiente manera. El Capítulo 1 es una recopilación de temas preliminares que utilizaremos más adelante. Comenzamos con un breve repaso del Lema de Nakayama y algunas consecuencias del mismo. La más importante, que necesitaremos en el Capítulo 3, es que todo módulo finitamente generado sobre un anillo local es libre. Luego nos ocupamos de la descomposición primaria ideales

en anillos Noetherianos. Por último le dedicamos una sección a la definición del polinomio de Hilbert de una variedad proyectiva y propiedades básicas del mismo.

El Capítulo 2 trata fundamentalmente el complejo de Koszul. Explicamos la construcción y propiedades del mismo que luego utilizamos para definir los complejos de aproximación. En el Capítulo 4 necesitaremos el complejo de aproximación de ciclos que es una resolución libre del Álgebra Simétrica del ideal  $I$ . Utilizaremos la presentación libre finitamente generada que nos da el último morfismo de este complejo para construir las Matrices de Representación.

En el Capítulo 3 desarrollamos los Ideales de Fitting. Básicamente si tenemos un módulo finitamente generado  $M$  sobre un anillo Noetheriano  $R$  y conseguimos una presentación libre finitamente generada de  $M$

$$\varphi: F \rightarrow G,$$

el  $i$ -ésimo Ideal de Fitting de  $M$  se define como el ideal generado por los menores de tamaño  $\text{rg}(G) - i$  de la matriz de  $\varphi$  en cualquier par de bases.

El Capítulo 4 es el más importante, en él utilizamos las herramientas desarrolladas en los primeros 3 capítulos para construir las Matrices de Representación y explicamos las principales características de las mismas. Vemos como pueden ser usadas para resolver el problema de implícitación, encontrar puntos múltiples de la parametrización y caracterizar los polinomios de Hilbert de las fibras de puntos de  $\mathbb{P}_k^3$ . Terminamos el capítulo discutiendo brevemente algunas aplicaciones adicionales de las Matrices de Representación y mostrando un ejemplo de como éstas pueden ser usadas para calcular preimágenes de puntos de  $\mathbb{P}^3$  vía la parametrización  $\phi$ .

Finalmente en el Capítulo 5 trabajamos ejemplos concretos en los que aplicamos las técnicas desarrolladas para estudiar la estructura geométrica superficies parametrizadas, encontrar los puntos singulares de las parametrizaciones y caracterizar las fibras de dichos puntos.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo desarrollamos algunos temas preliminares que necesitaremos a lo largo de la tesis. Comenzamos con el Lema de Nakayama y consecuencias del mismo, seguido de una sección breve dedicada a propiedades locales. Los resultados de estas primeras dos secciones van a ser usados principalmente en el Capítulo 3. Luego le dedicamos una sección a la descomposición primaria y otra al polinomio de Hilbert y sus propiedades básicas. Utilizaremos estos resultados en los Capítulos 4 y 5 para dar una descripción precisa de los lugares singulares de la superficie parametrizada.

### 1.1. Lema de Nakayama

En esta sección probamos el Lema de Nakayama y algunos resultados que son consecuencias de dicho lema. La más importante de todas es el Corolario 2 que necesitaremos en el Capítulo 3 para probar el Lema 14.

**Definición 1.** Dado  $R$  anillo conmutativo, el *radical de Jacobson* se define como la intersección de todos los ideales maximales de  $R$ .

$$J(R) = \bigcap_{\substack{m \subset R \\ \text{maximal}}} m.$$

**Proposición 1.**  $x \in J(R)$  si y sólo si  $1 - xy$  es una unidad en  $R$  para todo  $y \in R$ .

*Demostración.* Supongamos primero que  $1 - xy$  no es una unidad. Sea  $m \subset R$  un ideal maximal tal que  $1 - xy \in m$ . Si  $x \in J(R) \subseteq m$ , luego  $xy \in m$ , por lo que  $1 \in m$ , absurdo. Para la otra implicación supongamos que existe  $m \subset R$  ideal maximal tal que  $x \notin m$ . Entonces  $(1) = (m, x)$ , existen  $t \in m$  e  $y \in R$  tales que  $1 = t + xy$ . Luego  $1 - xy = t \in m$ , por lo que  $1 - xy$  no es unidad.  $\square$

**Lema 1** (Nakayama). Sea  $M$  un  $R$ -módulo finitamente generado e  $I \subset J(R)$  un ideal contenido en el radical de Jacobson de  $R$ . Si  $IM = M$ , entonces  $M = 0$ .

*Demostración.* Supongamos  $M \neq 0$ . Sea  $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq M$  un conjunto de generadores minimal, tenemos  $u_n \in IM$ . Luego existen  $a_1, \dots, a_n \in I$  tales que

$u_n = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$ . Tenemos  $(1 - a_n)u_n = a_1u_1 + \cdots + a_{n-1}u_{n-1}$ . Como  $a_n \in I \subseteq J(R)$ , por la proposición anterior  $1 - a_n$  es una unidad de  $R$ . Luego  $M$  está generado por  $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ , contradiciendo el hecho de que el conjunto de generadores es minimal.  $\square$

**Corolario 1.** *Sea  $M$  un  $R$ -módulo finitamente generado,  $N$  un submódulo de  $M$  e  $I \subseteq J(R)$  un ideal. Si  $M = IM + N$ , entonces  $M = N$ .*

*Demostración.* Observemos  $I(M/N) = (IM)/N = (IM + N)/N$ . Luego  $I(M/N) = M/N$  y  $M/N$  es finitamente generado como  $R$ -módulo. Por Nakayama tenemos que  $M/N = 0$ , luego  $N = M$ .  $\square$

**Lema 2.** *Sea  $R$  un anillo,  $I \subseteq R$  un ideal y  $M$  un  $R$ -módulo. Entonces*

$$(R/I) \otimes_R M \simeq M/IM.$$

*Demostración.* Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow I \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\pi} R/I \rightarrow 0.$$

Tensorizando sobre  $R$  con  $M$  obtenemos la sucesión exacta

$$I \otimes_R M \xrightarrow{i \otimes 1} R \otimes_R M \xrightarrow{\pi \otimes 1} (R/I) \otimes_R M \rightarrow 0.$$

Luego

$$(R/I) \otimes_R M \simeq (R \otimes_R M)/(I \otimes_R M).$$

Para terminar observemos que  $R \otimes_R M \simeq M$  y  $I \otimes_R M \simeq IM$ .  $\square$

A continuación probamos la Proposición 2, que es una consecuencia importante del Lema de Nakayama ya que será usada para probar el Corolario 2, uno de los resultados fundamentales de esta sección. Además dicha proposición es un resultado clásico de álgebra conmutativa relacionado con geometría algebraica, más precisamente con el concepto de parámetros locales en un punto. Antes de enunciarla veamos una pequeña observación.

**Observación 1.** Sean  $(R, p)$  un anillo local y  $\kappa = R/p$  su cuerpo residual. Si  $M$  es un  $R$ -módulo finitamente generado,  $M/pM$  es anulado por  $p$ . Luego es naturalmente un  $R/p$ -módulo, es decir un  $\kappa$ -espacio vectorial, y como tal es de dimensión finita.

**Proposición 2.** *Sean  $(R, p)$  un anillo local,  $\kappa = R/p$  su cuerpo residual y  $M$  un  $R$ -módulo finitamente generado. Si  $u_1, \dots, u_n$  son elementos de  $M$  cuyas imágenes en  $M/pM$  son una base como  $\kappa$ -espacio vectorial, entonces los  $u_i$  generan  $M$ .*

*Demostración.* Sea  $N = (u_1, \dots, u_n) \subseteq M$  el submódulo generado por los  $u_i$ . Consideremos la composición  $N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/pM$ , que resulta ser un epimorfismo. Dado  $x \in M$  existe  $y \in N$  tal que  $\pi(y) = \pi(x)$ . Luego  $x - y \in pM$ . Escribiendo  $x = x - y + y$  vemos que  $M = pM + N$ . Luego por el Corolario 1,  $N = M$ .  $\square$

**Observación 2.** Esto nos dice esencialmente que  $\{u_1, \dots, u_n\}$  es un conjunto minimal de generadores de  $M$  si y sólo si sus imágenes son una base de  $M/pM$  como  $R/p$ -espacio vectorial. Ya que por un lado si  $\{u_1, \dots, u_n\}$  es un conjunto minimal de generadores de  $M$ , entonces su imagen vía  $\pi$  es un conjunto minimal de generadores del  $\kappa$ -espacio vectorial  $M/pM$  y por lo tanto una base. Por el otro lado si  $\{u_1, \dots, u_n\}$  es un conjunto de generadores tal que su imagen vía  $\pi$  es una base  $M/pM$ , entonces la imagen de cualquier subconjunto propio de  $\{u_1, \dots, u_n\}$  no va a generar  $M/pM$ , luego dicho subconjunto no va a poder generar  $M$ . En particular esto nos dice que todo conjunto minimal de generadores de un módulo finitamente generado sobre un anillo local tiene la misma cantidad de elementos.

**Corolario 2.** *Todo módulo proyectivo finitamente generado sobre un anillo local es libre.*

*Demostración.* Sea  $(R, m)$  un anillo local y  $P$  un  $R$ -módulo proyectivo finitamente generado. Tomemos  $\{u_1, \dots, u_r\}$  un conjunto minimal de generadores de  $P$  y sea  $\varphi: R^r \rightarrow P$  el morfismo inducido por la inclusión de  $\{u_1, \dots, u_r\}$  en  $P$ . Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow K \rightarrow R^r \xrightarrow{\varphi} P \rightarrow 0,$$

donde  $K = \ker \varphi$ . Como  $R^r$  es finitamente generado,  $K$  también lo es. Por otro lado, como  $P$  es proyectivo

$$R^r \simeq P \oplus K.$$

Tensorizando sobre  $R$  con  $\kappa = R/m$  obtenemos

$$\begin{aligned} R/m \otimes_R R^r &\simeq R/m \otimes_R (P \oplus K) \\ (R/m \otimes_R R)^r &\simeq (R/m \otimes_R P) \oplus (R/m \otimes_R K) \\ (R/m)^r &\simeq (P/mP) \oplus (K/mK), \end{aligned}$$

donde usamos el Lema 2 para  $(R/m \otimes_R P) \simeq P/mP$  y  $(R/m \otimes_R K) \simeq K/mK$ . Por la proposición 2,  $(R/m)^r \simeq (P/mP)$ . Luego  $K/mK = 0$ . O sea que  $K$  es un  $R$ -módulo finitamente generado tal que  $K = mK$ . Por el Lema de Nakayama  $K = 0$ .  $\square$

## 1.2. Propiedades locales

Veamos dos pequeños resultados que necesitaremos en el Capítulo 3.

**Proposición 3.** *Dado  $M$  un  $R$ -módulo, son equivalentes:*

- a)  $M = 0$ .
- b)  $M_p = 0$  para todo  $p \in R$  ideal primo.
- c)  $M_m = 0$  para todo  $m \in R$  ideal maximal.

*Demostración.* Es claro que  $a) \implies b) \implies c)$ . Supongamos que vale  $c)$  y  $M \neq 0$ . Sea  $x \in M$  no nulo, consideremos el ideal  $\text{Ann}(x)$ , que no es todo  $R$ . Sea  $m \subset R$  un ideal maximal tal que  $\text{Ann}(x) \subseteq m$ . Por hipótesis  $x/1 = 0$  en  $M_m$ , luego existe un  $r \in R \setminus m$  tal que  $rx = 0$ . Pero esto es absurdo, ya que  $r \notin \text{Ann}(x)$ .  $\square$

**Corolario 3.** *Sea  $M$  un  $R$ -módulo, y sean  $A, B \subseteq M$  dos submódulos. Si  $S^{-1}A = S^{-1}B$  para toda localización, entonces  $A = B$ .*

*Demostración.* Considero  $(A+B)/B$ . Por hipótesis  $((A+B)/B)_p = (A_p + B_p)/B_p = B_p/B_p = 0$  para todo  $p$  ideal primo. Luego  $A + B/B = 0$ , por lo que  $A = B$ .  $\square$

### 1.3. Descomposición primaria

En los Capítulos 4 y 5 estaremos interesados en la información geométrica que aportan los Ideales de Fitting sobre la parametrización. Para eso calcularemos una descomposición primaria de estos ideales y analizaremos las componentes irreducibles que allí aparecen. El objetivo de esta sección, que está basada en el Capítulo 4 de [Atiyah], es presentar de manera concisa pero clara la descomposición primaria de un ideal en anillos Noetherianos y explicar sus principales propiedades. Los resultados mas importantes son los dos teoremas de unicidad que probamos al final.

**Definición 2.** Dado  $R$  un anillo conmutativo con unidad, un ideal  $I \subset R$  se dice *primario* si  $I \neq R$  y si  $xy \in I$ , entonces  $x \in I$  o  $y^n \in I$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . O equivalentemente  $R/I \neq 0$  y todo divisor de cero de  $R/I$  es nilpotente.

**Observación 3.** Todo ideal primo es primario.

**Proposición 4.** *Dado  $I \subset R$  un ideal primario,  $\sqrt{I}$  es el ideal primo más chico que contiene a  $I$ .*

*Demostración.* Primero notemos que como

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{p \text{ primo} \\ p \supseteq I}} p,$$

basta con ver que  $\sqrt{I}$  es primo. Supongamos que  $xy \in \sqrt{I}$  con  $x \notin \sqrt{I}$ . Luego existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x^n y^n \in I$ , pero  $x^n \notin I$ . Como  $I$  es primario existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $y^{nm}$ , por lo que  $y \in \sqrt{I}$ .  $\square$

**Definición 3.** Si  $I$  es un ideal primario con  $p = \sqrt{I}$  decimos que  $I$  es  *$p$ -primario*.

**Ejemplo 1.** Los ideales primarios de  $\mathbb{Z}$  son  $(0)$  y  $(p^n)$  con  $p$  primo. Es claro que son primarios, para ver que son los únicos basta con observar que son los únicos ideales en  $\mathbb{Z}$  con radical primo.

Teniendo esto en mente uno podría preguntarse si los ideales primarios son siempre potencias de ideales primos. La respuesta es no, como se ve en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.** Sea  $R = k[x, y]$ ,  $I = (x, y^2)$ . Luego  $R/I \simeq k[y]/(y^2)$ , en donde los únicos divisores de cero son los múltiplos de  $\bar{y}$ , que son nilpotentes. Luego  $I$  es primario. Su radical es  $p = (x, y)$ , tenemos  $p^2 \subsetneq I \subsetneq p$ .

Tampoco es cierto que toda potencia de un ideal primo sea primaria.

**Ejemplo 3.** Consideremos  $R = k[x, y, z]/(xy - z^2)$  y sea  $p = (\bar{x}, \bar{z}) \in R$ . Como

$$\begin{aligned} R/p &= (k[x, y, z]/(xy - z^2))/((x, z)/(xy - z^2)) \\ &\simeq k[x, y, z]/(x, z) \\ &\simeq k[y] \end{aligned}$$

es dominio íntegro, luego  $p$  es primo. Tenemos  $\bar{x}\bar{y} = \bar{z}^2 \in p^2$ , pero  $\bar{x} \notin p^2$  e  $\bar{y} \notin \sqrt{p^2} = p$ . Luego  $p^2$  no es primario.

Además, el Ejemplo 3 nos muestra que dado un ideal  $I$  no basta con que su radical sea primo para que  $I$  sea primario. Sin embargo tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 5.** Si  $\sqrt{I}$  es un ideal maximal, entonces  $I$  es primario. En particular las potencias de un ideal maximal  $m$  son  $m$ -primarias.

*Demostración.* Los ideales primos de  $R/I$  son de la forma  $p/I$  con  $p \subset R$  primo tal que  $I \subseteq p$ . Si  $m = \sqrt{I}$  es maximal, entonces  $m$  es el único ideal primo de  $R$  que contiene a  $I$ . O sea que  $R/I$  tiene un único ideal primo, por lo que es un anillo local. Si  $x \in R/I$ , entonces  $x$  es una unidad o  $x \in m/I = \sqrt{I}/I$ . Luego todo  $x \in R/I$  divisor de cero es nilpotente. Por lo tanto  $I$  es un ideal primario.  $\square$

**Lema 3.** Si  $I_1$  e  $I_2$  son ideales  $p$ -primarios, entonces  $I_1 \cap I_2$  es  $p$ -primario.

*Demostración.* Primero notemos que

$$\sqrt{I_1 \cap I_2} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2} = p.$$

Ahora veamos que  $I_1 \cap I_2$  es primario. Supongamos que  $xy \in I_1 \cap I_2$  con  $x \notin I_1 \cap I_2$ , sin pérdida de generalidad podemos suponer  $x \notin I_1$ . Tenemos  $xy \in I_1$  con  $x \notin I_1$ , luego existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $y^n \in I_1$ . O sea que  $y \in \sqrt{I_1} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2}$ , luego  $y^m \in I_1 \cap I_2$  para algún  $m \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Definición 4.** Un ideal  $I \subsetneq R$  se dice *reducible* si existen ideales  $I_1, I_2 \supsetneq I$  conteniendo estrictamente a  $I$ , tales que  $I = I_1 \cap I_2$ . En caso contrario el ideal  $I$  se dice *irreducible*.

**Ejemplo 4.** El ideal  $6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$  es reducible, mientras que  $4\mathbb{Z}$  no lo es. En general un ideal  $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$  es irreducible si y sólo si  $n = p^r$  para algún  $r \in \mathbb{N}$ .

**Definición 5.** Una *descomposición primaria* de un ideal  $I \in R$  es una expresión como intersección finita de ideales primarios

$$I = \bigcap_{i=1}^n q_i.$$

Un ideal que admite una descomposición primaria se dice *descomponible*.

**Lema 4.**  $I \subsetneq R$  es irreducible si y sólo si  $(\bar{0}) \subsetneq R/I$  es irreducible.

*Demostración.* Es consecuencia directa de la correspondencia entre los ideales de  $R$  que contienen a  $I$  y los ideales del cociente  $R/I$ .  $\square$

**Proposición 6.** Si  $R$  es un anillo Noetheriano, se cumplen:

1. Todo ideal propio de  $R$  puede escribirse como intersección finita de ideales irreducibles.
2. Todo  $I \subsetneq R$  ideal propio irreducible es primario.

*Demostración.* 1. Sea  $A = \{I \subset R \text{ ideales propios tales que } I \text{ no puede escribirse como intersección finita de ideales irreducibles}\}$ . Queremos ver que  $A = \emptyset$ . Supongamos que  $A \neq \emptyset$ . Como  $R$  es Noetheriano, existe  $I \in A$  maximal respecto de la inclusión. Por estar en  $A$ ,  $I$  es reducible, o sea que existen ideales  $I_1, I_2 \supsetneq I$  tales que  $I = I_1 \cap I_2$ . Dado que  $I \in A$  es maximal,  $I_1, I_2 \notin A$ , luego ambos pueden escribirse como intersección finita de ideales irreducibles. Digamos  $I_1 = \bigcap_{i=1}^r I_{1i}$  con  $I_{1i}$  irreducibles tales que  $I_1 \subsetneq I_{1i} \subsetneq R$  para todo  $1 \leq i \leq r$  y  $I_2 = \bigcap_{j=1}^s I_{2j}$  con  $I_{2j}$  irreducibles tales que  $I_2 \subsetneq I_{2j} \subsetneq R$  para todo  $1 \leq j \leq s$ . Pero entonces  $I = I_{11} \cap \dots \cap I_{1r} \cap I_{21} \cap \dots \cap I_{2s}$ , puede escribirse como intersección finita de ideales irreducibles, contradiciendo el hecho de que  $I \in A$ .

2. Sea  $I \subsetneq R$  irreducible y sean  $xy \in I$  con  $x \notin I$ . Queremos ver que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $y^n \in I$ , o equivalentemente que  $\bar{y}$  es nilpotente en  $R/I$ . Consideremos la cadena ascendente de ideales en  $R/I$

$$\text{Ann}(\bar{y}) \subseteq \text{Ann}(\bar{y}^2) \subseteq \dots \subseteq \text{Ann}(\bar{y}^n) \subseteq \dots$$

Como  $R$  es Noetheriano,  $R/I$  también lo es, luego existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{Ann}(\bar{y}^n) = \text{Ann}(\bar{y}^{n+1})$ . Veamos que

$$(\bar{x}) \cap (\bar{y}^n) = (\bar{0}).$$

Es claro que  $(\bar{0}) \subseteq (\bar{x}) \cap (\bar{y}^n)$ . Veamos la otra inclusión. Si  $a \in (\bar{x}) \cap (\bar{y}^n)$  entonces

$$a = b\bar{x} = c\bar{y}^n.$$

Multiplicando a ambos lados por  $\bar{y}$ , y usando que  $\bar{x}\bar{y} = 0$ , tenemos

$$0 = c\bar{y}^{n+1}.$$

O sea que  $c \in \text{Ann}(\bar{y}^{n+1}) = \text{Ann}(\bar{y}^n)$ . Luego  $a = c\bar{y}^n = 0$ . Por lo tanto

$$(\bar{x}) \cap (\bar{y}^n) = (\bar{0}).$$

Por el lema anterior, sabemos que  $(\bar{0}) \subsetneq R/I$  es irreducible. Como  $\bar{x} \neq 0$ , tiene que ser  $\bar{y}^n = 0$ .  $\square$

**Corolario 4.** En un anillo Noetheriano todo ideal propio posee descomposición primaria.

Dado  $R = k[x_1, \dots, x_r]$  un anillo de polinomios e  $I \subset R$  un ideal, encontrar una descomposición primaria para  $I$  no siempre es fácil. Sin embargo en el caso de ideales monomiales el siguiente lema nos simplifica considerablemente la tarea.

**Lema 5.** *Sea  $I \subseteq k[x_1, \dots, x_r]$  un ideal monomial y sean  $a, b \in k[x_1, \dots, x_r]$  monomios tales que  $\text{mcd}(a, b) = 1$ . Si  $I = J + (ab)$  con  $J$  ideal monomial, entonces  $I = (J + (a)) \cap (J + (b))$ .*

*Demostración.* Es claro que  $I = J + (ab) \subseteq (J + (a)) \cap (J + (b))$ . Para ver que vale la otra contención observemos que como  $J$  es un ideal monomial,  $(J + (a)) \cap (J + (b))$  también lo es. Luego basta ver que todo monomio de  $(J + (a)) \cap (J + (b))$  está en  $I$ . Sea  $x^c \in (J + (a)) \cap (J + (b))$  un monomio. Si  $x^c \notin J$ , entonces  $a \mid x^c$  y  $b \mid x^c$ . Como  $a$  y  $b$  son coprimos,  $ab \mid x^c$ . Luego  $x^c \in J + (ab) = I$ .  $\square$

**Ejemplo 5.** Consideremos  $I = (x^2, xy) \subset k[x, y]$ .

$$\begin{aligned} (x^2, xy) &= (x^2, x) \cap (x^2, y) \\ &= (x) \cap (x^2, y). \end{aligned}$$

El ideal  $(x^2, y)$  es primario porque su radical es maximal. Luego  $(x) \cap (x^2, y)$  es una descomposición primaria para  $I$ .

**Ejemplo 6.** Sea  $I = (xy, yz) \subset k[x, y, z]$ .

$$\begin{aligned} (xy, yz) &= (xy, y) \cap (xy, z) \\ &= (x, y) \cap (y) \cap (x, z) \cap (y, z) \\ &= (y) \cap (x, z). \end{aligned}$$

**Ejemplo 7.** Sea  $I = (x^2, xy, xz, z^2) \subset k[x, y, z]$ .

$$\begin{aligned} (x^2, xy, xz, z^2) &= (x^2, x, xz, z^2) \cap (x^2, y, xz, z^2) \\ &= (x, z^2) \cap (x^2, y, x, z^2) \cap (x^2, y, z, z^2) \\ &= (x, z^2) \cap (x, y, z^2) \cap (x^2, y, z) \\ &= (x, z^2) \cap (x^2, y, z). \end{aligned}$$

Es importante observar que un ideal puede tener más de una descomposición primaria. Para el ideal del Ejemplo 5 tenemos esta otra:

$$(x^2, xy) = (x) \cap (x^2, xy, y^2).$$

En lo que resta de la sección nos ocuparemos de lo que se puede decir en cuanto a la unicidad de la descomposición primaria de un ideal, que se resume en el Primer y Segundo Teorema de Unicidad.

**Lema 6.** *Sea  $q$  un ideal  $p$ -primario y  $x$  un elemento de  $R$ , entonces*

1. Si  $x \in q$ , entonces  $(q : x) = 1$ .

2. Si  $x \notin q$ , entonces  $(q : x)$  es  $p$ -primario (luego  $\sqrt{(q : x)} = p$ ).

3. Si  $x \notin p$ , entonces  $(q : x) = q$ .

*Demostración.* 1. Veamos que  $R \subseteq (q : x)$ . Dado  $y \in R$ , si  $x \in q$ , entonces  $yx \in q$ . Luego  $y \in (q : x)$ .

2. Tomemos  $ab \in (q : x)$ , luego  $xab \in q$ . Si  $a \notin (q : x)$ , entonces  $xa \notin q$ . Como  $q$  es primario, tiene que ser  $b^n \in q \subseteq (q : x)$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Luego  $(q : x)$  es primario. Para ver que tienen el mismo radical, sea  $a \in (q : x)$ , luego  $ax \in q$ . Por hipótesis  $x \notin q$ , luego  $a \in p$ . O sea que  $q \subseteq (q : x) \subseteq p$ . Tomando radical tenemos  $\sqrt{(q : x)} = p$ .

3. Siempre vale  $q \subseteq (q : x)$ . Veamos la otra inclusión. Sea  $a \in (q : x)$ , entonces  $ax \in q$ . Si  $a \notin q$ , entonces  $x \in p$ .  $\square$

**Definición 6.** Una descomposición primaria  $I = \bigcap_{i=1}^n q_i$  se dice *minimal* si se cumplen:

1. Los  $p_i = \sqrt{q_i}$  son todos distintos.

2. Para todo  $1 \leq i \leq n$ ,  $\bigcap_{j \neq i} q_j \not\subseteq q_i$ .

**Observación 4.** Dada una descomposición primaria, usando el Lema 3 podemos lograr que se cumpla 1 y omitiendo los términos redundantes podemos conseguir 2. Luego toda descomposición primaria puede ser reducida a una minimal.

**Teorema 1** (Primer Teorema de Unicidad). *Sea  $I \subseteq R$  un ideal descomponible y sea  $I = \bigcap_{i=1}^n q_i$  una descomposición primaria minimal con  $p_i = \sqrt{q_i}$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Entonces los  $p_i$  son los ideales primos de  $S = \{\sqrt{(I : x)} \mid x \in R\}$  y por lo tanto son independientes de la descomposición.*

*Demostración.* Dado  $i$  con  $1 \leq i \leq n$ , como la descomposición es minimal existe  $x_i \in \bigcap_{j \neq i} q_j$  tal que  $x_i \notin q_i$ . Luego usando el Lema 6 tenemos

$$\begin{aligned} (I : x_i) &= \left( \bigcap_{j=1}^n q_j : x_i \right) \\ &= \bigcap_{j=1}^n (q_j : x_i) \\ &= (q_i : x_i), \end{aligned}$$

y  $(q_i : x_i)$  es  $p_i$ -primario. Luego  $\sqrt{(I : x_i)} = p_i$  es uno de los ideales primos de  $S$ .

Veamos la otra contención. Dado  $x \in R$ ,

$$\begin{aligned} (I : x) &= \left( \bigcap_{i=1}^n q_i : x \right) \\ &= \bigcap_{i=1}^n (q_i : x). \end{aligned}$$

Luego

$$\sqrt{(I : x)} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{(q_i : x)}.$$

Por el Lema 6 tenemos

$$\sqrt{(I : x)} = \bigcap_{x \notin q_i} p_i. \quad (1.1)$$

Si  $\sqrt{(I : x)}$  es primo, entonces  $\sqrt{(I : x)} = p_i$  para algún  $1 \leq i \leq n$ . Luego cada ideal primo de  $S$  es uno de los  $p_i$ .  $\square$

**Observación 5.** Considerando  $R/I$  como  $R$ -módulo lo que afirma el Teorema 1 es equivalente a la siguiente afirmación: *los  $p_i$  son exactamente los ideales primos que son radicales de los anuladores de elementos de  $R/I$ .*

**Definición 7.** Dado  $I \subseteq R$  un ideal, los primos  $p_i$  que aparecen en el Teorema 1 se llaman *primos asociados* a  $I$ , o a  $R/I$ . Notamos  $\text{Ass}(R/I)$  al conjunto  $\{p_1, \dots, p_n\}$ . Los elementos minimales de  $\text{Ass}(R/I)$  se dicen primos *minimales* o *aislados* asociados a  $I$ , los otros se llaman *embebidos*.

En el Ejemplo 5,  $I = (x^2, xy) = (x) \cap (x^2, y)$ , los primos asociados a  $I$  son  $p_1 = (x)$  y  $p_2 = (x, y)$ , con  $p_1$  minimal y  $p_2$  embebido. Notemos que un ideal  $I$  es primario si y sólo si tiene un único ideal primo asociado.

**Observación 6.** Los nombres *aislados* y *embebidos* vienen de la geometría. Si tomamos  $R = k[x_1, \dots, x_r]$  un anillo de polinomios con  $k$  cuerpo, el ideal  $I$  define un conjunto algebraico en el sentido clásico  $V(I) \subseteq \mathbb{A}_k^n$ . Los primos minimales  $p_i$  corresponden a las componentes irreducibles de  $V(I)$  y los primos embebidos corresponden a subvariedades de estas componentes irreducibles. En el Ejemplo 5 la variedad definida por  $I = (x^2, xy)$  es la recta afín  $V(x)$ , y el ideal embebido  $p_2 = (x, y)$  corresponde al  $(0, 0) = V(x, y) \subset V(x)$ .

**Proposición 7.** *Sea  $I \subseteq R$  un ideal descomponible, entonces todo ideal primo  $p \supseteq I$  conteniendo a  $I$  contiene un ideal primo minimal asociado a  $I$ . Luego los primos minimales asociados a  $I$  son precisamente los elementos minimales en el conjunto de todos los primos que contienen a  $I$ .*

*Demostración.* Si  $p \supseteq I = \bigcap_{i=1}^n q_i$ , entonces  $p = \sqrt{p} \supseteq \sqrt{\bigcap_{i=1}^n q_i} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{q_i} = \bigcap_{i=1}^n p_i$ . Luego  $p \supseteq p_i$  para algún  $i$ , y por lo tanto contiene un primo minimal asociado a  $I$ .  $\square$

**Observación 7.** En particular esto nos dice que todo conjunto algebraico irreducible contenido en  $V(I)$  tiene que estar contenido en una de sus componentes irreducibles.

**Corolario 5.** *Sea  $\text{Nil}(R)$  el nilradical de  $R$ . Si el ideal  $(0) \subset R$  es descomponible, entonces  $\text{Nil}(R)$  es la intersección de de todos los primos minimales asociados a  $(0)$ .*

*Demostración.* Como consecuencia de la Proposición 7, para cada  $p \subset R$  ideal primo existe  $\tilde{p}$  un primo minimal asociado a  $(0)$  tal que  $\tilde{p} \subseteq p$ . Luego

$$\text{Nil}(R) = \bigcap_{\substack{p \subset R \\ \text{primo}}} p = \bigcap_{\substack{p \subset R \\ \text{primo minimal} \\ \text{asociado a } (0)}} p.$$

□

**Proposición 8.** *Sea  $D$  el conjunto de los divisores de cero de  $R$ . Si el ideal  $(0) \subset R$  es descomponible, entonces  $D$  es la unión de de todos los ideales primos asociados a  $(0)$ .*

*Demostración.* Sea  $(0) = \bigcap_{i=1}^n q_i$  una descomposición primaria minimal. Dado  $p_i$  un primo asociado a  $(0)$ , por el Primer Teorema de Unicidad existe  $x_i \in R$  tal que  $p_i = \sqrt{(0 : x_i)}$ . Luego si  $a \in p_i$ ,  $a$  es un divisor de cero. Esto prueba  $\bigcup_{i=1}^n p_i \subseteq D$ . Veamos la otra inclusión. Si  $a \in D$ , entonces  $a \in (0 : x)$  para algún  $x \neq 0$ . Observemos que  $(0 : x) = (\bigcap_{i=1}^n q_i : x) = \bigcap_{i=1}^n (q_i : x)$ . Como  $x \neq 0$  existe  $i$  tal que  $x \notin q_i$ , luego por el Lema 6  $(q_i : x)$  es  $p_i$ -primario. Entonces  $a \in (q_i : x) \subseteq \sqrt{(q_i : x)} = p_i$ . □

**Proposición 9.** *Sea  $S \subset R$  un conjunto multiplicativamente cerrado y sea  $q$  un ideal  $p$ -primario.*

1. Si  $S \cap p \neq \emptyset$ , entonces  $S^{-1}q = S^{-1}R$ .
2. Si  $S \cap p = \emptyset$ , entonces  $S^{-1}q$  es  $(S^{-1}p)$ -primario.

*Demostración.* 1. Si  $s \in S \cap p$ , entonces  $s^n \in S \cap q$  para algún  $n$ . Luego  $s^n/1 \in S^{-1}q$ , y es una unidad en  $S^{-1}R$ .

2. Si  $S \cap p = \emptyset$ , entonces  $S \cap q = \emptyset$ . Veamos que todo divisor de cero en  $S^{-1}R/S^{-1}q \simeq S^{-1}(R/q)$  es nilpotente. Sea  $\bar{a}/\bar{b} \in S^{-1}(R/q)$  un divisor de cero, entonces  $\bar{a} \in R/q$  es un no divisor de cero, luego es nilpotente y  $\bar{a}/\bar{b}$  también lo es. Además  $\sqrt{S^{-1}q} = S^{-1}\sqrt{q} = S^{-1}p$ . Luego  $S^{-1}q$  es  $S^{-1}p$ -primario. □

**Teorema 2** (Segundo Teorema de Unicidad). *Sea  $I \subseteq R$  un ideal descomponible y sea  $I = \bigcap_{i=1}^n q_i$  una descomposición primaria minimal con  $p_i = \sqrt{q_i}$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Entonces los ideales primarios correspondientes a los primos aislados están unívocamente determinados.*

*Demostración.* Por el Primer Teorema de Unicidad sabemos que el conjunto de primos asociados es independiente de la descomposición, y por lo tanto también lo es el conjunto de los primos asociados minimales  $\{p_1, \dots, p_r\}$ . Para cada  $p_i$  primo minimal consideremos  $S_i = R \setminus p_i$ . Notemos que si  $j \neq i$  entonces  $S_i \cap p_j \neq \emptyset$ . Supongamos que  $S_i \cap p_j = \emptyset$ . Entonces  $(R \setminus p_i) \cap p_j = \emptyset$ , luego  $p_j \subsetneq p_i$ , que es

absurdo porque  $p_i$  es minimal. Usando la Proposición 9 tenemos

$$\begin{aligned} S_i^{-1}I &= S_i^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^n q_j\right) \\ &= \bigcap_{j=1}^n S_i^{-1}q_j \\ &= S_i^{-1}q_i \end{aligned}$$

Luego las componentes primarias correspondientes a los primos aislados asociados a  $I$  están dadas por  $\varphi_i^{-1}(S_i^{-1}I)$ , donde  $\varphi_i: R \rightarrow S_i^{-1}R$  es el morfismo canónico de la localización. Por lo tanto son independientes de la descomposición.  $\square$

**Observación 8.** En el Ejemplo 5 vimos dos descomposiciones para el ideal  $I = (x^2, xy) \subset k[x, y]$ ,  $I = (x) \cap (x^2, y) = (x) \cap (x^2, xy, y^2)$ . En este caso la componente  $(x)$ , correspondiente a un primo minimal asociado es independiente de la descomposición, mientras que las otras no.

## 1.4. Polinomio de Hilbert

En esta sección damos la definición y las propiedades básicas del polinomio de Hilbert. Lo hacemos en el contexto de geometría algebraica clásica, aunque los mismos resultados valen para esquemas proyectivos en general. En el Capítulo 4 veremos como podemos usar las Matrices de Representación para obtener el polinomio de Hilbert de la fibra de un punto de  $\mathbb{P}^3$ . De esta forma conoceremos la dimensión y el grado de la misma, que es toda la información geométrica que buscamos.

Comenzamos con algunas definiciones y resultados que necesitamos para definir la función de Hilbert.

**Proposición 10.** *Sea  $R$  un anillo Noetheriano y  $M$  un  $R$ -módulo finitamente generado, entonces  $M$  es Noetheriano.*

*Demostración.* Sean  $\{f_1, \dots, f_r\}$  un conjunto de generadores de  $M$  y  $N \leq M$  un submódulo, veamos que  $N$  es finitamente generado. Procedemos por inducción en  $r$ .

$r = 1$ : Consideremos el morfismo  $R$ -lineal  $\alpha: R \rightarrow M$ ,  $\alpha(1) = f_1$ . Como  $M$  está generado por  $f_1$ ,  $\alpha$  es sobreyectivo. Luego  $\alpha^{-1}(N) \subseteq R$  es un ideal finitamente generado. Sea  $\{u_1, \dots, u_s\}$  un conjunto de generadores de  $\alpha^{-1}(N)$ , entonces  $\{\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_s)\}$  es un conjunto de generadores de  $N$ .

$r > 1$ : Consideremos la proyección al cociente  $\pi: M \rightarrow M/Rf_1$ . Por hipótesis inductiva  $\pi(N) \subseteq M/Rf_1$  es finitamente generado. Por otro lado  $Rf_1$  es un  $R$ -módulo generado por un sólo elemento, luego  $N \cap Rf_1 \leq Rf_1$  es finitamente generado. Tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow N \cap Rf_1 \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi} \pi(N) \rightarrow 0,$$

donde  $\pi(N)$  y  $N \cap Rf_1$  son finitamente generados, luego  $N$  también lo es.  $\square$

**Definición 8.** Un *anillo graduado* es un anillo  $R$  junto con una descomposición en suma directa

$$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$$

como grupos abelianos donde  $R_m R_n \subset R_{m+n}$  para todo  $m, n \geq 0$ . Dado  $R$  un anillo graduado y  $M$  un  $R$ -módulo decimos que  $M$  es un  $R$ -módulo *graduado* si admite una descomposición

$$M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$$

como grupos abelianos de manera que  $R_m M_n \subset M_{m+n}$  para todo  $m, n \geq 0$ .

Notemos que si  $M$  es un  $k[x_0, \dots, x_n]$ -módulo, entonces restringiendo escalares  $M$  tiene estructura de  $k$ -espacio vectorial.

**Lema 7.** Sea  $M$  un  $k[x_0, \dots, x_n]$ -módulo graduado finitamente generado, entonces todas sus componentes homogéneas  $M_s$  tienen dimensión finita sobre  $k$ .

*Demostración.* Dado  $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  debemos ver que  $M_s$  tiene dimensión finita sobre  $k$ . Sea  $\{m_1, \dots, m_l, m_{l+1}, \dots, m_r\}$  un conjunto finito de generadores de  $M$  como  $k[x_0, \dots, x_n]$ -módulo ordenados de manera que los primeros  $m_1, \dots, m_l$  tienen grado menor o igual a  $s$  y el resto de los  $m_i$  tiene grado mayor. Entonces  $M_s$  va a estar generado como  $k[x_0, \dots, x_n]$ -módulo por  $\{m_1, \dots, m_l\}$  y una base de  $M_s$  como  $k$ -espacio vectorial es  $\{a_{11}m_1, \dots, a_{1j_1}m_1, \dots, a_{l1}, \dots, a_{lj_l}m_l\}$ , donde para cada  $1 \leq i \leq l$   $\{a_{i1}, \dots, a_{ij_i}\}$  es una base de  $k[x_0, \dots, x_n]_{s-\deg(m_i)}$  sobre  $k$ .  $\square$

**Definición 9.** Sea  $M$  un  $k[x_0, \dots, x_n]$ -módulo graduado finitamente generado definimos su *función de Hilbert* como

$$H_M: \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z} \\ s \mapsto \dim_k M_s.$$

Los ejemplos de anillos y módulos graduados en los que estaremos interesados son  $S = k[x_0, \dots, x_n]$  y sus ideales  $M = I$  y anillos de coordenadas de homogéneos de variedades algebraicas  $M = S/I$ .

**Definición 10.** Dado  $M$  un  $R$ -módulo graduado, notamos con  $M[d]$  al módulo que se obtiene desplazando la graduación de  $M$  en  $d$  lugares. Más formalmente  $M[d]$  es isomorfo a  $M$  como  $R$ -módulos y  $(M[d])_s = M_{s+d}$ .

Si  $f: M \rightarrow M$  es un morfismo  $R$ -lineal de grado  $d$ , muchas veces va a ser conveniente escribir  $\tilde{f}: M[-d] \rightarrow M$  de manera que  $\tilde{f}$  tiene grado cero, luego manda elementos homogéneos de  $M[-d]$  en elementos homogéneos de  $M$  del mismo grado.

A continuación probamos una serie de resultados que usaremos en la demostración del Teorema 3. Dicho teorema es de fundamental importancia ya que nos permitirá definir el polinomio de Hilbert.

**Definición 11.** Un *polinomio numérico* es un polinomio  $p \in \mathbb{Q}[z]$  tal que  $p(n) \in \mathbb{Z}$  para  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \gg 0$ .

**Lema 8.** Dado  $p \in \mathbb{Q}[z]$  un polinomio numérico existen enteros  $c_0, \dots, c_r \in \mathbb{Z}$  tales que

$$p(z) = c_0 \binom{z}{r} + c_1 \binom{z}{r-1} + \dots + c_r.$$

*Demostración.* Primero observemos que

$$\binom{z}{0} = 1 = z^0$$

y

$$\begin{aligned} \binom{z}{r} &= \frac{1}{r!} z(z-1) \dots (z-r+1) \\ &= \frac{1}{r!} z^r + \text{términos de orden menor.} \end{aligned}$$

Luego por inducción en  $r$  podemos escribir a  $z^r$  como  $c_0 \binom{z}{r} + c_1 \binom{z}{r-1} + \dots + c_r$  con  $c_0, \dots, c_r \in \mathbb{Q}$ , y por lo tanto cualquier  $p \in \mathbb{Q}[z]$  puede ser escrito de esta forma. Luego basta ver que si  $p(n) \in \mathbb{Z}$  para todo entero  $n \gg 0$ , entonces  $c_0, \dots, c_r \in \mathbb{Z}$ . Probemos esto último por inducción en  $r$  el grado de  $p$ . Para los casos  $r = -1$  (polinomio nulo) y  $r = 0$ , tenemos que  $p = c_0 \in \mathbb{Z}$ . Si  $r > 0$  consideremos  $\Delta p(n) = p(n+1) - p(n)$ . Como

$$\Delta \binom{z}{r} = \binom{z+1}{r} - \binom{z}{r} = \binom{z}{r-1}.$$

Tenemos

$$\Delta p(z) = c_0 \binom{z}{r-1} + c_1 \binom{z}{r-2} + \dots + c_{r-1}.$$

Luego  $\Delta p$  es un polinomio de grado  $r-1$  con coeficientes racionales que también toma valores enteros para  $z \gg 0$ . Por hipótesis inductiva  $c_0, \dots, c_{r-1} \in \mathbb{Z}$ . Y como  $c_r = p(z) - \Delta p(z)$ , evaluando en algún  $z$  lo suficientemente grande tenemos que  $c_r \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Lema 9.** Si  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  es una función tal que existe un polinomio numérico  $q \in \mathbb{Q}[z]$  tal que  $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$  coincide con  $q(n)$  para todo  $n$  lo suficientemente grande. Entonces existe un polinomio numérico  $p \in \mathbb{Q}[z]$  tal que  $f(n) = p(n)$  para todo entero  $n \gg 0$ , y además  $\deg(p) = \deg(q) + 1$ .

*Demostración.* Por el Lema 8 podemos escribir

$$q(z) = c_0 \binom{z}{r} + c_1 \binom{z}{r-1} + \dots + c_r,$$

con  $c_0, \dots, c_r \in \mathbb{Z}$ . Sea

$$\tilde{p}(z) = c_0 \binom{z}{r+1} + c_1 \binom{z}{r} + \dots + c_r \binom{z}{1},$$

luego  $\Delta\tilde{p} = q$ , por lo que

$$\begin{aligned} \Delta(f - \tilde{p})(n) &= \Delta f(n) - \Delta\tilde{p}(n) \\ &= q(n) - q(n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para enteros  $n \gg 0$ . Luego para  $n$  lo suficientemente grande  $(f - \tilde{p})(n)$  es constante, digamos  $c_{r+1}$ . Llamando  $p(n) = \tilde{p}(n) + c_{r+1}$ , tenemos  $f(n) = p(n)$  para todo  $n \gg 0$ . Además  $\deg(p) = \deg(\tilde{p}) = \deg(q) + 1$ .  $\square$

**Lema 10.** Sean  $S$  un anillo graduado Noetheriano y  $M$  un  $S$ -módulo graduado finitamente generado. Entonces existe una filtración

$$0 = M^0 \subset M^1 \subset \dots \subset M^r = M$$

de submódulos graduados tales que para todo  $i$

$$M^i/M^{i-1} \simeq (S/p_i)[l_i]$$

como  $S$ -módulos graduados, donde  $p_i \subset S$  es un ideal primo homogéneo y  $l_i \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Notemos con  $\Sigma$  a la colección de submódulos graduados de  $M$  que admiten una tal filtración. Tenemos que  $0 \in \Sigma$ , por lo que  $\Sigma$  es no vacío. Dado que  $M$  es finitamente generado sobre  $S$  anillo Noetheriano,  $M$  es un módulo Noetheriano, luego  $\Sigma$  posee un elemento maximal  $M'$ . Sea  $M'' = M/M'$ . Veamos que  $M'' = 0$ .

Si  $M'' \neq 0$  consideremos

$$\mathcal{I} = \{I_m = \text{Ann}(m) \mid m \in M'' \text{ es no nulo y homogéneo}\},$$

que resulta ser un conjunto no vacío de ideales homogéneos de  $S$ . Si  $I_m \in \mathcal{I}$  y  $a = a_s + \dots + a_d \in I_m$ , entonces  $am = a_s m + \dots + a_d m = 0$ , luego  $a_i m = 0$  para todo  $s \leq i \leq d$ , por lo que  $I_m$  es homogéneo.

Tomemos  $I_m \in \mathcal{I}$  un elemento maximal, afirmo que  $I_m \subset S$  es un ideal primo. Sean  $a$  y  $b$  son elementos homogéneos de  $S$  tales que  $ab \in I_m$  y  $b \notin I_m$ . Tenemos que  $bm \neq 0$ , luego  $I_{bm} \in \mathcal{I}$ . Además  $I_m \subset I_{bm}$ , luego por maximalidad tiene que ser  $I_m = I_{bm}$ . Por otro lado, como  $ab \in I_m$ ,  $abm = 0$ , luego  $a \in I_{bm} = I_m$ . Por lo tanto  $I_m$  es primo.

Notemos  $p = I_m$ , que por lo observado más arriba es un ideal primo homogéneo de  $S$ . Sea  $l = \deg(p) \in \mathbb{Z}$ . Consideremos el morfismo multiplicar por  $m$

$$\begin{aligned} S[-l] &\rightarrow M'' \\ s &\mapsto sm, \end{aligned}$$

induce un isomorfismo de  $S$ -módulos graduados entre  $Sm \subset M''$  y  $(S/p)[-l]$ . Sea  $N = \pi^{-1}(Sm)$ , donde  $\pi$  es la proyección al cociente. Luego  $N/M' \simeq Sm \simeq (S/p)[-l]$ , por lo que  $N$  admite una filtración de la forma  $0 \subset M' \subset N$  que cumple lo pedido, luego  $N \in \Sigma$ . Pero  $M' \subsetneq N$ , ya que  $Sm \neq 0$ , contradiciendo la maximalidad de  $M'$ . Por lo tanto  $M'' = 0$ , como queríamos probar.  $\square$

**Lema 11.** *Dada*

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \rightarrow 0$$

*sucesión exacta corta de  $S$ -módulos vale:*

1.  $\text{Ann}(M) \subset \text{Ann}(M') \cap \text{Ann}(M'')$
2.  $\text{Ann}(M') \text{Ann}(M'') \subset \text{Ann}(M)$ .

*En particular*

$$V(\text{Ann } M) = V(\text{Ann } M') \cup V(\text{Ann } M'').$$

*Demostración.* 1. Dado  $s \in \text{Ann}(M)$ . Para todo  $m' \in M'$ ,  $\varphi(sm') = s\varphi(m') = 0$ . Luego  $sm' = 0$ . Por otro lado, para todo  $m'' \in M''$  existe  $m \in M$  tal que  $\psi(m) = m''$ . Luego  $sm'' = s\psi(m) = \psi(sm) = 0$ . Por lo tanto  $s \in \text{Ann}(M') \cap \text{Ann}(M'')$ .

2. Sean  $s \in \text{Ann}(M')$ ,  $t \in \text{Ann}(M'')$ . Dado  $m \in M$ , debemos ver que  $stm = 0$ . Tenemos que  $\psi(tm) = t\psi(m) = 0$ , luego existe  $m' \in M'$  tal que  $tm = \varphi(m')$ . Entonces  $stm = s\varphi(m') = 0$ , por lo que  $st \in \text{Ann}(M)$ .  $\square$

Finalmente estamos en condiciones de probar el teorema importante de esta sección, que necesitamos para definir el polinomio de Hilbert.

**Teorema 3** (Hilbert-Serre). *Dado  $M$  un módulo graduado finitamente generado sobre  $S = k[x_1, \dots, x_r]$ , existe un único polinomio  $P_M \in \mathbb{Q}[z]$  tal que  $H_M(s) = P_M(s)$  para todo entero  $s \gg 0$ . Más aún,  $\deg(P_M) = \dim(V(\text{Ann } M))$ .*

*Demostración.* Supongamos que tenemos

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de  $S$ -módulos tal que el teorema es válido para  $M'$  y  $M''$ . Entonces  $H_M = H_{M'} + H_{M''}$ , por lo que  $H_M$  eventualmente coincide con un polinomio. Además

$$V(\text{Ann } M) = V(\text{Ann } M') \cup V(\text{Ann } M''),$$

por lo que

$$\begin{aligned} \dim(V(\text{Ann } M)) &= \max\{\dim(V(\text{Ann } M')), \dim(V(\text{Ann } M''))\} \\ &= \deg(P_{M'} + P_{M''}) \\ &= \deg(P_M). \end{aligned}$$

Por lo tanto el teorema también vale para  $M$ .

Consideremos entonces una filtración de  $M$  como en el Lema 10. Haciendo inducción en los submódulos de la filtración basta probar que el teorema es válido para  $S$ -módulos graduados de la forma  $(S/p)[l]$ , con  $p \subset S$  ideal primo homogéneo y  $l \in \mathbb{Z}$ . Más aún, como  $H_{M[l]}(m) = H_M(m+l)$ , podemos ignorar los shifts y probar únicamente el caso  $M = S/p$ .

Si  $p = (x_0, \dots, x_r)$  es el ideal irrelevante,  $H_M = 0$  para todo  $m > 0$ , luego  $p_M = 0$ . Bajo la convención de que el grado del polinomio cero y la dimensión del vacío son ambos  $-1$ , tenemos que  $\deg(P_M) = \dim(V(p))$ .

Si  $p \neq (x_0, \dots, x_r)$ . Sea  $x_i \notin p$ , consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow M[-1] \xrightarrow{x_i} M \rightarrow M/x_iM \rightarrow 0.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} H_{M/x_iM}(m) &= H_M(m) - H_M(m-1) \\ &= \Delta H_M(m-1) \\ &= \Delta H_{M[-1]}(m). \end{aligned}$$

y

$$V(\text{Ann}(M/x_iM)) = V(p) \cap V(x_i).$$

Luego  $V(\text{Ann}(M/x_iM))$  es una hipersuperficie en  $V(p)$ , por lo que

$$\dim(V(\text{Ann}(M/x_iM))) = \dim(V(p)) - 1.$$

Luego por inducción en  $\dim(V(p))$  podemos asumir que  $H_{M/x_iM} = \Delta H_{M[-1]}$  eventualmente coincide con un polinomio de grado  $\dim(V(\text{Ann}(M/x_iM)))$ . Por lo tanto, según el Lema 9,  $H_M$  eventualmente coincide con un polinomio de grado

$$\dim(V(\text{Ann}(M/x_iM))) + 1 = \dim(V(p)) = \dim(V(\text{Ann}(M))).$$

□

**Definición 12.** El polinomio  $P_M$  se llama el *polinomio de Hilbert* del módulo  $M$ . Si  $X = V(I) \subset \mathbb{P}^n$  es una variedad proyectiva, tomamos  $M = S/I$  y definimos el polinomio de hilbert de  $X$  como  $P_X = P_M$ .

Concluimos la sección con algunas propiedades del polinomio de Hilbert que usaremos en el Capítulo 4.

**Definición 13.** Dada  $X \subset \mathbb{P}^n$  una variedad proyectiva de dimensión  $r$  y sea  $P_X$  su polinomio de Hilbert, se define el *grado de  $X$*  como

$$\text{gr}(X) = r! \text{LC}(P_X),$$

donde  $\text{LC}(P_X)$  es el coeficiente líder de  $P_X$ .

**Proposición 11.** *Sea  $X \subset \mathbb{P}^n$  una variedad proyectiva. Entonces*

- a) El grado de  $X$  es un entero positivo.
- b) Si  $X = V(F)$  con  $F \in S_d$  homogéneo de grado  $d$ , entonces el grado de  $X$  es  $d$ .
- c) Si  $X = \{p_1, \dots, p_d\}$  es un conjunto finito de  $d$  puntos distintos entonces  $P_X$  es el polinomio constante  $d$ , en particular  $X$  tiene grado  $d$ .

*Demostración.* Como  $P_X$  es un polinomio numérico de grado  $r$ , por el Lema 8 podemos escribir

$$\begin{aligned} P_X(m) &= c_0 \binom{m}{r} + \dots + c_r \\ &= \frac{c_0}{r!} m(m-1) \dots (m-r+1) + \dots \\ &= \frac{c_0}{r!} m^r + \text{términos de orden menor,} \end{aligned}$$

donde  $c_i \in \mathbb{Z}$ . Luego  $\deg(X) = c_0$  es un entero, es positivo ya que para todo  $m \gg 0$ ,  $P_X(m) = H_X(m)$  es positivo.

Para la parte (b) consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow S[-d] \xrightarrow{\cdot F} S \rightarrow S(X) \rightarrow 0,$$

donde  $S(X) = S/(F)$  es el anillo de coordenadas homogéneo de la variedad  $X$ . Mirando en grado  $m$  (para  $m \geq d$ ) tenemos

$$0 \rightarrow S_{m-d} \xrightarrow{\cdot F} S_m \rightarrow S(X)_m \rightarrow 0.$$

Luego para  $m \gg 0$  tenemos

$$\begin{aligned} P_X(m) &= \dim_k(S(X)_m) \\ &= \dim_k(S_m) - \dim_k(S_{m-d}) \\ &= \binom{m+n}{n} - \binom{m-d+n}{n} \\ &= \frac{1}{n!} \left[ \prod_{i=1}^n (m+i) - \prod_{i=1}^n (m-d+i) \right] \\ &= \frac{1}{n!} \left[ m^n + \frac{n(n+1)}{2} m^{n-1} + \dots - \left( m^n + \left( -nd + \frac{n(n+1)}{2} \right) m^{n-1} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{d}{(n-1)!} m^{n-1} + \text{términos de orden menor.} \end{aligned}$$

Por ser una hipersuperficie  $X$  tiene dimensión  $n-1$ , luego  $\deg(X) = d$ .

Para la parte (c) consideremos  $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$  representantes de los  $p_1, \dots, p_d$ . Tomemos  $m \geq d-1$  y sea

$$\begin{aligned} \varphi: k[x_0, \dots, x_n]_m &\rightarrow k^d \\ f &\mapsto (f(v_1), \dots, f(v_d)) \end{aligned}$$

el morfismo  $k$ -lineal evaluar en los  $v_i$ . Para todo  $1 \leq j \leq d$  multiplicando formas lineales  $L_i$  que se anulen en  $p_i$  pero no en  $p_j$  podemos construirnos un polinomio homogéneo  $f_j$  de grado  $m$  tal que  $f_j(v_i) = \delta_{ij}$ . Luego  $\varphi(f_j) = e_j$ , por lo que  $\varphi$  es sobreyectivo. Para todo  $m \gg 0$  tenemos

$$\begin{aligned} P_X(m) &= \dim_k(S(X)_m) \\ &= \dim_k(k[x_0, \dots, x_n]_m) - \dim_k(I(X)_m) \\ &= \dim_k(k[x_0, \dots, x_n]_m) - \dim_k(\ker \varphi) \\ &= d. \end{aligned}$$

□

## Capítulo 2

# Complejos de aproximación

En este capítulo explicamos la construcción y propiedades del complejo de Koszul que luego utilizamos para definir los complejos de aproximación. Estos últimos nos proveerán de una resolución libre del Álgebra Simétrica del ideal  $I$ . Este álgebra aparece en nuestro contexto de estudio por motivos netamente técnicos que mencionamos brevemente a continuación y que fueron resumidos en la introducción.

La motivación geométrica de este trabajo consiste en entender los lugares singulares del esquema imagen de la aplicación  $\phi$ , lo cual como se explica en [BJ03, Sección 2] implica estudiar la imagen de la proyección del gráfico vía  $\pi_2$  que figura en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \hookrightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{P}^3}^2 \\ \pi_1 \downarrow & \searrow \pi_2 & \\ \mathbb{P}_k^2 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}_k^3 \end{array} .$$

El álgebra asociada al gráfico es el Álgebra de Rees de  $I \subset S$ , que notamos  $\text{Rees}_S(I)$ . Es el álgebra generada por las potencias de  $I$  (ver [Eis94, Página 171, Sección 6.5] y [BotLic] para más detalles). Bajo las hipótesis consideradas sobre el lugar base de  $\phi$ ,  $V(I)$ , el Álgebra de Rees es proyectivamente isomorfa a  $\text{Sym}_S(I)$ , el Álgebra Simétrica de  $I$  (ver [BotLic, Sección 3.3] y [BJ03, Sección 3]). La ventaja de esta última con respecto al Álgebra de Rees es que bajo las hipótesis adecuadas  $\text{Sym}_S(I)$  admite una resolución de tipo universal, el llamado complejo de aproximación de ciclos que tratamos brevemente al final de este capítulo. Su presentación tiene como único objetivo mostrar más abstractamente de dónde se obtienen las Matrices de Representación que definimos en la Sección 4.1 y que son las que usamos para obtener la información geométrica deseada. Debido a que los complejos de aproximación se construyen a partir de complejos de Koszul, comenzamos el capítulo dedicándole una sección al complejo de Koszul, para luego presentar dichos complejos.

A menos que se indique lo contrario  $R$  será un anillo conmutativo, con unidad, no necesariamente Noetheriano ni local, y todos los complejos de  $R$ -módulos serán indexados positivamente. Muchas veces omitiremos el subíndice y escribiremos  $\otimes$  en vez de  $\otimes_R$ .

## 2.1. El complejo de Koszul

En esta sección definimos el complejo de Koszul y vemos algunas de sus propiedades. Comenzamos dando la definición de sucesión  $M$ -regular, que necesitaremos principalmente en el Teorema 4 y en el Corolario 6.

**Definición 14.** Sea  $R$  un anillo y  $M$  un  $R$ -módulo. Un elemento  $x \in R$  se dice  $M$ -regular si  $xm \neq 0$  para todo  $m \in M$  no nulo. Decimos que  $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$  es una sucesión  $M$ -regular (o simplemente  $M$ -sucesión) si cumple:

1.  $x_1$  es regular en  $M$  y  $x_i$  es regular en  $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$  para todo  $2 \leq i \leq n$ .
2.  $(x_1, \dots, x_n)M \neq M$ .

A continuación definimos el producto tensorial de complejos de cadenas, lo usaremos dar una definición inductiva del complejo de Koszul.

**Definición 15.** Dados  $C_\bullet$  y  $D_\bullet$  dos complejos de cadenas el producto tensorial de complejos es el complejo  $(C \otimes D)_\bullet$  cuya componente de grado  $k$  es

$$\begin{aligned} (C \otimes D)_k &= \bigoplus_{p+q=k} C_p \otimes D_q \\ &= (C_k \otimes D_0) \oplus (C_{k-1} \otimes D_1) \oplus \cdots \oplus (C_0 \otimes D_k). \end{aligned}$$

y los diferenciales en un elemento homogéneo  $x \otimes y$  están dados por

$$d(x \otimes y) = d^C(x) \otimes y + (-1)^{\deg(x)} x \otimes d^D(y).$$

Notemos que el producto tensorial de complejos es el mismo que el complejo total del complejo doble, los cuales definimos a continuación.

**Definición 16.** Dados  $C_\bullet$  y  $D_\bullet$  dos complejos de cadenas definimos el complejo doble  $C_\bullet \otimes D_\bullet$  cuya componente en grado  $(n_1, n_2)$  es  $C_{n_1} \otimes D_{n_2}$ , sus diferenciales horizontales son  $d^{\text{hor}} = d^C \otimes 1$  y los verticales  $d^{\text{vert}} = 1 \otimes d^D$ .

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & C_{n+1} \otimes D_{m+1} & \xrightarrow{d^C \otimes 1} & C_n \otimes D_{m+1} & \xrightarrow{d^C \otimes 1} & C_{n-1} \otimes D_{m+1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow 1 \otimes d^D & & \downarrow 1 \otimes d^D & & \downarrow 1 \otimes d^D \\ \dots & \longrightarrow & C_{n+1} \otimes D_m & \xrightarrow{d^C \otimes 1} & C_n \otimes D_m & \xrightarrow{d^C \otimes 1} & C_{n-1} \otimes D_m \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow 1 \otimes d^D & & \downarrow 1 \otimes d^D & & \downarrow 1 \otimes d^D \\ \dots & \longrightarrow & C_{n+1} \otimes D_{m-1} & \xrightarrow{d^C \otimes 1} & C_n \otimes D_{m-1} & \xrightarrow{d^C \otimes 1} & C_{n-1} \otimes D_{m-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

**Definición 17.** Dado  $C_{\bullet, \bullet}$  un complejo doble, su complejo total asociado  $Tot(C)$  es el complejo

$$Tot(C)_k = \bigoplus_{p+q=k} C_{p,q},$$

$$d^{Tot} = d_{\text{vert}}^C + (-1)^{\text{deg vert}} d_{\text{hor}}^C.$$

Al igual que para el caso de  $R$ -módulos el producto tensorial de complejos es asociativo, como indica la siguiente proposición.

**Proposición 12.** *Dados  $C$ ,  $D$  y  $E$  complejos, existe un isomorfismo*

$$\lambda_{C,D,E}: (C \otimes D) \otimes E \rightarrow C \otimes (D \otimes E).$$

*Demostración.* Para  $k \geq 0$  tenemos un isomorfismo de  $R$ -módulos

$$\begin{aligned} ((C \otimes D) \otimes E)_k &= \bigoplus_{p+q=k} (C \otimes D)_p \otimes E_q \\ &= \bigoplus_{p+q=k} \left( \bigoplus_{r+s=p} C_r \otimes D_s \right) \otimes E_q \\ &\simeq \bigoplus_{r+s+q=k} (C_r \otimes D_s) \otimes E_q \\ &\simeq \bigoplus_{r+s+q=k} C_r \otimes (D_s \otimes E_q) \\ &\simeq \bigoplus_{r+t=k} C_r \otimes \left( \bigoplus_{s+q=t} D_s \otimes E_q \right) \\ &= \bigoplus_{r+t=k} C_r \otimes (D \otimes E)_t \\ &= (C \otimes (D \otimes E))_k. \end{aligned}$$

Dados enteros  $r + s + q = k$  con  $r + s = p$  y elementos  $x \in C_r, y \in D_s, z \in E_q$ , tenemos  $x \otimes y \in (C \otimes D)_p$ . El isomorfismo manda  $(x \otimes y) \otimes z \in ((C \otimes D) \otimes E)_k$  en  $x \otimes (y \otimes z) \in (C \otimes (D \otimes E))_k$ .  $\square$

De manera análoga se prueba la conmutatividad del producto tensorial de complejos.

**Proposición 13.** *Dados  $C$  y  $D$  complejos, existe un isomorfismo*

$$\lambda_{C,D}: C \otimes D \rightarrow D \otimes C.$$

*Demostración.* Dado  $k \geq 0$

$$\begin{aligned} (C \otimes D)_k &= \bigoplus_{p+q=k} C_p \otimes D_q \\ &\simeq \bigoplus_{p+q=k} D_p \otimes C_q \\ &= (D \otimes C)_k, \end{aligned}$$

Si  $x \in C_p$  e  $y \in D_q$ , el isomorfismo manda  $x \otimes y$  en  $y \otimes x$ .  $\square$

Definimos a continuación el complejo de Koszul asociado a una sucesión de elementos del anillo  $R$ .

**Definición 18.** Dados  $x_1, \dots, x_n \in R$ , sea  $F = R^n$  el módulo libre de rango  $n$  con base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . El complejo de Koszul asociado a la sucesión  $(x_1, \dots, x_n)$  es

$$K(x_1, \dots, x_n): \quad 0 \rightarrow \wedge^n F \xrightarrow{d_n} \wedge^{n-1} F \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^1 F \xrightarrow{d_1} \wedge^0 F \rightarrow 0$$

donde

$$d_k(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} x_{i_j} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$$

Identificando  $\wedge^1 F \simeq F$ ,  $\wedge^0 F \simeq R$  y tomando  $\widehat{e}_i = 1 \in R$  para  $e_i \in F$ , resulta ser  $d_1(e_i) = x_i$ . O sea que la última flecha  $d_1: R^n \rightarrow R$  es la multiplicación por el vector columna  $(x_1, \dots, x_n)^t$ .

**Ejemplo 8.** Si  $x \in R$  entonces  $K(x)$  es isomorfo al complejo

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{x} R \rightarrow 0$$

concentrado en los grados 0 y 1, donde el morfismo  $R \xrightarrow{x} R$  es la multiplicación por  $x$ . En este caso tenemos  $H_0(K(x)) = R/xR$  y  $H_1(K(x)) = \text{Ann}(x)$  como  $R$ -módulos. Notar que si  $x$  es  $R$ -regular entonces  $H_1(K(x)) = 0$  y  $K(x)$  es una resolución libre de  $R/(x)$ .

Una propiedad importante de estos complejos es que pueden obtenerse tensorizando complejos asociados a sucesiones de longitud menor.

**Proposición 14.** Sean  $x_1, \dots, x_{n+1} \in R$  con  $n \geq 1$ , entonces existe un isomorfismo

$$K(x_1, \dots, x_n) \otimes K(x_{n+1}) \simeq K(x_1, \dots, x_{n+1}).$$

*Demostración.* Sean  $T = K(x_1, \dots, x_n) \otimes K(x_{n+1})$ ,  $F = R^n$  con base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  y  $G = R$  con base  $\{e_{n+1}\}$ . Tenemos

$$T_0 = \wedge^0 F \otimes \wedge^0 G \simeq R \otimes R \simeq R,$$

$$\begin{aligned} T_1 &= (\wedge^1 F \otimes \wedge^0 G) \oplus (\wedge^0 F \otimes \wedge^1 G) \\ &\simeq \wedge^1 F \oplus \wedge^1 G \\ &\simeq R^{n+1}. \end{aligned}$$

Si  $j \neq 0, 1$ , tenemos  $\wedge^j G = 0$ , luego para  $p \geq 2$

$$\begin{aligned} T_p &= \bigoplus_{i+j=p} (\wedge^i F \otimes \wedge^j G) = (\wedge^p F \otimes \wedge^0 G) \oplus (\wedge^{p-1} F \otimes \wedge^1 G) \\ &\simeq \wedge^p F \oplus \wedge^{p-1} F \end{aligned}$$

luego si  $p > n + 1$ ,  $T_p = 0$  y para  $p \leq n + 1$ ,  $T_p$  es libre de rango

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p}.$$

O sea que para todo  $p$ ,  $T_p$  es libre del mismo rango que  $(K(x_1, \dots, x_{n+1}))_p$ . Veamos como es el isomorfismo de complejos  $\varphi: K(x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow T$ . Sea  $H = R^{n+1}$  con base  $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ .  $\varphi_0(1) = 1 \otimes 1$  y  $\varphi_1: \wedge^1 H \simeq T_1$  manda  $v_i$  en  $e_i \otimes 1$  si  $1 \leq i \leq n$  y  $v_{n+1}$  en  $1 \otimes e_{n+1}$ . Para  $p \geq 2$  también separamos en dos casos: si  $i_p \leq n$  el isomorfismo  $\varphi_p: \wedge^p H \simeq T_p$  manda  $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}$  en  $(e_1 \wedge \dots \wedge e_{i_p}) \otimes 1 \in \wedge^p F \otimes \wedge^0 G$ , y si  $i_p = n + 1$ , los  $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}$  van a  $(e_1 \wedge \dots \wedge e_{i_{p-1}}) \otimes e_{n+1} \in \wedge^{p-1} F \otimes \wedge^1 G$ . Se verifica que estos isomorfismos son compatibles con los diferenciales.  $\square$

Tenemos entonces dos definiciones equivalentes del complejo de Koszul: una directa dada en la Definición 18 y otra inductiva mediante la tensorización de complejos. En particular como el producto tensorial de complejos es conmutativo (a menos de isomorfismo), esto nos dice que el complejo de Koszul no depende del orden de los elementos de la sucesión. Más precisamente

$$K(x_1, \dots, x_n) \simeq K(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

para toda  $\sigma \in S_n$  permutación.

**Definición 19.** Dados  $x_1, \dots, x_n \in R$  y un complejo de cadenas  $C_\bullet$  notamos  $C(x_1, \dots, x_n)$  a  $C \otimes K(x_1, \dots, x_n)$ . Si  $M$  es un  $R$ -módulo, pensamos a  $M$  como un complejo concentrado en grado 0. En ese caso notamos simplemente  $M \otimes K(x_1, \dots, x_n)$  al complejo que se obtiene tensorizando con  $M$

$$0 \rightarrow M \otimes \wedge^n F \xrightarrow{1 \otimes d_n} M \otimes \wedge^{n-1} F \rightarrow \dots \rightarrow M \otimes \wedge^1 F \xrightarrow{1 \otimes d_1} M \otimes \wedge^0 F \rightarrow 0.$$

**Definición 20.** Si  $L$  es un complejo notaremos con  $L[-1]$  al complejo que se obtiene desplazando los objetos y diferenciales una posición a la izquierda es decir  $L[-1]_n = L_{n-1}$ , y si  $\varphi: L \rightarrow L'$  es un morfismo de complejos entonces  $\varphi[-1]_n = \varphi_{n-1}$ . Esto define un endofunctor exacto que llamamos *shift*.

Dado un  $x \in R$  tenemos una sucesión exacta de complejos

$$0 \rightarrow R \rightarrow K(x) \rightarrow R[-1] \rightarrow 0$$

Sea  $C_\bullet$  un complejo de cadenas cualquiera, tensorizando con  $C$  y usando que  $C \otimes R \simeq C$  y  $C \otimes R[-1] \simeq C[-1]$  tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow C \rightarrow C(x) \rightarrow C[-1] \rightarrow 0$$

Para cada  $k \in \mathbb{Z}$  tenemos  $H_{k+1}(C[-1]) = H_k(C)$ , así que la sucesión exacta larga en la homología es

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H_{k+1}(C) \rightarrow H_{k+1}(C(x)) \rightarrow H_k(C) \xrightarrow{\delta_k} H_k(C) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow H_1(C) \xrightarrow{\delta_1} H_1(C(x)) \rightarrow H_0(C) \xrightarrow{\delta_0} H_0(C) \rightarrow H_0(C) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

donde el morfismo de conexión  $\delta_k$  es la multiplicación por  $(-1)^k[x]$ . De esto se deduce el siguiente lema.

**Lema 12.** *Si  $C_\bullet$  es un complejo de cadenas con  $H_k(C) = 0$  para todo  $k > 0$  entonces  $H_k(C(x)) = 0$  para todo  $k > 1$ . Luego tenemos una sucesión exacta*

$$0 \rightarrow H_1(C(x)) \rightarrow H_0(C) \xrightarrow{[x]} H_0(C) \rightarrow H_0(C(x)) \rightarrow 0$$

*Si además  $x$  es  $H_0(C)$ -regular, entonces  $H_k(C(x)) = 0$  para todo  $k > 0$  y  $H_0(C(x)) \simeq H_0(C)/[x]H_0(C)$ .*

Estamos en condiciones de probar una propiedad fundamental del complejo de Koszul para el caso particular en el que  $x_1, \dots, x_n$  es una  $M$ -sucesión.

**Teorema 4.** *Sean  $R$  un anillo conmutativo,  $M$  un  $A$ -módulo y  $x_1, \dots, x_n \in R$  una sucesión  $M$ -regular. Entonces*

$$H_k(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) = 0 \text{ para todo } k > 0$$

$$H_0(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) \simeq M/(x_1, \dots, x_n)M$$

*Demostración.* Consideremos el  $R$ -módulo libre  $M^n$  con base  $\{m_1, \dots, m_n\}$ . La última parte del complejo  $M \otimes K(x_1, \dots, x_n)$  es isomorfa a

$$\dots \rightarrow M^n \xrightarrow{(x_1, \dots, x_n)^t} M \rightarrow 0$$

Luego  $H_0(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) \simeq M/(x_1, \dots, x_n)M$  como  $R$ -módulos. Probamos la otra afirmación por inducción en  $n$ . El caso  $n = 1$  sale como consecuencia directa de el Lema 12, tomando  $C = M$ ; o también a mano, escribiendo al complejo  $M \otimes K(x_1)$  como en el Ejemplo 8:

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{x_1} M \rightarrow 0$$

y usando que  $x_1$  es  $M$ -regular. Para el paso inductivo, sea  $C = M \otimes K(x_1, \dots, x_{n-1})$ . Tenemos  $H_0(C) \simeq M/(x_1, \dots, x_{n-1})M$  por lo que  $x_n$  es  $H_0(C)$ -regular. Usando la hipótesis inductiva  $H_k(C) = 0$  para todo  $k > 0$ , luego por el Lema 12 vale que  $H_k(C(x_n)) = 0$  para todo  $k > 0$ . Además

$$\begin{aligned} C(x_n) &= (M \otimes K(x_1, \dots, x_{n-1})) \otimes K(x_n) \\ &\simeq M \otimes (K(x_1, \dots, x_{n-1}) \otimes K(x_n)) \\ &\simeq M \otimes K(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

O sea que  $C(x_n) \simeq M \otimes K(x_1, \dots, x_n)$  como complejos, luego  $H_k(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) = 0$  para todo  $k > 0$ .  $\square$

Esto es sumamente importante, ya que nos provee de un método para construir una resolución libre del módulo  $M/(x_1, \dots, x_n)M$ , como se indica en el siguiente corolario.

**Corolario 6.** Si  $x_1, \dots, x_n$  es una  $M$ -sucesión, entonces el complejo  $M \otimes K(x_1, \dots, x_n)$  es una resolución libre del  $R$ -módulo  $M/(x_1, \dots, x_n)M$ . Es decir la sucesión

$$0 \rightarrow M \otimes \wedge^n F \rightarrow \dots \rightarrow M \otimes \wedge^1 F \rightarrow M \otimes \wedge^0 F \rightarrow M/(x_1, \dots, x_n)M \rightarrow 0.$$

es exacta.

Tomando  $M = R$  vemos que el complejo de Koszul es una resolución libre del  $R$ -módulo  $R/(x_1, \dots, x_n)$ , es decir tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \wedge^n F \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^2 F \rightarrow \wedge^1 F \rightarrow \wedge^0 F \rightarrow R/(x_1, \dots, x_n) \rightarrow 0.$$

## 2.2. Complejos de aproximación

Ahora que dimos la definición del complejo de Koszul asociado a una sucesión estamos en condiciones de definir los complejos de aproximación, que usaremos en el Capítulo 4 para definir las Matrices de Representación.

Sean  $k$  un cuerpo,  $S := k[s_0, s_1, s_2]$ ,  $R := k[x_0, x_1, x_2, x_3]$  los anillos de polinomios que definen  $\mathbb{P}_k^2$  y  $\mathbb{P}_k^3$  respectivamente e  $I = (f_0, f_1, f_2, f_3) \subset S$  un ideal homogéneo. Comenzamos considerando el complejo de Koszul graduado

$$K(I): 0 \rightarrow S[-4d] \xrightarrow{d_4} S[-3d]^4 \xrightarrow{d_3} S[-2d]^6 \xrightarrow{d_2} S[-d]^4 \xrightarrow{d_1} S \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

Los diferenciales están dados por las matrices

$$d_4 = \begin{pmatrix} -f_3 \\ f_2 \\ -f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} \quad d_3 = \begin{pmatrix} f_2 & f_3 & 0 & 0 \\ -f_1 & 0 & f_3 & 0 \\ f_0 & 0 & 0 & f_3 \\ 0 & -f_1 & -f_2 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 & -f_2 \\ 0 & 0 & f_0 & f_1 \end{pmatrix}$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} -f_1 & -f_2 & 0 & -f_3 & 0 & 0 \\ f_0 & 0 & -f_2 & 0 & -f_3 & 0 \\ 0 & f_0 & f_1 & 0 & 0 & -f_3 \\ 0 & 0 & 0 & f_0 & f_1 & f_2 \end{pmatrix} \quad d_1 = (f_0 \ f_1 \ f_2 \ f_3).$$

Tensorizamos sobre  $k$  con  $R = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$  obteniendo el complejo  $R \otimes_k K(I)$ :

$$0 \rightarrow R[s_0, s_1, s_2][-4d] \xrightarrow{u_4} R[s_0, s_1, s_2][-3d]^4 \xrightarrow{u_3} R[s_0, s_1, s_2][-2d]^6 \xrightarrow{u_2} R[s_0, s_1, s_2][-d]^4 \xrightarrow{u_1} R[s_0, s_1, s_2] \rightarrow 0.$$

Las matrices de los diferenciales  $d_i$  y  $u_i$  son las mismas para  $1 \leq i \leq 4$ . Notemos que  $R \otimes_k S = k[x_0, x_1, x_2, x_3][s_0, s_1, s_2]$  es un anillo bigraduado con una graduación que corresponde a la de  $R = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$  y otra a la de  $S = k[s_0, s_1, s_2]$ . Para

distinguir las notamos con  $[-]$  al desplazamiento en la graduación correspondiente a las variables  $s_0, s_1, s_2$  y con  $(-)$  al correspondiente a las variables  $x_0, x_1, x_2, x_3$ .

De forma análoga construimos otro complejo bigraduado partiendo esta vez del complejo de Koszul  $K(x_0, x_1, x_2, x_3)$  y tensorizando con  $S = k[s_0, s_1, s_2]$ . Lo notamos  $S \otimes_k K(x)$ :

$$0 \rightarrow S[x_0, x_1, x_2, x_3](-4) \xrightarrow{v_4} S[x_0, x_1, x_2, x_3](-3)^4 \xrightarrow{v_3} S[x_0, x_1, x_2, x_3](-2)^6 \xrightarrow{v_2} S[x_0, x_1, x_2, x_3](-1)^4 \xrightarrow{v_1} S[x_0, x_1, x_2, x_3] \rightarrow 0.$$

Las matrices de los diferenciales  $v_i$  se obtienen de las matrices de los diferenciales de  $d_i$  de (2.1) reemplazando  $f_j$  por  $x_j$  para  $0 \leq j \leq 3$ . Como  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  es una secuencia regular en  $S[x_0, x_1, x_2, x_3]$ , el complejo  $S \otimes_k K(x)$  es acíclico, es decir que los grupos de homología  $H_i(S \otimes_k K(x))$  son nulos para todo  $i > 0$ . Notar que los complejos  $R \otimes_k K(I)$  y  $S \otimes_k K(x)$  difieren únicamente en los diferenciales. A partir de éstos construimos el complejo de aproximación de ciclos (y los otros complejos de aproximación).

Definimos  $Z_i = \ker d_i$  y sea  $\mathcal{Z}_i = R \otimes_k Z_i[id]$  para  $0 \leq i \leq 4$ , estos últimos son  $(S \otimes_k R)$ -módulos bigraduados. Ponemos  $[id]$  para acomodar los desplazamientos en la graduación que habíamos hecho cuando armamos el complejo  $R \otimes_k K(I)$ . Para todo  $0 \leq i \leq 4$  se cumple

$$u_i \circ v_{i+1} + v_i \circ u_{i+1} = 0,$$

por lo que  $v_{i+1}(\mathcal{Z}_{i+1}) \subset \mathcal{Z}_i$  para todo  $0 \leq i \leq 4$ . Los mapas  $v_i$  inducen mapas bigraduados que también notamos  $v_i$ . De esta manera obtenemos el siguiente complejo bigraduado

$$\mathcal{Z}_\bullet: 0 \rightarrow \mathcal{Z}_4(-4) \xrightarrow{v_4} \mathcal{Z}_3(-3) \xrightarrow{v_3} \mathcal{Z}_2(-2) \xrightarrow{v_2} \mathcal{Z}_1(-1) \xrightarrow{v_1} \mathcal{Z}_0 \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

que llamamos *complejo de aproximación de ciclos*. De forma análoga pueden formarse otros complejos de aproximación

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\bullet &= (\text{im } u, v) \\ \mathcal{M}_\bullet &= (H_\bullet(K(I, R)), v). \end{aligned}$$

Estos complejos fueron introducidos originalmente por Simis y Vasconcelos en [SV81] y desarrollados junto con Herzog en [HSV82] y [HSV83] para estudiar álgebras de Rees a través de álgebras simétricas. Para más información puede consultarse [BC05, Sección 2.1], [BJ03, Sección 4.1], [HSV82], [HSV83] y [BotLic]. En esta tesis estamos interesados únicamente en el complejo de aproximación de ciclos  $\mathcal{Z}_\bullet$ , en particular en su último diferencial

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1(-1) \xrightarrow{v_1} \mathcal{Z}_0 &= R[s_0, s_1, s_2] \\ (g_0, g_1, g_2, g_3) &\mapsto g_0x_0 + g_1x_2 + g_2x_2 + g_3x_3. \end{aligned}$$

Notar que

$$\mathcal{Z}_1 = \{(g_0, g_1, g_2, g_3) \in S^4 \mid g_0f_0 + g_1f_2 + g_2f_2 + g_3f_3 = 0\}.$$

Luego

$$v_1(\mathcal{Z}_1) = \left\{ \sum_{i=0}^3 g_i x_i \in R[s_0, s_1, s_2] \mid \sum_{i=0}^3 g_i f_i = 0 \right\}$$

son las syzygies asociadas a  $(f_0, f_1, f_2, f_3)$ .

Cuando  $V(I)$  es localmente una intersección completa el complejo (2.2) es una resolución libre finita del Álgebra Simétrica de  $I$ . Este resultado, que resumimos en la siguiente proposición, es fundamental para nuestro trabajo. Por cuestiones técnicas que exceden el alcance del mismo omitimos la demostración. La misma puede encontrarse en [BotLic, Proposición 3.1.3 y Fórmula 3.6] o [BJ03, Sección 4.2].

**Proposición 15.** *Si los puntos base son finitos y localmente una intersección casi completa el complejo de aproximación de ciclos (2.2) es una resolución del Álgebra Simétrica de  $I$ .*

En la Sección 4.1 utilizamos la presentación que nos da el último morfismo del complejo de aproximación de ciclos para construir las Matrices de Representación.



# Capítulo 3

## Ideales de Fitting

El objetivo de este capítulo es dar la definición de los Ideales de Fitting y probar sus principales propiedades. En el Capítulo 4 utilizaremos estos ideales para encontrar la ecuación implícita y puntos múltiples de superficies parametrizadas.

Básicamente, si tenemos  $M$  módulo finitamente generado sobre un anillo Noetheriano  $R$  y conseguimos una presentación libre finitamente generada de  $M$

$$\varphi: F \rightarrow G,$$

el  $i$ -ésimo Ideal de Fitting de  $M$  se define como el ideal generado por los menores de tamaño  $\text{rg}(G) - i$  de la matriz de  $\varphi$  en cualquier par de bases. Para la buena definición de estos ideales debemos ver que no dependen de la presentación elegida, resultado que se conoce como el Lema de Fitting (Proposición 16). Presentamos dicho lema recién en la Sección 3.3, ya que para la demostración del mismo son necesarios los resultados que probamos en las primeras dos secciones.

Nos basamos en los Capítulos 19 y 20 de [Eis94], al igual que en el libro asumimos que todos los anillos son Noetherianos.

### 3.1. Resoluciones libres y minimales

**Definición 21.** Dado  $M$  un  $R$ -módulo una *resolución* de  $M$  es una sucesión exacta de  $R$ -módulos

$$\mathcal{F}: \dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0.$$

A veces omitiremos la última parte

$$\mathcal{F}: \dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0,$$

entendiendo que la homología es cero en todos los lugares excepto en  $F_0$  y que  $M = \text{coker } \varphi_0$ .

Si los  $F_n$  son proyectivos decimos que  $\mathcal{F}$  es una *resolución proyectiva*, si los  $F_n$  son libres  $\mathcal{F}$  es una *resolución libre*. Si además  $R$  es un anillo graduado, los  $F_n$  son  $R$ -módulos libres graduados y los mapas son homogéneos de grado cero decimos

que es una *resolución libre graduada* (notar que necesitamos además que  $M$  sea un  $R$ -módulo graduado).

Si existe un  $n_0$  tal que  $F_n = 0$  para todo  $n > n_0$  y  $F_{n_0} \neq 0$  diremos que la resolución es *finita* de longitud  $n_0$ .

Truncando una resolución en el primer paso se obtiene una *presentación* de  $M$ , esto es un morfismo  $F \xrightarrow{\varphi} G$  tal que  $\text{coker } \varphi = M$ .

**Observación 9.** Todo  $R$ -módulo  $M$  tiene una resolución libre, y si  $R$  y  $M$  son graduados existe una resolución libre graduada de  $M$ .

Sea  $\{u_i\}_{i \in I}$  un conjunto de generadores de  $M$ , sea  $F_0 = R^{(I)}$ , junto con  $\varphi_0$  el epimorfismo que manda los elementos de la base de  $F_0$  en los  $u_i$ . Tenemos

$$F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0.$$

Repetimos para  $\ker \varphi_0$  obteniendo  $F_1 \xrightarrow{\varphi_1} \ker \varphi_0 \rightarrow 0$  y componemos con la inclusión

$$\begin{array}{ccccc} & & F_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & M & \rightarrow & 0 \\ & \nearrow \varphi_1 & \uparrow & & & & \\ F_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & \ker \varphi_0 & \rightarrow & 0 & & \\ & & \uparrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array} \quad .$$

Siguiendo obtenemos la resolución libre deseada. Notar que si  $R$  y  $M$  son graduados podemos ir tomando los  $F_i$  de manera que la resolución quede graduada.

**Ejemplo 9.** Como vimos en el Corolario 6 del capítulo anterior, si  $x = x_1, \dots, x_n$  es una sucesión regular, entonces el complejo de Koszul  $K(x)$  es una resolución libre de  $R/(x_1, \dots, x_n)R$ .

**Definición 22.** Un complejo

$$\mathcal{F}: \dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \rightarrow \dots$$

sobre un anillo local  $(R, p)$  se dice *minimal* si las flechas del complejo  $\mathcal{F} \otimes R/p$  son todas nulas, es decir  $\varphi_n(F_n) \subseteq pF_{n-1}$  para todo  $n$ .

**Observación 10.** Si  $\mathcal{F}$  es un complejo minimal de módulos libres finitamente generados cualquier matriz representando a  $\varphi_n$  tiene todas sus entradas en  $p$ .

**Ejemplo 10.** Si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$  con  $x_i \in p$  para todo  $i$ , entonces  $K(x)$  es un complejo minimal. Recordemos que para cada  $n$  el diferencial de  $K(x)$  en el lugar  $n$  manda los generadores  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$  en  $\sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} x_{i_j} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ , por lo que su imagen cae en  $pK(x)_{n-1}$ .

Para obtener una resolución libre de  $M$  podríamos proceder como en la Observación 9 tomando en cada paso conjuntos de generadores minimales. Así construiríamos una resolución libre que podríamos haber llamado minimal. Sin embargo esto no resulta muy útil en general, ya que los conjuntos de generadores minimales no suelen

tener buenas propiedades de unicidad. Por ejemplo el cardinal de un conjunto minimal de generadores no está bien definido (en los enteros  $(5) = (10, 15)$ ). El siguiente lema nos dice que sobre un anillo local o graduado, donde gracias a la Proposición 2 el cardinal de un conjunto minimal de generadores está bien definido, las resoluciones obtenidas de esta manera resultan ser minimales en nuestro sentido original. En particular tenemos que siempre existen resoluciones minimales y un método para construirlas.

**Lema 13.** *Dada una resolución libre*

$$\mathcal{F}: \dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \rightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

sobre un anillo local, son equivalentes:

1.  $\mathcal{F}$  es un complejo minimal.
2. Para cada  $n$  la clase de cualquier base de  $F_{n-1}$  resulta ser un conjunto de generadores minimal de  $\text{coker } \varphi_n$ .

*Demostración.* Sea  $(R, p)$  el anillo local y llamemos  $\varphi_0$  al morfismo  $F_0 \rightarrow \text{coker } \varphi_1$ .

2.  $\implies$  1. Sea  $n \geq 0$ , supongamos que toda base  $\{u_1, \dots, u_r\}$  de  $F_{n-1}$  va a un conjunto minimal de generadores  $\{\pi(u_1), \dots, \pi(u_r)\}$  de  $\text{coker } \varphi_n$ , queremos ver que  $\text{im } \varphi_n \subseteq pF_{n-1}$ . Consideremos

$$\begin{array}{ccc} F_{n-1} & \xrightarrow{\pi} & \text{coker } \varphi_n \xrightarrow{q} \text{coker } \varphi_n / p(\text{coker } \varphi_n) \\ r \downarrow & \nearrow f & \\ F_{n-1}/pF_{n-1} & & \end{array}$$

Dado que  $pF_{n-1} \subseteq \text{im } \varphi_n$ , existe una (única)  $f$  que hace conmutar el diagrama. Sea  $\{u_1, \dots, u_r\}$  una base del módulo libre  $F_{n-1}$ . Por un lado el Lema de Nakayama nos dice que  $\{r(u_1), \dots, r(u_r)\}$  es una base del espacio vectorial  $F_{n-1}/pF_{n-1}$ . Al mismo tiempo, por hipótesis  $\{u_1, \dots, u_r\}$  va a parar vía  $\pi$  a un conjunto de generadores minimales de  $\text{coker } \varphi_n$ , que nuevamente por el Lema de Nakayama va a una base  $\{q\pi(u_1), \dots, q\pi(u_r)\}$  del espacio vectorial  $\text{coker } \varphi_n / p(\text{coker } \varphi_n)$ . Por la conmutatividad del diagrama tenemos  $q\pi(u_i) = fr(u_i)$ . O sea que  $f$  manda la base  $\{r(u_1), \dots, r(u_r)\}$  de  $F_{n-1}/pF_{n-1}$  en la base  $\{q\pi(u_1), \dots, q\pi(u_r)\}$  de  $\text{coker } \varphi_n / p(\text{coker } \varphi_n)$ , por lo que es un isomorfismo de espacios vectoriales. Sea  $a \in \text{im } \varphi_n$ ,

$$\begin{aligned} f(r(a)) &= q\pi(a) \\ &= q(0) = 0. \end{aligned}$$

Como  $f$  es monomorfismo  $r(a) = 0$ . Luego  $a \in pF_{n-1}$ . O sea  $\text{im } \varphi_n \subseteq pF_{n-1}$  como queríamos.

1.  $\implies$  2. Supongamos que  $\text{im } \varphi_n \subseteq pF_{n-1}$ . Igual que antes consideremos el epimorfismo  $f: F_{n-1}/pF_{n-1} \rightarrow \text{coker } \varphi_n / p(\text{coker } \varphi_n)$ . Si  $f(r(a)) = 0$ , entonces

$q(\pi(a)) = 0$ . Luego  $\pi(a) \in p \operatorname{coker} \varphi_n$ , por lo que  $r(a) = 0$ . O sea que  $f$  es isomorfismo de espacios vectoriales. Sea  $\{u_1, \dots, u_r\}$  una base de  $F_{n-1}$ . Por el Lema de Nakayama,  $\{r(u_1), \dots, r(u_r)\}$  es una base de  $F_{n-1}/pF_{n-1}$ , que vía  $f$  va a una base  $\{q\pi(u_1), \dots, q\pi(u_r)\}$  de  $\operatorname{coker} \varphi_n/p(\operatorname{coker} \varphi_n)$ . Nuevamente usando el Lema de Nakayama tenemos que  $\{\pi(u_1), \dots, \pi(u_r)\}$  es un conjunto minimal de generadores de  $\operatorname{coker} \varphi_n$ .  $\square$

**Corolario 7.** *Si  $R$  es un anillo local o graduado y  $M$  un  $R$ -módulo, entonces existe una resolución minimal de  $M$ .*

*Demostración.* Construimos una resolución libre de  $M$  procediendo como en la observación 9, pero en cada paso tomando un conjunto minimal  $\{u_1^n, \dots, u_{r_n}^n\}$  de generadores de  $\ker \varphi_{n-1}$ . Tenemos

$$\operatorname{coker} \varphi_n = F_{n-1}/\operatorname{im} \varphi_n = F_{n-1}/\ker \varphi_{n-1} \simeq \ker \varphi_{n-2}.$$

La base  $\{u_1^n, \dots, u_{r_n}^n\}$  de  $F_n = R^{r_n}$  va a un conjunto minimal de generadores  $\ker \varphi_{n-1} \simeq \operatorname{coker} \varphi_n$ . Por el Lema 13 la resolución construida resulta ser minimal.  $\square$

## 3.2. La unicidad de las resoluciones minimales

Lo opuesto a un complejo minimal es un complejo trivial, el cual definimos a continuación.

**Definición 23.** Un complejo se dice *trivial* si es suma directa de complejos exactos de la forma

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{1} R \rightarrow 0.$$

**Ejemplo 11.**

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} R \rightarrow 0$$

es isomorfo a

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{1} & R & \longrightarrow & 0 \\ & & \oplus & & \oplus & & \oplus \\ & & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{1} & R \longrightarrow 0, \end{array}$$

luego es un complejo trivial.

Los complejos triviales no tienen homología, por lo que si  $\mathcal{G}$  es un complejo trivial y  $\mathcal{F}$  es una resolución de  $M$ , entonces  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  es una resolución de  $M$ . Este es el motivo más simple de no unicidad de las resoluciones libres. En el Teorema 5 veremos que cuando estamos trabajando sobre un anillo local es el único motivo.

**Lema 14.** *Dado  $R$  anillo local, toda*

$$\mathcal{H}: \dots \xrightarrow{\varphi_{n+1}} H_n \xrightarrow{\varphi_n} \dots \xrightarrow{\varphi_2} H_1 \xrightarrow{\varphi_1} H_0 \rightarrow 0$$

*sucesión exacta de módulos libres sobre  $R$  es un complejo trivial.*

*Demostración.* El  $R$ -módulo  $H_0$  es libre, luego proyectivo, y la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \ker \varphi_1 \rightarrow H_1 \xrightarrow{\varphi_1} H_0 \rightarrow 0$$

se parte. Es decir

$$H_1 = H_0 \oplus \ker \varphi_1.$$

Sea  $H'_1 = \ker \varphi_1 = \text{im } \varphi_2$ , notemos que  $H_0 \oplus H'_1 \xrightarrow{\varphi_1} H_0$  es la proyección al primer factor. Luego  $\mathcal{H}$  es suma directa del complejo trivial

$$\mathcal{H}_1: 0 \rightarrow H_0 \xrightarrow{1} H_0 \rightarrow 0$$

y

$$\mathcal{H}': \dots \rightarrow H_n \rightarrow \dots \rightarrow H_2 \rightarrow H'_1 \rightarrow 0,$$

donde  $\mathcal{H}'$  resulta de  $\mathcal{H}$  reemplazando  $H_1$  por  $H'_1 = \text{im } \varphi_2$ . Observemos que  $H_1 = H_0 \oplus H'_1$  con  $H_1$  libre, luego  $H'_1$  es proyectivo (es sumando directo de un libre). Por el Corolario 2 del Lema de Nakayama todo módulo proyectivo finitamente generado sobre un anillo local es libre, luego  $H'_1$  es libre y  $\mathcal{H}'$  resulta ser un complejo de módulos libres. Repitiendo obtenemos una descomposición  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots$  como suma directa de complejos triviales.  $\square$

**Lema 15.** *Sea*

$$\mathcal{F}: \dots \xrightarrow{\varphi_{n+1}} F_n \xrightarrow{\varphi_n} \dots \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0$$

un complejo de  $R$ -módulos con los  $F_i$  proyectivos (por ejemplo una resolución proyectiva de  $M$ ) y sea

$$\mathcal{G}: \dots \xrightarrow{\psi_{n+1}} G_n \xrightarrow{\psi_n} \dots \xrightarrow{\psi_1} G_0 \xrightarrow{\psi_0} N \rightarrow 0$$

una resolución de  $N$ . Para todo  $\alpha: M \rightarrow N$  morfismo de  $R$ -módulos existe un  $\tilde{\alpha}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  morfismo de complejos induciendo  $\alpha$ , que llamaremos levantado de  $\alpha$ . Y si  $\tilde{\beta}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  es otro levantado de  $\alpha$ , entonces  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$  son homotópicos como complejos.

*Demostración.* Procedemos por inducción.

*Existencia:* Consideremos

$$\begin{array}{ccc} & F_0 & \\ & \swarrow \alpha_0 & \downarrow \varphi_0 \\ & M & \\ & \swarrow \alpha & \downarrow \alpha \\ G_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & N \rightarrow 0. \end{array}$$

Como  $F_0$  es proyectivo existe  $\alpha_0: F_0 \rightarrow G_0$  tal que  $\psi_0 \alpha_0 = \alpha \varphi_0$ . Continuamos de manera análoga.

$$\begin{array}{ccc} & F_1 & \\ & \swarrow \alpha_1 & \downarrow \varphi_1 \\ & F_0 & \\ & \swarrow \alpha_0 & \downarrow \alpha_0 \\ G_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & N \xrightarrow{\psi_0} N \end{array}$$

Como  $\psi_0\alpha_0\varphi_1 = \alpha_0\varphi_0\varphi_1 = 0$ , tenemos  $\text{im}(\alpha_0\varphi_1) \subseteq \ker \psi_0 = \text{im} \psi_1$ . Luego existe  $\alpha_1: F_1 \rightarrow G_1$  tal que  $\psi_1\alpha_1 = \alpha_0\varphi_1$ . Seguimos inductivamente obteniendo un morfismo de complejos

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & F_n & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_n & & & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha & & \\ \dots & \longrightarrow & G_n & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

que notamos  $\tilde{\alpha}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ .

*Unicidad a menos de homotopía:* Supongamos que tenemos  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  dos levantados de  $\alpha: M \rightarrow N$ . Queremos morfismos  $h_i: F_i \rightarrow G_{i+1}$  tales que  $\alpha_i - \beta_i = h_{i+1}\varphi_i + \psi_{i+1}h_i$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & F_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & F_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_2 - \beta_2 & \swarrow h_1 & \downarrow \alpha_1 - \beta_1 & \swarrow h_0 & \downarrow \alpha_0 - \beta_0 & \swarrow h_{-1} & \downarrow 0 & & \\ \dots & \longrightarrow & G_2 & \xrightarrow{\psi_2} & G_1 & \xrightarrow{\psi_1} & G_0 & \xrightarrow{\psi_0} & N & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Tomamos  $h_{-1} = 0$  y empezamos con  $h_0$ .

$$\begin{aligned} \psi_0(\alpha_0 - \beta_0) &= \psi_0\alpha_0 - \psi_0\beta_0 \\ &= \alpha_0\varphi_0 - \alpha_0\varphi_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego  $\text{im}(\alpha_0 - \beta_0) \subseteq \ker \psi_0 = \text{im} \psi_1$ . Como  $F_0$  es proyectivo existe  $h_0: F_0 \rightarrow G_1$  tal que  $\varphi_1 h_0 = \alpha_0 - \beta_0$ .

Sigamos un paso más, queremos  $\alpha_1 - \beta_1 = h_0\varphi_1 + \psi_2 h_1$ .

$$\begin{aligned} \psi_1(\alpha_1 - \beta_1) &= \psi_1\alpha_1 - \psi_1\beta_1 \\ &= \alpha_0\varphi_1 - \beta_0\varphi_1 \\ &= (\alpha_0 - \beta_0)\varphi_1 \\ &= \psi_1 h_0\varphi_1. \end{aligned}$$

Luego  $\alpha_1 - \beta_1 - h_0\varphi_1 \in \ker \psi_1 = \text{im} \psi_2$ , por lo que existe  $h_1: F_1 \rightarrow G_2$  tal que  $\psi_2 h_1 = \alpha_1 - \beta_1 - h_0\varphi_1$ ,

$$\begin{array}{ccc} & F_1 & \\ h_1 \swarrow & & \downarrow \alpha_1 - \beta_1 - h_0\varphi_1 \\ G_2 & \xrightarrow{\psi_2} & G_1. \end{array}$$

O sea que  $\alpha_1 - \beta_1 = h_0\varphi_1 + \psi_2 h_1$ . Repetimos para obtener los  $h_i: F_i \rightarrow G_{i+1}$  que nos dan la homotopía de complejos entre  $\tilde{\alpha}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  y  $\tilde{\beta}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ .  $\square$

**Teorema 5.** *Sea  $R$  un anillo local,  $M$  un  $R$ -módulo finitamente generado y  $\mathcal{F}$  una resolución libre minimal de  $M$ . Entonces cualquier otra resolución libre de  $M$  es isomorfa a  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{H}$  con  $\mathcal{H}$  complejo trivial. En particular, a menos de isomorfismo, hay una única resolución minimal de  $M$ .*

*Demostración.* Tenemos

$$\mathcal{F}: \dots \rightarrow F_n \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0$$

una resolución libre minimal y sea

$$\mathcal{G}: \dots \rightarrow G_n \rightarrow \dots \rightarrow G_0 \xrightarrow{\psi_0} M \rightarrow 0$$

otra resolución de  $M$ . Sean  $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  y  $\beta: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  levantados de  $\text{id}_M$ ,  $\beta\alpha: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  es un levantado de  $\text{id}_M$  homotópicamente equivalente a  $\text{id}_{\mathcal{F}}$ . O sea que existen  $s_i: F_i \rightarrow F_{i+1}$  tales que  $1 - \beta_i\alpha_i = s_{i-1}\varphi_i + \varphi_{i+1}s_i$ . Como  $\mathcal{F}$  es minimal tenemos que  $(1 - \beta_i\alpha_i)(F_i) \subseteq pF_i$ . Luego  $\det(\beta_i\alpha_i) \equiv 1 \pmod{p}$ . En particular  $\det(\beta_i\alpha_i) \neq 0$ , por lo que  $\beta_i\alpha_i$  es un automorfismo de  $\mathcal{F}$ . Reemplazando  $\beta$  por  $(\beta\alpha)^{-1}\beta$ , podemos asumir que  $\beta\alpha = 1$ . Para cada  $i$  sea  $H_i = \text{coker } \alpha_i$ , tenemos

$$0 \rightarrow F_i \xrightarrow{\alpha_i} G_i \xrightarrow{\pi_i} H_i \rightarrow 0.$$

$\swarrow$   
 $\beta_i$

Luego  $G_i \simeq F_i \oplus H_i$ , con  $G_i$  y  $F_i$  libres, luego  $H_i$  también lo es. Consideremos

$$\begin{array}{ccccc} G_i & \xrightarrow{\psi_i} & G_{i-1} & \xrightarrow{\pi_{i-1}} & G_{i-1}/\text{im } \alpha_{i-1} \\ \downarrow & & \nearrow \text{---} \nu_i & & \\ G_i/\text{im } \alpha_i & & & & \end{array}$$

Notemos que  $\pi_{i-1}\psi_i\alpha_i(x) = \pi_{i-1}\alpha_{i-1}\varphi_{i-1}(x) = 0$ , luego  $\text{im } \alpha_i \subseteq \ker \pi_{i-1}\psi_i$  y existe  $\nu_i: H_i \rightarrow H_{i-1}$ . Además  $\nu_i\nu_{i+1}([x]) = \nu_i[\psi_{i+1}(x)] = \psi_i\psi_{i+1}(x) = 0$ . Tenemos un complejo de módulos libres

$$\mathcal{H}: \dots \rightarrow H_n \xrightarrow{\nu_n} H_{n-1} \rightarrow \dots$$

y una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{H} \rightarrow 0.$$

$\swarrow$   
 $\beta$

Luego el complejo  $\mathcal{G}$  es isomorfo a  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{H}$ , por lo que  $H(\mathcal{G}) \simeq H(\mathcal{F}) \oplus H(\mathcal{H})$ . Pero  $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  induce un isomorfismo en la homología. Luego  $\mathcal{H}$  es exacto y por lo visto en el lema 14,  $\mathcal{H}$  resulta ser un complejo trivial.  $\square$

### 3.3. Ideales de Fitting

En esta sección definimos los Ideales de Fitting de un módulo finitamente generado y damos sus principales características.

**Definición 24.** Sean  $F$  y  $G$  módulos libres finitamente generados y  $\varphi: F \rightarrow G$  es un morfismo de  $R$ -módulos, llamamos  $I_r\varphi$  a la imagen del morfismo

$$\begin{aligned} \wedge^r F \otimes \wedge^r G^* &\xrightarrow{\phi} R \\ x_1 \wedge \dots \wedge x_r \otimes \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r &\mapsto \det(\alpha_i \varphi(x_j))_{ij}. \end{aligned}$$

Eligiendo bases de  $F$  y de  $G$ ,  $\varphi$  queda representada por la matriz  $M(\varphi)$ . A continuación veremos que  $I_r\varphi$  es el ideal de  $R$  generado por los menores (determinantes de las submatrices) de tamaño  $r$  de la matriz  $M(\varphi)$ . Tomamos por convención que el menor de tamaño 0 es 1, luego  $I_0\varphi = R$ , y tomamos  $I_r\varphi = R$  para todo  $r \leq 0$ . Observemos que con esta definición los ideales de Fitting no dependen de la elección de las bases de  $F$  y de  $G$ .

**Lema 16.** Sean  $B_1 = \{x_1, \dots, x_m\}$  una base de  $F$ ,  $B_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$  una base de  $G$  y sea  $M$  la matriz de  $\varphi$  en estas bases. Entonces  $I_r\varphi$  es el ideal de  $R$  generado por los menores de tamaño  $r$  de  $M$ .

*Demostración.* Llamemos  $J_r \subseteq R$  al ideal generado por los menores de tamaño  $r$  de  $M$ , queremos ver que  $J_r = I_r\varphi$ . Sea  $m_{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_r}$  el determinante de la submatriz de  $M$  que se obtiene quedándose con las filas  $i_1, \dots, i_r$  y las columnas  $j_1, \dots, j_r$ . Consideremos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  la base dual de  $\{y_1, \dots, y_n\}$ , notar que  $\alpha_i \varphi(x_j) = M_{ij}$ . Luego

$$m_{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_r} = \phi(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_r}),$$

por lo que  $J_r \subseteq I_r\varphi$ . Veamos la otra inclusión. Sea  $a \in I_r\varphi$ .

$$\begin{aligned} a &= \phi(a_1 \wedge \dots \wedge a_r \otimes f_1 \wedge \dots \wedge f_r) \\ &= \phi\left(\sum_{k=1}^m a_k^1 x_k \wedge \dots \wedge \sum_{k=1}^m a_k^r x_k \otimes \sum_{k=1}^n b_k^1 \alpha_k \wedge \dots \wedge \sum_{k=1}^n b_k^r \alpha_k\right) \\ &= \phi\left(\sum c_{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_r} x_1 \wedge \dots \wedge x_r \otimes \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r\right) \\ &= \sum c_{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_r} \phi(x_1 \wedge \dots \wedge x_r \otimes \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r). \end{aligned}$$

Como observamos antes  $\phi(x_1 \wedge \dots \wedge x_r \otimes \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r)$  es el menor que se obtiene quedándose con las filas  $i_1, \dots, i_r$  y las columnas  $j_1, \dots, j_r$  de  $M$ . Luego  $a \in J_r$ , como queríamos.  $\square$

**Observación 11.** Desarrollando el determinante por filas o columnas se ve que si  $r \leq s$ , entonces  $I_s\varphi \subseteq I_r\varphi$ .

La siguiente proposición es necesaria para la buena definición de los Ideales de Fitting.

**Proposición 16** (Lema de Fitting). Sea  $M$  un  $R$ -módulo finitamente generado y sean  $\varphi: F \rightarrow G$  y  $\varphi': F' \rightarrow G'$  dos presentaciones de  $M$  libres finitamente generadas, con  $G$  y  $G'$  de rango  $r$  y  $r'$  respectivamente. Para cada  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tenemos  $I_{r-i}\varphi = I_{r'-i}\varphi'$ .

*Demostración.* Como vimos en el Corolario 3 dos ideales son iguales si y sólo si coinciden en toda localización, así que podemos asumir que  $R$  es local. En ese contexto, por el Corolario 7 sabemos que existe una resolución minimal  $\mathcal{F}$ . Llamemos  $\varphi: F \rightarrow G$  al primer morfismo de  $\mathcal{F}$ , es decir a la presentación minimal. Dada

$\varphi': F' \rightarrow G'$  otra presentación, digamos que viene de una resolución  $\mathcal{G}$ , por el Teorema 5 tenemos que  $\mathcal{G} \simeq \mathcal{F} \oplus \mathcal{H}$  con  $\mathcal{H}$  complejo trivial. Es decir

$$\mathcal{G} \simeq \mathcal{F} \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots,$$

donde los  $\mathcal{H}_i$  son todos

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{1} R \rightarrow 0.$$

Luego  $\varphi'$  puede ser expresada de la forma

$$\varphi' = \left( \begin{array}{c|c|c} \varphi & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

donde 1 es la matriz identidad de  $p \times p$ . Debemos ver que  $I_j \varphi = I_{j+p} \varphi'$  para todo  $j$ . Es claro que  $I_j \varphi \subseteq I_{j+p} \varphi'$ . Veamos la otra contención. Sea  $m'$  un menor de tamaño  $j+p$  de  $\varphi'$ . Notar que  $m' = m$ , donde  $m$  es un menor de tamaño  $i$  de  $\varphi$  con  $i \geq j$ . Luego  $I_{j+p} \varphi' \subseteq I_i \varphi' \subseteq I_j \varphi'$ .  $\square$

Finalmente estamos en condiciones de definir los Ideales de Fitting.

**Definición 25.** Sea  $M$  un  $R$ -módulo finitamente generado definimos el  $i$ -ésimo Ideal de Fitting de  $M$  como

$$\text{Fitt}_i(M) = I_{r-i} \varphi,$$

donde  $\varphi: F \rightarrow G$  es cualquier presentación libre finitamente generada de  $M$  y  $r$  es el rango de  $G$ .

Veamos a continuación algunas propiedades de los Ideales de Fitting. En primer lugar notemos que por la Observación 11 tenemos la siguiente cadena de inclusiones

$$\text{Fitt}_0(M) \subset \text{Fitt}_1(M) \subset \dots \subset \text{Fitt}_r(M) = R. \quad (3.1)$$

Además los Ideales de Fitting conmutan con el cambio de base.

**Lema 17.** Para todo morfismo de anillos  $R \rightarrow S$ ,

$$\text{Fitt}_j(M \otimes_R S) = (\text{Fitt}_j M)S.$$

*Demostración.* Sea

$$F \xrightarrow{\varphi} G \rightarrow M \rightarrow 0$$

una presentación libre de  $M$ . Dado que el producto tensorial es exacto a derecha, tensorizando con  $S$  tenemos que

$$F \otimes_R S \xrightarrow{\varphi \otimes 1} G \otimes_R S \rightarrow M \otimes_R S \rightarrow 0$$

es una presentación libre de  $M \otimes_R S$ . Observemos que tomando bases  $B_1$  de  $F$  y  $B_2$  de  $G$  como módulos sobre  $R$ , si las vemos dentro de  $S$ ,  $B_1$  y  $B_2$  son bases de  $F$  y  $G$  respectivamente como módulos sobre  $S$ . La afirmación sale como consecuencia de que en estas bases los morfismos  $\varphi$  y  $\varphi \otimes 1$  quedan representados por la misma matriz  $M$ , cuyas entradas son elementos del anillo  $R$ , y de que los Ideales de Fitting no dependen de la presentación ni de las bases elegidas.  $\square$

A continuación vemos que el Ideal de Fitting  $\text{Fitt}_j(M)$  mide la obstrucción para generar  $M$  con  $j$  elementos.

**Proposición 17.** *Sean  $(R, p)$  anillo local y  $M$  un  $R$ -módulo. Entonces  $M$  puede ser generado por  $j$  elementos si y sólo si  $\text{Fitt}_j M = R$ .*

*Demostración.* Sea  $\varphi: F \rightarrow G$  una presentación minimal, o sea  $M = \text{coker } \varphi$  y cualquier matriz representando a  $\varphi$  tiene todas sus entradas en  $p$ . Sea  $r = \text{rg}(G)$ , notar cualquier conjunto minimal de generadores de  $M$  tiene cardinal  $r$ . Calculando  $\text{Fitt}_j(M)$ , vemos que  $\text{Fitt}_j(M) \subseteq p$  si y sólo si  $j < r$ , ya que tomamos una resolución minimal de  $M$ . Luego  $\text{Fitt}_j(M) = R$  si y sólo si  $j \geq r$  y esto ocurre si y sólo si  $M$  puede ser generado por  $j$  elementos.  $\square$

**Corolario 8.** *Dados  $R$  un anillo y  $M$  un  $R$ -módulo*

$$V(\text{Fitt}_j M) = \{q \in \text{Spec } R \mid M_q \text{ no puede ser generado por } j \text{ elementos}\}.$$

*Demostración.* Sea  $q \in \text{Spec } R$ . Localizamos en  $q$ , en el anillo local  $(R_q, q)$  podemos usar la proposición anterior. Tenemos que  $M_q$  no puede ser generado por  $j$  elementos si y sólo si  $\text{Fitt}_j M_q \subseteq q$ . Pero  $\text{Fitt}_j M_q = \text{Fitt}_j(R_q \otimes_R M) = (\text{Fitt}_j M)R_q \subseteq q$  si y sólo si  $\text{Fitt}_j M \subseteq q$  si y sólo si  $q \in V(\text{Fitt}_j M)$ .  $\square$

Necesitaremos la siguiente proposición cuando probemos las propiedades de las Matrices de Representación en el Capítulo 4. Lo más importante que de ella se desprende es que el anulador de  $M$  y el Ideal de Fitting inicial  $\text{Fitt}_0 M$  tienen el mismo radical, como se menciona en la Observación 12 más abajo.

**Proposición 18.** *Para cualquier  $R$ -módulo  $M$  valen:*

1.  $\text{Fitt}_0 M \subset \text{Ann } M$ .
2. Para todo  $j > 0$  tenemos  $(\text{Ann } M) \text{Fitt}_j M \subset \text{Fitt}_{j-1} M$ . Y si  $M$  puede ser generado con  $n$  elementos, entonces  $(\text{Ann } M)^n \subset \text{Fitt}_0 M$ .

*Demostración.* Sea  $\varphi: F \rightarrow R^n$  una presentación de  $M$ .

1.  $\text{Fitt}_0 M = I_n \varphi$ . Si  $\varphi'$  es una  $n \times n$  submatriz de  $\varphi$ , entonces  $M$  es isomorfo a  $M' = \text{coker } \varphi'$ , y  $\text{Ann } M' \subseteq \text{Ann } M$ . Así que basta considerar el caso  $G = R^n$  y  $\varphi$  matriz cuadrada. Sea  $\psi$  la matriz de cofactores de  $\varphi$  y notemos  $d = \det(\varphi)$ . Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} R^n & \xrightarrow{\varphi} & R^n & \xrightarrow{f} & M & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow \psi & \downarrow d1_{R^n} & & \downarrow d1_M & & \\ R^n & \xrightarrow{\varphi} & R^n & \xrightarrow{f} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Sea  $a \in M$ , como  $f$  es epimorfismo existe  $b \in R^n$  tal que  $f(b) = a$ . Tenemos  $da = df(b) = f\varphi\psi(b) = 0$ , ya que  $f\varphi = 0$ . Luego  $d1_M = 0$ , por lo que  $\text{Fitt}_0 M \subset \text{Ann } M$ .

2. Si  $a \in \text{Ann } M$  y  $\varphi'$  es una  $(j-1) \times (j-1)$  submatriz de  $\varphi$  con  $j-1 < n$ , debemos ver que  $a \cdot \det(\varphi') \in I_j(\varphi)$ . Podemos armarnos una nueva presentación de

$M$  de la forma  $\varphi + a1_{R^n}: G \oplus R^n \rightarrow R^n$ , donde  $a1_{R^n}: R^n \rightarrow R^n$  es la multiplicación por  $a$ . Sea  $r = \text{rg}(G)$ , en términos de matrices  $\varphi + a1_{R^n}$  está representada por una  $n \times (n+r)$  matriz de la forma

$$\varphi + a1_{R^n} = \left( \begin{array}{c|c|ccc} \varphi' & & & & a \\ \hline & & & & a \\ \hline & & \varphi & & a \\ \hline & & & & a \end{array} \right).$$

Sea  $\varphi''$  la submatriz de  $\varphi + a1_{R^n}$  que se obtiene tomando  $\varphi'$  y una fila que no está en  $\varphi'$  y una columna de  $a1_{R^n}$ . Tenemos  $\varphi'' = \varphi' \oplus a$ , luego  $\det(\varphi'') = a \det(\varphi')$ . Por el lema de Fitting  $\det(\varphi'') \in I_j(\varphi + a1_{R^n}) = I_j(\varphi)$ , que es lo que queríamos ver. Para la segunda parte de la afirmación, notemos que  $\text{Fitt}_n M = R$ . Iterando obtenemos

$$\begin{aligned} (\text{Ann } M)R &\subseteq \text{Fitt}_{n-1} M, \\ (\text{Ann } M)^2 &\subseteq (\text{Ann } M) \text{Fitt}_{n-1} M \subseteq \text{Fitt}_{n-2} M, \\ &\vdots \\ (\text{Ann } M)^n &\subseteq (\text{Ann } M) \text{Fitt}_1 M \subseteq \text{Fitt}_0 M. \end{aligned}$$

□

**Observación 12.** En particular la Proposición 18 nos dice que si  $M$  es finitamente generado, entonces

$$(\text{Ann } M)^n \subseteq \text{Fitt}_0 M \subset \text{Ann } M,$$

para algún  $n$ . O sea que el Ideal de Fitting inicial y el anulador de  $M$  tienen el mismo radical. Luego  $V(\text{Ann } M)$  y  $V(\text{Fitt}_0 M)$  coinciden como conjuntos, aunque no como esquemas. Como veremos en la Observación 14 del próximo capítulo, esto nos permite dotar a la imagen de  $\phi$  de dos estructuras de esquema distintas: el esquema proyectivo definido por el ideal  $\text{Fitt}_0 M$  que llamamos imagen de Fitting de  $\phi$ , y una segunda en la que no haremos foco, dada por el ideal  $\text{Ann } M$  y conocida como scheme-theoretic image.



# Capítulo 4

## Superficies parametrizadas

En este capítulo, que es el central del trabajo, utilizamos el complejo de aproximación de ciclos definido en el Capítulo 2 para construir las Matrices de Representación y explicamos sus principales características. Luego calculamos los Ideales de Fitting de la parametrización. Utilizamos estos ideales, que fueron definidos en el Capítulo 3, para dar una solución al problema de implicitación, encontrar los puntos múltiples de la superficie o introducidos por la parametrización y caracterizar el polinomio de Hilbert de las fibras. Por último discutimos brevemente algunas aplicaciones adicionales de las Matrices de Representación y mostrando un ejemplo de como pueden ser usadas para calcular preimágenes de puntos de  $\mathbb{P}^3$  vía la parametrización  $\phi$ .

### 4.1. Matrices de representación

En esta sección explicamos la construcción de las Matrices de Representación y presentamos sus principales características.

Sean  $k$  un cuerpo,  $S := k[s_0, s_1, s_2]$  y  $R := k[x_0, x_1, x_2, x_3]$  los anillos que definen a  $\mathbb{P}_k^2$  y  $\mathbb{P}_k^3$  respectivamente. Tenemos un mapa racional  $\phi : \mathbb{P}_k^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^3$  dado por polinomios  $f_0, f_1, f_2, f_3$  en las variables  $s_0, s_1$  y  $s_2$  homogéneos de grado  $d$ . Notemos  $\mathcal{S}$  a la clausura Zariski de la imagen de  $\phi$ . Sea  $I = (f_0, f_1, f_2, f_3) \subset S_d$  el ideal de puntos base de la aplicación racional  $\phi$ . Por cuestiones técnicas que explicamos más adelante necesitamos que se cumplan las siguientes condiciones:

- $\mathcal{S}$  es una superficie en  $\mathbb{P}_k^3$ .
  - $\phi$  es un mapa birracional sobreyectivo en  $\mathcal{S}$ .
  - $V(I)$  es un conjunto finito y localmente una intersección completa.
- }
- (H)

Antes de seguir recordemos que quiere decir que un ideal  $I$ , o el esquema definido por  $I$ , sea localmente una intersección (casi) completa.

**Definición 26.** Dados  $R$  un anillo Noetheriano,  $I \subset R$  un ideal y  $\mathfrak{p} \in V(I)$  un punto, decimos que  $I$  es *localmente una intersección completa en  $\mathfrak{p}$*  si  $I_{\mathfrak{p}} \subset R_{\mathfrak{p}}$  es una intersección completa. Esto es, si  $I_{\mathfrak{p}}$  puede ser generado por tantos elementos como

su codimensión. Si necesitamos un elemento más que su codimensión para generar  $I_{\mathfrak{p}}$  decimos que  $I$  es *localmente una intersección casi completa en  $\mathfrak{p}$* . Si para todo punto  $\mathfrak{p} \in V(I)$ ,  $I$  es localmente una intersección (casi) completa en  $\mathfrak{p}$  decimos que el esquema  $V(I)$  es localmente una intersección (casi) completa.

Por ser un mapa racional la parametrización  $\phi$  tiene puntos base, es decir lugares donde no está definido. Como se mencionó en la introducción esto genera problemas algebraicos que queremos evitar, por ejemplo ninguna de las herramientas clásicas desarrolladas por Teissier et al. en [Tei77], [Pie78], [MP89], [KLU92] y [KLU96] puede aplicarse (ver [BBC14, Sección 5]), los complejos de aproximación no necesariamente son acíclicos, la imagen de Fitting y la “scheme-theoretic image” (ver Observación 14 más abajo) no coinciden como conjuntos con la clausura Zariski de la imagen de  $\phi$ , entre otros. Para evitar estas dificultades reemplazamos  $\phi$  por una aplicación definida en todas partes, es decir un morfismo de esquemas proyectivos, de manera que no perdamos información sobre la geometría de la imagen de  $\phi$ . Consideramos  $\Gamma \subset \mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^3$  el gráfico de  $\phi$  y miramos la proyección  $\pi_2: \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_k^3$  que sí es un morfismo. El álgebra que define como esquema proyectivo al gráfico  $\Gamma$  es el Álgebra de Rees del ideal de puntos base  $I$ , que notamos  $\text{Rees}_S(I)$ .

Esto nos lleva a estudiar  $\text{Rees}_S(I)$ , para lo que sería ideal tener una resolución libre finita de dicha álgebra, o por lo menos una presentación. Aquí nos enfrentamos con otro problema: el Álgebra de Rees no admite resoluciones de tipo universal. Para sortear esta dificultad lo que propusieron Herzog, Simis y Vasconcelos en [SV81], [HSV82] y [HSV83] es reemplazar dicha álgebra por el Álgebra Simétrica de  $I$ . Notamos  $\text{Sym}_S(I)$  a esta última álgebra. Dado que bajo nuestras hipótesis el Álgebra de Rees es proyectivamente isomorfa al Álgebra Simétrica, como mencionamos en el Capítulo 2, podemos usar esta última para aproximar a  $\text{Rees}_S(I)$ . Lo que hacemos entonces es utilizar el complejo de aproximación de ciclos (2.2) definido en el Capítulo 2

$$\mathcal{Z}_{\bullet}: 0 \rightarrow \mathcal{Z}_4(-4) \rightarrow \mathcal{Z}_3(-3) \rightarrow \mathcal{Z}_2(-2) \rightarrow \mathcal{Z}_1(-1) \xrightarrow{v_1} \mathcal{Z}_0 \rightarrow 0.$$

Como mencionamos en la Sección 2.2 cuando el lugar de puntos base  $V(I)$  es localmente una intersección casi completa, este complejo es una resolución libre finita del Álgebra Simétrica  $\text{Sym}_S(I)$ . Teniendo esto en cuenta, en  $(\mathcal{H})$  podríamos pedir que  $V(I)$  sea una intersección *casi* completa. Sin embargo esto genera problemas con los Ideales de Fitting. Por ejemplo en la descomposición primaria de dichos ideales aparece lo que en [BCJ09, Sección 2] llaman “factor extraño” (ver Capítulo 5, Ejemplo 5.4). En este trabajo nos ocupamos de estos factores extraños, para más información consultar [BCJ09]. Nos limitamos a pedir que  $V(I)$  sea localmente una intersección completa, como hace el Paper [BBC14] en el que está basada esta tesis.

El complejo  $\mathcal{Z}_{\bullet}$  es un complejo bigraduado de  $S[x_0, x_1, x_2, x_3]$ -módulos. Al igual que en el Capítulo 2 usamos  $(-)$  para notar el desplazamiento en la graduación correspondiente a las variables  $x_0, x_1, x_2, x_3$  y  $[-]$  para el desplazamiento correspondiente a las variables  $s_0, s_1, s_2$ . Tenemos

$$\mathcal{Z}_1 = \{(g_0, g_1, g_2, g_3) \in S^4 \mid g_0 f_0 + g_1 f_2 + g_2 f_2 + g_3 f_3 = 0\}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1(-1) &\xrightarrow{v_1} \mathcal{Z}_0 = S[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ (g_0, g_1, g_2, g_3) &\mapsto g_0x_0 + g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3. \end{aligned}$$

Tomamos grado en las variables  $s_0, s_1, s_2$  y pasamos a trabajar con  $R$ -módulos de rango finito. Elegimos bases  $B_1$  de  $(\mathcal{Z}_1)_\nu$  y  $B_2$  de  $(\mathcal{Z}_0)_\nu = R[s_0, s_1, s_2]_\nu$  y notamos  $M(\phi)_\nu$  a la matriz en esas bases del primer morfismo  $v_1$  en grado  $\nu$

$$(\mathcal{Z}_1)_\nu \xrightarrow{v_{1\nu}} (\mathcal{Z}_0)_\nu, \quad (4.1)$$

es decir

$$M(\phi)_\nu = |v_{1\nu}|_{B_1 B_2}.$$

Para aliviar la notación, en (4.1) dejamos de escribir los desplazamientos en las graduaciones.

Sea  $\nu_0 = 2d - 2$ . A menos que se indique lo contrario en este trabajo siempre tomamos  $\nu \geq \nu_0$ . En [BBC14] se ve que en algunos casos las Matrices de Representación tienen las propiedades esperadas aún para valores menores de  $\nu$ . Sin embargo esto involucra cálculos relacionados con la regularidad de Castelnuovo-Mumford a los que no nos referiremos en esta tesis. Para más detalles de sobre este tema ver [BC05].

Finamente estamos en condiciones de definir las Matrices de Representación, que fueron introducidas por primera vez por Busé y Dohm en [BD07].

**Definición 27.** Asumiendo que se cumplen las condiciones  $(\mathcal{H})$ , que  $\nu \geq \nu_0$  y fijando bases de  $(\mathcal{Z}_1)_\nu$  y de  $(\mathcal{Z}_0)_\nu$ , la matriz  $M(\phi)_\nu$  del morfismo graduado de  $R$ -módulos  $(\mathcal{Z}_1)_\nu \xrightarrow{v_{1\nu}} (\mathcal{Z}_0)_\nu$  en estas bases se llama una *Matriz de Representación* de  $\phi$ .

**Observación 13.** Por más que las entradas de las Matrices de Representación  $M(\phi)_\nu$  dependen de las bases de  $(\mathcal{Z}_1)_\nu$  y de  $(\mathcal{Z}_0)_\nu$  elegidas, estamos interesados en los Ideales de Fitting y en otras propiedades relacionadas con los determinantes de estas matrices que no dependen dichas bases. Por esta razón no nos preocupamos por la elección de las mismas.

Veamos a continuación un pequeño ejemplo para ilustrar la construcción de las Matrices de Representación. Para simplificar las cuentas elegimos una curva en vez de una superficie, pero el procedimiento es el mismo.

**Ejemplo 12.** Consideremos la siguiente parametrización de la parábola.

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{P}_k^1 &\rightarrow \mathbb{P}_k^2 \\ (s_0 : s_1) &\mapsto (s_0^2 : s_0s_1 : s_1^2). \end{aligned}$$

En este caso  $d = 2$  y  $\nu = 2$ . Tomemos

$$\begin{aligned} S[-2]^3 &\xrightarrow{d_1} S \\ (g_0, g_1, g_2) &\mapsto g_0s_0^2 + g_1s_0s_1 + g_2s_1^2 \end{aligned}$$

el último morfismo del complejo de Koszul  $K(I)$  que aparece en (2.1). Sea  $Z_1 = \ker d_1$ . Calculamos una base de  $(Z_1[2])_2 \subset S_2^3$

$$B_1 = \{(-s_0s_1, s_0^2, 0), (-s_1^2, s_0s_1, 0), (0, -s_0s_1, s_0^2), (0, -s_1^2, s_0s_1)\},$$

y una base de  $S_2$

$$B_2 = \{s_0^2, s_0s_1, s_1^2\}.$$

Miramos a  $B_1$  y  $B_2$  dentro de  $R[s_0, s_1, s_2]$ , son bases de los  $R$ -módulos libres  $(Z_1)_2$  y  $(Z_0)_2$ . Calculamos la matriz  $M(\varphi)_2 = |v_{12}|_{B_1B_2}$  del morfismo  $R$ -lineal (en grado 2) dado por la matriz  $v_1 = (x_0, x_1, x_2)$  en estas bases,

$$\begin{aligned} (Z_1(-1))_2 &\xrightarrow{v_{12}} (Z_0)_2 \\ (-s_0s_1, s_0^2, 0) &\mapsto x_1s_0^2 - x_0s_0s_1 \\ (-s_1^2, s_0s_1, 0) &\mapsto x_1s_0s_1 - x_0s_1^2 \\ (0, -s_0s_1, s_0^2) &\mapsto x_2s_0^2 - x_1s_0s_1 \\ (0, -s_1^2, s_0s_1) &\mapsto x_2s_0s_1 - x_1s_1^2. \end{aligned}$$

Tenemos

$$M(\varphi)_2 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x_2 & 0 \\ -x_0 & x_1 & -x_1 & x_2 \\ 0 & -x_0 & 0 & -x_1 \end{pmatrix}.$$

Para terminar con el ejemplo exponemos el código en Macaulay2 [GS] utilizado para computar dicha matriz.

```
>S=QQ[s0,s1];
>f0=s0^2; f1=s0*s1; f2=s1^2;
>d=(degree f0)_0; nu=2*(d-1);
>F=matrix{{f0,f1,f2}};
>Z1=ker F;
>Z1nu=super basis (nu+d,Z1);
>R=QQ[x0,x1,x2];
>A=R[s0,s1];
>Snu=substitute(basis(nu,S),A);
>G=matrix{{x0,x1,x2}};
>ImGnu=G*substitute(Z1nu,A);
>(m,M)=coefficients(ImGnu,Monomials=>Snu);
>M -- Ésta es la Matriz de Representación en grado nu.
```

A lo largo de todo el trabajo asumiremos que la parametrización racional  $\phi$  dada cumple las condiciones  $(\mathcal{H})$ . A continuación enumeramos las principales características de las Matrices de Representación  $M(\phi)_\nu$ , donde  $\nu \geq \nu_0$ .

**Proposición 19.** *Dado  $\nu \geq \nu_0$ , toda  $M(\phi)_\nu$  Matriz de Representación cumple:*

1. *Sus entradas son formas lineales en  $R = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ .*
2. *Tiene  $\binom{\nu+2}{2}$  filas y por lo menos la misma cantidad de columnas.*

3. Tiene rango maximal  $\binom{\nu+2}{2}$  en el punto genérico de  $\mathbb{P}_k^3$ , es decir

$$\operatorname{rg} [M(\phi)_\nu \otimes_R \operatorname{Frac}(R)] = \binom{\nu+2}{2}.$$

4. Al evaluar  $M(\phi)_\nu$  en un punto  $P \in \mathbb{P}^3$ , su rango baja si y sólo si  $P \in \mathcal{S}$ .

*Demostración.* 1. Viendo a  $(\mathcal{Z}_1)_\nu \subseteq (R \otimes_k S^4)_\nu$  y  $(\mathcal{Z}_0)_\nu = R \otimes_k S$  como  $R$ -módulos,  $M(\phi)_\nu$  resulta ser un morfismo  $R$ -lineal, luego sus coeficientes van a estar en  $R$ . Por otro lado mirando a  $R \otimes_k S$  como  $k$ -álgebra bigraduada,  $M(\phi)_\nu$  tiene grado 1 en las variables  $x_0, x_1, x_2, x_3 \in R$ , por lo que sus entradas tienen que ser polinomios homogéneos de grado 1 en  $R[x_0, x_1, x_2, x_3]$ .

2. Tanto  $(\mathcal{Z}_0)_\nu$  como  $(\mathcal{Z}_1)_\nu$  son  $R$ -módulos finitamente generados. La cantidad de filas, respectivamente columnas, de  $M(\phi)$  es igual al rango de  $(\mathcal{Z}_0)_\nu$ , respectivamente de  $(\mathcal{Z}_1)_\nu$ , como  $R$ -módulos. Veamos primero que  $\operatorname{rg}_R (\mathcal{Z}_0)_\nu = \binom{\nu+2}{2}$ . Observemos que  $\mathcal{Z}_0 = R \otimes_k S$ , luego  $(\mathcal{Z}_0)_\nu = (R \otimes_k S)_\nu = R \otimes_k S_\nu$ . Sea  $\{u_1, \dots, u_r\} \subset S_\nu$  una base como  $k$ -espacio vectorial, tenemos que  $\{1 \otimes u_1, \dots, 1 \otimes u_r\} \subset R \otimes_k S_\nu$  es base como  $R$ -módulos. Luego  $\operatorname{rg}_R (\mathcal{Z}_0)_\nu = \dim_k S_\nu = \binom{\nu+2}{2}$ .

Para calcular  $\operatorname{rg}_R (\mathcal{Z}_1)_\nu$  debemos tener un poco de cuidado con los shifts.

$$\begin{aligned} \left( S^4[-d] \xrightarrow{d_1} S \right)_\nu &= \left( S^4[-d] \right)_\nu \xrightarrow{d_{1\nu}} S_\nu \\ &= S_{\nu-d}^4 \xrightarrow{d_{1\nu}} S_\nu, \end{aligned}$$

por lo que

$$(\mathcal{Z}_1)_\nu = (\ker d_1)_\nu = \ker (d_{1\nu}) \subseteq S_{\nu-d}^4.$$

Luego de tensorizar con  $R$  y tomar grado  $\nu$  en las variables de  $s_0, s_1, s_2$  obtenemos

$$\left( \underbrace{R \otimes_k Z_1[d](-1)}_{\mathcal{Z}_1} \xrightarrow{v_1} \underbrace{R \otimes_k S}_{\mathcal{Z}_0} \right)_\nu.$$

Recordemos que estamos usando  $[-]$  para notar el shift en las variables  $s_0, s_1, s_2$  y  $(-)$  para el shift en  $x_0, x_1, x_2, x_3$ . Al igual que antes si  $\{u_1, \dots, u_s\}$  es base de  $(Z_1[d])_\nu$  como  $k$ -espacio vectorial, entonces  $\{1 \otimes u_1, \dots, 1 \otimes u_s\}$  es base de  $(R \otimes_k Z_1[d](-1))_\nu$  como  $R$ -módulo libre. Además  $Z_1[d]_\nu = Z_{1\nu+d} = \ker (d_{1\nu+d})$ . Luego si  $s = \dim_k \ker (d_{1\nu+d})$ , basta ver que  $s \geq \binom{\nu+2}{2}$ .

Tenemos el morfismo de  $k$ -espacios vectoriales

$$S_\nu^4 \xrightarrow{d_{1\nu+d}} S_{\nu+d}.$$

Por el teorema de la dimensión

$$\dim(\ker d_{1\nu+d}) + \dim(\operatorname{im} d_{1\nu+d}) = 4 \binom{\nu+2}{2},$$

luego

$$s = 4 \binom{\nu + 2}{2} - \dim(\text{im } d_{1\nu+d}).$$

Además

$$\dim(\text{im } d_{1\nu+d}) \leq \binom{\nu + d + 2}{2},$$

por lo que

$$4 \binom{\nu + 2}{2} - \binom{\nu + d + 2}{2} \leq s.$$

Luego alcanza con ver que

$$\binom{\nu + 2}{2} \leq 4 \binom{\nu + 2}{2} - \binom{\nu + d + 2}{2}.$$

Que es equivalente a

$$(\nu + d + 2)(\nu + d + 1) \leq 3(\nu + 2)(\nu + 1). \quad (4.2)$$

Para ver que vale (4.2) usamos que

$$\begin{aligned} 2d - 2 = \nu_0 &\leq \nu \\ \iff d &\leq \frac{\nu + 2}{2} \\ \iff \nu + d + 2 &\leq \frac{3}{2}(\nu + 2). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} (\nu + d + 2)(\nu + d + 1) &\leq \frac{3}{2}(\nu + 2)\left(\frac{3}{2}(\nu + 2) - 1\right) \\ &= \frac{3}{2}(\nu + 2)\left(\frac{3}{2}(\nu + 1) + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{9}{4}(\nu + 2)(\nu + 1) + \frac{3}{4}(\nu + 2) \\ &\leq \frac{9}{4}(\nu + 2)(\nu + 1) + \frac{3}{4}(\nu + 2)(\nu + 1). \end{aligned}$$

En la última desigualdad usamos que  $1 \leq \nu + 1$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} (\nu + d + 2)(\nu + d + 1) &\leq \frac{12}{4}(\nu + 2)(\nu + 1) \\ &= 3(\nu + 2)(\nu + 1), \end{aligned}$$

como queríamos ver. □

Observemos que el punto 4. de la Proposición 19 nos da una solución al problema de implicitación. Supongamos que tenemos un punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_k^3$  y queremos decidir fácilmente si pertenece a la superficie  $\mathcal{S}$  o no. Si conocemos la ecuación implícita de  $\mathcal{S}$ , que es única a menos de multiplicar por escalares, la tarea es fácil. Basta evaluar la ecuación implícita en  $\mathbf{p}$  y ver si se anula o no. Si en vez de eso tenemos una Matriz de Representación  $M(\phi)_\nu$  lo que tenemos que hacer es evaluarla en  $\mathbf{p}$  y calcular su rango. Tenemos que

$$\mathbf{p} \in \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rg}[M(\phi)_\nu(\mathbf{p})] < \binom{\nu+2}{2}.$$

Como veremos a continuación las matrices contienen más información que la ecuación implícita. Además calcularlas no es muy costoso desde el punto de vista computacional, mientras que el pasaje de las Matrices de Representación a la ecuación implícita sí lo es. Por estas razones muchas veces las tomaremos directamente como representación implícita, sin necesidad de pasar por la ecuación.

Mirando con cuidado el punto 4 de la Proposición 19 notamos el vínculo ya mencionado en la Observación 12 del capítulo anterior. Los conjuntos subyacentes de los esquemas definidos por el Ideal de Fitting inicial  $\text{Fitt}_0[\text{Sym}_S(I)_\nu]$  y el anulador del Álgebra Simétrica  $\text{Ann}[\text{Sym}_S(I)_\nu]$  coinciden, aunque no definen el mismo esquema. La estructura de los Ideales de Fitting es más rica, como explicamos en la siguiente sección.

## 4.2. Ideales de Fitting

En la Sección 4.1 construimos las Matrices de Representación  $M(\phi)_\nu$  y vimos que la superficie  $\mathcal{S}$  está soportada sobre el ideal  $\text{Fitt}_0[\text{Sym}_S(I)_\nu] \subset R$ . Así dimos un método para determinar si un punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{P}^3$  pertenece a  $\mathcal{S}$  y una solución al problema de implicitación. Ahora atacamos el problema de encontrar los puntos múltiples de  $\mathcal{S}$ , o los introducidos por la parametrización  $\phi$ . Para eso utilizamos los otros Ideales de Fitting  $\text{Fitt}_i[\text{Sym}_S(I)_\nu]$  con  $1 \leq i \leq \binom{\nu+2}{2}$ .

Para abreviar notemos  $\mathfrak{F}_\nu^i(\phi) := \text{Fitt}_i[\text{Sym}_S(I)_\nu]$  al  $i$ -ésimo Ideal de Fitting de la parte de grado  $\nu$  del Álgebra Simétrica del ideal de puntos base  $I$ . Recordemos que  $\mathfrak{F}_\nu^i(\phi) \subset R$  es el ideal generado por los menores de tamaño  $\binom{\nu+2}{2} - i$  de cualquier Matriz de Representación  $M(\phi)_\nu$ . Como vimos en (3.1) desarrollando el determinante en filas o columnas tenemos una cadena de contenciones  $\mathfrak{F}_\nu^i(\phi) \subset \mathfrak{F}_\nu^{i+1}(\phi)$  para todo  $i$ , que en términos geométricos definen una estratificación

$$\mathfrak{F}_\nu^0(\phi) \subset \mathfrak{F}_\nu^1(\phi) \subset \mathfrak{F}_\nu^2(\phi) \subset \cdots \subset \mathfrak{F}_\nu^r(\phi) = R,$$

donde  $r = \binom{\nu+2}{2}$ .

**Observación 14.** La Proposición 19 de la sección anterior nos dice que para todo  $\nu \geq \nu_0$  la superficie  $\mathcal{S}$  está soportada sobre el ideal  $\mathfrak{F}_\nu^0(\phi) = \text{Fitt}_0(\text{Sym}_S(I)_\nu)$ , por

lo que este último nos da una estructura de esquema de la clausura de la imagen de  $\phi$ . Siguiendo [Tei77] y [EH00, V.1.3] en el Paper [BBC14] se la llama *imagen de Fitting* de  $\phi$ . Como mencionamos en la Observación 12 del capítulo anterior existe otra posible definición de imagen de  $\phi$  como esquema, la “scheme-theoretic image”, que es el esquema definido por el  $\text{Ann}_R[\text{Sym}_S(I)_\nu]$  con  $\nu \geq \nu_0$ . Con respecto a esta última la imagen de Fitting tiene algunas ventajas, por ejemplo es estable por cambios de base, mientras que la scheme-theoretic image no lo es.

**Observación 15.** Notemos que por definición los ideales  $\text{Fitt}_i(\text{Sym}_S(I)_\nu)$  dependen del entero  $\nu$ , mientras que  $\text{Ann}_R(\text{Sym}_S(I)_\nu) = \ker(\phi^\#)$  para todo  $\nu \geq \nu_0$  (ver [BJ03, Proposición 5.1] y [BC05, Teorema 4.1]), donde  $\phi^\#: R \rightarrow S$  es el morfismo de anillos inducido por  $\phi$ , que manda  $x_i$  en  $f_i(s)$  para  $0 \leq i \leq 3$ , y  $\ker(\phi^\#)$  es la definición usual de la imagen de  $\phi$ .

Dado un punto  $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_k^3$  queremos estudiar la fibra  $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ . Puede ser vacía, un conjunto finito de puntos (tiene dimensión 0 como esquema) o una curva (dimensión 1). En el Teorema 8 más abajo vemos que no puede haber fibras de dimensión 2.

Como mencionamos en la sección anterior, para evitar los problemas algebraicos que genera la presencia de puntos base de la aplicación racional  $\phi$ , reemplazamos su imagen por la de  $\pi_2$  que se figura en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \hookrightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{P}^3}^2 \\ \pi_1 \downarrow & \searrow \pi_2 & \\ \mathbb{P}_k^2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}_k^3 \\ & \phi & \end{array}, \quad (4.3)$$

donde todos los morfismos son canónicos. En el diagrama (4.3) se ve que  $\Gamma$  está incluido en un producto cartesiano, lo que algebraicamente significa que el álgebra asociada a  $\Gamma$  hereda la bigraduación de  $\mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^3$ . La construcción geométrica para pasar de un anillo bigraduado a un producto cartesiano de esquemas proyectivos es conocida como biproyectivización. Entendiendo en que caso las álgebras con las que trabajamos son graduadas o bigraduadas usaremos la notación Proj para referirnos tanto al Proj como al Biproj. Habiendo hecho esta aclaración, en el diagrama (4.3): el gráfico de  $\phi$  es el esquema proyectivo definido por el Álgebra Simétrica de  $I$

$$\Gamma = \text{Proj}(\text{Sym}_S(I)),$$

estamos notando con  $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^3}^2$  al producto fibrado

$$\mathbb{P}_k^2 \times_{\text{Spec } k} \mathbb{P}_k^3 = \text{Proj}(S \otimes_k R),$$

la inclusión de  $\Gamma$  en  $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^3}^2$  es el morfismo de esquemas proyectivos definido por la proyección de  $S \otimes_k R$  en  $\text{Sym}_S(I)$  y tanto  $\pi_1$  como  $\pi_2$  son los morfismos de esquemas proyectivos definidos por las inclusiones de  $S$  y  $R$  en  $\text{Sym}_S(I)$  respectivamente. La idea entonces es mirar

$$\pi_2: \text{Proj}(\text{Sym}_S(I)) = \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_k^3 = \text{Proj}(R),$$

que sí es un morfismo de esquemas proyectivos y estudiar

$$\pi_2^{-1}(\mathfrak{p}) = \text{Proj}[\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})] \subset \mathbb{P}_{\kappa(\mathfrak{p})}^2.$$

Para eso calcularemos su polinomio de Hilbert.

Sea

$$N_\nu^{\mathfrak{p}} := \dim_{\kappa(\mathfrak{p})}[(\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}))_\nu]$$

la función de Hilbert de la fibra  $\pi_2^{-1}(\mathfrak{p})$ . Para  $\nu$  lo suficientemente grande ( $\nu \geq \text{reg}(\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}))$  la regularidad de Castelnuovo-Mumford de la fibra),  $N_\nu^{\mathfrak{p}}$  coincide con el polinomio de Hilbert de la misma. Por lo tanto en primera instancia nuestro problema se resume en calcular  $N_\nu^{\mathfrak{p}}$ . Para eso usamos el teorema de la dimensión de espacios vectoriales.

Dados  $k$  un cuerpo,  $V$  y  $W$   $k$ -espacios vectoriales de dimensión finita y

$$f: V \rightarrow W$$

un morfismo  $k$ -lineal, notamos

$$\text{corg } f := \dim_k W - \text{rg } f$$

al corango de  $f$ .

**Proposición 20.** *Dada  $M(\phi)_\nu$  una Matriz de Representación y  $\mathfrak{p}$  un punto de  $\mathbb{P}_k^3$ , vale*

$$N_\nu^{\mathfrak{p}} = \text{corg}(M(\phi)_\nu(\mathfrak{p})).$$

*Demostración.* Consideremos nuevamente la última parte de la sucesión exacta (2.2), tensoricemos sobre  $R$  con  $\kappa(\mathfrak{p})$  y miremos en grado  $\nu$  en las variables  $s_0, s_1, s_2$ . Tenemos

$$(\mathcal{Z}_1(-1) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}))_\nu \xrightarrow{M(\phi)_\nu(\mathfrak{p})} (\mathcal{Z}_0 \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}))_\nu \xrightarrow{\pi_\nu} (\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}))_\nu \rightarrow 0,$$

donde  $\text{Sym}_S(I) = \mathcal{Z}_0 / \text{im } v_1$  y todos los morfismos ahora son  $\kappa(\mathfrak{p})$ -lineales. Dado que tensorizar es exacto a derecha, la sucesión continúa siendo exacta. Por el Teorema de la Dimensión tenemos

$$\begin{aligned} \dim_{\kappa(\mathfrak{p})}(\ker \pi_\nu) + \dim_{\kappa(\mathfrak{p})}(\text{im } \pi_\nu) &= \dim_{\kappa(\mathfrak{p})}(\mathcal{Z}_0 \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}))_\nu \\ \text{rg}(M(\phi)_\nu(\mathfrak{p})) + \dim_{\kappa(\mathfrak{p})}(\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}))_\nu &= \binom{\nu + 2}{2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} N_\nu^{\mathfrak{p}} &= \binom{\nu + 2}{2} - \text{rg}(M(\phi)_\nu(\mathfrak{p})) \\ &= \text{corg}(M(\phi)_\nu(\mathfrak{p})). \end{aligned}$$

□

Por lo tanto viendo cuál es el primer Ideal de Fitting de la matriz  $M(\phi)_\nu(\mathfrak{p})$  que no se anula sabremos el corango de  $M(\phi)_\nu(\mathfrak{p})$  y por ende cuánto vale  $N_\nu^{\mathfrak{p}}$ . Eso es esencialmente lo que dice la siguiente proposición.

**Proposición 21.** *Para todo punto  $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(R)$ ,*

$$\mathfrak{F}_\nu^i(\phi) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq i < N_\nu^{\mathfrak{p}} \\ \kappa(\mathfrak{p}) & \text{si } N_\nu^{\mathfrak{p}} \leq i \end{cases}.$$

*Demostración.* En primer lugar, dado que los Ideales de Fitting son estables por cambio de base tenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\nu^i(\phi)_\nu \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}) &= \text{Fitt}_i[(\text{Sym}_S(I))_\nu] \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}) \\ &= \text{Fitt}_i[(\text{Sym}_S(I))_\nu \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})]. \end{aligned}$$

Para cada  $\nu \geq 0$  el  $\kappa(\mathfrak{p})$ -espacio vectorial

$$(\text{Sym}_S(I))_\nu \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}) = (\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}))_\nu$$

tiene dimensión  $N_\nu^{\mathfrak{p}}$ . El resultado sigue de que el  $i$ -ésimo Ideal de Fitting de un  $\kappa(\mathfrak{p})$ -espacio vectorial de dimensión  $N$  es 0 si  $i < N$  y  $\kappa(\mathfrak{p})$  si  $N \leq i$ .  $\square$

**Lema 18.** *Sean  $I \subset R$  un ideal y  $\mathfrak{p} \subset R$  un primo, entonces  $I \otimes_R R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = 0$  si y sólo si  $\mathfrak{p} \in V(I)$ .*

*Demostración.* Primero observemos que

$$\begin{aligned} I \otimes_R R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} &= I \otimes_R (R/\mathfrak{p})_{(\overline{\mathfrak{p}})} \\ &\simeq (I \otimes_R R/\mathfrak{p})_{(\overline{\mathfrak{p}})} \\ &\simeq (I/\mathfrak{p}I)_{(\overline{\mathfrak{p}})}, \end{aligned}$$

Estamos usando el Lema 2, mirando a  $I$  como  $R$ -módulo nos dice que

$$I \otimes_R R/\mathfrak{p} \simeq I/\mathfrak{p}I.$$

Tenemos entonces que  $I \otimes_R R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = 0$  si y sólo si  $(I/\mathfrak{p}I)_{(\overline{\mathfrak{p}})} = 0$  si y sólo si  $I/\mathfrak{p}I = 0$  si y sólo si  $\mathfrak{p} \in V(I)$ .  $\square$

Estamos en condiciones de estudiar la fibra de puntos de  $\mathbb{P}_k^3$ . Comencemos con los lugares cuya fibra es 0-dimensional.

**Teorema 6** (fibras 0-dimensionales). *Sea  $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(R)$ . Si  $\dim(\pi_2^{-1}(\mathfrak{p})) = 0$  entonces para todo  $\nu \geq \nu_0$*

$$\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{F}_\nu^i(\phi)) \iff i \leq \deg(\pi_2^{-1}(\mathfrak{p})) - 1. \quad (4.4)$$

*Demostración.* Dado que la fibra  $\pi_2^{-1}(\mathfrak{p})$  tiene dimensión cero, su polinomio de Hilbert es constante igual a  $d$ , el grado de la fibra. Además para  $\nu \geq \nu_0$  el polinomio y la función de Hilbert de la fibra coinciden. Tenemos entonces que  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{F}_\nu^i(\phi))$  si y sólo si  $\mathfrak{F}_\nu^i(\phi) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}) = 0$ , que por la Proposición 21 es equivalente a  $i + 1 \leq d = \deg(\pi_2^{-1}(\mathfrak{p}))$ .  $\square$

O sea que si la fibra  $\pi_2^{-1}(\mathbf{p})$  consiste en  $d$  puntos, es decir si  $\phi$  “pinta”  $d$  veces al punto  $\mathbf{p}$ , entonces  $\mathbf{p}$  va a aparecer únicamente en  $V(\mathfrak{F}_\nu^0(\phi)), \dots, V(\mathfrak{F}_\nu^{d-1}(\phi))$ .

**Ejemplo 13.** Para entender mejor el Teorema 6 veamos dos ejemplos sencillos. En las Figuras 4.1 y 4.2 más abajo están graficadas en la carta afín ( $x_0 = 1$ ) la parte real de la curva alfa, cuya ecuación implícita es  $x_1^3 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ , y el trifolium, ecuación  $(x_1^2 + x_2^2)^2 + 3x_1^2x_2 - x_2^3 = 0$ . Si bien se trata de curvas y los resultados que venimos viendo hasta ahora son para superficies, nos sirven para ilustrar y sus cuentas son más sencillas.

Ambas tienen como única singularidad el punto  $(1 : 0 : 0)$ , en la curva alfa con multiplicidad 2 y en el trifolium 3.

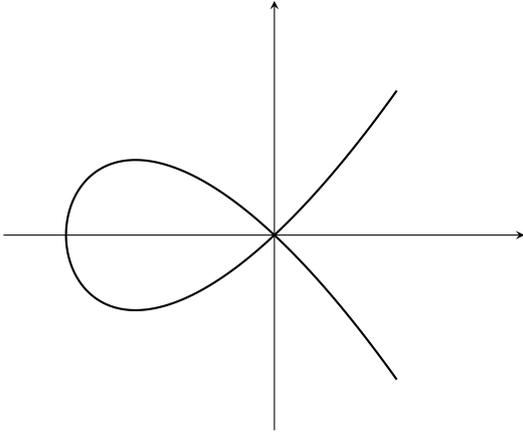


Figura 4.1: Curva alfa

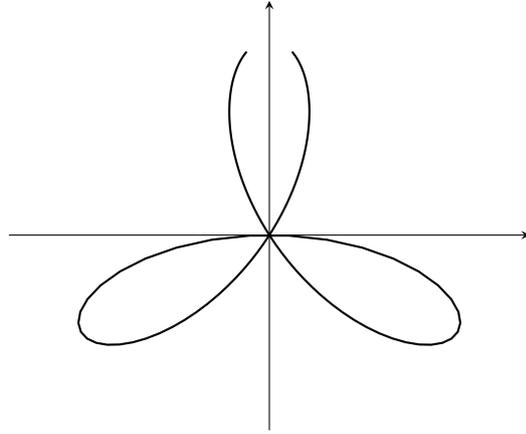


Figura 4.2: Trifolium

Una parametrización de la curva alfa es

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \\ (s_0 : s_1) &\mapsto (s_0^3 : s_0s_1^2 - s_0^3 : s_1^3 - s_0^2s_1). \end{aligned}$$

Observemos que  $\phi$  no tiene puntos base, es un morfismo. Tomamos  $\nu = 4$ . Usando Macaulay2 [GS] calculamos la Matriz de Representación

$$M(\phi)_4 = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 & 0 & x_0 + x_1 & 0 & 0 \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_0 + x_1 & 0 \\ 0 & -x_1 & x_2 & 0 & -x_0 & 0 & x_0 + x_1 \\ 0 & 0 & -x_1 & x_2 & 0 & -x_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 & 0 & 0 & -x_0 \end{pmatrix}.$$

Una descomposición primaria Ideal de Fitting inicial es

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_4^0(\phi) &= (x_0x_1^2 + x_1^3 - x_0x_2^2) \cap (x_1^4, x_2^2, x_0^3 + 3x_0^2x_1 + 3x_0x_1^2 + x_1^3 \\ &\quad , x_0x_1^3x_2, x_0^2x_1^2x_2, x_0^2x_1^3). \end{aligned}$$

La primera parte es la ecuación implícita (homogénea) que estábamos buscando y la segunda está soportada en el origen, es decir es vacía como esquema. Una descomposición primaria del siguiente Ideal de Fitting nos da

$$\mathfrak{F}_4^1(\phi) = (x_1, x_2) \cap (\text{componente soportada en el origen}),$$

cuya única componente relevante es el punto  $(1 : 0 : 0)$ . Por último el Ideal de Fitting  $\mathfrak{F}_4^2(\phi)$  está soportado en el origen. Notemos que según el Teorema 6 esto nos dice que la curva alfa tiene un único punto singular y que la parametrización pasa exactamente 2 veces por dicho punto.

Para el caso del trifoldium debemos tomar  $\nu = 6$ . Es de esperar que como el  $(1 : 0 : 0)$  es un punto triple, el mismo aparezca en  $V(\mathfrak{F}_6^0(\phi))$ ,  $V(\mathfrak{F}_6^1(\phi))$  y  $V(\mathfrak{F}_6^2(\phi))$  únicamente. Tenemos la siguiente parametrización

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \\ (s_0 : s_1) &\mapsto (s_0^4 + 2s_0^2s_1^2 + s_1^4 : s_0s_1^3 - 3s_0^3s_1 : s_1^4 - 3s_0^2s_1^2). \end{aligned}$$

Tampoco tiene puntos base. Calculamos

$$M(\phi)_6 = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3x_0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 2x_1 & 3x_0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 & x_2 & 0 & 0 & -x_0 + x_2 & 2x_1 & 3x_0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 & x_2 & 0 & 0 & -x_0 + x_2 & 2x_1 & 3x_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & x_2 & 0 & 0 & -x_0 + x_2 & 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & -x_0 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Una descomposición primaria del Ideal de Fitting inicial es

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_6^0(\phi) &= (x_1^4 + 3x_0x_1^2x_2 + 2x_1^2x_2^2 - x_0x_2^3 + x_2^4) \cap (x_0^3, x_2^3, x_1^5x_2, x_0x_1^4x_2^2, x_1^6x_2, \\ &\quad x_1^7 - 9x_0^2x_1^3x_2^2, x_0x_1^5x_2 + 3x_0^2x_1^3x_2^2, x_0^2x_1^4x_2, x_0x_1^6, x_0^2x_1^5 + 2x_0^2x_1^3x_2^2). \end{aligned}$$

La primera componente es nuevamente la ecuación implícita (homogénea) que estábamos buscando y la segunda está soportada en el origen. El siguiente Ideal de Fitting es

$$\mathfrak{F}_6^1(\phi) = (x_1^2, x_2^2, x_1x_2) \cap (\text{componente soportada en el origen}),$$

cuya única componente no nula se corresponde con el punto  $(1 : 0 : 0)$ . El próximo es

$$\mathfrak{F}_6^2(\phi) = (x_1, x_2) \cap (\text{componente soportada en el origen}),$$

otra vez contiene al  $(1 : 0 : 0)$ . Por último  $\mathfrak{F}_6^3(\phi)$  está soportado en el origen. Esto es consistente con el hecho de que la curva tiene un único punto singular y que la parametrización pasa exactamente 3 veces por dicho punto.

Veamos ahora que podemos decir sobre los puntos cuya fibra es 1-dimensional. Antes recordemos la definición de los invariantes  $a^i$ ,  $a^*$  y  $\text{reg}(M)$  asociados a un módulo graduado  $M$  sobre el anillo  $S = k[s_0, s_1, s_2]$ , donde  $\mathfrak{m} = (s_0, s_1, s_2)$ :

$$a^i(M) := \sup\{\mu \mid H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{\mu} \neq 0\}, \quad a^*(M) := \max_i\{a^i(M)\},$$

y

$$\text{reg}(M) := \max_i\{a^i(M) + i\}.$$

**Teorema 7** (fibras 1-dimensionales). *Sea  $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(R)$  un punto cerrado  $k$ -racional. Si  $\dim(\pi_2^{-1}(\mathfrak{p})) = 1$  entonces, llamando  $\delta := \deg(\pi_2^{-1}(\mathfrak{p}))$ ,*

$$a^0(\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})) \leq \nu_0 - \delta - 1$$

y

$$\text{reg}(\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})) \leq \max\{\nu_0 - \delta - 1, \text{reg}(I) - d\} \leq \nu_0 - 1.$$

Como consecuencia,  $a^*(\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})) \leq \nu_0 - 2$ .

*Demostración.* La demostración de este teorema usa herramientas técnicas de cohomología local que exceden el alcance de esta tesis. Puede encontrarse en [BBC14, Teorema 12].  $\square$

Para concluir la discusión enunciamos el siguiente corolario:

**Corolario 9.** *Sea  $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(R)$ .*

1. *Si  $\pi_2^{-1}(\mathfrak{p}) = \emptyset$ , entonces*

$$a^*(\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})) = \text{reg}(\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})) \leq \nu_0 - 1.$$

2. *Si  $\dim(\pi_2^{-1}(\mathfrak{p})) = 0$ , entonces*

$$a^*(\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})) \leq \nu_0 - 1$$

$$\text{reg}(\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})) \leq \nu_0.$$

3. *Si  $\dim(\pi_2^{-1}(\mathfrak{p})) = 1$ , entonces*

$$a^*(\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})) \leq \nu_0 - 2$$

$$\text{reg}(\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})) \leq \nu_0 - 1.$$

Por último, el siguiente teorema nos dice que no hay puntos de  $\mathbb{P}_k^3$  cuya fibra tiene dimensión 2.

**Teorema 8** (fibras 2-dimensionales). *Para todo  $\nu \geq \nu_0$ ,*

$$\left\{ \mathfrak{p} \in \text{Proj}(R) : HP_{\pi_2^{-1}(\mathfrak{p})}(\nu) = HP_{\mathbb{P}_k^2}(\nu) = \binom{\nu + 2}{2} \right\} = \emptyset.$$

*Demostración.* Al igual que en el Teorema 7 la demostración de este teorema excede el alcance de este trabajo. Ver [BBC14, Teorema 15].  $\square$

### 4.3. Descripción de la fibra de un punto

Veamos ahora como podemos usar los resultados obtenidos hasta aquí para dar una descripción precisa de la fibra de un punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_k^3$ . Al final de la sección exhibiremos un algoritmo para caracterizar el polinomio de Hilbert de la fibra. Dicho polinomio nos permitirá conocer la dimensión y el grado de la misma.

Como mencionamos en la sección anterior la fibra  $\pi_2^{-1}(\mathbf{p})$  puede ser vacía si  $\mathbf{p} \notin \mathcal{S}$ , un conjunto finito de puntos en el caso en que  $\phi$  “pinta” finitas veces a  $\mathbf{p}$ , o una curva. Estas situaciones se corresponden con un polinomio de Hilbert nulo, de grado cero o grado uno respectivamente, como se ilustra en la Figura 4.3. Por lo tanto para caracterizar el polinomio de Hilbert de la fibra basta evaluarlo en dos valores diferentes de  $\nu$ .

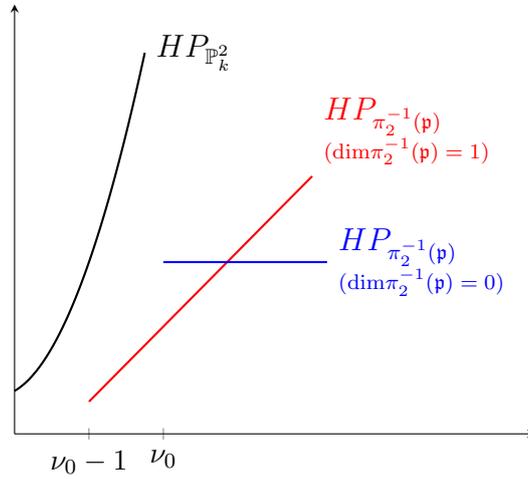


Figura 4.3: Posibles polinomios de Hilbert de  $\pi^{-1}(\mathbf{p})$ .

Además vimos que para valores de  $\nu$  mayores o iguales a la regularidad de Castelnuovo-Mumford de la fibra el polinomio y la función de Hilbert coinciden, y esta última a su vez coincide con la caída en el rango de de cualquier Matriz de Representación  $M(\phi)_\nu(\mathbf{p})$ . Recordemos que en la Proposición 19 vimos que las Matrices de Representación tienen  $\binom{\nu+2}{2}$  filas y por lo menos la misma cantidad de columnas. O sea que que para todo  $\nu \geq \text{reg}(\text{Sym}_S(I) \otimes_R \kappa(\mathbf{p}))$  tenemos

$$\begin{aligned} HP_{\pi_2^{-1}(\mathbf{p})}(\nu) &= \text{corg}(M(\phi)_\nu(\mathbf{p})) \\ &= \binom{\nu+2}{2} - \text{rg}(M(\phi)_\nu(\mathbf{p})). \end{aligned}$$

Dado un punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_k^3$  básicamente lo que hacemos en el algoritmo exhibido al final de la sección es construir la Matriz de Representación  $M(\phi)_\nu$  para dos valores distintos de  $\nu$  mayores a la regularidad de Castelnuovo-Mumford de la fibra (podemos tomar por ejemplo  $\nu_0$  y  $\nu_0 + 1$ ), evaluarlas en  $\mathbf{p}$ , ver cuánto cae su rango y de esta manera obtener el polinomio de Hilbert de  $\pi_2^{-1}(\mathbf{p})$ . Recordemos que dicho

polinomio tiene grado menor o igual a 1, por lo tanto para caracterizarlo basta con evaluarlo en dos valores distintos y despejar sus coeficientes.

Además, en el caso de fibras 1-dimensionales podemos tomar  $\nu = \nu_0 - 1$ . Más precisamente:

- Si  $\dim(\pi_2^{-1}) \leq 0$ , entonces para todo  $\nu \geq \nu_0$

$$\text{corg}(M(\phi)_\nu(\mathbf{p})) = \deg(\pi_2^{-1}(\mathbf{p})).$$

Recordemos que en este caso  $\deg(\pi_2^{-1}(\mathbf{p}))$  es igual a la cantidad de puntos que tiene la fibra.

- Si  $\dim(\pi_2^{-1}) = 1$ , entonces para todo  $\nu \geq \nu_0 - 1$

$$\text{corg}(M(\phi)_\nu(\mathbf{p})) = \deg(\pi_2^{-1}(\mathbf{p}))\nu + c,$$

donde  $c \in \mathbb{Z}$  es tal que  $HP_{\pi_2^{-1}(\mathbf{p})}(\nu) = \deg(\pi_2^{-1}(\mathbf{p}))\nu + c$ .

La siguiente proposición nos permite mejorar un poco el algoritmo. En algunos casos nos ahorrará el trabajo de calcular una Matriz de Representación para dos valores distintos de  $\nu$ .

**Proposición 22.** *Sea  $\mathbf{p}$  un punto en  $\mathcal{S}$  y  $\nu$  un entero tal que  $\nu_0 \leq \nu \leq 2d - 2$ . Si  $\text{corg}(M_\nu(\phi)(\mathbf{p})) \leq \nu$ , entonces  $\pi_2^{-1}(\mathbf{p})$  es necesariamente una fibra finita.*

*Demostración.* Sabemos que para todo  $\nu \geq \nu_0$  el polinomio y la función Hilbert de la fibra coinciden. Luego basta ver que si  $\dim(\pi_2^{-1}(p)) = 1$ ,

$$\text{corg}(M(\phi)_\nu(p)) = HP_{\pi_2^{-1}(p)} \geq \nu + 1.$$

Asumamos entonces que  $\pi_2^{-1}(p)$  tiene dimensión 1 y sea  $\delta = \deg(\pi_2^{-1}(p))$ . El polinomio de Hilbert de la fibra es

$$HP_{\pi_2^{-1}(p)}(\nu) = \delta\nu + 1 - \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{2} + N,$$

donde  $\frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{2}$  es el género aritmético de la parte de dimensión 1 de la fibra y  $N \geq 0$  es el grado de la parte finita. Queremos probar entonces que

$$\delta\nu + 1 - \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{2} + N \geq \nu + 1.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $N = 0$ , es decir que la fibra no tiene componentes 0-dimensionales. Debemos ver entonces que

$$(\delta - 1)\nu - \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{2} \geq 0.$$

Por hipótesis tenemos que  $\nu \geq \nu_0 \geq d - 2$ . Además el grado de la fibra  $\delta$  es menor o igual a  $d$ , el grado de los polinomios que definen la parametrización  $\phi$ . Luego

$$\nu \geq \delta - 2,$$

por lo que

$$\begin{aligned} (\delta - 1)\nu - \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{2} &\geq (\delta - 1)(\delta - 2) - \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{2} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

como queríamos.  $\square$

Una consecuencia interesante de la Proposición 22 es que para todo entero  $0 \leq n \leq 2d - 2$

$$\text{corg}(M_{2d-2}(\phi)(\mathbf{p})) = n \quad \Leftrightarrow \quad \pi_2^{-1}(\mathbf{p}) \text{ es finita de grado } n.$$

Y si además  $d \geq 2$ , vale

$$\text{corg}(M_{2d-2}(\phi)(\mathbf{p})) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p} \text{ tiene una \u00fanica preimagen.}$$

A continuaci\u00f3n exhibimos un algoritmo para obtener el polinomio de Hilbert de la fibra  $\pi_2^{-1}(\mathbf{p})$  de un punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{P}^3$  que resume todos los resultados expuestos en la presente secci\u00f3n. Es el que se encuentra en [BBC14, Secci\u00f3n 4.1].

---

**Algoritmo:** Determinar las caracter\u00edsticas de la fibra  $\pi_2^{-1}(\mathbf{p})$ .

---

**Input:** Una parametrizaci\u00f3n  $\phi$  de una superficie  $\mathcal{S}$  satisfaciendo  $(\mathcal{H})$  y un punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{P}^3$ .

**Output:** El polinomio de Hilbert de la fibra  $\pi_2^{-1}(\mathbf{p})$ .

---

1. Tome un entero  $\nu \geq \nu_0$  (por ejemplo  $\nu = 2d - 2$  que siempre sirve).
2. Compute la Matriz de Representaci\u00f3n  $M(\phi)_\nu$ .
3. Calcule  $r_\nu := \text{corg}(M_\nu(\phi)(\mathbf{p}))$ .
4. Si  $r_\nu = 0$  entonces  $\mathbf{p}$  no pertenece a  $\mathcal{S}$  (y pare).
5. Si  $0 < r_\nu \leq \nu$  entonces  $\pi_2^{-1}(\mathbf{p})$  es un conjunto finito de  $r_\nu$  puntos, contados con multiplicidad.
6. Si  $r_\nu > \nu$  compute  $M(\phi)_{\nu+1}$ .
7. Calcule  $r_{\nu+1} := \text{corg}(M_{\nu+1}(\phi)(\mathbf{p}))$ .
8. Si  $r_\nu = r_{\nu+1}$  entonces  $\pi_2^{-1}(\mathbf{p})$  es un conjunto finito de  $r_\nu$  puntos, contados con multiplicidad.
9. Si  $r_\nu < r_{\nu+1}$  entonces  $\dim(\pi_2^{-1}(\mathbf{p})) = 1$  y el polinomio de Hilbert de la fibra es

$$HP_{\pi_2^{-1}(\mathbf{p})}(\nu) = (r_{\nu+1} - r_\nu)\nu + r_\nu - (r_{\nu+1} - r_\nu)\nu.$$

En otras palabras  $\pi_2^{-1}(\mathbf{p})$  consiste de una curva de grado  $r_{\nu+1} - r_\nu$  y eventualmente un conjunto finito de puntos aislados o embebidos.

---

## 4.4. Cálculo de preimágenes

Para terminar el capítulo veamos brevemente un ejemplo de aplicación de las Matrices de Representación. A continuación mostramos como estas matrices pueden ser usadas para calcular preimágenes de puntos de  $\mathbb{P}_k^3$  vía  $\phi$ . Además del uso para cálculo de preimágenes, las Matrices de Representación pueden ser utilizadas para dar una noción de distancia a la superficie (o curva) y para calcular proyecciones ortogonales entre otras cosas. Para más información sobre estas y otras aplicaciones puede consultarse [Busé14].

Si tenemos un punto  $\mathbf{p} = \phi(\mathbf{q})$  que vía  $\phi$  tiene preimagen única, ésta puede ser obtenida calculando el núcleo de la transpuesta de  $M_\nu(\phi)$  evaluada en  $\mathbf{p}$ , donde  $\nu$  es mayor o igual a la regularidad del Álgebra Simétrica. Para simplificar tomemos  $\nu \geq 2d - 2$  que siempre sirve.

Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 &\xrightarrow{v_1} \mathcal{Z}_0 = R[s_0, s_1, s_2] \\ (g_0, g_1, g_2, g_3) &\mapsto g_0x_0 + g_1x_2 + g_2x_2 + g_3x_3. \end{aligned}$$

Sea  $B_1 = \{l_1, \dots, l_r\}$  una base de  $(\mathcal{Z}_1)_\nu$ . Recordemos que las  $l_i = (g_0^i, g_1^i, g_2^i, g_3^i) \in S_\nu^4$  son syzygies lineales, o sea que cumplen  $\sum_{j=0}^3 g_j^i f_j = 0$ . Sea  $B_2$  una base de  $(\mathcal{Z}_0)_\nu = R[s_0, s_1, s_2]_\nu$  tal que  $B_2 \subset k[s_0, s_1, s_2]$ .

Tomemos  $M(\phi)_\nu$  la Matriz de Representación en las bases  $B_1$  y  $B_2$ , es decir  $M(\phi)_\nu = |v_1|_{B_1 B_2}$ . Para cada  $0 \leq i \leq r$  llamemos

$$\begin{aligned} L_i &= v_{1\nu}(l_i) \\ &= \sum_{j=0}^3 g_j^i x_j \in R[s_0, s_1, s_2]. \end{aligned}$$

Escribiendo los elementos de  $B_2$  como un vector columna tenemos

$$M(\phi)_\nu^t \cdot B_2 = (L_1, \dots, L_r).$$

Luego evaluando en  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  tenemos

$$M(\phi)_\nu^t(\mathbf{p}) \cdot B_2(\mathbf{q}) = (0, \dots, 0).$$

Por otro lado

$$\dim_k(\ker M(\phi)_\nu^t(\mathbf{p})) = \dim_k(\text{coker } M(\phi)_\nu(\mathbf{p})) = 1.$$

Por lo que el núcleo de  $M(\phi)_\nu^t(\mathbf{p})$  está generado por un sólo vector  $v = B(\mathbf{q})$ . Conociendo  $v$  podemos despejar  $\mathbf{q} = \phi^{-1}(\mathbf{p})$ .

**Ejemplo 14.** Consideremos el ejemplo de la esfera, que trabajamos en la Sección 5.2 del próximo capítulo. Ahí calculamos una Matriz de Representación  $M(\phi)_1$  y

vemos que para todo  $\mathbf{p}$  punto distinto de  $(1 : 0 : 0 : 1)$ , la fibra  $\phi^{-1}(\mathbf{p})$  tiene un sólo elemento. La parametrización con la que estamos trabajando es

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \\ (s_0 : s_1 : s_2) &\mapsto (s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 : 2s_0s_1 : 2s_0s_2 : s_1^2 + s_2^2 - s_0^2). \end{aligned}$$

Tomemos por ejemplo  $\mathbf{p} = (1 : 1 : 0 : 0)$  y  $\nu = 2$ . Podríamos haber usado la misma matriz calculada para  $\nu = 1$  que se encuentra en dicha sección pero el ejemplo se entiende mejor si usamos valores mayores de  $\nu$ . Consideremos entonces la siguiente Matriz de Representación transpuesta

$$M(\phi)_2^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_1 \\ x_2 & 0 & -x_0 + x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & -x_0 + x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & -x_0 + x_3 \\ x_1 & -x_0 + x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & -x_0 + x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & -x_0 + x_3 & 0 \\ x_0 + x_3 & -x_1 & -x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_0 + x_3 & 0 & -x_1 & -x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_0 + x_3 & 0 & -x_1 & -x_2 \end{pmatrix}.$$

La evaluamos en el punto  $\mathbf{p}$  y calculamos su núcleo

$$\ker[M(\phi)_2^t(1 : 1 : 0 : 0)] = \langle (1, 1, 0, 1, 0, 0) \rangle.$$

La base  $B_2$  de  $R[s_0, s_1, s_2]_2$  que usamos para calcular  $M(\phi)_2$  es  $\{s_0^2, s_0s_1, s_0s_2, s_1^2, s_1s_2, s_2^2\}$ . O sea que

$$\begin{cases} s_0^2 &= 1 \\ s_0s_1 &= 1 \\ s_0s_2 &= 0 \\ s_1^2 &= 1 \\ s_1s_2 &= 0 \\ s_2^2 &= 0. \end{cases}$$

Despejando obtenemos  $\phi^{-1}(1 : 1 : 0 : 0) = (1 : 1 : 0)$ .

# Capítulo 5

## Ejemplos

En este capítulo trabajamos algunos ejemplos. El primero consiste en analizar la aplicación de las técnicas desarrolladas para el caso de una circunferencia. A pesar de que tratarse de una curva y no de una superficie la incluimos ya que es un ejemplo sencillo cuya parametrización no tiene puntos base ni puntos singulares y es interesante para comparar con el segundo ejemplo que es una esfera. Si bien ambas están parametrizadas usando la proyección estereográfica, a diferencia de lo que ocurre en el caso de la circunferencia, la parametrización de la esfera sí tiene puntos base. Además en el ejemplo de la esfera la superficie no tiene puntos singulares pero la parametrización sí, y esto salta a la vista cuando calculamos los Ideales de Fitting. Los dos siguientes ejemplos son cilindros, uno hecho con la circunferencia y otro con la curva alfa. Presentan dos diferencias importantes. Por un lado los puntos base del cilindro circular son localmente una intersección completa, por lo que la parametrización cumple las condiciones  $(\mathcal{H})$  (ver Capítulo 4). En cambio el cilindro hecho con la curva alfa no las cumple, tiene un punto base que es localmente una intersección casi completa. Por esta razón en los Ideales de Fitting de este último aparece lo que en [BCJ09, Sección 2] llaman el “factor extraño”. Por otro lado si bien ambas parametrizaciones tienen puntos múltiples en el caso del cilindro circular, que es una superficie suave, los puntos múltiples son introducidos por la parametrización, mientras que el cilindro hecho con la curva alfa no es suave.

### 5.1. Circunferencia

Comenzamos analizando el poder explicativo del método para el caso de una posible parametrización de la circunferencia. Consideremos la siguiente parametrización. Observar que no tiene puntos base, luego cumple  $(\mathcal{H})$ .

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \\ (s_0 : s_1) &\mapsto (s_0^2 + s_1^2 : 2s_0s_1 : s_1^2 - s_0^2).\end{aligned}$$

Tomamos  $\nu = 2$ . Usando Macaulay2 [GS] calculamos la Matriz de Representación

$$M(\varphi)_2 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x_0 + x_2 & 0 \\ -x_0 + x_2 & x_1 & -x_1 & x_0 + x_2 \\ 0 & -x_0 + x_2 & 0 & -x_1 \end{pmatrix}.$$

Una descomposición primaria del Ideal de Fitting inicial es

$$\mathfrak{F}_2^0 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2) \cap (x_2, x_0x_1, x_0^2 + x_1^2).$$

La primera componente es la ecuación implícita de la circunferencia y la segunda está soportada en el origen, es vacía como esquema proyectivo. El próximo Ideal de Fitting  $\mathfrak{F}_2^1$  está soportado en el origen. Sabemos que la circunferencia es no singular, sin embargo podría haber puntos por los que la parametrización pasase más de una vez, es decir podría haber puntos singulares introducidos por la parametrización. Lo que los Ideales de Fitting nos están diciendo es que esto no sucede.

Mirando cartas afines del dominio  $U_0 = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus V(s_0)$  sin los puntos  $\{(1 : i), (1 : -i)\}$  y  $V_0 = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \setminus V(x_0)$ , tenemos

$$\phi|_{U_0 \setminus \{i, -i\}}(s_1) = \left( \frac{2s_1}{s_1^2 + 1}, \frac{s_1^2 - 1}{s_1^2 + 1} \right),$$

que es inyectiva con inversa a derecha

$$\phi|_{U_0}^{-1}(x_1, x_2) = \left( \frac{x_1}{1 - x_2} \right).$$

El único punto que va a parar al polo norte es  $\phi(0 : 1) = (1 : 0 : 1)$ . Por otro lado  $\phi(1, i) = (0 : 2i : -2)$  y  $\phi(1, -i) = (0 : -2i : -2)$  que son distintos y no caen en  $V_0$ . Por lo tanto  $\phi$  es inyectiva, por lo que no hay ningún punto de la imagen que sea “pintado” más de una vez por la parametrización.

Cuando compactificamos mirando  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$  dentro de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  estamos agregando únicamente un punto, el  $(0 : 1)$ , cuya imagen vía  $\phi$  es el polo norte  $(1 : 0 : 1)$ . Tengamos esto en cuenta, a continuación veremos que en la esfera hay algunas diferencias.

## 5.2. Esfera

Utilicemos ahora el método para estudiar las propiedades geométricas de la siguiente parametrización de la esfera

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \\ (s_0 : s_1 : s_2) &\mapsto (s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 : 2s_0s_1 : 2s_0s_2 : s_1^2 + s_2^2 - s_0^2). \end{aligned}$$

El conjunto de puntos base  $V(I) = \{(0 : 1 : i), (0 : 1 : -i)\}$  es finito y localmente una intersección completa (l. c. i.), luego la parametrización  $\phi$  cumple las condiciones  $(\mathcal{H})$ .

En este ejemplo  $d = 2$ , por lo que deberíamos tomar  $\nu \geq \nu_0 = 2$ . Sin embargo en este caso podemos tomar  $\nu = 1$  (ver [BBC14, Ejemplo 3]). Obtenemos la siguiente Matriz de Representación

$$M(\phi)_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_1 & x_0 + x_3 \\ x_2 & 0 & -x_0 + x_3 & -x_1 \\ -x_1 & -x_0 + x_3 & 0 & -x_2 \end{pmatrix},$$

que es mucho más manejable que la matriz correspondiente a  $\nu = 2$ , que tiene 6 filas y 11 columnas (ver Ejemplo 14). A continuación se expone el código en Macaulay2 [GS] utilizado para computar dicha matriz (y otras, cambiando sus entradas: la parametrización  $\phi$  y el entero  $\nu$ ):

```
>S=QQ[s0,s1,s2];
>f0=s0^2+s1^2+s2^2; f1=2*s0*s1; f2=2*s0*s2; f3=s1^2+s2^2-s0^2;
>d=(degree f0)_0; nu=2*(d-1)-1; -- En general vamos a usar: nu = 2*(d-1).
>F=matrix{{f0,f1,f2,f3}};
>Z1=ker F;
>Z1nu=super basis (nu+d,Z1);
>R=QQ[x0,x1,x2,x3];
>A=R[s0,s1,s2];
>Snu=substitute(basis(nu,S),A);
>G=matrix{{x0,x1,x2,x3}};
>ImGnu=G*substitute(Z1nu,A);
>(m,M)=coefficients(ImGnu,Monomials=>Snu);
>M -- Ésta es la Matriz de Representación en grado nu.
```

Una descomposición de los menores de tamaño  $3 \times 3$  de  $M(\phi)_1$ , es decir el Ideal de Fitting inicial de la parametrización, nos da

$$\mathfrak{F}_1^0(\phi) = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) \cap (x_1, x_2, x_0^2 - 2x_0x_3 + x_3^2),$$

que corresponde a la ecuación implícita de la esfera y un punto doble embebido  $(1 : 0 : 0 : 1)$ . El ideal de menores de tamaño  $2 \times 2$  de  $M(\phi)_1$  es

$$\mathfrak{F}_1^1(\phi) = (x_1, x_2, x_0 - x_3) \cap (x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3, x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1),$$

que corresponde al mismo punto  $(1 : 0 : 0 : 1)$ , ahora con multiplicidad uno, y una componente adicional soportada en el origen. Finalmente  $\mathfrak{F}_1^2(\phi)$ , el ideal de menores de  $1 \times 1$  de  $M(\phi)_1$ , está soportado en el origen.

El polo norte  $(1 : 0 : 0 : 1)$  es un valor singular de la parametrización  $\phi$ , no de la esfera en sí. Cuando compactificamos agregamos toda una recta  $L = V(s_0)$  al dominio, que vía  $\phi$  va a parar al  $(1 : 0 : 0 : 1)$ . Dicho punto tiene una fibra 1-dimensional, por esta razón aparece en Ideal de Fitting  $\mathfrak{F}_1^1(\phi)$ . A diferencia de lo que ocurre con la circunferencia, al compactificar introducimos un punto singular. Otra cosa interesante para observar es que los puntos base de  $\phi$ ,  $(0 : 1 : i)$  y  $(0 : 1 : -i)$ , pertenecen a la recta del infinito  $L$ . Sacando  $L$  del dominio y  $P$  del codominio, tenemos que  $\phi$  induce un isomorfismo entre  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L = U_0$  y  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \setminus \{P\}$ .

### 5.3. Cilindro

Veamos ahora un ejemplo de una superficie reglada. Tomamos la parametrización de la circunferencia que usamos en 5.1 y construimos un cilindro. La parametrización que consideramos es la siguiente

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \\ (s_0 : s_1 : s_2) &\mapsto (s_0^2 + s_1^2 : 2s_0s_1 : s_1^2 - s_0^2 : s_0s_2). \end{aligned}$$

Hay un único punto base  $V(I) = \{(0 : 0 : 1)\}$ , que es localmente una intersección completa, luego se cumplen las condiciones  $(\mathcal{H})$ . Tomamos  $\nu = 2$ . Calculamos la Matriz de Representación

$$M(\phi)_2 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & x_0 + x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_3 & 0 & 0 \\ -x_0 + x_2 & x_1 & 0 & -x_1 & x_0 + x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & x_0 + x_2 & 0 & 0 & -x_0 + x_2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & -x_0 + x_2 & 0 & 0 & -x_1 & 0 & 2x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_0 + x_2 & 0 & 0 & -x_1 & -x_1 & 2x_3 & 0 & -x_0 + x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & 0 & 0 & -x_0 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Una descomposición primaria del ideal de menores maximales, el Ideal de Fitting inicial de  $\phi$ , es

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_2^0 = & (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2) \cap (x_1^2, x_3^4, x_0x_3^2 - x_2x_3^2, x_0x_1x_3 - x_1x_2x_3, \\ & x_0^2x_3 - 2x_0x_2x_3 + x_2^2x_3, x_0^2x_1 - 2x_0x_1x_2 + x_1x_2^2, \\ & x_0^3 - 3x_0^2x_2 + 3x_0x_2^2 - x_2^3) \\ & \cap (\text{componente soportada en el origen}). \end{aligned}$$

La primera componente es la ecuación implícita del cono y la segunda es el punto  $(1 : 0 : 1 : 0)$  con multiplicidad 3. El próximo Ideal de Fitting es

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_2^1 = & (x_1^2, x_3^2, x_1x_3, x_0x_3 - x_2x_3, x_0x_1 - x_2x_1, x_0^2 - 2x_0x_2 + x_2^2) \\ & \cap (\text{componente soportada en el origen}). \end{aligned}$$

Vuelve a aparecer el punto  $(1 : 0 : 1 : 0)$ , ahora con multiplicidad 2. El siguiente es

$$\mathfrak{F}_2^2 = (x_3, x_1, x_0 - x_2) \cap (\text{componente soportada en el origen}).$$

Aparece una última vez el punto  $(1 : 0 : 1 : 0)$ , ahora con multiplicidad 1, y una componente soportada en el origen. Finalmente  $\mathfrak{F}_2^3$ , el ideal de menores de cotamaño 3, está soportado en el origen.

O sea que el único punto singular es  $\mathfrak{p} := (1 : 0 : 1 : 0)$ . A priori no sabemos si su fibra es 1-dimensional o 0-dimensional. Usemos los resultados expuestos en la Sección 4.3 para estudiar la geometría de la fibra  $\pi_2^{-1}(\mathfrak{p})$ , más precisamente vemos como es su polinomio de Hilbert. Calculando las Matrices de Representación para  $\nu = 2$  y

$\nu = 3$ , evaluándolas en  $\mathfrak{p}$  y calculando sus rangos obtenemos  $\text{corg}(M(\phi)_2(\mathfrak{p})) = 3$  y  $\text{corg}(M(\phi)_3(\mathfrak{p})) = 4$ . Escribiendo  $HP_{\pi_2^{-1}(\mathfrak{p})}(\nu) = a\nu + b$  tenemos

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 3a + b = 4. \end{cases}$$

Despejando los valores de  $a$  y  $b$  obtenemos el polinomio de Hilbert de la fibra

$$HP_{\pi_2^{-1}(\mathfrak{p})}(\nu) = \nu + 1.$$

O sea que la fibra de  $\mathfrak{p}$  tiene dimensión 1, por lo que es una curva. Más aún tiene grado 1, es una recta. Por último el polinomio de Hilbert también nos dice que no tiene parte finita. Es decir es una recta y ningún punto más. Esto tiene sentido, observando con cuidado la parametrización vemos que  $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$  es la recta del infinito  $V(s_0)$ .

## 5.4. Cilindro curva alfa

Por último veamos un ejemplo que presenta problemas en su base locus. También se trata de una superficie reglada. Tomamos la curva alfa del Ejemplo 13 y construimos el siguiente cilindro.

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \\ (s_0 : s_1 : s_2) &\mapsto (s_0^3 : s_0(s_1^2 - s_0^2) : s_1(s_1^2 - s_0^2) : s_0^2 s_2). \end{aligned}$$

El único punto base es  $V(I) = \{(0 : 0 : 1)\}$ , que es localmente una intersección casi completa (a. l. c. i.). Luego  $\phi$  no cumple las condiciones  $(\mathcal{H})$ , sin embargo calculemos las Matrices de Representación y veamos como sus Ideales de Fitting aún pueden aportarnos información relevante. Tomamos  $\nu = 3$ . La Matriz de Representación  $M(\phi)_3$  tiene 10 filas y 17 columnas, por eso no la incluimos.

Una descomposición primaria del ideal de Fittig inicial es

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_3^0 = & (x_0) \cap (x_0 x_1^2 + x_1^3 + x_0 x_2^2) \cap (x_0^7, x_3^6, \\ & x_0^2 x_1^2 x_3^2 + x_0 x_1^3 x_3^2 - x_0^2 x_2^2 x_3^2, x_0^3 x_1^2 x_3 + x_0^2 x_1^3 x_3 - x_0^3 x_2^2 x_3, x_0^4 x_1^2 + x_0^3 x_1^3 - x_0^4 x_2^2, \\ & x_0^2 x_1^4 x_3 + x_0 x_1^5 x_3 - x_0^2 x_1^2 x_2^2 x_3, x_0^3 x_1^4 + x_0^2 x_1^5 - x_0^3 x_1^2 x_2^2, x_0^2 x_1^6 + x_0 x_1^7 - x_0^2 x_1^4 x_2^2, \\ & x_1^9 + x_0^6 x_1 x_2^2 + 2x_0^2 x_1^5 x_2^2 - 3x_0 x_1^6 x_2^2 - x_0^5 x_2^4 + 2x_0^4 x_1 x_2^4 - 2x_0^3 x_1^2 x_2^4 + 3x_0^2 x_1^3 x_2^4 - x_0^3 x_2^6) \\ & \cap (\text{componente soportada en el origen}). \end{aligned}$$

El hiperplano  $(x_0)$  que aparece en la descomposición primaria es lo que en [BCJ09, Sección 2] llaman el “factor extraño”. Aparece un hiperplano por cada punto base que es localmente una intersección casi completa (a. l. c. i.). Siguiendo el artículo [BCJ09] la ecuación del hiperplano puede ser calculada evaluando la syzygy  $s_0 s_2^2 x_3 - s_2^2 x_0$  en el punto  $(0 : 0 : 1)$ , que es la única que no se anula sobre cualquiera (en este caso el único) de los puntos base. La segunda componente es la ecuación implícita. Luego aparece una componente cuyo radical es el punto  $(x_0, x_1, x_3)$ .

Una descomposición del siguiente Ideal de Fitting es

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_3^1 = & (x_0, x_1) \cap (x_1, x_2) \\ & \cap (x_0^3, x_1^7, x_3^3, x_0x_3^2, x_0^2x_3, x_0x_1^2x_3, x_0^2x_1^2, x_1^3x_3^2, x_0x_1^4, x_1^5x_3) \\ & \cap (\text{componente soportada en el origen}). \end{aligned}$$

Aparece la recta  $(x_0, x_1)$  que está relacionada con el factor extraño. Luego aparece la recta  $(x_1, x_2)$  y una componente soportada en el origen. El siguiente Ideal de Fitting es

$$\mathfrak{F}_3^2 = (x_0^2, x_1^4, x_3^3, x_0x_3, x_1^2x_3, x_0x_1^2) \cap (\text{componente soportada en el origen}).$$

El ideal de menores de cotamaño 3 es

$$\mathfrak{F}_3^3 = (x_0, x_1^2, x_3) \cap (\text{componente soportada en el origen}).$$

En estos dos últimos Ideales de Fitting la única componente relevante que aparece es la asociada al punto  $(0 : 0 : 1 : 0)$ . Finalmente el Ideal de Fitting  $\mathfrak{F}_3^4$  está soportado en el origen.

Dejando de lado el factor extraño que aparece en  $\mathfrak{F}_3^0$  y  $\mathfrak{F}_3^1$  en los Ideales de Fitting aparecen la ecuación implícita  $x_0x_1^2 + x_1^3 + x_0x_2^2$ , la recta  $(x_1, x_2)$  y el punto  $(x_0, x_1, x_3)$ .

La recta  $(x_1, x_2)$  aparece únicamente en el Ideal de Fitting inicial  $\mathfrak{F}_3^0$  y en el siguiente  $\mathfrak{F}_3^1$ . Esto se debe a que dicha recta es el conjunto de puntos que la parametrización “pinta” exactamente 2 veces. Es análogo a lo que sucede con el Ejemplo 13 con la curva alfa. Observemos que si bien no aparece como componente primaria irreducible en  $\mathfrak{F}_3^0$ , la recta  $(x_1, x_2)$  está en dicho ideal. Esto se debe a que al ser una componente embebida no hay unicidad en la descomposición primaria, cosa que si sucede para las componentes aisladas (ver Capítulo 1, Teorema 2).

Por otro lado el punto  $(0 : 0 : 1 : 0)$  que aparece en los primeros 4 Ideales de Fitting tiene como fibra a la recta  $V(s_0)$ . Al igual que como ocurre en caso de la esfera, se trata de un punto singular introducido por la parametrización.

# Bibliografía

- [BBC14] N. Botbol, L. Busé and M. Chardin, Fitting ideals and multiple-points of surface parameterizations, arXiv:1310.4915, *Journal of Algebra*, Vol 420, Issue 1 (2014), 486–508.
- [Busé14] L. Busé, Implicit matrix representations of rational Bézier curves and surfaces, *Computer-Aided Design* 46 (2014), 14–24.
- [Bot11] N. Botbol, The implicit equation of a multigraded hypersurface, *J. Algebra*, vol. 348, no. 1, pp. 381–401, 2011.
- [Bot11] N. Botbol, Compactifications of rational maps and the implicit equations of their images, *J. Pure and Applied Algebra*, Vol. 215, no. 5, pp. 1053–1068, 2011.
- [Bot10] N. Botbol, An algorithm for computing implicit equations of bigraded rational surfaces, arXiv:1007.3690, 2010.
- [BDD09] N. Botbol, A. Dickenstein, M. Dohm, Matrix representations for toric parametrizations, *Computer Aided Geometric Design* 26 (2009) 757–771.
- [BCJ09] L. Busé, M. Chardin and J. P. Jouanolou, Torsion of the symmetric algebra and implicitization, *Proc. Amer. Math. Soc.* 137 (2009) no. 6, 1855–1865.
- [Bot09] N. Botbol, The implicitization problem for  $\phi: \mathbb{P}^n \dashrightarrow (\mathbb{P}^1)^{n+1}$ , *J. Algebra*, Vol. 322, no. 11, pp. 3878–3895, 2009.
- [BD07] L. Busé and M. Dohm, Implicitization of bihomogeneous parametrizations of algebraic surfaces via linear syzygies, *ISSAC 2007*, pp. 69–76, New York: ACM, 2007.
- [Cha06] M. Chardin, Implicitization using approximation complexes, *Algebraic geometry and geometric modeling*, *Math. Vis.* pp. 23–35, Springer, Berlin, 2006.
- [BC05] L. Busé and M. Chardin, Implicitizing rational hypersurfaces using approximation complexes, *J. Symbolic Computation* 40 (2005), 1150–1168.
- [BJ03] L. Busé and J. P. Jouanolou, On the closed image of a rational map and the implicitization problem, *J. of Algebra* 265 (2003), 312–357.
- [BCD03] L. Busé, D. A. Cox and C. D’Andrea, Implicitization of surfaces in  $\mathbb{P}^3$  in the presence of base points, *J. Algebra Appl* (2003), 2(2):189–214.

- [BEM03] L. Busé, M. Elkadi, and B. Mourrain, Using projection operators in computer aided geometric design, *Topics in algebraic geometry and geometric modeling*, Vol. 334 of *Contemp. Math.*, pp. 321–342, Providence, RI: Amer. Math. Soc. 2003.
- [Busé01] L. Busé, Residual resultant over the projective plane and the implicitization problem, *Proceedings of the 2001 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, (New York), pp. 48–55 (electronic), ACM, 2001.
- [D’An01] C. D’Andrea, Resultants and moving surfaces, *J. Symbolic Comput.* 31 (2001), 585–602
- [CGZ00] D. A. Cox, R. Goldman, M. Zhang, On the validity of implicitization by moving quadrics of rational surfaces with no base points, *J. Symbolic Comput.* 29 (2000), 419–440.
- [KLU96] S. Kleiman, J. Lipman, B. Ulrich, The multiple-point schemes of a finite curvilinear map of codimension one, *Ark. Mat.* 34 (2) (1996) 285–326.
- [SC95] T. Sederberg, F. Chen, Implicitization using moving curves and surfaces, *Proceedings of SIGGRAPH 29 (1995)*, 301–308.
- [KLU92] S. Kleiman, J. Lipman, B. Ulrich, The source double-point cycle of a finite map of codimension one, *Complex Projective Geometry, Sel. Pap. Conf. Proj. Var. Trieste/Italy 1989, Vector Bundles and Special Proj. Embeddings, Bergen/Norway 1989, London Math. Soc. Lecture Note Ser. vol. 179, 1992*, pp. 199–212.
- [HSV83] J. Herzog, A. Simis, W. V. Vasconcelos, Approximation Complexes of Blowup Rings II, *Journal of Algebra* 82 (1983), 53–83.
- [HSV82] J. Herzog, A. Simis, W. V. Vasconcelos, Approximation Complexes of Blowup Rings, *Journal of Algebra* 74 (1982), 466–493.
- [SV81] A. Simis, W. V. Vasconcelos, The syzygies of the conormal module, *American Journal of Mathematics* 103 (1981), 203–224.
- [Hof89] C. Hoffmann, *Geometric solid modeling: an introduction*, Morgan Kaufmann publishers, 1989.
- [MP89] D. Mond, R. Pellikaan, Fitting ideals and multiple points of analytic mappings, *Algebraic Geometry and Complex Analysis, Pátzcuaro, 1987, Lecture Notes in Math. vol. 1414, Springer, Berlin, 1989*, pp. 107–161.
- [Pie78] R. Piene, Polar classes of singular varieties, *Ann. Sci. Ec. Norm. Super.* (4) 11 (2) (1978) 247–276.
- [Tei77] B. Teissier, The hunting of invariants in the geometry of discriminants, *Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math. Oslo, 1976)*, pp 565–678.

- [BotLic] N. Botbol, Implicación de hipersuperficies racionales mediante complejos de aproximación, Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires, Febrero de 2007.
- [BuséPhD] L. Busé, Étude du résultant sur une variété algébrique, PhD thesis, University of Nice, December 19, 2001.
- [Eis94] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry, Vol. 150 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1994.
- [Atiyah] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, Introduction To Commutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [Mats86] H. Matsumura, Commutative Ring Theory, Cambridge University Press, 1986.
- [Shaf77] I. R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry 1, 3rd ed. Springer-Verlag, 2013.
- [Hart77] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Vol. 52 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1977.
- [EH00] D. Eisenbud and J. Harris, The geometry of schemes, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 150 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2000.
- [GS] Daniel R. Grayson and Michael E. Stillman, Macaulay 2, a software system for research in algebraic geometry, <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>.