UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Amenabilidad de álgebras

Javier Rodríguez Chatruc

Director: Dr. Guillermo H. Cortiñas

24 de agosto de 2018

Índice general

Introducción

En 1924 Banach y Tarski prueban (en [17]) su famosa paradoja, que establece (informalmente) que una esfera puede descomponerse en finitas piezas y luego, a través de rotaciones, arreglarse para conseguir dos esferas idénticas a la original. Unos años después, von Neumann estudia en [18] la existencia de medidas invariantes a izquierda sobre grupos, la propiedad que hoy llamamos amenabilidad, y nota que esta propiedad está detrás de la paradoja de Banach-Tarski. A grandes rasgos, la amenabilidad de un grupo está en dicotomía con la existencia de descomposiciones paradójicas en él y la paradoja puede atribuirse al hecho de que el grupo de rotaciones $SO(3,\mathbb{R})$ es no amenable, por lo que tiene una descomposición paradójica, que pasa a la esfera vía la acción de $SO(3,\mathbb{R})$ en ésta. Más adelante, en la década del 50, Følner da una caracterización equivalente de amenabilidad ([19]) en términos de la existencia de una red de subconjuntos finitos del grupo asíntoticamente invariantes (hoy llamada condición Følner). Desde entonces, la amenabilidad ha sido objeto de estudio y aplicación en diversas áreas de la matemática, como la teoría ergódica y las álgebras de operadores.

En este trabajo estudiamos la noción de amenabilidad sobre $\mathbb{K}$-álgebras, introducida por primera vez por Elek para álgebras finitamente generadas en [4] y luego generalizada por Ara, Li, Lledó y Wu en [1]. Siguiendo mayormente [1], veremos las caracterizaciones equivalentes de amenabilidad algebraica en términos de conjuntos Følner, descomposiciones paradójicas y existencia de medidas invariantes, para después estudiar la amenabilidad en el caso de álgebras (de caminos) de Leavitt. Por último, veremos la relación entre la amenabilidad algebraica y la amenabilidad en espacios métricos localmente finitos extendidos (que definiremos previamente) a través de las álgebras de traslaciones.

En el capítulo 1 damos primero una demostración de la paradoja de Banach-Tarski a modo de introducción y hacemos después un repaso sintético de la amenabilidad de grupos discretos. Por último, recordamos el concepto de grafo de Cayley, que nos permitirá entender a un grupo finitamente generado como un espacio métrico localmente finito, y establecer la equivalencia de su amenabilidad como grupo con su amenabilidad como espacio métrico en el capítulo siguiente.

En el capítulo 2 definimos la amenabilidad sobre espacios métricos localmente finitos extendidos a través de la condición Følner, un concepto introducido por primera vez por Bloch y Weinberger en [20]. Nos interesará particularmente la distinción entre amenabilidad y amenabilidad propia, ausente en el caso de grupos, pues en el caso de álgebras se hará la misma distinción. Damos también las nociones de descomposición paradójica y medida invariante y su relación con la amenabilidad.

En el capítulo 3 se define la amenabilidad sobre $\mathbb{K}$-álgebras, se prueban sus propiedades básicas y se dan las nociones de descomposiciones paradójicas y medidas invariantes en este contexto, relacionándolas con la amenabilidad. Todo esto resultará muy similar a lo visto en el capítulo anterior, pues es esencialmente su análogo algebraico. Al final del capítulo definiremos el concepto de álgebra propiamente infinita y mostraremos que toda álgebra de este tipo es no amenable.

En el capítulo 4 estudiamos la amenabilidad de las álgebras (de caminos) de Leavitt. Veremos que toda álgebra de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(m,n)$ es no amenable y daremos una caracterización completa de la amenabilidad (propia) de las álgebras de caminos de Leavitt en términos de sus grafos asociados. En particular, se probará que un álgebra de caminos de Leavitt es no amenable si y sólo si es propiamente infinita. Por último, estudiaremos un ejemplo de álgebra amenable a izquierda pero no a derecha usando las álgebras de caminos.

En el capítulo 5 definimos el álgebra de traslaciones asociada a un espacio métrico localmente finito y probamos que la amenabilidad (propia) del espacio es equivalente a la de su álgebra de traslaciones. De la misma demostración se obtendrá también que las álgebras de traslaciones son no amenables si y sólo si son propiamente infinitas.

Capítulo 1

Preliminares

Empezamos repasando la noción de amenabilidad en el contexto de grupos. En lo que sigue, trabajaremos sólo con grupos G discretos, notando sin embargo que toda esta teoría puede hacerse para el caso más general de grupos localmente compactos.

La amenabilidad admite numerosas definiciones equivalentes, muchas de las cuales escapan al objetivo de esta tesis, por lo que veremos sólo las que nos sean necesarias. De particular interés nos serán las que hagan uso de la *condición Følner*, pues serán la motivación para las definiciones de amenabilidad en espacios métricos y álgebras que veremos en capítulos subsiguientes. A lo largo de este capítulo seguiremos mayormente las notas [7] y el libro [5].

En todo este trabajo, llamaremos *numerable* a todo conjunto que sea finito o que admita una biyección con los números naturales (es decir, usamos la palabra «numerable» para lo que tradicionalmente se denomina «a lo sumo numerable»).

1.1. La paradoja de Banach-Tarski

En esta sección probaremos la paradoja de Banach-Tarski a modo de introducción histórica y veremos cómo esto lleva a la definición de amenabilidad.

Definición 1.1.1. Sean G un grupo actuando sobre un conjunto X y $A, B \subseteq X$. Decimos que A y B son (finitamente) *G-equidescomponibles* si existen elementos $g_1, \dots, g_n$ y particiones $A_1, \dots, A_n$, $B_1, \dots, B_n$ de A y B respectivamente (es decir, $A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$ y $B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n$) de manera que $B_i = g_i A_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. En este caso notamos $A \sim B$ y escribimos $A \precsim B$ si existe un subconjunto $C \subseteq B$ tal que $A \sim C$.

Una *realización* de $A \sim B$ es una biyección $h : A \to B$ tal que para todo $1 \le i \le n$ se tiene $h(a_i) = g_i a_i$ para todo $a_i \in A_i$.

Observación 1.1.2. Si fijamos el grupo G, ser G-equidescomponible es una relación transitiva. En efecto, supongamos que $A \sim B$ y $B \sim D$. Entonces tenemos descomposiciones

$$A = \sqcup_{i=1}^{n} A_i \ , \ B = \sqcup_{i=1}^{n} B_i = \sqcup_{j=1}^{m} C_j \ , \ D = \sqcup_{j=1}^{m} D_j$$

y elementos $g_1, \dots, g_n$, $h_1, \dots, h_m$ en G tales que $B_i = g_i A_i$ y $D_j = h_j C_j$ para todo $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le m$. Definimos ahora, para cada i y j, los elementos $g_{ij} = g_i$, $h_{ij} = h_j$ y las particiones $A_{ij} = g_{ij}^{-1}(B_i \cap C_j)$, $D_{ij} = h_{ij}(B_i \cap C_j)$. Veamos que los A_{ij} efectivamente forman una partición. Si tenemos A_{ij} y A_{kl} entonces, en caso de que $i \neq k$ es fácil ver que estos dos conjuntos son disjuntos pues $A_{ij} = g_{ij}^{-1}(B_i \cap C_j) \subseteq g_i^{-1} B_i = A_i$ y del mismo modo $A_{kl} \subseteq A_k$, por lo que $A_{ij} \cap A_{kl} \subseteq A_i \cap A_k = \emptyset$. Si por otro lado $i = k$ y $j \neq l$ entonces $A_{ij} \cap A_{kl} = (g_i^{-1}(B_i \cap C_j) \cap g_i^{-1}(B_i \cap C_l)) = g_i^{-1}(B_i \cap C_j \cap C_l) = g_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ pues $C_j \cap C_l = \emptyset$. Análogamente se ve que los conjuntos D_{ij} forman una partición. Ahora, como para cada i y j tenemos

$$(h_{ij}g_{ij})(A_{ij}) = (h_{ij}g_{ij})g_{ij}^{-1}(B_i \cap C_j) = h_{ij}(B_i \cap C_j) = D_{ij}$$

logramos ver que $A \sim D$ y luego $\sim$ es transitiva.

Observar que si $h : A \to B$ es una realización de $A \sim B$ y $S \subseteq A$ entonces $S \sim h(S)$, pues para obtener las particiones simplemente intersecamos a las de A y B con S y $h(S)$ respectivamente.

Teorema 1.1.3 (Banach-Schröder-Bernstein). *Sean G un grupo actuando sobre un conjunto X y $A, B \subseteq X$. Si $A \lesssim B$ y $B \lesssim A$ entonces $A \sim B$.*

Demostración. Como $A \lesssim B$ y $B \lesssim A$, existen subconjuntos $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$ y realizaciones $f : A \to B_1$, $g : A_1 \to B$ de $A \sim B_1$ y $A_1 \sim B$. Pongamos $C_0 := A \setminus A_1$ y $C_{n+1} := g^{-1}f(C_n)$ para cada $n \geq 0$ y sea $C := \cup_{i=0}^{\infty} C_n$. Notar que $A \setminus C = A_1 \setminus C$ pues $A \setminus A_1 \subseteq C$. Ahora, si $a \in A \setminus C$ tenemos $a \notin C_n$ para cada n y entonces $g(a) \notin f(C_n)$ para todo n. Esto implica que $g(A \setminus C) \subseteq B \setminus f(C)$. Recíprocamente, si $b \in B \setminus f(C)$ entonces $b \notin f(C_n)$ para todo $n \geq 0$. Si fuera $b = g(a)$ con $a \in C$ entonces $a \in C_n$ para algún $n \geq 1$ (pues $C_0 = A \setminus A_1$ y g no está definida allí) y luego $b = g(a) \in f(C_{n-1})$, lo cual es absurdo. Esto nos dice que $B \setminus f(C) \subseteq g(A \setminus C)$ y luego $B \setminus f(C) = g(A \setminus C)$.

De todo lo anterior se sigue que $A \setminus C \sim B \setminus f(C)$, pues g se restringe y correstringe bien a estos conjuntos. Como además $C \sim f(C)$, conseguimos mostrar que $A \sim B$ pues podemos definir la realización $h : A \to B$ dada por

$$h\big|_{A \setminus C} = g\big|_{A \setminus C} \quad \text{y} \quad h\big|_{C} = f\big|_{C}.$$

□

Corolario 1.1.4. *Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X. Son equivalentes*

1. *Existen subconjuntos no vacíos disjuntos $A, B \subseteq X$ tales que $A \sim X \sim B$.*
2. *Existen subconjuntos no vacíos disjuntos $A, B \subseteq X$ tales que $A \cup B = X$ y $A \sim X \sim B$.*

Demostración. La implicación $(2) \Rightarrow (1)$ es trivial. Para la otra dirección, notemos que $X \sim B \subseteq (X \setminus A)$ implica $X \lesssim X \setminus A$. Además, la inclusión $X \setminus A \subseteq X$ nos da trivialmente $X \setminus A \lesssim X$. Luego si vale (1), por el teorema 1.1.3, conseguimos $X \setminus A \sim X \sim A$, lo que nos da (2). □

Definición 1.1.5. Sea G un grupo actuando en X. Decimos que X es (finitamente) *G-paradójico* si alguna (y por lo tanto ambas) de las condiciones del corolario 1.1.4 se cumple. Cuando $X = G$ y la acción es por multiplicación a izquierda, decimos directamente que G es paradójico.

Proposición 1.1.6. *Sea F_2 el grupo (no abeliano) libre en dos generadores. Entonces*

(1) *F_2 es paradójico.*

(2) *Si F_2 actúa libremente sobre un conjunto X, entonces X es F_2-paradójico.*

Demostración. Para el punto (1), escribamos $F_2 =< a, b >$ y para cada $x \in F_2$ llamemos $W(x)$ al conjunto de palabras reducidas que empiezan con x. Como se tiene

$$F_2 = W(a) \sqcup aW(a^{-1}),$$

si definimos $A = W(a) \sqcup W(a^{-1})$ entonces $A \sim F_2$. Similiarmente, poniendo $B = W(b) \sqcup W(b^{-1})$ se ve que $B \sim F_2$. Además, A y B son disjuntos, por lo que se satisface la primera condición del corolario 1.1.4 y F_2 resulta paradójico.

Para ver (2), sea M un conjunto de representantes de las F_2-órbitas de X (i.e, M contiene un elemento de cada órbita de la acción de F_2 en X). Para cada $c \in F_2$, definimos $X_c = \{z \cdot m : z \in W(c), m \in M\}$. Es fácil verificar, gracias a que la acción es libre, que los conjuntos X_a, $X_{a^{-1}}$, X_b y $X_{b^{-1}}$ son disjuntos y que se tiene $X = X_a \sqcup aX_{a^{-1}} = X_b \sqcup bX_{b^{-1}}$. Esto nos da, al igual que antes, la descomposición que buscamos.

□

Proposición 1.1.7. *El grupo de rotaciones $SO(3,\mathbb{R})$ contiene una copia de F_2.*

Demostración. Puede verse que las rotaciones ρ y σ dadas por las siguientes dos matrices generan una copia de F_2 (ver Teorema 2.1 de [12] para una demostración detallada).

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 & 0 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

□

Para probar la paradoja de Banach-Tarski, necesitamos un último resultado debido a Hausdorff.

Teorema 1.1.8 (Paradoja de Hausdorff)**.** *Existe un subconjunto numerable D de la esfera $\mathbb{S}^2$ tal que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ es (finitamente) $SO(3,\mathbb{R})$-paradójico.*

Demostración. Llamemos $F \subseteq SO(3,\mathbb{R})$ al subgrupo isomorfo a F_2 exhibido en la proposición 1.1.7. Observar que todo elemento no trivial de $SO(3,\mathbb{R})$ fija exactamente dos puntos de $\mathbb{S}^2$ (la intersección del eje de rotación con la esfera). Por tanto si D es la unión de todos los puntos fijos por elementos de F, D es numerable y además F actúa libremente sobre $\mathbb{S}^2 \setminus D$. Luego $\mathbb{S}^2 \setminus D$ es F_2-paradójico gracias a la proposición 1.1.6 y entonces es también $SO(3,\mathbb{R})$-paradójico trivialmente. □

Teorema 1.1.9 (Banach-Tarski)**.** *Sea D un subconjunto numerable de la esfera $\mathbb{S}^2$. Entonces $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^2 \setminus D$ son $SO(3,\mathbb{R})$-equidescomponibles. En particular, $\mathbb{S}^2$ es $SO(3,\mathbb{R})$-paradójico.*

Demostración. Sea l una recta por el origen que no interseca a D, que existe pues D es numerable. A su vez, nuevamente como D es numerable, existe un θ tal que, llamando ρ a la rotación alrededor de l con ángulo θ, la imagen $\rho^n(D)$ no interseca a D para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\overline{D} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \rho^n(D)$. Por construcción, tenemos $\rho(\overline{D}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^n(D) = \overline{D} \setminus D$ y luego

$$\mathbb{S}^2 = \overline{D} \sqcup (\mathbb{S}^2 \setminus \overline{D}) \sim \rho(\overline{D}) \sqcup (\mathbb{S}^2 \setminus \overline{D}) = (\overline{D} \setminus D) \sqcup (\mathbb{S}^2 \setminus \overline{D}) = \mathbb{S}^2 \setminus D.$$

Esto muestra que $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^2 \setminus D$ son $SO(3,\mathbb{R})$-equidescomponibles. Si tomamos D tal que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ es $SO(3,\mathbb{R})$-paradójico (1.1.8), entonces $\mathbb{S}^2 \sim \mathbb{S}^2 \setminus D$ también resulta $SO(3,\mathbb{R})$-paradójico. □

Este resultado implica, en particular, que no existe ninguna medida de probabilidad finitamente aditiva en todo $\mathbb{S}^2$ invariante por rotaciones. De hecho, en general vale la recíproca, si un conjunto X no es G-paradójico entonces puede definirse en él una medida G-invariante finitamente aditiva. Este es el contenido del siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en [11].

Teorema 1.1.10 (Tarski)**.** *Sean G un grupo actuando sobre un conjunto X y $E \subseteq X$. Existe una medida finitamente aditiva G-invariante $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ tal que $\mu(E) = 1$ si y sólo si E no es G-paradójico.*

1.2. Amenabilidad de grupos

En la sección anterior lo que hicimos fue transferir una descomposición paradójica de un grupo G a un conjunto X en el cual G actúa. De la misma manera, si se tiene una medida finitamente aditiva invariante a izquierda sobre G, ésta puede usarse para conseguir una medida G-invariante en X, que muestra que X no puede ser G-paradójico. Fue von Neumann, alrededor del 1929, quien notó esta relación y empezó a clasificar a los grupos que admitían medidas invariantes, llegando a la noción que hoy llamamos amenabilidad.

En esta sección se usarán varios resultados importantes del análisis funcional. Todos estos pueden encontrarse, por ejemplo, en [22].

Definición 1.2.1. Sea G un grupo. Una *medida* en G es una función $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ que satisface

(a) Si $A, B \subseteq X$ son disjuntos entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(b) $\mu(G) = 1$.

Decimos además que μ es *invariante* si para todo $g \in G$ y $A \subseteq X$ se cumple

(c) $\mu(gA) = \mu(A)$.

G se dice *amenable* si admite una medida invariante.

Observación 1.2.2. Notar que si un grupo G es paradójico entonces no puede ser amenable. En particular, F_2 es no amenable. Más aún, el teorema de Tarski 1.1.10 nos dice que vale la recíproca, si un grupo es amenable entonces no es paradójico. Obtenemos así la primera definición equivalente de amenabilidad.

Definición 1.2.3. Sea G un grupo. Una *media* en G es un funcional lineal $M : \ell^\infty(G) \to \mathbb{R}$ que satisface

(1) $M(f) \geq 0$ para toda $f \geq 0$.

(2) $M(1_G) = 1$.

Decimos además que M es *invariante* si para todo $g \in G$ y toda $f \in \ell^\infty(G)$ se cumple

(3) $M(g \cdot f) = M(f)$, donde $g \cdot f$ es la función $(g \cdot f)(h) = f(g^{-1}h)$.

Observación 1.2.4. Si $M : \ell^\infty(G) \to \mathbb{R}$ es una media, entonces M es continua con $\|M\| = 1$. En efecto, si $f \in \ell^\infty(G)$ es tal que $\|f\|_\infty = 1$ entonces $1_G - f \geq 0$ y $f + 1_G \geq 0$, de donde $1 = M(1_G) \geq M(f)$ y $M(f) \geq -M(1_G) = -1$ y así $|M(f)| \leq 1$. Esto dice que $\|M\| \leq 1$ y entonces es evidente que vale la igualdad pues $M(1_G) = 1$.

Una media en G puede pensarse como la integración de funciones sobre una medida finitamente aditiva. De hecho, si M es una media en G, la fórmula $\mu(A) = M(1_A)$ define una medida en G finitamente aditiva. Más aún, si M es invariante entonces μ es invariante y luego G resulta amenable. A continuación veremos que vale la recíproca, es decir, si tenemos una medida invariante μ sobre G, ésta define una media invariante en G. Esto dirá que la existencia de una media invariante es otra definición equivalente de amenabilidad.

Observación 1.2.5. Si X es un conjunto con una medida $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ finitamente aditiva, es posible definir una integral de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ de la misma manera en que uno lo hace para medidas σ-aditivas. Concretamente, la integral de una función característica 1_A (con $A \subseteq X$) es

$$\int_X 1_A d\mu := \mu(A),$$

la integral de una función simple (i.e una función de la forma $\sum_{k=1}^n \lambda_k A_k$ con $\lambda_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $X = \sqcup_{k=1}^n A_k$) positiva se define por linealidad y la integral de una función positiva $f : X \to [0, +\infty]$ es

$$\int_X f d\mu = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_X \varphi d\mu,$$

donde el supremo recorre todas las funciones $0 \leq \varphi \leq f$ simples. Por último, la integral de una función arbitraria $f : X \to \mathbb{R}$ se calcula vía la descomposición $f = f^+ - f^-$.

En un curso típico de teoría de la medida, la linealidad de la integral (sobre medidas σ-aditivas) suele demostrarse a través del teorema de convergencia monótona, que en el contexto de medidas finitamente aditivas no tenemos. Sin embargo, la linealidad puede demostrarse sin apelar a este teorema. En efecto, sean $f, g : X \to [0, +\infty]$. Es fácil ver, por definición, que

$$\int_X (f+g) d\mu \geq \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \tag{1}$$

Para ver la otra desigualdad, sea $0 \leq \varphi \leq f+g$ una función simple y mostremos que $\int_X f d\mu + \int_X g d\mu \geq \int_X \varphi d\mu$. Si escribimos $\varphi = \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k$ con $A_1, \ldots, A_n$ disjuntos dos a dos y $\lambda_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, basta ver que $\int_{A_k} f d\mu + \int_{A_k} g d\mu \geq \lambda_k \mu(A_k)$ para todo k, pues entonces la desigualdad deseada se obtiene sumando sobre k, aplicando (1) y usando que si $A \cap B = \emptyset$ entonces $\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$ (esto último puede probarse igual que en el caso σ-aditivo). Reemplazando f, g por $f 1_{A_k}$ y $g 1_{A_k}$, podemos suponer $n = 1$ y diviendo por λ_k también suponemos $\lambda_k = 1$.

Con todo esto, tenemos $f + g \geq 1_A$ y debemos mostrar que $\int_A f d\mu + \int_B g d\mu \geq \mu(A)$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $f, g \leq 1$ (de no ser así simplemente reemplazamos los valores de f y g mayores a 1 por 1). Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos ahora las funciones

$$f_N = \sum_{j=0}^N 1_{f^{-1}([j/N,(j+1)/N])} \frac{j}{N} \leq f,$$

$$g_N = \sum_{j=0}^N 1_{g^{-1}([j/N,(j+1)/N])} \frac{j}{N} \leq g.$$

Tenemos, para cada $N \in \mathbb{N}$, $(f+g)(x) - (f_N + g_N)(x) \leq 1/N + 1/N = 2/N$ y luego

$$f_N + g_N \geq f + g - \frac{2}{N} 1_A \geq 1_A - \frac{2}{N} 1_A \geq (1 - \frac{2}{N}) 1_A$$

lo que nos da

$$\int_A f d\mu + \int_A g d\mu \geq \int_A f_N d\mu + \int_A g_N d\mu \geq (1 - \frac{2}{N}) \mu(A).$$

Tomando $N \to \infty$ se obtiene la desigualdad que queremos.

Habiendo obtenido la linealidad, es fácil ver ahora que esta integral también cumple $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$ para toda $f : X \to \mathbb{R}$.

Proposición 1.2.6. *Un grupo G es amenable si y sólo si admite una media invariante $M : \ell^\infty(G) \to \mathbb{R}$.*

Demostración. Ya vimos que toda media invariante define una medida invariante. Por otro lado, en la observación previa construimos, a partir de una medida μ en G, una integral sobre μ que define un funcional lineal M en $\ell^\infty(G)$. Por construcción sabemos que éste es positivo y que $M(1_G) = \mu(G) = 1$. Por último, es fácil verificar que si μ es invariante entonces M lo es, pues para funciones características tenemos $g \cdot 1_A = 1_{gA}$ y así

$$M(1_A) = \mu(A) = \mu(gA) = M(1_{gA}) = M(g \cdot 1_A).$$

Luego M es invariante sobre funciones simples y, usando la definición de integral, se llega a la invarianza sobre todo $\ell^\infty(G)$. □

Definimos ahora la condición Følner, para luego probar que es equivalente a la amenabilidad de un grupo.

Definición 1.2.7. Un grupo G satisface la *condición Følner* si para todo subconjunto finito $A \subseteq G$ y todo $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito no vacío $F \subseteq G$ tal que

$$\frac{|aF \triangle F|}{|F|} \leq \varepsilon$$

para todo $a \in A$. Equivalentemente, podemos pedir que F cumpla

$$\frac{|AF \triangle F|}{|F|} \leq \varepsilon.$$

Teorema 1.2.8. *Un grupo G es amenable si y sólo si satisface la condición Følner.*

Demostración. Supongamos primero que G satisface la condición Følner. El conjunto $M(G)$ de todas las medidas sobre G puede identificarse, gracias a la observación 1.2.5, con un subconjunto de $(\ell^\infty(G))^*$, el dual de $\ell^\infty(G)$. Más aún, este subconjunto es débil*-cerrado y está todo contenido en la bola unitaria de este espacio, que sabemos es débil*-compacta por el teorema de Banach-Alaoglu. Luego, vía esta identificación, $M(G)$ es débil*-compacto.

Para cada conjunto finito $A \subseteq G$ y $\varepsilon > 0$, sea $M_{A,\varepsilon} \subseteq M(G)$ el conjunto de medidas μ en G tales que $|\mu(B) - \mu(aB)| \leq \varepsilon$ para todo $B \subseteq G$ y $a \in A$. Afirmamos que éste es no vacío para todo A y ε. En efecto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que A es simétrico (i.e que $g \in A \Rightarrow g^{-1} \in A$) y como G satisface la condición Følner, para cada A y ε existe un conjunto finito $F \subseteq G$ tal que $|F \triangle aF|/|F| \leq \varepsilon$ para todo $a \in A$. Definiendo

$$\mu(B) := \frac{|B \cap F|}{|F|}$$

se ve que $\mu \in M_{A,\varepsilon}$ pues, gracias a que A es simétrico, tenemos

$$\begin{aligned} |\mu(B) - \mu(aB)| &= \frac{||B \cap F| - |aB \cap F||}{|F|} = \frac{\big||B \cap F| - |B \cap a^{-1}F|\big|}{|F|} \\ &\leq \frac{\big|(B \cap F) \triangle (B \cap a^{-1}F)\big|}{|F|} \leq \frac{|F \triangle a^{-1}F|}{|F|} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Si tomamos ahora una medida $\mu_{A,\varepsilon} \in M_{A,\varepsilon}$ para cada A y ε, obtenemos una red, que por compacidad admite una subred débil*-convergente a alguna medida μ. Esto significa que para todo $B \subseteq G$, $\delta > 0$ y (A, ε) existen $A' \supseteq A$ y $\varepsilon' \leq \varepsilon$ de manera que $|\mu_{A',\varepsilon'}(B) - \mu(B)| \leq \delta$. Con esto se ve que μ es una medida invariante (es decir, que G es amenable) pues, fijados $a \in G$ y $B \subseteq G$, lo anterior nos dice que podemos hacer la diferencia $|\mu(B) - \mu(aB)|$ tan chica como queramos, intercalando a una medida $\mu_{A,\varepsilon}$ adecuada.

Supongamos ahora que G es amenable. Sea

$$\Phi = \{f : G \to \mathbb{R}_{\geq 0} : f \text{ tiene soporte finito y } \|f\|_{\ell^1(G)} := \sum_{g \in G} |f(g)| = 1\} \subseteq \ell^1(G).$$

Para probar que G satisface la condición Følner, veremos primero que la amenabilidad de G implica que para todo $A \subseteq G$ finito y $\varepsilon > 0$ existe $f \in \Phi$ tal que $\|f - af\|_{\ell^1(G)} \leq \varepsilon$ para todo $a \in A$, con af la función $(af)(x) = f(a^{-1}x)$ (esto se conoce como la *condición de Hulanicki-Reiter*, que es de hecho equivalente a la amenabilidad de un grupo). En primer lugar, podemos pensar a Φ como un subconjunto de su doble dual $(\ell^1(G))^{**} \simeq (\ell^\infty(G))^*$ vía la inyección canónica

$$\begin{aligned} \iota : \ell^1(G) &\hookrightarrow (\ell^1(G))^{**} \\ f &\mapsto (\varphi \mapsto \varphi(f)). \end{aligned}$$

Sea $M \in (\ell^\infty(G))^*$ una media invariante en G (que existe porque éste es amenable). Afirmamos que $M \in \overline{\Phi}^{w^*}$, es decir, que M está en la clausura débil* de Φ. En efecto, si fuera $M \notin \overline{\Phi}^{w^*}$, gracias a que $\overline{\Phi}^{w^*}$ es débil*-compacto y convexo y la topología débil* es localmente convexa, el teorema de Hahn-Banach geométrico ([22], corolario 5.4) nos dice que existen una función $h \in \ell^\infty(G)$ y números $t, s \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\nu(h) \leq t < s \leq M(h)$$

para todo $\nu \in \overline{\Phi}^{w^*}$. Ahora, reemplazando h por $h + \|h\|_\infty$ (y t, s por $t + \|h\|_\infty$, $s + \|h\|_\infty$) podemos suponer $h \geq 0$, de manera que se cumple $\|h\|_\infty = \sup\{\nu(h) : \nu \in \Phi\}$. Pero entonces tomando este supremo en la desigualdad de más arriba llegamos a

$$\|h\|_\infty \leq t < s \leq M(h) \leq \|h\|_\infty,$$

un absurdo. Luego existe una red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \Phi$ débil*-convergente a M, lo que significa que $\iota(f_\alpha)(b) \xrightarrow{\alpha} M(b)$ para todo $b \in \ell^\infty(G)$. Si ahora fijamos cualquier elemento $a \in G$, gracias a la invarianza de M conseguimos

$$\begin{aligned}|\iota(f_\alpha)(b) - \iota(af_\alpha)(b)| &\leq |\iota(f_\alpha)(b) - M(b)| + \left|M(a^{-1}b) - \iota(af_\alpha)(b)\right| \\ &= |\iota(f_\alpha)(b) - M(b)| + \left|M(a^{-1}b) - \iota(f_\alpha)(a^{-1}b)\right| \xrightarrow{\ \alpha\ } 0\end{aligned}$$

para todo $b \in \ell^\infty(G)$. En otras palabras, la red $\{\iota(f_\alpha) - \iota(af_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ es débil*-convergente a 0 para todo $a \in G$, o equivalentemente, la red $\{f_\alpha - af_\alpha\}_{\alpha\in I}$ converge débilmente a 0 en $\ell^1(G)$ para todo $a \in G$. Sea ahora $A \subseteq G$ finito. El espacio $\bigoplus_{a\in A} \ell^1(G)$ tiene una estructura natural de espacio de Banach y además su topología débil coincide con la topología producto de los espacios $\ell^1(G)$ equipados con sus respectivas topologías débiles. Por todo lo expuesto anteriormente, sabemos que el conjunto

$$\{\oplus_{a\in A}(f_\alpha - af_\alpha)\}_{\alpha\in I} \subseteq \bigoplus_{a\in A} \ell^1(G)$$

contiene en su clausura débil al cero. Por tanto, gracias al lema de Mazur (ver por ejemplo [22], teorema 5.11), la clausura fuerte (i.e. en norma) de su cápsula convexa contiene al cero. Esto implica que existe una sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^1(G)$, donde cada g_n es una combinación convexa de algunos f_α (y por lo tanto pertenece a Φ, pues éste es convexo), de modo que $g_n - ag_n$ converge en norma a 0 para cada $a \in A$. Con esta sucesión es inmediato ver que se cumple la condición de Hulanicki-Reiter para el $A \subseteq G$ que tomamos y cualquier $\varepsilon > 0$.

Volviendo a la demostración original, nuestro objetivo es ver que G cumple la condición Følner. Fijados $A \subseteq G$ finito y $\varepsilon > 0$, existe una función $f \in \Phi$ que cumple $\|f - af\|_{\ell^1(G)} \leq \varepsilon/|A|$ para todo $a \in A$. Como f está finitamente soportada, podemos escribirla de la forma $f = \sum_{i=1}^n c_i 1_{F_i}$, donde los conjuntos F_i son finitos no vacíos, $F_1 \supseteq \cdots \supseteq F_n$ y $c_i > 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Además, como $\|f\|_{\ell^1(G)} = 1$, es $\sum_{i=1}^n c_i|F_i| = 1$. Ahora, si $g \in (aF_i \triangle F_i)$, es sencillo verificar que $|f(g) - af(g)| \geq c_i$ y así

$$\sum_{i=1}^n c_i|aF_i \triangle F_i| \leq \|f - af\|_{\ell^1(G)} \leq \frac{\varepsilon}{|A|}\sum_{i=1}^n c_i|F_i|$$

para cada $a \in A$. Luego

$$\sum_{i=1}^n \sum_{a\in A} c_i|aF_i \triangle F_i| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n c_i|F_i|,$$

de modo que debe existir un i tal que $\sum_{a\in A} |aF_i \triangle F_i| \leq \varepsilon|F_i|$ y por lo tanto, para ese i, se tiene $\frac{|aF_i \triangle F_i|}{|F_i|} \leq \varepsilon$ para todo $a \in A$. Conseguimos entonces probar que vale la condición Følner. □

1.3. Grupos como espacios métricos

Introducimos ahora una manera de pensar a un grupo finitamente generado G como un espacio métrico vía la métrica *word length*, que servirá como fuente de motivación y ejemplos para el capítulo siguiente.

Definición 1.3.1. Sea G un grupo. Una *función de longitud* en G es una función $|\cdot| : G \to [0,\infty)$ que satisface las siguientes condiciones:

(1) $|g| = 0$ si y sólo $g = e$ (i.e, g es la identidad de G).

(2) $|g| = |g^{-1}|$ para todo $g \in G$.

(3) $|gh| \leq |g| + |h|$ para todo $g, h \in G$.

Una función de longitud $|\cdot|$ se dice *propia* si para todo $R > 0$ el conjunto

$$\{g \in G : |g| \leq R\}$$

es finito.

Puede probarse que todo grupo numerable admite una función de longitud propia. Sin embargo, nos interesa la construcción sólo en el caso más restringido en que G es finitamente generado.

Sean G un grupo finitamente generado y $\Sigma \subseteq G$ un sistema de generadores finito y simétrico (un conjunto $\Sigma \subseteq G$ se dice *simétrico* si $g \in \Sigma$ implica $g^{-1} \in \Sigma$). Definimos la *función de longitud de palabra* $|\cdot|_\Sigma$ en G como

$$|g|_\Sigma = \text{mín}\{n : g = \sigma_1 \cdots \sigma_n \ , \sigma_i \in \Sigma\}.$$

Es sencillo verificar que esto es una función de longitud propia en G. Notar que esta función depende del sistema Σ que tomemos.

Ejemplo 1.3.2. La función de longitud de palabra en $\mathbb{Z}$ asociada al sistema $\Sigma = \{1, -1\}$ es simplemente el valor absoluto $|\cdot|$ usual.

Si G es un grupo finito, podemos tomar $\Sigma = G$. En este caso la función de longitud de palabra inducida es simplemente la que vale 1 en cualquier $g \neq e$.

El lector familiarizado con los espacios normados probablemente haya notado el parecido entre una función de longitud en un grupo y una norma en un espacio vectorial. La siguiente definición entonces resultará natural.

Definición 1.3.3. Sea G un grupo finitamente generado provisto de un sistema finito y simétrico de generadores $\Sigma \subseteq G$ y sea $|\cdot|_\Sigma : G \to [0, \infty)$ su función de longitud de palabra asociada. La *métrica de longitud de palabra* (o *word length*) $d = d_{|\cdot|_\Sigma}$ asociada a $|\cdot|_\Sigma$ es la definida por

$$d(g, h) = |gh^{-1}|_\Sigma$$

para todo $g, h \in G$.

Es sencillo verificar que esto efectivamente define una métrica usando las propiedades de $|\cdot|_\Sigma$. Es inmediato también que d es *invariante a derecha*, es decir, se cumple $d(g\gamma, h\gamma) = d(g, h)$ cualesquiera sean $g, h, \gamma \in G$. Esto significa que para todo $h \in G$ la función de traslación a derecha $L_h : G \to G$,

$$L_h(g) = gh$$

es una isometría.

Notar por último que si G es finitamente generado y fijamos un sistema de generadores simétrico y finito Σ entonces, gracias a que la función de longitud de palabra asociada es propia, su métrica *word length* define un espacio métrico en el que toda bola es finita (i.e un espacio *localmente finito*). De hecho, en este caso la métrica toma sólo valores enteros.

Para ayudar a visualizar mejor el espacio métrico asociado a la métrica *word length* en un grupo G, introducimos ahora el grafo de Cayley.

Definición 1.3.4. Sea G un grupo finitamente generado junto con un sistema finito y simétrico de generadores Σ. El *grafo de Cayley* de G con respecto a Σ, notado $\text{Cay}(G, \Sigma)$, es el grafo (no dirigido) definido de la siguiente manera:

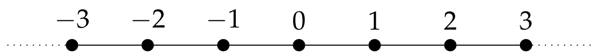
1. Los vértices de $\text{Cay}(G, \Sigma)$ son los elementos de G.

2. Dos vértices $g, h \in G$ están conectados por una arista si y sólo si $gh^{-1} \in \Sigma$.

Pensamos a $\text{Cay}(G, \Sigma)$ como un espacio métrico mediante la *métrica de caminos*, i.e, la distancia entre dos vértices es la longitud del camino más corto que los une (es fácil ver que el grafo es conexo y luego esta distancia está bien definida).

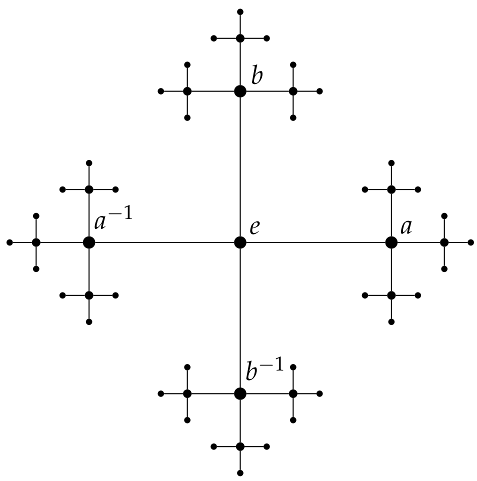
Observación 1.3.5. La métrica de caminos del grafo $\mathrm{Cay}(G, \Sigma)$ es precisamente la métrica *word length* asociada a la función de longitud de palabra. Es decir, el grafo de Cayley da una manera de visualizar a G como espacio métrico.

Ejemplo 1.3.6. Consideremos al grupo $\mathbb{Z}$ con sistema de generadores $\{1, -1\}$. Entonces el grafo de Cayley asociado es el siguiente:



Ejemplo 1.3.7. El grafo de Cayley de $\mathbb{Z}_n$ con sistema de generadores $\{1, n-1\}$ es C_n, el ciclo de n vértices.

Ejemplo 1.3.8. Sea $F_2 =< a, b >$ el grupo libre en dos generadores. Si tomamos $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ como sistema simétrico de generadores, el grafo de Cayley es el siguiente (entendiendo que éste se extiende infinitamente):



Grafo de Cayley de F_2.

Capítulo 2

Amenabilidad en espacios métricos

Introducimos en este capítulo el concepto de amenabilidad en el contexto de espacios métricos localmente finitos, i.e, espacios métricos en los que toda bola es un conjunto finito. Ejemplos típicos de estos espacios son los grupos finitamente generados discretos, dotados de la métrica *word length*. En este capítulo y todos los siguientes seguiremos mayormente [1].

2.1. Definiciones y propiedades básicas

Definición 2.1.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Para cada $R > 0$ definimos los siguientes subespacios:

- $\partial_R A := \{x \in X : d(x, A) \leq R \text{ y } d(x, X \setminus A) \leq R\}$ (*R-frontera*)
- $\partial_R^+ A := \{x \in X \setminus A : d(x, A) \leq R\}$ (*R-frontera exterior*)
- $\partial_R^- A := \{x \in A : d(x, X \setminus A) \leq R\}$ (*R-frontera interior*)

Notar que $\partial_R A = \partial_R^+ \sqcup \partial_R^- A$.

Definición 2.1.2. Sean (X, d) un espacio métrico localmente finito y $R, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

(i) Decimos que $F \subseteq X$ es un *conjunto* (R, ε)*-Følner* si es finito y cumple

$$\frac{|\partial_R F|}{|F|} \leq \varepsilon$$

Notamos $\text{Føl}(R, \varepsilon)$ al conjunto de los subconjuntos (R, ε)-Følner.

(ii) (X, d) se dice *amenable* si para todo $(R, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2_{>0}$ existe $F \in \text{Føl}(R, \varepsilon)$.

(iii) (X, d) es *propiamente amenable* si para todo $(R, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2_{>0}$ y $A \subseteq X$ finito existe $F \in \text{Føl}(R, \varepsilon)$ tal que $A \subseteq F$.

Observar que definimos una noción de amenabilidad *propia* que no aparece en el contexto de grupos. Veremos más adelante que en ese contexto las dos propiedades son equivalentes (pensando a grupos finitamente generados como espacios métricos como se discutió previamente).

Observación 2.1.3. Notemos que si $R_1 \leq R_2$ entonces $\partial_{R_1} F \subseteq \partial_{R_2} F$ para cualquier $F \subseteq X$. Esto nos dice que, fijado ε, es $\text{Føl}(R_2, \varepsilon) \subseteq \text{Føl}\ (R_1, \varepsilon)$ pues, dado $F \in \text{Føl}\ (R_2, \varepsilon)$, tenemos

$$\frac{|\partial_{R_1} F|}{|F|} \leq \frac{|\partial_{R_2} F|}{|F|} \leq \varepsilon$$

Por otro lado, si $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ y R está fijo entonces $\text{Føl}\ (R, \varepsilon_1) \subseteq \text{Føl}\ (R, \varepsilon_2)$ pues, si $F \in \text{Føl}(R, \varepsilon_1)$, es

$$\frac{|\partial_R F|}{|F|} \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$$

Esta observación nos permite dar una definición alternativa de amenabilidad en términos de redes.

Proposición 2.1.4. *Sea (X, d) un espacio métrico localmente finito. Entonces*

(I) *(X, d) es amenable si y sólo si existe una red $\{F_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos finitos no vacíos tales que*

$$\lim_i \frac{|\partial_R F_i|}{|F_i|} = 0 \quad \forall R > 0$$

(II) *(X, d) es propiamente amenable si y sólo si existe una red como en (i) que además satisface $X = \liminf_i F_i := \bigcup_{j\in I} \bigcap_{i\geq j} F_i$*

Demostración.

(I) Supongamos que (X, d) es amenable y para cada $R_n = n$, $\varepsilon_m = 1/m$ con $n, m \in \mathbb{N}$ tomemos $F_{n,m} \in \text{Føl}(R_n, \varepsilon_m)$. Esto nos da una red $\{F_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ donde entendemos que $(n, m) \leq (n', m')$ si y sólo si $n \leq n'$ y $m \leq m'$. Fijemos ahora $R > 0$ y $\varepsilon > 0$. Podemos tomar entonces $n_0 \in \mathbb{N}$ y $m_0 \in \mathbb{N}$ tales que $R_{n_0} > R$ y $\varepsilon_{m_0} < \varepsilon$ y por la observación 2.1.3, si $(n, m) > (n_0, m_0)$ tenemos

$$\text{Føl}(R_n, \varepsilon_m) \subseteq \text{Føl}(R_{n_0}, \varepsilon_m) \subseteq \text{Føl}(R_{n_0}, \varepsilon_{m_0}) \subseteq \text{Føl}(R, \varepsilon_{m_0}) \subseteq \text{Føl}(R, \varepsilon)$$

Luego para todo $(n, m) \geq (n_0, m_0)$ es

$$\frac{|\partial_R F_{n,m}|}{|F_{n,m}|} \leq \varepsilon$$

y esto prueba entonces que

$$\lim_{(n,m)} \frac{|\partial_R F_{n,m}|}{|F_{n,m}|} = 0.$$

Recíprocamente, si tenemos una red $\{F_i\}_{i\in I}$ como en (i), dados $R > 0$ y $\varepsilon > 0$, existe un $i_0 \in I$ tal que para todo $i \geq i_0$ es

$$\frac{|\partial_R F_i|}{|F_i|} \leq \varepsilon$$

En particular entonces $F_{i_0} \in \text{Føl}(R, \varepsilon)$ y (X, d) resulta amenable.

(II) Si (X, d) es propiamente amenable nuevamente ponemos $R_n = n$, $\varepsilon_m = 1/m$ y para cada $A \subseteq X$ finito no vacío tomamos $F_{n,m,A} \in \text{Føl}(R_n, \varepsilon_m)$ con $A \subseteq F_{n,m,A}$. Ahora tenemos una red $\{F_{n,m,A}\}$, donde $(n, m, A) \leq (n', m', A')$ si y sólo si $n \leq n'$, $m \leq m'$ y $A \subseteq A'$. De manera similar a (i) vemos entonces que

$$\lim_{(n,m,A)} \frac{|\partial_R F_{n,m,A}|}{|F_{n,m,A}|} = 0$$

y además es fácil ver que $X = \liminf F_{(n,m,A)}$, pues si $x \in X$, tomamos $n, m \in \mathbb{N}$ arbitrarios y consideramos $F_{n,m,\{x\}}$. Ahora, por definición tenemos $x \in F_{n,m,\{x\}}$ y si $(n', m', A') \geq (n, m, \{x\})$ se tiene $\{x\} \subseteq A' \subseteq F_{n',m',A'}$, por lo que

$$x \in \bigcap_{(n',m',A')\geq(n,m,\{x\})} F_{n',m',A'}$$

La recíproca es análoga a (i).

□

Observación 2.1.5. Si G es un grupo finitamente generado discreto (con un sistema Σ finito y simétrico ya fijo) equipado con la métrica *word length*, esta noción de amenabilidad es equivalente a la de su amenabilidad como grupo.

Para verlo, probaremos que G es amenable como espacio métrico si y sólo si para todo $R > 0$ y $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $F \subseteq G$ tal que

$$\frac{|F \triangle aF|}{|F|} \leq \varepsilon$$

para todo $a \in G$ tal que $|a| \leq R$ (acá $|\cdot|$ significa $|\cdot|_\Sigma$, omitimos el subíndice por comodidad). Esta condición es equivalente a la amenabilidad como grupo pues todo conjunto finito $A \subseteq G$ está contenido en alguna bola $B(e, R)$ (siendo e el elemento neutro de G). Sean $R > 0$, $\varepsilon > 0$ y $F \subseteq G$ finito. Es una verificación sencilla que se cumple

$$\bigcup_{|a| \leq R} (aF \setminus F) = \partial_R^+ F = \{g \in G \setminus F : \text{existe } f \in F \text{ tal que } d(g, f) \leq R\}$$

y por lo tanto

$$|\partial_R^+ F| \leq \sum_{|a| \leq R} |aF \setminus F| \leq \sum_{|a| \leq R} |aF \triangle F|. \tag{1}$$

Por otro lado, para cada $a \in G$ tenemos

$$|aF \triangle F| = |aF \setminus F| + |F \setminus aF| = |aF \setminus F| + |a^{-1}F \setminus F|$$

y como además $|a| = |a^{-1}|$, se llega a

$$\sum_{|a| \leq R} |aF \triangle F| = 2 \left(\sum_{|a| \leq R} |aF \setminus F| \right) \leq 2|B(e, R)| \max_{|a| \leq R} |aF \setminus F| \leq 2|B(e, R)||\partial_R^+ F|. \tag{2}$$

Juntando (1) y (2), llegamos a la estimación

$$\frac{1}{2|B(e, R)|} \sum_{|a| \leq R} |aF \triangle F| \leq |\partial_R^+ F| \leq \sum_{|a| \leq R} |aF \triangle F|$$

que nos permite probar la equivalencia que queremos.

Concretamente, fijando $R > 0$ y ε, si G es amenable como espacio métrico sabemos, por 2.1.7, que existe $F \subseteq G$ finito con $|\partial_R^+ F|/|F| \leq \varepsilon/2|B(e, R)|$ y entonces para todo $|a| \leq R$ se tiene

$$\frac{|F \triangle aF|}{|F|} \leq \sum_{|a| \leq R} \frac{|aF \triangle F|}{|F|} \leq 2|B(e, R)| \frac{|\partial_R^+ F|}{|F|} \leq \varepsilon.$$

Recíprocamente, si G es amenable como grupo tenemos $F \subseteq G$ tal que $|aF \triangle F|/|F| \leq \varepsilon/|B(e, R)|$ para todo $|a| \leq R$ y así

$$\frac{|\partial_R^+ F|}{|F|} \leq \sum_{|a| \leq R} \frac{|aF \triangle F|}{|F|} \leq |B(e, R)| \frac{\varepsilon}{|B(e, R)|} = \varepsilon.$$

Ejemplos 2.1.6. Es inmediato verificar que todo espacio métrico finito es propiamente amenable, pues el espacio mismo es un conjunto (R, ε)-Følner para todo R y ε.

El espacio métrico $\mathbb{Z}$ (pensado como subespacio de $\mathbb{R}$) es propiamente amenable. Esto puede verse tomando, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$F_n = \{-n, -n+1, \ldots, n-1, n\} \subseteq \mathbb{Z}$$

y verificando que, para $n >> R$, se cumple $\partial_R F_n = \{-n-[R], \dots, -n+[R]-1, n-[R]+1, \dots, n+[R]\}$ (donde $[R]$ es la parte entera de R) y luego

$$\frac{|\partial_R F_n|}{|F_n|} = \frac{4[R]}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Por la proposición 2.1.4, $\mathbb{Z}$ es propiamente amenable pues la sucesión $\{F_n\}$ además cumple que $\mathbb{Z} = \liminf_n F_n$.

Por último, gracias a la observación 2.1.5, el espacio métrico asociado al grafo de Cayley de F_2 no es amenable.

Observación 2.1.7. En las definiciones de conjuntos Følner, amenabilidad y amenabilidad propia (2.1.2), el uso de la R-frontera se puede reemplazar por el de la R-frontera exterior, obteniéndose la misma noción de amenabilidad (propia).

Para verlo, definimos primero el siguiente subconjunto de X asociado a cada $A \subseteq X$ y $R > 0$:

$$N_R^+ A := \{x \in X : d(x, A) \leq R\}.$$

Afirmamos ahora que se tiene $\partial_R(N_R^+ A) \subseteq \partial_{2R}^+ A$. En efecto, tomemos $x \in \partial_R(N_R^+ A)$ y notemos primero que debe ser $x \in X \setminus A$, pues si $x \in A$ entonces $d(x, X \setminus N_R^+ A) > R$ y luego $x \notin \partial_R(N_R^+ A)$. Resta verificar ahora que $d(x, A) \leq 2R$. Por hipótesis sabemos que debe existir $y \in N_R^+ A$ de modo que $d(x,y) \leq R$ (en un espacio localmente finito, la distancia de un punto a un conjunto se realiza). A su vez, como $y \in N_R^+ A$, existe $z \in A$ tal que $d(y,z) \leq R$. Juntando todo esto llegamos a

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq 2R$$

y por lo tanto $d(x, A) \leq 2R$. Esto nos dice que si tenemos un conjunto finito $F \subseteq X$ que cumple $\frac{|\partial_{2R}^+ F|}{|F|} \leq \varepsilon$, podemos tomar $N_R^+ F$, que resulta (R, ε)-Følner en el sentido usual pues (usando que $N_R^+ F \supseteq F$)

$$\frac{|\partial_R(N_R^+ F)|}{|N_R^+ F|} \leq \frac{|\partial_{2R}^+ F|}{|F|} \leq \varepsilon.$$

Lema 2.1.8. *Sea (X, d) un espacio métrico infinito localmente finito. Entonces X es propiamente amenable si y sólo si para todo $R > 0$, $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ existe $F \in Føl(R, \varepsilon)$ tal que $|F| \geq N$. Lo mismo vale si en la definición de conjunto Følner usamos la R-frontera exterior.*

Demostración. Dado $N \in \mathbb{N}$, podemos tomar un subconjunto finito $A \subseteq X$ tal que $|A| = N$. Si X es propiamente amenable, debe haber un $F \in \text{Føl}(R, \varepsilon)$ tal que $A \subseteq F$, cualesquiera sean R y ε. En particular entonces $|F| \geq |A| \geq N$, lo cual prueba el "sólo si".

Para la vuelta, sean $R > 0$, $\varepsilon > 0$ y $A \subseteq X$ finito. Por hipótesis, existen subconjuntos $F \subseteq X$ de cardinal arbitrariamente grande tales que

$$\frac{|\partial_R F|}{|F|} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Si ahora ponemos $\tilde{F} = F \cup A$, tenemos $A \subseteq \tilde{F}$ y

$$\frac{|\partial_R \tilde{F}|}{|\tilde{F}|} \leq \frac{|\partial_R F|}{|F|} + \frac{|\partial_R A|}{|F|} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|\partial_R A|}{|F|} \xrightarrow[|F|\to\infty]{} \frac{\varepsilon}{2}$$

por lo que, tomando $|F|$ suficientemente grande, $\tilde{F}$ resulta ser (R, ε)-Følner, probando que X es propiamente amenable. El caso con R-frontera exterior es completamente análogo. $\square$

2.2. Descomposiciones paradójicas

Al igual que en el caso de grupos, la amenabilidad de espacios métricos está asociada a la existencia de descomposiciones paradójicas. Introduciremos ahora las definiciones pertinentes, para luego demostrar el resultado central sobre este tema.

Definición 2.2.1. Sea (X, d) un espacio métrico localmente finito. Una *traslación parcial en* X es una terna (A, B, t), con A y B subespacios de X y $t : A \to B$ una biyección cuyo gráfico

$$\mathrm{gr}(t) = \{(x, t(x)) \in X \times X : x \in A\}$$

está controlado, i.e, $\sup_{x \in A} d(x, t(x)) < \infty$. Notamos al dominio y al rango (o imagen) de t respectivamente por $\mathrm{dom}(t) = A$ y $\mathrm{ran}(t) = B$ (admitimos el caso $\mathrm{dom}(t) = \varnothing$, en el cual $t : \varnothing \to \varnothing$ pues t debe ser biyección). El conjunto de todas las traslaciones parciales de X será $\mathrm{PT}(X)$.

Dadas dos traslaciones parciales $t, t' \in \mathrm{PT}(X)$, su composición $t \circ t'$ (donde tiene sentido) resulta una traslación parcial. Más precisamente, su dominio es

$$\mathrm{dom}(t \circ t') = \{x \in \mathrm{dom}(t') : t'(x) \in \mathrm{dom}(t)\}$$

y su gráfico está controlado pues, usando desigualdad triangular, se tiene

$$\sup_{x \in \mathrm{dom}(t \circ t')} d\left(x, (t \circ t')(x)\right) \leq \sup_{x \in \mathrm{dom}(t')} d(x, t'(x)) + \sup_{x \in \mathrm{dom}(t)} d(x, t(x)) < \infty.$$

Definición 2.2.2. Sea (X, d) un espacio métrico localmente finito. Una *medida* en X es una función $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ que satisface

(a) $\mu(X) = 1$.

(b) Si $A, B \subseteq X$ son disjuntos, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Diremos además que μ es *invariante bajo traslaciones parciales* si también se cumple

(c) $\mu(A) = \mu(B)$ para toda traslación parcial (A, B, t).

Notar que de la condición (b) se sigue que si $A \subseteq B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Definición 2.2.3. Sea (X, d) un espacio métrico localmente finito. Una *descomposición paradójica* de X es una partición $X = X_+ \sqcup X_-$ junto con dos traslaciones parciales $t_i : X \to X_i$, con $i \in \{+, -\}$.

Observación 2.2.4. Para garantizar la existencia de una descomposición paradójica en un espacio X alcanza con encontrar dos subespacios disjuntos $X'_+, X'_- \subseteq X$, junto con dos traslaciones parciales $t'_i : X \to X'_i$. En otras palabras, no es necesario que la unión sea todo el espacio X.

Para verlo, supongamos que tenemos una descomposición (X'_+, t'_+, X'_-, t'_-) de esta última forma. Escribiendo $X = X'_+ \sqcup X'_- \sqcup \tilde{X}$, sea

$$\widehat{X} = \bigcup_{k=0}^{\infty} (t'_+)^k(\tilde{X})$$

donde entendemos que $(t'_+)^0$ es la identidad. Notemos ahora que, como la imagen de t'_+ es X'_+, se tiene $\tilde{X} \cap (t'_+)^k(\tilde{X}) = \varnothing$ para todo $k \geq 1$ y luego $\widehat{X} = \tilde{X} \sqcup t'_+(\widehat{X})$. Esto nos dice, junto con la inyectividad de t'_+, que $t'_+(X \setminus \widehat{X}) = X'_+ \setminus t'_+(\widehat{X}) = X'_+ \setminus \widehat{X}$. Con todo esto podemos construir una descomposición paradójica en el sentido de la definición 2.2.3, poniendo

$$\begin{aligned} X_+ &= X'_+ \sqcup \tilde{X} & t_+ &= \left(t'_+|_{X \setminus \widehat{X}}\right) \sqcup Id_{\widehat{X}} \\ X_- &= X'_- & t_- &= t'_- \end{aligned}$$

Sólo queda verificar que t_+ tiene gráfico controlado, lo que se deduce simplemente de que t'_+ es traslación parcial.

2.3. Espacios extendidos

En lo que sigue estudiaremos la amenabilidad en el contexto de espacios métricos *extendidos*, es decir, contemplaremos la posibilidad de que dos puntos estén a distancia infinita entre sí. Nótese que la propiedad de que dos puntos estén a distancia finita define una relación de equivalencia, lo que descompone al espacio X en una unión disjunta de clases, $X = \sqcup_{i\in I} X_i$, de manera que cada $(X_i, d|_{X_i\times X_i})$ es un espacio métrico y $d(X_i, X_j) = \infty$ si $i \neq j$. Cada X_i es una *componente conexa gruesa* de X. Observemos también que a diferencia del caso ordinario, los espacios métricos localmente finitos extendidos no tienen porqué ser numerables (aunque cada componente sí lo es).

Todas las definiciones previas se generalizan al caso extendido. De hecho, veremos más adelante que las nociones de amenabilidad y amenabilidad propia sólo pueden diferir en caso de que haya más de una componente gruesa.

Observación 2.3.1. La observación 2.2.4 y el lema 2.1.8 valen también en el caso extendido. En ambos casos, es sencillo verificar que todos los argumentos pasan al caso extendido sin problemas. Notemos además que si $F \subseteq X = \sqcup_{i\in I} X_i$ es un conjunto finito entonces

$$d(x, F) = \min\{d(x, F_i) : i \in I\}$$

donde $F_i = F \cap X_i$ es la i-ésima componente de F. Esto nos dice que la R-frontera de F se descompone como unión disjunta de las R-fronteras de cada una de sus componentes, es decir,

$$\partial_R(F) = \sqcup_{i\in I} \partial_R(F_i).$$

Además, como $R < \infty$ y las componentes están todas a distancia infinita entre sí, la R-frontera de cada F_i en el espacio X_i coincide con su R-frontera en el espacio X. En particular, $\partial_R F_i \subseteq X_i$ para todo $i \in I$.

Lema 2.3.2. *Sea (X, d) un espacio métrico localmente finito extendido amenable. Entonces para todo $R, \varepsilon > 0$ existe un subconjunto $F \in$ Føl(R, ε) contenido enteramente en una sola componente gruesa.*

Demostración. Escribamos $X = \sqcup_{i\in I} X_i$ y dados $R, \varepsilon > 0$ sea $F \in$ Føl(R, ε), $F = \sqcup_{i\in I} F_i$. Afirmamos ahora que debe existir un $i \in I$ tal que $F_i \in$ Føl(R, ε), lo que prueba lo que queremos. En efecto, supongamos que no fuera así, es decir, que para todo $i \in I$ tal que $F_i \neq \emptyset$ (de los cuales hay finitos pues F mismo es finito) fuera

$$\frac{|\partial_R(F_i)|}{|F_i|} > \varepsilon$$

Se tendría entonces

$$\frac{|\partial_R(F)|}{|F|} = \frac{\sum_{i\in I} |\partial_R(F_i)|}{|F|} > \sum_{i\in I} \frac{\varepsilon |F_i|}{|F|} = \varepsilon$$

lo cual es absurdo. □

Proposición 2.3.3. *Sea (X, d) un espacio métrico localmente finito extendido. Entonces X es amenable si al menos una de sus componentes conexas gruesas lo es. La recíproca es cierta si hay un número finito de componentes.*

Demostración. En vista de la observación 2.3.1, la primera afirmación es trivial, pues si encontramos un subconjunto (R, ε)-Følner en una componente, éste será (R, ε)-Følner en todo el espacio. Para la segunda, escribamos $X = \sqcup_{i=1}^N X_i$ con X_i las componentes gruesas de X. Como X es amenable, usando el lema 2.3.2, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto $F_n \in$ Føl$(n, 1/n)$ y un $i \in \{1, \ldots, N\}$ (que depende de n) tal que $F_n \subseteq X_i$. Ahora, como hay finitas componentes y la sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es infinita, debe existir un $i \in \{1, \ldots, N\}$ fijo y una subsucesión $\{F_{n_j}\}$ de manera que $F_{n_j} \subseteq X_i$ para todo n_j. Fijado un $R > 0$, sabemos que para todo $n_j > R$ se tiene $\partial_R(F_{n_j}) \subseteq \partial_{n_j}(F_{n_j})$ y por lo tanto (si $n_j > R$)

$$\frac{|\partial_R(F_{n_j})|}{|F_{n_j}|} \leq \frac{|\partial_{n_j}(F_{n_j})|}{|F_{n_j}|} \leq \frac{1}{n_j} \xrightarrow[n_j\to\infty]{} 0$$

Esto nos dice que la sucesión $\{F_{n_j}\}$ es una red como en la proposición 2.1.4 para el espacio (X_i, d_i) (con d_i la restricción de d a X_i). Luego X_i es amenable.

Podemos dar una demostración alternativa de esta segunda afirmación, usando el teorema 2.3.4 sobre descomposiciones paradójicas que veremos a continuación. Razonando por el absurdo, supongamos que todas las componentes X_i fueran no amenables. Luego para cada $i = 1, \ldots, N$ se tendría una descomposición paradójica $X_i = X_+^i \sqcup X_-^i$ con $t_j^i : X_i \to X_j^i$ traslación parcial, para $j \in \{+, -\}$. Pero esto nos permitiría construir una descomposición paradójica para X (lo que implicaría que X es no amenable), poniendo

$$X_+ := \sqcup_{i=1}^N X_+^i \quad \text{ y } \quad X_- := \sqcup_{i=1}^N X_-^i$$

con traslaciones parciales $t_j : X \to X_j$, $t_j = \sqcup_{i=1}^N t_j^i$ (nuevamente para $j \in \{+, -\}$). En efecto, debido a que hay sólo finitas componentes, estas biyecciones tienen gráfico controlado, pues

$$\sup_{x\in X} d(x, t_j(x)) = \max_{i=1,\ldots,N} \sup\{d(x, t_j^i(x)) : x \in X_i\} < \infty$$

□

Enunciamos y demostramos ahora el teorema central de esta sección.

Teorema 2.3.4. *Sea (X, d) un espacio métrico localmente finito extendido con su descomposición $X = \sqcup_{i\in I} X_i$ en componentes conexas gruesas. Son equivalentes*

(1) (X, d) es amenable.

(2) X no admite descomposiciones paradójicas.

(3) Existe una medida μ en X invariante bajo traslaciones parciales.

Demostración. Veamos primero (2) ⇒ (1) mostrando que vale la contrarrecíproca. Supongamos entonces que (X, d) no es amenable. Por la observación 2.2.4, nos bastará encontrar dos subespacios disjuntos $X'_+, X'_- \subseteq X$ y dos traslaciones parciales $t'_i : X \to X'_i$ con $i \in \{+, -\}$. Ahora, la no amenabilidad de X implica que existen $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ (gracias a la observación 2.1.3, podemos achicar ε y suponerlo menor a 1) y $R_0 > 0$ de manera que, para todo $F \subseteq X$ finito, se tiene $|\partial^+_{R_0}(F)| > \varepsilon_0|F|$ ó, equivalentemente, $|N^+_{R_0}(F)| > (1 + \varepsilon_0)|F|$ (pues $N^+_{R_0}(F) = \partial^+_{R_0}(F) \sqcup F$). Como esta condición vale para cualquier subconjunto finito, tenemos también

$$|N^+_{2R_0}(F)| \geq |N^+_{R_0}\left(N^+_{R_0}(F)\right)| \geq (1 + \varepsilon_0)|N^+_{R_0}(F)| \geq (1 + \varepsilon_0)^2|F|$$

y siguiendo inductivamente podemos tomar $R_d := nR_0$, con n lo suficientemente grande de manera que ahora valga

$$|N^+_{R_d}(F)| > 2|F|$$

para todo subconjunto finito $F \subseteq X$.

El resto de la demostración consistirá en usar el lema de Zorn para conseguir una descomposición paradójica de X. Intuitivamente, el radio R_d nos da una "duplicación local"del espacio, y mediante el lema de Zorn lograremos hacer global esta duplicación. Para esto, consideramos el conjunto Ω de funciones $\omega : X \times \{+, -\} \to \mathcal{P}(X)$ que satisfacen

- Para todo $y = (x, j) \in X \times \{+, -\}$ se cumple $\omega(y) \in \mathcal{P}(B_{R_d}(x))$
- Para todo conjunto finito $K \subseteq X \times \{+, -\}$ vale que $|\bigcup_{y\in K} \omega(y)| \geq |K|$.

Nótese que, si $\omega \in \Omega$, $\omega(y)$ es un conjunto finito para todo y, pues las bolas son finitas en X. Además, Ω es no vacío pues la función ω dada por $\omega(y) \coloneqq B_{R_d}(x)$ para $y = (x, j)$ pertenece a Ω. Es evidente que la primera de las dos condiciones anteriores se cumple, y la segunda es precisamente consecuencia de la condición de duplicación local mencionada más arriba. Concretamente, si $K \subseteq X \times \{+, -\}$ es finito, escribimos $K = K_+ \times \{+\} \sqcup K_- \times \{-\}$ y notamos que

$$|\bigcup_{y \in K} \omega(y)| = |N^+_{R_d}(K_+ \cup K_-)| \geq 2|K_+ \cup K_-| \geq |K_+| + |K_-| = |K|$$

Dotamos ahora a Ω de un orden definido por

$$\omega \leq \omega' \quad \text{si} \quad \omega(y) \subseteq \omega'(y) \text{ para todo } y \in X \times \{+, -\}$$

Con este orden, toda cadena tiene una cota inferior en Ω. Para verlo, sea $\{\omega_i\}_{i \in I}$ una tal cadena. Definimos $\omega : X \times \{+, -\} \to \mathcal{P}(X)$ como $\omega(y) = \cap_{i \in I} \omega_i(y)$ para cada $(y) = (x, j) \in X \times \{+, -\}$. Es claro que $\omega(y) \in \mathcal{P}(B_{R_d}(x))$ para todo y pues esto se cumple para cada ω_i. Para ver la segunda propiedad, sea $K \subseteq X \times \{+, -\}$ un conjunto finito. Para cada $y \in K$, el conjunto $\{|\omega_i(y)|\}_{i \in I}$ tiene un mínimo alcanzado por algún $\omega_{i_0^y}$. Esto significa que para cada $y \in K$ existe un $i_o^y \in I$ de manera que $\omega(y) = \omega_{i_0^y}(y)$. Como K es finito y $\{\omega_i\}_{i \in I}$ es una cadena, el conjunto $\{\omega_{i_0^y}\}_{y \in K}$ tiene un mínimo ω_{i_0}, que por lo tanto cumple

$$\omega\big|_K = \omega_{i_0}\big|_K$$

Luego, como $\omega_{i_0} \in \Omega$, se tiene

$$|\bigcup_{y \in K} \omega(y)| = |\bigcup_{y \in K} \omega_{i_0}(y)| \geq |K|.$$

Hecha esta verificación, el lema de Zorn nos da un elemento minimal respecto a este orden, al cual llamamos $\omega_m \in \Omega$.

Si logramos mostrar que ω_m cumple $|\omega_m(y)| = 1$ para todo $y \in X \times \{+, -\}$ tendremos una descomposición paradójica de X. En efecto, podremos definir (para $l \in \{+, -\}$) una función $t_l : X \to X$ que a cada $x \in X$ le asigna el único elemento del conjunto $\omega_m(x, l)$. Dados $y, y' \in X \times \{+, -\}$ distintos, como $\omega_m \in \Omega$ se tiene (tomando $K = \{y, y'\}$)

$$|\omega_m(y) \cup \omega_m(y')| \geq 2$$

y luego debe ser $\omega_m(y) \cap \omega_m(y') = \emptyset$. Esto implica que las funciones t_l son inyectivas y tienen imágenes disjuntas, y es claro que tienen gráfico controlado pues para todo $x \in X$ se cumple $\omega_m(x, l) \subseteq B_{R_d}(x)$, o en otras palabras, $d(x, t_l(x)) \leq R_d$.

Resta ver entonces que vale $|\omega_m(y)| = 1$ para todo $y \in X \times \{+, -\}$. Es fácil ver que $|\omega_m(y)| \geq 1$ simplemente tomando $K = \{y\}$. Supongamos que para algún $y_0 \in X \times \{+, -\}$ no valiera la igualdad. Luego existen (al menos) dos elementos distintos $x_1, x_2 \in \omega_m(y_0)$. Por la minimalidad de ω_m, deben existir dos conjuntos finitos $K_l \subseteq X \times \{+, -\}$, con $l = 1, 2$, que no contengan a y_0 de modo que

$$\left| (\omega_m(y_0) \setminus \{x_l\}) \cup \left(\bigcup_{y \in K_l} \omega_m(y) \right) \right| \leq |K_l|$$

pues de lo contrario se podría quitar x_l de $\omega_m(y_0)$ y conseguir una función en Ω estrictamente menor que ω_m. Para aliviar la notación, llamemos

$$Z_l \coloneqq (\omega_m(y_0) \setminus \{x_l\}) \cup \left(\bigcup_{y \in K_l} \omega_m(y) \right)$$

Usando la desigualdad anterior y notando que $(\omega_m(y_0) \setminus \{x_1\}) \cup (\omega_m(y_0) \setminus \{x_2\}) = \omega_m(y_0)$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
|K_1| + |K_2| &\geq |Z_1| + |Z_2| = |Z_1 \cup Z_2| + |Z_1 \cap Z_2| \\
&\geq \left| \omega_m(y_0) \cup \left(\bigcup_{y \in K_1 \cup K_2} \omega_m(y) \right) \right| + \left| \bigcup_{y \in K_1 \cap K_2} \omega_m(y) \right| \\
&\geq 1 + |K_1 \cup K_2| + |K_1 \cap K_2| = 1 + |K_1| + |K_2|
\end{aligned}
$$

lo cual es absurdo. Luego debe ser $|\omega_m(y)| = 1$ para todo $y \in X \times \{+, -\}$ como queríamos.

Para ver (3) $\Rightarrow$ (2), procedemos por el absurdo. Supongamos que tuviéramos una descomposición paradójica (X_+, t_+, X_-, t_-) de X. Usando la medida μ que por hipótesis existe, llegamos rápidamente al siguiente absurdo:

$$1 = \mu(X) = \mu(X_+ \sqcup X_-) = \mu(X_+) + \mu(X_-) = \mu(X) + \mu(X) = 2$$

Concluimos entonces que si vale (3) no pueden existir descomposiciones paradójicas.

Finalmente, para la implicación (1) $\Rightarrow$ (3) veremos primero que si X es amenable entonces para todo $\mathcal{R} \subseteq PT(X)$ finito y $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito no vacío $F \subseteq X$ tal que $|\partial_{\mathcal{R}}(F)| \leq \varepsilon |F|$, donde

$$\partial_{\mathcal{R}}(F) := \{x \in X \setminus F : \text{existe } \rho \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} \text{ tal que } x \in \operatorname{dom}(\rho) \text{ y } \rho(x) \in F\}$$

En efecto, sean $\mathcal{R} \subseteq PT(X)$ un subconjunto finito y $\varepsilon > 0$. Escribiendo $\mathcal{R} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ para algunas traslaciones parciales φ_i, sea

$$R := \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sup_{x \in \operatorname{dom}(\varphi_i)} d(x, \varphi_i(x)) \right]$$

Ahora, si $F \subseteq X$ es un subconjunto y $x \in \partial_{\mathcal{R}}(F)$ entonces por definición existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in \operatorname{dom}(\varphi_i)$ y $\varphi_i(x) \in F$ ó $x \in \operatorname{dom}(\varphi_i^{-1})$ y $\varphi_i^{-1}(x) \in F$. En cualquier caso, como $d(x, \varphi_i(x)) \leq R$ ó $d(x, \varphi_i^{-1}(x)) \leq R$, debe ser $d(x, F) \leq R$. En otras palabras, $\partial_{\mathcal{R}}(F) \subseteq \partial_R^+(F)$ para todo $F \subseteq X$. Con todo esto, si tenemos $\mathcal{R} \subseteq PT(X)$ y $\varepsilon > 0$, simplemente tomamos R como antes y (gracias a la observación 2.1.7) un $F \subseteq X$ finito tal que $|\partial_R^+(F)| \leq \varepsilon |F|$ y llegamos a

$$|\partial_{\mathcal{R}}(F)| \leq |\partial_R^+(F)| \leq \varepsilon |F|.$$

La propiedad que acabamos de introducir es la llamada *condición Følner para el pseudogrupo* $(PT(X), X)$. No ahondaremos más en el tema pues no lo necesitamos, pero esta condición es equivalente a la amenabilidad de X (ver [3]).

Construiremos ahora la medida que necesitamos usando herramientas de análisis funcional, de manera similar a la demostración del teorema 1.2.8. Sea $\mathcal{M}(X)$ el conjunto de todas las medidas en X (en el sentido de la definición 2.2.2) y sea $\ell^\infty(X)$ el espacio de Banach de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ acotadas, con la norma de convergencia uniforme (es decir, $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$). Tenemos una aplicación inyectiva

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(X) &\to (\ell^\infty(X))^* \\
\mu &\mapsto \left(f \mapsto \int_X f \, d\mu \right)
\end{aligned}
$$

que nos permite identificar a $\mathcal{M}(X)$ con un subconjunto de la bola unitaria de $(\ell^\infty(X))^*$ (el espacio dual de $\ell^\infty(X)$)[1] y además es fácil verificar que es cerrado en la topología débil*. Por

[1] Notar que acá la integral es con respecto a medidas finitamente aditivas, como en la observación 1.2.5.

otro lado, el teorema de Banach-Alaoglu establece que la bola unitaria de $(\ell^\infty(X))^*$ es débil* compacta, por lo que $\mathcal{M}(X)$ es compacto con esta topología.

Para cada subconjunto finito $F \subseteq X$ consideramos la medida $\mu_F : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ que en cada $A \subseteq X$ vale

$$\mu_F(A) = \frac{|A \cap F|}{|F|}.$$

Sea ahora el conjunto

$$\mathcal{N} = \{(\mathcal{R}, \varepsilon) : \mathcal{R} \subseteq PT(X) \text{ es finito y } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

ordenado por

$$(\mathcal{R}, \varepsilon) \leq (\mathcal{R}', \varepsilon') \text{ si y sólo si } \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}' \text{ y } \varepsilon \geq \varepsilon'.$$

Como X es amenable, se cumple la condición Følner para el pseudogrupo $(PT(X), X)$ mencionada más arriba y por lo tanto, para cada $(\mathcal{R}, \varepsilon) \in \mathcal{N}$, existe un subconjunto finito $F = F(\mathcal{R}, \varepsilon)$ tal que $|\partial_{\mathcal{R}}(F)| \leq \varepsilon |F|$. Todo esto nos da una red en $\mathcal{M}(X)$

$$\left(\mu_{F(\mathcal{R},\varepsilon)}\right)_{(\mathcal{R},\varepsilon)\in\mathcal{N}}$$

que por compacidad de $\mathcal{M}(X)$ tiene un punto de acumulación μ. Esto quiere decir que para todo $(\mathcal{R}, \varepsilon) \in \mathcal{N}$ y todo entorno U de μ en $\mathcal{M}(X)$ existe $(\mathcal{R}', \varepsilon') \geq (\mathcal{R}, \varepsilon)$ tal que $\mu_{F(\mathcal{R}',\varepsilon')} \in U$. El resto de la demostración consistirá en mostrar que μ es invariante bajo traslaciones parciales.

Sea entonces $t : A \to B$ una traslación parcial en X y veamos que $\mu(A) = \mu(t(A)) = \mu(B)$. En primer lugar, notemos que para cualquier $A \subseteq X$ y $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, el conjunto

$$U_{A,\delta} := \{\mu' \in \mathcal{M}(X) : |\mu'(A) - \mu(A)| < \delta\}$$

es un abierto de $\mathcal{M}(X)$, pues (vía la identificación de $\mathcal{M}(X)$ con un subconjunto de $(\ell_\infty(X))^*$) este conjunto es $\left[Ev_{1_A}^{-1}([0, \delta + \mu(A)) \cap Ev_{1_A}^{-1}((\mu(A) - \delta, +\infty))\right] \cap \mathcal{M}(X)$, donde Ev_{1_A} es el elemento del dual de $(\ell_\infty(X))^*$ que evalúa en 1_A, la función característica de A. Más aún, como $\mu \in U_{A,\delta}$, éste es un entorno (abierto) de μ. Fijemos ahora $\delta > 0$. Como μ es un punto de acumulación de nuestra red, debe existir $(\mathcal{R}, \varepsilon) \in \mathcal{N}$ de modo que

(I) $(\mathcal{R}, \varepsilon) \geq (\{t\}, \delta)$, es decir, $t \in \mathcal{R}$ y $\varepsilon \leq \delta$.
(II) $|\mu_{F(\mathcal{R},\varepsilon)}(A) - \mu(A)| < \delta$.
(III) $|\mu_{F(\mathcal{R},\varepsilon)}(t(A)) - \mu(t(A))| < \delta$.

En otras palabras, estamos tomando $(\mathcal{R}, \varepsilon)$ tal que $(\mathcal{R}, \varepsilon) \geq (\{t\}, \delta)$ y $\mu_{F(\mathcal{R},\varepsilon)} \in U_{A,\delta} \cap U_{t(A),\delta}$.

Para alivianar la notación, de ahora en más escribimos F en vez de $F(\mathcal{R}, \varepsilon)$. Definimos ahora los siguientes subconjuntos de A:

$$\begin{aligned}
A_{i,i} &= \{a \in A : a \in F \text{ y } t(a) \in F\} = A \cap F \cap t^{-1}(F) \\
A_{i,o} &= \{a \in A : a \in F \text{ y } t(a) \in \partial_{\mathcal{R}}(F)\} = A \cap F \cap t^{-1}(X \setminus F) \\
A_{o,i} &= \{a \in A : a \in \partial_{\mathcal{R}}(F) \text{ y } t(a) \in F\} = A \cap (X \setminus F) \cap t^{-1}(F) \\
A_{o,o} &= \{a \in A : a \notin F \text{ y } t(a) \notin F\} = A \cap (X \setminus F) \cap t^{-1}(X \setminus F).
\end{aligned}$$

Notar que $A = A_{i,i} \sqcup A_{i,o} \sqcup A_{o,i} \sqcup A_{o,o}$ y los tres primeros conjuntos son finitos (pues F es finito y t es una biyección). Observar además que se tiene

(IV) $A \cap F = A_{i,i} \sqcup A_{i,o}$, de manera que $|A \cap F| = |A_{i,i}| + |A_{i,o}|$.
(V) t induce una biyección $A_{i,i} \sqcup A_{o,i} \to t(A) \cap F$ y luego $|t(A) \cap F| = |A_{i,i}| + |A_{o,i}|$.
(VI) $\partial_{\mathcal{R}}(F) \supseteq \partial_{\{t,t^{-1}\}}(F) \supseteq t(A_{i,o}) \cup A_{o,i}$ y así $|A_{i,o}| + |A_{o,i}| \leq 2|\partial_{\mathcal{R}}(F)| \leq 2\varepsilon|F|$.

De (iv), (v) y (vi) deducimos que

$$||t(A) \cap F| - |A \cap F|| \leq 2\varepsilon|F|.$$

Usando la definición de la medida μ_F, esto puede reescribirse como

(vii) $|\mu_F\,(t(A)) - \mu_F(A)| \leq 2\varepsilon$

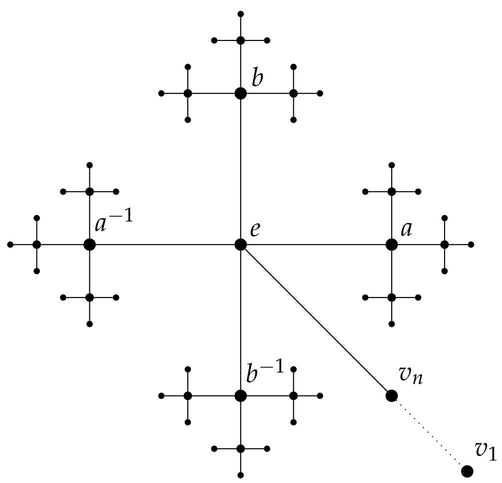
de modo que, usando (ii), (iii) y (vii) se obtiene

$$\begin{aligned}|\mu(t(A)) - \mu(A)| &\leq |\mu(t(A)) - \mu_F(t(A))| + |\mu_F(t(A)) - \mu_F(A)| + |\mu_F(A) - \mu(A)| \\ &\leq \delta + 2\varepsilon + \delta \leq 4\delta.\end{aligned}$$

Como δ era arbitrario, concluimos que esta diferencia no puede ser sino cero y así μ es invariante bajo traslaciones parciales. □

La segunda parte de la proposición 2.3.3 es falsa en el caso general, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.5. Sea Y el grafo de Cayley de $\mathbb{F}_2 =< a, b >$, el grupo libre (no abeliano) en dos generadores. Para cada $n \in \mathbb{N}$, llamamos Y_n al grafo que se obtiene de agregar n vértices $v_1, \ldots, v_n$ y n aristas $e_1, \ldots, e_n$ a Y, de manera que e_i conecta v_i con v_{i+1} para $1 \leq i \leq n-1$ y e_n conecta v_n con e, el elemento neutro de $\mathbb{F}_2$. Si X_n es el espacio métrico asociado a Y_n (vía la métrica de caminos), definimos $X = \sqcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, i.e, X es el espacio métrico extendido que tiene a X_n como su n-ésima componente gruesa.



El grafo Y_n.

Veamos primero que X_n es no amenable para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que sí lo fuera. Entonces, por el teorema 2.3.4, X_n admitiría una medida μ invariante bajo traslaciones parciales. Ahora, como $X_n \setminus Y$ tiene finitos elementos, se cumple $\mu(Y) > 0$. En efecto, si no fuera así se tendría $\mu(X_n \setminus Y) > 0$ y como cualquier inyección $t : X_n \setminus Y \to Y$ resulta una traslación parcial a su imagen (precisamente por la finitud de $X_n \setminus Y$), debería ser

$$0 = \mu(Y) \geq \mu(t(X_n \setminus Y)) = \mu(X_n \setminus Y) > 0$$

un absurdo. Esta observación nos permite construir una medida $\mu_Y : \mathcal{P}(Y) \to [0, 1]$ invariante bajo traslaciones parciales simplemente poniendo, para cada $A \subseteq Y$,

$$\mu_Y(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(Y)}.$$

Pero esto es absurdo, pues Y es el grafo de Cayley asociado a $\mathbb{F}_2$, un grupo no amenable. Luego X_n debe ser no amenable.

Por otro lado, X es propiamente amenable, pues las ramas de vértices $v_1, \ldots, v_n$ permiten tomar subespacios Følner de cardinal arbitrariamente grande en X. Concretamente, sean $(R, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2_{>0}$ y $N \in \mathbb{N}$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ de manera que $n > \max\{[R], N, \frac{[R]}{\varepsilon}\}$ (donde $[R]$ denota la parte entera de R), definimos $F = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq X_{2n} \subseteq X$. Tenemos $|F| = n \geq N$ y

$$\partial_R^+(F) = \{v_k \in X_{2n} : n+1 \leq k \leq n + [R]\}$$

con lo cual

$$\frac{|\partial_R^+(F)|}{|F|} = \frac{[R]}{n} \leq \varepsilon.$$

Gracias a la observación 2.1.7 y el lema 2.1.8, esto muestra que X es propiamente amenable.

2.4. Amenabilidad versus amenabilidad propia

Si un espacio extendido X tiene una componente gruesa finita X_i, sabemos por la proposición 2.3.3 que X es amenable. Esto es porque X_i es un subconjunto $(R, 0)$-Følner en X para todo R. De alguna manera, la componente X_i está trivializando la condición de amenabilidad, pues es muy posible que el resto de las componentes formen un espacio no amenable y sin embargo, al agregar X_i, el espacio se vuelve automáticamente amenable. Es acá donde la noción de amenabilidad propia entra en juego; si uno no sólo pide que existan subconjuntos Følner, sino que además éstos sean exhaustivos (i.e que abarquen todo el espacio), la existencia de una componente finita no es suficiente, pues ésta sólo da conjuntos Følner localizados en esa componente. De esta manera, la noción de amenabilidad propia es la de una amenabilidad *global*.

A continuación veremos que los espacios amenables pero no propiamente amenables son todos como en el ejemplo anterior, es decir, tienen una componente gruesa finita que trivializa la condición de amenabilidad. La siguiente proposición será crucial para llegar a este resultado.

Proposición 2.4.1. *Sea (X, d) un espacio métrico (no vacío) localmente finito extendido. Si todas las componentes gruesas de X son infinitas, entonces X es amenable si y sólo si es propiamente amenable.*

Demostración. Supongamos que $X = \sqcup_{i \in I} X_i$ fuera amenable pero no propiamente amenable. Por el lema 2.1.8 en el caso extendido, deben existir $R_0 > 0$ y $\varepsilon_0 > 0$ de manera que $\mathrm{Føl}(R_0, \varepsilon_0)$ tiene un elemento F_0 de cardinal máximo. Más aún, achicando ε_0 si es necesario (usando la observación 2.1.3), podemos suponer $\varepsilon_0 < 1$. Escribamos $F_0 = \sqcup_{i \in I_0} F_{0,i}$, donde $I_0 \subseteq I$ es el conjunto (finito) de índices para los cuales $F_{0,i} := F_0 \cap X_i \neq \emptyset$. Sea

$$R_1 := \max_{i \in I_0} \{\mathrm{diam}(F_{0,i}) + d(F_{0,i}, X_i \setminus F_{0,i})\}$$

con $\mathrm{diam}(F_{0,i})$ el diámetro de $F_{0,i}$. Observar que R_1 es finito precisamente porque las componentes son infinitas, ya que esto hace que el conjunto $X_i \setminus F_{0,i}$ sea no vacío para todo $i \in I_0$.

Tomemos ahora $R > R_0 + R_1$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon < \min\left\{\varepsilon_0, \frac{1}{|F_0|}\right\}.$$

Por amenabilidad de X, debe existir un $F \in \mathrm{Føl}(R, \varepsilon)$. Notar que, como $\varepsilon < \varepsilon_0$ y $R > R_0$, también vale $F \in \mathrm{Føl}(R_0, \varepsilon_0)$. Usaremos ahora a F para construir un conjunto (R_0, ε_0)-Følner de cardinal mayor que $|F_0|$, llegando a un absurdo y concluyendo la demostración.

En primer lugar, afirmamos que $F \not\subseteq F_0$. En efecto, si no fuera así, por cómo definimos R_1 se tendría $F_{0,i} \subseteq \partial_R F_i$ para todo $i \in I_0$ tal que $F_i \neq \emptyset$. Llamando $I_0' \subseteq I_0$ a este subconjunto de índices, obtenemos

$$\frac{|\partial_R F|}{|F|} \geq \frac{\sum_{i \in I_0'} |F_{0,i}|}{\sum_{i \in I_0'} |F_{0,i}|} = 1 > \varepsilon_0 > \varepsilon$$

una contradicción pues $F \in \text{Føl}(R, \varepsilon)$. Luego, escribiendo $F = \sqcup_{j \in J_0} F_j$ con $J_0 \subseteq I$ los índices para los cuales $F_i \neq \emptyset$, debe existir un $j' \in J_0$ tal que $F_{j'} \not\subseteq F_0$. Separaremos el resto de la demostración en los siguientes dos casos:

(a) $\partial_R(F) \neq \emptyset$. Acá tenemos

$$\frac{1}{|F|} \leq \frac{|\partial_R(F)|}{|F|} \leq \varepsilon < \frac{1}{|F_0|}$$

lo cual muestra que $|F| > |F_0|$, un absurdo.

(b) $\partial_R(F) = \emptyset$. Esta situación se separa nuevamente en dos casos para cada $j \in J_0$

(1) $F_j \cap F_{0,j} \neq \emptyset$. Esta condición implica que $F_{0,j} \subseteq F_j$, pues de lo contrario tomamos elementos $x \in F_{0,j}$, $x \notin F_j$, $y \in F_j \cap F_{0,j}$ y llegamos a

$$d(x, F_j) \leq d(x, y) + d(y, F_j) \leq \text{diam}(F_{o,j}) \leq R_1 \leq R$$

Como además $d(x, X_j \setminus F_j) = 0 \leq R$ (porque $x \notin F_j$), resulta $x \in \partial_R F = \emptyset$.

(2) $F_j \cap F_{0,j} = \emptyset$.

Si valiera (2) para algún $j_0 \in J_0$, poniendo $\tilde{F} = F_0 \sqcup F_{j_0}$ y recordando que estamos asumiendo $\partial_R(F) = \emptyset$, resulta

$$\frac{|\partial_{R_0}(\tilde{F})|}{|\tilde{F}|} \leq \frac{|\partial_{R_0}(F_0)| + |\partial_{R_0}(F_{j_0})|}{|F_0| + |F_{j_0}|} = \frac{|\partial_{R_0}(F_0)|}{|F_0| + |F_{j_0}|} < \frac{|\partial_{R_0}(F_0)|}{|F_0|} \leq \varepsilon_0$$

Conseguimos entonces un conjunto (R_0, ε_0)-Følner que contiene estrictamente a F, un absurdo.

Por último, si (1) valiera para todo $j \in J_0$ entonces $J_0 \subseteq I_0$ y $F_{0,j} \subseteq F_j$ para cualquier $j \in J_0$. Definimos $\tilde{F} = F_0 \cup F$, que contiene estrictamente a F_0 pues habíamos visto que $F \not\subseteq F_0$. Llamando $I_0'' := I_0 \setminus J_0$ y recordando que $\partial_{R_0} F_j = \emptyset$ para todo $j \in J_0$ por hipótesis, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{|\partial_{R_0}\tilde{F}|}{|\tilde{F}|} &= \frac{\sum_{j \in J_0} |\partial_{R_0} F_j| + \sum_{i \in I_0''} |\partial_{R_0} F_{0,i}|}{|\tilde{F}|} \\ &= \frac{\sum_{i \in I_0''} |\partial_{R_0} F_{0,i}|}{|\tilde{F}|} \leq \frac{|\partial_{R_0} F_0|}{|F_0|} \leq \varepsilon_0\end{aligned}$$

lo que nos da, una vez más, un conjunto (R_0, ε_0)-Følner de cardinal estrictamente mayor que $|F_0|$.

En todos los casos llegamos a una contradicción que nos dice que X debe ser propiamente amenable. □

De esta proposición se desprenden dos corolarios importantes.

Corolario 2.4.2. *Sea (X, d) un espacio métrico localmente finito. Entonces X es amenable si y sólo si es propiamente amenable.*

Demostración. Si X tiene finitos elementos ya sabemos que es propiamente amenable, con lo cual no hay nada que probar. Si tiene infinitos elementos, la proposición 2.4.1 nos da el resultado (pues X tiene una sola componente gruesa, que por lo tanto debe ser infinita). □

Corolario 2.4.3. *Sea (X, d) un espacio métrico localmente finito extendido de cardinal infinito. Entonces X es amenable pero no propiamente amenable si y sólo si $X = Y_1 \sqcup Y_2$, donde Y_1 es un subespacio finito no vacío de X, Y_2 es no amenable y $d(Y_1, Y_2) = \infty$.*

Demostración. Supongamos primero que tenemos una descomposición $X = Y_1 \sqcup Y_2$ como en el enunciado. Entonces, en primer lugar, es fácil verificar que Y_1 es un conjunto $(R, 0)$-Følner para todo $R > 0$ en X, lo que muestra que X es amenable. Por otro lado, afirmamos que si X fuera propiamente amenable Y_2 también lo sería. Para verlo, notemos primero que si tenemos $F \in \mathrm{Føl}(R, \varepsilon)$ en X, el conjunto $\tilde{F} = F \cup Y_1$ tambien resulta (R, ε)-Følner. Habiendo notado esto, si X es propiamente amenable, dados $R > 0$, $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ existe $F \in \mathrm{Føl}(R, \varepsilon/2)$ que contiene a Y_1 y $|F| \geq N$, $F = Y_1 \sqcup F_{Y_2}$. Luego

$$\frac{|\partial_R(F_{Y_2})|}{|F_{Y_2}|} = \frac{|\partial_R(F)|}{|F_{Y_2}|} = \frac{|\partial_R(F)|}{|F|} \cdot \frac{|F|}{|F_{Y_2}|} \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{|F_{Y_2}| + |Y_1|}{|F_{Y_2}|} \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando un N adecuado, conseguimos conjuntos Følner de cardinal arbitrariamente grande en Y_2, lo que muestra que Y_2 es propiamente amenable.

Sea ahora X un espacio amenable pero no propiamente amenable. Entonces, en particular, X debe tener un número finito de componentes gruesas finitas, pues de lo contrario podríamos conseguir conjuntos $(R, 0)$-Følner de cardinal arbitrariamente grande para cualquier $R > 0$ (simplemente tomando la unión de suficientes componentes finitas). Llamando $X_1, \ldots, X_N$ a las componentes gruesas finitas de X, ponemos $Y_1 \coloneqq \sqcup_{i=1}^N X_i$, $Y_2 \coloneqq X \setminus Y_1$. Como por construcción todas las componentes gruesas de Y_2 son infinitas, si Y_2 fuera amenable, sería también propiamente amenable por la proposición 2.4.1 y así X sería propiamente amenable. Luego Y_2 es no amenable. Por último, como X es amenable, debe ser $Y_1 \neq \emptyset$. □

Capítulo 3

Amenabilidad en $\mathbb{K}$-álgebras

La noción de amenabilidad algebraica fue introducida por G. Elek en [4] para $\mathbb{K}$-álgebras finitamente generadas y unitales. Además, muchos de sus resultados también requerían que las álgebras no tuvieran divisores de cero. En este capítulo se generalizan estas ideas al caso de $\mathbb{K}$-álgebras arbitrarias y se introduce también la distinción entre amenabilidad y amenabilidad propia (Elek llama amenabilidad a lo que aquí llamaremos amenabilidad propia). Muchos de los resultados e ideas expuestos a continuación resultarán muy similares a los vistos en el contexto de espacios métricos.

3.1. Definiciones y propiedades básicas

Definición 3.1.1. Sean $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ un subconjunto finito y $\varepsilon > 0$.

1. Un subespacio $W \subseteq \mathcal{A}$ finito-dimensional no nulo se dice $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-*Følner a izquierda* si satisface
$$\frac{\dim(aW + W)}{\dim(W)} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{para todo } a \in \mathcal{F}.$$
Notamos $\text{Føl}(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \varepsilon)$ a la colección de subespacios $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-Følner a izquierda de $\mathcal{A}$. Cuando no haya lugar a confusión, omitiremos el álgebra y escribiremos directamente $\text{Føl}(\mathcal{F}, \varepsilon)$.

2. $\mathcal{A}$ se dice *algebraicamente amenable a izquierda* si para todo $\varepsilon > 0$ y todo subconjunto finito $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ existe un subespacio $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-Følner a izquierda.

3. $\mathcal{A}$ es *propiamente algebraicamente amenable a izquierda* si para todo $\varepsilon > 0$ y todo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ finito existe un subespacio $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-Følner a izquierda W tal que $\mathcal{F} \subseteq W$.

De manera completamente análoga podemos definir subespacios Følner *a derecha* y amenabilidad algebraica (propia) *a derecha*. Como estas dos nociones son simétricas, trabajaremos sólo con amenabilidad a izquierda y omitiremos el término por comodidad. De hecho, nos referiremos al concepto directamente como amenabilidad, entendiéndose que ésta es algebraica.

El siguiente lema nos dará una definición alternativa de amenabilidad que muchas veces usaremos en lugar de la original.

Lema 3.1.2. *Un álgebra $\mathcal{A}$ es amenable si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ finito existe un subespacio $W \subseteq \mathcal{A}$ de dimensión finita tal que*
$$\frac{\dim(\mathcal{F}W + W)}{\dim(W)} := \frac{\dim(\text{span}(\mathcal{F}W) + W)}{\dim(W)} \leq 1 + \varepsilon.$$

Demostración. En primer lugar, si tenemos un subespacio $W \subseteq \mathcal{A}$ como en el enunciado, entonces para todo $a \in \mathcal{F}$ se cumple $aW + W \subseteq \mathcal{F}W + W$ y por lo tanto

$$\frac{\dim(aW+W)}{\dim(W)} \leq \frac{\dim(\mathcal{F}W+W)}{\dim(W)} \leq 1+\varepsilon.$$

Esto muestra que $\mathcal{A}$ es amenable si se cumple la condición del enunciado.

Para la otra dirección, fijemos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$, escribamos $\mathcal{F} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y tomemos $W \in \text{Føl}(\mathcal{F}, \frac{\varepsilon}{n})$ (que existe por amenabilidad de $\mathcal{A}$). Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ sea ahora k_i el número natural (o cero) tal que $\dim(a_i W + W) = \dim(W) + k_i$. Por hipótesis se tiene

$$\frac{\dim(W)+k_i}{\dim(W)} = \frac{\dim(a_iW+W)}{\dim(W)} \leq 1+\frac{\varepsilon}{n}$$

por lo que $\frac{k_i}{\dim(W)} \leq \frac{\varepsilon}{n}$ para todo i. Con todo esto llegamos a

$$\frac{\dim(\mathcal{F}W+W)}{\dim(W)} \leq \frac{\dim(W)+\sum_{i=1}^n k_i}{\dim(W)} = 1+\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\dim(W)} \leq 1+n\frac{\varepsilon}{n} = 1+\varepsilon$$

con lo cual W cumple lo que queremos. □

Observación 3.1.3. En muchos casos abusaremos de la notación y diremos que un subespacio W cumple $W \in \text{Føl}(\mathcal{F}, \varepsilon)$ cuando en realidad cumple la condición ligeramente más fuerte del lema 3.1.2.

Observación 3.1.4. De manera similar a la observación 2.1.3, los subespacios Følner satisfacen propiedades de monotonía que se verifican fácilmente. Concretamente, se tiene

(1) Si $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ son subconjuntos finitos de un álgebra $\mathcal{A}$, entonces $\text{Føl}(\mathcal{A}, \mathcal{F}_2, \varepsilon) \subseteq \text{Føl}(\mathcal{A}, \mathcal{F}_1, \varepsilon)$.

(2) Si $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ entonces $\text{Føl}(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \varepsilon_1) \subseteq \text{Føl}(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \varepsilon_2)$.

Proposición 3.1.5. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra. Entonces*

(1) $\mathcal{A}$ es amenable si y sólo si existe una red $\{W_i\}_{i\in I}$ de subespacios finito-dimensionales tal que

$$\lim_i \frac{\dim(aW_i+W_i)}{\dim(W_i)} = 1 \text{ para todo } a \in \mathcal{A}.$$

(2) $\mathcal{A}$ es propiamente amenable si y sólo si existe una red como en (1) que además cumple $\mathcal{A} = \liminf_i W_i = \bigcup_{j\in I}\bigcap_{i\geq j} W_i$.

Demostración. (1) Si $\mathcal{A}$ es amenable, para cada $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ finito y $\varepsilon > 0$ podemos tomar $W_{(\mathcal{F},\varepsilon)} \in \text{Føl}(\mathcal{F}, \varepsilon)$. Si ordenamos el conjunto $\{(\mathcal{F}, \varepsilon)\}$ de manera que $(\mathcal{F}_1, \varepsilon_1) \leq (\mathcal{F}_2, \varepsilon_2)$ si y sólo si $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ y $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, es fácil ver que la red $\{W_{(\mathcal{F},\varepsilon)}\}$ cumple lo pedido.

Por otro lado, si tenemos una red como en el enunciado, $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{F} = \{a_1, \ldots, a_n\}$, para cada $j = 1, \ldots, n$ existe un $i_j \in I$ tal que si $i \geq i_j$ entonces

$$\frac{\dim(a_j \cdot W_i + W_i)}{\dim(W_i)} \leq 1+\varepsilon$$

Tomando un k mayor a i_j para todo $j = 1, \ldots, n$ se ve que $W_k \in \text{Føl}(\mathcal{F}, \varepsilon)$.

(2) Si $\mathcal{A}$ es propiamente amenable, tomamos una red $\{W_{(\mathcal{F},\varepsilon)}\}$ como en (1) a la que además le pedimos que $\mathcal{F} \subseteq W_{(\mathcal{F},\varepsilon)}$ para todo $(\mathcal{F}, \varepsilon)$. Al igual que antes, es fácil verificar que esta red

cumple la condición de (1), y para ver que $\mathcal{A} = \liminf W_{(\mathcal{F},\varepsilon)}$ simplemente notamos que para todo $x \in \mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$ se tiene

$$x \in W_{(\{x\},\varepsilon)}$$

y que por definición, si $(\mathcal{F}', \varepsilon') \geq (\{x\}, \varepsilon)$, entonces $x \in W_{(\mathcal{F}',\varepsilon')}$.

Si ahora partimos de la red $\{W_i\}_{i\in I}$ y fijamos $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{F} = \{a_1, \ldots, a_n\}$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existe un índice $k_j \in I$ tal que $a_j \in W_i$ para todo $i \geq k_j$ (pues la red cumple $\mathcal{A} = \liminf W_i$) y otro $k'_j \in I$ tal que

$$\frac{\dim(a_j W_i + W_i)}{\dim(W_i)} \leq 1 + \varepsilon$$

para todo $i \geq k'_j$. Tomando entonces para cada j un índice i_j mayor a k_j y k'_j y luego otro k mayor a i_j para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ se ve que $W_k \in \text{Føl}(\mathcal{F}, \varepsilon)$ y $\mathcal{F} \subseteq W_k$.

□

Ejemplos 3.1.6. Cualquier álgebra $\mathcal{A}$ de dimensión finita es propiamente amenable, pues podemos tomar $W = \mathcal{A}$ cualesquiera sean ε y $\mathcal{F}$.

El álgebra de polinomios $\mathbb{K}[X]$ es propiamente amenable. En efecto, sean $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ finito y $\varepsilon > 0$ y veamos que existe un subespacio W que es $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-Følner en el sentido de la observación 3.1.3 y tal que $\mathcal{F} \subseteq W$. En primer lugar, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{F} = \{1, X, \ldots, X^k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$, pues para todo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ finito existe un $k \in \mathbb{N}$ de manera que $\text{span}(\mathcal{F}) \subseteq \text{span}(\{1, X, \ldots, X^k\})$. Ahora bien, si ponemos $W_n = \mathbb{K}[X]_{\leq n}$ (i.e, el subespacio de polinomios de grado menor o igual que n) tenemos

$$\frac{\dim(\mathcal{F}W_n + W_n)}{\dim(W_n)} = \frac{\dim(\mathbb{K}[X]_{\leq n+k})}{\dim(\mathbb{K}[X]_{\leq n})} = \frac{n+k+1}{n+1}$$

Tomando n lo suficientemente grande este cociente se puede hacer menor a $1 + \varepsilon$ y así, para un n adecuado, el subespacio W_n resulta $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-Følner. Si además pedimos que $n \geq k$, W_n contiene a $\mathcal{F}$ y por lo tanto $\mathbb{K}[X]$ es propiamente amenable.

La siguiente proposición muestra que, en esencia, la amenabilidad es una propiedad sobre $\mathbb{K}$-álgebras de dimensión numerable.

Proposición 3.1.7. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra de dimensión infinita. Entonces $\mathcal{A}$ es (propiamente) amenable si y sólo si todo subconjunto numerable de $\mathcal{A}$ está contenido en una subálgebra (propiamente) amenable de dimensión numerable.*

Demostración. Haremos la demostración para amenabilidad propia, notando que el caso no propio es similar.

Supongamos primero que $\mathcal{A}$ es propiamente amenable y sea $C \subseteq \mathcal{A}$ un subconjunto numerable. Usando que una subálgebra generada por un conjunto numerable es de dimensión numerable, definimos una sucesión $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ de subálgebras de $\mathcal{A}$ de dimensión numerable de la siguiente manera:

- Tomamos B_0 como la subálgebra generada por C
- Si tenemos definido B_i, fijamos una base $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ de B_i. Como $\mathcal{A}$ es propiamente amenable, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un subespacio finito-dimensional $\{e_1, \ldots, e_k\} \subseteq W_k \subseteq \mathcal{A}$ (en el caso de amenabilidad a secas, acá a W_k no se le pide que contenga a $\{e_1, \ldots, e_k\}$) tal que

$$\frac{\dim(\{e_1, \ldots, e_k\}W_k + W_k)}{\dim(W_k)} \leq 1 + \frac{1}{k}$$

Definimos B_{i+1} como la subálgebra generada por el subespacio (de dimensión numerable) $B_i + \sum_{k=1}^{\infty} W_k$.

Construida esta sucesión, ponemos $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$. Veamos entonces que B es una subálgebra propiamente amenable. Sean $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{F} \subseteq B$ finito. Como $\mathcal{F}$ es finito, debe existir un B_{j_0} tal que $\mathcal{F} \subseteq B_{j_0}$, y, si llamamos como antes $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ a una base de B_{j_0}, nuevamente por finitud debe existir un $k_o \in \mathbb{N}$ de modo que $\mathcal{F} \subseteq \langle e_1, \dots, e_{k_0} \rangle$. Por construcción, tenemos el subespacio $W_{k_0} \subseteq B_{j_0+1} \subseteq B$ que contiene a $\mathcal{F}$ y es $(\mathcal{F}, \frac{1}{k_0})$-Følner pues, dado $a \in \mathcal{F}$, es

$$\frac{\dim(a \cdot W_{k_0} + W_{k_0})}{\dim(W_{k_0})} \leq \frac{\dim(\{e_1, \dots, e_{k_0}\} W_{k_0} + W_{k_0})}{\dim(W_{k_0})} \leq 1 + \frac{1}{k_0}$$

Tomando k_0 suficientemente grande, logramos ver que B es propiamente amenable.

Para ver la recíproca, dados $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ finito, existe por hipótesis una subálgebra $\mathcal{F} \subseteq B \subseteq \mathcal{A}$ numerable-dimensional propiamente amenable. Luego la amenabilidad propia de B basta para encontrar un $W \in \text{Føl}(\mathcal{F}, \varepsilon)$ en $\mathcal{A}$ que contenga a $\mathcal{F}$. □

Para estudiar la relación entre amenabilidad y amenabilidad propia, damos primero una caracterización más de esta segunda propiedad para $\mathbb{K}$-álgebras de dimensión infinita.

Proposición 3.1.8. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra de dimensión infinita. Son equivalentes*

(1) $\mathcal{A}$ es propiamente amenable.

(2) Para todo $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ finito existe un subespacio $W \in Føl(\mathcal{F}, \varepsilon)$ tal que $dim(W) \geq N$.

Si además $\mathcal{A}$ es unital, esto es también equivalente a

(3) Para todo $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ finito existe un subespacio $W \in Føl(\mathcal{F}, \varepsilon)$ que contiene a $1_{\mathcal{A}}$.

Demostración. Para ver (1) $\Rightarrow$ (2), dados $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$, simplemente tomamos un $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ finito de manera que $\dim(\text{span}(\mathcal{F}')) \geq N$ y un subespacio $W \in \text{Føl}(\mathcal{F}', \varepsilon)$, $\mathcal{F}' \subseteq W$. Luego

$$W \in \text{Føl}(\mathcal{F}'.\varepsilon) \subseteq \text{Føl}(\mathcal{F}, \varepsilon) \quad \text{y} \quad \dim(W) \geq \dim(\text{span}(\mathcal{F}')) \geq N$$

como queríamos.

Veamos (2) $\Rightarrow$ (1). Sean nuevamente $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ finito. Si llamamos $V := \text{span}(\mathcal{F})$ y $W \subseteq \mathcal{A}$ es un subespacio, para cada $a \in \mathcal{F}$ tenemos

$$\frac{\dim(a(W+V) + W + V)}{\dim(W+V)} \leq \frac{\dim(aW + W)}{\dim(W)} + \frac{\dim(aV + V)}{\dim(W)}$$

Luego tomando un $N \in \mathbb{N}$ adecuado y un $W \in \text{Føl}(\mathcal{F}, \frac{\varepsilon}{2})$ con $\dim(W) \geq N$, podemos conseguir que la desigualdad anterior sea menor o igual a $1 + \varepsilon$ para todo $a \in \mathcal{F}$. Esto muestra que $W + V$ es el subespacio que buscamos para mostrar la amenabilidad propia de $\mathcal{A}$.

Por último, asumamos que $\mathcal{A}$ es unital. Entonces (1) $\Rightarrow$ (3) es trivial, mientras que para (3) $\Rightarrow$ (2) notamos primero que $1_{\mathcal{A}} \in W$ implica $\dim(\text{span}(\mathcal{F}W + W)) \geq \dim(\text{span}(\mathcal{F}))$, con lo cual $W \in \text{Føl}(\mathcal{F}, \varepsilon)$ nos dice que

$$\dim(W) \geq \frac{\dim(\mathcal{F}W + W)}{1 + \varepsilon} \geq \frac{\dim(\text{span}(\mathcal{F}))}{1 + \varepsilon}.$$

Luego si tenemos $\mathcal{F}$, ε y N, primero le agregamos elementos a $\mathcal{F}$ si es necesario, de manera que

$$\frac{\dim(\text{span}(\mathcal{F}))}{1 + \varepsilon} \geq N$$

Una vez hecho esto tomamos $W \in \text{Føl}(\mathcal{F}, \varepsilon)$ tal que $1_{\mathcal{A}} \in W$, lo que nos da

$$\dim(W) \geq \frac{\dim(\text{span}(\mathcal{F}))}{1 + \varepsilon} \geq N$$

como queremos. □

3.2. Unitización y cocientes

Estudiamos en esta sección cómo se comporta la amenabilidad bajo unitización y cocientes. Para ello recordamos primero la noción de unitización de un álgebra.

Definición 3.2.1. Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra. La *unitización* de $\mathcal{A}$, notada $\tilde{\mathcal{A}}$, es la $\mathbb{K}$-álgebra cuyo espacio vectorial subyacente es $\mathcal{A} \oplus \mathbb{K}$ y cuyo producto se define como

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu) \text{ para todo } a, b \in \mathcal{A} \text{ y } \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

La unidad de $\tilde{\mathcal{A}}$ es $(0, 1)$, y si $\mathcal{A}$ es unital entonces $\tilde{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{A} \times \mathbb{K}$ como $\mathbb{K}$-álgebras.

Proposición 3.2.2. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra. Entonces*

(1) *Si $\mathcal{A}$ es amenable entonces $\tilde{\mathcal{A}}$ lo es.*

(2) *$\tilde{\mathcal{A}}$ es propiamente amenable si y sólo si $\mathcal{A}$ lo es.*

Demostración. Llamemos $\pi : \mathcal{A} \oplus \mathbb{K} \to \mathcal{A}$ a la proyección en la primera coordenada, $i : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}$ a la inclusión en $\mathcal{A} \times \{0\}$ y supongamos que $\mathcal{A}$ es de dimensión infinita, pues de lo contrario no hay nada que probar.

Para ver (1), supongamos que $\mathcal{A}$ es amenable. Dados $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{F} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ finito, sea $W \subseteq \mathcal{A}$ un subespacio $(\pi(\mathcal{F}), \varepsilon)$-Følner. Por cómo está definido el producto en $\tilde{\mathcal{A}}$, si $(a, \lambda) \in \mathcal{F}$, entonces $(a, \lambda) \cdot i(W) + i(W) = i(aW + W)$. Luego

$$\frac{\dim\left[(a, \lambda) \cdot i(W) + i(W)\right]}{\dim(i(W))} = \frac{\dim\left[i(aW + W)\right]}{\dim(i(W))} = \frac{\dim(aW + W)}{\dim(W)} \leq 1 + \varepsilon$$

por lo que $i(W) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ es $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-Følner.

Veamos ahora (2). En primer lugar, notemos que si $\mathcal{A}$ es propiamente amenable podemos verificar que existen subespacios Følner en $\tilde{\mathcal{A}}$ de la misma manera que en (1), y gracias a la proposición 3.1.8 basta ver que dichos subespacios se pueden tomar de dimensión arbitrariamente grande. Pero esto es evidente, pues el morfismo i es mono y por lo tanto preserva dimensión.

Supongamos ahora que $\tilde{\mathcal{A}}$ es propiamente amenable. Dados $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, podemos tomar un subespacio $W \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ que sea $(i(\mathcal{F}), \varepsilon)$-Følner tal que $i(\mathcal{F}) \subseteq W$. Además podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\dim(\operatorname{span}(\mathcal{F})) \geq 2$. Afirmamos que $\pi(W)$ es un $(\mathcal{F}, 2\varepsilon)$-Følner en $\mathcal{A}$. Para verlo, notemos primero que si $a \in \mathcal{F}$ y $(b, \mu) \in W$ entonces $i(a) \cdot (b, \mu) = i(ab + \mu a) \in i(ab) + W$ y por ende

$$\pi(i(a) \cdot W + W) = a \cdot \pi(W) + \pi(W)$$

Ahora, usando que el núcleo de π tiene dimensión 1 (pues es $\{0\} \times \mathbb{K}$) y que $\dim(W) \geq \dim(\operatorname{span}(\mathcal{F})) \geq 2$ (pues $i(\mathcal{F}) \subseteq W$), tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\dim\left[a \cdot \pi(W) + \pi(W)\right]}{\dim(\pi(W))} &= \frac{\dim\left[\pi(i(a) \cdot W + W)\right]}{\dim(\pi(W))} \\
&\in \left\{\frac{\dim\left[i(a) \cdot W + W\right]}{\dim(W)}, \frac{\dim\left[i(a) \cdot W + W\right] - 1}{\dim(W)}, \frac{\dim\left[i(a) \cdot W + W\right] - 1}{\dim(W) - 1}\right\} \\
&\subseteq \left[1, 1 + \frac{\dim\left[i(a) \cdot W + W\right] - \dim(W)}{\dim(W) - 1}\right] \\
&\subseteq \left[1, 1 + \varepsilon\left(1 + \frac{1}{\dim(W) - 1}\right)\right]
\end{aligned}$$

donde la primera contención vale pues el tercer elemento del conjunto es el más grande de los tres (en general, si $n \geq m \geq 2$ son dos números naturales, es fácil verificar que el máximo del conjunto $\{\frac{n}{m}, \frac{n-1}{m}, \frac{n-1}{m-1}\}$ es $\frac{n-1}{m-1}$) y sacando denominador común se ve que

$$1 + \frac{\dim\left[i(a) \cdot W + W\right] - \dim(W)}{\dim(W) - 1} = \frac{\dim\left[i(a) \cdot W + W\right] - 1}{\dim(W) - 1}$$

y la segunda contención se deduce de que, como $W \in \text{Føl}(i(\mathcal{F}), \varepsilon)$, es

$$\frac{\dim\left[i(a)\cdot W + W\right] - \dim(W)}{\dim(W)} \leq \varepsilon$$

De todo esto deducimos que $\pi(W)$ resulta un subespacio $(\mathcal{F}, 2\varepsilon)$-Følner. Como además $\mathcal{F} \subseteq \pi(W)$, $\mathcal{A}$ es propiamente amenable. □

Ejemplo 3.2.3. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra con un ideal $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$ a izquierda no nulo de dimensión finita entonces $\mathcal{A}$ es amenable, pues $\mathcal{I}$ es un subespacio $(\mathcal{A}, 0)$-Følner. En particular, notemos que si $\mathcal{A}$ es unital entonces $\tilde{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{A} \times \mathbb{K}$ tiene un ideal de dimensión finita ($\mathbb{K}$), y por lo tanto es amenable. Por otro lado, si $\mathcal{A}$ es unital no amenable entonces $\tilde{\mathcal{A}}$ no puede ser propiamente amenable, pues en ese caso $\mathcal{A}$ también lo sería.

Proposición 3.2.4. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra con un ideal $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$ bilátero no trivial de dimensión finita. Entonces $\mathcal{A}$ es propiamente amenable si y sólo si el cociente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ lo es.*

Demostración. Llamemos $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ a la proyección y supongamos primero que $\mathcal{A}$ es propiamente amenable. Dados $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{A}/\mathcal{I}$ es finito, tomemos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ un conjunto del mismo cardinal que $\mathcal{F}'$ tal que $\pi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$. Luego existe un subespacio $W \subseteq \mathcal{A}$ que es $(\mathcal{F}, \frac{\varepsilon}{2})$-Følner con $\dim(W) \geq N$. Dado $a \in \mathcal{F}$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\dim(\pi(a)\cdot\pi(W) + \pi(W))}{\dim(\pi(W))} \leq \frac{\dim(a\cdot W + W)}{\dim(W) - \dim(\mathcal{I})} = \\
&\frac{\dim(a\cdot W + W)}{\dim(W)} \cdot \frac{\dim(W)}{\dim(W) - \dim(\mathcal{I})} \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2})\frac{\dim(W)}{\dim(W) - \dim(\mathcal{I})}
\end{aligned}$$

Si tomamos $N >> 0$, podemos hacer tender este último cociente a 1 tanto como queramos, lo que nos dice que podemos encontrar subespacios $(\mathcal{F}', \varepsilon)$-Følner para cualquier ε. Como además $\dim(\pi(W)) \geq \dim(W) - \dim(\mathcal{I}) \geq N - \dim(\mathcal{I})$, probamos que $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es propiamente amenable.

Si ahora $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es propiamente amenable y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ es finito, tomamos un subespacio $V \in \text{Føl}(\mathcal{A}/\mathcal{I}, \pi(\mathcal{F}), \frac{\varepsilon}{2})$ tal que $\dim(V) \geq N$. Luego $\dim(\pi^{-1}(V)) \geq \dim(V)$ y, si $a \in \mathcal{F}$, es

$$\begin{aligned}
&\frac{\dim(a\cdot\pi^{-1}(V) + \pi^{-1}(V))}{\dim(\pi^{-1}(V))} \leq \frac{\dim(a\cdot\pi^{-1}(V) + \pi^{-1}(V))}{\dim(V)} = \\
&\frac{\dim(\pi(a)\cdot V + V))}{\dim(V)} \cdot \frac{\dim(a\cdot\pi^{-1}(V) + \pi^{-1}(V))}{\dim(\pi(a)\cdot V + V)} \leq \\
&(1 + \frac{\varepsilon}{2})\frac{\dim(\pi(a)\cdot V + V) + \dim(\mathcal{I})}{\dim(\pi(a)\cdot V + V)} \xrightarrow[\dim(V)\to\infty]{} (1 + \frac{\varepsilon}{2})
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale pues $\pi\left(a\cdot\pi^{-1}(V) + \pi^{-1}(V)\right) = \pi(a)\cdot V + V$. Luego tomando $N >> 0$ conseguimos probar que A es propiamente amenable. □

Ejemplo 3.2.5. La proposición 3.2.4 da una forma fácil de construir álgebras amenables pero no propiamente amenables. Simplemente tomamos $\mathcal{A}_1$ un álgebra de dimensión finita, $\mathcal{A}_2$ un álgebra no amenable y consideramos $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Como $\mathcal{A}_1$ es un ideal bilátero de dimensión finita en $\mathcal{A}$ ésta resulta amenable, y como el cociente $\mathcal{A}/\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$ es no amenable, $\mathcal{A}$ no es propiamente amenable.

3.3. Amenabilidad versus amenabilidad propia

Análogamente al caso de espacios métricos, la existencia de un ideal de dimensión finita en un álgebra trivializa la condición de amenabilidad, y es por ello que uno considera la amenabilidad propia, para distinguir a aquellas álgebras que son amenables pero no *globalmente* amenables. El siguiente teorema muestra que las álgebras de este tipo contienen un ideal no trivial de dimensión finita (comparar con el corolario 2.4.3).

Teorema 3.3.1. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra de dimensión infinita que es amenable pero no propiamente amenable. Entonces existe un elemento $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ tal que*

$$\dim(\mathcal{A} \cdot a) < \infty.$$

Demostración. Como $\mathcal{A}$ es amenable, para todo $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ finito sabemos que $\text{Føl}(\mathcal{F}, \varepsilon) \neq \emptyset$. Luego tiene sentido considerar

$$N_{\mathcal{F},\varepsilon} := \sup\{\dim(W) : W \in \text{Føl}(\mathcal{F}, \varepsilon)\}$$

Por otro lado, como $\mathcal{A}$ no es propiamente amenable, deben existir $\varepsilon_0 > 0$ y $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{A}$ tales que $N_{\mathcal{F}_0,\varepsilon_0} < \infty$. Por la observación 3.1.4, para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ es $N_{\mathcal{F}_0,\varepsilon} \leq N_{\mathcal{F}_0,\varepsilon_0}$ y por lo tanto podemos suponer que $\varepsilon_0 \cdot N_{\mathcal{F}_0,\varepsilon_0} < 1$.

Ahora afirmamos que, cualesquiera sean $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ y $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_0$ finito, es

$$\text{Føl}(\mathcal{F}, \varepsilon) = \text{Føl}(\mathcal{F}, 0)$$

La inclusión $\supseteq$ es clara, y para ver $\subseteq$ notamos que, dados $W \in \text{Føl}(\mathcal{F}, \varepsilon)$ y $a \in \mathcal{F}$, entonces

$$\begin{aligned} &\dim(a \cdot W + W) \leq (1+\varepsilon)\dim(W) \leq \dim(W) + \varepsilon \cdot N_{\mathcal{F},\varepsilon} \leq \\ &\dim(W) + \varepsilon_0 \cdot N_{\mathcal{F}_0,\varepsilon_0} < \dim(W) + 1 \end{aligned}$$

Como además es evidente que $\dim(a \cdot W + W) \geq \dim(W)$, debe ser $\dim(a \cdot W + W) = \dim(W)$.

Notemos ahora que un subespacio $W \subseteq \mathcal{A}$ es $\text{Føl}(\mathcal{F}, 0)$ si y sólo si $\mathcal{F} \cdot W \subseteq W$. Para cada $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ finito, como acabamos de mostrar que el conjunto $\{\dim(W) : W \in \text{Føl}(\mathcal{F}, 0)\}$ es no vacío y finito, concluimos que el conjunto

$$\text{Føl}_{max}(\mathcal{F}, 0) := \{W \in \text{Føl}(\mathcal{F}, 0) : \dim(W) \geq \dim(W') \ \forall W' \in \text{Føl}(\mathcal{F}, 0)\}$$

es no vacío. Más aún, $\text{Føl}_{max}(\mathcal{F}, 0)$ tiene un sólo elemento. En efecto, si $W, W' \in \text{Føl}_{max}(\mathcal{F}, 0)$ fueran subespacios distintos entonces $W + W'$ sería un subespacio $(\mathcal{F}, 0)$-Følner (pues $\mathcal{F} \cdot (W + W') \subseteq \mathcal{F} \cdot W + \mathcal{F} \cdot W' \subseteq W + W'$) de dimensión estrictamente mayor que las de W y W', lo cual es un absurdo. Llamemos a este único elemento $W_{\mathcal{F}}$.

Por último, consideremos la red $\{\dim(W_{\mathcal{F}})\}_{\mathcal{F} \in \mathcal{J}}$ indexada por el conjunto

$$\mathcal{J} := \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} : |\mathcal{F}| < \infty, \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}\}$$

Esta red es decreciente y toma valores enteros entre 1 y $\dim(W_{\mathcal{F}_0})$, por lo que tiene un límite realizado por algún $W_{\mathcal{F}_1}$. Se sigue entonces que para todo conjunto finito $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ que contenga a $\mathcal{F}_1$ es $W_{\mathcal{F}} = W_{\mathcal{F}_1}$. Luego para todo $a \in \mathcal{A}$ debe ser $a \cdot W_{\mathcal{F}_1} \subseteq W_{\mathcal{F}_1}$ (tomando $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \{a\}$), y esto implica que $W_{\mathcal{F}_1}$ es un ideal a izquierda no trivial de dimensión finita. En particular, si tomamos $a \in W_{\mathcal{F}_1}$, es

$$\dim(\mathcal{A} \cdot a) \leq \dim(W_{\mathcal{F}_1}) < \infty$$

como queríamos. □

De este teorema se obtienen dos corolarios.

Corolario 3.3.2. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra sin divisores de cero. Entonces $\mathcal{A}$ es amenable si y sólo si es propiamente amenable.*

Demostración. Suponemos a $\mathcal{A}$ de dimensión infinita, pues de lo contrario no hay nada que probar. Si $\mathcal{A}$ no tiene divisores de cero, entonces para todo $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ tenemos

$$\dim(\mathcal{A} \cdot a) = \dim(\mathcal{A}) = \infty$$

pues la mutliplicación por a manda conjuntos L.I en conjuntos L.I. Luego, por el teorema 3.3.1, si $\mathcal{A}$ es amenable debe ser propiamente amenable. □

Corolario 3.3.3. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra no amenable cuya unitización es amenable, entonces $\mathcal{A}$ es unital.*

Demostración. Por la proposición 3.2.2, $\tilde{\mathcal{A}}$ no es propiamente amenable y luego, por el teorema 3.3.1, $\tilde{\mathcal{A}}$ contiene un ideal a izquierda $\mathcal{I} \neq 0$ de dimensión finita. Como $\mathcal{A}$ no es amenable, debe ser $\mathcal{I} \cap \mathcal{A} = \{0\}$, pues de lo contrario $\mathcal{A}$ contendría un ideal a izquierda de dimensión finita no trivial.

Ahora, por lo dicho anteriormente podemos tomar un elemento $(b, 1) \in \mathcal{I}$ con $b \in \mathcal{A}$, y dado $a \in \mathcal{A}$ se tiene

$$(a, 0)(b, 1) = (ab + a, 0) \in \mathcal{I} \cap \mathcal{A} = \{0\}.$$

En particular, esto implica que $a(-b) = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$, por lo que $e := (-b)$ es una unidad a derecha de $\mathcal{A}$. Afirmamos ahora que el subespacio

$$(1 - e)\mathcal{A} := \{a - ea : a \in \mathcal{A}\}$$

es cero, lo que prueba que e es efectivamente una unidad de $\mathcal{A}$. En efecto, como para todo $c \in \mathcal{A}$ es

$$c(1 - e)\mathcal{A} = \{c(a - ea) : a \in \mathcal{A}\} = \{ca - ca : a \in \mathcal{A}\} = \{0\} \subseteq (1 - e)\mathcal{A}$$

cualquier subespacio de dimensión finita $W \subseteq (1 - e)\mathcal{A}$ es un $(\mathcal{F}, 0)$-Følner para todo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ finito. Como $\mathcal{A}$ no es amenable, debe ser $(1 - e)\mathcal{A} = \{0\}$. □

Ejemplo 3.3.4. Sea G un grupo. Entonces el álgebra de grupo $\mathbb{K}[G]$ es (algebraicamente) amenable si y sólo si es propiamente (algebraicamente) amenable si y sólo si G es amenable. Una demostración de esto puede verse en [2].

3.4. Descomposiciones paradójicas

Estudiaremos ahora la relación entre la amenabilidad de un álgebra y la existencia de descomposiciones paradójicas en ella. Para ello, primero debemos definir esta última noción en este contexto. Introducimos la siguiente notación: si $\mathcal{A}$ es un álgebra, $a \in \mathcal{A}$ y $A \subseteq \mathcal{A}$ es un subespacio, decimos que $a\big|_A$ es inyectiva si la función $x \in \mathcal{A} \mapsto ax \in \mathcal{A}$ es inyectiva al restringirla a A.

Definición 3.4.1. Sean $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra, $\{e_i\}_{i \in I}$ una base de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ un subconjunto. Una *descomposición paradójica de* $\{e_i\}_{i \in I}$ *por* $\mathcal{S}$ consta de dos particiones $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$, $(R_0, R_1, \ldots, R_m)$ de $\{e_i\}_{i \in I}$, i.e,

$$\{e_i\}_{i \in I} = L_0 \sqcup L_1 \sqcup \cdots \sqcup L_n = R_0 \sqcup R_1 \sqcup \cdots \sqcup R_m$$

junto con elementos $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{S}$ tales que

$$L_0 \cup g_1 L_1 \cup \cdots \cup g_n L_n \cup R_0 \cup h_1 R_1 \cup \cdots \cup h_m R_m$$

es una familia linealmente independiente (y en particular disjunta) en $\mathcal{A}$. En este caso decimos que $\mathcal{S}$ *descompone paradójicamente* a $\{e_i\}_{i \in I}$.

Notar que en particular $g_i|_{A_i}$ y $h_j|_{B_j}$ son inyectivas, donde A_i es el subespacio generado por L_i y B_j el generado por R_j.

Observación 3.4.2.

(I) Si $\mathcal{A}$ es unital, podemos agregar la unidad de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{S}$ y poner $g_0 = h_0 = 1_{\mathcal{A}}$ para evitar la asimetría en la definición. Si no, podemos arreglar esto pensando a $\mathcal{A}$ adentro de su unitización $\tilde{\mathcal{A}}$ y agregando $1_{\tilde{\mathcal{A}}}$ a $\mathcal{S}$. Notar que al hacer ésto último nuestro conjunto $\mathcal{S}$ ya no estará contenido en $\mathcal{A}$, sino en la unitización (pues la identificación $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ es pensando a $\mathcal{A}$ como $\mathcal{A} \times \{0\}$).

(II) Podemos dar una definición alternativa de descomposición paradójica en la que consideramos sólo una partición de la base $\{e_i\}_{i\in I}$. Concretamente, bajo esta definición una descomposición paradójica de $\{e_i\}_{i\in I}$ por $\mathcal{S}$ consiste de una partición $\{e_i\}_{i\in I} = T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_k$ y elementos $g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_k \in \mathcal{S}$ tales que

$$g_1T_1 \cup \cdots \cup g_kT_k \cup h_1T_1 \cup \cdots \cup h_kT_k$$

es una familia linealmente independiente en $\mathcal{A}$. Notar que si tenemos una descomposición de este estilo, podemos conseguir una como en la definición previa simplemente poniendo $L_i = R_i = T_i$ para $1 \leq i \leq k$ y $L_0 = R_0 = \emptyset$.

En principio esta nueva definición es más restrictiva, pero ambas resultan equivalentes si $\mathcal{S}$ contiene a la unidad (de $\mathcal{A}$ o $\tilde{\mathcal{A}}$). En efecto, si empezamos con una descomposición paradójica de la forma

$$[(L_0, \ldots, L_n), (R_0, \ldots, R_m), (g_1, \ldots, g_n), (h_1, \ldots, h_m)]$$

ponemos $T_{ij} \coloneqq L_i \cap R_j$, $g_{ij} \coloneqq g_i$ y $h_{ij} \coloneqq h_j$ para $i = 0, \ldots, n$ y $j = 0, \ldots, m$, entendiendo que $g_0 = h_0 = 1_{\mathcal{A}}$ ó $1_{\tilde{\mathcal{A}}}$.

Para ver el resultado central de esta sección, necesitamos primero el siguiente lema.

Lema 3.4.3. *Sea $\lambda > 1$. Una $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$ es no amenable si y sólo si existe un subconjunto finito $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ tal que para todo subespacio $W \subseteq \mathcal{A}$ finito-dimensional no nulo se tiene*

$$\frac{\dim(\mathcal{F}W + W)}{\dim(W)} > \lambda.$$

Demostración. Sabemos que $\mathcal{A}$ es no amenable si y sólo si existen $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{A}$ tal que para todo subespacio $W \subseteq \mathcal{A}$ de dimensión finita no nulo es

$$\frac{\dim(\mathcal{F}_0W + W)}{\dim(W)} > 1 + \varepsilon.$$

Luego tomando $\varepsilon = \lambda - 1$ para algún $\varepsilon > 0$ se ve la vuelta.

Para la otra dirección, tomamos $\mathcal{F}_0$ y ε como antes y definimos

$$\mathcal{F}_0^{(n)} = \{a_1 \cdots a_m \mid m \in \{1, \ldots, n\}, a_k \in \mathcal{F}_0, \forall k \in \{1, \ldots, m\}\}$$

Afirmamos ahora que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $W \subseteq \mathcal{A}$ se tiene

$$\frac{\dim(\mathcal{F}_0^{(n)}W + W)}{\dim(W)} > (1 + \varepsilon)^n$$

En efecto, sabemos que vale para $n = 1$ por hipótesis e inductivamente obtenemos

$$\begin{aligned}
&\dim(\mathcal{F}_0^{(n+1)}W + W) = \dim\left[\mathcal{F}_0^{(n)}(\mathcal{F}_0W + W) + \mathcal{F}_0W + W\right] \\
&> (1 + \varepsilon)^n \dim(\mathcal{F}_0W + W) > (1 + \varepsilon)^{n+1} \dim(W)
\end{aligned}$$

Como los conjuntos $\mathcal{F}_0^{(n)}$ son finitos y $(1 + \varepsilon)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que el cociente previo es mayor que λ para todo $W \subseteq \mathcal{A}$, como queríamos. $\square$

Proposición 3.4.4. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra no amenable. Entonces existe un subconjunto finito $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ que descompone paradójicamente a toda base de $\mathcal{A}$.*

Demostración. La idea de esta demostración es muy similar a la de la implicación (2) $\Rightarrow$ (1) del teorema 2.3.4. Primero tomaremos un subconjunto finito $\mathcal{F}$ que cumplirá una condición de duplicación local y luego usaremos el lema de Zorn para hacerla global.

Por el lema 3.4.3, sabemos que existe un subconjunto finito $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ tal que para todo subespacio $W \subseteq \mathcal{A}$ no nulo de dimensión finita es

$$\frac{\dim(\mathcal{F}W + W)}{\dim(W)} > 2$$

Veamos que $\mathcal{F}$ descompone paradójicamente a cualquier base $\{e_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{A}$. Para ello, sea $\mathcal{F}^+ = \mathcal{F} \sqcup \{*\}$, donde $*$ es simplemente un elemento abstracto para el cual entendemos que por definición vale $* \cdot e_i = e_i$ para todo $i \in I$ (si resulta más sencillo, se puede poner $* = 1_{\tilde{\mathcal{A}}}$). Sea ahora Ω el conjunto de funciones $\omega : I \times \{0,1\} \to \mathcal{P}(\mathcal{F}^+)$ que cumplen que para cualquier subconjunto finito $K \subseteq I \times \{0,1\}$ es

$$\dim\left(\operatorname{span}\left(\bigcup_{(i,j)\in K}\ \bigcup_{a\in\omega(i,j)} a\cdot e_i\right)\right) \geq |K|$$

Notar que Ω es no vacío pues la función constante $\mathcal{F}^+$ pertenece a Ω por cómo tomamos $\mathcal{F}$.

Nuestro objetivo será mostrar que existe un $\omega_0 \in \Omega$ tal que $\omega_0(i,j)$ tiene un solo elemento para todo $(i,j) \in I \times \{0,1\}$. Si lo conseguimos, entonces podremos definir $\varphi : I \times \{0,1\} \to \mathcal{F}^+$ de manera que $\omega_0(i,j) = \{\varphi(i,j)\}$. Como $\omega_0 \in \Omega$, sabemos que

$$\dim\left(\operatorname{span}\left(\bigcup_{(i,j)\in K} \varphi(i,j)\cdot e_i\right)\right) = |K|$$

para todo $K \subseteq I \times \{0,1\}$ finito y por lo tanto $\{\varphi(i,j)\cdot e_i\}_{(i,j)\in I\times\{0,1\}}$ es una familia linealmente independiente en $\mathcal{A}$. Esto nos permite definir, para cada $a \in \mathcal{F}^+$,

$$L_a = \{e_i \mid i \in I,\ \varphi(i,0) = a\}$$
$$R_a = \{e_i \mid i \in I,\ \varphi(i,1) = a\}$$

lo que nos da dos particiones

$$\{e_i\}_{i\in I} = L_* \sqcup \left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{F}} L_a\right) = R_* \sqcup \left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{F}} R_a\right)$$

que cumplen que

$$\left(L_* \cup \bigcup_{a\in\mathcal{F}} aL_a\right) \cup \left(R_* \cup \bigcup_{a\in\mathcal{F}} aR_a\right)$$

es una familia disjunta y linealmente independiente en $\mathcal{A}$, obteniéndose la descomposición paradójica buscada.

Veamos entonces que existe el ω_0 que buscamos. En el conjunto Ω ponemos un orden parcial dado por inclusión en cada punto, i.e, $\omega \leq \omega'$ si y sólo si $\omega(i,j) \subseteq \omega'(i,j)$ para todo $(i,j) \in I \times \{0,1\}$. Con este orden toda cadena tiene una cota inferior en Ω. En efecto, sea $\{\omega_l\}_{l\in L}$ una cadena en Ω, definamos $\omega : I \times \{0,1\} \to \mathcal{P}(\mathcal{F}^+)$ como $\omega(i,j) = \bigcap_{l\in L} \omega_l(i,j)$ y veamos que $\omega \in \Omega$ (es claro que es cota inferior). Sea $K \subseteq I \times \{0,1\}$ un conjunto finito. Para cada $(i,j) \in K$, el conjunto $\{|\omega_l(i,j)|\}_{l\in L}$ tiene un mínimo alcanzado por algún $\omega_{l_0}^{(i,j)}$, que por lo tanto cumple $\omega(i,j) = \omega_{l_0}^{(i,j)}(i,j)$. A su vez, como $\{\omega_l\}$ es una cadena y K es finito, el conjunto $\{\omega_{l_0}^{(i,j)}\}_{(i,j)\in K}$ tiene un mínimo ω_{l_0}, que por ende debe satisfacer $\omega\big|_K = \omega_{l_0}\big|_K$. Es claro entonces que $\omega \in \Omega$ pues, como $\omega_{l_0} \in \Omega$, tenemos

$$\dim\left(\operatorname{span}\left(\bigcup_{(i,j)\in K}\ \bigcup_{a\in\omega(i,j)} a\cdot e_i\right)\right) = \dim\left(\operatorname{span}\left(\bigcup_{(i,j)\in K}\ \bigcup_{a\in\omega_{l_0}(i,j)} a\cdot e_i\right)\right) \geq |K|.$$

Hecha esta verificación, por el lema de Zorn existe un elemento minimal $\omega_0 \in \Omega$. Afirmamos que $|\omega_0(i,j)| = 1$ para todo $(i,j) \in I \times \{0,1\}$. En primer lugar, dado $(i,j) \in I \times \{0,1\}$, es claro que $|\omega_0(i,j)| \geq 1$ pues tomando $K = \{(i,j)\}$ se tiene

$$\dim\left(\operatorname{span}\left(\bigcup_{a\in\omega_0(i,j)} a\cdot e_i\right)\right) \geq |\{(i,j)\}| = 1$$

Supongamos que la desigualdad fuera estricta. Luego deberían existir un $(i,j) \in I \times \{0,1\}$ y dos elementos distintos $a_0, a_1 \in \omega_0(i,j)$. Ahora, por minimalidad de ω_0, para $l = 0,1$ debe existir un conjunto finito $K_l \subseteq I \times \{0,1\}$ que no contenga a (i,j) de manera que

$$\dim\left(\operatorname{span}\left(\left(\bigcup_{(i',j')\in K_l}\ \bigcup_{a\in\omega_0(i',j')} a\cdot e_{i'}\right)\cup\left(\bigcup_{a\in\omega_0(i,j)\setminus\{a_l\}} a\cdot e_i\right)\right)\right) \leq |K_l|$$

pues de lo contrario podríamos sacar a_l de $\omega_0(i,j)$ para conseguir una función en Ω menor que ω_0. Pero si ahora llamamos

$$W_l \coloneqq \operatorname{span}\left(\left(\bigcup_{(i',j')\in K_l}\ \bigcup_{a\in\omega_0(i,j)} a\cdot e_{i'}\right)\cup\left(\bigcup_{a\in\omega_0(i,j)\setminus\{a_l\}} a\cdot e_i\right)\right)$$

tenemos

$$\begin{aligned}
|K_0| + |K_1| &\geq \dim(W_0) + \dim(W_1)\\
&= \dim(W_0 + W_1) + \dim(W_0 \cap W_1)\\
&\geq \dim\left(\operatorname{span}\left(\left(\bigcup_{(i',j')\in K_0\cup K_1}\ \bigcup_{a\in\omega_0(i',j')} a\cdot e_{i'}\right)\cup\left(\bigcup_{a\in\omega_0(i,j)} a\cdot e_i\right)\right)\right)\\
&\quad + \dim\left(\operatorname{span}\left(\bigcup_{(i',j')\in K_0\cap K_1}\ \bigcup_{a\in\omega_0(i',j')} a\cdot e_{i'}\right)\right)\\
&\geq |K_0 \cup K_1 \cup \{(i,j)\}| + |K_0 \cap K_1|\\
&= |K_0 \cup K_1| + 1 + |K_0 \cap K_1|\\
&= |K_0| + |K_1| + 1
\end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Esto prueba que $|\omega_0(i,j)| = 1$ para todo $(i,j) \in I \times \{0,1\}$ como queríamos. □

Definiremos ahora la noción de medida invariante en una $\mathbb{K}$-álgebra y probaremos que, al igual que en el caso de grupos y espacios métricos, ésta medida existirá si el álgebra es amenable.

Definición 3.4.5. Sean $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra y $\{e_i\}_{i\in I}$ una base de ella. Una *medida dimensional* en $\mathcal{A}$ asociada a $\{e_i\}_{i\in I}$ es una función μ del conjunto de subespacios de $\mathcal{A}$ en el intervalo $[0,1]$ que cumple lo siguiente:

(I) $\mu(\mathcal{A}) = 1$.

(II) Si $A, B \subseteq \mathcal{A}$ son subespacios con $A \cap B = \{0\}$ entonces $\mu(A \oplus B) \geq \mu(A) + \mu(B)$.

(III) Para toda partición $L_1 \sqcup \cdots \sqcup L_m$ de $\{e_i\}_{i\in I}$ es $\sum_{k=1}^{m} \mu(\operatorname{span}(L_k)) = 1$.

Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto de $\mathcal{A}$. Diremos que μ es $\mathcal{S}$-*invariante* si además se cumple

(IV) Para todo $s \in \mathcal{S}$ y $A \subseteq \mathcal{A}$ subespacio tales que $s|_A$ es inyectiva, es $\mu(sA) \geq \mu(A)$.

Notar que si μ es una medida dimensional en $\mathcal{A}$ y $A \subseteq B$ son subespacios de $\mathcal{A}$, la propiedad (ii) asegura que $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Teorema 3.4.6. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra. Son equivalentes*

(1) *$\mathcal{A}$ es amenable.*

(2) *Para todo subconjunto finito $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ hay una base de $\mathcal{A}$ que no puede ser paradójicamente descompuesta por $\mathcal{F}$.*

(3) *Para todo subespacio de dimensión numerable $W \subseteq \mathcal{A}$ hay una base de $\mathcal{A}$ que no puede ser paradójicamente descompuesta por W.*

(4) *Para todo subespacio de dimensión numerable $W \subseteq \mathcal{A}$ existe una medida dimensional W-invariante en $\mathcal{A}$ (asociada a alguna base).*

Demostración. La proposición 3.4.4 muestra que $(2) \Rightarrow (1)$, mientras que $(3) \Rightarrow (2)$ es evidente poniendo $W = \operatorname{span}(\mathcal{F})$, pues si existiera una base de $\mathcal{A}$ que fuera paradójicamente descompuesta por $\mathcal{F}$, entonces ésta también sería paradójicamente descompuesta por W.

Para ver $(4) \Rightarrow (3)$, sea $W \subseteq \mathcal{A}$ un subespacio de dimensión numerable. Por hipótesis, existen una base $\{e_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{A}$ y una medida dimensional W-invariante μ asociada a $\{e_i\}_{i\in I}$. Supongamos entonces que hubiera una descomposición paradójica

$$((L_0,\dots,L_n),(R_o,\dots,R_m),(g_1,\dots,g_n),(h_1,\dots,h_m))$$

de $\{e_i\}_{i\in I}$ por W. Si ponemos $A_k := \operatorname{span}(L_k)$ y $B_l := \operatorname{span}(R_l)$, tenemos $\sum_{k=0}^{n}\mu(A_k) = 1 = \sum_{l=0}^{m}\mu(B_l)$ y como además $g_k|_{A_k}$ y $h_l|_{B_l}$ son inyectivas sabemos que $\mu(g_kA_k) \geq \mu(A_k)$, $\mu(h_lB_l) \geq \mu(B_l)$ para todos k, l. Juntando todo esto, llegamos a

$$\begin{aligned} 1 \geq& \mu(A_0 \oplus g_1A_1 \oplus \cdots \oplus g_nA_n \oplus B_0 \oplus h_1B_1 \oplus \cdots \oplus h_mB_m) \\ \geq& \mu(A_0) + \sum_{k=1}^{n}\mu(g_kA_k) + \mu(B_0) + \sum_{l=1}^{m}\mu(h_lB_l) \\ \geq& \sum_{k=0}^{n}\mu(A_k) + \sum_{l=0}^{m}\mu(B_l) = 2 \end{aligned}$$

lo cual es absurdo.

Por último, para ver $(1) \Rightarrow (4)$, tomemos un subespacio $W \subseteq \mathcal{A}$ de dimensión numerable y construyamos la medida que necesitamos. Separaremos en dos casos.

Caso 1: $\mathcal{A}$ es amenable pero no propiamente amenable. En este caso sabemos (por el corolario 3.3.1) que existe un ideal a izquierda I no nulo de dimensión finita. Esto nos permite fácilmente definir la medida μ como

$$\mu(A) = \frac{\dim(I \cap A)}{\dim(I)}$$

para cualquier subespacio $A \subseteq \mathcal{A}$. Si tomamos una base de I y la completamos a una base β de $\mathcal{A}$, entonces μ resulta W-invariante asociada a la base β.

Caso 2: $\mathcal{A}$ es propiamente amenable. La proposición 3.1.7 nos dice que existe una subálgebra $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ propiamente amenable de dimensión numerable que contiene a W. Afirmamos ahora que existe una sucesión creciente de subespacios de $\mathcal{A}$ de dimensión finita $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\mathcal{B} = \cup_{n=1}^{\infty} W_n$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dim(aW_n + W_n)}{\dim(W_n)} = 1$$

para todo $a \in \mathcal{B}$. En efecto, sea $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de $\mathcal{B}$ y tomemos W_1 un subespacio $(\{v_1\}, 1)$-Følner en el sentido de la observación 3.1.3 tal que $v_1 \in W_1$. Ahora, como W_1 es de dimensión finita, existen elementos $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ de manera que $W_1 \subseteq < v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} >$. Tomamos ahora W_2 un subespacio $(\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} \cup \{v_2\}, \frac{1}{2})$-Følner (nuevamente en el sentido de 3.1.3) de manera que $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} \cup \{v_2\} \subseteq W_2$. Repitiendo este proceso inductivamente, en cada paso lo que hacemos es asegurarnos de que el subespacio W_n contenga al anterior, que sea $(\{v_1, \ldots, v_n\}, \frac{1}{n})$-Følner y que contenga a los primeros n elementos de la base de $\mathcal{B}$. Todo esto garantiza que la sucesión $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cumple lo que queremos.

Para construir ahora la medida que buscamos, notamos primero que cada W_n define una medida μ_n en $\mathcal{A}$ de la misma manera que en el caso 1, es decir,

$$\mu_n(A) = \frac{\dim(W_n \cap A)}{\dim(W_n)}.$$

Sin embargo, a diferencia del primer caso, esta medida no es necesariamente W-invariante pues W_n no es un ideal. Si pudiéramos tomar límite sobre estos cocientes, intuitivamente estaríamos ahora intersecando con la subálgebra $\mathcal{B} = \cup_{n=1}^{\infty} W_n$ y luego conseguiríamos la W-invarianza (ya que $W \subseteq \mathcal{B}$ y así para todo $a \in W$ es $a\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$). Lo que buscamos entonces es una forma coherente de tomar un límite sobre estos cocientes para todo subespacio $A \subseteq \mathcal{A}$, de manera que se preserven las propiedades básicas como la linealidad. Esto se logra tomando límite sobre un *ultrafiltro libre* en $\mathbb{N}$ (ver apéndice A para un resumen de lo esencial que usaremos a continuación sobre ultrafiltros).

Sean entonces ω un ultrafiltro libre en $\mathbb{N}$ y $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de $\mathcal{B}$ obtenida completando paso a paso una base de W_{n-1} a una de W_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Por último, completamos $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ a una base $\{e_i\}_{i \in I}$ de todo $\mathcal{A}$, con $\mathbb{N} \subseteq I$. Hecho todo esto, ponemos para cada subespacio $A \subseteq \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \lim_{\omega} \frac{\dim(A \cap W_n)}{\dim(W_n)}$$

Es claro que $\mu(\mathcal{A}) = 1$ y que μ toma valores entre 0 y 1. Veamos que μ cumple las propiedades (ii), (iii) y (iv) de la definición 3.4.5 (asociada a $\{e_i\}_{i \in I}$). En primer lugar, si A y B son dos subespacios en suma directa, entonces es evidente que $(A \oplus B) \cap W_n \supseteq (A \cap W_n) \oplus (B \cap W_n)$ para cualquier n, de modo que

$$\frac{\dim((A \oplus B) \cap W_n)}{\dim(W_n)} \geq \frac{\dim(A \cap W_n)}{\dim(W_n)} + \frac{\dim(B \cap W_n)}{\dim(W_n)}.$$

Al tomar ω-límite de ambos lados se obtiene (ii). Por otro lado, si tenemos una partición $L_1 \sqcup \cdots \sqcup L_m = \{e_i\}_{i \in I}$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\dim(\operatorname{span}(L_k) \cap W_n)}{\dim(W_n)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{|\{i \in I : e_i \in L_k \cap W_n\}|}{\dim(W_n)} = 1$$

pues la base $\{e_i\}_{i \in I}$ contiene una base de W_n. Como el límite sobre un ultrafiltro separa sumas, esto nos dice que se cumple (iii).

Por último, para verificar (iv) veamos primero que, para todo $a \in W$ y $A \subseteq \mathcal{A}$ subespacio, tenemos

$$\mu(A) = \lim_{\omega} \frac{\dim((W_n + aW_n) \cap A)}{\dim(W_n)}.$$

Escribiendo $T_n = (W_n + aW_n) \cap A$, tenemos $T_n \cap W_n = A \cap W_n$ y así $T_n = (W_n \cap A) \oplus T_n'$ con $T_n' \cap W_n = \{0\}$. Luego

$$\frac{\dim(T_n)}{\dim(W_n)} = \frac{\dim(W_n \cap A)}{\dim(W_n)} + \frac{\dim(T_n')}{\dim(W_n)}.$$

Ahora, si para cada $n \in \mathbb{N}$ ponemos $aW_n + W_n = W_n \oplus S_n$ para algún subespacio S_n, como teníamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dim(aW_n + W_n)}{\dim(W_n)} = 1$$

concluimos que $\frac{\dim(S_n)}{\dim(W_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y entonces $\frac{\dim(S_n)}{\dim(W_n)} \xrightarrow{\omega} 0$ (pues ω es libre). Usando que $T_n' \cap W_n = \{0\}$, sabemos que $\dim(T_n') \leq \dim(S_n)$ y por lo tanto $\frac{\dim(T_n')}{\dim(W_n)} \xrightarrow[\omega]{} 0$, obteniéndose la igualdad buscada.

Finalmente, sea $a \in W$ tal que $a|_A$ es inyectiva. Luego

$$\begin{aligned}\mu(aA) &= \lim_{\omega} \frac{\dim((W_n + aW_n) \cap aA)}{\dim(W_n)} \geq \lim_{\omega} \frac{\dim(aW_n \cap aA)}{\dim(W_n)} \\ &\geq \lim_{\omega} \frac{\dim(a(W_n \cap A))}{\dim(W_n)} = \lim_{\omega} \frac{\dim(W_n \cap A)}{\dim(W_n)} = \mu(A)\end{aligned}$$

como queríamos.

□

Para $\mathbb{K}$-álgebras de dimensión numerable, el teorema anterior se puede enunciar de manera más sencilla.

Corolario 3.4.7. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra de dimensión numerable. Son equivalentes*

(1) $\mathcal{A}$ es amenable.

(2) Existe una base de $\mathcal{A}$ que no puede ser paradójicamente descompuesta por $\mathcal{A}$.

(3) Existe una medida dimensional $\mathcal{A}$-invariante en $\mathcal{A}$ (asociada a alguna base).

Demostración. La implicación $(1) \Rightarrow (3)$ es evidente poniendo $W = \mathcal{A}$ en el teorema 3.4.6. Por otro lado, si por hipótesis existe una base de $\mathcal{A}$ que no puede ser paradójicamente descompuesta por $\mathcal{A}$, entonces en particular ésta no puede ser paradójicamente descompuesta por ningún subconjunto finito $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$. Por el teorema anterior, $\mathcal{A}$ resulta amenable, obteniéndose $(2) \Rightarrow (1)$. Por último, una medida dimensional $\mathcal{A}$-invariante en $\mathcal{A}$ es, en particular, W-invariante para todo subespacio $W \subseteq \mathcal{A}$. En otras palabras, si asumimos (3) entonces vale la propiedad (4) del teorema 3.4.6 y por lo tanto (nuevamente poniendo $W = \mathcal{A}$) debe existir una base de $\mathcal{A}$ que no puede ser paradójicamente descompuesta por $\mathcal{A}$. Esto prueba $(3) \Rightarrow (2)$.

□

3.5. Álgebras propiamente infinitas

Introducimos ahora la noción de álgebra propiamente infinita, para luego probar que toda álgebra de este tipo es no amenable.

Sean e y f dos idempotentes en un álgebra $\mathcal{A}$. Diremos que e y f son *ortogonales*, notado $e \perp f$, si $ef = fe = 0$ (en cuyo caso $e + f$ es también un idempotente). La *suma ortogonal* de e y f es el idempotente $e \oplus f = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A})$ (esta suma está definida aún si e y f no son ortogonales entre sí). Escribiremos $f \leq e$ cuando $ef = fe = f$. Diremos que e y f son (Murray-von Neumann) *equivalentes* (notado $e \sim f$) si existen $x, y \in \mathcal{A}$ tales que $e = xy$ y $f = yx$; diremos que f es *subequivalente* a e ($f \lesssim e$) si existe un idempotente $g \in \mathcal{A}$ de modo que $f \sim g$ y $g \leq e$. Estas relaciones se extienden naturalmente al álgebra de matrices $M_\infty(\mathcal{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(\mathcal{A})$. Concretamente, dos idempotentes $e \in M_m(\mathcal{A})$, $f \in M_n(\mathcal{A})$ cumplen $e \sim f$ si existen $x \in \mathcal{A}^{m\times n}$, $y \in \mathcal{A}^{n\times m}$ tales que $e = xy$, $f = yx$ y cumplen $f \lesssim e$ si existe un idempotente $g \in M_n(\mathcal{A})$ con

$f \sim g$ y $g \leq e$. Cuando sea necesario, un elemento $a \in \mathcal{A}$ se pensará dentro del álgebra de matrices $M_\infty(\mathcal{A})$ como una matriz de 1×1.

Un idempotente $e \in \mathcal{A}$ se dice *propiamente infinito* si existen idempotentes ortogonales $e_1, e_2 \in e\mathcal{A}e$ tales que $e_1 \sim e \sim e_2$.

Observación 3.5.1. Si e, f son idempotentes en un álgebra $\mathcal{A}$, entonces $f \in e\mathcal{A}e$ si y sólo si $f \leq e$. Lo mismo vale si reemplazamos $\mathcal{A}$ por $M_\infty(\mathcal{A})$. Además, si $f \leq e$ entonces trivialmente vale $f \lesssim e$ (poniendo $g = f$).

Proposición 3.5.2. *Dos idempotentes $e, f \in M_\infty(\mathcal{A})$ ($e \in M_m(\mathcal{A})$, $f \in M_n(\mathcal{A})$) cumplen $e \gtrsim f$ si y sólo si existen $x \in \mathcal{A}^{m\times n}$, $y \in \mathcal{A}^{n\times m}$ de modo que $f = yx$, $xy \in e\,[M_\infty(\mathcal{A})]\,e$.*

Demostración. Esto es simplemente una escritura más detallada de la definición dada más arriba. Es decir, si tenemos $e \gtrsim f$ entonces existe $g \in M_n(\mathcal{A}) \subseteq M_\infty(\mathcal{A})$ tal que $f \sim g \leq e$, lo que significa que existen x, y como en el enunciado tales que $f = yx$, $g = xy$ y además $ge = eg = g$, i.e, $xy = g \in e\,[M_\infty(\mathcal{A})]\,e$. Por otro lado, si sabemos que $f = yx$, $xy \in e\,[M_\infty(\mathcal{A})]\,e$ para algunos x, y como en el enunciado, entonces poniendo $g = xy$ se llega a $e \gtrsim f$. □

Proposición 3.5.3. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra, $e_1, \ldots, e_n$ y $f_1, \ldots, f_n$ idempotentes en $\mathcal{A}$ ó $M_\infty(\mathcal{A})$. Entonces*

(1) *La relación $\sim$ es de equivalencia (en $\mathcal{A}$ y $M_\infty(\mathcal{A})$).*

(2) *La relación $\lesssim$ es transitiva (en $\mathcal{A}$ y $M_\infty(\mathcal{A})$).*

(3) *Si $e_1 \sim e_2$, $e_2 \gtrsim e_3$ y $e_3 \sim e_4$ entonces $e_1 \gtrsim e_4$.*

(4) *Si $e_i \perp e_j$ para todo $i \neq j$ entonces $\sum_{i=1}^n e_i \sim \bigoplus_{i=1}^n e_i$.*

(5) *Si $e_i \lesssim f_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ entonces $\bigoplus_{i=1}^n e_i \lesssim \bigoplus_{i=1}^n f_i$.*

(6) *Si $e_1 \perp e_2$ y $e_1, e_2 \leq e_3$ entonces $e_1 \oplus e_2 \lesssim e_3$.*

Demostración. (1) Es evidente que $\sim$ es reflexiva y simétrica. Para la transitividad, supongamos que $e_1 \sim e_2$, $e_2 \sim e_3$ en $\mathcal{A}$ y sean $x, y, x', y' \in \mathcal{A}$ tales que

$$\begin{aligned} &e_1 = xy\ ,\ e_2 = yx \\ &e_2 = x'y'\ ,\ e_3 = y'x'. \end{aligned}$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} &e_1 = e_1^2 = xyxy = x(yx)y = xe_2y = xx'y'x = (xx')(y'y) \\ &(y'y)(xx') = y'e_2x' = y'x'y'x' = e_3^2 = e_3 \end{aligned}$$

por lo que $e_1 \sim e_3$ y así $\sim$ resulta transitiva. El caso de $M_\infty(\mathcal{A})$ es análogo.

(2) Supongamos que $e_1 \gtrsim e_2$ y $e_2 \gtrsim e_3$ en $\mathcal{A}$. Entonces existen elementos $x, y, x', y' \in \mathcal{A}$ tales que

$$\begin{aligned} &e_2 = yx\ ,\ xy \leq e_1 \\ &e_3 = y'x'\ ,\ x'y' \leq e_2. \end{aligned}$$

Como $x'y' \leq e_2$, se tiene $x'y' = e_2x'y'e_2e_2 = yxx'y'yxyx = (yxx'y'yxy)x$. Luego el elemento

$$g := x(yxx'y'yxy) = xy(xx'y'y)xy$$

cumple $g \sim x'y'$ y además $g \leq e_1$ pues $xy \leq e_1$. Con todo esto tenemos $e_3 \sim x'y' \sim g \leq e_1$ y así $e_1 \gtrsim e_3$, probándose la transitividad. Nuevamente, el caso de $M_\infty(\mathcal{A})$ es análogo.

(3) Es consecuencia de (2) y el hecho de que $e \sim f$ implica $e \gtrsim f$.

(4) Si definimos

$$x = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix}$$

entonces es sencillo verificar, gracias a la ortogonalidad de los elementos e_i, que $xy = \bigoplus_{i=1}^n e_i$ y $yx = \sum_{i=1}^n e_i$.

(5) Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tenemos elementos x_i, y_i de manera que

$$e_i = y_i x_i \ , \ x_i y_i \leq f_i.$$

Si ahora ponemos

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

es un cálculo sencillo que $yx = \bigoplus_{i=1}^n e_i$ y $xy \leq \bigoplus_{i=1}^n f_i$.

(6) Notamos que $e_3 \geq e_1 + e_2$ y en particular entonces $e_3 \gtrsim e_1 + e_2$. Como además $e_1 \perp e_2$, por (4) es $e_1 + e_2 \sim e_1 \oplus e_2$ y luego $e_3 \gtrsim e_1 \oplus e_2$ por (3). □

Proposición 3.5.4. *Un idempotente $e \in \mathcal{A}$ es propiamente infinito si y sólo si $e \gtrsim e \oplus e$ en $M_\infty(\mathcal{A})$.*

Demostración. Supongamos primero que e es propiamente infinito y sean $e_1, e_2 \in e\mathcal{A}e$ los idempotentes ortogonales tales que $e_1 \sim e \sim e_2$. Esta condición se traduce en la existencia de elementos $x, y, x', y' \in \mathcal{A}$ que satisfacen

$$\begin{aligned} &e = xy \ , \ e_1 = yx \\ &e = x'y' \ , \ e_2 = y'x' \\ &yxy'x' = e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1 = y'x'yx \\ &ee_1 = e_1 e = e_1 \ , \ ee_2 = e_2 e = e_2. \end{aligned}$$

Si ahora ponemos

$$X = \begin{pmatrix} ex \\ ex' \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^{2\times 1}, Y = \begin{pmatrix} ye & y'e \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^{1\times 2}$$

se verifica fácilmente que $XY = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = e \oplus e$ (pues de las relaciones escritas más arriba se deduce que $exy'e = ex'ye = 0$) y por otro lado $YX = yex + y'ex' = yxyx + y'x'y'x' = e_1^2 + e_2^2 = e_1 + e_2$. Como $e_1, e_2 \leq e$, se tiene $eYXe = YX$, por lo que acabamos de probar que $e \gtrsim e \oplus e$.

Recíprocamente, si tenemos $e \gtrsim e \oplus e$ entonces existen

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^{2\times 1}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^{1\times 2}$$

de manera que $XY = e \oplus e$, $YX \leq e$. Si ahora ponemos $x := ex_1$, $y := y_1 e$, $x' := ex_2$, $y' := y_2 e$ y luego definimos

$$e_1 := yx \ , \ e_2 := y'x'$$

se verifica fácilmente que e_1 y e_2 son idempotentes ortogonales tales que $e_1 \sim e \sim e_2$, con lo cual e resulta propiamente infinito. □

Proposición 3.5.5. *Sean $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{A}$ idempotentes ortogonales dos a dos (i.e $e_i \perp e_j$ para todo $i \neq j$). Si cada e_i es propiamente infinito, entonces la suma $\sum_{i=1}^n e_i$ es un idempotente propiamente infinito.*

Demostración. En primer lugar, es sencillo verificar que la suma resulta un idempotente pues $e_ie_j = 0$ para todo $i \neq j$. Veamos entonces que es propiamente infinita. Como los elementos e_i son ortogonales dos a dos, se tiene $\sum_{i=1}^n e_i \sim \bigoplus_{i=1}^n e_i$ (proposicion 3.5.3) y de la misma manera, como los idempotentes $e_i \oplus e_i$ también son ortogonales dos a dos, es $\bigoplus_{i=1}^n (e_i \oplus e_i) \sim \sum_{i=1}^n (e_i \oplus e_i)$. Además, como cada e_i es propiamente infinito, la proposición 3.5.4 nos dice que $e_i \gtrsim e_i \oplus e_i$. Luego $\bigoplus_{i=1}^n e_i \gtrsim \bigoplus_{i=1}^n (e_i \oplus e_i)$ (nuevamente por 3.5.3). Juntando todo esto llegamos a

$$\sum_{i=1}^n e_i \sim \bigoplus_{i=1}^n e_i \gtrsim \bigoplus_{i=1}^n (e_i \oplus e_i) \sim \sum_{i=1}^n e_i \oplus e_i = \sum_{i=1}^n e_i \oplus \sum_{i=1}^n e_i$$

lo que nos dice que $\sum_{i=1}^n e_i$ es propiamente infinito. □

Definición 3.5.6. Un álgebra unital $\mathcal{A}$ se dice *propiamente infinita* si $1_{\mathcal{A}}$ es propiamente infinito en $\mathcal{A}$.

Como consecuencia del teorema 3.4.6, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.5.7. *Si una $\mathbb{K}$-álgebra unital $\mathcal{A}$ es propiamente infinita entonces no es amenable.*

Demostración. Como $\mathcal{A}$ es propiamente infinita, existen elementos $u, u', v, v' \in \mathcal{A}$ que satisfacen

$$uu' = 1_{\mathcal{A}} = vv', \, vu' = 0 = uv'$$

Notar que las primeras igualdades implican que $u'|_{\mathcal{A}}$, $v'|_{\mathcal{A}}$, $u|_{u'\mathcal{A}}$ y $v|_{v'\mathcal{A}}$ son inyectivas. Supongamos que $\mathcal{A}$ fuera amenable. Entonces debería existir una medida dimensional $\{u, u', v, v'\}$-invariante asociada a alguna base. Llamándola μ, por invarianza tendríamos

$$\mu(\mathcal{A}) \leq \mu(u'\mathcal{A}) \leq \mu(uu'\mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A})$$

por lo que $\mu(u'\mathcal{A}) = 1$, y similarmente $\mu(v'\mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A}) = 1$. Por otro lado, para todos $a, b \in \mathcal{A}$ con $u'a = v'b$ es $b = vv'b = vu'a = 0$. Esto implica que $u'\mathcal{A} \cap v'\mathcal{A} = 0$ y luego

$$\mu(u'\mathcal{A} + v'\mathcal{A}) \geq \mu(u'\mathcal{A}) + \mu(v'\mathcal{A}) = 2$$

lo cual es absurdo.

□

Capítulo 4

Álgebras de Leavitt

Las álgebras de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(m,n)$ fueron introducidas en [15] por W. G. Leavitt como una familia de álgebras universales entre las que no poseen la propiedad de la base invariante (4.1.1). Quince años despues, Cuntz introduce y estudia en [23] las $\mathbb{C}^*$-álgebras $\mathcal{O}_n$ (hoy llamadas álgebras de Cuntz) que aparecen como una cierta completación de $L_{\mathbb{C}}(1,n)$. Poco después esto se generaliza en las álgebras de Cuntz-Krieger $C^*(E)$, asociadas a grafos finitos y luego dirigidos en [24] y [25]. Finalmente, en [16], Abrams y Aranda Pino definen las álgebras de caminos de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(E)$ asociadas a grafos dirigidos, de manera que las álgebras $C^*(E)$ se obtienen completando $L_{\mathbb{K}}(E)$ en una cierta norma.

En este capítulo estudiaremos la amenabilidad en el contexto de las álgebras (de caminos) de Leavitt. Veremos que las álgebras de Leavitt son todas no amenables y daremos una caracterización de la amenabilidad de álgebras de caminos de Leavitt que mostrará, en particular, que para estas álgebras la no amenabilidad es equivalente a la propia infinitud.

4.1. Preliminares

Definición 4.1.1. Una $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$ tiene la *propiedad de la base invariante* (o IBN, por *invariant basis number*) si cumple que

$$\mathcal{A}^n \simeq \mathcal{A}^m \Rightarrow n = m$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$, donde el isomorfismo es de $\mathcal{A}$-módulos a izquierda. En otras palabras, $\mathcal{A}$ tiene la propiedad IBN si todo $\mathcal{A}$-módulo libre finitamente generado tiene un rango bien definido.

Definición 4.1.2. Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m < n$.

(I) El álgebra de Leavitt $L(m,n) = L_{\mathbb{K}}(m,n)$ es el álgebra unital generada por elementos X_{ij} y Y_{ji} con $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ sujetos a las relaciones $XY = 1_m$ y $YX = 1_n$, donde X es la matriz (X_{ij}) e Y es la matriz (Y_{ji}).

(II) El álgebra $L_\infty = L_{\mathbb{K},\infty}$ es el álgebra unital generada por elementos $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ sujetos a las relaciones $y_j x_i = \delta_{ij}$, para $i, j \in \mathbb{N}$.

Es un resultado conocido (ver [21], teorema 4.3 y [8], teorema 1.4) que L_∞ es simple y que $L(m,n)$ lo es si y sólo si $m = 1$ (un álgebra se dice *simple* si tiene exactamente dos ideales biláteros).

Proposición 4.1.3. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra unital no nula. Entonces*

(1) $\mathcal{A}$ no tiene la propiedad IBN si y sólo si existen números enteros $1 \leq m < n$ y un morfismo unital $L(m,n) \to \mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{A}$ es propiamente infinita si y sólo si existe un monomorfismo unital $L_\infty \to \mathcal{A}$.

Demostración. (1) Si $\mathcal{A}$ no tiene la propiedad IBN existen $1 \leq m < n$ tales que $\mathcal{A}^m \simeq \mathcal{A}^n$, y este isomorfismo está dado por matrices $X' \in M_{m\times n}(\mathcal{A})$ y $Y' \in M_{n\times m}(\mathcal{A})$ tales que $X'Y' = I_m$, $Y'X' = I_n$. Esto nos da el morfismo unital $L(m,n) \to \mathcal{A}$ que buscamos. La recíproca es evidente.

(2) Si $\mathcal{A}$ es propiamente infinita podemos encontrar una sucesión $e_1, e_2, \ldots$ de idempotentes ortogonales dos a dos tales que $e_i \sim 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. En efecto, sean $e_1' \sim 1 \sim e_2'$ los idempotentes ortogonales que sabemos existen por hipótesis. Tenemos entonces elementos x_1, y_1, x_2, y_2 en $\mathcal{A}$ tales que

$$\begin{aligned} &x_1y_1 = 1 = x_2y_2 \\ &y_1x_1 = e_1'\ , y_2x_2 = e_2' \\ &x_2y_1 = 0 = x_1y_2. \end{aligned}$$

Definimos ahora $e_1 := e_1'$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $e_n := y_2^n e_1 x_2^n = (y_2^n y_1)(x_1 x_2^n)$. Es un cáculo sencillo verificar que esto define idempotentes ortogonales dos a dos. Para ver que $e_n \sim 1$, notamos que $(x_1x_2^n)(y_2^n y_1) = x_1y_1 = 1$.

Esta sucesión nos da un morfismo $L_\infty \to \mathcal{A}$, que resulta inyectivo pues L_∞ es simple. Como antes, la recíproca es evidente.

□

Veremos ahora que toda álgebra amenable tiene la propiedad IBN. Para ello, necesitamos primero los siguientes lemas.

Lema 4.1.4. *Sean $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ dos álgebras unitales y (propiamente) amenables. Entonces $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ es (propiamente) amenable.*

Demostración. Sean $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ finito y $\varepsilon > 0$. Como cada elemento de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ es una suma de tensores elementales, podemos tomar un subconjunto finito $\mathcal{F}'$ formado sólo por tensores elementales de manera que $\operatorname{span}(\mathcal{F}) \subseteq \operatorname{span}(\mathcal{F}')$. En particular, si exhibimos un subespacio $W \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ que sea $(\mathcal{F}', \varepsilon)$-Følner (en el sentido de la observación 3.1.3), éste también será $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-Følner y habremos probado que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ es amenable.

Supongamos entonces que $\mathcal{F}$ está formado sólo por tensores elementales y que contiene a la unidad, $\mathcal{F} = \{1_\mathcal{A} \otimes 1_\mathcal{B} = a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n\}$ y sean $\mathcal{F}_1 := \{1_\mathcal{A} = a_1, \ldots, a_n\}$ y $\mathcal{F}_2 := \{1_\mathcal{B} = b_1, \ldots, b_n\}$. Como $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son amenables, deben existir subespacios de dimensión finita $W_1 \subseteq \mathcal{A}$, $W_2 \subseteq \mathcal{B}$ tales que

$$\frac{\dim(\operatorname{span}(\mathcal{F}_i W_i))}{\dim(W_i)} = \frac{\dim(\mathcal{F}_i W_i + W_i)}{\dim(W_i)} \leq 1 + \varepsilon$$

para $i = 1, 2$. Ahora, como $\operatorname{span}[\mathcal{F}(W_1 \otimes W_2)] \subseteq \operatorname{span}(\mathcal{F}_1 W_1) \otimes \operatorname{span}(\mathcal{F}_2 W_2)$, tenemos

$$\begin{aligned} &\dim[\operatorname{span}(\mathcal{F}(W_1 \otimes W_2)) + W_1 \otimes W_2] \leq \dim[\operatorname{span}(\mathcal{F}_1 W_1) \otimes \operatorname{span}(\mathcal{F}_2 W_2) + W_1 \otimes W_2] \\ &= \dim[\operatorname{span}(\mathcal{F}_1 W_1) \otimes \operatorname{span}(\mathcal{F}_2 W_2)] = \dim(\operatorname{span}(\mathcal{F}_1 W_1)) \dim(\operatorname{span}(\mathcal{F}_2 W_2)) \\ &\leq (1+\varepsilon)^2 \dim(W_1) \dim(W_2) = (1+\varepsilon)^2 \dim(W_1 \otimes W_2) \end{aligned}$$

lo cual muestra que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ es amenable.

El caso de amenabilidad propia es análogo, simplemente tomando ahora a los subespacios W_i de manera que contengan a $\mathcal{F}_i$ (para $i = 1, 2$). □

Lema 4.1.5. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra unital tal que existen enteros $1 \leq m < n$ y un morfismo unital $L(m,n) \to \mathcal{A}$. Entonces $M_n(\mathcal{A})$ es propiamente infinita.*

Demostración. Como hay un morfismo $L(m,n) \to \mathcal{A}$, existen dos matrices $X \in M_{m\times n}(\mathcal{A})$, $Y \in M_{n\times m}(\mathcal{A})$ de modo que $XY = 1_m$ y $YX = 1_n$. Luego $1_n \sim 1_m$ y en particular $1_m \gtrsim 1_n$. Se tiene

$$1_n \gtrsim 1_{n-m} \oplus 1_m \gtrsim 1_{n-m} \oplus 1_n$$

con lo cual inductivamente se consigue

$$1_n \gtrsim 1_{n-m} \oplus 1_n \gtrsim 1_{n-m} \oplus 1_{n-m} \oplus 1_n \gtrsim \cdots \gtrsim 1_{k(n-m)} \oplus 1_n$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Si ahora tomamos k tal que $k(n-m) > n$, entonces $1_{k(n-m)} \geq 1_n$ y así

$$1_n \gtrsim 1_{k(n-m)} \oplus 1_n \gtrsim 1_n \oplus 1_n,$$

probándose que $M_n(\mathcal{A})$ es propiamente infinita. □

Proposición 4.1.6. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra unital y amenable entonces $\mathcal{A}$ tiene la propiedad IBN.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}$ no tiene la propiedad IBN. Entonces existen enteros $1 \leq m < n$ y un morfismo unital $L(m,n) \to \mathcal{A}$. Ahora el lema 4.1.5 nos dice que $M_n(\mathcal{A})$ es propiamente infinita y, en particular, no amenable. Si $\mathcal{A}$ fuera amenable, por el lema 4.1.4 $M_n(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{K})$ también lo sería, con lo cual $\mathcal{A}$ no puede ser amenable. □

Corolario 4.1.7. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra unital. Si existen enteros $1 \leq m < n$ y un morfismo unital $L(m,n) \to \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ no es amenable.*

Observación 4.1.8. La recíproca de la proposición 4.1.6 es falsa. El álgebra L_∞ es propiamente infinita (y en particular entonces no amenable) pero tiene la propiedad IBN. El hecho de que L_∞ tiene la propiedad IBN escapa a los contenidos de este trabajo, pero es consecuencia de que $K_0(L_\infty) \simeq \mathbb{Z}$ ([21], teorema 4.3).

Ejemplo 4.1.9. El álgebra libre (no conmutativa) en dos generadores es no amenable. En efecto, supongamos que sí lo fuera y llamemos $\mathcal{A}$ al álgebra y a, b a sus generadores. Existiría entonces, por 3.4.7, una medida dimensional $\mathcal{A}$-invariante μ (asociada a alguna base). Ahora, la multiplicación por a es inyectiva, al igual que la de b y entonces por invarianza se cumple $\mu(a\mathcal{A}) \geq \mu(\mathcal{A}) = 1$ y similarmente $\mu(b\mathcal{A}) \geq 1$. Como además $a\mathcal{A} \cap b\mathcal{A} = 0$, tenemos

$$\mu(a\mathcal{A} \oplus b\mathcal{A}) \geq 1 + 1 = 2,$$

un absurdo que nos dice que $\mathcal{A}$ no puede ser amenable. El mismo argumento muestra que el álgebra libre (no conmutativa) en n generadores es no amenable.

El ejemplo anterior muestra que, en general, un álgebra no amenable no tiene porqué ser propiamente infinita (el álgebra libre ni siquiera tiene idempotentes no triviales, por lo que no puede ser propiamente infinita). Sin embargo, veremos a continuación que para las álgebras de camino de Leavitt ambas propiedades son equivalentes. Para ello primero definimos éstas álgebras y mencionamos algunas de sus propiedades básicas.

Definición 4.1.10. Un *grafo dirigido* (o *quiver*) $E = (E^0, E^1, r, s)$ consiste de dos conjuntos E^0 (*vértices*) y E^1 (*aristas*) junto con dos funciones $s, r : E^1 \to E^0$, que indican el *origen* y el *destino* de las aristas.

Un vértice v se dice un *pozo* si no emite ninguna arista, i.e, $s^{-1}(v) = \emptyset$; v se dice *regular* si $s^{-1}(v)$ es finito y no vacío y se dice un *emisor infinito* si $s^{-1}(v)$ es infinito.

Definición 4.1.11. Sean E un grafo dirigido y $\mathbb{K}$ un cuerpo. El *álgebra de caminos de Leavitt* $L_{\mathbb{K}}(E)$ es la $\mathbb{K}$-álgebra (no necesariamente unital) generada por el conjunto $\{v : v \in E^0\} \cup \{e, e^* : e \in E^1\}$ sujeto a las siguientes relaciones:

(1) $v \cdot w = \delta_{v,w} v$ para todo $v, w \in E^0$.

(2) $s(e)e = e = er(e)$ para todo $e \in E^1$.

(3) $r(e)e^* = e^* = e^*s(e)$ para todo $e \in E^1$.

(4) $e^*f = \delta_{e,f} \cdot r(e)$ para todo $e, f \in E^1$.

(5) $v = \sum_{e \in E^1, s(e)=v} ee^*$ para todo vértice regular $v \in E^0$.

Las relaciones (4) y (5) suelen ser llamadas *condiciones de Cuntz-Krieger*. Cuando el cuerpo $\mathbb{K}$ se sobreentienda, escribiremos directamente $L(E)$.

Podemos pensar que los elementos e^* son las aristas $e \in E^1$ invertidas, es decir, $s(e^*) = r(e)$ y $r(e^*) = s(e)$.

Definición 4.1.12. Un *camino* μ de longitud $n > 0$ es una sucesión de aristas $\mu = e_1e_2 \cdots e_n$ tales que $r(e_i) = s(e_{i+1})$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. En este caso, $|\mu| = n$ denota la longitud del camino y $\mu^* = e_n^* \cdots e_2^*e_1^*$ es el correspondiente camino invertido. Decimos que μ *empieza* en el vértice $s(\mu) := s(e_1)$ y *termina* en $r(\mu) := r(e_n)$. Notamos μ^0 al conjunto de todos los vértices involucrados en el camino μ. Todo vértice se considera un camino de longitud 0, al cual llamamos *camino trivial*. Llamaremos $P_{<\infty}(E)$ al conjunto formado por todos los caminos finitos en E.

Un camino no trivial $\mu = e_1 \cdots e_n$ en E es *cerrado* si $r(e_n) = s(e_1)$, en cuyo caso decimos que μ está *basado* en el vértice $s(e_1)$, o que $s(e_1)$ es la *base* de μ. Permutando cíclicamente las aristas obtenemos un camino cerrado $e_k \cdots e_n e_1 \cdots e_{k-1}$ basado en el vértice $s(e_k)$ para todo $k = 1, \ldots, n$. Un camino cerrado μ como arriba se dice *simple* si no pasa más de una vez por su base, i.e, $s(e_1) \neq s(e_i)$ para todo $i = 2, \ldots, n$.

El camino cerrado μ se dice un *ciclo basado en v* si $s(e_1) = v$ y μ no pasa por ninguno de sus vértices más de una vez, es decir, $s(e_i) \neq s(e_j)$ para todo $i \neq j$. Una permutación cíclica no trivial de un ciclo basado en v resulta un ciclo basado en un vértice distinto, lo cual induce una relación de equivalencia en el conjunto de los ciclos basados en vértices. Una tal clase de equivalencia es un *ciclo*. Si c es un ciclo, notamos c^0 a su conjunto de vértices y decimos que c es *exclusivo* si no comparte vértices con ningún otro ciclo.

Usando las relaciones que definen al álgebra de caminos de Leavitt (4.1.11), se obtiene el siguiente resultado.

Lema 4.1.13. *Sea E un grafo dirigido y $L_{\mathbb{K}}(E)$ su álgebra de caminos de Leavitt asociada. Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in P_{<\infty}(E)$, entonces*

$$(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = \begin{cases} \alpha\gamma'\delta^* & \textit{si } \gamma = \beta\gamma' \\ \alpha\delta^* & \textit{si } \beta = \gamma \\ \alpha\beta'^*\delta^* & \textit{si } \beta = \gamma\beta' \\ 0 & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Este lema nos dice que toda palabra en $\{v : v \in E^0\} \cup \{e, e^* : e \in E^1\}$ puede escribirse como $\alpha\beta^*$, donde α y β son dos caminos (finitos) en E tales que $r(\alpha) = r(\beta)$.

Corolario 4.1.14. *Si E es un grafo dirigido, entonces $L_{\mathbb{K}}(E)$ está generada como $\mathbb{K}$-espacio vectorial por el conjunto*

$$\{\alpha\beta^* : \alpha, \beta \in P_{<\infty}(E) \textit{ tales que } r(\alpha) = r(\beta)\}$$

En otras palabras, todo elemento $x \in L_{\mathbb{K}}(E)$ se puede escribir como $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k \beta_k^*$, donde $\lambda_k \in \mathbb{K}$ y α_k, β_k son caminos finitos con $r(\alpha_k) = r(\beta_k)$ para todo $1 \leq k \leq n$.

Observación 4.1.15. Sea E un grafo dirigido.

(1) $L_{\mathbb{K}}(E)$ es unital si y sólo si $|E^0| < \infty$, en cuyo caso la unidad es $\sum_{v \in E^0} v$.

(2) E se dice *acíclico* si no contiene ciclos, y *finito* si tanto E^0 como E^1 son conjuntos finitos. Un grafo finito acíclico contiene finitos caminos y por lo tanto, por 4.1.14, su álgebra de caminos de Leavitt asociada es de dimensión finita.

(3) $L_{\mathbb{K}}(E)$ admite una estructura de anillo $\mathbb{Z}$-graduado. Concretamente, para todo $v \in E^0$ y $e \in E^1$ ponemos

$$\deg(v) = 0 \, , \deg(e) = 1 \text{ y } \deg(e^*) = -1$$

En principio esto puede hacerse en la $\mathbb{K}$-álgebra libre generada por el conjunto $\{v : v \in E^0\} \cup \{e, e^* : e \in E^1\}$, pero como las relaciones que definen a $L_{\mathbb{K}}(E)$ (4.1.11) son todas homogéneas, éstas pasan al cociente y dan la estructura graduada. Observar que, gracias al corolario 4.1.14, la parte homogénea de grado n resulta ser

$$L_{\mathbb{K}}(E)_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k \beta_k^* : \alpha_k, \beta_k \in P_{<\infty}(E) \text{ con } |\alpha_k| - |\beta_k| = n \text{ y } \lambda_k \in \mathbb{K} \text{ para todo } k \right\}$$

(4) $L_{\mathbb{K}}(E)$ admite una involución $x \to \bar{x}$ de la siguiente manera: si $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k \beta_k^*$ entonces $\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \beta_k \alpha_k^*$. Puede verificarse que esto es efectivamente una involución, que además resulta lineal y anti-multiplicativa (i.e $\overline{xy} = \bar{y} \cdot \bar{x}$)

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, podemos definir una involución lineal a menos de conjugación $x \to x^*$ de manera que (con la notación de antes) $x^* = \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k} \beta_k \alpha_k^*$, lo cual convierte a $L_{\mathbb{C}}(E)$ en una $*$-álgebra.

Los siguientes lemas nos serán de utilidad más adelante.

Lema 4.1.16. *Sean E un grafo, $\mathbb{K}$ un cuerpo y $v, w \in E^0$. Si existe un camino de v en w, entonces $v \gtrsim w$ en $L_{\mathbb{K}}(E)$.*

Demostración. Sea $\mu = e_1 \cdots e_n$ un camino de v en w, esto es, tal que $s(e_1) = v$ y $r(e_n) = w$. Usando la propiedad (3) de la definición 4.1.11, se tiene $r(e_1)e_1^* = e_1^* s(e_1)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} & r(e_1) = r(e_1)^2 = r(e_1)e_1^* e_1 = e_1^* s(e_1) e_1 = e_1^* \left[s(e_1) e_1 \right] \\ & \left[s(e_1) e_1 \right] e_1^* = s(e_1) e_1 e_1^* s(e_1) = s(e_1) \left[e_1 e_1^* \right] s(e_1) \in s(e_1) L(E) s(e_1) \end{aligned}$$

lo cual muestra que $s(e_1) \gtrsim r(e_1)$. Repitiendo este argumento, se ve que $s(e_i) \gtrsim r(e_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y luego

$$v = s(e_1) \gtrsim r(e_1) = s(e_2) \gtrsim r(e_2) = s(e_3) \gtrsim \cdots \gtrsim r(e_n) = w$$

como queríamos ver. □

Lema 4.1.17. *Sean E un grafo y $\mathbb{K}$ un cuerpo. Si $v \in E^0$ pertenece a un ciclo no exclusivo entonces v es un idempotente propiamente infinito en $L_{\mathbb{K}}(E)$.*

Demostración. Por la propiedad (1) de la definición 4.1.11, es claro que v es un idempotente. Veamos que $v \gtrsim v \oplus v$. Para ello, sean $e_1 \ldots e_m$ y $f_1 \ldots f_n$ dos caminos cerrados simples basados en v (estos caminos existen pues v pertenece a un ciclo no exclusivo). Llamemos t al número natural tal que $e_i = f_i$ para todo $1 \leq i \leq t-1$ y $e_t \neq f_t$ y notemos que $s(e_t) = s(f_t)$. Ahora, por el lema 4.1.16 sabemos que $v \gtrsim s(e_t)$, $r(e_t) \gtrsim r(e_m) = v$ y $r(f_t) \gtrsim r(f_n) = v$. Además, $e_t e_t^*$ y $f_t f_t^*$ son dos idempotentes ortogonales tales que $e_t e_t^* \leq s(e_t)$ y $f_t f_t^* \leq s(e_t)$ (recordando que $s(e_t) = s(f_t)$). Todo esto nos dice que

$$v \gtrsim s(e_t) \gtrsim e_t e_t^* \oplus f_t f_t^* \sim e_t^* e_t \oplus f_t^* f_t = r(e_t) \oplus r(f_t) \gtrsim v \oplus v$$

como queríamos ver. □

Observación 4.1.18. Sea E un grafo dirigido.

(1) Si hay un camino de un vértice u a un vértice v, escribiremos $u \geq_p v$ (ponemos el subíndice p, por *path*, para diferenciarlo del orden definido sobre idempotentes en un álgebra). Esto define un pre-orden en E^0. En el lema 4.1.16, vimos que $u \geq_p v$ implica $u \gtrsim v$ en $L_{\mathbb{K}}(E)$. Como todos los vértices de un ciclo son equivalentes con respecto al pre-orden $\geq_p$, obtenemos un pre-orden en el conjunto de ciclos, de manera que dos ciclos c_1, c_2 cumplen $c_1 \geq_p c_2$ si y sólo si hay un camino de un vértice de c_1 en un vértice de c_2.

(2) Sea C el conjunto de todos los ciclos en E y llamemos $C/_{\sim_p}$ al poset obtenido por antisimetrización del pre-orden $\geq_p$ en C, esto es, $c \sim_p c'$ si y sólo si $c \leq_p c'$ y $c' \leq_p c$. Nótese que si dos ciclos c y c' comparten un vértice entonces $c \sim_p c'$. Observar también que un ciclo exclusivo c es aquel que cumple $[c] = \{c\}$ y que $C/_{\sim_p}$ es un conjunto finito si E tiene un número finito de vértices (pues si E tiene n vértices entonces en un conjunto de $n+1$ ciclos hay necesariamente dos que comparten un vértice).

Damos ahora una serie de definiciones y resultados que serán de suma importancia a la hora de caracterizar la amenabilidad de álgebras de caminos de Leavitt. El lector interesado en los detalles puede consultar [13].

Definición 4.1.19. Sea E un grafo dirigido.

(1) Un subconjunto $H \subseteq E^0$ se dice *hereditario* si siempre que $v \in H$ y $w \in E^0$ cumplen $v \geq_p w$, entonces $w \in H$. Un conjunto hereditario se dice además *saturado* si para todo vértice regular v la condición $r(s^{-1}(v)) \subseteq H$ implica $v \in H$. Dado $X \subseteq E^0$, notamos $\overline{X}$ a la clausura hereditaria saturada de X (i.e, el mínimo subconjunto hereditario saturado de E^0 que contiene a X).

Para caracterizar $\overline{X}$ calculamos primero el *árbol* de X, $T(X) := \{w \in E^0 : w \leq_p v$ para algún $v \in X\}$, que es el subconjunto hereditario más chico que contiene a X, y luego, si $\Lambda_0(T(X)) := T(X)$, ponemos inductivamente

$$\Lambda_n(T(X)) := \{y \in E^0_{reg} : r(s^{-1}(y)) \subseteq \Lambda_{n-1}(T(X))\} \cup \Lambda_{n-1}(T(X))$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, donde E^0_{reg} es el conjunto de vértices regulares de E. Se puede verificar que $\overline{X} = \cup_{n=0}^{\infty} \Lambda_n(T(X))$.

(2) Si H es un subconjunto hereditario saturado de E^0, un *breaking vertex* de H es un emisor infinito $w \in E^0 \setminus H$ tal que $1 \leq |s^{-1}(w) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H)| < \infty$. En otras palabras, w es un emisor infinito pero sólo emite finitas aristas fuera de H. Notamos B_H al conjunto de todos los breaking vertices de H. Para cada $v \in B_H$, definimos un idempotente $v^H \in L_{\mathbb{K}}(E)$ como

$$v^H := v - \sum_{s(e)=v, r(e) \notin H} ee^*.$$

Si $H \subseteq E^0$ es un subconjunto hereditario saturado y $S \subseteq B_H$ es un subconjunto, (H, S) se dice un *par admisible*.

Dado un par admisible (H, S), notamos $I(H, S)$ al ideal generado por $H \cup \{v^H : v \in S\}$. Llamamos grafo cociente de E por (H, S), notado $E/(H, S)$, al grafo que tiene por vértices a

$$(E/(H,S))^0 = (E^0 \setminus H) \cup \{v' : v \in B_H \setminus S\}$$

y como aristas a

$$(E/(H,S))^1 = \{e \in E^1 : r(e) \notin H\} \cup \{e' : e \in E^1 \text{ , } r(e) \in B_H \setminus S\}$$

donde entendemos que estamos poniendo un vértice v' por cada $v \in B_H \setminus S$ y una arista e' por cada $e \in E^1$ tal que $r(e) \in B_H \setminus S$, y r, s se extienden a $(E/(H,S))^1$ poniendo $s(e') = s(e)$ y $r(e') = r(e)'$. En particular, cuando $S = B_H$, el grafo cociente $E/(H, B_H)$ es el subgrafo E/H, donde $(E/H)^0 = E^0 \setminus H$ y $(E/H)^1 = \{e \in E^1 : r(e) \notin H\}$.

Con toda esta terminología, se tiene un isomorfismo $L_{\mathbb{K}}(E)/I(H,S) \simeq L_{\mathbb{K}}(E/(H,S))$.

(3) Un subgrafo E' de E se dice *pleno* si $(E')^1 = \{e \in E^1 : s(e), r(e) \in (E')^0\}$. Para un subconjunto $X \subseteq E^0$, definimos el subgrafo pleno $M(X)$ de manera que

$$M(X)^0 = \{w \in E^0 : w \geq_p v \text{ para algún } v \in X\}$$

En el caso en que $X = \{v\}$ para algún $v \in E^0$, también escribimos $M(v) = M(\{v\})$. Definimos además el subconjunto

$$H(v) = E^0 \setminus M(v)^0$$

que resulta hereditario. Notar que una arista e está en un ciclo si y sólo si $r(e) \notin H(s(e))$ si y sólo si $r(e) \in M(s(e))^0$. Esto nos dice que si v pertenece a un ciclo entonces $H(v)$ es un subconjunto hereditario saturado de E.

4.2. Caracterización

Antes de enunciar y demostrar el teorema central de este capítulo, necesitamos dos resultados que enunciamos sin demostración (ver [6], teorema 4.8 y lema 5.6).

Teorema 4.2.1. *Sean E un grafo dirigido y $L_{\mathbb{K}}(E)$ su álgebra de camino de Leavitt asociada con su $\mathbb{Z}$-graduación usual. Si A es un anillo $\mathbb{Z}$-graduado y $\pi : L_{\mathbb{K}}(E) \to A$ es un morfismo graduado tal que $\pi(v) \neq 0$ para todo $v \in E^0$, entonces π es inyectivo.*

Lema 4.2.2. *Si $H \subseteq E^0$ es hereditario saturado y $S \subseteq B_H$ entonces*

$$I(H,S) = \operatorname{span}\left(\{\mu\nu^* : r(\mu) = r(\nu) \in H\} \cup \{\mu v^H \nu^* : r(\mu) = r(\nu) = v \in S\}\right)$$

e $I(H,S)$ es un ideal graduado autoadjunto (i.e $\overline{I(H,S)} = I(H,S)$) de $L_{\mathbb{K}}(E)$. Más aún, $I(H,S)$ es un anillo idempotente.

Teorema 4.2.3. *Sean E un grafo dirigido y $\mathbb{K}$ un cuerpo. Sea H el subconjunto hereditario saturado más chico de E^0 que contiene a todos los ciclos de E. Ordenando a los vértices y ciclos por el pre-orden $\leq_p$, tenemos lo siguiente:*

- *Son equivalentes*

  (A1) $L_{\mathbb{K}}(E)$ no es amenable.

  (B1) E^0 es finito, $E^0 = H$ y todo ciclo maximal es no exclusivo.

  (C1) $L_{\mathbb{K}}(E)$ es unital y propiamente infinita.

- *Son equivalentes*

  (A2) $L_{\mathbb{K}}(E)$ es amenable pero no propiamente amenable.

  (B2) E^0 es finito, E no es acíclico, $E^0 \setminus H$ consiste de un número no nulo de emisores finitos y todo ciclo maximal es no exclusivo.

  (C2) $L_{\mathbb{K}}(E) = L_{\mathbb{K}}(E') \oplus L_{\mathbb{K}}(E'')$ con E', E'' grafos dirigidos tales que $L_{\mathbb{K}}(E')$ es de dimensión finita (no nula) y $L_{\mathbb{K}}(E'')$ no es amenable.

- *La condición*

  (A3) $L_{\mathbb{K}}(E)$ es propiamente amenable

  se cumple si y sólo si valen una o más de las siguientes condiciones:

  (B3a) E es acíclico.

  (B3b) E^0 es infinito.

  (B3c) $E^0 \setminus H$ contiene al menos un emisor infinito.

  (B3d) E tiene un ciclo maximal exclusivo.

Demostración. Notemos (B3) a la condición (B3a)∨(B3b)∨(B3c)∨(B3d). Empezamos observando que alcanza con probar (B1)⇒(C1), (B2)⇒ (C2) y (B3) ⇒ (A3). En efecto, ya tenemos probado (C1)⇒(A1) y (C2)⇒(A2) , las condiciones (A1), (A2) y (A3) son mutuamente exclusivas, y las condiciones (B1), (B2) y (B3) cubren todas las posibilidades. Luego se sigue que, probadas las implicaciones del principio, obtenemos (A1)⇒(B1), (A2)⇒(B2) y (A3)⇒(B3). Veamos entonces estas tres implicaciones esenciales.

(B1)⇒(C1) La unitalidad de $L_{\mathbb{K}}(E)$ es inmediata de la finitud de E^0. Sean ahora $[c_1], \ldots, [c_n]$ los elementos maximales de $C/_{\sim_p}$, finitos pues E^0 es finito (observación 4.1.18), y tomemos un vértice v_i en cada ciclo c_i. Como cada c_i es no exclusivo, el lema 4.1.17 nos dice que cada v_i es propiamente infinito, i.e, $v_i \oplus v_i \lesssim v_i$. Como $1 = \sum_{v \in E^0} v$, para ver que 1 es propiamente infinito basta ver que $v \lesssim p := \sum_{i=1}^{n} v_i$ para todo $v \in E^0$. En efecto, como la suma de elementos propiamente infinitos ortogonales dos a dos es propiamente infinita (proposición 3.5.5), p resulta propiamente infinito. Además, dado que $p \leq 1$, resulta $p \lesssim 1$ y por otro lado $v \lesssim p$ para todo $v \in E^0$ implica $1 = \sum_{v \in E^0} v \lesssim p$ pues

$$\sum_{v \in E^0} v \sim \bigoplus_{v \in E^0} v \lesssim \bigoplus_{v \in E^0} p \lesssim p.$$

Todo esto nos dice que $1 \lesssim p \lesssim 1$, con lo cual 1 es propiamente infinito ya que p lo es ($1 \gtrsim p \gtrsim p \oplus p \gtrsim 1 \oplus 1$). Veamos entonces que $v \lesssim p$ para cada $v \in E^0$. Escribamos $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Por hipótesis, sabemos que $E^0 = H = \overline{X}$ y E^0 es finito; luego existe un k tal que $E^0 = \Lambda_k(T(X))$. Mostramos por inducción en $r \in \mathbb{N}_0$ que $v \lesssim p$ para todo $v \in \Lambda_r(T(X))$. Si $r = 0$ entonces $v \in T(X)$ y luego $v \leq_p v_i$ para algún i, lo cual implica que $v \lesssim v_i \leq p$ (y $v_i \leq p$ implica $v_i \lesssim p$). Si ahora $v \in \Lambda_r(T(X)) \setminus \Lambda_{r-1}(T(X))$, entonces v es un vértice regular y para cada $e \in s^{-1}(v)$ es $r(e) \in \Lambda_{r-1}(T(X))$. Por hipótesis inductiva, tenemos $r(e) \lesssim p$ y así

$$v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \sim \bigoplus_{e \in s^{-1}(v)} r(e) \lesssim p^{\oplus |s^{-1}(v)|} \lesssim p.$$

Esto muestra que $v \lesssim p$ para todo $v \in \Lambda_r(T(X))$ como queríamos. Luego $L_{\mathbb{K}}(E)$ es propiamente infinito.

(B2)⇒(C2) Sean $E' = E/H$ y $E'' = M(H)$. Por las hipótesis sabemos que E' tiene finitos vértices y aristas, mientras que $B_H = \emptyset$. Afirmamos ahora que hay un isomorfismo $L_{\mathbb{K}}(E'') \simeq I(H, \emptyset)$. Para verlo, notemos primero que $I(H, \emptyset)$ es el ideal generado por $\{v : v \in H\}$, y para cada $v \in E^0$ sea $\mathcal{P}_{min}(v, H)$ el conjunto de caminos finitos minimales de v en H, esto es,

$$\mathcal{P}_{\text{mín}}(v, H) = \{\mu = e_1 \cdots e_n : s(e_1) = v, r(e_n) \in H, s(e_k) \notin H \text{ para todo } k = 1, \ldots, n\}$$

donde si $v \in H$ ponemos $\mathcal{P}_{\text{mín}}(v, H) = \{v\}$ por convención. Notar que $\mathcal{P}_{min}(v, H)$ es no vacío si y sólo si $v \in M(H)^0$ y como todo vértice en $E^0 \setminus H$ es un emisor finito, hay sólo finitas aristas que pueden aparecer en los caminos de $\mathcal{P}_{min}(v, H)$, cualquiera sea $v \in E^0$. Por minimalidad, estos caminos no pueden contener ciclos, por lo que $\mathcal{P}_{min}(v, H)$ es un conjunto finito para todo $v \in E^0$. Además, notemos que si $\mu, \nu \in \mathcal{P}_{min}(v, H)$ son dos caminos distintos entonces $\mu^* \nu = 0$ en $L_{\mathbb{K}}(E)$ (lema 4.1.13). Todo esto nos permite definir, para cada $v \in E^0$, un idempotente

$$\widehat{v} = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_{min}(v, H)} \mu \mu^* \in I(H, \emptyset).$$

Tenemos un $*$-morfismo (no unital) graduado $L_{\mathbb{K}}(E'') \to L_{\mathbb{K}}(E)$ de manera que

$$v \mapsto \widehat{v} \text{ para } v \in (E'')^0 \text{ y } e \mapsto \widehat{s(e)} e \widehat{r(e)} \text{ para } e \in (E'')^1$$

Es claro que la imagen de este morfismo está contenida en $I(H, \emptyset)$. Por otro lado, el teorema 4.2.1 garantiza que es inyectivo (pues, como $E'' = M(H)$, la suma que define a $\widehat{v}$ sobre cualquier vértice $v \in (E'')^0$ es no vacía y así ningún vértice va a parar a cero) y el lema 4.2.2 nos dice que

$$\begin{aligned} I(H,\emptyset) &= \operatorname{span}\left(\{\mu\nu^* : r(\mu) = r(\nu) \in H\}\right) \\ &= \operatorname{span}\left(\left\{(\widehat{s(\mu)} \cdot \mu \cdot \widehat{r(\mu)})(\widehat{r(\nu)} \cdot \nu^* \cdot \widehat{s(\nu)}) : r(\mu) = r(\nu) \in H\right\}\right) \end{aligned}$$

Esto da un isomorfismo $L_{\mathbb{K}}(E'') \simeq I(H,\emptyset)$. Como además $(E'')^0$ es finito, $I(H,\emptyset)$ es un álgebra unital, con unidad $p = \sum_{v \in M(H)^0} \widehat{v}$. Debido a que $I(H,\emptyset)$ es también un ideal (bilátero), es una cuenta sencilla que p es un idempotente central en $L_{\mathbb{K}}(E)$ y así

$$L_{\mathbb{K}}(E') = L_{\mathbb{K}}(E/H) \simeq L_{\mathbb{K}}(E)/I(H,\emptyset) = (1-p)L_{\mathbb{K}}(E)$$

por lo que

$$L_{\mathbb{K}}(E) \simeq L_{\mathbb{K}}(E/H) \oplus I(H,\emptyset) \simeq L_{\mathbb{K}}(E') \oplus L_{\mathbb{K}}(E'').$$

Como E/H es un grafo finito acíclico, $L_{\mathbb{K}}(E')$ tiene dimensión finita. Por otro lado, por cómo construimos E'', éste hereda todos los ciclos maximales de E (que son no exclusivos) y $(E'')^0$ es el subconjunto hereditario saturado más chico (en E'') que contiene a todos los ciclos. Esto último se puede ver usando que $M(H)^0 \setminus H$ no tiene ciclos y por lo tanto tiene un elemento minimal, que debe estar entonces en $\Lambda_1(H)$. Repitiendo este proceso se ve que la clausura saturada de H en $(E'')^0$ es todo $(E'')^0$. Luego E'' satisface (B1) y por lo que ya probamos, $L_{\mathbb{K}}(E'')$ no es amenable.

(B3)$\Rightarrow$ (A3) En primer lugar, si (B3a) vale pero (B3b) no, entonces $L_{\mathbb{K}}(E)$ es de dimensión finita, por lo que resulta propiamente amenable.

En todos los otros casos, $L_{\mathbb{K}}(E)$ es de dimensión infinita y luego basta ver que para todo $\mathcal{F} \subseteq L_{\mathbb{K}}(E)$ finito, $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ existe un subespacio $W \in \text{Føl}(\mathcal{F},\varepsilon)$ con $\dim(W) > N$. Como además todo elemento de $L_{\mathbb{K}}(E)$ es una combinación lineal de elementos de la forma $\lambda\rho^*$, con λ y ρ caminos tales que $r(\lambda) = r(\rho)$, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\mathcal{F} = \{\lambda_1\rho_1^*, \ldots, \lambda_r\rho_r^*\}$.

Asumamos ahora que vale (B3b), i.e, E^0 es infinito. Entonces podemos tomar un subconjunto $X \subseteq E^0$ tal que $|X| = N$ y $X \cap \{s(\rho_1), \ldots, s(\rho_r)\} = \emptyset$. Poniendo $W = \operatorname{span}(X)$ se ve que $W \in \text{Føl}(\mathcal{F},0)$, pues $\lambda_j\rho_j^* W = 0$ para todo $j = 1, \ldots, r$. Como además $\dim(W) = N$, $L_{\mathbb{K}}(E)$ es propiamente amenable.

Consideremos ahora el caso en que (B3c) vale pero (B3b) no, es decir, E^0 es finito y $E^0 \setminus H$ contiene al menos un emisor infinito. Sea v un elemento maximal entre todos los emisores infinitos de $E^0 \setminus H$. Entonces $M(v)$ no contiene ciclos (pues $M(v)^0 \subseteq E^0 \setminus H$), tiene finitos vértices y no contiene emisores infinitos, por lo que además tiene finitas aristas. Esto nos dice que existen sólo finitos caminos en E que terminan en v (porque un camino que termina en v está necesariamente contenido en $M(v)$). Ahora, como $s_E^{-1}(v)$ es infinito, existe un subconjunto $Y \subseteq s_E^{-1}(v)$ tal que $|Y| = N$ y para todo $i = 1, \ldots, r$ y $e \in Y$, e no está contenido en ρ_i. Definimos ahora W como el subespacio generado por el siguiente conjunto finito:

$$\{\tau e \in L_{\mathbb{K}}(E) : \tau \text{ camino tal que } r(\tau) = v\ ,\, e \in Y\}.$$

Notar que como $Y \subseteq W$, se cumple $\dim(W) \geq N$. Afirmamos ahora que $\lambda_i\rho_i^* W \subseteq W$ para todo $i = 1, \ldots, r$. En efecto, como e no es arista de ningún ρ_i, la única forma en que el producto $(\lambda_i\rho_i^*)(\tau e)$ puede ser no nulo es que $\tau = \rho_i\tau'$, con τ' un camino que termine en v. Pero en este caso se tiene

$$(\lambda_i\rho_i^*)(\tau e) = \lambda_i\tau' e \in W.$$

Esto muestra entonces que W es un subespacio $(\mathcal{F},0)$-Følner con $\dim(W) \geq N$.

Por último, supongamos que (B3d) vale pero (B3b) y (B3c) no, es decir, E^0 es finito, $E^0 \setminus H$ consiste de vértices regulares y hay un ciclo maximal exclusivo, al que llamamos c. Sea v_0 un vértice en c y sea μ_0 un representante de c basado en v_0. El subgrafo $M(v_0)$ tiene un único ciclo c (pues c es maximal) y todo vértice de $M(v_0)$ se conecta con él. Afirmamos ahora que todo vértice

$v \in M(v_0)^0$ es regular en $M(v_0)$. En efecto, todo vértice de c emite una única arista en $M(v_0)$ pues c es exclusivo. Por otro lado, todo vértice $v \in M(v_0)^0 \setminus H$ es regular en E por hipótesis, y en particular entonces lo es en $M(v_0)$. Resta ver que cualquier $v \in M(v_0)^0 \cap H \setminus c^0$ es regular. Para esto sea $X \subseteq H$ el subconjunto de todos los vértices pertenecientes a ciclos maximales de E. Luego $H = \cup_{k=0}^{\infty} \Lambda_k(T(X))$. Por maximalidad de los ciclos es $M(v_0)^0 \cap T(X) = c^0$, y luego para cualquier $v \in M(v_0)^0 \cap H \setminus c^0$ existe un $k \geq 0$ tal que $v \in \Lambda_{k+1}(T(X)) \setminus \Lambda_k(T(X))$. Por lo tanto v es un vértice regular (de E) por definición de $\Lambda_{k+1}(T(X))$.

De manera similar a una de las demostraciones anteriores, para cada $v \in E^0$ llamamos ahora $\mathcal{P}_{min}(v, v_0)$ al conjunto de caminos finitos minimales de v en v_0, esto es,

$$\mathcal{P}_{min}(v, v_0) = \{\mu = e_1 \cdots e_n : s(e_1) = v,\, r(e_n) = v_0,\, s(e_k) \neq v_0 \text{ para } k = 1, \ldots, n\}$$

donde ponemos, por convención, $\mathcal{P}_{min}(v_0, v_0) = \{v_0\}$. Notar que $\mathcal{P}_{min}(v, v_0)$ es un subconjunto de todos los caminos en $M(v_0)$ para cada $v \in E^0$ y es no vacío si y sólo si $v \in M(v_0)^0$. Como todo vértice $v \in M(v_0)^0$ es regular en $M(v_0)^0$, hay sólo finitas aristas que pueden aparecer en los caminos de $\mathcal{P}_{min}(v, v_0)$ para cualquier $v \in E^0$. Por maximalidad de c y minimalidad de los caminos, éstos no pueden contener ciclos, por lo que $\mathcal{P}_{min}(v, v_0)$ es finito para cada $v \in E^0$. Luego la unión $\mathcal{P} = \cup_{v \in E^0} \mathcal{P}_{min}(v, v_0)$ de todos los caminos minimales que terminan en v_0 es también finita. Notar que cualquier camino que termine en v_0 puede ser escrito de manera única como $\gamma \mu_0^k$ para algún $\gamma \in \mathcal{P}$ y $k \in \mathbb{N}_0$. Definimos entonces, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, el subespacio W_k como

$$W_k = \text{span}\left(\{\gamma \mu_0^k : \gamma \in \mathcal{P}\}\right)$$

Es fácil ver que para cada $k \in \mathbb{N}_0$ es $\dim(W_k) = |\mathcal{P}|$ y que la colección de subespacios $\{W_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ está en suma directa. Sea $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $N_1 |\mu_0|$ sea mayor que la longitud de todos los caminos $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \rho_1, \ldots, \rho_r$, donde $|\mu_0|$ es la longitud de μ_0.

Para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, $\gamma \in \mathcal{P}$ y $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq N_1$ afirmamos que

$$\lambda_j \rho_j^* \gamma \mu_0^k \in \sum_{l=k-N_1}^{k+N_1} W_l$$

En efecto, esto es trivial si $\rho_j^* \gamma \mu_0^k = 0$. Si no, como $|\gamma \mu_0^k| > |\rho_j|$, tenemos $\gamma \mu_0^k = \rho_j \tau$ con algún camino τ que termina en v_0. Luego $\lambda_j \rho_j^* \gamma \mu_0^k = \lambda \tau = \theta \mu_0^l$ para algunos $\theta \in \mathcal{P}$ y $l \in \mathbb{N}$. Notemos que l es la cantidad de veces que $\lambda_j \tau$ recorre μ_0. Ahora, esta cantidad es como mucho la cantidad de veces que λ_j recorre μ_0 más la cantidad que τ lo recorre más uno (pues podría ser que en el producto $\lambda_j \tau$ apareciera un μ_0 más). Como $N_1 |\mu_0| > |\lambda_j|$, el primer número es a lo sumo $N_1 - 1$ y como $\gamma \mu_0^k = \rho_j \tau$, el segundo es a lo sumo k. Luego

$$l \leq k + N_1 - 1 + 1 = k + N_1.$$

Por otro lado, l es mayor o igual que la cantidad de veces que τ recorre μ_0. Como $\gamma \mu_0^k = \rho_j \tau$, esta cantidad es como mínimo k menos el número de veces que ρ_j recorre τ (que es menor o igual que $N_1 - 1$ ya que $N_1 |\mu_0| > |\rho_j|$) menos 1 (pues en el producto $\rho_j \tau$ podría aparecer un μ_0). Por lo tanto

$$l \geq k - (N_1 - 1) - 1 = k - N_1.$$

Estas dos desigualdades nos dan $k - N_1 \leq l \leq k + N_1$, probando nuestra afirmación.

Por último, tomemos $N_2 \in \mathbb{N}_0$ tal que $N_2 > N + N_1$ y $\frac{2N_1}{N_2 - N_1} < \varepsilon$ y definamos

$$W = \sum_{k=N_1+1}^{N_2} W_k$$

Es claro que $\dim(W) = |\mathcal{P}|(N_2 - N_1) \geq N$ y además para cualquier $j \in \{1, \ldots, r\}$ tenemos

$$\frac{\dim(\lambda_j \rho_j^* W + W)}{\dim(W)} \leq \frac{\dim(\sum_{k=1}^{N_2+N_1} W_k)}{\dim(\sum_{k=N_1+1}^{N_2} W_k)} = \frac{|\mathcal{P}|(N_2 + N_1)}{|\mathcal{P}|(N_2 - N_1)} \leq 1 + \varepsilon.$$

Esto muestra que W es un subespacio $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-Følner con $\dim(W) \geq N$. □

4.3. Amenabilidad a izquierda y a derecha

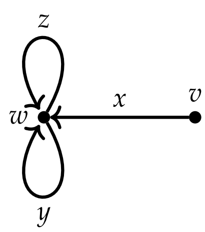
En la observación 4.1.15 notamos que toda álgebra de caminos de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(E)$ admite una involución $x \mapsto \bar{x}$ lineal y anti-multiplicativa. Esta involución nos da un isomorfismo $L_{\mathbb{K}}(E) \simeq L_{\mathbb{K}}(E)^{op}$, que nos dice que un álgebra de caminos de Leavitt es amenable a izquierda si y sólo si es amenable a derecha. A continuación veremos un ejemplo donde esto no sucede, mediante las álgebras de caminos.

Definición 4.3.1. Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y E un grafo dirigido. El álgebra de caminos $\mathbb{K}E$ es la $\mathbb{K}$-álgebra (no necesariamente unital) generada por el conjunto $\{v : v \in E^0\} \cup \{e : e \in E^1\}$ sujeto a las relaciones

(1) $v \cdot w = \delta_{v,w} v$ para todo $v, w \in E^0$.

(2) $s(e)e = e = er(e)$ para todo $e \in E^1$.

Ejemplo 4.3.2. Sea E el siguiente grafo dirigido:



Si llamamos $\mathcal{A} = \mathbb{K}E$, entonces $\mathcal{A}$ es propiamente amenable a izquierda pero no amenable a derecha.

Para verlo, notemos primero que para cualquier $a \in \mathcal{A}$ se tiene $av = vav = \mu v$ para algún $\mu \in \mathbb{K}$, $wa = waw$ y también $vaw = xbw$ para algún $b \in w\mathcal{A}w$. Todo esto puede verificarse de manera sencilla para cada generador de $\mathcal{A}$. Observemos también que para todo $a \in \mathcal{A}$ es $wav = 0$ y que $v + w = 1_{\mathcal{A}}$, por lo que para todo $a \in \mathcal{A}$ se cumple

$$a = vav + vaw + wav + waw = av + vaw + waw$$

y esto induce una descomposición como $\mathbb{K}$-espacio vectorial

$$\mathcal{A} \simeq w\mathcal{A}w \oplus v\mathcal{A}w \oplus v\mathcal{A}v \simeq w\mathcal{A}w \oplus x\mathcal{A}w \oplus \mathbb{K}v.$$

Definimos ahora los siguientes morfismos $\mathbb{K}$-lineales:

$$\lambda : \mathcal{A} \to w\mathcal{A} = w\mathcal{A}w, \quad a \mapsto wa$$
$$\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}w, \quad a \mapsto aw$$
$$\phi : w\mathcal{A} \to x\mathcal{A}w, \quad a \mapsto xa.$$

Por la descomposición de $\mathcal{A}$ mencionada más arriba, λ y ρ son suryecciones con $\ker(\lambda) = v\mathcal{A} = x\mathcal{A}w \oplus \mathbb{K}v$ y $\ker(\rho) = \mathcal{A}v = \mathbb{K}v$, mientras que ϕ es una biyección. Ahora, como la subálgebra $w\mathcal{A}w$ es isomorfa al álgebra libre en dos generadores (pues corresponde al álgebra de caminos del grafo compuesto del vértice w y aristas z e y), $w\mathcal{A}w$ es no amenable (4.1.9) tanto a derecha como a izquierda, pues es isomorfa a su álgebra opuesta. En particular, tiene dimensión infinita. Además, $x\mathcal{A}w$ tiene también dimensión infinita, pues contiene al conjunto $\{xz^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que es linealmente independiente (esto puede verse notando que $\mathcal{A}$ admite una $\mathbb{N}_0$-graduación).

Con esto, es fácil ver que $\mathcal{A}$ es propiamente amenable a izquierda, pues si tomamos un subespacio $W \subseteq x\mathcal{A}w$, se tiene $\mathcal{A}W = \mathcal{A}(vW) = (\mathcal{A}v)W = (\mathbb{K}v)W = W$ y por lo tanto W es $(\mathcal{F}, 0)$-Følner para todo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$. Como $x\mathcal{A}w$ tiene dimensión infinita, estos subespacios pueden tomarse de dimensión arbitrariamente grande y luego $\mathcal{A}$ es propiamente amenable a izquierda.

Veamos que $\mathcal{A}$ no es amenable a derecha. Como $w\mathcal{A}w$ es no amenable, el lema 3.4.3 nos dice que existe un subconjunto finito $\mathcal{F}_0 \subseteq w\mathcal{A}w$ tal que

$$\frac{\dim(W\mathcal{F}_0 + W)}{\dim(W)} \geq 3\dim(W)$$

para todo subespacio $W \subseteq w\mathcal{A}w$ de dimensión finita. Podemos suponer además, sin pérdida de generalidad, que $w \in \mathcal{F}_0$. Definimos ahora

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \{x, v\}.$$

Afirmamos que, dado cualquier subespacio de dimensión finita $W \subseteq \mathcal{A}$, se tiene $\dim(W\mathcal{F} + W) \geq 2\dim(W)$, lo que muestra que $\mathcal{A}$ es no amenable.

En primer lugar, si $W = \mathbb{K}v$, entonces $W\mathcal{F} + W = \mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}v$ y así $\dim(W\mathcal{F} + W) = 2 = 2\dim(W)$. Supongamos ahora que $W \neq \mathbb{K}v$, o equivalentemente, que $Ww \neq 0$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\dim(W) &= \dim(\rho(W)) + \dim(\ker(\rho) \cap W) \\
&= \dim(Ww) + \dim(\mathbb{K}v \cap W) \\
&= \dim(\lambda(Ww)) + \dim(\ker(\lambda) \cap Ww) + \dim(\mathbb{K}v \cap W) \\
&= \dim(wWw) + \dim(v\mathcal{A} \cap Ww) + \dim(\mathbb{K}v \cap W) \\
&= \dim(wWw) + \dim(x\mathcal{A}w \cap Ww) + \dim(\mathbb{K}v \cap W)
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que $v\mathcal{A} = x\mathcal{A}w \oplus \mathbb{K}v$ y luego, como $Ww \cap \mathbb{K}v = 0$, es $v\mathcal{A} \cap Ww = x\mathcal{A}w \cap Ww$. Procediendo análogamente, se tiene también

$$\begin{aligned}
\dim(W\mathcal{F} + W) &= \dim(W\mathcal{F}_0 + Wx + Wv + W) \\
&= \dim(w(W\mathcal{F}_0 + Wx + Wv + W)w) \\
&\quad + \dim(x\mathcal{A}w \cap (W\mathcal{F}_0 + Wx + Wv + W)w) \\
&\quad + \dim(\mathbb{K}v \cap (W\mathcal{F}_0 + Wx + Wv + W)) \\
&= \dim(wWw\mathcal{F}_0) + \dim(x\mathcal{A}w \cap (Ww\mathcal{F}_0 + Wx)) + \dim(vWv) \\
&\geq \dim(wWw\mathcal{F}_0) + \dim((x\mathcal{A}w \cap Ww)\mathcal{F}_0) + \dim(vWv) \\
&= \dim(wWw\mathcal{F}_0) + \dim(\phi^{-1}(x\mathcal{A}w \cap Ww)\mathcal{F}_0) + \dim(vWv) \\
&\geq 3\dim(wWw) + 3\dim(\phi^{-1}(x\mathcal{A}w \cap Ww)) + \dim(vWv) \\
&= 3\dim(wWw) + 3\dim(x\mathcal{A}w + Ww) + \dim(vWv) \\
&= 3\dim(Ww) + \dim(vWv)
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos que $x\mathcal{A}w \cap (W\mathcal{F}_0 + Wx + Wv + W) = x\mathcal{A}w \cap (W\mathcal{F}_0 + Wx + Wv + W)w$ pues $x\mathcal{A}w = (x\mathcal{A}w)w$, en la tercera que $Wvw = 0$, que $Ww \subseteq W\mathcal{F}_0$ (pues $w \in \mathcal{F}_0$) y que $W\mathcal{F}_0 w = Ww\mathcal{F}_0$ ya que $\mathcal{F}_0 \subseteq w\mathcal{A}w$. Por último, usamos que ϕ es una biyección y que, como cumple $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot b$, se tiene $\dim(\phi(T) \cdot \mathcal{F}_0) = \dim(\phi(T \cdot \mathcal{F}_0)) = \dim(T \cdot \mathcal{F}_0)$ para todo subespacio $T \subseteq w\mathcal{A}W$ de dimensión finita y por lo tanto $\dim((x\mathcal{A}w \cap Ww)\mathcal{F}_0) = \dim(\phi(\phi^{-1}(x\mathcal{A}w \cap Ww))\mathcal{F}_0) = \dim(\phi^{-1}(x\mathcal{A}w \cap Ww)\mathcal{F}_0)$.

Juntando todo esto, llegamos a

$$\frac{\dim(W\mathcal{F} + W)}{\dim(W)} \geq \frac{3\dim(Ww) + \dim(vWv)}{\dim(Ww) + \dim(\mathbb{K}v \cap W)} \geq \frac{3\dim(Ww) + 1}{\dim(Ww) + 1} \geq 2$$

pues, dependiendo de si $v \in W$ y $Wv = 0$ o no, el par $(\dim(vWv), \dim(\mathbb{K}v \cap W))$ puede tomar los valores $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$ y acotamos por el peor caso, que es $(1,1)$. Como además supusimos $\dim(Ww) \geq 1$, el cociente es efectivamente mayor o igual a 2.

Capítulo 5

Álgebras de traslaciones

Para finalizar, veremos ahora la relación entre la amenabilidad en espacios métricos y la amenabilidad en $\mathbb{K}$-álgebras a través de las álgebras de traslaciones.

5.1. Definiciones

Sean (X, d) un espacio métrico localmente finito extendido y $\mathbb{K}$ un cuerpo. Notamos $\mathbb{K}[X]$ al espacio vectorial generado por la base X y $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X])$ al álgebra de endomorfismos $\mathbb{K}$-lineales en $\mathbb{K}[X]$. Notaremos δ_x al elemento básico de $\mathbb{K}[X]$ correspondiente a $x \in X$. También pensamos a un elemento $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X])$ como una matriz indexada por X y definimos T_{xy} como la entrada $(x, y) \in X \times X$, de manera que $T(\delta_y) = \sum_{x \in X} T_{xy}\delta_x$ para cada $y \in X$.

Dada una traslación parcial t en X, definimos $V_t \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X])$ como

$$V_t(\delta_x) := \begin{cases} \delta_{t(x)} & \text{si } x \in \mathrm{dom}(t) \\ 0 & \text{si } x \notin \mathrm{dom}(t) \end{cases}$$

Notar que si t y t' son traslaciones parciales en X, se tiene $V_t V_{t'} = V_{t \circ t'}$.

Definición 5.1.1. Sea X un espacio métrico localmente finito extendido. La *$\mathbb{K}$-álgebra de traslaciones* $\mathbb{K}_u(X)$ es la $\mathbb{K}$-subálgebra de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X])$ generada por los elementos V_t, con t traslación parcial en X.

Todo subconjunto $A \subseteq X$ da lugar a un idempotente V_{Id_A} en $\mathbb{K}_u(X)$, donde Id_A es la función identidad en A. Notaremos P_A a este idempotente. Notar que $\mathbb{K}_u(X)$ es unital con unidad P_X y que para cualquier traslación parcial t tenemos

$$V_{t^{-1}} V_t = P_{dom(t)} \quad \text{y} \quad V_t V_{t^{-1}} = P_{Im(t)}$$

Notar además que $\mathbb{K}_u(X)$ está generado como $\mathbb{K}$-espacio vectorial por los generadores V_t.

Dada una matriz $T \in \mathrm{End}(\mathbb{K}[X])$, definimos su *propagación* como

$$p(T) := \sup\{d(x, y) : x, y \in X \ , \ T_{xy} \neq 0\}$$

Es fácil ver que todo elemento en $\mathbb{K}_u(X)$ tiene propagación finita y que para todo $A \subseteq X$ es $p(P_A) = 0$.

Observación 5.1.2. Si X se descompone como una unión disjunta $X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_n$, donde cada par (X_i, X_j) (con $i \neq j$) está a distancia infinita, entonces los idempotentes $P_{X_1}, \ldots, P_{X_n}$ resultan centrales, ortogonales dos a dos y su suma es la unidad de $\mathbb{K}_u(X)$ (la centralidad de estos elementos vale precisamente porque los espacios X_i están todos a distancia infinita entre sí). Todo esto induce una descomposición

$$\mathbb{K}_u(X) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K}_u(X_i)$$

5.2. El vínculo entre espacios métricos y álgebras

Teorema 5.2.1. *Sean (X,d) un espacio métrico localmente finito extendido, $\mathbb{K}_u(X)$ su álgebra de traslaciones y $n \geq 2$ un número natural. Son equivalentes*

(1) (X,d) *es amenable.*

(2) $\mathbb{K}_u(X)$ *es amenable.*

(3) $\mathbb{K}_u(X)$ *no es propiamente infinita.*

(4) $\mathbb{K}_u(X)$ *no contiene al álgebra de Leavitt* $L_{\mathbb{K}}(1,n)$ *como* $\mathbb{K}$*-subálgebra unital.*

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$: Sean $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}_u(X)$ finito. Por finitud de $\mathcal{F}$ y el hecho de que todo elemento en $\mathbb{K}_u(X)$ tiene propagación finita, existe un $R > 0$ tal que todo elemento de $\mathcal{F}$ tiene propagación a lo sumo R. Como (X,d) es amenable, existe un subconjunto finito no vacío $\mathcal{G} \in \text{Føl}(R,\varepsilon)$, es decir, $\mathcal{G}$ satisface

$$\frac{|\partial_R(\mathcal{G})|}{|\mathcal{G}|} \leq \varepsilon$$

Más aún, por el lema 2.3.2, podemos suponer que $\mathcal{G}$ está todo contenido en una sola componente gruesa de X. Ahora, de la definición de propagación se deduce que, si Y, Y' son dos subespacios de X tales que todo par de elementos $y \in Y$ e $y' \in Y'$ cumple $d(y,y') > R$, entonces para todo $T \in \mathcal{F}$ es $P_Y T P_{Y'} = 0$. En efecto, dado $y' \in Y$ tenemos $T(\delta_{y'}) = \sum_{x\in X} T_{xy'}\delta_x$ y como la propagación de T es a lo sumo R, sabemos que $T_{xy'} = 0$ para todo x tal que $d(x,y') > R$. En particular, $T_{yy'} = 0$ para todo $y \in Y$, por lo que $P_Y T P_{Y'} = 0$. Definimos ahora el siguiente subespacio de $\mathbb{K}_u(X)$ (que, más aún, es una subálgebra):

$$W := P_{\mathcal{G}}\mathbb{K}_u(X)P_{\mathcal{G}} \subseteq \mathbb{K}_u(X).$$

Es fácil ver que como $\mathcal{G}$ es finito y está todo contenido en una única componente gruesa, es $W \simeq \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[\mathcal{G}])$ y así $\dim(W) = |\mathcal{G}|^2$.

Nuestro objetivo ahora es verificar que W es un subespacio $(\mathcal{F},\varepsilon)$-Følner. Para ello, sea $T \in \mathcal{F}$ y analicemos el subespacio TW. Usaremos la notación estándar para el conmutador de dos operadores: $[T,B] = TB - BT$ y también notaremos, para cada $R > 0$,

$$N_R^-(\mathcal{G}) := \{x \in X : d(x, X\setminus\mathcal{G}) > R\}.$$

En primer lugar, se tiene

$$1 = P_{\mathcal{G}} + P_{X\setminus\mathcal{G}} = (P_{N_R^-(\mathcal{G})} + P_{\partial_R^-(\mathcal{G})}) + (P_{\partial_R^+(\mathcal{G})} + P_{X\setminus N_R^+(\mathcal{G})})$$

y también

$$P_{N_R^-(\mathcal{G})} T P_{X\setminus\mathcal{G}} = P_{X\setminus\mathcal{G}} T P_{N_R^-(\mathcal{G})} = P_{X\setminus N_R^+(\mathcal{G})} T P_{\mathcal{G}} = P_{\mathcal{G}} T P_{X\setminus N_R^+(\mathcal{G})} = 0$$

Luego podemos escribir

$$\begin{aligned} TP_{\mathcal{G}} &= (P_{\mathcal{G}} + P_{\partial_R^+(\mathcal{G})} + P_{X\setminus N_R^+(\mathcal{G})})TP_{\mathcal{G}} \\ &= P_{\mathcal{G}}TP_{\mathcal{G}} + P_{\partial_R^+(\mathcal{G})}T(P_{N_R^-(\mathcal{G})} + P_{\partial_R^-(\mathcal{G})}) \\ &= P_{\mathcal{G}}TP_{\mathcal{G}} + P_{\partial_R^+(\mathcal{G})}TP_{\partial_R^-(\mathcal{G})} \end{aligned}$$

y similarmente

$$P_{\mathcal{G}}T = P_{\mathcal{G}}TP_{\mathcal{G}} + P_{\partial_R^-(\mathcal{G})}TP_{\partial_R^+(\mathcal{G})}.$$

Con todo esto obtenemos

$$[T, P_{\mathcal{G}}] = P_{\partial_R^+(\mathcal{G})} T P_{\partial_R^-(\mathcal{G})} - P_{\partial_R^-(\mathcal{G})} T P_{\partial_R^+(\mathcal{G})}$$

y

$$\begin{aligned} TW &= \{TP_{\mathcal{G}} B P_{\mathcal{G}} : B \in \mathbb{K}_u(X)\} \\ &= \{P_{\mathcal{G}} T B P_{\mathcal{G}} + [T, P_{\mathcal{G}}] B P_{\mathcal{G}} : B \in \mathbb{K}_u(X)\} \\ &= \{P_{\mathcal{G}} T B P_{\mathcal{G}} + P_{\partial_R^+(\mathcal{G})} T P_{\partial_R^-(\mathcal{G})} B P_{\mathcal{G}} - P_{\partial_R^-(\mathcal{G})} T P_{\partial_R^+(\mathcal{G})} B P_{\mathcal{G}} : B \in \mathbb{K}_u(X)\} \\ &\subseteq W + P_{\partial_R^+(\mathcal{G})} \mathbb{K}_u(X) P_{\mathcal{G}} + P_{\partial_R^-(\mathcal{G})} \mathbb{K}_u(X) P_{\mathcal{G}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos la siguiente cota para cualquier $T \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \frac{\dim(TW + W)}{\dim(W)} &\leq \frac{\dim(W) + \dim(P_{\partial_R^+(\mathcal{G})} \mathbb{K}_u(X) P_{\mathcal{G}}) + \dim(P_{\partial_R^-(\mathcal{G})} \mathbb{K}_u(X) P_{\mathcal{G}})}{\dim(W)} \\ &\leq 1 + \frac{|\mathcal{G}||\partial_R^+(\mathcal{G})| + |\mathcal{G}||\partial_R^-(\mathcal{G})|}{|\mathcal{G}|^2} \\ &= 1 + \frac{|\partial_R(\mathcal{G})|}{|\mathcal{G}|} \leq 1 + \varepsilon \end{aligned}$$

que muestra que W es $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-Følner y por lo tanto $\mathbb{K}_u(X)$ es amenable.

(2) $\Rightarrow$ (3): Esta implicación la probamos para cualquier álgebra (corolario 3.5.7).

(3) $\Rightarrow$ (4): Si existe un monomorfismo unital $L(1, n) \to \mathbb{K}_u(X)$ entonces cualquier conjunto de generadores distintos en $L(1, n)$, X_i, Y_i, X_j, Y_j ($i \neq j$), nos dicen que $\mathbb{K}_u(X)$ es propiamente infinita pues los elementos $X_i Y_i$ y $X_j Y_j$ resultan ser idempotentes ortogonales equivalentes a la unidad ya que $Y_i X_j = \delta_{ij}$.

(4) $\Rightarrow$ (1): Supongamos que (X, d) no fuera amenable. Luego, por 2.3.4, sabemos que X admite una descomposición paradójica, i.e, existe una partición $X = X_+ \sqcup X_-$ y traslaciones parciales $t_+ : X \to X_+$, $t_- : X \to X_-$. Esto nos da elementos $V_{t_+}, V_{t_-}, V_{t_+^{-1}}, V_{t_-^{-1}}$ en $\mathbb{K}_u(X)$ que cumplen

$$\begin{aligned} & V_{t_+} V_{t_+^{-1}} + V_{t_-} V_{t_-^{-1}} = 1 \\ & V_{t_+^{-1}} V_{t_+} = 1 = V_{t_-^{-1}} V_{t_-} \\ & V_{t_+^{-1}} V_{t_-} = 0 = V_{t_-^{-1}} V_{t_+} \end{aligned}$$

lo cual nos da un monomorfismo unital $L(1, 2) \to \mathbb{K}_u(X)$ (mono pues $L(1, 2)$ es simple). El resultado se sigue entonces del hecho de que existe un monomorfismo unital $L(1, n) \to L(1, 2)$ para todo $n \geq 2$ (ver [10], teorema 4.1). $\square$

Enunciamos ahora un resultado análogo para el caso de amenabilidad propia. Usaremos la siguiente terminología: dadas dos álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, diremos que $\mathcal{A}$ es una *extensión de dimensión finita de* $\mathcal{B}$ si existe un ideal bilátero I en $\mathcal{A}$ de dimensión finita tal que $\mathcal{A}/I \simeq \mathcal{B}$.

Teorema 5.2.2. *Sean (X, d) un espacio métrico localmente finito extendido y $\mathbb{K}_u(X)$ su álgebra de traslaciones. Son equivalentes*

(1) (X, d) es propiamente amenable.

(2) $\mathbb{K}_u(X)$ es propiamente amenable.

(3) $\mathbb{K}_u(X)$ no es una extensión de dimensión finita de una $\mathbb{K}$-álgebra propiamente infinita.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Supongamos que (X,d) es propiamente amenable. Luego, dados $R>0$, $\varepsilon>0$ y $N\in\mathbb{N}$, existe $F\in \text{Føl}(R,\varepsilon/2)$ con $|F|\geq N/2$. Si escribimos $F=\sqcup_{i\in I}F_i$ (su descomposición en las componentes gruesas de X), sea

$$I' := \left\{ i\in I : \frac{|\partial_R(F_i)|}{|F_i|}\leq \varepsilon \right\}$$

y $F'=\sqcup_{i\in I'}F_i$. Afirmamos ahora que $|F'|\geq \frac{1}{2}|F|\geq N$, pues si no fuera así se tendría

$$\frac{|\partial_R(F)|}{|F|}\geq \frac{\sum_{i\in I\setminus I'}|\partial_R(F_i)|}{|F|} > \frac{\sum_{i\in I\setminus I'}\varepsilon|F_i|}{|F|} = \frac{\varepsilon|F\setminus F'|}{|F|} > \frac{\varepsilon\frac{1}{2}|F|}{|F|} = \frac{\varepsilon}{2}$$

lo que es absurdo pues $F\in\text{Føl}(R,\varepsilon/2)$. Con esto en mente definimos ahora, para cada $i\in I'$, $W_i := P_{F_i}\mathbb{K}_u(X)P_{F_i}$. Recordando la demostración del teorema 5.2.1, vemos que $\dim(W_i)=|F_i|^2$ y además para cualquier $T\in\mathbb{K}_u(X)$ de propagación a lo sumo R se tiene $\dim(TW_i+W_i)\leq |F_i|(|F_i|+|\partial_R(F_i)|)\leq |F_i|^2(1+\varepsilon)$. Luego si ponemos $W=\sum_{i\in I'}W_i$ tenemos

$$\dim(W)=\sum_{i\in I'}\dim(W_i)=\sum_{i\in I'}|F_i|^2\geq\sum_{i\in I'}|F_i|=|F'|\geq N$$

y para todo T de propagación a lo sumo R

$$\frac{\dim(TW+W)}{\dim(W)}=\frac{\sum_{i\in I'}\dim(TW_i+W_i)}{\sum_{i\in I'}\dim(W_i)}\leq\frac{\sum_{i\in I'}|F_i|^2(1+\varepsilon)}{\sum_{i\in I'}|F_i|^2}=1+\varepsilon$$

Esto nos dice que podemos encontrar subespacios $(\mathcal{F},\varepsilon)$-Følner de dimensión arbitrariamente grande para todo $\mathcal{F}\subseteq\mathbb{K}_u(X)$ y $\varepsilon>0$, es decir, $\mathbb{K}_u(X)$ es propiamente amenable.

(2) $\Rightarrow$ (3): Si $\mathbb{K}_u(X)$ fuera una extensión de dimensión finita de una $\mathbb{K}$-álgebra propiamente infinita, existiría un ideal bilátero de $\mathbb{K}_u(X)$ de dimensión finita tal que $\mathbb{K}_u(X)/I$ es propiamente infinita, y en particular no amenable. Esto nos diría, gracias a la proposición 3.2.4, que $\mathbb{K}_u(X)$ no es propiamente amenable, contradiciendo nuestra hipótesis.

(3) $\Rightarrow$ (1): Supongamos que $\mathbb{K}_u(X)$ no es una extensión de dimensión finita de un álgebra propiamente infinita. En particular, $\mathbb{K}_u(X)$ no es propiamente infinita. Luego el teorema 5.2.1 nos garantiza que (X,d) es amenable. Si (X,d) no fuera propiamente amenable, por 2.4.3 tendríamos una partición $X=Y_1\sqcup Y_2$, con Y_1 finito no vacío, Y_2 no amenable y $d(x,y)=\infty$ para todos $x\in Y_1$ e $y\in Y_2$. Esto nos daría una descomposición $\mathbb{K}_u(X)\simeq\mathbb{K}_u(Y_1)\oplus\mathbb{K}_u(Y_2)$ (observación 5.1.2), con $\mathbb{K}_u(Y_1)$ de dimensión finita. En particular, $\mathbb{K}_u(X)$ sería una extensión de dimensión finita de $\mathbb{K}_u(Y_2)$ con $\mathbb{K}_u(Y_2)$ propiamente infinita, contradiciendo nuestra hipótesis. □

Apéndice A

Ultrafiltros

En este apéndice introducimos las nociones de ultrafiltro y $\mathcal{F}$-límites, siguiendo [9]. Veremos sólo lo necesario para la demostración del teorema 3.4.6, refiriendo al lector a [14] para un tratamiento más profundo.

Definición A.1.1. Un *filtro* sobre un conjunto M es una familia no vacía $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$ que cumple

(I) Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(II) Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

(III) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Un filtro $\mathcal{F}$ se dice *libre* si $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \emptyset$.

Ejemplo A.1.2. El *filtro de Fréchet* sobre un conjunto M es la familia $\mathcal{F}_0(M) = \{A \subseteq M : A \neq \emptyset \text{ y } M \setminus A \text{ es finito}\}$. Notar que $\mathcal{F}_0(M)$ es libre, y que un filtro $\mathcal{F}$ sobre M es libre si y sólo si $\mathcal{F}_0(M) \subseteq \mathcal{F}$.

Definición A.1.3. Un filtro $\mathcal{F}$ en M se dice un *ultrafiltro* si para todo $A \subseteq M$ se tiene $A \in \mathcal{F}$ ó $M \setminus A \in \mathcal{F}$.

Observación A.1.4. Notar que la disyunción en la definición A.1.3 es exclusiva. En otras palabras, si una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$ contiene a un conjunto A y a su complemento $M \setminus A$ entonces dicha familia no puede ser un filtro. En efecto, si lo fuera se tendría $\emptyset = A \cap (M \setminus A) \in \mathcal{F}$, un absurdo.

Proposición A.1.5. *Un filtro $\mathcal{F}$ sobre M es un ultrafiltro si y sólo si es maximal (con respecto a la inclusión) entre todos los filtros sobre M.*

Demostración. Si $\mathcal{F}$ es ultrafiltro, entonces para cualquier familia $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{P}(M)$ que cumpla $\mathcal{F}' \supsetneq \mathcal{F}$ existe un conjunto $A \subseteq M$ tal que $A \in \mathcal{F}'$ y $M \setminus A \in \mathcal{F}'$. Luego, por A.1.4, ninguna familia $\mathcal{F}' \supsetneq \mathcal{F}$ es un filtro y por lo tanto $\mathcal{F}$ es maximal.

Para la otra dirección, sea $\mathcal{F}$ un filtro y supongamos que existe $A \subseteq M$ tal que $A \notin \mathcal{F}$ y $M \setminus A \notin \mathcal{F}$. Definimos entonces la siguiente familia:

$$\mathcal{F}' = \{C \subseteq M : \text{existe } B \in \mathcal{F} \text{ tal que } B \cap A \subseteq C\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{F}'$ es un filtro en M, lo cual implica que $\mathcal{F}$ no es maximal, pues es claro que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ y la inclusión es estricta, ya que $A = M \cap A \in \mathcal{F}'$ (todo filtro contiene a M pues es, por definición, no vacío). En efecto, como $M \setminus A \notin \mathcal{F}$, todo elemento $B \in \mathcal{F}$ cumple $B \cap A \neq \emptyset$, porque de lo contrario se tendría $B \subseteq M \setminus A$ y luego $M \setminus A \in \mathcal{F}$. Esto nos dice que $\emptyset \notin \mathcal{F}'$. Además, es evidente de la definición que si $C \in \mathcal{F}'$ y $C \subseteq C'$ entonces $C' \in \mathcal{F}'$. Por último, si tenemos $C_1, C_2 \in \mathcal{F}'$ entonces existen $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$ de manera que

$$B_1 \cap A \subseteq C_1 \quad \text{y} \quad B_2 \cap A \subseteq C_2$$

y por ende
$$C_1 \cap C_2 \supseteq (B_1 \cap A) \cap (B_2 \cap A) = (B_1 \cap B_2) \cap A.$$
Como $\mathcal{F}$ es un filtro, es $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$ y así $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{F}'$. Hemos probado entonces, vía la contrarrecíproca, que todo filtro maximal es un ultrafiltro. □

A partir de esta proposición se puede probar que todo filtro está contenido en un ultrafiltro; la demostración es un clásico uso del lema de Zorn, que omitimos.

Proposición A.1.6. *Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.*

Definimos ahora el concepto de $\mathcal{F}$-límite, para luego probar todas sus propiedades básicas que necesitamos.

Definición A.1.7. Sean M un conjunto, $\mathcal{F}$ un filtro sobre M y X un espacio topológico. Decimos que una función $f : M \to X$ es *$\mathcal{F}$-convergente* a $x \in X$, o que x es un *$\mathcal{F}$-límite* de f, si
$$f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$$
para todo entorno U de x. En este caso notamos $x \in \mathcal{F}\text{-lím} f$, i.e, llamamos $\mathcal{F}\text{-lím} f$ al conjunto de $\mathcal{F}$-límites de f. Cuando $M = \mathbb{N}$ y escribimos a $f : \mathbb{N} \to X$ como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (osea, $x_n = f(n)$) también notamos $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}} x$.

Observación A.1.8. Si el espacio X viene provisto de una base de abiertos, para verificar que una función $f : M \to X$ $\mathcal{F}$-converge a x basta ver que $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ para todo entorno básico U de x.

Cuando $M = \mathbb{N}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0(\mathbb{N})$ es el filtro de Fréchet, la $\mathcal{F}$-convergencia de una función $f : \mathbb{N} \to X$ es precisamente la convergencia usual de sucesiones.

Proposición A.1.9. *Sean M un conjunto, X un espacio topológico y $f : M \to X$. Sean además $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ filtros en M tales que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Si x es un $\mathcal{F}_1$-límite de f, entonces también es un $\mathcal{F}_2$-límite de f. En otras palabras, $\mathcal{F}_1\text{-lím} f \subseteq \mathcal{F}_2\text{-lím} f$.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{F}_1\text{-lím} f$. Tenemos, por definición,
$$f^{-1}(U) \in \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$$
para todo entorno U de x. Luego $x \in \mathcal{F}_2\text{-lím} f$. □

Si aplicamos la proposición A.1.9 al filtro de Fréchet $F_0(\mathbb{N})$ obtenemos el siguiente corolario.

Corolario A.1.10. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{N}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio topológico X. Si x_n converge a x (en el sentido usual) entonces $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}} x$.*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es libre contiene al filtro de Fréchet $F_0(\mathbb{N})$ y por la observación A.1.8, $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}_0(\mathbb{N})} x$. Por último, usando que $\mathcal{F}_0(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ y la proposición A.1.9, se tiene $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}} x$. □

En principio, el $\mathcal{F}$-límite de una función no tiene porqué existir ni ser único. Veremos a continuación que la existencia de un tal límite está garantizada si X es compacto y $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, y la unicidad lo está si X es Hausdorff.

Proposición A.1.11. *Sean X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre M y $f : M \to X$. Si X es Hausdorff, entonces f tiene a lo sumo un $\mathcal{F}$-límite.*

Demostración. Supongamos que $x, y \in X$ son ambos $\mathcal{F}$-límites de f tales que $x \neq y$. Como X es Hausdorff, existen entornos U y V de x e y respectivamente de modo que $U \cap V = \emptyset$. Teniendo en cuenta que $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es un filtro, tenemos
$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{F}$$
un absurdo. □

Proposición A.1.12. *Sean $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre M, X un espacio topológico compacto y $f : M \to X$ una función. Entonces f tiene al menos un $\mathcal{F}$-límite (i.e $\mathcal{F}\text{-lím} f \neq \emptyset$).*

Demostración. Supongamos que f no tiene $\mathcal{F}$-límites. Luego para todo $x \in X$ debe existir un entorno abierto U_x de x de manera que $f^{-1}(U_x) \notin \mathcal{F}$. Tenemos entonces un cubrimiento por abiertos $\{U_x\}_{x \in X}$, que por compacidad admite un subcubrimiento finito $\{U_1, \dots, U_n\}$.

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene $f^{-1}(U_i) \notin \mathcal{F}$ y como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, esto implica que $f^{-1}(X \setminus U_i) \in \mathcal{F}$. Además, como los abiertos U_i son un cubrimiento, es $\bigcap_{i=1}^{n}(X \setminus U_i) = \emptyset$ y por lo tanto

$$\bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(X \setminus U_i) = f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} X \setminus U_i) = \emptyset.$$

Esto implica que $\emptyset \in \mathcal{F}$, un absurdo. □

Las proposiciones A.1.11 y A.1.12 nos dan el siguiente corolario.

Corolario A.1.13. *Sean $\mathcal{F}$ un ultrafiltro de $\mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ tiene un único $\mathcal{F}$-límite.*

Demostración. Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Si además es acotada, entonces ésta puede correstringirse a un subconjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Luego tenemos $f : \mathbb{N} \to K$, con $\mathbb{K}$ compacto y Hausdorff y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro. Aplicamos así A.1.11 y A.1.12 para obtener el resultado. □

Para terminar, probaremos las propiedades básicas de los $\mathcal{F}$-límites en el caso de sucesiones acotadas en $\mathbb{R}^n$ (linealidad y, en $\mathbb{R}$, también monotonía). En lo que sigue muchas veces trabajaremos con sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que siempre tienen un único $\mathcal{F}$-límite, al que por tanto notamos $\text{lím}_{\mathcal{F}} x_n$.

Proposición A.1.14. *Sean X e Y espacios topológicos, $\mathcal{F}$ un filtro sobre M, $f : M \to X$ una función y $g : X \to Y$ una función continua. Si $x \in \mathcal{F}\text{-lím} f$, entonces $g(x) \in \mathcal{F}\text{-lím}\, g \circ f$.*

Demostración. Tenemos $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ para todo entorno U de x. Ahora, si $V \subseteq Y$ es un entorno de y entonces, por continuidad de g, $g^{-1}(V)$ es un entorno de x y por lo tanto

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{F}.$$

Como esto se verifica para todo entorno V de y, probamos que $g(x)$ es un $\mathcal{F}$-límite de $g \circ f$. □

Lema A.1.15. *Sean X, Y espacios topológicos, $\mathcal{F}$ un filtro sobre M y $f : M \to X$, $g : M \to Y$ funciones. Sea $f \times g : M \to X \times Y$ la función definida por $(f \times g)(m) = (f(m), g(m))$. Si $x \in \mathcal{F}\text{-lím} f$ e $y \in \mathcal{F}\text{-lím}\, g$ entonces $(x, y) \in \mathcal{F}\text{-lím} f \times g$.*

Demostración. Para verificar que $(x, y) \in \mathcal{F}\text{-lím} f \times g$, basta ver que para todo U entorno abierto de x y V entorno abierto de y se tiene $(f \times g)^{-1}(U \times V) \in \mathcal{F}$ pues $\{U \times V : U \subseteq X \text{ y } V \subseteq Y \text{ abiertos}\}$ es una base de la topología de $X \times Y$. Ahora, por hipótesis sabemos que $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ y $g^{-1}(V) \in \mathcal{F}$ y luego

$$(f \times g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \in \mathcal{F}.$$

□

De la proposición A.1.14 y el lema A.1.15 se obtiene la linealidad.

Proposición A.1.16. *Sean $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sucesiones acotadas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Entonces*

$$\lim_{\mathcal{F}}(x_k + y_k) = \lim_{\mathcal{F}} x_k + \lim_{\mathcal{F}} y_k.$$

Demostración. Llamemos $x = \lim_{\mathcal{F}} x_k$, $y = \lim_{\mathcal{F}} y_k$ y notemos que el lema A.1.15 nos dice que $\lim_{\mathcal{F}}(x_k, y_k) = (x, y)$. Por otro lado, si llamamos $g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ a la función continua definida por $g(a, b) = a + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}^n$, la proposición A.1.14 nos da $\lim_{\mathcal{F}} g(x_k, y_k) = g(\lim_{\mathcal{F}}(x_k, y_k))$. Juntando todo esto, tenemos

$$\lim_{\mathcal{F}}(x_k + y_k) = \lim_{\mathcal{F}} g(x_k, y_k) = g(\lim_{\mathcal{F}}(x_k, y_k)) = g(x, y) = x + y = \lim_{\mathcal{F}} x_k + \lim_{\mathcal{F}} y_k$$

como queríamos ver. □

Por último, la monotonía en $\mathbb{R}$ es una verificación sencilla.

Proposición A.1.17. *Sean $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones acotadas de números reales tales que $x_k \le y_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\lim_{\mathcal{F}} x_k \le \lim_{\mathcal{F}} y_k.$$

Demostración. Escribamos $x = \lim_{\mathcal{F}} x_k$, $y = \lim_{\mathcal{F}} y_k$ y supongamos que $x > y$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $y + \varepsilon < x - \varepsilon$. Como $x_k \xrightarrow{\mathcal{F}} x$ y $y_k \xrightarrow{\mathcal{F}} y$, se tiene

$$\{k \in \mathbb{N} : |y - y_k| < \varepsilon\}, \{k \in \mathbb{N} : |x - x_k| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$$

(estamos tomando como entornos abiertos de x e y a $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ y $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ y usando la definición de $\mathcal{F}$-convergencia). Ahora, como $\mathcal{F}$ es un filtro, es cerrado por intersecciones y entonces

$$\{k \in \mathbb{N} : |y - y_k| < \varepsilon \ \wedge \ |x - x_k| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}.$$

Nuevamente, como $\mathcal{F}$ es filtro, este último conjunto no puede ser vacío, de donde se sigue que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|y - y_{k_0}| < \varepsilon$ y $|x - x_{k_0}| < \varepsilon$. En particular entonces obtenemos

$$y_{k_0} < y + \varepsilon < x - \varepsilon < x_{k_0}$$

lo cual es absurdo pues teníamos $x_k \le y_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Bibliografía

[1] Pere Ara, Kang Li, Fernando Lledó, and Jianchao Wu, *Amenability of coarse spaces and $\mathbb{K}$-algebras*, Bull. Math. Sci. (2017). ↑5, 17

[2] L. Bartholdi, *On amenability of group algebras*, Israel J. Math. **168** (2008), 153–165. ↑38

[3] T. Ceccherini-Silberstein, R. Grigorchuk, and P. de la Harpe, *Amenability and paradoxical decomposition for pseudogroups and for discrete metric spaces*, Proc. Steklov Inst. Math. **224** (1999), 57–97. (Versión actualizada en `http://arxiv.org/abs/1603.04212`). ↑25

[4] G. Elek, *The amenability of affine algebras*, J. Algebra **264** (2003), 469–478. ↑5, 31

[5] P.W. Nowak and G. Yu, *Large scale geometry*, European Mathematical Society, Zürich, 2012. ↑7

[6] M. Tomforde, *Uniqueness theorems and ideal structure for Leavitt path algebras*, J. Algebra **318** (2007), 270–299. ↑55

[7] Alejandra Garrido, *An introduction to amenable groups* (2013). `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~garrido/amenable.pdf`. ↑7

[8] G. Abrams, *Leavitt path algebras: the first decade*, Bull. Math. Sci. **5** (2015), 59120. ↑49

[9] Martin Sleziak, *$\mathcal{F}$-convergence, filters and nets* (2012). `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/texty/rozne/trf/iconv/notions.pdf`(Notas sin terminar). ↑65

[10] N. Brownlowe and A.P.W. Sørensen, *Leavitt R-algebras over countable graphs embed into $L_{2,R}$*, J. Algebra **454** (2016), 334–356. ↑63

[11] V. Runde, *Lectures on Amenability*, Springer, Berlin, 2002. ↑9

[12] S. Wagon and G. Tomkowicz, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016. ↑9

[13] G. Abrams, P Ara, and M. Siles Molina, *Leavitt Path Algebras*, Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 2191, 2017. ↑54

[14] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics. General Topology. Chapters* 1-4, Springer-Verlag, 1989. ↑65

[15] W. G. Leavitt, *The module type of a ring*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 113–130. ↑49

[16] G. Abrams and G. Aranda Pino, *The Leavitt path algebra of a graph*, J. Algebra **293** (2005), 319–334. ↑49

[17] S. Banach and A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fund. Math. **6** (1924), 244–277. ↑5

[18] J. von Neumann, *Zur allgemeinen Theorie des Maßes*, Fund. Math. **13** (1929), 73–116. ↑5

[19] E. Følner, *On groups with full Banach mean value*, Math. Scand. **3** (1955), 243–254. ↑5

[20] J. Bloch and S. Weinberger, *Aperiodic Tilings, Positive Scalar Curvature, and Amenability of Spaces*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 907–918. ↑5

[21] P. Ara, K. R. Goodearl, and E. Pardo, *K_0 of purely infinite simple regular rings*, **K**-Theory **26** (2002), 69–100. ↑49, 51

[22] G. Teschl, *Topics in real and functional analysis*. Disponible online en `https://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-fa/fa.pdf` Versíon: 7 de mayo, 2018. ↑9, 12, 13

[23] J. Cuntz, *Simple $\mathbb{C}^*$-algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (1977), 173–185. ↑49

[24] J. Cuntz and W. Krieger, *A class of $\mathbb{C}^*$-algebras and topological Markov chains*, Invent. Math. **63** (1981), 25–40. ↑49

[25] A. Kumjian, D. Pask, and I. Raeburn, *Cuntz-Krieger algebras of directed graphs*, Pacific J. Math. **184 (1)** (1998), 161–174. ↑49