UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

La Integral Fraccionaria en diferentes Espacios Funcionales del Análisis Armónico

Hilde Bianchi

Director: Pablo De Nápoli

16 de abril de 2018

Agradecimientos:

A mi director, Dr. Pablo de Nápoli, por su paciencia, su bondad y su gentileza.

Al Dr. Ricardo Durán y a la Dra. Irene Drelichman, que aceptaron ser jurados de mi tesis.

A Roberto Sicardi Rodriguez, que me alentó y me ayudo generosamente en los aspectos vinculados a la física.

A mi mamá , mi tia y a mi hermano en la vida Omar Villalva, que me afirmaron on una confianza que yo, por desgracia, nunca me he tenido.

A Elida y Gisela, de la Hemeroteca del Departamento, que me buscaron libros y articulos que sin su ayuda me hubiese sido muy dificil conseguir.

A Juan Gonzalez, Javier Fernández, Mariano Mancuso, Carlos Scirica y en general, a la larga lista de amigos que me facilitaron material e ideas.

Introducción

La integral fraccionaria o potencial de Riesz es un operador integral muy utilizado en el análisis armónico. Dada una función $f : \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \to \mathbb{R}$, su integral fraccionaria de orden α se define por:

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} dy \quad 0 < \alpha < d,$$

donde $\gamma(\alpha)$ es una constante de normalización.

La teoría de la integral fraccionaria con pesos se remonta al trabajo de G.H. Hardy y J.E. Littlewood [12] de 1927, sobre la convergencia de los desarrollos en serie de Fourier. Este artículo crea la inquietud de Marcel Riesz, quien en 1948 la aplicó a la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas. Otras aplicaciones a varios problemas inversos en física matemática y geometría pueden consultarse en [22] y en [15] . En particular, la teoría de la transformada de Radón, esto es

$$R[f](\tau, p) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \tau + px)\, dx,$$

que se utiliza en tomografías computadas se basa tanto teórica como numéricamente en los potenciales de Riesz,según se detalla en [14]. Asìmismo, los potenciales de Riesz son una herramienta útil en cuestiones de energia y de capacidad eléctrica.

El estudio de las propiedades de mapeo del potencial de Riesz en varias dimensiones fue iniciada por S. Sobolev en un artículo, fechado en 1938 [25], donde se trata la integrabilidad de I_α para funciones $f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$, en el cual se establece que $\|I_\alpha f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$, donde $1 < p < \frac{N}{\alpha}$, y $p* = \frac{Np}{N-\alpha p}$. Para $p = \frac{N}{\alpha}$, existen teoremas de inmersión que involucran espacios de Orlicz.

En cuanto a las acotaciones con pesos, en 1958 Stein y Weiss escriben un artículo [28] en el que obtienen acotaciones con pesos potencia de la de la integral fraccionaria en n dimensiones .Para funciones radiales, podemos mencionar los trabajos de Rubin,[23]; de de D´Ancona y Georgiev [5]; y de De Nápoli, Drelichman y Durán, [6]; y.

En acotaciones cuanto acotaciones ara pesos más generales, Muckenhoupt y Wheeden ,[17],dieron condiciones necesarias y suficientes para la validez de la desigualdad

$$\|v\mathcal{M}f\|_{\mathbb{L}^q(R^d)} \leq C_{p.q} \|vf\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)}$$

donde $\mathcal{M}$ denota la función maximal de Hardy-Littlewood, con el mismo peso en ambos miembros de la desigualdad. Este resultado fue generalizado en 1992 por Sawyer y Wheeden en [24], dando condiciones para la acotación con dos pesos de la integral fraccionaria.

El objetivo de la presente tesis es exponer algunos resultados sobre la acotación de la integral fraccionaria en distintos espacios funcionales con pesos utilizados en el análisis armónico. Para comprender y desarrollar estos temas se requirió el estudio previo de analisis armónico y teoría geométrica de la medida, que permitieron facilitar el desarrollo de esta tesis y despertaron el interés por el tema.

La misma se organiza de la siguiente manera:

En el capítulo 1, enumeramos algunas propiedades de análisis real y funcional e introducimos algunos resultados sobre la integral fraccionaria y potenciales de Riesz, el operador maximal de Hardy -Littlewood y el operador maximal fraccionario.

En el capítulo 2, estableceremos las propiedades de los espacios BMO y Lipschitz-α. En algunos libros y artículos los espacios Lipschitz-α son llamados Hölder-α-Tambien estudiaremos las propiedades básicas del potencial de Bessel, nombrado así en homenaje al matemático y astrónomo de ese nombre, aunque fue descubierto por Daniel Bernoulli hacia el 1700. También estudiaremos los espacios potenciales $L^{\alpha,p}$.

En el capítulo 3, estudiaremos el comportamiento de los espacios de Lebesgue con pesos, especialmente aplicado a los pesos de A_p de Muckenhoupt, los pesos que cumplen una condición doblante , la condición inversa de Hölder y los pesosde Muckenhoupt y Wheeden o pesos $A_{p,q}$.

En el capítulo 4, introduciremos los espacios de Lebesgue con exponente variable y la funcional modular .También enunciaremos los teoremas de extrapolación, que permiten estudiar el comportamiento de la integral fraccionaria en dichos espacios. Estos espacios fueron introducidos por Orlicz en 1931 y reaparecen en 1950 a través del trabajo de Nakano e introducidos en la literatura matemática rusa por I. V.Tsenov. En 1979, I.I. Sharapudinov estudia aspectos topológicos de los espacios de Lebesgue con exponente variable en la recta real. No fue sino hasta 1982 que se descubrieron aplicaciones a estos espacios, gracias a Zhikov, que hizo aplicaciones a la elasticidad de tejidos en su articulo [32]. En la actualidad, los espacios de Lebesgue con exponente variable tienen aplicaciones a la física de fluidos electrorréologicos, que fueron desarrollados por Ruzicka, y a la fabricación de cristales fotónicos,polímeros y procesamiento de imagenes, tema que desarrollaron Chen, Levine y Rao en[2]. Otra aplicación, esta vez a la industria automotriz, fue descubierta por Hao en 2006 y fue desarrollada en [11].

La vastedad del tema tratado y sus aplicaciones estimula a seguir trabajando sobre estos particulares.

Índice general

Capítulo 1

Definiciones y Teoremas Básicos

En este capitulo definiremos la integral fraccionaria, el operador maximal de Hardy-Littlewood, los operadores maximales fraccionarios y estableceremos algunas de sus caracteristicas básicas.

A lo largo del presente trabajo, usaremos la notación Q para denotar a los cubos y B, para denotar a las bolas

1.1. Definición de la Integral Fraccionaria o Potencial de Riesz

DEFINICIÓN 1. Sea $f : \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \to \mathbb{R}$.Definimos como integral fraccionaria o potencial de Riesz al operador

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} dy \quad 0 < \alpha < d,$$

donde $\gamma(\alpha) = \pi^{\frac{d}{2}} 2^\alpha \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}$ es una constante de normalización.

Este operador está bien definido por ejemplo si$f \in \mathcal{C}_0\left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}\right)$ pues si $B(0,R)$ es una bola tal que $sop\, f \subseteq B((0,R))$ entonces,

$$\begin{aligned}
|(I_\alpha f)(x)| &\leq \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{-d+\alpha} |f(y)|\, dy \\
&\leq \frac{1}{\gamma(\alpha)} \left(\max_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|\right) \int_{B(0,R)} |x-y|^{-d+\alpha} dy \\
&\leq \frac{1}{\gamma(\alpha)} \left(\max_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|\right) \int_{B(x,R)} |z|^{-d+\alpha} dz \\
&\leqq \frac{1}{\gamma(\alpha)} \left(\max_{s\in\mathbb{R}^d} |f(x)|\right) \int_0^R \rho^{-d+\alpha} \rho^{d-1} c_d d\rho = \\
&\leq \frac{c_d}{\gamma(\alpha)} \left(\max_{s\in\mathbb{R}^d} |f(s)|\right) \int_0^R \rho^{\alpha-1} d\rho \\
&\leq \frac{c_d}{\gamma(\alpha)} \frac{1}{\alpha} \left(\max_{s\in\mathbb{R}^d} |f(s)|\right) R^\alpha
\end{aligned}$$

Por otra parte, notamos que si f es una función suave que tiende a cero suficientemente rápido en infinito, se tiene que

$$(-\Delta f)\hat{}\,(x) = -4\pi^2 |x|^2 \hat{f}(x)$$

Por ejemplo, esto se verifica si f está en la clase de Schwarz, formada por las funciones de clase C^∞ con la propiedad de tener derivadas acotadas al multiplicarlas por polinomios. Si reemplazamos $|x|^2$ por $|x|^\beta$ con$-d < \beta < 0$, podemos definir, al menos formalmente, las potencias negativas del Laplaciano por

$$\left(-(\Delta f)^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\hat{}}(x) = -4\pi^2 |x|^2 \hat{f}(x)$$

La integral fraccionaria proporciona entonces una representación integral de las potencias negativas del Laplaciano, pues tenemos que

$$I_\alpha(f) = (-\Delta)^{\frac{-\alpha}{2}}(f)$$

si f es una función en la clase de Schwarz. Esta identidad se verifica en el sentido distribucional, como se establece en [27, lema2, capítulo 5] :

Lema. *Sea* $0 < \alpha < d$.

a)La transformada de Fourier de $|x|^{-d-\alpha}$ *es la función* $\gamma(\alpha)(2\pi)^{-\alpha}|x|^{-\alpha}$ *en el sentido que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^{d+\alpha}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\gamma(\alpha)(2\pi)^{-\alpha}|x|^{-\alpha}\overline{\hat{\varphi}(x)}dx$$

b)La identidad $\widehat{I_\alpha(f)} = (2\pi|x|)^{-\alpha}\hat{f}$ *es válida en el sentido que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} I_\alpha f(x)\overline{g(x)} = \int_{\mathbb{R}^d} f\hat{(x)}(2\pi)^{-\alpha}|x|^{-\alpha}\overline{\hat{g}(x)}$$

cualesquiera sean $f, g \in S$

Observación 2. Sea $0 < \alpha < d$. Sea $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Entonces, $I_\alpha(f) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^\infty)$

Demostración. Sea $x_B \in \mathbb{R}^d$ cualquiera Sea $R > 0$, que elegiremos convenientemente después

$$\begin{aligned}
|I_\alpha f(x)| &= \frac{1}{\gamma(\alpha)}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\frac{f(y)}{|x-y|^\alpha}dy\right| \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)}\left|\int_{B(x_B,R)}\frac{f(y)}{|x-y|^\alpha}dy + \int_{\mathbb{R}^d - B(x_B,R)}\frac{f(y)}{|x-y|^\alpha}dy\right| \\
&\leq \frac{1}{\gamma(\alpha)}\left|\int_{B(x_B,R)}\frac{f(y)}{|x-y|^\alpha}dy\right| + \frac{1}{\gamma(\alpha)}\left|\int_{\mathbb{R}^d - B(x_B,R)}\frac{f(y)}{|x-y|^\alpha}dy\right| \\
&\leq \frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_{B(x_B,R)}\frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha}dy + \frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^d - B(x_B,R)}\frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha}dy \\
&\leq \frac{1}{\gamma(\alpha)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\int_{B(x_B,R)}\frac{1}{|x-y|^\alpha}dy + \frac{1}{\gamma(\alpha)}\frac{1}{R^\alpha}\int_{\mathbb{R}^d - B(x_B,R)}|f(y)|\,dy \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\int_0^R\frac{c_d\rho^{d-1}}{\rho^\alpha}dy + \frac{1}{\gamma(\alpha)}\frac{1}{R^\alpha}\|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)} \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\frac{c_d}{d-\alpha}R^{d-\alpha} + \frac{1}{\gamma(\alpha)}R^{-\alpha}\|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}$$

Observemos que esta cota es válida $\forall R > 0$. Entonces, una buena estrategia puede ser minimizar esta expresión, para lo cual, para cada $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ definiremos $F : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$,

$$F(R) = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \frac{c_d}{d-\alpha} R^{d.-\alpha} + R^{-\alpha} \|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)}$$

Notemos que $\underset{R\to 0^+}{lim} (F(R)) = +\infty$, $\underset{R\to +\infty}{lim} (F(R)) = +\infty$, $F \in \mathcal{C}^1(0,+\infty)$

$$\frac{dF}{dR} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} c_d R^{d.-\alpha-1} - \alpha R^{-\alpha-1} \|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)}$$

Si $\frac{dF}{dR} = 0 \Longrightarrow \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} c_d R^{d.-\alpha-1} = \alpha R^{-\alpha-1} \|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)}$ Luego,

$$R = \left(\frac{\alpha \|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} c_d} \right)^{\frac{1}{d}}$$

En punto, F alcanza un mínimo absoluto. Entonces,

$$|I_\alpha(f)| \le \frac{1}{\gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha \|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} c_d} \right)^{\frac{-\alpha}{d}} \left(\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \frac{c_d}{d-\alpha} \frac{\alpha \|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} c_d} + \|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)} \right)$$

$$= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha \|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} c_d} \right)^{\frac{-\alpha}{d}} \left(\frac{c_d \alpha}{d-\alpha} + 1 \right) \left(\|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)} \right)$$

Por lo tanto, $\|I_\alpha(f)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \frac{1}{\gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha \|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} c_d} \right)^{\frac{-\alpha}{d}} \left(\frac{c_d \alpha}{d-\alpha} + 1 \right) \left(\|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)} \right)$

□

Una generalización de este resultado es :

Observación 3. Sea $1 < p < +\infty$. Sea $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$.Sea $q = \frac{p}{p-1}$ Sea $\frac{d-1}{q} < \alpha < d$. Entonces, $I_\alpha(f) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^\infty)$

Demostración. Sea $x_B \in \mathbb{R}^d$ cualquiera Sea $R > 0$, que elegiremos convenientemente después

$|I_\alpha f(x)| = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha} dy \right| = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \left| \int_{B(x_B,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha} dy + \int_{\mathbb{R}^d - \mathrm{B(x_B,R)}} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha} dy \right|$

$\le \frac{1}{\gamma(\alpha)} \left| \int_{B(x_B,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha} dy \right| + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \left| \int_{\mathbb{R}^d - \mathrm{B(x_B,R)}} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha} dy \right|$

$\le \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{B(x_B,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha} dy + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^d - \mathrm{B(x_B,R)}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha} dy$

$\le \frac{1}{\gamma(\alpha)} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{B(x_B,R)} \frac{1}{|x-y|^\alpha} dy + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \frac{1}{R^\alpha} \int_{\mathbb{R}^d - \mathrm{B(x_B,R)}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha} dy$

Por la clásica desigualdad de Hölder;

$\frac{1}{\gamma(\alpha)} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{B(x_B,R)} \frac{1}{|x-y|^\alpha} dy + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^d - \mathrm{B(x_B,R)}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha} dy$

$\le \frac{1}{\gamma(\alpha)} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_0^R \frac{c_d \rho^{d-1}}{\rho^\alpha} dy + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d - \mathrm{B(x_B,R)})} \left(\int_{\mathbb{R}^d - \mathrm{B(x_B,R)}} \frac{1}{|x-y|^{\alpha q}} dy \right)^{\frac{1}{q}}$

$= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \frac{c_d}{d-\alpha} R^{d.-\alpha} + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)} \left(\int_R^{+\infty} \frac{c_d \rho^{d-1}}{\rho^{\alpha q}} \right)^{\frac{1}{q}}$

Observemos que $d - \alpha q < 0$, así que

$|I_\alpha(f(x))| \le \frac{1}{\gamma(\alpha)} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \frac{c_d}{d-\alpha} R^{d.-\alpha} + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)} c_d^{\frac{1}{q}} \left(\frac{R^{d-\alpha q}}{\alpha q - d} \right)^{\frac{1}{q}} =$

$\frac{1}{\gamma(\alpha)} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \frac{c_d}{d-\alpha} R^{d.-\alpha} + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)} c_d^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\alpha q - d} \right)^{\frac{1}{q}} \left(R^{\frac{d}{q} - \alpha} \right)$

Observemos que esta cota es válida $\forall R > 0$.

Ahora, intentemos minimizar esta expresión. Para ello definamos $F(R) = C_1 R^{d.-\alpha} + C_2 \left(R^{\frac{d}{q} - \alpha} \right)$, donde

$C_1 = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})} \frac{c_d}{d-\alpha}$ y $C_2 = \|f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})} c_d^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\alpha q - d}\right)^{\frac{1}{q}}$

Notemos que $\underset{R\to 0^+}{lim} (F(R)) = +\infty$, $\underset{R\to +\infty}{lim} (F(R)) = +\infty$, $F \in \mathcal{C}^1(0,+\infty)$

$\frac{dF}{dx} = C_1 (d-\alpha) R^{d.-\alpha-1} + \left(\frac{d}{q} - \alpha\right) 2$

Si $\frac{dF}{dx} = 0 \Longrightarrow (d-\alpha-1) C_1 R^{d.-\alpha-1} = \left(\alpha - \frac{d}{q}\right) C_2 R^{\frac{d}{q}-\alpha-1}$

$(d-\alpha) C_1 R^{d.-\frac{d}{q}} = \left(\alpha - \frac{d}{q}\right) C_2$

$R^{d\left(1-\frac{1}{q}\right)} = \frac{\left(\alpha-\frac{d}{q}\right)C_2}{(d-\alpha)C_1}$

$R^{\frac{d}{p}} = \frac{\left(\alpha-\frac{d}{q}\right)\|f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})} c_d^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\alpha q-d}\right)^{\frac{1}{q}}}{(d-\alpha)\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})} \frac{c_d}{d-\alpha}}$

$R = \left(\frac{\left(\alpha-\frac{d}{q}\right)\|f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})} c_d^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\alpha q-d}\right)^{\frac{1}{q}}}{(d-\alpha)\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})} \frac{c_d}{d-\alpha}}\right)^{\frac{p}{d}} = \left(\frac{\left(\alpha-\frac{d}{q}\right)\|f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})} c_d^{\frac{1}{q}-1} \left(\frac{1}{\alpha q-d}\right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})}}\right)^{\frac{p}{d}}$

$= \left(\frac{\left(\alpha-\frac{d}{q}\right)\|f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})} c_d^{\frac{-1}{p}} \left(\frac{1}{\alpha q-d}\right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})}}\right)^{\frac{p}{d}}$

Este punto es un mínimo absoluto

Luego,

$$|I_\alpha(f)(x)| \leq \frac{1}{\gamma(\alpha)} \left(\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})} \frac{c_d}{d-\alpha} \left(\frac{\left(\alpha - \frac{d}{q}\right) \|f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})} c_d^{\frac{-1}{p}} \left(\frac{1}{\alpha q - d}\right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})}} \right)^{\frac{p}{d}(d-\alpha)} \right) +$$

□

$$\frac{1}{\gamma(\alpha)} \left(\|f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})} c_d^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\alpha q - d}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\left(\frac{\left(\alpha - \frac{d}{q}\right) \|f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})} c_d^{\frac{-1}{p}} \left(\frac{1}{\alpha q - d}\right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})}} \right)^{\frac{p}{d}} \right)^{\frac{d}{q}-\alpha} \right) \right)$$

Una generalización de este resultado está dado por la observación siguiente:

Observación 4. Sean $1 < p_1 < p_2 < +\infty$. Sean q_1, q_2 tales que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$, $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 1$. Sea $f \in \mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}) \cap \mathbb{L}^{p_2}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$.Sea $\alpha \in \left(\frac{d}{q_2}, \frac{d}{q_1}\right)$ .Entonces, $I_\alpha(f) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$cualquiera y sea $B(x_B, R)$,con $R > 0$,que elegiremos beneficiosamente después. Consideremos $|I_\alpha(f)| = \left|\frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha} dy\right| \leq \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha} dy$

$= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \left(\int_{B(x_B,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha} dy + \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}-\mathrm{B}(\mathrm{x_B},\mathrm{R})} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha} dy\right)$

En la primera integral ,usaremos la tradicional desigualdad de Hölder con los exponentes p_1 y q_1 $\frac{1}{\gamma(\alpha)} \left(\int_{B(x_B,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha} dy + \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}-\mathrm{B}(\mathrm{x_B},\mathrm{R})} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha} dy\right)$

$\leq \frac{1}{\gamma(\alpha)} \|f\|_{\mathbb{L}^{p_1}(B(x_B,R))} \left(\int_{B(x_B,R)} \frac{1}{|x-y|^{\alpha q_1}} dy\right)^{\frac{1}{q_1}} + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}-\mathrm{B}(\mathrm{x_B},\mathrm{R})} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha} dy$

$\leq \frac{1}{\gamma(\alpha)} \|f\|_{\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})} \left(\int_{B(x_B,R)} \frac{1}{|x-y|^{\alpha q_1}} dy\right)^{\frac{1}{q_1}} + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}-\mathrm{B}(\mathrm{x_B},\mathrm{R})} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} dy$

Haciendo un cambio de variables en la primera integral, obtenemos

$$\left(\int_0^R \frac{c_d \rho^{d-1}}{\rho^{\alpha q_1}} d\rho\right)^{\frac{1}{q_1}} = \left(\int_0^R c_d \rho^{d-1-\alpha q_1} d\rho\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

Observemos que $d-1-\alpha q_1 > -1$, o sea que

$$\left(\int_0^R c_d \rho^{d-1-\alpha q_1} d\rho\right)^{\frac{1}{q_1}} = \left(c_d \frac{1}{d-\alpha q_1} R^{d-\alpha q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}} = \left(\frac{c_d}{d-\alpha q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}} R^{\frac{d}{q_1}-\alpha}$$

Ahora consideremos $\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}-\mathrm{B}(\mathrm{x_B},\mathrm{R})} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} dy$

Usaremos nuevamente la desigualdad de Hölder con p_2 y q_2, y elegiremos R , para lo cual minimizaremos $F:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida como $F(R) = C_1 R^{\frac{d}{q_1}-\alpha} + C_2 R^{\frac{d}{q_2}-\alpha}$, donde $C_1 = \|f\|_{\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})} \left(\frac{c_d}{d-\alpha q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}$ y $C_2 = \|f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}_2}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})} \left(\frac{c_d}{\alpha q_2 - d}\right)^{\frac{1}{q_2}}$.

Notemos que $F \in \mathcal{C}^1((0,+\infty))$, $\underset{R\to 0^+}{lim} F(R) = +\infty$, $\underset{R\to +\infty}{lim} F(R) = +\infty$, luego tiene sentido buscar un mínimo absoluto en $(0,+\infty)$

$$\begin{aligned} F\acute{}\,(R) &= C_1\left(\frac{d}{q_1}-\alpha\right) R^{\frac{d}{q_1}-\alpha-1} + C_2\left(\frac{d}{q_2}-\alpha\right) R^{\frac{d}{q_2}-\alpha-1} \\ &= R^{-\alpha-1}\left(C_1\left(\frac{d}{q_1}-\alpha\right) R^{\frac{d}{q_1}} + C_2\left(\frac{d}{q_2}-\alpha\right) R^{\frac{d}{q_2}}\right) \end{aligned}$$

$F\acute{}\,(R) = 0 \Rightarrow \left(C_1\left(\frac{d}{q_1}-\alpha\right) R^{\frac{d}{q_1}} + C_2\left(\frac{d}{q_2}-\alpha\right) R^{\frac{d}{q_2}}\right) = 0$

Así, $C_1\left(\frac{d}{q_1}-\alpha\right) R^{\frac{d}{q_1}} = C_2\left(-\frac{d}{q_2}+\alpha\right) R^{\frac{d}{q_2}}$.

O equivalentemente, $\left(C_1\left(\frac{d}{q_1}-\alpha\right)\right)^{\frac{q_1 q_2}{d}} R^{q_2} = \left(C_2\left(-\frac{d}{q_2}+\alpha\right)\right)^{\frac{q_1 q_2}{d}} R^{q_1}$

De lo cual resulta, $\left(C_1\left(\frac{d}{q_1}-\alpha\right)\right)^{\frac{q_1 q_2}{d}} = \left(C_2\left(-\frac{d}{q_2}+\alpha\right)\right)^{\frac{q_1 q_2}{d}} R^{q_1-q_2}$, Y así obtenemos,

$$R = \left(\frac{C_1\left(\frac{d}{q_1}-\alpha\right)}{C_2\left(-\frac{d}{q_2}+\alpha\right)}\right)^{\frac{q_1 q_2}{d(q_1-q_2)}}$$

Un simple análisis de F' permite determinar que en $\left(\frac{C_1\left(\frac{d}{q_1}-\alpha\right)}{C_2\left(-\frac{d}{q_2}+\alpha\right)}\right)^{\frac{q_1 q_2}{d(q_1-q_2)}}$,F alcanza un mínimo, de lo cual resulta que

$$|I_\alpha(f)(x)| \leq \frac{1}{\gamma(\alpha)}\left(\frac{C_1\left(\frac{d}{q_1}-\alpha\right)}{C_2\left(-\frac{d}{q_2}+\alpha\right)}\right)^{\frac{-q_1 q_2 \alpha}{d(q_1-q_2)}} \times$$
$$\left\{C_1\left(\left(\frac{C_1\left(\frac{d}{q_1}-\alpha\right)}{C_2\left(-\frac{d}{q_2}+\alpha\right)}\right)^{\frac{q_2}{q_1-q_2}}\right) + C_2\left(\left(\frac{C_1\left(\frac{d}{q_1}-\alpha\right)}{C_2\left(-\frac{d}{q_2}+\alpha\right)}\right)^{\frac{q_2}{q_1-q_2}}\right)\right\} \tag{1.1.1}$$

$\square$

El potencial de Riesz tiene como desventaja que no es integrable en todo el espacio $\mathbb{R}^d$, por eso se introdujo el potencial de Bessel, nombrado así en homenaje al matemático y astrónomo alemán Friedrich Wilhem Bessel (1784-1846), que usó dicho potencial para estudiar el movimiento , el paralaje y la ubicación de aproximadamente 75000 estrellas dtel hemisferio norte .Tambien dedujo la posición de la estrella gemela de Sirio,conocida como el Cachorro,descubierta en 1862 por el astrónomo inglés Graham Clark.

El nucleo de Bessel se introducirá a través de la transformada de Fourier como

$$\hat{G_\alpha}(\xi) = \left(1 + 4|\xi|^2\right)^{\frac{-\alpha}{2}}$$

o, equivalentemente, como

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi|x|^2}{\delta}} e^{\frac{-\delta}{4\pi}} \delta^{\frac{\alpha-d}{2}} \frac{d\delta}{\delta},$$

El potencial de Bessel se define como $J_\alpha(f)\hat{}(\xi) = \left(1 + 4|\xi|^2\right)^{\frac{-\alpha}{2}} \hat{f}(\xi)$, o equivalentemente como $G_\alpha * f$

1.2. El operador maximal de Hardy-Littlewood

Comenzaremos por recordar unos resultados de análisis real que se usarán a continuación

Lema 5 (Lema de cubrimiento de Vitali-Wiener). *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ y $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$una sucesión de bolas tales que $sup_{j\in\mathbb{N}} diam(B_j) \in \mathbb{R}$ y que $E \subseteq \cup_{j\in\mathbb{N}}\mathrm{B_j}$.Entonces podemos elegir una subsucesión de bolas disjuntas con la propiedad que*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |B_{j_k}| \geq 5^{-d}|E|$$

Demostración. Ver [8] □

Definición 6. Sea f localmente integrable . Definimos al operador maximal de Hardy Littlewood como

$$\mathcal{M}(f)(x_0) = \sup_{Q/x_0\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx$$

Observación 7. Una forma equivalente se obtiene sustituyendo los cubos por bolas, esto es:

$$\widetilde{\mathcal{M}}(f)(x_0) = \sup_{B(x_0,R)/R>0} \frac{1}{|B(x_0,R)|}\int_{B(x_0,R)} |f(x)|\,dx$$

Este operador resulta equivalente en el sentido que existen c_1y c_2 constantes positivas tales que $c_1\mathcal{M}\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) \leq \widetilde{\mathcal{M}}(\mathrm{f})(\mathrm{x}_0) \leq c_2\mathcal{M}\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)$

Demostración. Sea $x_B \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ arbitrario .Sea $R > 0$.Sea Q un cubo centrado en x_B de lado $2R$ .Claramente,$B(x_B,R) \subseteq Q$. Entonces,

$$\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)} |f(x)|\,dx \leq \frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_Q |f(x)|\,dx$$

Ahora, forcemos la aparición de Q:

$$\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_Q |f(x)|\,dx = \frac{|Q|}{|B(x_B,R)|}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx\right)$$

A continuación comparemos la medida de Q con la de $B(x_B,R)$:

$$\frac{|Q|}{|B(x_B,R)|} = \frac{(2R)^d}{R^d\,|B(0,1)|}$$

En consecuencia

$$\widetilde{\mathcal{M}}(f)(x) \leq \frac{2^d}{|B(0,1)|}\mathcal{M}(\mathrm{f})(\mathrm{x})$$

Ahora probaremos una desigualdad en sentido contrario. Para ello consideremos $x_B \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$arbitrario,y Q un cubo de lado l.Consideremos $B\left(x_B,(2l)^d\right)$.

Claramente $Q \subseteq B\left(x_B,(2l)^d\right)$.Luego,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx \leq \frac{1}{|Q|}\int_{B\left(x_B,(2l)^d\right)} |f(x)|\,dx$$

Ahora, forcemos la aparición de $B\left(x_B,(2l)^d\right)$:

$$\frac{1}{|Q|}\int_{B\left(x_B,(2l)^d\right)} |f(x)|\,dx = \frac{\left|B\left(x_B,(2l)^d\right)\right|}{|Q|}\left(\frac{1}{\left|B\left(x_B,(2l)^d\right)\right|}\int_{B\left(x_B,(2l)^d\right)} |f(x)|\,dx\right)$$

A continuación comparemos la medida de Q con la de $B\left(x_B,(2l)^d\right)$:

$$\frac{\left|B\left(x_B,(2l)^d\right)\right|}{|Q|} = \frac{(2l)^d\,|B(x_B,1)|}{l^d} = 2^d\,|B(0,1)|$$

Concluimos que

$$\mathcal{M}(f)(x) \leq 2^d\,|B(0,1)|\,\widetilde{\mathcal{M}}(\mathrm{f})(\mathrm{x})$$

$\square$

TEOREMA 8 (Desigualdad maximal de Hardy-Littlewood). *El operador maximal $\widetilde{\mathcal{M}}$, y por lo tanto ,también $\mathcal{M}$, son de tipo débil (1,1), es decir: Si $f \in \mathbb{L}^1\left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}\right)$y $\lambda > 0$, entonces*

$$\left|\left\{\widetilde{\mathcal{M}}(\mathrm{f}) > \lambda\right\}\right| \leq \frac{3^d}{\lambda}\|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})}$$

$$|\{\mathcal{M}(\mathrm{f}) > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda}\|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lambda > 0$ cualquiera .Sea $E_\lambda = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}} / \mathcal{M}(\mathrm{f}) > \lambda\right\}$

Si $x \in E_\lambda$,$\exists \overline{B(x,R)}$y $\frac{1}{\left|\overline{B(x,R)}\right|}\int_{\overline{B(x,R)}} f(t)\,dt > \lambda$

Sea C la colección de bolas que cumplen que $\frac{1}{\left|\overline{B(x,R)}\right|}\int_{\overline{B(x,R)}} |f(t)|\,dt > \lambda$

Cada $x \in E_\lambda$ pertenece a al menos una bola $\overline{B}$,por lo tanto C es un cubrimiento de E_λ.

Si $B \in C$, $\int_{\overline{B(x,R)}} f(t)\,dt > \lambda \left|\overline{B(x,R)}\right|$. Luego,$\left|\overline{B(x,R)}\right| \leq \frac{\|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})}}{\lambda}$

Luego, las bolas de C tienen radios acotados ,y por el lema simple de Vitali,$\exists \{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesión de bolas disjuntas de C con la propiedad que $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \geqslant 3^{-d} |E_\lambda|$de lo cual deducimos que

$$|E_\lambda| \leq 3^{d,} \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \leq 3^d \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{B_k} \|f(y)\|\,dy \leq \frac{3^d}{\lambda} \int_{\cup_{k=1}^{\infty} B_k} |f(y)|\,dy$$

En consecuencia ,$|E_\lambda| \leq \frac{3^d}{\lambda} \|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})}$, que es lo que queríamos probar. $\square$

Como una aplicación de lo anterior recordaremos el teorema de diferenciación de Lebesgue, que usaremos fuertemente para demostrar algunos teoremas:

TEOREMA 9. *Sea f una función localmente integrable. Entonces*

$$lim_{B(x_0,R)\to\{x_0\}} \frac{1}{|B(x_0,R)|} \int_{B(x_0,R)} f(x)dx = f(x_0)\, para\, casi\, todo\, x_0 \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$$

A continuación recordaremos el teorema de interpolación de operadores subaditivos demostrado por el matemático polaco Josef Marcinkiewicz en 1939. Este teorema se puede consultar en [8] y es necesario para demostrar que tanto $\mathcal{M}$ como $\widetilde{\mathcal{M}}$ son de tipo fuerte (p,p) :

TEOREMA. *sean $1 < r \leq \infty$ y T un operador subaditivo definido en $L^1(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}) + L^r(\mathbb{R}^d)$,donde $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}) + \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}) = \{f + g \,/\, f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}),\, \mathrm{g} \in \mathbb{L}^{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})\}$*
Si T es de tipo débil $(1,\, 1)$ y $(r,\, r)$,entonces T es de tipo fuerte $(p,\, p)$

OBSERVACIÓN 10. El operador $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathrm{f})$ es de tipo fuerte (p,p) para $p > 1$.

DEMOSTRACIÓN. Comencemos por tomar $f \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$.Tomemos $x_0 \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}, R > 0$ cualquiera.

Trivialmente,

$$\frac{1}{|B(x_0,R)|} \int_{B(x_0,R)} f[y]\,dy \leq \|f\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})}$$

Luego,$\widetilde{\mathcal{M}}$ es de tipo fuerte (∞,∞) y de tipo débil $(1,1)$.Así, por el teorema de interpolación de Marcinkiewicz, $\widetilde{\mathcal{M}}$ es de tipo fuerte (p,p) si $p > 1$.

Análogamente, lo anterior es válido tambien para $\mathcal{M}$. $\square$

1.3. El Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev

A continuación recapitularemos algunos resultados básicos para determinar cuándo la integral fraccionaria es un operador acotado en los espacios de Lebesgue. El resultado principal es el siguiente:

TEOREMA 11 (Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev). *Sea $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)$,$1 < p < \frac{1}{\alpha}$. Entonces, $I_\alpha f \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^d)$, donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d}$ y existe una constante $c \equiv c(\alpha,p,q)$ independiente de f tal que*

$$\|I_\alpha f\|_{\mathbb{L}^q} \leq c\,\|f\|_{\mathbb{L}^p}$$

Para demostrar este teorema necesitaremos algunos resultados técnicos que veremos a continuación. Se conocen varias demostraciones de este teorema. Aquí reproduciremos una debida a Hedberg [13]. Dicha demostración se basa en comparar la integral fraccionaria con el operador maximal de Hardy-Littlewood, como establece el teorema siguiente. Otra demostración se da en [27] (Teorema 1, capítulo V).

TEOREMA 12 (desigualdad de Hedberg). *:Sea $0 < \alpha < d$ y sea $f$una función acotada de soporte compacto. Entonces, si $1 \leq p < \frac{d}{\alpha}$, resulta que*

$$|I_\alpha f(x)| \leq C \|f\|_{\mathbb{L}^p}^{\frac{p\alpha}{d}} (\mathcal{M}\mathrm{f})^{1-\frac{p\alpha}{d}}(x)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $s > 0$. *Entonces*,

$$|I_\alpha f(x)| \leq \int_{|x-y|<s} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-\alpha}} dy + \int_{|x-y|\geqslant s} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-\alpha}} dy$$

Notaremos como

$$I_1 = \int_{|x-y|<s} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-\alpha}} dy$$

y como

$$I_2 = \int_{|x-y|\geqslant s} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-\alpha}} dy$$

Veamos el comportamiento de I_1:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{|x-y|<s} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-\alpha}} dy = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}s\leq|x-y|\leq 2^{-k}s} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-\alpha}} dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-(k+1)}s\leq|x-y|\leq 2^{-k}s} \frac{|f(y)|}{2^{-(k+1)s(d-\alpha)}} dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|x-y|\leq 2^{-k}s} \frac{|f(y)|}{2^{-(k+1)s(d-\alpha)}} dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} \frac{1}{\left(2^{-(k+1)}s\right)^d} \int_{Q(x,2^{-k+1}s)} |f(y)|\, dy \leq Cs^\alpha \mathcal{M}\mathrm{f}\,(\mathrm{x})
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $p = 1$,para I_2,tenemos,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{|x-y|\geq s} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-\alpha}} dy \\
&\leq \frac{1}{s^{d-\alpha}} \int_{|x-y|\geqslant s} |f(y)|\, dy \\
&\leq \frac{1}{s^{d-\alpha}} \|f\|_{\mathbb{L}^1}
\end{aligned}$$

Para $1 < p < \frac{d}{\alpha}$, llamemos $\beta = p\'(d-\alpha)$-d. Observemos que $\beta > 0$ y podemos concluir que

$$I_{II} = \int_{|x-y|\geq s} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-\alpha}} dy \leq \|f\|_{\mathbb{L}^p} \left(\int_{|x-y|\geqslant s} \frac{dx}{|x-y|^{p\'(d-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{p\'}}$$

Además,

$$\int_{|x-y|\geq s} \frac{1}{|x-y|^{p'(d-\alpha)}} dy = \int_{|x-y|\geq s} \frac{1}{|x-y|^{d+\beta}} dy$$
$$= c_d \int_s^\infty \frac{\rho^{d-1} c_d}{\rho^{d+\beta}} d\rho = c_d \int_s^\infty \rho^{-1-\beta} c_d d\rho = \frac{c_d}{\beta s^\beta},$$

de lo cual deducimos

$$I_2 \leq \|f\|_{\mathbb{L}^p} \left(\frac{c_d}{\beta s^\beta}\right)^{\frac{1}{p'}} = C \|f\|_{\mathbb{L}^p} s^{-\left(\frac{d}{p}-\alpha\right)}$$

Observemos que si se toma $p = 1$, esta desigualdad también es válida. Luego para $1 \leq p < \frac{d}{\alpha}$, podemos acotar $I_\alpha f(x)$por

$$|I_\alpha f(x)| \leq C s^\alpha \mathcal{M}\mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{C} \|\mathrm{f}\|_{\mathbb{L}^\mathrm{p}} \mathrm{s}^{-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{p}}-\alpha\right)}$$

para todo $s > 0$

Ahora,si tomamos $s = \left(\frac{\|f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)}}{\mathcal{M}\mathrm{f}(\mathrm{x})}\right)^{\frac{p}{d}}$,que minimiza al segundo miembro como función de s, obtenemos que

$$|I_\alpha(f)| \leq C \left(\frac{\|f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)}}{\mathcal{M}\mathrm{f}(\mathrm{x})}\right)^{\frac{p\alpha}{d}} \mathcal{M}\mathrm{f}(\mathrm{x})$$
$$= C \left(\|f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{p\alpha}{d}} (\mathcal{M}\mathrm{f}(\mathrm{x}))^{1-\frac{p\alpha}{d}}.$$

□

Como corolario, obtenemos el resultado del teorema 11 usando la continuidad de la maximal en $\mathbb{L}^\mathrm{p}$, pues

$$\|I_\alpha f\|_{\mathbb{L}^q} \leq C \left(\|f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{p\alpha}{d}} \left(\|\mathrm{f}\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)}\right)^{1-\frac{p\alpha}{d}} = C \|f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)}$$

Un caso límite de este teorema se da en el lema siguiente, cuya demostración también aparece en el artículo de Hedberg [13].

Lema 13. *i)Sea $1 < p < \infty$ y sea $s \in (0,1)$ tal que $sp = d$. Entonces,existen $c_1, c_2 > 0$ tales que $\forall G$, abierto y acotado,*

$$\frac{1}{|G|} \int_G exp \left(\frac{|I_\alpha f|}{A_1 \|f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)}}\right)^p \leq c_2$$

1.4. El operador maximal fraccionario

En esta sección introduciremos liss operadores maximales fraccionarios, que usaremos fuertemente en la sección 3.5:

Definición 14. Definimos al operador maximal fraccionario, $\mathcal{M}_\alpha(\mathrm{f})$, donde f es una función localmente integrable, por

$$\mathcal{M}_\alpha(f)(x) = \sup_{B \subseteq \mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}} \int_B |f(y)| dy\right),$$

donde $0 < \alpha < d$ y el supremo se toma sobre todos las bolas B, cuyo centro es el punto x.

Observemos que si $\alpha = 0$,obtenemos la clásica maximal de Hardy-Littwewood y que si $\alpha = d$, obtenemos la norma de f en el espacio $\mathbb{L}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$

Observación 15. Sea $f \in \mathbb{L}^{\mathrm{p}}\left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}\right)$.Entonces. $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, $\mathcal{M}_{\frac{d}{p}}(x) \leq \|f\|_{\mathbb{L}^p}$

Demostración. Por la desigualdad de Hölder,

$$\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_B |f(y)|\,dy = \frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_B |f(y)|\,\chi_B dy$$

$$\leq \frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})}\left(\int_B \chi_B^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})}$$

□

Lema 16. $\mathcal{M}_\alpha(\mathrm{f})$*es un operador sublineal. Esto es:*

i)

$$\mathcal{M}_\alpha(f+g)(x) \leq \mathcal{M}_\alpha(\mathrm{f})(\mathrm{x}) + \mathcal{M}_\alpha(\mathrm{g})(\mathrm{x})$$

ii)

$$\mathcal{M}_\alpha(\lambda f)(x) = |\lambda|\,\mathcal{M}_\alpha(\mathrm{f})(\mathrm{x})$$

Demostración. i)Sea $x \in \mathbb{R}^d$ y sea $B = B(x,R)$ una bola de centro x. Consideremos

$$\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_B |f(y)+g(y)|\,dy \leq \frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_B |f(y)|\,dy + \frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_B |g(y)|\,dy$$

$$\leq \mathcal{M}_\alpha(f)(x) + \mathcal{M}_\alpha(g)(x)$$

Tomando supremo sobre todas las bolas B, se obtiene i). Similarmente,

$$\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_B |\lambda f(y)|\,dy = |\lambda|\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_B |f(y)|\,dy \leq |\lambda|\,\mathcal{M}_\alpha(f)(x)$$

y tomando supremo obtenemos ii). □

Observación 17. $\mathcal{M}_\alpha\left(|\mathrm{x}|^{-\alpha}\right) < \infty \forall x \in \mathbb{R}\,\forall 0 < \alpha < d$

Demostración. Estructuraremos esta demostración en 4 casos:

i)Consideremos primero el caso donde $x_B = 0$.Sea $R > 0$ arbitrario, $B = B(0,R)$

$$\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_B |x|^{-\alpha}\,dy = \frac{1}{R^{\left(1-\frac{\alpha}{d}\right)d}\,|B(0,1)|}\int_B \rho^{-\alpha}\rho^{d-1}c_d d\rho$$

$$= \frac{1}{R^{d-\alpha}\,|B(0,1)|}\int_B \rho^{-\alpha}\rho^{d-1}c_d d\rho = \frac{c_d}{(d-\alpha)\,|B(0,1)|} := K_1$$

ii)Veamos ahora $x_B \neq 0, 0 < R < \frac{\|x_B\|}{4}$,$x \in B(x_B,R)$

$$\|x_B\| \leq \|x_B - x\| + \|x\| \leq R + \|x\| \leq \frac{\|x_B\|}{4} + \|x\|$$

Entonces,$\forall x \in B(x_B,R)$, $\|x\| \geqslant \frac{3}{4}\|x_B\|$

Luego,

$$\frac{1}{|B(x_B,R)|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_{B(x_B,R)} |x|^{-\alpha}\,dy \leq \frac{1}{|B(x_B,R)|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\left(\frac{3}{4}\|x_B\|\right)^{-\alpha}|B(x_B,R)|$$

Dado que $|B(x_B,R)|^{\frac{\alpha}{d}}\left(\frac{3}{4}\|x_B\|\right)^{-\alpha}=R^{\alpha}|B(0,1)|^{\alpha}\left(\frac{3}{4}\|x_B\|\right)^{-\alpha}$, obtenemos

$$\frac{1}{|B(x_B,R)|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\left(\frac{3}{4}\|x_B\|\right)^{-\alpha}|B(x_B,R)|\leq\left(\frac{\|x_B\|}{4}\frac{4}{3}\|x_B\|^{-1}\right)^{\alpha}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha}:=K_2$$

iii)En el caso de $x_B\neq 0$, $\frac{\|x_B\|}{4}<R<4\|x_B\|$

$$\|x\|\leq\|x-x_B\|+\|x_B\|\leq R+\|x_B\|\leq 5\|x_B\|\quad\forall x\in B(x_B,R)$$

Entonces, $B(x_B,R)\subseteq B(0,5\|x_B\|)$. Así,

$$\frac{1}{|B(x_B,R)|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_{B(x_B,R)}|x|^{-\alpha}\,dy\leqq\frac{1}{|B(x_B,R)|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_{B(x_B,5\|x_B\|)}|x|^{-\alpha}\,dy$$

$$=\frac{1}{|B(x_B,5\|x_B\|)|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_{B(x_B,R)}|x|^{-\alpha}\,dy\frac{|B(x_B,5\|x_B\|)|^{1-\frac{\alpha}{d}}}{|B(x_B,R)|^{1-\frac{\alpha}{d}}}$$

$$\leq\frac{1}{|B(x_B,5\|x_B\|)|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_{B(x_B,R)}|x|^{-\alpha}\,dy\frac{|(5\|x_B\|)|^{1-\frac{\alpha}{d}}}{\left|\left(\frac{\|X_B\|}{4}\right)\right|^{1-\frac{\alpha}{d}}}$$

$$=\frac{20^{1-\frac{\alpha}{d}}}{|B(x_B,5\|x_B\|)|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_{B(x_B,R)}|x|^{-\alpha}\,dy$$

$$=\frac{20^{d-\alpha}c_d}{(d-\alpha)|B(0,1)|}:=K_3$$

iv)Consideremos ahora el caso, $x_B\neq 0, R>4\|x_B\|$

$$\|x\|\leq\|x-x_B\|+\|x_B\|\leq R+\|x_B\|\leq R+\frac{R}{4}=\frac{5}{4}R\,\forall x\in B(x_B,R)$$

Entonces,$B(x_B,R)\subseteq B\left(0,\frac{5}{4}\|x_B\|\right)$. Luego,

$$\frac{1}{|B(x_B,R)|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_{B(x_B,R)}|x|^{-\alpha}\,dy\leqq\frac{1}{|B(x_B,R)|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_{B\left(x_B,\frac{5}{4}R\right)}|x|^{-\alpha}\,dy$$

$$\leq\frac{1}{\left|B\left(0,\frac{5}{4}R\right)\right|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_{B\left(x_B,\frac{5}{4}R\right)}|x|^{-\alpha}\,dy\left(\frac{\left|B\left(x_B,\frac{5}{4}R\right)\right|}{|B(x_B,R)|}\right)^{1-\frac{\alpha}{d}}$$

$$=\left(\frac{5}{4}\right)^{1-\frac{\alpha}{d}}\frac{c_d}{(d-\alpha)|B(0,1)|}:=K_4$$

□

Se sigue que $\mathcal{M}_\alpha(|\mathrm{x}|^{-\alpha})(\mathrm{x})\leq\max\{\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_2,\mathrm{K}_3,\mathrm{K}_4\}$

Como una consecuencia inmediata de lo anterior ,$\forall c\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, $\mathcal{M}_\alpha\left(\|x-c\|^{-\alpha}\right)<\infty$

A continuación haremos algunas observaciones sobre el operador $\mathcal{M}_\alpha(\mathrm{f})$

Observación 18. Sea $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tal que $f(0)=0$ y $\frac{df}{dx}\in\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$. Entonces, $\mathcal{M}_\alpha(\mathrm{f}(|\mathrm{x}^{-\alpha}|))(\mathrm{x})<\infty$

DEMOSTRACIÓN. Usando el teorema de Lagrange para una variable, $f(x) = f(0) + \frac{df}{dx}(\lambda x)\, x$, donde $\lambda = \lambda(x) \in (0,1)$

Como $f(0) = 0, f(x) = \frac{df}{dx}(\lambda x)\, x$

Entonces,$\left| f\left(|x|^{-\alpha}\right)\right| = \left|\frac{df}{dx}\left(\lambda\, |x|^{-\alpha}\right)\right| |x|^{-\alpha} \leq \left\|\frac{df}{dx}\right\|_{\mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R})} |x|^{-\alpha}$

En consecuencia, por la observación 17, $\mathcal{M}_\alpha\left(\mathrm{f}\left(|\mathrm{x}|^{-\alpha}\right)\right)(\mathrm{x}) < \infty$ □

El comportamiento del operador maximal fraccionario en los espacios L^p está descripto por el teorema siguiente, que aparece por ejemplo en [16] (lema2.1):

TEOREMA 19. *Sea* $0 \leq \alpha \leq d$.

i) *El operador* $\mathcal{M}_\alpha$ *es de tipo débil* $(1, n/(n-\alpha))$ *esto es: se tiene la estimación:*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}} / \left|\mathcal{M}_\alpha\left(\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)\right)\right| > \lambda\right\}\right|^{1-\frac{\alpha}{d}} \leq \frac{\|f\|_{\mathbb{L}^1}}{\lambda}$$

ii) *Si*$1 < p < \frac{d}{\alpha}$ *y* q *está definido por la relación* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d}$ *entonces* $\mathcal{M}_\alpha$ *es de tipo fuerte* (p,q),

$$\|\mathcal{M}_\alpha(\mathrm{f})\|_{\mathbb{L}^\mathrm{q}} \leq \mathcal{C}_{\alpha,\mathrm{p}} \|\mathrm{f}\|_{\mathbb{L}^\mathrm{p}}$$

La demostración de i) es similar a la del teorema 8. ii) es realmente un corolario del teorema 11, pues

$$M_\alpha(f)(x) \leq C\; I_\alpha f(x)$$

Capítulo 2

Espacios BMO y Lipschitz-α

En este capítulo estudiaremos los espacios BMO o de funciones de variación media acotada y los espacios Lipschitz$-\alpha$, conocidas también como Hölder$-\alpha$ y sus propiedades fundamentales.

2.1. El espacio BMO

DEFINICIÓN 20. Sea f una función localmente integrable en $\mathcal{R}^d$. Llamaremos promedio de f en el cubo Q a $\frac{1}{|Q|}\int_Q f dx$ y lo notaremos como f_Q.

Similarmente, llamaremos promedio de f en la bola B a $\frac{1}{|B|}\int_B f dx$ y lo notaremos como f_B

Diremos que f es de oscilación media acotada o que pertenece al espacio BMO (por sus iniciales en inglés *bounded mean oscillation*) si existe $C > 0$ tal que para todo cubo Q,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|\, dx \leq C$$

, o equivalentemente, si existe $C > 0$ tal que $\forall B$ bola

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|\, dx \leq C$$

Llamaremos $\|f\|_*$ a $inf\ \left\{C > 0/\forall B\ bola \frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|\, dx \leq C\right\}$.

LEMA 21. *Sea $f \in \mathbb{L}^1_{loc}$ y supongamos que $\exists C \in \mathbb{R}$ con la propiedad que para todo cubo Q, existe c_Q tal que*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - c_Q| \leq C$$

Entonces $f \in BMO$ y $\|f\|_* \leq 2C$.

DEMOSTRACIÓN. Escribimos: $f - f_Q = f - c_Q + c_Q - f_Q$
Así $|f - f_Q|_Q \leq |f - c_Q|_Q + |c_Q - f_Q|_Q \leq C + C = 2C$.
Entonces,$f \in BMO$ y $\|f\|_* \leq 2C$ □

PROPOSICIÓN 22. *i)*$\mathbb{L}^\infty \subsetneq$ BMO
ii)BMO es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$
iii)Si f y g son funciones de BMO,$|f|$, $max\{f, 0\}$, $min\{f, 0\}$, $max\{f, g\}$ y $min\{f, g\}$ son funciones de BMO.
iv)Si definimos como equivalentes a 2 funciones que difieren en una constante, $BMO/_\sim$ es un espacio de Banach.

Demostración. i) Sean $f \in L^{\infty}$y Q un cubo cualquiera, entonces

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-f_Q| \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f| + \frac{1}{|Q|}\int_Q |f_Q| \leq \|f\|_{\mathbb{L}^\infty} + \|f\|_{\mathbb{L}^\infty} = 2\,\|f\|_{\mathbb{L}^\infty}\,.$$

Por consiguiente, $\underset{Q\subset\mathbb{R}^d}{sup}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-f_Q|\right) \leq 2\,\|f\|_{\mathbb{L}^\infty}\,.$

Esto muestra que $L^\infty \subseteq$ BMO. Para probar que la contención es estricta, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \begin{cases} -ln\,|x| & 0<|x|<1 \\ 0 & x=0 \\ 0 & |x|\geq 1 \end{cases}$

Observemos que $f(x) \geqslant 0$

Como $\int -ln\,|x|\,dx = -x\,(ln\,|x|-1)+C$, y $\underset{x\to 0}{lim} x\,(ln\,|x|-1) = 0$, podemos extender la primitiva hallada como

$$F(x) = \begin{cases} -x\,(ln\,|x|-1)+C & 0<|x|\leq 1 \\ C & x=0 \end{cases}$$

Sea $Q=(a,b)$ .Entonces,

$$f_Q = \frac{-b\ (ln\,|b|-1)+a\ (ln\,|a|-1)}{b-a}$$
$$= \frac{-b\,ln\,|b|+a\,ln\,|a|}{b-a}+1$$

Hagamos

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \left|-ln\,|x| + \frac{b\,ln\,|b|-a\,ln\,|a|}{b-a}-1\right| \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b -ln\,|x| + \frac{b\,ln\,|b|-a\,ln\,|a|}{b-a}+1 =$$
$$-\frac{b\,ln\,|b|-aln\,|a|}{b-a} + \frac{b\,ln\,|b|-a\,ln\,|a|}{b-a}+1 = 1$$

Luego, $f \in BMO$

Por otro lado, tomemos $\lambda>0$ arbitrario.

$$|\{x\in\mathbb{R}/f(x)>\lambda\}| = \left|\left(-e^{-\lambda},e^{-^{\lambda}}\right)\right| = 2e^{-\lambda}>0$$

por lo cual $f \notin \mathbb{L}^\infty$

ii) Sea Q cualquiera.Tenemos que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f+g-f_Q-g_Q|$$
$$\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f-f_Q| + \frac{1}{|Q|}\int_Q |g-g_Q|$$
$$\leq \|f\|_* + \|g\|_*$$

Luego,$\|f+g\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_*$

Sea $\alpha\in\mathbb{R}$ y sea Q cualquiera. Luego

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\alpha f + (\alpha f)_Q\right|$$
$$= \frac{1}{|Q|}\int_Q |\alpha|\,|f-f_Q|$$

$$\leq |\alpha| \, \|f\|_*$$

Por lo tanto,$\|\alpha f\|_* \leq |\alpha| \, \|f\|_*$

iii)Para probar que $|f| \in BMO$, usaremos el lema 21 ,tomando $C_Q = |f|_Q$.

Luego,

$$\mathbf{||f| - C_Q| \leq |f - f_Q|}$$

Así,

$$||f| - C_Q|_Q \leq |f - f_Q|_Q \leq \|f\|_*$$

Luego,

$$\||f|\|_* \leq 2\,\|f\|_*$$

Para probar que $max\,\{f, 0\} \in BMO$, usaremos que

$$max\,\{f, 0\} = \frac{f + |f|}{2} = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\,|f|$$

y por aplicación directa de ii) y del ítem anterior,tenemos que $max\,\{f, 0\} \in BMO$,más aún ,$\|max\,\{f, 0\}\|_* \leq \frac{1}{2}\left(\|f\|_* + 2\,\|f\|_*\right) = \frac{3}{2}\,\|f\|_*$

Para probar que $min\,\{f, 0\} \in BMO$, usaremos que

$$min\,\{f, 0\} = \frac{f - |f|}{2} = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\,|f|\,,$$

y por aplicación directa de ii) y del hecho que si

$f \in BMO \Rightarrow |f| \in BMO$,tenemos que $min\,\{f, 0\} \in BMO$,más aún ,$\|min\,\{f, 0\}\|_* \leq \frac{1}{2}\left(\|f\|_* + 2\,\|f\|_*\right) = \frac{3}{2}\,\|f\|_*$

Para probar que $max\,\{f, g\} \in BMO$ consideremos que $max\,\{f, g\} = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$.

Usando que si $f, g \in BMO \Rightarrow f + g \in BMO$, $f - g \in BMO$ y que si $f - g \in BMO \Rightarrow |f - g| \in BMO$, obtenemos que $\frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \in BMO$

y, por lo tanto, $max\,\{f, g\} \in BMO$.

Para probar que $min\,\{f, g\} \in BMO$ consideremos que $min\,\{f, g\} = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$.

Usando que si $f, g \in BMO \Rightarrow f + g \in BMO$,$f - g \in BMO$ y que si $f - g \in BMO \Rightarrow |f - g| \in BMO$, obtenemos que

$$\frac{f + g}{2} - \frac{|f - g|}{2} \in BMO$$

y, por lo tanto,

$$min\,\{f, g\} \in BMO$$

iv)Ya vimos que $BMO/_\sim$ es un espacio vectorial normado, basta ver que es completo .Usaremos la demostración de [18]

Para ello tomemos una sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de Cauchy en BMO y Q un cubo.

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|f_n - (f_n)_Q - \left(f_m - (f_m)_Q\right)\right| \leq \|f_n - f_m\|_* \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

.

Luego,$\left\{f_n - (f_n)_Q\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{L}^1$ (Q) de lo que resulta que $\left\{f_n - (f_n)_Q\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite en el sentido de $\mathbb{L}^1$ (Q). Llamemos g^Q a tal límite.

A continuación tomemos $Q_1 \supseteqq Q$. De igual forma que antes, tenemos que $\left\{f_n - (f_n)_{Q_1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite en el sentido de $\mathbb{L}^1(\mathrm{Q}_1)$. Llamemos g^{Q_1}a tal límite .Obervemos que g^{Q_1}es también el límite de $\left\{f_n - (f_n)_{Q_1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Q .

Ahora,

$$(f_n)_{Q_1} - (f_n)_Q \to C(Q_1, Q)$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$,Q_k denotará el cubo centrado en el origen de lado k .Dado que cualquier $x \in \mathbb{R}^d$ pertenecerá a algún cubo Q_k, consideremos la expresión

$$f(x) = g^{Q_k} - C(Q_1, Q_k)\ \forall x \in Q_k$$

.

Para demostrar la buena definición de f tenemos que probar que si $x \in Q_k \subset Q_l$, entonces,$g^{Q_k}(x) - C(Q_1, Q_k) = g^{Q_l}(x) - C(Q_1, Q_l)$,o equivalentemente que si $1 < k < l$, tenemos que $C(Q_1, Q_l) = C(Q_1, Q_k) + C(Q_k, Q_l)$. Esta última afirmación se sigue inmediatamente de $g^{Q_k}(x) - C(Q_1, Q_k) = g^{Q_l}(x) - C(Q_1, Q_l)$

Retornemos a nuestro cubo fijo Q.Tenemos que ,para un k suficientemente grande,$Q \subsetneqq Q_k$.Luego,

$f(x) = g^{Q_k} - C(Q_1, Q_k)$ implica que

$$\int_Q \left| (f_n - f)(x) - \frac{1}{|Q|}\int_Q (f_n - f) \right| dx$$

$$= \int_Q \left| \left(f_n - g^{Q_k}(x) + C(Q_1, Q_k)\right)(x) - \frac{1}{|Q|}\int_Q f_n + \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_Q f \right| dx$$

$$= \int_Q \left| \left(f_n - \frac{1}{|Q|}\int_Q f_n - g^Q(x) + \left(g^Q(x) - g^{Q_k}(x)\right) + C(Q_1, Q_k) + \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_{\mathcal{B}} f \right) \right| dx$$

Ahora, notemos que $\left(g^Q(x) - g^{Q_k}(x)\right) + C(Q_1, Q_k) + \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_{\mathcal{B}} f = 0\ \forall x \in \mathcal{Q}$

En consecuencia, dado que $g_i \overset{\mathbb{L}^1(Q)}{\to} g^Q$, tenemos que,

$$\int_Q \left| (f_n - f)(x) - \frac{1}{|Q|}\int_Q (f_n - f) \right| dx = \int_Q \left| f_n(x) - \frac{1}{|Q|}\int_{\mathcal{B}} f_n - g^{\mathcal{Q}} \right| dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Esto concluye la demostración. □

Observación 23. Sean$f \in BMO$ y $g \in \mathbb{L}^\infty$ y sea h:$\forall x \in \mathbb{R}^d, f(x) \le h(x) \le f(x) + g(x)$.Entonces,$h \in BMO$

Demostración. Sea Q cualquiera. $f_Q \le h_Q \le f_Q + g_Q$

Luego, $f - f_Q - g_Q \le h - h_Q \le f + g - f_Q + g_Q$

Así,$-|f - f_Q - g_Q| \le h - h_Q \le |f + g - f_Q + g_Q|$

De lo cual resulta que $|h - h_Q| \le max\{|f + g - f_Q + g_Q|, |f - f_Q - g_Q|\}$

Luego,$|h - h_Q|_Q \le |f + g - f_Q + g_Q| + |f - f_Q - g_Q|$

$$\begin{aligned} &\le |f - f_Q| + |g + g_Q| + |f - f_Q| + |g_Q| \\ &= |f - f_Q| + |g - g_Q| + |f - f_Q| + 3|g_Q| \\ &\le 2|f - f_Q| + |g - g_Q| + 3|g_Q| \end{aligned}$$

Por lo tanto,$\|h\|_* \le 2\|f\|_* + \|g\|_* + 3\|g\|_{\mathbb{L}^\infty}$. □

OBSERVACIÓN 24. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$una sucesión de funciones de BMO con la propiedad que $\underset{n\in\mathbb{N}}{sup}\|f_n\|_* < \infty$.Si $f_n \overset{\rightarrow}{\rightarrow} f$ cuando $n \to \infty$,

i)$f \in BMO$

ii)$\|f\|_* \leq \underset{n\in\mathbb{N}}{sup}\|f_n\|_*$

DEMOSTRACIÓN. Comencemos por observar que $f \in \mathbb{L}^1_{loc}$

Elijamos B una bola de centro y radio arbitrarios y consideremos $\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|$

$\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B| = \frac{1}{|B|}\int_B |f - f_n + f_n - (f_n)_B + (f_n)_B - f_B|$

$\leq \frac{1}{|B|}\int_B |f - f_n| + \frac{1}{|B|}\int_B |f_n - (f_n)_B| + \frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B| + \frac{1}{|B|}\int_B |(f_n)_B - f_B|$

Esta desigualdad es válida independientemente de n

A continuación elijamos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como la convergencia es uniforme, $\exists n_0/\forall n \geq n_0,\ \underset{x\in\mathbb{R}^d}{sup}|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Así, $\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_n| + \frac{1}{|B|}\int_B |f_n - (f_n)_B| + \frac{1}{|B|}\int_B |(f_n)_B - f_B|$

$\leq \frac{1}{|B|}\int_B \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{|B|}\int_B |f_n - (f_n)_B| + \frac{1}{|B|}\int_B \frac{\varepsilon}{2}$

$= \varepsilon + \frac{1}{|B|}\int_B |f_n - (f_n)_B|$

$\leq \varepsilon + \|f_n\|_*$

$\leq \varepsilon + \underset{n\in\mathbb{N}}{sup}\|f_n\|_*$

Luego, como ε es arbitrario,haciendo $\varepsilon \to 0$,

$\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B| \leq \underset{n\in\mathbb{N}}{sup}\|f_n\|_*$

Luego, $\underset{B\subseteq\mathbb{R}^d}{sup}\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B| \leq \underset{n\in\mathbb{N}}{sup}\|f_n\|_*$

Por lo tanto, $\|f\|_* \leq \underset{n\in\mathbb{N}}{sup}\|f_n\|_*$ □

EJEMPLO 25. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definida como $f_n(x) = e^{-n(|x|+1)}$.

Claramente $\|f_n(x)\|_{\mathbb{L}^\infty} = e^{-n(|x|+1)} \leq e^{-n} \leq e^{-1}$.

Como $\mathbb{L}^\infty \subseteq$ BMO y $\|f\|_* \leq 2\|f\|_{\mathbb{L}^\infty}$ resulta que $\|f_n\|_* \leq 2e^{-1}$, de tal manera que $\underset{n\in\mathbb{N}}{sup}\|f_n\|_* \leq 2e^{-1}$

Observemos que $0 \leq e^{-n(|x|+1)} \leq e^{-n} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$,de tal modo que $f_n(x) \overset{\rightarrow}{\rightarrow} 0$, de tal modo que estamos en las hipótesis de la observación anterior .Más aún $\|0\|_* \leq \underset{n\in\mathbb{N}}{sup}\|f_n\|_*$

Otro ejemplo, tambien de una sucesión de funciones radiales es la siguiente:

EJEMPLO 26. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definida como $f_n(x) = \frac{|x|}{|x|^2+n^2}$

Probaremos que $f_n \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^\mathrm{d})$,y por lo tanto, $f_n \in BMO$. Más aún,$\|f\|_* \leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^\mathrm{d})}$

Para esto, para cada n natural fijo , consideremos una función auxiliar $g_n(u) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida como $g_n(u) = \frac{u}{u^2+n^2}$

Esta funcion alcanza el mínimo en $u = 0$ y el máximo en $u = n$.

Luego, $\|f_n\|_{\mathbb{L}^\infty} = \frac{1}{2n}$

Por lo tanto,$\|f_n\|_* \leq \frac{1}{n} \leq 1$.

Por otro lado, $\underset{x\in\mathbb{R}^\mathrm{d}}{sup}|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n} < \varepsilon$

Como $\|0\|_* < 1$,tenemos que la desigualdad se cumple, más aún , se cumple en forma estricta

.

2.2. Los espacios de Lipschitz

Diremos que f es lipschitziana de orden $\alpha, 0 < \alpha < 1$, en un intervalo I si existe C con la propiedad que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha \; \forall x, y \in I.$$

Para cada α,al conjunto de funciones lipschitzianas de ese orden las denotaremos como $\Lambda_\alpha(I)$

Notaremos a $inf\{C : |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha \; \forall x, y \in I\}$ como $\|f\|_{\Lambda_\alpha(I)}$

Lema 27. $\|f\|_{\Lambda_\alpha(I)}$*es una seminorma para el espacio* $\Lambda_\alpha(I)$

Demostración. i)$\|f\|_{\Lambda_\alpha(I)} \geqslant 0$. Claramente,dados $x, y \in I$ cualesquiera,

$$0 \leq |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

Como $|x-y|^\alpha \geqslant 0$,resulta que $C \geqslant 0$,‘por lo tanto:$\|f\|_{\Lambda_\alpha(I)} \geqslant 0$
ii)$\|\lambda f\|_{\Lambda_\alpha(I)} = |\lambda| \|f\|_{\Lambda_\alpha}$
Sea $\lambda \in \mathbb{R}$,y $f \in \Lambda_\alpha(I)$ $|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| |f(x) - f(y)| \leq |\lambda| \|f\|_{\Lambda_\alpha(I)} |x-y|^\alpha$.
Dado que

$$inf\{C : |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha \; \forall x, y \in I\} = \|f\|_{\Lambda_\alpha},$$

obtenemos que

$$inf\{C : |\lambda f(x) - \lambda f(y)| \leq C|x-y|^\alpha \; \forall x, y \in I\} = |\lambda| \|f\|_{\Lambda_\alpha},$$

iii)Si $f, g \in \Lambda_\alpha(I)$,$\|f‘ + g\|_{\Lambda_\alpha(I)} \leq \|f\|_{\Lambda_\alpha(I)} + \|g\|_{\Lambda_\alpha(I)}$

$$|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$$

$$\leq \|f\|_{\Lambda_\alpha(I)} |x-y|^\alpha + \|g\|_{\Lambda_\alpha(I)} |x-y|^\alpha$$

Por lo tanto,$\|f + g\|_{\Lambda_\alpha(I)} \leq \|f\|_{\Lambda_\alpha(I)} + \|g\|_{\Lambda_\alpha(I)}$ □

Sin embargo, no es una norma pues si $K \in \mathbb{R}$, entonces $\|K\|_{\Lambda_\alpha(I)} = 0$. Pero si decimos que $f \backsim g$ si *c.t.p* $x \in I$, $(f-g)(x) = c \in \mathbb{R}, \Lambda_\alpha(I) / \backsim$ es un espacio normado.

El siguiente teorema proporciona una caracterización de los espacios de Lipschitz mediante una condición similar a la que define el espacio BMO.

Teorema 28. *(Campanato y Myers)*[29] *Supongamos que* $f \in L(I)$*y que* $0 < \alpha < 1$*Las siguientes afirmaciones son equivalentes en el sentido que las constantes que aparecen también son equivalentes:*
i)$\exists C_1 \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq C_1 |x-y|^\alpha \; \forall x, y \in I$
ii)$\frac{1}{|J|^{1+\alpha}} \int_J \left| f - \frac{1}{|J|} \int_J f \right| \leq C_2 \, \forall J \subseteqq I$
iii)$\left| f(x) - \frac{1}{|J|} \int_J f dx \right| \leq C_3 |J|^\alpha \; \forall x \in J, \forall J \subseteqq I$
iv)$\frac{1}{|J|^{1+\alpha p}} \int_J \left| f(x) - \frac{1}{|J|} \int_J f dx \right|^p \leqq C_4 \, \forall J \subseteqq I \, \forall 1 \leq p < \infty$

Demostración. i)⇒ii)

Comencemos por observar que $f \in \mathcal{C}(\mathrm{I})$,de tal manera que para cada $J \subseteqq I, . \exists x_J \in J : f(x_J) = f_J$

Luego,$\frac{1}{|J|^{1+\alpha}} \int_J |f(t) - f_J| \, dt = \frac{1}{|J|^{1+\alpha}} \int_J |f(t) - f(x_J)| \, dt$

$\leq \frac{C_1}{|J|^{1+\alpha}} \int_J |t - x_J|^{\alpha}$

$\leq \frac{C_2}{|J|^{1+\alpha}} \int_J |J|^{\alpha}$

$\leq \frac{C_2}{|J|^{1+\alpha}} |J|^{\alpha+1}$

$= C_2$

i)⇒iii) Como $f \in \mathcal{C}(\mathrm{I})$,por el teorema de valor medio para integrales ,$\nabla J \subseteqq I, \exists x_J \in J : f(x_J) = f_J$.

Luego,$|f(x) - f_J| = |f(x) - f(x_J)| \leq c_1 |x - x_j|^{\alpha} \leq c_3 |J|^{\alpha}$

i)⇒iv)Dado que $f \in \mathcal{C}(\mathrm{I})$,sacamos que para cada $J \subseteqq I$, $\exists x_J \in J : f(x_j) = f_J$. Así,

$$\left(\frac{1}{|J|^{1+\alpha p}} \int_J |f(t) - f_J|^p \, dt \right) = \frac{1}{|J|^{1+\alpha p}} \int_J |f((t) - f(x_J))|^p \, dt$$

$$\leq \left(\frac{c_1^p}{|J|^{1+\alpha p}} \int_J |t - x_J|^{p\alpha} \, dt \right)$$

$$\leq \left(\frac{c_4}{|J|^{1+\alpha p}} |J|^{p\alpha+1} \right)$$

$$= c_4$$

Ahora intentemos demostrar iii)⇒ii):

$\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{J}|^{\mathbf{1+\alpha}}} \int_{\mathbf{J}} |\mathrm{f}(\mathrm{t}) - \mathrm{f_J}| \, \mathrm{dt} \leq \frac{c_3}{|J|^{1+\alpha}} \int_J |J|^{\alpha} \, dt = c_3$

Para demostrar que iv)⇒ii), basta tomar $p = 1$

Ahora veamos ii)⇒i)

La equivalencia se debe entender en el sentido de que cada f que satisface ii) puede ser modificada en un conjunto de medida 0, de tal modo que coincida con una función continua que verifica i).

Con esto en mente procedamos con la demostración.

Tomemos $x < y,$ambos pertenecientes a I y sea $J = [x, y]$ Luego,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_J| + |f_J - f(y)| = |f(x) - f_J| + |f(y) - f_J|$$

Sean $A = |f(x) - f_J|$,$B = |f(y) - f_J|$ Luego,$|f(x) - f_J| + |f_J - f(y)| = A + B$

Sea $\{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subintervalos que tiendan a x de esta forma:

$J_1 = J$

$J_2 = \left[x, \frac{x+y}{2}\right]$

$J_3 = \left[x, \frac{3x+y}{4}\right]$

Y en general, $J_k = \left[x, \frac{\left(2^{k-1}-1\right)x+y}{2^{k-1}}\right]$

Observemos que $|J_{k+1}| = \frac{1}{2} |J_k|$

Empecemos por acotar $A,$dado que la forma de acotar B es análoga.

$$A \leq |f(x) - f_{J_k}| + \sum_{n=1}^{k-1} \left| f_{J_{n+1}} - f_{J_n} \right|$$

Sean $A_1 = |f(x) - f_{J_k}|$ y $A_2 = \sum_{n=1}^{k-1} \left| f_{J_{n+1}} - f_{J_n} \right|$
Ahora bien:

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{|J_{n+1}|} \int_{J_{n+1}} |f(t) - f_{J_n}|\, dt \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{|J_n|} \int_{J_n} |f(t) - f_{J_n}|\, dt \\ &\leq 2c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|J|^\alpha}{2^{(n-1)\alpha}} = 2c_2 \frac{|J|^\alpha}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha} \end{aligned}$$

De esto resulta que

$$A \leq |f(x) - f_{J_k}| + 2c_2 \frac{|J|^\alpha}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha}$$

Por el teorema de diferenciación de Lebesgue tenemos que para casi todo x,

$$\lim_{k\to\infty} (f(x) - f_{J_k}) = 0,$$

de tal modo que

$$\exists k_0 : \forall k \geqslant k_0, |f(x) - f_{J_k}| \leq |J|^\alpha$$

$$A \leq |f(x) - f_{J_k}| + 2c_2 \frac{|J|^\alpha}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha} \leq \left(1 + \frac{2c_2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha}\right) |J|^\alpha = \left(1 + \frac{2c_2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha}\right) |x - y|^\alpha$$

Luego,redefiniendo f de forma adecuada en el conjunto de medida 0 donde no vale que $\lim_{k\to\infty} (f(x) - f_{j_k}) = 0$, terminamos la demostración.

En resumen:

$$A \leq \left| f(x) - \frac{1}{|J_K|} \int_{J_K} f dx \right| + \sum_{n=1}^{k-1} \left| \frac{1}{|J_{n+1}|} \int_{J_{n+1}} f - \frac{1}{|J_n|} \int_{J_n} f dx \right|$$

Usando la redefinición del comienzo de la demostración,la demostración queda completada. □

A continuacion daremos algunos ejemplos de funciones lipschitzianas

Observación 29. Sea I compacto y sea $f \in \Lambda_\alpha(I)$.Entonces, si $0 < \beta < \alpha$, $f \in \Lambda_\beta(I)$

Demostración. $|f(x) - f(y)| \leq \|f\|_{\Lambda_\alpha(I)} |x - y|^\alpha = \|f\|_{\Lambda_\alpha(I)} |x - y|^{\alpha-\beta} |x - y|^\beta$
$\leq \|f\|_{\Lambda_\alpha(I)} (diamI)^{\alpha-\beta} |x - y|^\beta$ □

Observación 30. Sea I compacto y convexo y sea y $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ .Entonces, $\forall \alpha \in (0,1)$, $f \in \Lambda_\alpha(I)$

Demostración. Sea $x \in I$ cualquiera y sea $y \in I$.Por teorema de Lagrange, $\exists P$ de la forma $c\,(x-y)+y$,donde $c \in (0,1)$

$\exists c \in (0;1) : f\,(y) = f\,(x) + \nabla f\,(P)\,(x-y)$.essel

Luego,$f\,(y) - f\,(x) = \nabla f\,(P)\,(x-y)$

Asì, $|f\,(y) - f\,(x)| = |\nabla f\,(P)\,(x-y)|$

Como I es compacto y $f \in \mathcal{C}^1\,(\mathcal{I})$,

$$|f\,(y) - f\,(x)| \leq \sup_{u \in I} |\nabla f\,(u)|\,|x-y|$$

Ahora,

$$\sup_{u \in I} |\nabla f\,(u)|\,|x-y| = \sup_{u \in I} |\nabla f\,(u)|\,|x-y|^{1-\alpha}\,|x-y|^{\alpha}$$

$$\leq \sup_{u \in I} |\nabla f\,(u)|\,(diam I)^{1-\alpha}\,|x-y|^{\alpha}$$

□

Observación 31. si $0 < \alpha < 1$,$I \subseteq [0,+\infty)$, $x^{\alpha} \in \Lambda_{\alpha}\,(I)$

Demostración. Sean $0 \leq x < y$. Sea $0 < \alpha < 1$ .Queremos probar que $\exists C \equiv C\,(\alpha) : 0 < y^{\alpha} - x^{\alpha} \leq C\,(y-x)^{\alpha}$

Observemos que como $y > x$,en forma inmediata resulta que $y^{\alpha} - x^{\alpha} > 0$

La inecuación $y^{\alpha} - x^{\alpha} \leq C\,(y-x)^{\alpha}$ es equivalente a $y^{\alpha}\left(1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}\right) \leq C y^{\alpha}\left(1 - \frac{x}{y}\right)^{\alpha}$

Como $y > 0$,resulta equivalente $\left(1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}\right) \leq C\left(1 - \frac{x}{y}\right)^{\alpha}$

Llamemos $s = \frac{x}{y}$.Reescribiendo la inecuación tenemos $(1 - s^{\alpha}) \leq C\,(1-s)^{\alpha}$

Notemos que usando el hecho que $0 \leq x < y$,obtenemos que $0 \leq s < 1$

Como consecuencia inmediata sacamos que $0 < 1-s \leq 1$,así que para demostrar la desigualdad basta

ver que $\frac{1-s^{\alpha}}{(1-s)^{\alpha}}$ está acotado si $s \in [0,1)$.Para ver este resultado introducimos la función $F_{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera:

$$F_{\alpha}\,(s) = \begin{cases} \frac{1-s^{\alpha}}{(1-s)^{\alpha}} & 0 \leq s < 1 \\ 0 & s = 1 \end{cases}$$

Afirmo que $F_{\alpha} \in \mathcal{C}\,([0,1])$. Si$0 < s < 1$,$F_{\alpha}\,(s)$ es continua por ser cociente de continuas con denominador no nulo.

Ahora consideremos $\lim_{s \to 1^-} \frac{1-s^{\alpha}}{(1-s)^{\alpha}}$.Dado que en un entorno a izquierda de1, F_{α} es derivable, puedo usar la regla de L´ Hospital $\lim_{s \to 1^-} \frac{1-s^{\alpha}}{(1-s)^{\alpha}} = \lim_{s \to 1^-} \frac{-\alpha s^{\alpha-1}}{-\alpha(1-s)^{\alpha-1}} = \lim_{s \to 1^-} \frac{s^{\alpha-1}}{(1-s)^{\alpha-1}} = \lim_{s \to 1^-} \frac{(1-s)^{1-\alpha}}{-s^{1-\alpha}} = \frac{0}{1} = 0$

Así obtenemos que$F_{\alpha} \in \mathcal{C}\,([0,1])$ y al ser continua en un conjunto compacto, F_{α} alcanza su máximo y su mínimo,

de tal forma que $\frac{1-s^{\alpha}}{(1-s)^{\alpha}}$ es acotada en $[0,1)$.Por lo tanto $\exists C \equiv C\,(\alpha) : 0 < y^{\alpha} - x^{\alpha} \leq C\,(y-x)^{\alpha}$ □

Corolario. *Si* $0 < \alpha < 1$,$|x|^{\alpha} \in \Lambda_{\alpha}\,(\mathbb{R})$

Demostración. Supongamos que $0 \leq |x| < |y|$.Aplicando el resultado anterior,$0 < |y|^{\alpha} - |x|^{\alpha} \leq C\,(|y| - |x|)^{\alpha}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}, ||a| - |b|| < |a - b|$ y que en este caso $,||y|^{\alpha} - |x|^{\alpha}| = |y|^{\alpha} - |x|^{\alpha}$,obtenemos que $(|y| - |x|)^{\alpha} \leq |y - x|^{\alpha}$, de tal modo que concluimos :

$$0 < |y|^{\alpha} - |x|^{\alpha} \leq C\,|y - x|^{\alpha}$$

$\square$

OBSERVACIÓN 32. Sea f derivable con derivada acotada. Sea $0 < \alpha < 1$ y sea $I \subsetneqq [0, +\infty)$Entonces $f(x^{\alpha}) \in \Lambda_{\alpha}(I)$

DEMOSTRACIÓN. Sean $0 < x < y$. Por teorema de valor medio,
$\exists P$: sobre el segmento que une x con y $/ f(y^{\alpha}) = f(x^{\alpha}) + (y^{\alpha} - x^{\alpha})\frac{df}{dx}(P)$
Luego,$|f(y^{\alpha}) . - f(x^{\alpha})| \leq \left\|\frac{df}{dx}\right\|_{\mathbb{L}^{\infty}}(y^{\alpha} - x^{\alpha})$.Por 3.5,
$\left\|\frac{df}{dx}\right\|_{\mathbb{L}^{\infty}}(y^{\alpha} - x^{\alpha}) \leq \left\|\frac{df}{dx}\right\|_{\mathbb{L}^{\infty}} C(\alpha)(y - x)^{\alpha}$, donde $C(\alpha) = \underset{0 \leq s \leq 1}{max} F_{\alpha}(s)$ $\square$

OBSERVACIÓN 33. Sea $a > 0$. $ln(x) \in \Lambda_{\alpha}([a, +\infty))$

DEMOSTRACIÓN. Comencemos por recordar que $,\forall x > 0, \forall \beta \in \mathbb{R}, ln(x) = \beta ln\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right)$ y que por teorema de Lagrange, $\forall s, t > 0, \exists \theta \in (0,1) : ln(t) = ln(s) + \frac{1}{\theta(t-s)+s}(t - s)$.Esto,en particular es cierto si tomamos $a < s < t$.

Luego,

$$ln(t) - ln(s) \leq \frac{1}{a}(t - s)$$

A continuación,tomemos $t = y^{\frac{1}{\beta}}, s = x^{\frac{1}{\beta}}$,de lo cual resulta que

$$ln\left(y^{\frac{1}{\beta}}\right) - ln\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right) \leq y^{\frac{1}{\beta}} - x^{\frac{1}{\beta}}$$

Seguidamente,sea $\alpha = \frac{1}{\beta}$,por lo cual

$$ln(y^{\alpha}) - ln(x^{\alpha}) \leq \frac{1}{a}(y^{\alpha} - x^{\alpha})$$

En base al corolario 2.2 ,

$$ln(y^{\alpha}) - ln(x^{\alpha}) \leq \frac{1}{a}(y^{\alpha} - x^{\alpha}) \leq \frac{C(\alpha)}{a}(y - x)^{\alpha}$$

Por lo tanto $,\alpha ln(y) - \alpha ln(x) \leq \frac{C(\alpha)}{a}(y - x)^{\alpha}$y,consecuentemente,$ln(y) - ln(x) \leq \frac{C(\alpha)}{a\alpha}(y - x)^{\alpha}$. Dado que $y > x$.,$0 < ln(y) - ln(x) \leq \frac{C(\alpha)}{\alpha}(y - x)^{\alpha}$,por lo que

$$ln(x) \in \Lambda_{\alpha}([a, +\infty))$$

$\square$

La relacion entre los potenciales de Riesz y los espacios de Lipschitz esta dado por el siguiente lema, cuya demostración puede consultarse en [15]

LEMA 34. *Sea* $1 < p < \infty$. *Si* $f \in \mathbb{L}^{\mathrm{p}}\left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}\right)$ *,y*

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} (1 + |y|)^{\alpha - d} |f(y)| < \infty$$

LEMA 35. *Sea* $1 < p < \infty$ *y sea* $s \in (0,1)$ *tal que* $sp > d$,$\alpha = s - \frac{p}{d} < 1$. *Si* $f \in \mathbb{L}^{\mathrm{p}}\left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}\right)$ *y*

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} (1 + |y|)^{\alpha - d} |f(y)| < \infty$$

entonces

$$|I_s f(y) - I_s f(x)| \leq M |x - y|^{s - \frac{d}{p}} \|f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})}$$

2.3. El potencial y el nucleo de Bessel

En términos estrictos este nucleo fue descubierto por Daniel Bernoulli hacia 1700, pero sus aplicaciones y el desarrollo de sus propiedades de deben a Bessel, de tal modo que se lo conoce bajo ese nombre.

$\widehat{G_\alpha}(\xi)$ e $\hat{I_\alpha}(\xi)$,hacia ∞,decaen como $|\xi|^{-\alpha}$, segun se detalla en [1] Pero G_α decae exponencialmente ,segun veremos en breve. Otras características notables son

1. Si $0 < \alpha < N$, $0 < G_\alpha(x) < I_\alpha(x)$

2.$G_\alpha(x) \sim I_\alpha(x)$, si $|x| \to 0$

Recordemos que el núcleo de Bessel, está definido como

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{\delta}} e^{-\frac{\delta}{4\pi}} \delta^{\frac{\alpha - n}{2}} \frac{d\delta}{\delta},$$

donde n es la dimensión del espacio y $\alpha > 0$

Llamaremos potencial de Bessel al operador definido como $G_\alpha * u$

Este núcleo tiene las siguientes propiedades:

1. $G_\alpha \geqslant 0$
2. G_α es continua fuera del origen
3. G_α es radial
4. $G_\alpha(x) \approx |x|^{-(n-\alpha)}$ si $|x| \to 0$
5. $G_\alpha(x) \leq C_1 e^{-C_2|x|}$ si $|x| \to +\infty$
6. $|G_\alpha(x) - G_\alpha(y)| \leq C|x - y| \left(min\{|x|, |y|\}^{-(n-\alpha+1)}\right)$
7. $|G_\alpha(x) - G_\alpha(y)| \leq C|x - y| e^{-c(min\{|x|,|y|\})}$ si $|x|, |y| \geqslant 2$
8. $\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{K}}} G_\alpha = 1$

DEMOSTRACIÓN. Los items 1, 2 y 3 son inmediatos.

Para demostrar el ítem 4, necesitamos un resultado previo : que $\forall \alpha > 0$, $\frac{|x|^{-n-\alpha}}{\gamma(\alpha)} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi|x|^2}{\delta}} \delta^{\frac{-n-\alpha}{2}} \frac{d\delta}{\delta}$, donde $\gamma(\alpha) = \frac{2^\alpha \pi^{\frac{n+\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)}$

Para esto, usaremos el clásico cambio de variable $\frac{\pi|x|^2}{\delta} = t$

Entonces,

$$\frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi|x|^2}{\delta}} \delta^{\frac{-n-\alpha}{2}} \frac{d\delta}{\delta} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{1}{\left(\frac{\pi|x|^2}{u}\right)^{\frac{n+\alpha}{2}}} \frac{\frac{-\pi|x|^2}{u^2}}{\frac{\pi|x|^2}{u}} du$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{n+\alpha}{2} - 1} du = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\pi^{\frac{n+\alpha}{2}}} |x|^{-n-\alpha} \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)$$

Para demostrar el ítem 4, observemos que , usando el teorema de Lagrange aplicado a la función $f(s) = e^s$ con $a = \frac{-\delta}{4\pi}$ y $b = 0$, obtenemos $1 - e^{\frac{-\delta}{4\pi}} = e^c \frac{\delta}{4\pi}$.donde $c \in \left(\frac{-\delta}{4\pi}, 0\right)$

Luego, $e^{\frac{-\delta}{4\pi}} \frac{\delta}{4\pi} \leq 1 - e^{\frac{-\delta}{4\pi}} \leq \frac{\delta}{4\pi}$

Así que

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{4\delta}} e^{-\frac{\delta}{4\pi}} \delta^{\frac{\alpha-n}{2}} \frac{d\delta}{\delta}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{4\delta}} \left(e^{-\frac{\delta}{4\pi}} - 1\right) \delta^{\frac{\alpha-n}{2}} \frac{d\delta}{\delta} + \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{4\delta}} \delta^{\frac{\alpha-n}{2}} \frac{d\delta}{\delta}$$

Usando el resultado previo, en forma inmediata, obtenemos que

$$\frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{\delta}} \delta^{\frac{\alpha-n}{2}} \frac{d\delta}{\delta} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\mathit{\Gamma}(\alpha)} \frac{1}{\pi^{\frac{n+\alpha}{2}}} |x|^{-n-\alpha} \mathit{\Gamma}\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)$$

Veamos ahora el comportamiento de la otra integral:

$$\left|\frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{\delta}} \left(e^{-\frac{\delta}{4\pi}} - 1\right) \delta^{\frac{\alpha-n}{2}} \frac{d\delta}{\delta}\right|$$

$$\leq \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{\delta}} \left|e^{-\frac{\delta}{4\pi}} - 1\right| \delta^{\frac{\alpha-n}{2}} \frac{d\delta}{\delta}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{\delta}} \left(1 - e^{-\frac{\delta}{4\pi}}\right) \delta^{\frac{\alpha-n}{2}} \frac{d\delta}{\delta}$$

$$\leq \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{\delta}} \frac{\delta}{4\pi} \delta^{\frac{\alpha-n}{2}} \frac{d\delta}{\delta}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}+1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{\delta}} \delta^{\frac{\alpha-n}{2}} d\delta$$

$$= \frac{(4\pi)^{\frac{\alpha+1}{2}} \mathit{\Gamma}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}+1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha+1}{2}} \mathit{\Gamma}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{\delta}} \delta^{\frac{\alpha-n}{2}} d\delta$$

$$= \frac{\sqrt{4\pi}\alpha}{2} \frac{|x|^{-n-\alpha+1}}{\gamma(\alpha+1)} = \sqrt{\pi} \frac{|x|^{-n-\alpha+1}}{\gamma(\alpha+1)}$$

Luego,

$$\frac{|x|^{-n-\alpha}}{\gamma(\alpha)} - \sqrt{\pi} \frac{|x|^{-n-\alpha-1}}{\gamma(\alpha+1)} \leq G_\alpha(x) \leq \frac{|x|^{-n-\alpha}}{\gamma(\alpha)} + \sqrt{\pi} \frac{|x|^{-n-\alpha-1}}{\gamma(\alpha+1)}$$

Esto demuestra el ítem 4

Veamos el ítem 5.

Probaremos que $\forall x / |x| \geq 1 \; \exists c_1, c_2 > 0$ tales que $0 < G_\alpha(x) \leq c_1 e^{-c_2|x|}$

para cada $x / |x| \geq 1$ definimos la función auxiliar $F_{|x|} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ como

$$F_{|x|}(\delta) = \begin{cases} e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}} e^{\frac{-\delta}{4\pi}} & \delta > 0 \\ 0 & \delta = 0 \end{cases}$$

Busquemos los extremos de $F_{|x|}$

$$\frac{dF_{|x|}}{d\delta} = e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}-\frac{\delta}{4\pi}}\left(\frac{\pi\left|x\right|^2}{\delta^2}-\frac{1}{4\pi}\right) = e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}-\frac{\delta}{4\pi}}\left(\frac{4\pi^2\left|x\right|^2-\delta^2}{4\pi\delta^2}\right)$$

$$e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}-\frac{\delta}{4\pi}}\left(\frac{4\pi^2\left|x\right|^2-\delta^2}{\delta^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \delta = \pm 2\pi\left|x\right|$$

Como $DomF_{|x|} = [0,+\infty)$ concluimos que $\delta = 2\pi\left|x\right|$

$$\frac{dF_{|x|}}{d\delta}\left(\pi\left|x\right|\right) = e^{-|x|-\frac{|x|}{4}}\frac{3}{4} > 0$$

$$\frac{dF_{|x|}}{d\delta}\left(4\pi\left|x\right|\right) = e^{\frac{-|x|}{4}-|x|}\left(\frac{-12\pi^2}{16\pi^2}\right) < 0$$

Entonces, $F_{|x|}$tiene un minimo absoluto en $\delta = 0$ y un máximo en $\delta = 2\pi\left|x\right|$
Ahora, volvamos a G_α

$$0 < G_\alpha = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^{+\infty} e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}}e^{\frac{-\delta}{4\pi}}\delta^{\frac{-n+\alpha}{2}}\frac{d\delta}{\delta}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\left(\int_0^{2\pi|x|} e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}}e^{\frac{-\delta}{4\pi}}\delta^{\frac{-n+\alpha}{2}}\frac{d\delta}{\delta} + \int_{2\pi|x|}^{+\infty} e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}}e^{\frac{-\delta}{4\pi}}\delta^{\frac{-n+\alpha}{2}}\frac{d\delta}{\delta}\right)$$

$$\frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\left(I_1 + I_2\right)$$

Comencemos por acotar I_1

$$0 < \int_0^{2\pi|x|} e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}}e^{\frac{-\delta}{4\pi}}\delta^{\frac{-n+\alpha}{2}}\frac{d\delta}{\delta} \leq \int_0^{2\pi|x|} e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}}\delta^{\frac{-n+\alpha}{2}}\frac{d\delta}{\delta}$$

Hagamos el conveniente cambio de variables $\frac{\pi|x|^2}{\delta} = 2u$
$\delta = \frac{\pi|x|^2}{2u}$, $d\delta = -\frac{\pi|x|^2}{2u^2}$,$u \geq \frac{|x|}{4}$

$$\int_0^{2\pi|x|} e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}}\delta^{\frac{-n+\alpha}{2}}\frac{d\delta}{\delta} = \int_{\frac{|x|}{4}}^{+\infty} e^{-2u}\left(\frac{\pi\left|x\right|^2}{2u}\right)^{\frac{-n+\alpha}{2}}\left(\frac{\pi\left|x\right|^2}{2u^2}\right)\frac{2u}{\pi\left|x\right|^2}du$$

$$= \int_{\frac{|x|}{4}}^{+\infty} e^{-2u}\left(\frac{\pi\left|x\right|^2}{2}\right)^{\frac{-n+\alpha}{2}} u^{\frac{n-\alpha}{2}-1}du$$

$$\leq e^{\frac{-|x|}{4}}\left(\frac{\pi\left|x\right|^2}{2}\right)^{\frac{-n+\alpha}{2}}\int_{\frac{|x|}{4}}^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{n-\alpha}{2}-1}du$$

$$\leq e^{\frac{-|x|}{4}}\left(\frac{\pi\left|x\right|^2}{2}\right)^{\frac{-n+\alpha}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{n-\alpha}{2}-1}du$$

-

$$= e^{\frac{-|x|}{4}} \left(\frac{\pi |x|^2}{2} \right)^{\frac{-n+\alpha}{2}} \Gamma \left(\frac{n-\alpha}{2} \right)$$

Ahora concentremonos en I_2,para lo cual usaremos fuertemente que en $[2\pi |x|, +\infty)$, $F_{|x|}$ es decreciente

$$\int_{2\pi|x|}^{+\infty} e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}} e^{\frac{-\delta}{4\pi}} \delta^{\frac{-n+\alpha}{2}} \frac{d\delta}{\delta}$$

$$\leq e^{-|x|} \int_{2\pi|x|}^{+\infty} \delta^{\frac{-n+\alpha}{2}} \frac{d\delta}{\delta}$$

$$= e^{-|x|} \frac{2}{n-\alpha} (2\pi |x|)^{\frac{-n+\alpha}{2}}$$

□

Para demostrar 6, definimos la función $F_\alpha(\rho) : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $F_\alpha(\rho) = \frac{1}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{4\pi}} e^{\frac{-\rho^2}{4s}} s^{-\frac{n-\alpha}{2}} \frac{ds}{s}$,de modo que

$$G_\alpha(x) = F_\alpha(|x|)$$

Demostraremos que $\exists C > 0 \, \forall \rho > 0 : \left| \frac{dF_\alpha}{d\rho} \right| \leq C \rho^{-(n-\alpha+1)}$

Observemos que

$$\frac{dF_\alpha}{d\rho} = \frac{1}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-s} e^{\frac{-\rho^2}{4s}} s^{-\frac{n-\alpha}{2}} \left(\frac{-2\rho}{4s} \right) \frac{ds}{s}$$

Sea $M > 0$,que elegiremos convenientemente después

$$\left| \frac{dF_\alpha}{d\rho} \right| \leq \frac{1}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{M} e^{-s} e^{\frac{-\rho^2}{4s}} s^{-\frac{n-\alpha}{2}} \left(\frac{\rho}{4s} \right) \frac{ds}{s} + \frac{1}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_M^{+\infty} e^{-s} e^{\frac{-\rho^2}{4s}} s^{-\frac{n-\alpha}{2}} \left(\frac{2\rho}{4s} \right) \frac{ds}{s}$$

$$\leq \frac{1}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{M} e^{\frac{-\rho^2}{4s}} s^{-\frac{n-\alpha}{2}} \left(\frac{\rho}{4s} \right) \frac{ds}{s} + \frac{1}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_M^{+\infty} e^{-s} s^{-\frac{n-\alpha}{2}} \left(\frac{2\rho}{4s} \right) \frac{ds}{s}$$

En la primera integral hagamos la sustitución $\frac{\rho^2}{4s} = u$

$$\frac{1}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{M} e^{\frac{-\rho^2}{4s}} s^{-\frac{n-\alpha}{2}} \left(\frac{\rho}{4s} \right) \frac{ds}{s}$$

$$\leq \frac{1}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{\frac{\rho^2}{4M}}^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{4u}{\rho^2} \right)^{\frac{n-\alpha}{2}} \rho \left(\frac{u}{\rho^2} \right) \left(-\frac{\rho^2}{4u^2} \right) + \frac{1}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_M^{+\infty} e^{-s} s^{-\frac{n-\alpha}{2}} \left(\frac{2\rho}{4s} \right) \frac{ds}{s}$$

$$\leq \frac{1}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(\int_{\frac{\rho^2}{4M}}^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{n-\alpha}{2}-1} du \right) 4^{\frac{n-\alpha}{2}} \rho^{-(n-\alpha-1)} + \frac{1}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_M^{+\infty} e^{-s} s^{-\frac{n-\alpha}{2}} \left(\frac{2\rho}{4s} \right) \frac{ds}{s}$$

$$\leq \frac{1}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} 2^{n-\alpha} \rho^{-(n-\alpha-1)} \Gamma \left(\frac{n-\alpha}{2} \right) + \frac{1}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} e^{-M} \frac{M^{-(n-\alpha-1)} 2\rho}{\frac{n-\alpha}{2} + 1}$$

En particular, si tomamos $M > \rho$,

$$\frac{1}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}2^{n-\alpha}\rho^{-(n-\alpha-1)}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)+\frac{1}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}e^{-M}\frac{M^{-(n-\alpha-1)}2\rho}{\frac{n-\alpha}{2}+1}$$

$$\leq\frac{1}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}2^{n-\alpha}\rho^{-(n-\alpha-1)}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)+\frac{1}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}e^{-\rho}\frac{\rho^{-(n-\alpha-1)}2\rho}{\frac{n-\alpha}{2}+1}$$

$$\leq\frac{1}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}2^{n-\alpha}\rho^{-(n-\alpha-1)}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)+\frac{1}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}2e^{-1}\frac{\rho^{-(n-\alpha-1)}}{\frac{n-\alpha}{2}+1}$$

Ahora bien, si $0 < |x| \leq |y|$,

$$|G_{\alpha}(x)-G_{\alpha}(y)|=|F_{\alpha}(|x|)-F_{\alpha}(|y|)|\leq ||x|-|y||\sup_{|x|\leq\rho\leq|y|}\left|\frac{dF_{\alpha}}{d\rho}(\rho)\right|$$

$$\leq|x-y|\sup_{|x|\leq\rho\leq|y|}\left|\frac{1}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}2^{n-\alpha}\rho^{-(n-\alpha-1)}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)+\frac{1}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}2e^{-1}\frac{\rho^{-(n-\alpha-1)}}{\frac{n-\alpha}{2}+1}\right|$$

$$\leq|x-y|\,|x|^{-(n-\alpha-1)}\left|\frac{1}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}2^{n-\alpha}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)+\frac{1}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}2e^{-1}\frac{1}{\frac{n-\alpha}{2}+1}\right|$$

$$=|x-y|\,|x|^{-(n-\alpha-1)}\frac{2^{n-\alpha}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)+2e^{-1}\frac{1}{\frac{n-\alpha}{2}+1}}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

lo cual demuestra la propiedad 6.

7.Sea $F_{\alpha}(\rho) : [2,+\infty)$definida como $F_{\alpha}(\rho)=\frac{1}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^{+\infty}e^{-s}e^{\frac{-\rho^2}{4s}}s^{-\frac{n-\alpha}{2}}\frac{ds}{s}$

$\frac{dF}{d\rho}=\frac{1}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^{+\infty}e^{-s}e^{\frac{-\rho^2}{4s}}\left(\frac{-2\rho}{4s}\right)s^{-\frac{n-\alpha}{2}}\frac{ds}{s}$

$\left|\frac{dF}{d\rho}\right|\leq\frac{\pi}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n+2}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{\rho}{2}\int_0^{+\infty}e^{-s}e^{\frac{-\rho^2}{4s}}s^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\frac{ds}{s}=\pi\rho F_{\alpha}(\rho)$

Por el ítem 5 de la enumeración,$\left|\frac{dF}{d\rho}\right|\leq\pi\rho F_{\alpha}(\rho)\leq\pi\rho e^{-\frac{\rho}{2}}$

Afirmo que si $\rho\geqq 2$,$\rho<e^{\frac{4}{9}\rho}$

En efecto, la función $f : [2,+\infty)\to\mathbb{R}$definida como$f(u)=ue^{\frac{-4}{9}u}$

Esta función tiene un máximo absoluto en $\left(\frac{9}{4},\frac{9}{4}e^{-1}\right)$

Como $\frac{9}{4}e^{-1}<\frac{85}{100}$,

$$\left|\frac{dF}{d\rho}\right|\leq\pi\rho F_{\alpha}(\rho)\leq\pi\rho e^{-\frac{\rho}{2}}\leq\pi e^{\frac{4}{9}\rho}e^{\frac{-\rho}{2}}=\pi e^{\frac{-1}{18}\rho}$$

Supongamos que $2\leq|x|\leq|y|$

$$|G_{\alpha}(x)-G_{\alpha}(y)|=|F_{\alpha}(|x|)-F_{\alpha}(|y|)|\leq||x|-|y||\sup_{|x|\leq\rho\leq|y|}$$

$$\left|\frac{dF}{d\rho}\right|\leq|x-y|\sup_{|x|\leq\rho\leq|y|}\pi e^{\frac{-1}{18}\rho}\leq\pi|x-y|\,e^{\frac{-1}{18}|x|}$$

8.Este es un claro caso de aplicación del teorema de Fubbini-Tonelli, por ser una función no negativa

$$\int_{\mathbb{R}^d} G_\alpha dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} e^{-t} t^{-\frac{n-\alpha}{2}} \frac{dt}{t} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} e^{-t} t^{-\frac{n-\alpha}{2}} \frac{1}{t} dxdt$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}{2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} \int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} dxdt$$

Observemos que $e^{-\frac{|x|^2}{4t}} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}$ es el nucleo del calor cuya integral sobre $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$es $1, \forall t > 0$.

Seguimos que $\int_0^{+\infty} \frac{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}{2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} \int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} dxdt$
$= \int_0^{+\infty} \frac{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}{2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 1$

El operador $J_\alpha = G_\alpha * f$ resulta acotado de $\mathbb{L}^{\mathrm{p}}$en $\mathbb{L}^{\mathrm{p}}$ y si definimos el espacio potencial $\mathcal{L}^{\alpha,\mathrm{p}} = \mathrm{J}_\alpha\left(\mathbb{L}^{\mathrm{p}}\right)$ con la norma $\|f\|_{\alpha,p} = \left\|J_\alpha^{-1} f\right\|_p$,tenemos que $J_\alpha$es un isomorfismo entre $\mathbb{L}^{\mathrm{p}}$ y $\mathcal{L}^{\alpha,\mathrm{p}}$

2.3.1. Algunas propiedades del operador de Bessel.

Observación 36. Para $\alpha > 0$ y $1 \le p \le \infty$,$\|G_\alpha * f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}} \le \|f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}}$

Demostración. Usando la desigualdad de Young para convoluciones,$\|G_\alpha * f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}} \le \|G_\alpha\|_{\mathbb{L}^1} \|f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}}$

Como, por el punto 8 de la enumeración anterior, $\int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} G_\alpha = 1$,

$$\|G_\alpha * f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}} \le \|f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}}$$

Como corolario obtenemos la siguiente acotación para G_α □

Corolario 37. *Si $\alpha > 0$ y $G_\alpha * g(x)$ está bien definido,* $|G_\alpha * g(x)| \le C\mathcal{M}\mathrm{g}(\mathrm{x})$

Demostración. Comenzaremos por probar que si φes una función positiva, radial, decreciente ,defininida en $(0, +\infty)$y que sea integrable y una funcion $f \in \mathbb{L}^1_{\mathrm{loc}}$, $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi * f(x)| \le \|\varphi\|_{\mathbb{L}^1} Mf(x)$

Para ello empezaremos tomando φ simple ,es decir, $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m a_j \chi_{A_j}(x)$, con $\alpha_j > 0$, de modo que

$$\varphi * f(x) = \sum_{i=1}^m a_j \left(\chi_{B_j} * f\right)(x) = \sum_{i=1}^m a_j \frac{|B_j|}{|B_j|} \left(\chi_{B_j} * f\right)(x)$$
$$\le \sum_{i=1}^m a_j |B_j| Mf(x) = \|\varphi\|_{\mathbb{L}^1} Mf(x)$$

Si φ no es simple, existe una sucesión creciente de funciones simples, positivas, radiales, a la que llamaremos $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $\varphi_n \nearrow \varphi$ en casi todo punto, para las cuales es válido el resultado.

En nuestro caso, tomaremos como φ a G_α,que por el punto 3 de la enumeración es radial .Para probar que es decreciente ,usaremos la funcion definida en el ítem 6 de la enumeración. En efecto,

$$\frac{dF}{d\rho} = \frac{1}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-s} e^{\frac{-\rho^2}{4s}} \left(\frac{-2\rho}{4s}\right) s^{-\frac{n-\alpha}{2}} \frac{ds}{s}$$

$$= \frac{-2\rho}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-s} e^{\frac{-\rho^2}{4s}} s^{-\frac{n-\alpha}{2}-1} \frac{ds}{s} < 0$$

Entonces,

$$|G_\alpha * g(x)| \leq \|G_\alpha\|_{\mathbb{L}^1} Mg(x) = Mg(x)$$

. □

A continuación veremos como G_α mejora la regularidad de β a $\beta+\alpha$ para las funciones que cumplen una condición Lipschitz-α

Teorema 38. *Sea* $f(x) = G_\alpha * g(x)$ *y* $\alpha+\beta<1$ *donde* $\alpha, \beta > 0$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C [g]_\beta |x-y|^{\alpha+\beta},$$

donde

$$[g]_\beta = \sup_{x \neq y} \left(\frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|^\beta}\right)$$

Demostración. Como $\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} G_\alpha dx = 1$,tenemos que

$$f(x) - f(y) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} g(z) \left(G_\alpha(x-z) - G_\alpha(y-z)\right) dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} (g(z) - g(x)) \left(G_\alpha(x-z) - G_\alpha(y-z)\right) dz$$

Llamemos $d = |x-y|$
Luego, □

$$|f(x) - f(y)| \leq C \int_{B(x,2d)} \frac{|g(x) - g(z)|}{|x-z|^{N-\alpha}} dz + C \int_{B(x,3d)} \frac{|g(x) - g(z)|}{|x-z|^{N-\alpha}} dz$$

$$+ C \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}} - B(x,2d)} \frac{|g(x) - g(z)|}{|x-z|^{N-\alpha}} dz = I + II + III$$

Consideraremos cada integral por separado:
Por definiciónde $[g]_\beta$, y porque $\alpha, \beta > 0$,

$$I \leq C [g]_B \int_{B(x,2d)} \frac{|x-z|^\beta}{|x-z|^{N-\alpha}} dz \leq C [g]_\beta \int_0^{2d} \frac{\rho^\beta}{\rho^{N-\alpha}} c_N \rho^{N-1} d\rho$$

$$= C [g]_\beta c_N \int_0^{2d} \rho^{\beta+\alpha-1} d\rho$$

$$\frac{C [g]_\beta c_N (2d)^{\beta+\alpha}}{\beta+\alpha}$$

Para II, tenemos

$$II \leq C\left[g\right]_B \int_{B(x,3d)} \frac{1}{\left|x-z\right|^{N-\alpha}} dz$$

$$= C\left[g\right]_\beta c_N \int_0^{3d} \frac{\rho^{N-1}}{\rho^{N-\alpha}} d\rho$$

$$C\left[g\right]_\beta c_N \int_0^{3d} \rho^{\alpha-1} d\rho$$

$$\frac{C\left[g\right]_\beta c_N \left(3d\right)^\alpha}{\alpha}$$

Para acotar III, tenemos que

$$III \leq C\left[g\right]_\beta d \int_{\mathbb{R}^N - B(x,2d)} \left|x-z\right|^\beta \left|x-z\right|^{-(N+1-\alpha)} dx$$

$$= C\left[g\right]_\beta d \int_{2d}^\infty \rho^{\beta+\alpha-N-1} \rho^{N-1} c_N d\rho$$

$$C\left[g\right]_\beta d \int_{2d}^\infty \rho^{\beta+\alpha-2} c_N d\rho$$

Como $\alpha+\beta<1$, concluimos que

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right| \leq C\left[g\right]_\beta d \int_{2d}^\infty \rho^{\beta+\alpha-2} c_N d\rho$$

$$+\frac{C\left[g\right]_\beta c_N}{1-(\alpha+\beta)} d (2d)^{\alpha+\beta-1}$$

$$+\frac{C\left[g\right]_\beta c_N}{1-(\alpha+\beta)} \frac{1}{2^{1-(\alpha+\beta)}} d^{\alpha+\beta}$$

$$\leq C\left[g\right]_\beta \left|x-y\right|^{\alpha+\beta}$$

Como corolario obtenemos:

Corolario 39. *si* $\alpha,\beta>0$ *y*$\alpha+\beta<1$,$G_\alpha : C^\beta \to C^{\alpha+\beta}$

Demostración. Comenzaremos por demostrar que $G_\alpha : \mathbb{L}^\infty \to \mathbb{L}^\infty$
Elijamos $g \in \mathbb{L}^\infty$.Por el corolario 37,$\left|G_\alpha g\left(x\right)\right| \leq C\mathcal{M}g\left(x\right) \leq C\left\|\mathcal{M}g\left(x\right)\right\|_{\mathbb{L}^\infty}$
O sea que $\left\|G_\alpha g\right\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq C\left\|\mathcal{M}g\left(x\right)\right\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq C\left\|g\right\|_{\mathbb{L}^\infty}$
A continuación, el resultado es inmediato usando el teorema 38 □

2.3.2. Espacios potenciales. Ahora estamos en condiciones de introducir el espacio potencial $L^{\alpha,p}$.Este espacio coincide con elespacio de Sobolev $W\left(\alpha,p\right)$ si $\alpha\in\mathbb{Z}$,hecho demostrado por Calderón en el artículo Lebesgue spaces of functions and distributions ,de 1961,que se puede consultar en Proceedings of Symposia in Pure Mathematics.Las derivadas involucradas se deben interpretar en sentido débil
.

DEFINICIÓN 40. Definimos el espacio potencial

$$L^{\alpha,p}\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\right)=\{f\in L^{p}:\exists g\in L^{p}/f=G_{\alpha}*g\}$$

y lo equipamos con la norma $\|f\|_{\alpha,p}=\|f\|_p+\|g\|_p$.

Esta definición es correcta,dado que por [27],pagina 137,G_α es un operador inyectivo

OBSERVACIÓN 41. $\|G_\alpha g\|_{\alpha,p}\leq\|g\|_p$,de tal manera que $G_{\alpha*}g$ es continuo de $\mathbb{L}^{\text{p}}$ en $L^{p,\alpha}$..En particular ,como $\mathbb{L}^{\text{p}}\cap\mathbb{L}^\infty$ es denso en $\mathbb{L}^{\text{p}}$para $1\leq p\leq\infty$ tenemos que ,$G_\alpha\left(\mathbb{L}^{\text{p}}\cap\mathbb{L}^\infty\right)$ es denso en $L^{\alpha,p}$

DEMOSTRACIÓN. por la desigualdad de Young, $\|G_{\alpha*}g\|_{\alpha,p}\leq\|G_\alpha\|_1\|g\|_p=\|g\|_p$ □

TEOREMA 42. *$L^{\alpha,p}$ es un espacio de Banach*

DEMOSTRACIÓN. Claramente $\|f\|_{\alpha,p}\geqslant 0$, y si $\|f\|_{\alpha,p}=0\Rightarrow\|f\|_p=0$.de lo cual se deduce que $f=0$ en casi todo punto.

Consideremos $\lambda\in\mathbb{R}$ arbitrario En forma inmediata,

$$\|\lambda f\|_p=|\lambda|\,\|f\|_p+\lambda\|g\|_p$$

Sean $f_1,\ f_2\in L^{\alpha,p}$ .Evaluemos $\|f_1+f_2\|_{\alpha,p}$:

Por las propiedades de la norma

$$\|f_1+f_2\|_{,p}\leq\|f_1\|_p+\|f_2\|_p$$

y

$$\|g_1+g_2\|_p\leq\|g_1\|_p+\|g_2\|_p$$

Asi, $\|f_1+f_2\|_{,p}\leq\|f_1\|_p+\|f_2\|_p$

Ahora veamos la completitud:

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^{p.\alpha}$, es decir que $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ /\forall n,m\geq n_0,\|f_n-f_m\|_{L^{p,\alpha}}<\varepsilon$

Como $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n\in L^{p,\alpha}\Rightarrow\exists g_n\in L^p/f_n=G_\alpha*g_n=J_\alpha\left(g_n\right)$

Ahora bien, $f_n-f_m=J_\alpha\left(f_n\right)-J_\alpha\left(f_m\right)$

Como $J_\alpha$es un operador lineal, $f_n-f_m=J_\alpha\left(g_n-g_m\right)$, así que $\|f_n-f_m\|_{L^{p,\alpha}}=\|J_\alpha\left(g_n-g_m\right)\|_{L^p}=\|g_n-g_m\|_{L^p}$,

de tal modo que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en L^p.Como L^p es un espacio de Banach, $\exists g\in L^p/g_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}g$ en el sentido de L^p

Luego.$J_\alpha\left(g_n\right)\underset{n\to\infty}{\rightarrow}J_\alpha\left(g\right)$por la continuidad de $J_\alpha$en L^p

Llamemos $f=J_\alpha\left(g\right)$,así que $f\in L^{p,\alpha}$.

Por lo tanto ,$L^{p.\alpha}$ es un espacio de Banach □

Capítulo 3

Espacios de Lebesgue con Pesos

En este capítulo se estudiarán algunas clases de pesos usuales en el análisis armónico

3.1. Los pesos A_p de Muckenhoupt

En esta sección introducimos la clase de pesos A_p de Muckenhoupt.

DEFINICIÓN 43. Se dice que una función medible no negativa es un peso en la clase $A_p$donde $1 < p < \infty$ si $\forall Q \, cubo, Q \subseteq \mathbb{R}^d$ $\exists C$ independiente de Q tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} dx\right)^{p-1} \leq C \tag{3.1.1}$$

Se dice que una función medible no negativa es un peso en la clase A_1 si existe C independiente de Q tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w dx \leq C \, w(x) \, c.t.p.x \in Q \tag{3.1.2}$$

A mejor constante en (3.1.1) la llamaremos condición A_p de f y a la mejor constante en (3.1.2) la llamaremos condiciónA_1 de f.

Esta clase de pesos es de fundamental importancia, pues Muckenhoupt demostró en[7], que la desigualdad de tipo débil con pesos

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d / \mathcal{M}\mathrm{f}\,(\mathrm{x}) > \lambda\right\}\right) \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |f\,(x)|^p \, w\,(x)\, dx$$

se satisface si y sólo si $w \in A_p$.

Un peso ω se dice que pertenece a la clase A_∞ si $\omega \in \cup_{p>1} A_p$. Esta definición es equivalente a la de Pattakos y Volberg [19], que establece que un peso ω pertenece a la clase A_∞ si $\sup\limits_{\mathcal{B}\subseteq\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}\left(\frac{\frac{1}{|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}}\varpi}{e^{\frac{1}{|\mathcal{V}|}\int_{\mathcal{B}}\ln\omega}}\right) < \infty$ y es también equivalente a que existan C y $\delta > 0 : \|\omega\|_{\mathbb{L}^1(Q)} \geq C\left(\frac{|Q|}{|E|}\right)^\delta \|\omega\|_{\mathbb{L}^1(E)}$. Esta última definición pertenece a Turesson [30].

TEOREMA 44. [8].*Supongamos que* $\omega \in A_p, 1 < p < \infty$.*Entonces,el operador maximal de Hardy Littlewood* $\mathcal{M}$ *es acotado en* $\mathbb{L}^p_\omega\left(\mathbb{R}^d\right)$ *,esto es, existe* $C \in \mathbb{R}_{>0}$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{M}f)^p \, \omega dx \leq C\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \, \omega dx \;\; \forall f \in \mathbb{L}^p_\omega\left(\mathbb{R}^d\right).$$

donde la constante C *depende únicamente de* d, p *y la constante* A_p *de* ω *,*

Si $\omega \in A_1$,

$$\omega\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d / \mathcal{M}f\,(x) > \lambda\right\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d} |f| \, \omega dx \;\; \forall f \in \mathbb{L}^1_\omega\left(\mathbb{R}^d\right)$$

y $\forall\lambda > 0$.*En este último caso,.la constante* C *depende unicamente de* d *y la constante* A_1 *de* ω.

Recíprocamente, si

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{M}f)^p \,\omega dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \,\omega dx \;\forall f \in \mathbb{L}^p_\omega\left(\mathbb{R}^d\right), \, entonces, \omega \in A_p$$

y

$$\omega\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d / \mathcal{M}f(x) > \lambda\right\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d} |f| \,\omega dx \;\forall f \in \mathbb{L}^1_\omega\left(\mathbb{R}^d\right)$$

entonces

$$\omega \in A_1.$$

3.1.1. Algunas propiedades de los pesos A_p.

1. Si $\omega \in A_p, 1 \leq p < \infty$, y $\mathcal{B}$ es una bola arbitraria ,dado que $1 = \omega^{\frac{1}{p}}\omega^{\frac{-1}{p}}$, usando la desigualdad de Hölder, obtenemos que
$$1 \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_{\mathcal{B}} \omega\right)\left(\frac{1}{|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}} \omega^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{p-1}$$
2. Si $1 \leq p < q < \infty$, $A_p \subset A_q$, resultado que se obtiene usando la desigualdad de Hölder
3. Si $\omega \in A_p$,con $1 < p < \infty$, entonces $\omega^{\frac{-1}{p-1}} \in A_p$ y reciprocamente.
4. Si $\omega \in A_p$,$a \in \mathbb{R}^d$, $\delta > 0$, entonces $\omega(x+a)$,$\omega(\delta x) \in A_p$
5. Si $\omega_0, \omega_1 \in A_1$,$\omega_0\omega_1^{1-p} \in \mathrm{A_p}$

COROLARIO 45. *Si* $0 < \beta < d, \|x\|^{-\beta(1-p)} \in A_p$

DEMOSTRACIÓN. Vimos, en el ejemplo 3. de pesos A_p que $\|x\|^{-\beta} \in A_1$. Aplicando el ejemplo 1. de pesos A_p , vimos que la función que vale constantemente 1, tambien está en A_1. Usando el resultado 6 de la enumeración anterior obtenemos que 1. $\|x\|^{-\beta(1-p)} \in A_p$ □

A continuación mostraremos un resultado que vincula los pesos $A_p$con las funciones de BMO.

LEMA 46. *Sea* $\varphi(x) = ln\omega(x)$*Entonces* $\omega \in \mathcal{A}_p$*si y sólo si*

$$\sup_I \int_I e^{\varphi - \varphi_t} dx < \infty$$

y

$$\sup_I \int_I e^{-\frac{(\varphi-\varphi_t)}{p-1}} dx < \infty$$

Esto implica que si $\omega \in A_p$,*entonces* $\varphi \in BMO$. *Recíprocamente, si* $\varphi \in BMO$,*entonces* $\omega^\delta \in A_p$,*para algún* $\delta > 0$.*(Ver*[10]*)*

3.1.2. Ejemplo de pesos A_p.

1. Si $\omega \in \mathbb{L}^\infty\left(\mathrm{\mathbb{R}^d}\right)$y $ess\,inf\,\omega > 0$, entonces,$\omega \in A_p \;\forall p \geq 1$. En efecto,
$$\left(\frac{1}{|B|}\int_{\mathcal{B}} \omega\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_{\mathcal{B}} \omega^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq \|\omega\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d)}\left(\underset{x\in\mathbb{R}^d}{ess\,inf}\,\omega(x)\right)^{-1}$$

2. Sea $\varphi \in \mathbb{L}^{\infty}\left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}\right)$.Entonces, $e^{\delta\varphi} \in A_p$ para algún $\delta > 0$. En efecto,

$$\left|\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\varphi dx\right| \leq \frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}|\varphi|\,dx \leq \|\varphi\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})}$$

Como

$$\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}|\varphi-\varphi_B|\,dx \leq \frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}|\varphi|\,dx + |\varphi_B|$$
$$\leq 2\,\|\varphi\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})},$$

tenemos que $\varphi \in BMO$ y,por lo tanto,$e^{\delta\varphi} \in A_p$ para algún $0 < \delta < 1$, por el lema precedente.

3. Si $0 < \beta < d, \|x\|^{-\beta} \in A_1$

Demostración. Consideremos $x_B \in \mathbb{R}^d$ cualquiera, $R > 0$ y $B(x_B,R)$.
Dividiremos la demostración en 3 casos:
i) Si $x_B = 0$, tenemos que $\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{-\beta}\,dx = \frac{1}{R^d}\int_0^R \rho^{-\beta}\rho^{d-1}d\rho = \frac{c_d}{R^d|B(0,1)|}R^{d-\beta}$, dado que $d-\beta > 0$.
Por otro lado,

$$\underset{x\in B(x_B,R)}{ess\,sup}\,\|x\|^{\beta} = R^{\beta}$$

Así,

$$\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{-\beta}\,dx\left(\underset{x\in B(x_B,R)}{ess\,sup}\,\|x\|^{\beta}\right)$$

$$= \frac{c_d}{|B(0,1)|}\frac{1}{d-\beta}R^{-\beta}R^{\beta} = \frac{c_d}{|B(0,1)|} := K_1$$

ii) Si $x_B \neq 0$ y $R < \frac{\|x_B\|}{2}$, observemos que

$$\|x_B\| \leq \|x_B - x\| + \|x\| \leq R + \|x\| < \frac{1}{2}\|x_B\| + \|x\|,$$

de lo cual sacamos que $\forall x \in B(x_B,R)$, $\frac{1}{2}\|x_B\| \leq \|x\|$, por lo cual podemos concluir que

$$\frac{\|x_B\|}{2} \leq \|\mathbf{x}\|$$

Así ,

$$\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{-\beta}\,dx \leq \left(\frac{\|x_B\|}{2}\right)^{-\beta}$$

Por otro lado,

$$\underset{x\in B(x_B,R)}{ess\,sup}\,\|x\|^{\beta} \leq (\|x_B\| + R)^{\beta} \leq \left(\frac{3}{2}\|x_B\|\right)^{\beta}$$

Luego,

$$\left(\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{-\beta}\,dx\right)\underset{x\in B(x_B,R)}{ess\,sup}\,\|x\|^{\beta} \leq 3^{\beta} := K_2$$

iii) Si $x_B \neq 0$ y $R \geqslant \frac{\|x_B\|}{2}$,

$$\frac{1}{|B(x_B, R)|} \int_{B(x_B,R)} \|x\|^{-\beta} \, dx$$

$$\leq \frac{1}{|B(x_B, R)|} \int_{B(0,R+\|x_B\|)} \|x\|^{-\beta} \, dx = \frac{1}{R^d \, |B(0,1)|} \int_0^{R+\|x_B\|} \rho^{-\beta} \rho^{d-1} c_d d\rho$$

$$= \frac{c_d}{R^d \, |B(0,1)|} \frac{\rho^{d-\beta}}{d-\beta} \Big|_{\rho=0}^{\rho=R+\|x_B\|} = \frac{c_d}{R^d \, |B(0,1)|} \frac{(R + \|x_B\|)^{d-\beta}}{d-\beta}$$

Dado que $\underset{x \in B(x_B,R)}{ess\,sup} \|x\|^\beta \leq (\|x_B\| + R)^\beta$, sacamos que

$$\left(\frac{1}{|B(x_B, R)|} \int_{B(x_B,R)} \|x\|^{-\beta} \, dx \right) \left(\underset{x \in B(x_B,R)}{ess\,sup} \|x\|^\beta \right)$$

$$\leq \frac{c_d}{R^d \, |B(0,1)|} \frac{(R + \|x_B\|)^{d-\beta}}{d-\beta} (\|x_B\| + R)^\beta$$

por lo que,

$$\left(\frac{1}{|B(x_B, R)|} \int_{B(x_B,R)} \|x\|^{-\beta} \, dx \right) \left(\underset{x \in B(x_B,R)}{ess\,sup} \|x\|^\beta \right)$$

$$\leq \frac{c_d}{R^d \, |B(0,1)|} \frac{(R + \|x_B\|)^d}{d-\beta} = \frac{c_d}{|B(0,1)|} \frac{\left(1 + \frac{\|x_B\|}{R}\right)^d}{d-\beta}$$

$$\leq \frac{c_d}{|B(0,1)|} \frac{3^d}{d-\beta} := K_3$$

Entonces,

$$\left(\frac{1}{|B(x_B, R)|} \int_{B(x_B,R)} \|x\|^{-\beta} \, dx \right) \left(\underset{x \in B(x_B,R)}{ess\,sup} \|x\|^\beta \right) \leq max \{K_1, K_2, K_3\}$$

□

3.2. Pesos doblantes

En esta sección desarrollaremos algunas herramientas vinculadas a pesos doblantes. Tales conocimientos los necesitaremos para desarrollar el tema central, es decir, cuándo la integral fraccionaria con pesos es acotada.

Definición 47. Diremos que un peso satisface una condición doblante si existe C : tal que

$$\omega(2B) \leq C\omega(B) \;\; \forall B \subset \mathbb{R}^d$$

Una condición suficiente para que un peso satisfaga una condición doblante es que $\omega \in \mathbb{L}^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ y que ess $\inf \omega > 0$. En efecto,

$$\frac{\omega(2B)}{\omega(B)} \leq \frac{2^d \, \|\omega\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d)}}{ess \inf \omega}.$$

Esta condición no es necesaria, por ejemplo si consideramos $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \omega(x) = x^2$, claramente $ess\ inf\, \omega = 0$ y $ess\ \sup \omega = +\infty$ y

$$\frac{\int_{x_0-2R}^{x_0+2R} \omega(x)\,dx}{\int_{x_0-R}^{x_0+R} \omega(x)\,dx} = \frac{(x_0+2R)^3 - (x_0-2R)^3}{(x_0+R)^3 - (x_0-R)^3} = \frac{4R\left(3x_0^2+4R^2\right)}{2R\left(3x_0^2+R^2\right)} \leq 2\frac{12x_0^2+4R^2}{3x_0^2+R^2} = 8.$$

Observación 48. Para $d = 1$, si existen c_1 y c_2 números reales positivos: $c_1 < c_2$ y $n \in \mathbb{N}$ con la propiedad que
$c_1\, x^{2n} \leq \omega(x) \leq c_2\, x^{2n}$, entonces ω satisface una condición doblante.

Demostración. Consideremos

$$\frac{\int_{x_0-2R}^{x_0+2R} x^{2n}dx}{\int_{x_0-R}^{x_0+R} x^{2n}dx} = \frac{(x_0+2R)^{2n+1} - (x_0-2R)^{2n+1}}{(x_0+R)^{2n+1} - (x_0-R)^{2n+1}}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{2n+1}\left(\binom{2n+1}{j}x_0^j\,(2R)^{2n+1-j} - x_0^j\,(-2R)^{2n+1-j}\right)}{\sum_{j=0}^{2n+1}\left(\binom{2n+1}{j}x_0^j R^{2n+1-j} - x_0^j\,(-R)^{2n+1-j}\right)}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{2n+1}\left(\binom{2n+`1}{j}x_0^j\,(2R)^{2n+1-j}\left(1+(-1)^{2n+1-j}\right)\right)}{\sum_{j=0}^{2n+1}\left(\binom{2n+1}{j}x_0^j R^{2n+1-j}\left(1+(-1)^{2n+1-j}\right)\right)}$$

$$\frac{\sum_{0\leq j\leq 2n+1, j\ par} 2\left(\binom{2n+1}{j}x_0^j\,(2R)^{2n+1-j}\right)}{\sum_{0\leq j\leq 2n+1, j\ par} 2\left(\binom{2n+1}{j}x_0^j R^{2n+1-j}\right)}$$

$$= \frac{\sum_{0\leq k\leq n}\left(\binom{2n+`1}{2k}x_0^{2k}\,(2R)^{2n+1-2k}\right)}{\sum_{0\leq k\leq n}\left(\binom{2n+`1}{2k}x_0^{2k} R^{2n+1-2k}\right)}$$

$$\leq \frac{\sum_{0\leq k\leq n}\left(\binom{2n+`1}{2k}x_0^{2k}\,(2R)^{2n+1-2k}\right)}{\sum_{0\leq k\leq n}\left(\binom{2n+`1}{2k}x_0^{2k} R^{2n+1-2k}\right)}$$

$$\leq \frac{2^{2n+1}\sum_{0\leq k\leq n}\left(\binom{2n+`1}{2k}x_0^{2k} R^{2n+1-2k}\right)}{\sum_{0\leq k\leq n}\binom{2n+`1}{2k}x_0^{2k} R^{2n+1-2k}}$$

$$= 2^{2n+1}$$

Ahora ,

$$\frac{\int_{x_0-2R}^{x_o+2R} \omega(x)\,dx}{\int_{x_0-R}^{x_o+R} \omega(x)\,dx} \leq \frac{\int_{x_0-2R}^{x_o+2R} c_2 x^{2n}dx}{\int_{x_0-R}^{x_o+R} c_1 x^{2n}dx} = \frac{c_2\int_{x_0-2R}^{x_o+2R} x^{2n}dx}{c_1\int_{x_0-R}^{x_o+R} x^{2n}dx} \leq \frac{c_2}{c_1}2^{2n+1}$$

□

Proposición 49. *Si* $\omega \in A_p$ *con* $1 \leq p < \infty$, ω *es doblante*

Demostración. En efecto, sean $x_0 \in \mathbb{R}^d, y\, R > 0$ .Entonces, usando la desigualdad de Hölder,

$$|\mathcal{B}(x_0,R)| \leq \left(\int_{\mathcal{B}(x_0,R)} \omega\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathcal{B}(x_0,R)} \omega^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathcal{B}(x_0,R)} \omega\right)^{\frac{1}{p}} \left(|\mathcal{B}(x_0,R)|\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\frac{1}{|\mathcal{B}(x_0,R)|}\int_{\mathcal{B}(x_0,R)} \omega^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Ahora forzaremos la aparición de $B(x_0,2R)$.
Como $\omega \in A_p$,

$$\left(\int_{\mathcal{B}(x_0,R)} \omega\right)^{\frac{1}{p}} |\mathcal{B}(x_0,R)|^{\frac{p-1}{p}} \frac{\left(\frac{1}{|B(x_0,2R)|}\int_{B(x_0,2R)} \omega\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\frac{1}{|B(x_0,2R)|}\int_{B(x_0,2R)} \omega\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{1}{|\mathcal{B}(x_0,2R)|}\int_{\mathcal{B}(x_0,R)} \omega^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq C\left(\int_{\mathcal{B}(x_0,R)} \omega\right)^{\frac{1}{p}} |\mathcal{B}(x_0,R)|^{\frac{p-1}{p}} \frac{1}{\left(\frac{1}{|B(x_0,2R)|}\int_{B(x_0,2R)} \omega\right)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\leq C^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\int_{\mathcal{B}(x_0,R)} \omega}{\int_{B(x_0,2R)} \omega}\right)^{\frac{1}{p}} |\mathcal{B}(x_0,2R)|^{\frac{p-1}{p}} |B(x_0,2R)|^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\frac{\left(\int_{\mathcal{B}(x_0,R)} \omega\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_{B(x_0,2R)} \omega\right)^{\frac{1}{p}}} |\mathcal{B}(x_0,2R)|$$

Entonces,

$$|\mathcal{B}(x_0,R)| \leq \left(\frac{\int_{\mathcal{B}(x_0,R)} \omega}{\int_{\mathcal{B}(x_0,2R)} \omega}\right)^{\frac{1}{p}} |\mathcal{B}(x_0,2R)|\, C^{\frac{1}{p}} \leq 2^d C^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\int_{\mathcal{B}(x_0,R)} \omega}{\int_{\mathcal{B}(x_0,2R)} \omega}\right)^{\frac{1}{p}} |B(x_0,R)|$$

Por lo tanto $\left(\frac{\int_{\mathcal{B}(x_0,2R)} \omega}{\int_{\mathcal{B}(x_0,.R)} \omega}\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^d C^{\frac{1}{p}}$

De esto concluimos que $\frac{\int_{\mathcal{B}(x_0,2R)} \omega}{\int_{\mathcal{B}(x_0,.R)} \omega} \leq 2^{dp} C$ □

Ejemplo 50. Un ejemplo de peso no doblante es $\omega(x) = e^x$

En efecto ,sean $x_0 \in \mathbb{R}, R > 0$.Consideremos

$$\frac{\int_{x_0-2R}^{x_0+2R} e^x dx}{\int_{x_0-R}^{x_0+R} e^x dx} = \frac{e^{x_0+2R} - e^{x_0-2R}}{e^{x_0+R} - e^{x_0-R}}$$

$$= \frac{e^{2R} - e^{-2R}}{e^{R} - e^{-R}}$$

$$= \frac{e^{2R}\left(1 - e^{-4R}\right)}{e^{R}\left(1 - e^{-2R}\right)}$$

$$= \frac{e^{R}\left(1 - e^{-4R}\right)}{1 - e^{-2R}}$$

Ahora,hagamos $R \to +\infty$.

Entonces,obtenemos $\frac{\int_{x_0-2R}^{x_0+2R} e^x dx}{\int_{x_0-R}^{x_0+R} e^x dx} = \frac{e^R\left(1-e^{-4R}\right)}{1-e^{-2E}} \underset{R\to\infty}{\to} +\infty$

3.3. La condición inversa de Hölder

Definición 51. Dado $p > 1$,diremos que $\omega \in RH(p)$ si ω satisface una desigualdad inversa de Hölder con exponente p, es decir ,si existe C tal que

$\left(\frac{\int_B \omega^p}{|B|}\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\frac{\|\omega\|_{\mathbb{L}^1(B)}}{|B|}\ \forall B \subset \mathbb{R}^d$

Ejemplo 52. Si $\omega \in \mathbb{L}^\infty\left(\mathrm{\mathbb{R}^d}\right)$y $ess\,inf\,\omega > 0$,ω satisface una condición inversa de Hölder $\forall p > 1$

$\left(\frac{\int_B \omega^p}{|B|}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\omega\|_{\mathbb{L}^\infty(B)} = \frac{\|\omega\|_{\mathbb{L}^\infty(B)}}{ess\,inf\,\omega} ess\,inf\,\omega \leq \frac{\|\omega\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathrm{\mathbb{R}^n})}}{ess\,inf\,\omega}\int_B \omega\ \forall B \subset \mathbb{R}^d$.En este caso,podemos tomar

$C = \frac{\|\omega\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathrm{\mathbb{R}^n})}}{ess\,inf\,\omega}$

Ejemplo 53. Sea $\omega : \mathbb{R}\to \mathbb{R}, \omega\left(\mathrm{x}\right) = \mathrm{x}^2$.Entonces, ω satisface una condición inversa de Hölder para $p = 2$

Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $R > 0$ cualquiera .Luego,$\left(\frac{\int_B \omega^p}{|B|}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\int_{x_0-R}^{x_0+R} x^4 dx}{2R}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(x_0+R)^5-(x_0-R)^5}{2R}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{10x_0^4R + 20x_0^2R^3 + 2R^5}{2R}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(5x_0^4 + 10x_0^2R^2 + R^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(x_0^4 + 2x_0^2R^2 + \frac{R^4}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq x_0^2 + R^2$$

Por otro lado,$\left(\frac{\int_B \omega}{|B|}\right) = \frac{\int_{x_0-R}^{x_0+R} x^2 dx}{2R} = \frac{(x_0+R)^3-(x_0-R)^3}{6R} = \left(\frac{6x_0^2R+2R^3}{6R}\right) \leq$
$\frac{3x_0^2+R^2}{3}$=$x_0^2 + \frac{R^2}{3}$

En este caso concreto podemos elegir $C = 3$

Este es un caso particular del ejemplo que veremos a continuación:

Ejemplo 54. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\omega : \mathbb{R}\to \mathbb{R}, \omega\left(\mathrm{x}\right) = \mathrm{x}^{2\mathrm{n}}$.Entonces, ω satisface una condición de Hölder inversa para $p = 2n$

Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y$R > 0$ cualquiera.Tenemos que

$$\left(\frac{\int_B \omega^{2n}}{|B|}\right)^{\frac{1}{2n}} = \left(\frac{\int_{x_0-R}^{x_0+R} x^{4n^2} dx}{2R}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

$$= \left(\frac{\left(x_0 + R\right)^{4n^2+1} - \left(x_0 - R\right)^{4n^2+1}}{2R\left(4n^2 + 1\right)}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{4n^2+1} \frac{1}{2R\left(4n^2 + 1\right)}\left(\begin{array}{c} 4n^2 + 1 \\ k \end{array}\right) x_0^k R^{4n^2+1-k}\left(1 - (-1)^{4n^2+1-k}\right)\right)^{\frac{1}{2n}}$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{2n^2} \frac{2}{2R\left(4n^2+1\right)} \begin{pmatrix} 4n^2+1 \\ 2j \end{pmatrix} x_0^{2j} R^{4n^2+1-2j} \right)^{\frac{1}{2n}}$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{2n^2} \frac{1}{4n^2+1} \begin{pmatrix} 4n^2+1 \\ 2j \end{pmatrix} x_0^{2j} R^{4n^2-2j} \right)^{\frac{1}{2n}}$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{2n^2} \frac{1}{4n^2+1} \begin{pmatrix} 4n^2+1 \\ 2j \end{pmatrix} \left(x_0^2\right)^j \left(R^2\right)^{2n^2-j} \right)^{\frac{1}{2n}}$$

$$\leq \left(\left(\max_{0 \leq j \leq 2n^2} \begin{pmatrix} 4n^2+1 \\ 2j \end{pmatrix} \frac{1}{4n^2+1} \right)^{\frac{1}{2n}} \right) \left(\sum_{j=0}^{2n^2} \left(x_0^2\right)^j \left(R^2\right)^{2n^2-j}) \right)^{\frac{1}{2n}}$$

$$= \left(\left(\max_{0 \leq j \leq 2n^2} \begin{pmatrix} 4n^2+1 \\ 2j \end{pmatrix} \frac{1}{4n^2+1} \right)^{\frac{1}{2n}} \right) \left(\left(x_0^{2`} + R^2\right)^{2n^2} \right)^{\frac{1}{2n}})$$

$$= \left(\left(\max_{0 \leq j \leq 2n^2} \begin{pmatrix} 4n^2+1 \\ 2j \end{pmatrix} \frac{1}{4n^2+1} \right)^{\frac{1}{2n}} \right) \left(x_0^{2`} + R^2\right)^n)$$

$$= C_n \left(x_0^2 + R^2\right)^n$$

Por otro lado ,

$$\left(\frac{\int_B \omega}{|B|} \right) = \left(\frac{\int_{x_0-R}^{x_0+R} x^{2n} dx}{2R} \right) = \left(\frac{\left(x_0+R\right)^{2n+1} - \left(x_0-R\right)^{2n+1}}{2R\left(2n+1\right)} \right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{2R\left(2n+1\right)} \begin{pmatrix} 2n+1 \\ k \end{pmatrix} x_0^k R^{2n+1-k} \left(1 - (-1)^{2n+1-k}\right) \right)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2R\left(2n+1\right)} \begin{pmatrix} 2n+1 \\ 2j \end{pmatrix} x_0^{2j} R^{2n+1-2j} 2 \right)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2n+1} \begin{pmatrix} 2n+1 \\ 2j \end{pmatrix} x_0^{2j} R^{2n-2j} \right)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2n+1} \begin{pmatrix} 2n+1 \\ 2j \end{pmatrix} \left(x_0^2\right)^j \left(R^2\right)^{n-j} \right)$$

$$\geqslant \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2n+1} \begin{pmatrix} 2n+1 \\ 2j \end{pmatrix} \left(x_0^2\right)^j \left(R^2\right)^{n-j} \right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2n+1}\left(\underset{0\leq j\leq n}{min}\begin{pmatrix} 2n+1 \\ 2j \end{pmatrix}\sum_{j=0}^{n}\frac{\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}}\left(x_0^2\right)^j\left(R^2\right)^{n-j}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}}\left(x_0^2\right)^j\left(R^2\right)^{n-j}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2n+1}\frac{1}{\begin{array}{c} max \\ 0\leq j\leq n \end{array}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}}\left(\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}\left(x_0^2\right)^j\left(R^2\right)^{n-j}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1}\frac{1}{\begin{array}{c} max \\ 0\leq j\leq n \end{array}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}}\left(x_0^2+R^2\right)^n$$

Luego, basta tomar $C = C_n\left(2n+1\right)\begin{array}{c} max \\ 0\leq j\leq n \end{array}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}$

Observemos que no toda función no negativa cumple con una condición de Hölder inversa.Sea por ejemplo $\omega : \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \omega\left(x\right) = e^x$.$\omega \notin RH\left(p\right)$ para ningún $p > 1$

Ejemplo 55. En efecto,consideremos

$$\frac{\left(\frac{1}{2R}\int_{x_0-R}^{x_0+R}e^{px}dx\right)^{\frac{1}{p}}}{\frac{1}{2R}\int_{x_0-R}^{x_0+R}e^{x}dx}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{R}e^{px_0}sinh\left(pR\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\frac{1}{R}sinhR}$$

$$= R^{1-\frac{1}{p}}\left(\frac{sinh\left(pR\right)}{\left(sinhR\right)^p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Ahora,consideremos $\begin{array}{c} lim \\ R\to+\infty \end{array}\frac{sinh(pR)}{(sinhR)^p} = \begin{array}{c} lim \\ R\to+\infty \end{array}\frac{e^{pR}\left(1-e^{-pR}\right)}{e^{Rp}\left(1-e^{-R}\right)^p}2^{p-1} = \begin{array}{c} lim \\ R\to+\infty \end{array}\frac{\left(1-e^{-pR}\right)}{\left(1-e^{-R}\right)^p}2^{p-1} = 2^{p-1}$

Por lo tanto, $\begin{array}{c} lim \\ R\to+\infty \end{array}\frac{R^{1-\frac{1}{p}}sinh(pR)}{(sinhR)^p} = +\infty$.

3.4. Caracterización de los pesos A_1

Usaremos los siguientes resultados,incluidos en el libro de Fava y Zo,,Medida e integral de Lebesgue,paginas 211 y 212 y en el libro de Duoandikoetxea Zuazo, páginas 109 y 110

Definición 56. Sea f localmente integrable . Llamaremos funcion de distribución de f y la denotaremos como $\lambda(t) : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ a

$\lambda(t) = |\{x \in E \,/\, |f(x)| > t\}|$

Haremos uso de los siguientes resultados;

1. $t^p \lambda(t) \leq \int_{\{|f|>t\}} |f|^p$
2. $\int_E |f|^p \, dx = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \lambda(t) \, dt$
3. Si $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ es una función derivable y creciente que verifica $\varphi(0) = 0$, y f es medible ,entonces $\int_E \varphi(f(x))\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{d\varphi}{dy}(y) \, |\{x \in E \,/\, |f(x)| > y\}|$

Lema 57. *(Lema de Kolmogorov) Si $0 \leq \delta < 1$ y E es un conjunto de medida finita , existe $C = C(\delta)$ tal que*

$$\int_E (\mathcal{M}\mathrm{f})^\delta (\mathrm{x}) \, \mathrm{dx} \leq C \, |E|^{1-\delta} \, \|f\|_1^\delta$$

Demostración. por el punto 2 de la enumeración:

$$\int_E (\mathcal{M}f)^\delta \, dx = \delta \int_0^{+\infty} t^{\delta-1} \, |\{x \in E \,/ \mathcal{M}f(x) > t\}| \, .$$

Observemos que $|\{x \in E \,/\, |f(x)| > y\}| \leq |E|$ y que, por el tipo $(1,1)$ de $\mathcal{M}\mathrm{f}$,

$$|\{x \in E \,/ \mathcal{M}\mathrm{f}(\mathrm{x}) > y\}| \leq \frac{C}{t} \, \|f\|_1$$

Por lo tanto, $\int_E (\mathcal{M}f)^\delta \, dx \leq \delta \int_0^{+\infty} t^{\delta-1} min\left\{|E|, \frac{C}{t}\|f\|_1\right\} dt.$

$= \delta \int_0^{\frac{C\|f\|_1}{|E|}} t^{\delta-1} min\left\{|E|, \frac{C}{t}\|f\|_1\right\} dt + \delta \int_{\frac{C\|f\|_1}{|E|}}^{+\infty} t^{\delta-1} min\left\{|E|, \frac{C}{t}\|f\|_1\right\} dt$

$= \delta \int_0^{\frac{C\|f\|_1}{|E|}} t^{\delta-1} |E| \, dt + C\delta \|f\|_1 \int_{\frac{C\|f\|_1}{|E|}}^{+\infty} t^{\delta-2} dt$

$= |E| \left(\frac{C\|f\|_1}{|E|}\right)^\delta - C\delta \|f\|_1 \frac{1}{\delta-1} \left(C\frac{\|f\|_1}{|E|}\right)^{\delta-1}$

$= C^\delta \|f\|_1^\delta |E|^{1-\delta} - \frac{\delta}{\delta-1} C^\delta \|f\|_1^\delta |E|^{1-\delta} = \frac{1}{1-\delta} C^\delta \|f\|_1^\delta |E|^{1-\delta}$ □

Teorema 58. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^\mathrm{d})$ tal que $\mathcal{M}\mathrm{f}(\mathrm{x}) < \infty \, \mathrm{c.t.p.x} \in \mathbb{R}^\mathrm{d}$.*

i) Si $0 \leq \delta < 1$, entonces $\omega(x) = (\mathcal{M}\mathrm{f})^\delta (x)$ es un peso A_1 de tal forma que la constante depende sólo de δ

ii)Recíprocamente, si $\omega \in A_1$ entonces existen $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^\mathrm{d})$,$0 \leq \delta < 1$ y una función K tal que K, $K^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^\mathrm{d})$ tal que $\omega(x) = K(x) (\mathcal{M}\mathrm{f})^\delta (x)$

Demostración. Fijemos $x_B \in \mathbb{R}^\mathrm{d}$ cualquiera y $R > 0$. Descompongamos $f = f_1 + f_2$ donde $f_1(x) = f(x) \chi_{B(x_B,2R)}(x)$ y $f_2 = f - f_1$

Observemos que $f_2(x) = 0$ si $|x - x_B| < 2R$ y $f_2(x) = f(x)$ si $|x - x_B| \geqslant 2R$

Por la sublinealidad del operador $\mathcal{M}\mathrm{f}$, $\mathcal{M}\mathrm{f}(\mathrm{x}) \leq \mathcal{M}\mathrm{f}_1(x) + \mathcal{M}\mathrm{f}_2(x)$

Consecuentemente, $(\mathcal{M}\mathrm{f})^\delta (x) \leq (\mathcal{M}\mathrm{f}_1 + \mathcal{M}\mathrm{f}_2(\mathrm{x}))^\delta (x) \leq (\mathcal{M}\mathrm{f}_1)^\delta (x) + (\mathcal{M}\mathrm{f}_2)^\delta (x)$

y

$\frac{1}{|B(x_B,R)|} \int_{B(x_B,R)} (\mathcal{M}\mathrm{f})^\delta (x) \leq \frac{1}{|B(x_B,R)|} \int_{B(x_B,R)} (\mathcal{M}\mathrm{f}_1)^\delta (x) + \frac{1}{|B(x_B,R)|} \int_{B(x_B,R)} (\mathcal{M}\mathrm{f}_2)^\delta (x)$

Consideremos $\frac{1}{|B(x_B,R)|} \int_{B(x_B,R)} (\mathcal{M}\mathrm{f}_1)^\delta (x) \mathrm{dx}$

Por el lema 57

$$\frac{1}{|B(x_B,R)|} \int_{B(x_B,R)} (\mathcal{M}\mathrm{f}_1)^\delta (x)$$

$$\leq C\frac{|B(x_B,R)|^{1-\delta}}{|B(x_B,R)|}\|f_1\|^{\delta}$$
$$=C\frac{1}{\left|B(x_B,R)^{\delta}\right|}\|f_1\|^{\delta}$$
$$=C\frac{1}{|B(x_B,R)|^{\delta}}\left(\int_{B(x_B,2R)}|f|\right)^{\delta}$$
$$=C\frac{|B(x_B,2R)|^{\delta}}{|B(x_B,R)|^{\delta}}\left(\frac{1}{|B(x_B,2R)|}\int_{B(x_B,2R)}|f|\right)^{\delta}$$
$$\leq C2^{d\delta}(\mathcal{M}\mathrm{f})^{\delta}(x_B)$$

A continuación consideremos $\mathcal{M}f_2$

Comencemos por notar que $f_2(x)=f(x)-f_1(x)=\begin{cases}0 & |x-x_B|<2R\\ f(x) & |x-x_B|\geqslant 2R\end{cases}$

Estimemos $\mathcal{M}f_2$. Comencemos por observar que si $y\in B\left(x_B,\tilde{R}\right)$ y $\int_{B\left(x_B,\tilde{R}\right)}|f|\,dx>0\Rightarrow\tilde{R}\geq 2R$. Tambien podemos concluir que $\exists c>0/B\left(x_B,\widetilde{R}\right)\subset B(y,cR)$,

de lo cual deducimos que

$$\frac{1}{\left|B\left(y,\tilde{R}\right)\right|}\int_{B\left(y,\tilde{R}\right)}|f_2|$$
$$\leq\frac{c^d}{|B(x_B,cR)|}\int_{B(x_B,cR)}|f_2|$$
$$\leq c^d\mathcal{M}f(x_B)$$

Luego,

$$\mathcal{M}f_2(y)\leq c^d\mathcal{M}f(x_B)\ \forall y\in B(x_B,R),$$

de lo cual seguimos que $\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}(\mathcal{M}f_2(y))^{\delta}dy\leq c^d(\mathcal{M}f(x_B))^{\delta}$

ii)Por la desigualdad inversa de Hölder, $\exists\varepsilon>0$ tal que $\forall B$ bola, $\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega^{1+\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\leq\frac{C}{|B|}\int_B\omega dx\leq C\mathcal{M}\omega$

Por la condición A_1,obtenemos

$$\left(\mathcal{M}\omega^{1+\epsilon}\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}}(x)\leq C\mathcal{M}\omega(x)\leq\tilde{C}\omega(x)\ c.t.p.x\in\mathbb{R}^d$$

Por el teorema de diferenciación de Lebesgue, para casi todo $x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$,

$$\omega(x)=\lim_{R\to 0^+}\left(\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\omega^{1+\varepsilon}(y)\,dy\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\leq\mathcal{M}(x)\leq k\omega(x),$$

donde $f=\omega^{1+\varepsilon}$, $\delta=\frac{1}{1+\varepsilon}$.

Ahora,basta definir $K(x)$ como $K(x)=\frac{\omega(x)}{(\mathcal{M}f)^{\delta}(x)}$, que verifica $\frac{1}{k}\leq K(x)\leq 1$ c.t.p.$x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ □

Ejemplos de aplicaciones de este teorema.

1. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}^d$ y $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,+\infty)$ con la propiedad que la serie $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_j < \infty$.Sea $\omega(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\chi_{A_i}(x)$. Claramente, $0 \leq \omega(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\chi_{A_i}(x) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_j < \infty$, de tal modo que $\omega(x) \in \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$. Eso fuerza a que $\mathcal{M}_{\mathrm{f}} \in \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$, por lo cual $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ es localmente integrable, de tal forma que por el teorema anterior, $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}^{\delta}$ es un peso A_1 si $0 < \delta < 1$
2. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}^d$;$A_i \cap A_j = \emptyset\,\forall i \neq j$ y $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{B}(0,\ \mathrm{R}), \mathrm{R} < \infty$. Sea $\omega(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\chi_{A_i}(x)$.Claramente, para cada x,$|\omega(x)| = |\alpha_i| \leq \underset{j\in\mathbb{N}}{sup}|\alpha_j| \leq R$,de tal modo que $\omega(x) \in \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$Eso fuerza a que $\mathcal{M}_{\mathrm{f}} \in \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$, por lo cual $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ es localmente integrable,de tal forma que por el teorema anterior ,$\mathcal{M}_{\mathrm{f}}^{\delta}$ es un peso A_1 si $0 < \delta < 1$

3.5. La clase $A_{p,q}$ de Muckenhoupt y Wheeden

Definición 59. Un función $v : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty)$ se dice que pertencece a $A_{p,q}\,(1 < p, q < \infty)$ si verifica que dada B una bola arbitraria.

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B v^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B v^{-p´}\right)^{\frac{1}{p´}} \leq K < \infty,$$

donde K es independiente de B y donde $p´ = \frac{p}{p-1}$.

Para el caso $p = 1$,esta condición se escribe como $\left(\frac{1}{|B|}\int_B v^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq K\, \underset{y\in B}{essinf}\, v(y)$ y para $p = \infty$,$\left(\frac{1}{|B|}\int_Q v^{-p´}\right)^{\frac{1}{p´}} \leq K\, \underset{y\in B}{inf}\left(\frac{1}{v(y)}\right) < \infty$

Ejemplo 60. Si $v \in \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$y $\underset{x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}{essinf}\, v(x) > 0$,$v \in A_{p,q} \forall p, q > 1$

Demostración. $\left(\frac{1}{|B|}\int_B v^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B v^{-p´}\right)^{\frac{-1}{p´}} \leq \|v\|_{\mathbb{L}^{\infty}}\left(\underset{x\in\mathbb{R}^d}{ess\,inf}\, v(x)\right)^{-1}$ □

Observación 61. Sean p yq números reales $p, q > 1$,$d \in \mathbb{N}$y $0 < r < \frac{d}{p´}$. Entonces, la función $\|x\|^r : \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \to \mathbb{R}$ pertenece a $A_{p,q}$ $\forall q > 1$

Demostración. i)Analicemos primero el caso en que $B = B(0, R)$,

$$\frac{1}{|B|}\int_B \|x\|^{-p´r} = \frac{1}{R^d\,|B(0,1)|}\int_0^R \rho^{-p´\mathrm{r}}\rho^{d-1}c_d d\rho = \frac{1}{|B(0,1)|}c_d R^{-p´\mathrm{r}}$$

A continuación consideremos el caso en que $B = B(x_B, R)$ con $x_B \neq 0$ y$R < \frac{\|x_B\|}{4}$, donde acotemos superiormente $\|x\|$

$$\|x_B\| \leq \|x_B - x\| + \|x\| \leq R + \|x\| \leq \frac{\|x_B\|}{4} + \|x\|$$

Luego,$\|x\| \geqslant \frac{3}{4}\|x_B\|$, de lo cual deducimos que

$$\frac{1}{|B|}\int_B \|x\|^{-p´r} \leq \frac{1}{R^d\,|B(0,1)|}\int_{B(x_B,R)}\left(\frac{3}{4}\|x_B\|\right)^{-p´\mathrm{r}} = \left(\frac{3}{4}\|x_B\|\right)^{-p´\mathrm{r}}$$

Ahora veremos el caso en que $B = B(x_B, R)$ con $x_B \neq 0$ y $\frac{\|x_B\|}{4} \leq R < 4\|x_B\|$, ampliando la bola de tal forma que quede centrada en 0

$$\|x\| \leq \|x - x_B\| + \|x_B\| \leq R + \|x_B\| < 5\|x_B\|$$

.

Luego, $B(x_B, R) \subset B(0, 5\|x_B\|)$. Así,

$$\frac{1}{|B|}\int_B \|x\|^{-p\acute{}r} \leq \frac{1}{R^d |B(0,1)|}\int_{B(x_B, 5\|x_B\|)} \|x\|^{-p\acute{}\mathrm{r}}$$

$$= \frac{c_d}{R^d |B(0,1)|}\int_0^{5\|x_B\|} \rho^{-p\acute{}\mathrm{r+d\text{-}1}} d\rho$$

$$= \frac{c_d}{R^d |B(0,1)|}(5\|x_B\|)^{-p\acute{}\mathrm{r+d}}\frac{1}{-p\acute{}\mathrm{r+d}}$$

$$\leq \frac{c_d}{R^d |B(0,1)|}(20R)^{-p\acute{}\mathrm{r+d}}\frac{1}{-p\acute{}\mathrm{r+d}}$$

$$= \frac{c_d}{|B(0,1)|}20^d R^{-p\acute{}\mathrm{r}}\frac{1}{-p\acute{}\mathrm{r+d}}$$

Por último, veamos el caso en que $B = B(x_B, R)$ con $x_B \neq 0$ y$R \geqslant 4\|x_B\|$, ampliando la bola de tal forma que quede centrada en 0

$$\|x\| \leq \|x - x_B\| + \|x_B\| \leq R + \|x_B\|$$

Luego, $B(x_B, R) \subset B(0, \|x_B\| + R)$. Se sigue que:

$$\frac{1}{|B|}\int_B \|x\|^{-p\acute{}r} \leq \frac{1}{R^d |B(0,1)|}\int_{B(0, \|x_B\| + R)} \|x\|^{-p\acute{}\mathrm{r}}$$

$$= \frac{1}{R^d |B(0,1)|}\int_0^{\|x_B\| + R} \rho^{-p\acute{}\mathrm{r}} \rho^{d-1} c_d$$

$$= \frac{1}{R^d |B(0,1)|} c_d \frac{(\|x_B\| + R)^{-p\acute{}\mathrm{r+d}}}{-p\acute{}\mathrm{r+d}}$$

$$\leq \frac{1}{R^d |B(0,1)|} c_d \frac{\left(\frac{R}{4} + R\right)^{-p\acute{}\mathrm{r+d}}}{-p\acute{}\mathrm{r+d}}$$

$$= \frac{1}{|B(0,1)|}\left(\frac{5}{4}\right)^{-p\acute{}\mathrm{r+d}} c_d \frac{R^{-p\acute{}\mathrm{r}}}{-p\acute{}\mathrm{r+d}}$$

Ahora analicemos $\frac{1}{|B|}\int_B \|x\|^{qr}$

Trivialmente,$\|x\| \leq \|x - x_B\| + \|x_B\| \leq R + \|x_B\|$,así que

$$\frac{1}{|B|}\int_B \|x\|^{qr} \leq (R + \|x_B\|)^{qr}$$

□

Por lo tanto,

i)Si $x_B = 0$,

$$\left(\frac{1}{|B(x_B, R)|}\int_{B(x_B,R)} \|x\|^{qr}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|B(x_B, R)|}\int_{B(x_B,R)} \|x\|^{-p\acute{}r}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}}$$

$$\leq (R+\|x_B\|)^{\frac{qr}{q}}\left(\frac{1}{|B(0,1)|}c_d R^{-p\acute{}\mathrm{r}}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}}$$

$$= R^r\left(\frac{1}{|B(0,1)|}c_d\right)^{\frac{1}{p\acute{}}} R^{-r}$$

$$= \left(\frac{1}{|B(0,1)|}c_d\right)^{\frac{1}{p\acute{}}} := K_1$$

ii)Si $x_B \neq 0, R < \frac{\|x_B\|}{4}$.

$$\left(\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{qr}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{-p\acute{}r}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}}$$

$$\leq (R+\|x_B\|)^{\frac{qr}{q}}\left(\frac{3}{4}\|x_B\|\right)^{-\frac{p\acute{}\mathrm{r}}{p\acute{}}}$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^r := K_2$$

iii)Si $x_B \neq 0$, $\frac{\|x_B\|}{4} \leq R < 4\|x_B\|$,

$$\left(\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{qr}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{-p\acute{}r}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}}$$

$$\leq (R+\|x_B\|)^{\frac{qr}{q}}\left(\frac{c_d}{|B(0,1)|}20^d R^{-p\acute{}\mathrm{r}}\frac{1}{-p\acute{}\mathrm{r+d}}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}}$$

$$= 5^r R^r\left(\frac{c_d}{|B(0,1)|}20^d\frac{1}{-p\acute{}\mathrm{r+d}}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}} R^{-r}$$

$$= 5^r\left(\frac{c_d}{|B(0,1)|}20^d\frac{1}{-p\acute{}\mathrm{r+d}}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}} := K_3$$

iv)Si $B = B(x_B,R)$ con $x_B \neq 0$ y$R \geqslant 4\|x_B\|$,

$$\left(\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{qr}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{-p\acute{}r}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}}$$

$$\leq (R+\|x_B\|)^r\left(\frac{1}{|B(0,1)|}\left(\frac{5}{4}\right)^{-p\acute{}\mathrm{r+d}} c_d\frac{R^{-p\acute{}\mathrm{r}}}{-p\acute{}\mathrm{r+d}}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}}$$

$$\leq \left(R+\frac{R}{4}\right)^r\left(\frac{1}{|B(0,1)|}\left(\frac{5}{4}\right)^{-p\acute{}\mathrm{r+d}} c_d\frac{R^{-p\acute{}\mathrm{r}}}{-p\acute{}\mathrm{r+d}}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{|B(0,1)|}c_d\frac{1}{-p\acute{}\mathrm{r+d}}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}}\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{d}{p\acute{}}} := K_4$$

En conclusión,$\left(\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{qr}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{-p\acute{}r}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}} \leq K$, donde

$$K = max\left\{K_1, K_2, K_3, K_4\right\},$$

OBSERVACIÓN 62. Sean p yq números reales $p, q > 1$, $d \in \mathbb{N}$ y $0 < r < \frac{d}{q´}$. Entonces, la función $\|x\|^{-r} : \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \to \mathbb{R}$ pertenece a $A_{p´,\mathrm{q}´}$

DEMOSTRACIÓN. $\left(\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{-qr}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(x_B,R)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{p´r}\right)^{\frac{1}{p´}}$

$$= \left(\frac{1}{|B\left(x_B, R\right)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{p´r}\right)^{\frac{1}{p´}}\left(\frac{1}{|B\left(x_B, R\right)|}\int_{B(x_B,R)}\|x\|^{-qr}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Por la observación61, $\|x\|^{-r} \in A_{p´,\mathrm{q}´}$ □

Este resultado se puede generalizar como:

PROPOSICIÓN 63. *Si* $v \in A_{p,q}$, *entonces,* $v^{-1} \in A_{q´,p´}$

DEMOSTRACIÓN. tenemos que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B v^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B v^{-p´}\right)^{\frac{1}{p´}} \quad \leq \quad K < \infty$$

Ahora, reescribamos esta desigualdad como

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \left(v^{-1}\right)^{-q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B \left(v^{-1}\right)^{p´}\right)^{\frac{1}{p´}} \leq K < \infty$$

Usando que $(q´)´$=q ,obtenemos el resultado´. □

OBSERVACIÓN 64. Sea v_1y v_2,funciones de $\mathcal{A}_{1,\mathrm{q}}$. Entonces,$v_1 + v_2 \in A_{1,q}$ y $max\left\{v_1, v_2\right\} \in A_{1,q}$
Para probar estos resultados necesitaremos una observación previa:

OBSERVACIÓN. Sean $a, b, p > 0$.Entonces :
i)Si $p \geq 1$,$(a+b)^p \leq 2^{p-1}\left(a^p + b^p\right)$
ii)Si $0 < p < 1$,$(a+b)^p \leq 2^p\left(a^p + b^p\right)$

Ahora estamos en condiciones de demostrar la observación 64

DEMOSTRACIÓN. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ cualquiera.Consideremos$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \left(v_1 + v_2\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$
Como, por definición de $A_{1.q}, q \geqslant 1$, aplicando la observación anterior, 3.5,

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \left(v_1 + v_2\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B 2^{q-1}\left(v_1^q + v_2^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

o, equivalentemente,

$$2^{\frac{q-1}{q}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B v_1^q + \frac{1}{|B|}\int_B v_2^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Apliquemos nuevamente la observación 3.5,

$$2^{\frac{q-1}{q}}\left(2^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B v_1^q\right)^{\frac{1}{q}} + 2^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B v_2^q\right)^{\frac{1}{q}}\right) = 2\left(\left(\frac{1}{|B|}\int_B v_1^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{|B|}\int_B v_2^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

Como v_1y v_2, son funciones de $\mathcal{A}_{1,\mathrm{q}}$,$\exists K_1, K_2 > 0/$

$$2\left(\left(\frac{1}{|B|}\int_B v_1^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{|B|}\int_B v_2^q\right)^{\frac{1}{q}}\right) \leq 2\left(K_1 \underset{x\in B}{inf} v_1(x) + K_2 \underset{x\in B}{inf} v_2(x)\right) \leq$$

$$2max\{K_1, K_2\}\left(\underset{x\in B}{inf} v_1(x) + \underset{x\in B}{inf} v_2(x)\right)$$

Dado que $v_1, v_2 \geqslant 0$,

$$2max\{K_1, K_2\}\left(\underset{x\in B}{inf} v_1(x) + \underset{x\in B}{inf} v_2(x)\right)$$

$$\leq 2max\{K_1, K_2\}\left(\underset{x\in B}{inf}(v_1+v_2)(x) + \underset{x\in B}{inf}(v_1+v_2)(x)\right)$$

$$= 4max\{K_1, K_2\}\left(\underset{x\in B}{inf}(v_1+v_2)\right)$$

En este caso, $K = 4max\{K_1, K_2\}$

Ahora probaremos que si v_1 yv_2 son funciones de $A_{1,q}$,$max\{v_1, v_2\} \in A_{1,q}$

Sea $B \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ cualquiera. Consideremos$\left(\frac{1}{|B|}\int_B (max\{v_1, v_2\})^q\right)^{\frac{1}{q}}$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B (max\{v_1, v_2\})^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\frac{1}{|B|}\int_{B\cap\{v_1\geqslant v_2\}} (max\{v_1, v_2\})^q + \frac{1}{|B|}\int_{B\cap\{v_1<v_2\}} (max\{v_1, v_2\})^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\frac{1}{|B|}\int_{B\cap\{v_1\geqslant v_2\}} v_1^q + \frac{1}{|B|}\int_{B\cap\{v_1<v_2\}} v_2^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B v_1^q + \frac{1}{|B|}\int_B v_2^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Usando la observación 3.5,

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B v_1^q + \frac{1}{|B|}\int_B v_2^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{q}}\left(\left(\frac{1}{|B|}\int_B v_1^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{|B|}\int_B v_2^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

Dado que si $v_1, v_2 \in A_{1q'} \Rightarrow v_1 + v_2 \in A_{1,q}$,

$$2^{\frac{1}{q}}\left(\left(\frac{1}{|B|}\int_B v_1^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{|B|}\int_B v_2^q\right)^{\frac{1}{q}}\right) \leq 2^{\frac{1}{q}} 4max\{K_1, K_2\}\left(\underset{x\in B}{inf}(v_1+v_2)\right)$$

Como $v_1 \leq max\{v_1, v_2\}$ y $v_2 \leq max\{v_1, v_2\}$,

$$2^{\frac{1}{q}} 4max\{K_1, K_2\}\left(\underset{x\in B}{inf}(v_1+v_2)\right)$$

$$\leq 2^{\frac{1}{q}} 4max\{K_1, K_2\}\left(\underset{x\in B}{inf}(max\{v_1, v_2\} + max\{v_1, v_2\})(x)\right)$$

$$= 2^{\frac{1}{q}+3} max\{K_1, K_2\}\left(\underset{x\in B}{inf}(max\{v_1, v_2\})(x)\right)$$

En este caso, podemos tomar $K = 2^{\frac{1}{q}+3} max\{K_1, K_2\}$. □

OBSERVACIÓN 65. Sean $0 < C_1 < C_2$,$u \in A_{p,q}$ y v una función que en casi todo punto verifica que $C_1 u \leq v \leq C_2 u$. Entonces,$v \in A_{p,q}$

DEMOSTRACIÓN. Sea B una bola cualquiera.Consideremos

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B v^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B v^{-p\acute{}}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}}$$

Luego,$\left(\frac{1}{|B|}\int_B v^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B v^{-p\acute{}}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B (C_2 v)^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B (C_1 v)^{-p\acute{}}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}}$

$$= C_2 n C_1^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\int_B (C_2 v)^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B (C_1 v)^{-p\acute{}}\right)^{\frac{1}{p\acute{}}}$$

$$\leq C_2 C_1^{-1} K$$

□

La clase $A_{p,q}$ es la que permite obtener acotaciones con peso para el operador maximal fraccionario , de acuerdo al teorema siguiente:

TEOREMA 66. *Asumamos que* $0 < \alpha < d, 1 < p < \frac{d}{\alpha}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d}$ *y* $v \in A_{p,q}$. *Entonces, existe* C*, independiente de* f *con la propiedad que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |\mathcal{M}_\alpha (f)(x) v(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |f(x) v(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración se basa en el teorema de interpolación de Marcinkiewicz y las estimaciones de tipo débil para el operador Tg en los espacios de medida $\left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}, d\mu\right)$, con $d\mu = v^q$ y $T(g) = \left(\mathcal{M}_\alpha\left(\mathrm{g}\left(\mathrm{v}^{\mathrm{q}}\right)\right)^{\frac{\alpha}{\mathrm{d}}}\right)(\mathrm{x})$.Los detalles se pueden consultar en[31]

El punto clave donde se usa el teorema de interpolación de Marcinkiewicz es el hecho que si $v \in A_{p,q}$ entonces $v \in A_{p_i,q_i}$,$i = 1,2$ con p_i y q_i que verifiquen la igualdad $\frac{1}{q_i} = \frac{1}{p_i} - \frac{\alpha}{d}$ y $1 < p_1 < p < p_2$. Los posibles valores de p_1 y de p_2 dependen de la función v. Este hecho se deduce de la condición de Hölder inversa, esto es $\left(\frac{\int_B \omega^p}{|B|}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\|\omega\|_{\mathbb{L}^1(B)}}{|B|}\|\omega\|_{\mathbb{L}^\infty(B)}$ $\forall B \subset \mathbb{R}^d$.

En el caso que $v \in A_1, q_1$ donde $1 < q_1 < \infty$, la condición de Hölder inversa también puede ser obtenida y entonces se puede probar que existe $p_0 > 1$ con la propiedad que $v \in A_{p_0,q_0}$, donde usamos $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{d}$.En este caso el teorema de interpolación conduce a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |\mathcal{M}_\alpha (f)(x) v(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_t\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |f(x) v(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $C_t = O\left(\frac{1}{1-t}\right), t \to 1, \frac{1}{p} = t + \frac{1-t}{p_0}, \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1-t}{q_0}$

En particular , si $v \in A_{p,q}$,tenemos que

$$\int_{\mathcal{M}\mathrm{g}>\alpha} v^q dx \leq C\left(\frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |g(x)|^p v^q(x) \, dx\right)^{\frac{q}{p}}$$

Ahora,veamos los detalles de la demostración de la continuidad con pesos$A_{p,q}$ de la integral fraccionaria □

TEOREMA 67. *Sean* $0 < \alpha < d$, $1 < p < \frac{d}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d}$ *y* $v \in A_{p,q}$. *Existe* C *independiente de* f *con la propiedad que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} \left| I_\alpha (f) \, v(x) \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| f(x) \, v(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

DEMOSTRACIÓN. $I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} f(y) \, |x-y|^{\alpha - d} \, dy$
Sea $\delta > 0$ que elegiremos convenientemente despues
$I_\alpha f(x) = \int_{|x-y|<\delta} f(y) \, |x-y|^{\alpha-d} \, dy + \int_{|x-y| \geqslant \delta} f(y) \, |x-y|^{\alpha-d} \, dy = I_1 + I_2$
Llamemos $R_i = \left\{ y \in \mathbb{R} / 2^{-\mathrm{i}-1} \delta \leq |\mathrm{x}-\mathrm{y}| \leq 2^{-\mathrm{i}} \delta \right\}$,donde $i \in \mathbb{Z}$.
Tenemos que

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_{R_i} |f(y)| \, |x-y|^{\alpha-d} \, dy \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(2^{-i-1} \delta \right)^{\alpha-d} \int_{R_i} |f(y)| \, dy \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(2^{-i-1} \delta \right)^{\alpha-d} \int_{B(x, 2^{-i}\delta)} |f(y)| \, dy \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} 2^{d-\alpha} 2^{-i(\alpha-d)} \int_{B(x, 2^{-i}\delta)} |f(y)| \, dy \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{\infty} 2^{d-\alpha} 2^{-i(\alpha-d)} \int_{B(x, 2^{-i}\delta)} |f(y)| \, dy \\ \leq &\sum_{i=0}^{\infty} 2^{d-\alpha} 2^{-i\epsilon} \delta^{\epsilon} \frac{1}{\left(2^{-i}\delta\right)^{d-\alpha+\varepsilon}} \int_{B(x, 2^{-i}\delta)} |f(y)| \, dy \end{aligned}$$

Luego

$$I_1 \leq A_\epsilon \delta^\epsilon \mathcal{M}_{\alpha-\epsilon} \mathrm{f}(\mathrm{x})$$

En forma similar,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(2^{i-1} \delta \right)^{\alpha-d} \int_{B(x, 2^i \delta)} |f(y)| \, dy \\ &\leq \widetilde{A} \epsilon \delta^{-\epsilon} M_{\alpha+\epsilon} \mathrm{f}(\mathrm{x}) \end{aligned}$$

Eligiendo $\delta^\epsilon = \sqrt{\frac{M_{\alpha+\epsilon} \mathrm{f}(\mathrm{x})}{M_{\alpha-\epsilon} \mathrm{f}(\mathrm{x})}}$, obtenemos

$$|I_\alpha f(x)| \leq A \sqrt{\mathcal{M}_{\alpha-\epsilon} \mathrm{f}(\mathrm{x}) \, \mathcal{M}_{\alpha+\epsilon} \mathrm{f}(\mathrm{x})}$$

Sea q_ϵ definido como $\frac{1}{q_\epsilon} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha+\epsilon}{d}$ y sea $\bar{q_\epsilon}$definido como Sea q_ϵ definido como $\frac{1}{q_\epsilon} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha-\epsilon}{d}$. Observemos que si $v \in A_{p,q}$ entonces $v \in A_{p,\bar{q_\epsilon}} \frown A_{p,q_\epsilon}$ para ϵ suficientemente pequeño y en ese caso obtendríamos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} \left| \mathcal{M}_{\alpha-\epsilon}(f)(x) \, v(x) \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} \left| f(x) \, v(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

y

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |\mathcal{M}_{\alpha+\epsilon}(f)(x)\, v(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |f(x)\, v(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

A continuación definamos $F = \left(\mathcal{M}_{\alpha+\epsilon}\mathrm{f}(\mathrm{x})\, v(x)\right)^{\frac{q}{2}}$ y $G = \left(\mathcal{M}_{\alpha-\epsilon}\mathrm{f}(\mathrm{x})\, v(x)\right)^{\frac{q}{2}}$

Tomemos $p_1 = \frac{2q_\epsilon}{q}$ y $p_2 = \frac{2\bar{q_\epsilon}}{q}$ de tal forma que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$. Por la clásica desigualdad de Hölder, aplicada a $|I_\alpha f(x)\, v(x)|$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |I_\alpha f(x)\, v|^q \leq \|F\|_{p_1} \|G\|_{p_2}$$

Aplicando $\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |\mathcal{M}_\alpha(f)(x)\, v(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |f(x)\, v(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$.,obtenemos que

$$\|F\|_{p_1} = \left\{\int |\mathcal{M}_{\alpha+\epsilon} f(x)\, v(x)|^{q_\epsilon}\, dx\right\}^{\frac{1}{p_1}} \leq C\, \|fv\|_p^{\frac{q_\epsilon}{q_1}}$$

Analogamente

$$\|G\|_{p_2} = \left\{\int |\mathcal{M}_{\alpha-\epsilon} f(x)\, v(x)|^{\bar{q_\epsilon}}\, dx\right\}^{\frac{1}{p_1}} \leq C\, \|fv\|_p^{\frac{\bar{q_\epsilon}}{q_2}}$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |I_\alpha f(x)\, v(x)|^q\, dx \leq C\, \|fv\|_p^{\frac{q_\epsilon}{q_1} + \frac{\bar{q_\epsilon}}{q_2}}$$

o equivalentemente,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |I_\alpha f(x)\, v(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |f(x)\, v(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Como ejemplos particular de esta desigualdad ,proponemos : □

PROPOSICIÓN 68. *Sea* $f \in \mathbb{L}^p$,$v \in \mathbb{L}^\infty / \underset{x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}{essinf}\, v > 0$.*Entonces,*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |I_\alpha f(x)\, v(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\, \|f\|_{\mathbb{L}^p} \|v\|_{\mathbb{L}^\infty}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la clásica desigualdad de Hölder,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |f(x)\, v(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \underset{x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}{esssup}\, v(x) \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \underset{x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}{esssup}\, v(x)\, \|f\|_{\mathbb{L}^p}$$

□

Capítulo 4

Espacios de Lebesgue Exponente Variable

4.1. La Funcional Modular

Los espacios de Lebesgue con exponente variable que estudiaremos en este capítulo, permiten,mediante un exponente funcional adecuado, volver finitamente integrables funciones que no tienen norma finita en los espacios $\mathbb{L}^{\mathrm{p}}$ con $p > 1$ fijo, como por ejemplo $|x|^{\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Por ejemplo, si $\alpha > -1$, $\int_{|x|\leq 1} |x|^{\alpha}\, dx$ es finitamente integrable y $\int_{|x|\leq 1} |x|^{\alpha}\, dx = \frac{2}{\alpha+1}$, pero $\int_{|x|>1} |x|^{\alpha}\, dx = +\infty$..Ahora bien,si definimos $p(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ \beta & |x| > 1 \end{cases}$, donde $\alpha\beta + 1 < 0$

Usando este exponente funcional, $\int_{\mathbb{R}} |x|^{\alpha p(x)}\, dx = \frac{2}{\alpha+1} - \frac{2}{\alpha\beta+1}$

Para el caso $\alpha < -1.$, $\int_{|x|\geq 1} |x|^{\alpha}\, dx$ es finitamente integrable y $\int_{|x|\geq 1} |x|^{\alpha}\, dx = -\frac{2}{\alpha+1}$, pero $\int_{|x|<1} |x|^{\alpha}\, dx = +\infty$

Ahora,tomando $p(x) = \begin{cases} \beta & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$ donde $\alpha\beta + 1 > 0$, $\int_{\mathbb{R}} |x|^{\alpha p(x)}\, dx = -\frac{2}{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha\beta+1}$

Para el caso $\alpha = -1$, ni $\int_{|x|\leq 1} |x|^{-1}\, dx$ ni $\int_{|x|>1} |x|^{-1}\, dx$ son finitamente medibles, pero definiendo $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |x| \leq 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}$, $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{|x|}\right)^{p(x)} dx = 4 + 2 = 6$

Para los siguientes resultados , usaremos fuertemente los resultados de [21] y [3]

Definición 69. Sea $p(x) : \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \to [1, +\infty]$ medible/$\underset{x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}{esssupp}(x) < +\infty$..Sea $\Omega_{\infty} = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}} / \mathrm{p}(\mathrm{x}) = +\infty\right\}$

Llamaremos funcional modular a $\rho_p(f) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}} - \Omega_{\infty}} |f|^{p(x)}\, dx + \underset{x\in\Omega_{\infty}}{ess\,sup} |f(x)|$.

Definimos $\|f\|_{p(.)} = inf \left\{\lambda > 0/\rho_p\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$

Llamaremos $\mathcal{P}(\Omega) = \left\{\mathrm{p}(\mathrm{x}) : \Omega \to [1, +\infty] / \underset{\mathrm{x}\in\Omega}{\mathrm{esssupp}}(\mathrm{x}) < +\infty\right\}$,

$\mathcal{B}(\Omega) = \left\{\mathrm{p}(\mathrm{x}) \in \mathcal{P}(\Omega) / \mathrm{M}(\mathrm{p})\mathrm{es\,acotada\,en\,L}^{\mathrm{p}(.)}(\Omega)\right\}$,

$P^0(\Omega) = \left\{\mathrm{p}(\mathrm{x}) : \Omega \to [0, +\infty] / \underset{\mathrm{x}\in\Omega}{\mathrm{essinf}}\mathrm{p}(\mathrm{x}) > 0, \underset{\mathrm{x}\in\Omega}{\mathrm{esssupp}}(\mathrm{x}) < +\infty\right\}$

Definimos p' por la relación funcional $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$

Como trabajaremos fundamentalmente con $p \in \mathcal{P}, \rho_p(f) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |f|^{p(x)}\, dx$

4.1.1. Propiedades de la funcional modular.

La funcion modular verifica

1. $\rho_p(f) \geqq 0\ \forall f$
2. $\rho_p(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0\, c.t.p..$
3. $\rho_p(-f) = \rho_p(f)$
4. $\rho_p(f)$ es una funcional convexa
5. Si $|f(x)| \geq |g(x)|$ $c.t.p.$ y $\rho_p(f) < \infty$ resulta que $\rho_p(f) \geq \rho_p(g)$ y la desigualdad es estricta si $|f(x)| \neq |g(x)|$en algún conjunto de medida positiva
6. Si para algún $\Lambda > 0{,}0 < \rho_p\left(\frac{f}{\Lambda}\right) < \infty$ entonces la función $\lambda \to \rho_p\left(\frac{f}{\lambda}\right)$ es continua y decreciente en $[\Lambda, +\infty)$
7. Si $f \in \mathbb{L}^{\mathrm{p}}$, $\rho_p\left(\frac{f}{\|f\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}}}\right) \leq 1$

Demostración. La primera propiedad es obvia.La segunda al ser una suma de dos cantidades no negativas solo puede ser 0 si ambos sumandos son nulos. es decir, $|f| = 0\, c.t.p.$en $\mathbb{R}^{\mathrm{d}} - \Omega_\infty$ y

$|f| = 0\, c.t.p.$ en Ω_∞

. Luego $f = 0\, c.t.p\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$.La tercera es obvia,dado que $|f| = |-f|$

Ahora veremos que ρ_p es convexa. Para ello comenzaremos por remarcar que $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}, \mathrm{p}(\mathrm{x}) \geq 1$.

Sea $0 \leq \lambda \leq 1$ y sea f, g localmente integrables .

Consideremos

$$\rho_p(\lambda f + (1-\lambda) g) = \int_{\mathbb{R}^d - \Omega_\infty} |\lambda f + (1-\lambda) g|^{p(x)}\, dx + \underset{x \in \Omega_\infty}{esssup} |\lambda f + (1-\lambda) g|(x)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d - \Omega_\infty} (\lambda |f(x)| + (1-\lambda)|g(x)|)^{p(x)}\, dx + \underset{x \in \Omega_\infty}{esssup} (\lambda |f(x)| + (1-\lambda)|g(x)|)$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}, \mathrm{p}(\mathrm{x}) \geq 1$

$$\int_{\mathbb{R}^d - \Omega_\infty} (\lambda |f(x)| + (1-\lambda)|g(x)|)^{p(x)}\, dx$$

$$\leq \lambda \int_{\mathbb{R}^d - \Omega_\infty} (|f(x)|)^{p(x)}\, dx + (1-\lambda) \int_{\mathbb{R}^d - \Omega_\infty} (|g(x)|)^{p(x)}\, dx$$

Dado que

$$\underset{x \in \Omega_\infty}{esssup} (\lambda |f(x)| + (1-\lambda)|g(x)|) \leq \lambda \underset{x \in \Omega_\infty}{esssup} (|f(x)|) + (1-\lambda) \underset{x \in \Omega_\infty}{esssup} (|g(x)|)$$

Luego

$$\rho_p(\lambda f + (1-\lambda) g) \leq \lambda \rho_p(f) + (1-\lambda) \rho_p(g)$$

La demostración de 5. es $\rho_p(f) = \int_{\mathbb{R}^d - \Omega_\infty} (|f(x)|)^{p(x)}\, dx + \underset{x \in \Omega_\infty}{esssup} |f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d - \Omega_\infty} (|g(x)|)^{p(x)}\, dx + \underset{x \in \Omega_\infty}{esssup} |g(x)| = \rho_p(g)$

Para demostrar 6.,elegiremos $0 < \Lambda \leq \lambda_1 < \lambda_2$. Usando el punto 5 de la enumeración.,$\rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda_1}\right) - \rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda_2}\right) \geq 0$

Consideremos $\rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda_1}\right) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}} - \Omega_\infty} \left(\frac{|f|}{\lambda_1}\right)^{p(x)} dx + \underset{x \in \Omega_\infty}{ess\, sup} \frac{|f|}{\lambda_1}$

$= \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}} - \Omega_\infty} \left(\frac{|f|}{\lambda_2}\right)^{p(x)} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{p(x)} dx + \underset{x \in \Omega_\infty}{ess\, sup} \frac{|f|}{\lambda_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$

$\leq \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}-\Omega_\infty} \left(\frac{|f|}{\lambda_2}\right)^{p(x)} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\|p\|_{\mathbb{L}^\infty}} dx + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \underset{x\in\Omega_\infty}{ess\,sup} \frac{|f|}{\lambda_2}$

$\leq \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\|p\|_{\mathbb{L}^\infty}} \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}-\Omega_\infty} \left(\frac{|f|}{\lambda_2}\right)^{p(x)} dx + \underset{x\in\Omega_\infty}{ess\,sup} \frac{|f|}{\lambda_2}\right)$

$= \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\|p\|_{\mathbb{L}^\infty}} \rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda_2}\right)$

$\rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda_2}\right) \leq \rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda_1}\right) \leq \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\|p\|_{\mathbb{L}^\infty}} \rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda_2}\right)$

Haciendo que $\lambda_1 \to \lambda_2$, y dado que $\rho_{p(..)}\left(\frac{f}{\lambda_2}\right) < \infty$,sacamos que $\rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda}\right)$ es continua

La propiedad 7 es trivial $\square$

Ejemplo 70. Sean $f \in \mathbb{L}^1 \bigcap \mathbb{L}^\infty$ y $p \in \mathbb{L}^\infty$. Entonces, $f \in \mathbb{L}^{\mathrm{p}(.)}$

Como $p \in \mathbb{L}^\infty$, así que $\rho_p(f) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}-\Omega_\infty} |f|^{p(x)} dx + \underset{x\in\Omega_\infty}{ess\,sup} |f(x)|. = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |f|^{p(x)} dx$.

Dado que $\rho_p(f) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |f|^{p(x)} dx = \int_{\{|\mathrm{f}|\leq 1\}} |f|^{p(x)} dx + \int_{\{|\mathrm{f}|>1\}} |f|^{p(x)} dx.$.

$\leq \int_{\{|\mathrm{f}|\leq 1\}} |f| dx + \int_{\{|\mathrm{f}|>1\}} |f|^{\|p\|_{\mathbb{L}^\infty}} dx$

$\leq \int |f| dx + \int |f|^{\|p\|_{\mathbb{L}^\infty}} dx = \|f\|_{\mathbb{L}^1} + (\|f\|_{\mathbb{L}^{\|\mathrm{p}\|}})^p$

Como corolario de lo anterior ,si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$, $\rho_p(f) \leq \int_{\{|\mathrm{f}|\leq 1\}\cap \mathrm{sopf}} |f| dx + \int_{\{|\mathrm{f}|>1\}\cap \mathrm{sopf}} |f|^{\|p\|_{\mathbb{L}^\infty}} dx$

$\leq \int_{\mathrm{sopf}} dx + \int_{\mathrm{sopf}} \|f\|_{\mathbb{L}^\infty}^{\|p\|_{\mathbb{L}^\infty}} dx = |sopf| \left(1 + \|f\|_{\mathbb{L}^\infty}^{\|p\|_{\mathbb{L}^\infty}}\right)$

Existen exponentes $p(.)$ que no pertenecen a $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$ pero que $\left\{f : \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \to \mathbb{R}\ \mathrm{medible}/\rho_{\mathrm{p}}(\mathrm{f}) < \infty\right\} \neq \emptyset$, como por ejemplo $p(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ +\infty & |x| \geq 1 \end{cases}$

Si tomamos $f(x) = e^{-|x|}$, $\rho_p(f) = 2 - e^{-1}$.

De hecho,con la función $p(x)$ definida en el ejemplo anterior , si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$, $\rho_p(f) \leq \|f\|_{\mathbb{L}^1} + \|f\|_{\mathbb{L}^\infty}$

Observación 71. Si $p(x) \in \mathbb{L}^\infty$ y f y g tienen funcional modular finita $f+g$ tambien la tiene

Demostración. $\rho_p(f+g) = \int_{\mathbb{R}^d-\Omega_\infty} |f+g|^{p(x)} dx + \underset{x\in\Omega_\infty}{esssup} |f+g|(x)$

$\leq \int_{\mathbb{R}^d-\Omega_\infty} 2^{p(x)} \left(\frac{|f(x)|+|g(x)|}{2}\right)^{p(x)} dx + \underset{x\in\Omega_\infty}{esssup}(|f(x)| + |g(x)|)$

$\leq \int_{\mathbb{R}^d-\Omega_\infty} 2^{p(x)} \left(\left(\frac{1}{2}\right)|f(x)|^{p(x)} + \frac{1}{2}|g(x)|^{p(x)}\right) dx + \underset{x\in\Omega_\infty}{esssup}(|f(x)|) + \underset{x\in\Omega_\infty}{esssup}(|g(x)|)$

$= \int_{\mathbb{R}^d-\Omega_\infty} 2^{p(x)-1} \left(|f(x)|^{p(x)} + |g(x)|^{p(x)}\right) dx + \underset{x\in\Omega_\infty}{esssup}(|f(x)|) + \underset{x\in\Omega_\infty}{esssup}(|g(x)|)$

$= \int_{\mathbb{R}^d-\Omega_\infty} 2^{\|p(x)-1\|_\infty} \left(|f(x)|^{p(x)} + |g(x)|^{p(x)}\right) dx + \underset{x\in\Omega_\infty}{esssup}(|f(x)|) + \underset{x\in\Omega_\infty}{esssup}(|g(x)|)$

$= 2^{\|p(x)-1\|_\infty} \int_{\mathbb{R}^d-\Omega_\infty} \left(|f(x)|^{p(x)} + |g(x)|^{p(x)}\right) dx + \underset{x\in\Omega_\infty}{esssup}(|f(x)|) + \underset{x\in\Omega_\infty}{esssup}(|g(x)|)$

$\leq 2^{\|p(x)-1\|_\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d-\Omega_\infty} \left(|f(x)|^{p(x)} + |g(x)|^{p(x)}\right) dx + \underset{x\in\Omega_\infty}{esssup}(|f(x)|) + \underset{x\in\Omega_\infty}{esssup}(|g(x)|)\right)$

$= 2^{\|p(x)-1\|_\infty} (\rho_P(f) + \rho_P(g))$ $\square$

Observación 72. Si $p(x) \in \mathbb{L}^{\infty}$, y f tiene funcional modular finita y $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha f$ tambien la tiene

Demostración. $\rho_p(\alpha f) = \int_{\mathbb{R}^d - \Omega_\infty} |\alpha f|^{p(x)}\, dx + \underset{x \in \Omega_\infty}{esssup} |\alpha f|(x)$

$\rho_p(\alpha f) \leq \int_{\mathbb{R}^d - \Omega_\infty} |\alpha|^{p(x)} |f(x)|^{p(x)}\, dx + |\alpha| \underset{x \in \Omega_\infty}{esssup} |f|(x)$

Si $0 \leq |\alpha| \leq 1$, $\int_{\mathbb{R}^d - \Omega_\infty} |\alpha|^{p(x)} |f(x)|^{p(x)}\, dx + |\alpha| \underset{x \in \Omega_\infty}{esssup} |f|(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d - \Omega_\infty} |\alpha| |f(x)|^{p(x)}\, dx +$ $|\alpha| \underset{x \in \Omega_\infty}{esssup} |f|(x)$

$= |\alpha| \rho_p(f)$

Si $|\alpha| > 1$, $\int_{\mathbb{R}^d - \Omega_\infty} |\alpha|^{p(x)} |f(x)|^{p(x)}\, dx + |\alpha| \underset{x \in \Omega_\infty}{esssup} |f|(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d - \Omega_\infty} |\alpha|^{\|p\|_\infty} |f(x)|^{p(x)}\, dx +$ $|\alpha|^{\|p\|_\infty} \underset{x \in \Omega_\infty}{esssup} |f|(x)$

$= |\alpha|^{\|p\|_\infty} \rho_p(f)$

Por lo tanto,$\rho_p(\alpha f) \leq max \left\{ |\alpha|, |\alpha|^{\|p\|_\infty} \right\} \rho_p(f)$

Como corolario de estas dos propiedades básicas,obtenemos que $max\{f, g\}$ y $min\{f, g\}$ tienen funcional modular finita si f y g la tienen,dado que

$$\rho_p(max\{f, g\}) \leq \rho_p(max\{|f|, |g|\}) \leq \rho_p(|f| + |g|) \leq 2^{\|p-1\|_\infty} (\rho_p(|f|) + \rho_p(|g|))$$

$$\leq 2^{\|p-1\|_\infty + 1} max(\rho_p(|f|), \rho_p(|g|)) = 2^{\|p-1\|_\infty + 1} max(\rho_p(f), \rho_p(g))$$

Para el mínimo,tenemos que

$$\rho_p(min\{f, g\}) \leq \rho_p(f)$$

y que

$$\rho_p(min\{f, g\}) \leq \rho_p(g),$$

de tal modo que

$$\rho_p(min\{f, g\}) \leq min\{\rho_p(f), \rho_p(g)\}$$

□

Proposición 73. *Sea* $p(.) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) / \underset{x \in \mathbb{R}^d}{esssup} p(x) \leq r$. *Si* $f \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^r$, $f \in L^{p(.)}$

Demostración. Como $\underset{x \in \mathbb{R}^d}{esssup} p(x) \leq r$, la funcional modular resulta $\rho_p(f) =$ $\int_{\mathbb{R}^d - \Omega_\infty} |f|^{p(x)}\, dx$

Ahora bien ,

$$\int_{\mathbb{R}^d - \Omega_\infty} |f|^{p(x)}\, dx = \int_{(\mathbb{R}^d - \Omega_\infty) \cap \{|f| < 1\}} |f|^{p(x)}\, dx + \int_{(\mathbb{R}^d - \Omega_\infty) \cap \{|f| \geq 1\}} |f|^{p(x)}\, dx$$

$$\leq \int_{(\mathbb{R}^d - \Omega_\infty) \cap \{|f| < 1\}} |f|\, dx + \int_{(\mathbb{R}^d - \Omega_\infty) \cap \{|f| \geq 1\}} |f|^r\, dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f|\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} |f|^r\, dx = \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^r}^r$$

□

Como una extensión del resultado anterior ,tenemos el siguiente corolario

PROPOSICIÓN 74. *Sean* $0 < r < q < \infty$. *Sea* $p(.) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}) / \underset{x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}{essinf}\, p(x) > r$, $\underset{x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}{esssup}\, p(x) \leq q$. *Si* $f \in \mathbb{L}^r \cap \mathbb{L}^q$, $f \in L^{p(\cdot)}$

DEMOSTRACIÓN. $\rho_P(f) \leq \int_{(\mathbb{R}^{\mathrm{d}} - \Omega_\infty)\cap\{|\mathrm{f}|<1\}} |f|^r\, dx + \int_{(\mathbb{R}^{\mathrm{d}} - \Omega_\infty)\cap\{|\mathrm{f}|\geq 1\}} |f|^q\, dx$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |f|^r\, dx + \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}} |f|^q\, dx = \|f\|_{L^r}^r + \|f\|_{L^q}^q$$

□

4.2. El operador maximal de Hardy-Littlewood en $\mathbb{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$

En anàlisis armónicos , un operador fundamental es el operador maximal de Hardy Littlewood, ya introducido en este trabajo. Sabemos que $\mathcal{M}(f)$ es acotado en $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)$, si $1 < p < \infty$, aunque hay espacios y funciones $p(.)$donde el operador no es acotado, como el hallado por Pick y Ruzicka y que expondremos a continuación

OBSERVACIÓN 75. [20] Sean $d = 1$, $\Omega = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ y $1 < p_0 < +\infty$.Sea φ una función estrictamente positiva y creciente en $[0, 1)$que verifique $\underset{x\to 0^+}{lim}\, \varphi(x) = 0$ y que $\underset{x\to 0^+}{lim}\, \varphi\left(\frac{x}{2}\right) ln\left(\frac{1}{x}\right) = \infty$.

Asumamos que $p(x) \leq p_0\ \forall x \in (-1, 0]$y que $p(x) = p_0 + \varphi(x)\ \forall x \in [0, 1)$ .Entonces, $\mathcal{M}$ no es acotado en $L^{p(..)}(\Omega)$

De la condición $\underset{x\to 0^+}{lim}\, \varphi\left(\frac{x}{2}\right) ln\left(\frac{1}{x}\right) = \infty$, deducimos que $\underset{x\to 0^*}{lim}\left(\frac{1}{p\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{p_0}\right) ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$ y que $\underset{x\to 0^*}{lim}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_0}} = 0$

Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos buscar $b_k \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ que verifique $\left(\frac{1}{b_k}\right)^{\frac{1}{p\left(\frac{b_k}{2}\right)} - \frac{1}{p_0}} < 2^{\frac{-k}{p_0}}$ y que $0 < b_{k+1} < \frac{b_k}{2}$.

Habiendo fijado dicha sucesion, definimos $a_k = \frac{b_k}{2}$ y $\lambda_k = \left(\frac{1}{b_k}\right)^{\frac{1}{p(a_k)}}$. Observemos que $\lambda_k > 1$.

Ahora, sean $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \chi_{(a_k, b_k)}$ y $h(x) = \begin{cases} g(-x) & -1 < x < 0 \\ 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$

Dado que $p(x) \leq p_0$ en $(-1, 0)$ y $\lambda_k > 1\, \forall k \in \mathbb{N}$, y dado que $\left(\frac{1}{b_k}\right)^{\frac{1}{p\left(\frac{b_k}{2}\right)} - \frac{1}{p_0}} < 2^{\frac{-k}{p_0}}$, obtenemos

$$\int_{-1}^{0} h(x)^{p(x)}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} \lambda_k^{p(-x)} dx$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)\, \lambda_k^{p_0}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} b_k^{1 - \frac{p_0}{p(\alpha_k)}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1<\infty$$

A continuación, tomemos $x\in(a_k,b_k)$.Luego $2x+b_k<1$,dado que $b_k<\frac{1}{3}$,de lo cual seguimos

$\mathcal{M}h(x)\geq\frac{1}{2(x+b_k)}\int_{-b_k}^{2x+b_k}h(y)\,dy\geq\frac{1}{4b_k}\int_{-b_k}^{-a_k}h(y)\,dy=\frac{1}{4b_k}\int_{-b_k}^{\frac{-b_k}{2}}\lambda_k dy=\frac{\lambda_k}{8}$

Así ,

$$\mathcal{M}h(x)\geq\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\chi_{(a_k,b_k)}(x)\,,\ x\in(0,1)$$

Por consiguiente ,

$$\int_0^1(Mh(x))^{p(x)}\,dx\geq\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_k}^{b_k}\lambda_k^{p(x)}dx$$

$$=\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{p(\alpha_k)}b_k$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}1$$

$$=+\infty$$

Como ejemplos de $\varphi(x)$,proponemos $\varphi(x)=-ln^{-\alpha}(sin(x))$,donde $0<\alpha<1$y $\varphi(x)=\left(ln\left(ln\left(e+\frac{1}{x^\beta}\right)\right)\right)^{-1}$, donde $\beta>0$

A continuación veremos que condiciones debe satisfacer $p(x)$ para que el operador maximal resulte acotado

Teorema 76. [3] *Dado un conjunto abierto $\Omega\subseteq\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ y $p(.)\in\mathcal{P}(\Omega)$que satisface*

$$|p(x)-p(y)|\leq\frac{C}{-ln\,|x-y|}\ x,y\in\Omega/\,|x-y|\leq\frac{1}{2}$$

$$|p(x)-p(y)|\leq\frac{C}{ln\,(e+|x|)}\ x,y\in\Omega\ |y|\geq|x|$$

Entonces, $p(.)\in\mathcal{B}(\Omega)$,es decir ,el operador maximal es acotado en $\mathbb{L}^{p(.)}(\Omega)$

Este teorema se puede consultar en [4]aunque utilizaremos la demostración propuesta por [9],que utiliza condiciones equivalentes:

Teorema 77. *Sea $0<\alpha<d$ y sea $p(.)$ una función tal que $1<\underset{x\in\Omega}{essinf}\,p(x)\leq p(x)\leq\underset{x\in\Omega}{esssup}\,p(x)<\frac{d}{\alpha}$.Sea $q(x)$definida por la relación $\frac{1}{q(x)}=\frac{1}{p(x)}-\frac{d}{\alpha}$*

Entonces,

$$\mathcal{M}_\alpha(f)(x)\leq\left(M\left(|f|^{\frac{q(.)}{p(.)}\frac{d}{d-\alpha}}\right)(x)\right)^{1-\frac{\alpha}{d}}\left(\int_\Omega|f(y)|^{p(y)}\,dy\right)^{\frac{\alpha}{d}}$$

es válida para toda f medible

Demostración. Sea $B \subset \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ una bola. de centro x . .Teniendo en cuenta que $\frac{p(y)}{q(y)} + \frac{\alpha p(y)}{d} = 1$,

$$\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}} \int_{B\cap\Omega} |f(y)|\, dy = \frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}} \int_{B\cap\Omega} |f(y)|^{\frac{p(y)}{q(y)}} |f|^{\frac{\alpha p(y)}{d}} dy$$

Ahora, por aplicacióonde la clásica desigualdad de Hölder :

$$\leq \left(\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}} \int_{B\cap\Omega} |f(y)|^{\frac{p(y)}{q(y)} \frac{d}{d-\alpha}} dy \right)^{1-\frac{\alpha}{d}} \left(\int_{B\cap\Omega} |f|^{p(y)} dy \right)^{\frac{\alpha}{d}}$$

$$\leq \left(M\left(|f|^{\frac{q(.)}{p(.)} \frac{d}{d-\alpha}} \right)(x) \right)^{1-\frac{\alpha}{d}} \left(\int_{\Omega} |f(y)|^{p(y)} dy \right)^{\frac{\alpha}{d}}$$

□

Estas condiciones son equivalentes a :

Teorema 78. *Sea $p(.) \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}\right)$.Son equivalentes*
i)$p(.) \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}\right)$
ii) $p(.) \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}\right)$
iii)$\frac{p(.)}{q} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}\right) si\ 1 < q < \underset{x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}{essinf}\, p(x)$
iv)$\left(\frac{p(.)}{q}\right)^{\acute{}} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}\right) si\ 1 < q < \underset{x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}{essinf}\, p(x)$

Como corolario de76 podemos concluir el siguiente corolario

Corolario 79. *Bajo las condiciones del teorema 76,*$\mathcal{M}_\alpha \mathrm{f}(\mathrm{x}) \leq \|\mathrm{f}\|^{1-\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}} (\mathcal{M}\mathrm{f})^{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}}(\mathrm{x})$

Demostración. La demostración es inmediata usando la desigualdad de Hölder

□

Ejemplo 80. Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a + \frac{1}{x^2+1+b}$, con $a > 1$ y $b > 0$. Entonces, si $f \in \mathbb{L}^{p(.)}$, $I_\alpha(f)$,$\mathcal{M}_\alpha(\mathrm{f})$y $M(f)$ pertenecen a $\mathrm{L}^{\mathrm{q}(.)}$
Para esto ,basta comprobar que

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-ln|x-y|}\ x, y \in \mathbb{R}/\,|x-y| \leq \frac{1}{2}$$

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{ln(e+|x|)}\ x, y \in \mathbb{R}\ |y| \geq |x|$$

$|p(x) - p(y)| = \left| \frac{1}{x^2+1+b} - \frac{1}{y^2+1+b} \right|$
Por el teorema de Lagrange ,$\exists s \in int\,(x,\, y)\, / \left| \frac{1}{x^2+1+b} - \frac{1}{y^2+1+b} \right| = |x-y| \left| \frac{-2s}{(s^2+1+b)^2} \right|$
$= |x-y| \frac{2|s|}{\left(|s|^2+1+b\right)^2}$
$\leq |x-y| \frac{2}{(1+b)^2} = |x-y| \frac{1}{16} \left(\frac{1+b}{3}\right)^{\frac{-3}{2}} \frac{-ln|x-y|}{-ln|x-y|}$
Sea $F_b : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F_b(u) = \frac{u}{(u^2+1+b)^2}$

Observemos que ,para cada $b > 0$,F_b alcanza su máximo absoluto en $\sqrt{\frac{1+b}{3}}$ y $0 \leq F_b(x) \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1+b}{3}\right)^{\frac{-3}{2}}$

Definamos $F:\left[0,\frac{1}{2}\right]\rightarrow\mathbb{R}, F\left(u\right)=\begin{cases}0 & u=0\\ -ulnu & u>0\end{cases}$

Trivialmente, $F\in\mathcal{C}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$. Un simple análisis da como resultado que $0\leq F\left(u\right)\leq e^{-1}$ si $u\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

En resúmen, $\left|\frac{1}{x^2+1+b}-\frac{1}{y^2+1+b}\right|\leq\frac{1}{2}2\frac{1}{16}\left(\frac{1+b}{3}\right)^{\frac{-3}{2}}e^{-1}\frac{1}{-ln|x-y|}=\frac{1}{16}\left(\frac{1+b}{3}\right)^{\frac{-3}{2}}e^{-1}\frac{1}{-ln|x-y|}$

Ahora verifiquemos que $|p\left(x\right)-p\left(y\right)|\leq\frac{C}{ln(e+|x|)}$ $x,y\in\mathbb{R}$ $|y|\geq|x|$

Comencemos por observar que si $|y|\geq|x|$,$y^2\geq x^2$ y por consiguiente,, $y^2+1+b\geq x^2+1+b$,

así que $\left|\frac{1}{x^2+1+b}-\frac{1}{y^2+1+b}\right|=\frac{1}{x^2+1+b}-\frac{1}{y^2+1+b}\leq\frac{1}{x^2+1+b}=\frac{1}{x^2+1+b}\frac{ln(e+|x|)}{ln(e+|x|)}=$
$\frac{e+|x|}{x^2+1+b}\frac{1}{e+|x|}\frac{ln(e+|x|)}{ln(e+|x|)}$

Afirmo que $\frac{e+|x|}{x^2+1+b}$ es acotado superiormente $\forall b>0$.

En efecto, para cada $b>0$, sea $G_b:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $G_b\left(u\right)=\frac{e+u}{u^2+1+b}$

Esta funcion alcanza su máximo en $x=\sqrt{1+b+e^2}-e$ y es $\frac{\sqrt{1+b+e^2}}{2\left(\sqrt{1+b+e^2}-e\right)}$

Luego, $\frac{e+|x|}{x^2+1+b}\frac{1}{e+|x|}\frac{ln(e+|x|)}{ln(e+|x|)}\leq\frac{\sqrt{1+b+e^2}}{2\left(\sqrt{1+b+e^2}-e\right)}\frac{1}{e+|x|}\frac{ln(e+|x|)}{ln(e+|x|)}$

Analizando la función $F\left(u\right)=\frac{lnu}{u}$ en $[e,+\infty)$,obtenemos que $F\left(u\right)\leq\frac{1}{e}$,de tal forma que $\frac{e+|x|}{x^2+1+b}\frac{1}{e+|x|}\frac{ln(e+|x|)}{ln(e+|x|)}\leq\frac{\sqrt{1+b+e^2}}{2\left(\sqrt{1+b+e^2}-e\right)}\frac{1}{e}\frac{1}{ln(e+|x|)}$

Luego, si $f\in\mathbb{L}^{p(.)}$, $I_\alpha\left(f\right)$,$\mathcal{M}_\alpha$ (f)y $M\left(f\right)$ pertenecen a $\mathrm{L}^{\mathrm{q}(.)}$

4.3. Teoremas de extrapolación

Para exponer estos resultados necesitamos una definición previa, que daremos a continuaciòn

Definición 81. Diremos que $p(x)$ y $p\acute{}(x)$son exponentes conjugados si $\forall x\in Dom\left(p\right)$, $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p\acute{}(x)}=1$

La relación entre pesos y espacios $\mathbb{L}^{p(.)}$,donde $p:\mathbb{R}^{\mathrm{d}}\rightarrow[1,+\infty]$donde $\underset{x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}{esssupp}\left(x\right)<\infty$ está dado por los dos teoremas y el corolario que incluimos a continuación y que pueden consultarse en [3] y en [9].,que desarrollaremos a continuaciòn

Teorema 82. *Sea* $0<\alpha<d$ *y sea* $p\left(.\right)$*una función que verifica* $1<\underset{x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}{essinf}p\left(x\right)\leq p\left(x\right)\leq\underset{x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}{esssup}\left(x\right)<\infty$ *y sea* $q\left(x\right)$ *que verifica* $\frac{1}{q(x)}=\frac{1}{p(x)}-\frac{\alpha}{d}$

Entonces la siguiente desigualdad es válida para toda función f *:*

$$M_\alpha f\left(x\right)\leq\left(M\left(\left|f^{\frac{p(.)}{q(.)}\frac{\alpha}{d-\alpha}}\right|\left(x\right)\right)\right)^{1-\frac{\alpha}{d}}\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}|f\left(y\right)|^{p(y)}dy\right)^{\frac{\alpha}{d}}$$

Demostración. Sea $B\subset\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ una bola de centro xy teniendo en cuenta que $\frac{p(y)}{q(y)}+\frac{\alpha p(y)}{d}=1$,

$\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_B|f\left(y\right)|dy=\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_B|f\left(y\right)|dy=\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{d}}}\int_B|f\left(y\right)|^{\frac{p(y)}{q(y)}}|f\left(y\right)|^{\frac{\alpha p(y)}{d}}dy$

$\leq\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f\left(y\right)|^{\frac{p(y)}{q(y)}\frac{\alpha}{d-\alpha}}dy\right)^{1-\frac{\alpha}{d}}\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}|f\left(y\right)|^{p(y)}dy\right)^{\frac{\alpha}{d}}$

$\leq M_\alpha f\left(x\right)\leq\left(M\left(\left|f^{\frac{p(.)}{q(.)}\frac{\alpha}{d-\alpha}}\right|\left(x\right)\right)\right)^{1-\frac{\alpha}{d}}\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}|f\left(y\right)|^{p(y)}dy\right)^{\frac{\alpha}{d}}$

Una aplicación directa de este lema nos permite obtener la acotabilidad de $M_\alpha$en los espacios $\mathbb{L}^{p(\cdot)}$ $\square$

TEOREMA 83. *Dada una familia $\mathcal{F}$ y un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, supongamos que para algun $0 < p_0 < \infty$ y para todo peso $\omega \in A_1$*

$$\int_\Omega f(x)^{p_0}\,\omega(x)\,dx \leq C_0 \int_\Omega g(x)^{p_0}\,\omega(x)\,dx$$

con $f,\, g \in \mathcal{F}$,donde C_0depende unicamente de p_0 y la constante $\acute{A_1}$ de ω.

Si $p(.) \in \mathcal{P}^0(\Omega)$verifica :que $p_0 < \underset{x\in\Omega}{essinf}\, p(x)$,y que $\left(\frac{p(.)}{p_0}\right)^{\acute{}} \in \mathcal{B}(\Omega)$, entonces,

$$\|f\|_{p(x),\Omega} \leq C\,\|g\|_{p(x),\Omega}$$

La relación entre espacios $\mathbb{L}^{p(\cdot)}$ y la integral fraccionaria se basa en el siguiente teorema, tambien desarrollado en [3]

TEOREMA 84. *Dada una familia $\mathcal{F}$y Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$con la propiedad que para algun p_0 y algun q_0,tales que $0 < p_0 \leq q_0 < \infty$*

$\forall \omega \in A_1$,

$$\left(\int_\Omega f(x)^{q_0}\,\omega(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q_0}} \leq C_0 \left(\int_\Omega g(x)^{p_0}\,\omega^{\frac{p_0}{q_0}}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p_0}}$$

Dado $p(.) \in \mathcal{P}^0(\Omega)$ con la propiedad que $p_0 < \underset{x\in\Omega}{essinf}\, p(x) \leq \underset{x\in\Omega}{esssup}\, p(x) < \frac{p_0 q_0}{q_0 - p_0}$

y definida $q(.)$ a través de la ecuación $\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}$, $x \in \Omega$

Si $\left(\frac{q(x)}{q_0}\right)^{\acute{}} \in \mathcal{B}(\Omega)$, entonces $\forall f,\, g \in \mathcal{F}$ tal que $f \in \mathbb{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$tenemos que

$$\|f\|_{q(.),\Omega} \leq C\,\|g\|_{p(.),\Omega}$$

COROLARIO 85. *Sean $p(.)$y $q(.)/p \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\underset{x\in\Omega}{esssup}\, p < \frac{d}{\alpha}$,$\underset{x\in\Omega}{esssup}\, q < \infty$ y $\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{d}{\alpha}$*

si existe $q_0/\frac{d}{d-\alpha} < q_0 < \infty$ con la propiedad que $\underset{x\in\Omega}{essinf}\, \frac{q(x)}{q_0} \geq 1$ y que $\underset{x\in\Omega}{esssup}\, \frac{q}{q_0} < \infty$ tenemos que

$$\|I_\alpha f\|_{q(.),\Omega} \leq C\,\|f\|_{p(.),\Omega}$$

y que

$$\|M_\alpha f\|_{q(.),\Omega} \leq C\,\|f\|_{p(.),\Omega}$$

Bibliografía

[1] David R. Adams and Lars Inge Hedberg. *Function spaces and potential theory*, volume 314 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[2] Yunmei Chen, Stacey Levine, and Murali Rao. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM J. Appl. Math.*, 66(4):1383–1406, 2006.

[3] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, J. M. Martell, and C. Pérez. The boundedness of classical operators on variable L^p spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 31(1):239–264, 2006.

[4] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, and C. J. Neugebauer. The maximal function on variable L^p spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 28(1):223–238, 2003.

[5] Piero D'Ancona and Vladimir Georgiev. On the continuity of the solution operator to the wave map system. *Comm. Pure Appl. Math.*, 57(3):357–383, 2004.

[6] Pablo L. De Nápoli, Irene Drelichman, and Ricardo G. Durán. On weighted inequalities for fractional integrals of radial functions. *Illinois J. Math.*, 55(2):575–587 (2012), 2011.

[7] Javier Doudikoetzea Suazo. *Analisis de Fourier*. Addison Wesley /Universidad Autonoma de madrid, 1995.

[8] Norverto Fava and Felipe Zo. *Medida e integral de Lebesgue*. Red Olimpica Argentina, 1996.

[9] Osvaldo Gorosito, Gladis Pradolini, and Oscar Salinas. Boundedness of the fractional maximal operator on variable exponent Lebesgue spaces: a short proof. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 53(1):25–27, 2012.

[10] Alejandro de Jesús Gómez Jurado. Desigualdad con pesos para la funciòn maximal de hardy littlewood. Master's thesis, Universidad de Sonora, 2012.

[11] T Hao. *Electrorheological fluids*. Elsiever, 2006.

[12] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Some properties of fractional integrals. II. *Math. Z.*, 34(1):403–439, 1932.

[13] Lars Inge Hedberg. On certain convolution inequalities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 36:505–510, 1972.

[14] Sigurdur Helgason. *The Radon transform*, volume 5 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.

[15] Yoshihiro Mizuta. *Potential theory in Euclidean spaces*, volume 6 of *GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications*. Gakkōtosho Co., Ltd., Tokyo, 1996.

[16] Kabe Moen. Sharp one-weight and two-weight bounds for maximal operators. *Studia Math.*, 194(2):163–180, 2009.

[17] B Muckenhoupt and R Wheeden. Weighted norm inequalities for fractional integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 192:261–274, 1974.

[18] Umberto Neri. Some properties of functions with bounded mean oscillation. *Studia Math.*, 61(1):63–75, 1977.

[19] Nikolaos Pattakos and Alexander Volberg. The Muckenhoupt A_∞ class as a metric space and continuity of weighted estimates. *Math. Res. Lett.*, 19(2):499–510, 2012.

[20] Lubos Pick and Michael Ruzicka. An example of a space $L^{p(x)}$ on which the Hardy-Littlewood maximal operator is not bounded. *Expo. Math.*, 19(4):369–371, 2001.

[21] Gladis Pradolini. Espacios lp con exponente variable. In *Cursos de la reunion anual de la Union Matematica Argentina*, 2015.

[22] M. Riesz. L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy pour l'équation des ondes. *Bull. Soc. Math. France*, 67:153–170, 1939.

[23] B. S. Rubin. One-dimensional representation, inversion and certain properties of Riesz potentials of radial functions. *Mat. Zametki*, 34(4):521–533, 1983.

[24] E. Sawyer and R. L. Wheeden. Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces. *Amer. J. Math.*, 114(4):813–874, 1992.

[25] S Sobolev. On a theorem of functional analysis. *Transactions American Mathematical Society*, 34:39–68, 1938.

[26] Daniel Spector and Rahuk Garg. On the role of riesz potential in poisson equations and sobolev embeddings. *Preprint arXiv:1404.1563*, page 21, 2014.

[27] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[28] Elias M. Stein and Guido Weiss. Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space. *J. Math. Mech.*, 7:503–514, 1958.

[29] A Torchinsky. *Rea variable methods in harmonic analysis*. Academic Press, 1986.

[30] B Turesson. *Nonlinear potential theory and weighted Sobolev spaces*, volume 1736 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[31] G. V. Welland. Weighted norm inequalities for fractional integrals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 51:143–148, 1975.

[32] V. V. Zhikov. Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 50(4):675–710, 877, 1986.