



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

El anillo de coordenadas homogéneas de una variedad tórica

Sebastián Lucas Velazquez

Director: Fernando Cukierman

15 de Marzo de 2017



# Agradecimientos

- En primer lugar quiero agradecer a mi familia, por apoyar mis decisiones y siempre creer en mí.
- A Fernando, por inciarne en la Geometría Algebraica y haberme propuesto este tema. Al seminario, por sus cenas y sus charlas.
- A los Jurados, César Massri y Alicia Dickenstein, por tomarse el tiempo de leer esta tesis y por sus observaciones.
- A Javi, por arremangarse conmigo cuando lo necesité.
- A Seba, por haber compartido conmigo todo el trayecto y por todas esas charlas. Que siga así.
- A Abese, porque con una banda así es todo más fácil.
- A mis docentes y compañeros de cursada, por hacer todo esto realmente ameno.
- A todos los que de alguna manera me acompañaron desde afuera.



# Índice general

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1	El Toro . . . . .	9
1.2	Conos y abanicos . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Variedades tóricas</b>	<b>15</b>
2.1	Variedades afines . . . . .	15
2.2	La variedad tórica $X_\Sigma$ . . . . .	19
2.3	Morfismos tóricos . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Divisores</b>	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>Variedades tóricas como buenos cocientes</b>	<b>43</b>
4.1	Algunas definiciones . . . . .	43
4.2	El anillo de coordenadas homogéneas . . . . .	45
4.2.1	El grupo $G$ . . . . .	46
4.2.2	El conjunto $Z$ . . . . .	48
4.2.3	El morfismo $\pi$ . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Aplicaciones</b>	<b>57</b>
5.1	Algunas aplicaciones clásicas . . . . .	57
5.2	Foliaciones en variedades tóricas . . . . .	64
5.2.1	Foliaciones en variedades suaves . . . . .	64
5.2.2	El caso simplicial . . . . .	73



# Introducción

Las variedades tóricas son variedades algebraicas muy especiales. Por ejemplo, tienen un toro por abierto denso y por lo tanto son racionales. No obstante, esta familia de variedades ha demostrado ser de mucha utilidad a la hora de ejemplificar teorías generales de la geometría algebraica. Esto se debe probablemente a que los cálculos sobre este tipo de variedades son más sencillos, ya que tienen un factor extra: la geometría tórica se corresponde fuertemente con la geometría simplicial. Originalmente, las variedades tóricas surgen en los '70 como compactificaciones del toro bajo el nombre “torus embeddings”. Ejemplos famosos de variedades tóricas son los espacios afines, los espacios proyectivos y los espacios proyectivos con pesos.

El objetivo principal de esta tesis es construir coordenadas homogéneas similares a las que tenemos para los espacios proyectivos en una variedad tórica normal arbitraria. El primero en notar la existencia de esta construcción fue M. Audin en [A] en el año 1991. Usaremos la construcción hecha por David Cox en 1993 y publicada en [Cox] en el año 1995.

En el primer capítulo daremos algunas nociones de grupos algebraicos y los objetos simpliciales con los que trabajaremos. El Capítulo 2 provee los conceptos básicos de la teoría clásica de variedades tóricas. En el Capítulo 3 usaremos todo esto para describir los grupos de divisores en términos de la información de los objetos simpliciales asociados a nuestra variedad. El cuarto capítulo es un desarrollo detallado de la construcción hecha por Cox en 1993. El último tramo de la tesis está dividido a grandes rasgos en dos partes: en la primera haremos algunas aplicaciones allegadas a la geometría algebraica clásica. Por ejemplo, extenderemos la correspondencia de Serre entre módulos graduados y haces cuasi-coherentes sobre los espacios proyectivos (ver[S]) al contexto de variedades tóricas. La segunda parte de esta sección está dedicada a hacer una descripción en coordenadas homogéneas del espacio de moduli de foliaciones en una variedad tórica simplicial.





# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 El Toro

A lo largo del texto,  $N$  y  $M$  son reticulados de dimensión  $n$  duales entre sí. De la misma manera, el subíndice  $-\mathbb{R}$  hace referencia al  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial generado a partir de dichos reticulados. Si bien  $N$  y  $M$  son isomorfos como grupos, les daremos interpretaciones totalmente distintas: los puntos de  $N$  serán “curvas”, mientras que los de  $M$  representarán funciones.

**Definición 1.1.1.** Un *toro* es una variedad afín  $T \simeq (\mathbb{C}^*)^s$  para algún  $s \in \mathbb{N}$ .

Mediante el isomorfismo, todo toro es automáticamente un grupo algebraico.

Decimos que  $\alpha : \mathbb{C}^* \rightarrow T$  es un grupo uniparamétrico si  $\alpha$  es un morfismo de grupos. Estos morfismos conforman al mismo tiempo un grupo mediante la multiplicación de  $T$ . Si pensamos que  $\alpha$  llega a  $(\mathbb{C}^*)^s$  (aquí estamos fijando un isomorfismo) y tenemos en cuenta que la composición con las proyecciones nos dará un caracter de  $\mathbb{C}^*$ , se tiene que el morfismo viene dado por una  $s$ -tupla  $(n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{Z}^s$  de modo que  $\alpha(t) = (t^{n_1}, \dots, t^{n_s})$ . De esta manera, llamando  $N$  al conjunto de grupos uniparamétricos, tenemos  $N \simeq \mathbb{Z}^s$ .

Por otro lado, cualquier caracter sobre  $T$  será de la forma  $(t_1, \dots, t_s) \xrightarrow{\chi^m} \prod t_i^{m_i}$  para alguna  $s$ -tupla  $m = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s$ , donde para tomar coordenadas usamos el mismo isomorfismo que antes. Entonces, llamando  $M$  al grupo de caracteres sobre  $T$ , tenemos  $M \simeq \mathbb{Z}^s$ . Más aún, si  $\alpha^n$  es un grupo uniparamétrico dado por  $n \in \mathbb{Z}^s$  y  $\chi^m \in M$ , tenemos que  $\chi^m \circ \alpha$  es un caracter de  $\mathbb{C}^*$ . Luego, debe existir un  $z \in \mathbb{Z}$  tal que el morfismo se reduce a  $t \in \mathbb{C}^* \mapsto t^z$ . Podemos definir entonces una dualidad

$$\langle \chi^m, \alpha^n \rangle = z.$$

De este modo,  $M$  y  $N$  son reticulados duales. Más aún, una vez fijado el isomorfismo  $T \simeq (\mathbb{C}^*)^s$ , se tiene

$$\langle \chi^m, \alpha^n \rangle = \langle m, n \rangle = \sum_{i=1}^s m_i n_i.$$

Estas identificaciones nos permite pensar a  $T$  como el “producto” de sus grupos uniparamétricos con sus evaluaciones. Más formalmente, tenemos  $T \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  donde  $n \otimes t \mapsto \alpha^n(t)$ . Es por esto que muchas veces escribiremos  $T_N$  en vez de  $T$ .

En general, vamos a querer que los morfismos algebraicos entre toros sean además morfismos de grupos. La siguiente proposición ilustra una de las ventajas de trabajar con este tipo de morfismos:

**Proposición 1.1.1.** Sean  $T_1$  y  $T_2$  toros y  $\phi : T_1 \rightarrow T_2$  un morfismo algebraico que es un morfismo de grupos. Entonces  $\phi(T_1)$  es un toro cerrado en  $T_2$ .

Toda acción de nuestro toro  $T_N$  en una variedad, induce una acción en sus funciones regulares. Éstas últimas forman un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial, por lo que podemos pensar a cada  $t \in T_N$  como un autormorfismo en este espacio.

Supongamos que tenemos una acción de  $T_N$  en un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $V$  de dimensión finita. Si pensamos a  $t \in T_N$  como un automorfismo de  $V$ , tenemos para cada  $m \in M$  el autoespacio

$$V_m = \{v \in V \mid t \cdot v = \chi^m(t)v \ \forall t \in T_N\}.$$

Resulta que éstos subespacio diagonalizan todas las acciones simultáneamente:

**Proposición 1.1.2.** En la situación anterior, tenemos

$$V = \bigoplus_{m \in M} V_m.$$

En la práctica tendremos la acción de  $T_N$  en  $\mathbb{C}[M]$  inducida por  $t \cdot \chi^m = \chi^m(t)\chi^m$ . Entonces la proposición anterior nos dice que si  $V \subseteq \mathbb{C}[M]$  es un subespacio de dimensión finita  $T_N$ -invariante, entonces

$$V = \bigoplus_{\chi^m \in V} \mathbb{C}\chi^m.$$

Las demostraciones para estas últimas dos proposiciones pueden verse en [?].

## 1.2 Conos y abanicos

A continuación discutiremos algunos resultados sobre los objetos simpliciales centrales en la teoría de variedades tóricas. Las demostraciones faltantes pueden verse en [F].

**Definición 1.2.1.** Un *cono poliedral*  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma

$$\sigma = \text{Cone}(v_1, \dots, v_r) = \left\{ \sum_{i=1}^r a_i v_i \mid a_i \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Diremos que el cono es *racional* si podemos tomar a los  $v_i \in N$ .

La dimensión de  $\sigma$  será la dimensión del espacio vectorial más chico que lo contenga. De aquí en adelante cuando hablemos de un “cono” en  $N_{\mathbb{R}}$  estaremos hablando de conos racionales poliedrales estrictamente convexos, esto es, conos que no contengan ningún subespacio distinto de  $\{0\}$ .

**Definición 1.2.2.** Si  $\sigma$  es un cono, una *cara* de  $\sigma$  es un subconjunto  $\tau$  de la forma  $\tau = H_m \cap \sigma$  con  $m \in M_{\mathbb{R}}$ , donde

$$H_m = \{x \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, x \rangle = 0\}$$

$$H_m^+ = \{x \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, x \rangle \geq 0\} \supseteq \sigma.$$

En este caso notaremos  $\tau \leq \sigma$  y diremos que  $H_m$  *soporta* a  $\sigma$ .

Cabe aclarar que esta definición de “cara” de una figura poliedral generaliza la noción habitual (pues ahora las aristas y los vértices también son caras). Las caras de un cono  $\sigma = \text{Cone}(v_1, \dots, v_r)$  son nuevamente conos. Más aún, si  $\tau \leq \sigma$  entonces

$$\tau = \text{Cone}(v_i \mid v_i \in \tau).$$

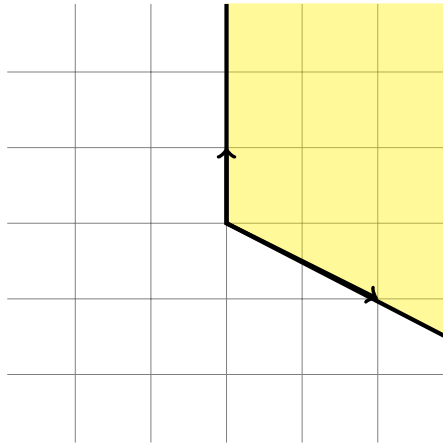
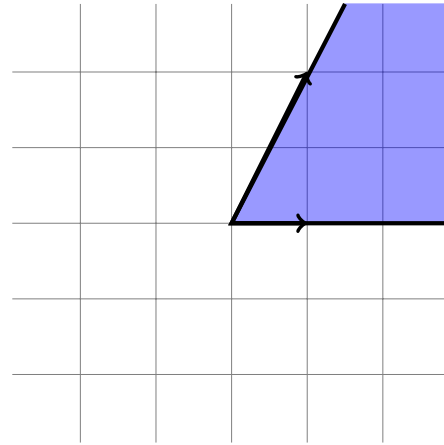
A las caras de codimensión y dimensión 1 las llamaremos *facetas* y *rayos* respectivamente. Denotaremos  $\sigma(k)$  al conjunto de caras de dimensión  $k$  de  $\sigma$ . Para cada  $\rho \in \sigma(1)$  existe un único “primer elemento” del reticulado que llamaremos  $u_\rho$ .

Es fácil convencerse de que el conjunto  $\{m \in M_{\mathbb{R}} \text{ tales que } \sigma \subseteq H_m^+\}$  tiene la misma información que el cono  $\sigma$  en sí mismo. Esto motiva la siguiente definición:

**Definición 1.2.3.** Sea  $\sigma$  un cono en  $N_{\mathbb{R}}$ . El *cono dual a sigma* es

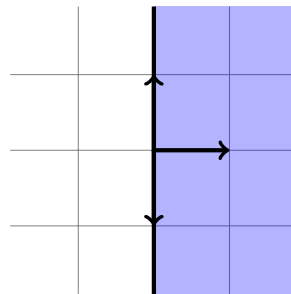
$$\sigma^\vee = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \sigma\} \subseteq M_{\mathbb{R}}.$$

**Ejemplo 1.2.1.** Tomemos el cono  $\sigma \subseteq \mathbb{R}^2$  definido por  $\sigma = \text{Cone}(e_2, 2e_1 - e_2)$ . Es fácil ver que  $\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1, e_1 + 2e_2)$ .


 $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 

 $\sigma^\vee \subseteq M_{\mathbb{R}}$ 

▲

**Ejemplo 1.2.2.** En  $\mathbb{R}^2$ , si tomamos  $\sigma = \text{Cone}(e_1)$  entonces  $\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1, e_2, -e_2)$ .


 $\sigma^\vee \subseteq M_{\mathbb{R}}$ 

▲

Se puede ver fácilmente que  $\sigma^\vee \subseteq M_{\mathbb{R}}$  es nuevamente un cono racional poliedral. Sin embargo, éste último ejemplo nos dice que  $\sigma^\vee$  puede no ser estrictamente convexo.

**Proposición 1.2.1.** Sea  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un cono. Entonces  $\sigma^\vee$  es estrictamente convexo si y sólo si  $\dim(\sigma) = \dim(N_{\mathbb{R}})$ .

Por construcción,  $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$ . Llamaremos  $S_\sigma$  al semigrupo  $\sigma^\vee \cap M$ . Un resultado fundamental para las construcciones posteriores es el siguiente:

**Proposición 1.2.2.** (Lema de Gordan) Sea  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un cono racional poliedral. Entonces  $S_{\sigma}$  es finitamente generado.

Más adelante, usaremos el concepto de *interior relativo* para diferenciar a  $\sigma$  de sus caras.

**Definición 1.2.4.** El interior relativo de  $\sigma$  se define como el interior de  $\sigma$  dentro del subespacio  $\langle \sigma \rangle$ . Denotaremos a este conjunto  $Relint(\sigma)$ .

Se puede ver que

$$u \in Relint(\sigma) \Leftrightarrow \langle m, u \rangle > 0 \quad \forall m \in \sigma^{\vee} \setminus \sigma^{\perp}.$$

Esto nos dice que  $Relint(\sigma)$  es la parte de  $\sigma$  que no está en ninguna de sus caras propias.

Nos interesarán dos tipos de regularidad para nuestros conos:

**Definición 1.2.5.** Decimos que un cono  $\sigma$  es *suave* si existe alguna base del reticulado  $N$  que contenga a  $\{u_{\rho} | \rho \in \sigma(1)\}$ .

**Definición 1.2.6.** Decimos que un cono  $\sigma$  es *simplicial* si existe alguna base del  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial  $N_{\mathbb{R}}$  que contenga a  $\{u_{\rho} | \rho \in \sigma(1)\}$ .

Una forma natural de generalizar la definición de cono es la siguiente:

**Definición 1.2.7.** Un *abanico*  $\Sigma$  es una colección finita de conos de  $N_{\mathbb{R}}$  tal que:

1. Si  $\sigma \in \Sigma$  y  $\tau \leq \sigma$  entonces  $\tau \in \Sigma$ .
2. Si  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$  entonces  $\sigma_1 \cap \sigma_2 \leq \sigma_{1,2}$  ( y por el item anterior, está en  $\Sigma$ ).

El *soporte* de  $\Sigma$  es  $|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$ . Denotaremos  $\Sigma(k)$  al subconjunto de conos de dimensión  $k$  y  $\langle \Sigma \rangle$  al subespacio de  $N_{\mathbb{R}}$  más chico que contiene a  $|\Sigma|$ .

**Definición 1.2.8.** Decimos que  $\Sigma$  es *completo* si  $|\Sigma| = N_{\mathbb{R}}$ .

La regularidad de estos objetos se define de forma local, es decir:

**Definición 1.2.9.** 7 Decimos que  $\Sigma$  es suave si cada cono  $\sigma \in \Sigma$  es suave.

**Definición 1.2.10.** 8 Decimos que  $\Sigma$  es simplicial si cada cono  $\sigma \in \Sigma$  es simplicial.

Si tenemos una colección de conos  $\{\sigma_i\}$  tal que  $\sigma_i \cap \sigma_j \leq \sigma_{i,j}$ , tiene sentido considerar el abanico  $\Sigma$  *generado por* los  $\{\sigma_i\}$ . De esta forma,  $\Sigma$  consistirá de todas las caras de cada elemento de la colección.

**Observación 1.2.1.** Dos reticulados  $N' \subseteq N$  de la misma dimensión tienen el mismo espacio vectorial asociado, por lo que podríamos pensar un abanico  $\Sigma$  tanto en  $N$  como en  $N'$ . Las construcciones que haremos a lo largo de esta tesis son sensibles a la aritmética de los conos, por lo que escribiremos  $\Sigma, N$  cuando sea necesario hacer énfasis en que estamos pensando a  $\Sigma$  dentro del reticulado  $N$ .

# Capítulo 2

## Variedades tóricas

En esta sección daremos las definiciones y algunos resultados básicos de la teoría de variedades tóricas. Omitiremos algunas demostraciones, que pueden verse en [F] o [CLS]. De ahora en adelante, cuando hablemos de una “variedad tórica” estaremos queriendo decir lo siguiente:

**Definición 2.0.1.** Una *variedad tórica* es una variedad algebraica normal  $X$  provista de un abierto Zariski  $T \subseteq X$  tal que  $T$  es un toro y la estructura de grupo de  $T$  se extiende a una acción algebraica en  $X$ . Esto es equivalente a que haya un morfismo  $g : T \times X \rightarrow X$  que haga conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T \times T & \longrightarrow & T \\ \downarrow 1 \times i & & \downarrow i \\ T \times X & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

### 2.1 Variedades afines

Recordemos que el anillo de coordenadas del toro  $T_N$  es el álgebra  $\mathbb{C}[M]$  generada por sus caracteres. Las funciones en  $T_N$  que se extienden a  $X$  constituyen el anillo  $\mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{C}[M]$ . Consideremos el conjunto  $S$  de caracteres de que se extienden a  $X$ . La Proposición 1.1.2 nos dice que  $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[S]$ . Además,  $S$  tiene una estructura natural de semigrupo. Resulta que éstos semigrupos ya nos son conocidos, como muestra el siguiente teorema:

**Teorema 2.1.1.** Sea  $X$  una variedad afín. Son equivalentes:

1.  $X$  es una variedad tórica con toro  $T_N$ .

2. Existe un cono  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  tal que

$$X = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma}]).$$

En este caso usaremos la notación  $X = U_{\sigma}$ .

La demostración de este teorema usa fuertemente el Lema de Gordan. Para ver una descripción de  $U_{\sigma}$  en coordenadas, basta con tomar un conjunto de la forma  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq S_{\sigma}$  tal que  $\mathbb{N}\mathcal{A} = S_{\sigma}$  y considerar el morfismo  $\phi_{\mathcal{A}} : T_N \rightarrow \mathbb{C}^s$  definido por

$$t \mapsto (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)).$$

De esta forma, se puede ver que  $U_{\sigma} \simeq \overline{\text{Im}(\phi_{\mathcal{A}})}$ , donde estamos tomando clausura Zariski. Observemos que la Proposición 1.1.1 nos dice que  $\phi_{\mathcal{A}}(T_N) \subseteq (\mathbb{C}^*)^s$  es un toro cerrado en  $(\mathbb{C}^*)^s$ . Con esta identificación, tenemos que  $\phi_{\mathcal{A}}(T_N)$  actúa en  $U_{\sigma}$  vía la multiplicación coordenada a coordenada.

Cuando hablemos de *puntos* en  $U_{\sigma}$  nos referiremos a puntos cerrados, es decir, ideales maximales de  $\mathbb{C}[S_{\sigma}]$ . Veamos otra forma de caracterizar a los puntos de  $U_{\sigma}$ :

**Proposición 2.1.1.** Sea  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un cono. Existe una biyección

$$\{\text{puntos de } U_{\sigma}\} \longrightarrow \{\text{morfismos } S_{\sigma} \rightarrow \mathbb{C}\},$$

donde estamos pensando a  $\mathbb{C}$  como semigrupo con el producto.

*Demostración.* Si bien no daremos una demostración detallada, nos será de utilidad explicitar la biyección.

Para cada punto  $p \in U_{\sigma}$  tenemos el morfismo estándar  $\gamma_p$

$$f \in \mathbb{C}[S_{\sigma}] \longmapsto f(p) \in \mathbb{C}.$$

Si nos restringimos a  $S_{\sigma}$ , es claro que  $\gamma_p : S_{\sigma} \rightarrow \mathbb{C}$  es un morfismo de semigrupos.

Para construirnos una aplicación inversa tomemos un morfismo  $\gamma$ . y extendámoslo a un morfismo de álgebras

$$\bar{\gamma} : \mathbb{C}[S_{\sigma}] \rightarrow \mathbb{C}.$$

Con esto en mente, podemos asignarle a  $\gamma$  el punto correspondiente al ideal  $\ker(\bar{\gamma})$ . Es fácil convencerse de que éstas funciones son inversas.

□



Con esta nueva caracterización podemos explicitar fácilmente la acción de  $T_N$  en la variedad  $U_\sigma$ . La acción de  $T_N$  en  $\mathbb{C}[M]$  induce una acción en el conjunto de morfismos  $S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ . Más precisamente, si  $t \in T_N$  y  $p \in U_\sigma$ ,

$$\begin{aligned} t \cdot \gamma_p(m) &= \gamma_p(t \cdot m) = (t \cdot m)(p) \\ &= \chi^m(t)\chi^m(p) \\ &= \chi^m(t)\gamma_p(m). \end{aligned}$$

Como  $m \mapsto \chi^m(t)\gamma_p(m)$  es un morfismo de semigrupos, define un punto  $p' \in U_\sigma$  tal que

$$t \cdot \gamma_p = \gamma_{p'}.$$

Recordemos que  $S_\sigma \subseteq M$ . Observemos que

$$\dim(\sigma) = \dim(N_{\mathbb{R}}) \iff S_\sigma \cap -S_\sigma = \{0\}.$$

Esto es equivalente a que el morfismo  $\gamma_\sigma$  definido por

$$\gamma_\sigma(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

sea un morfismo de semigrupos. La siguiente proposición caracteriza mejor a  $\gamma_\sigma$ :

**Proposición 2.1.2.** Sea  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un cono. Son equivalentes:

1. La acción de  $T_N$  sobre  $U_\sigma$  tiene un punto fijo.
2.  $\dim(\sigma) = \dim(N_{\mathbb{R}})$ .

Si este fuera el caso, el único punto fijo es  $\gamma_\sigma$ .

Más adelante volveremos a explorar la relación entre la  $\dim(\sigma)$  y las órbitas de la variedad  $U_\sigma$ . Volviendo a la primer caracterización,  $\gamma_\sigma \in \text{Spec}(\mathbb{C}[U_\sigma])$  es el punto dado por el ideal maximal  $\langle \chi^m \mid m \in S_\sigma \setminus \{0\} \rangle$ .

En el caso en que  $\dim(\sigma) \neq \dim(N_{\mathbb{R}})$  no tendremos puntos fijos. No obstante, hay una forma de adaptar la construcción anterior.

**Definición 2.1.1.** Sea  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un cono. El *punto distinguido* de  $U_\sigma$  es aquel cuyo morfismo asociado es el definido por

$$\gamma_\sigma(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in \sigma^\perp \\ 0 & \text{si } m \in S_\sigma \setminus \sigma^\perp. \end{cases}$$

Una de las ventajas de la identificación de una variedad tórica con un cono en  $N_{\mathbb{R}}$  es que preserva muchas de las propiedades geométricas. Por ejemplo, tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 2.1.3.** Sea  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un cono. Entonces  $U_{\sigma}$  es no singular si y sólo si  $\sigma$  es suave.

**Ejemplo 2.1.1.** Sean  $1 \leq r \leq n$ . Consideremos el cono  $\sigma = \text{Cone}(e_1, \dots, e_r) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Es fácil ver que

$$\sigma^{\vee} = \text{Cone}(e_1, \dots, e_r, \pm e_{r+1}, \dots, \pm e_n),$$

por lo que  $\mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap M] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r, x_{r+1}^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . Luego,

$$U_{\sigma} \simeq \mathbb{C}^r \times (\mathbb{C}^*)^{n-r}.$$

Cuando entendamos el concepto de morfismo tórico nos será evidente que esto vale para cualquier cono suave, es decir, podemos cambiar los puntos  $\{e_1, \dots, e_r\}$  por cualquier subconjunto de  $r$  vectores con formen parte de alguna base de  $\mathbb{Z}^n$ . ▲

**Ejemplo 2.1.2.** Vamos a usar el cono simplicial  $\sigma = \text{Cone}(e_2, 2e_1 - e_2)$  del Ejemplo 1.2.1. En este caso,

$$S_{\sigma} = \langle e_1, e_1 + e_2, e_1 + 2e_2 \rangle_{\mathbb{Z}},$$

por lo que

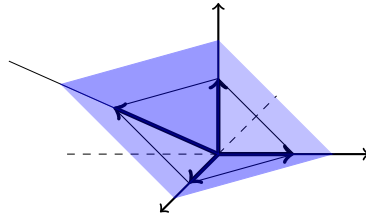
$$\begin{aligned} \mathbb{C}[S_{\sigma}] &\simeq \mathbb{C}[x, xy, xy^2] \\ &\simeq \mathbb{C}[x, y, z, ] / \langle z^2 - xy \rangle. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que  $U_{\sigma} \simeq V(z^2 - xy) \subseteq \mathbb{R}^3$ , que es singular en  $\{(0, 0, 0)\}$ . Esto se condice con el hecho de que  $\sigma$  no sea suave. ▲

**Observación 2.1.1.** Más en general, cualquier cono  $\sigma \subseteq \mathbb{R}^2$  es simplicial. Más adelante veremos que esto quiere decir que toda superficie tórica es un orbifold.

**Ejemplo 2.1.3.** Veamos ahora un ejemplo de cono no simplicial. Tomemos

$$\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2, e_3, e_1 - e_2 + e_3) \subseteq \mathbb{R}^3.$$



$$\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}.$$

De esta forma,  $S_\sigma = \langle e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 \rangle_{\mathbb{Z}}$ , por lo que

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[S_\sigma] &= \mathbb{C}[x, xy, yz, z] \\ &\simeq \mathbb{C}[x, y, z, w]/\langle wz - xy \rangle.\end{aligned}$$

Luego,  $U_\sigma \simeq V(wz - xy) \subseteq \mathbb{C}^4$ . ▲

## 2.2 La variedad tórica $X_\Sigma$

Como vimos anteriormente, un abanico  $\Sigma$  es una colección de conos compatibles entre sí. Ya le hemos asignado a cada cono una variedad tórica afín. Para construir la variedad tórica abstracta  $X_\Sigma$  asociada a nuestro abanico, traduciremos la compatibilidad de los conos en datos de pegado. Recordemos que para cada  $\sigma \in \Sigma$  tenemos la variedad tórica afín  $\text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$ , que llamaremos  $U_\sigma$ . Éstos serán nuestros abiertos afines.

Si  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ , tenemos  $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2 \in \Sigma$ . Como  $\tau$  es una cara de  $\sigma_i$ , existe un  $m \in \sigma_1^* \cap M$  tal que  $\tau = \sigma_i \cap \{\langle m, n \rangle = 0\}$ . Para pegar  $U_{\sigma_1}$  y  $U_{\sigma_2}$  a lo largo de  $U_\tau$  debemos usar que  $S_\tau = S_{\sigma_1} + \mathbb{Z}m$  y por lo tanto

$$(U_{\sigma_1})_{\chi^m} \simeq U_\tau \simeq (U_{\sigma_2})_{\chi^{-m}}.$$

En lo que sigue, llamaremos a este isomorfismo  $g_{\sigma_1, \sigma_2}$ .

Es importante destacar que si  $\tau \leq \sigma$  entonces  $U_\tau \subseteq U_\sigma$ . En particular, tomando  $\tau = \{0\}$ , tenemos  $S_\tau = M$  y por lo tanto  $U_\tau = T_N \subseteq U_\sigma$  para todo  $\sigma \in \Sigma$ . Para terminar de formalizar estas ideas tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.1.** 1  $X_\Sigma$  es una variedad tórica normal y separable.

*Demostración.* De la anterior tenemos que el toro  $T_N$  está identificado de la misma manera en cada abierto  $U_\sigma$ . Además, sabemos que cada  $U_\sigma$  es irreducible y normal, por lo que  $X_\Sigma$  es irreducible y normal.

Como  $g_{\sigma_1 \cap \sigma_2, \sigma_1} = id$ , las acciones de  $T_N$  en cada abierto se pegan para dar lugar a una acción de  $T$  en  $X_\Sigma$ . Para ver que la variedad es separable vamos a probar que la función diagonal  $\Delta : X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma \times X_\Sigma$  tiene imagen cerrada. Restringiendo a nuestro cubrimiento, nos alcanza con probar que para cada  $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ , la imagen del morfismo  $\Delta : U_\tau \rightarrow U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$  es cerrada. A nivel de anillos de coordenadas, este morfismo de variedades afines se corresponde con

$$\Delta^* : \mathbb{C}[S_{\sigma_1}] \otimes \mathbb{C}[S_{\sigma_2}] \rightarrow \mathbb{C}[S_\tau],$$

donde  $\chi^a \otimes \chi^b \mapsto \chi^{a+b}$ . Recordemos que  $S_\tau = S_{\sigma_1} + \mathbb{Z}m$  y que  $-m \in S_{\sigma_2}$ . Entonces  $\Delta^*$  es sobreyectiva y por lo tanto  $\Delta(U_\tau)$  es cerrado en  $U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$ . □

Una buena observación es que, por construcción, cada abierto  $U_\sigma$  es  $T_N$ -invariante. Esto será de mucha importancia a la hora de analizar las órbitas de esta acción. Antes de pasar a los ejemplos, veamos algunos resultados muy útiles a la hora de entender cómo afecta la elección del abanico  $\Sigma$  en la variedad tórica resultante.

**Teorema 2.2.2.** Sea  $X_\Sigma$  la variedad tórica asociada al abanico  $\Sigma$ . Entonces

1.  $X_\Sigma$  es suave si y sólo si  $\Sigma$  es suave.
2.  $X_\Sigma$  es un orbifold si y sólo si  $\Sigma$  es simplicial.
3.  $X_\Sigma$  es compacta si y sólo si  $\Sigma$  es completo

*Demostración.* Como la suavidad es una propiedad local, el primer ítem se desprende del resultado análogo para variedades tóricas afines. Para ver una demostración de la segunda afirmación, consultar [CLS]. La última equivalencia requiere teoría que desarrollaremos a lo largo de esta sección, por lo que la dejaremos para más adelante. □

Otra de las buenas propiedades de esta construcción es la siguiente:

**Proposición 2.2.1.** Sean  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  dos abanicos en  $N$  y  $N'$  respectivamente. Entonces

$$\Sigma_1 \times \Sigma_2 = \{\sigma_1 \times \sigma_2 \mid \sigma_1 \in \Sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_2\} \subseteq N \times N'$$

es un abanico y

$$X_{\Sigma_1 \times \Sigma_2} \simeq X_{\Sigma_1} \times X_{\Sigma_2}.$$

*Demostración.* De la definición se deduce inmediatamente que  $\Sigma_1 \times \Sigma_2$  es un abanico. Probemos entonces la segunda afirmación.

Una primer observación es que

$$(\sigma_1 \times \sigma_2)^\vee = \sigma_1^\vee \times \sigma_2^\vee,$$

y por lo tanto  $S_{\sigma_1 \times \sigma_2} = S_{\sigma_1} \times S_{\sigma_2}$ . Entonces podemos definir localmente un isomorfismo  $U_{\sigma_1 \times \sigma_2} \simeq U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$  vía

$$\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] \otimes \mathbb{C}[S_{\sigma_2}] \simeq \mathbb{C}[S_{\sigma_1 \times \sigma_2}].$$

Al igual que hicimos para definir la acción de  $T_N$  sobre  $X_\Sigma$ , estos morfismos se pegan para dar lugar a un isomorfismo global.  $\square$

La proposición anterior nos dice que algo muy particular pasa cuando  $\langle \Sigma \rangle \neq N_{\mathbb{R}}$ :

**Definición 2.2.1.** Decimos que  $X_\Sigma$  tiene factores tóricos si existe una variedad tórica  $X_{\Sigma'}$  tal que

$$X_\Sigma \simeq X_{\Sigma'} \times (\mathbb{C}^*)^s$$

para algún  $s > 0$ .

**Proposición 2.2.2.** Sea  $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un abanico tal que  $\langle \Sigma \rangle \neq N_{\mathbb{R}}$ . Entonces  $X_\Sigma$  tiene factores tóricos.

*Demostración.* Si  $\langle \Sigma \rangle \neq N_{\mathbb{R}}$ , podemos tomar un complemento ortogonal  $O$  de modo que

$$N_{\mathbb{R}} \simeq \langle \Sigma \rangle \oplus O.$$

Si notamos  $\Sigma'$  al abanico  $\Sigma \subseteq \langle \Sigma \rangle$ , tenemos

$$\Sigma = \Sigma' \times \{0\}.$$

El abanico  $\{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$  nos da la variedad tórica  $(\mathbb{C}^*)^m$ . Luego, la Proposición 2.2.1 nos dice que

$$X_\Sigma \simeq X_{\Sigma'} \times (\mathbb{C}^*)^{\dim(O)}.$$

$\square$

**Observación 2.2.1.** Más adelante veremos que la vuelta también es cierta: si  $X_\Sigma \simeq X_{\Sigma'} \times (\mathbb{C}^*)^s$ , entonces  $X_\Sigma = X_{\Sigma' \times \{0\}}$ . Cuando hayamos definido el concepto de *morfismo tórico* quedará claro que esto implica  $\langle \Sigma \rangle \neq N_{\mathbb{R}}$ .

Ahora sí, veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 2.2.1.** Consideremos el abanico  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$  completo con

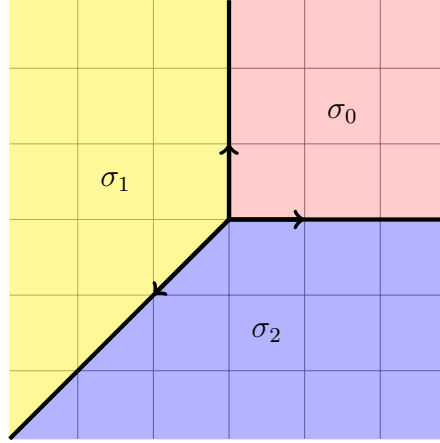
$$\Sigma(1) = \{e_1, e_2, -e_1 - e_2\}.$$

Analicemos los abiertos  $U_\sigma$ :

$$U_{\sigma_0} = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$$

$$U_{\sigma_1} = \text{Spec}(\mathbb{C}[x^{-1}, x^{-1}y])$$

$$U_{\sigma_2} = \text{Spec}(\mathbb{C}[xy^{-1}, y^{-1}])$$



La numeración de los conos fue elegida para que los abiertos  $U_{\sigma_i}$  coincidan con los  $U_i = \{x_i \neq 0\}$  que surgen de pensar a  $\mathbb{P}^2$  en coordenadas homogéneas  $(x_0 : x_1 : x_2)$ . Las variables  $x$  e  $y$  son fácilmente identificables con  $x_1/x_0$  y  $x_2/x_0$  respectivamente. Efectivamente, los datos de pegado para los  $U_{\sigma_i}$

$$\begin{aligned} (U_{\sigma_0})_x &\simeq (U_{\sigma_1})_{x^{-1}} \\ (U_{\sigma_0})_y &\simeq (U_{\sigma_2})_{y^{-1}} \\ (U_{\sigma_1})_{x^{-1}y} &\simeq (U_{\sigma_2})_{xy^{-1}} \end{aligned}$$

coinciden con los que vienen de pensar a  $\mathbb{P}^2$  en coordenadas homogéneas. ▲

**Ejemplo 2.2.2.** Podemos extender el ejemplo anterior a dimensiones más grandes. Definamos el abanico  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  cuyos conos de dimensión  $n$  son de la forma

$$\sigma = \text{Cone}(S)$$

donde el conjunto  $S$  recorre todos los subconjuntos de  $\{e_1, \dots, e_n, -e_1 - \dots - e_n\}$  de cardinal  $n$ . Mediante cálculos totalmente análogos al caso anterior, se ve que

$$X_\Sigma \simeq \mathbb{P}^n$$
▲

**Ejemplo 2.2.3.** Una familia de variedades más general que la descrita en el ejemplo anterior son los *espacios proyectivos con pesos*. Para ver una descripción exhaustiva de estas variedades consultar [D]. Fijemos elementos  $q_1, \dots, q_{n+1} \in \mathbb{N}$  tales que  $(q_1 : \dots : q_{n+1}) = 1$ . En este contexto, el espacio  $\mathbb{P}(q_1, \dots, q_{n+1})$  se construye de la siguiente manera:

Sea  $N$  el reticulado que resulta de cocientar a  $\mathbb{Z}^{n+1}$  por la ecuación

$$q_1 e_1 + \cdots + q_{n+1} e_{n+1} = 0.$$

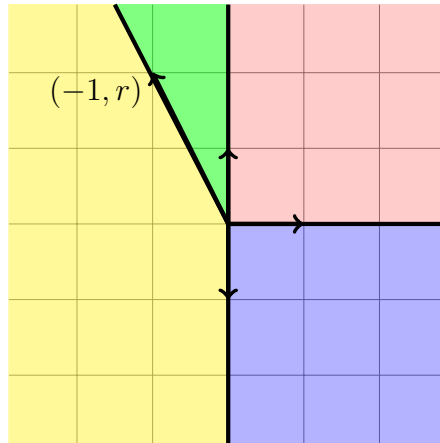
De la misma forma que antes, consideremos el abanico  $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  generado por los conos de la forma  $\sigma = \text{Cone}(S)$ , donde  $S$  recorre todos los subconjuntos de cardinal  $n$  de  $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_{n+1}}\}$ . Llamaremos  $\rho_i = \text{Cone}(\overline{e_i})$ . De esta forma, se puede ver que

$$X_\Sigma \simeq \mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1}).$$

Daremos una presentación más clásica de este espacio en el Capítulo 3, donde le daremos una estructura de cociente similar a la de  $\mathbb{P}^n$ . Observemos que, como  $\sigma(1)$  es una base de  $N_{\mathbb{R}}$  para todo  $\sigma \in \Sigma$ , podemos afirmar que  $\Sigma$  es simplicial y por lo tanto  $\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1})$  es un orbifold.  $\blacktriangle$

**Observación 2.2.2.** El caso  $n = 2$  es trivial, ya que el único abanico completo de  $\mathbb{R}$  es el correspondiente a  $\mathbb{P}^1$ . Luego, la única variedad tórica completa de dimensión 1 es  $\mathbb{P}^1$  y por lo tanto  $\mathbb{P}^1(a, b) \simeq \mathbb{P}^1$  para cualquier elección de  $a$  y  $b$ .

**Ejemplo 2.2.4.** Una superficie reglada es una superficie regladas son superficies birracionalmente equivalentes al producto de una curva y una línea proyectiva. Las superficies regladas con curvas base de género 0 son las *superficies de Hirzebruch*. La superficie  $\mathcal{H}_r$  es el fibrado sobre  $\mathbb{P}^1$  asociado al haz  $\mathcal{O}(0) \oplus \mathcal{O}(-r)$ . En este contexto,  $\mathcal{H}_r$  es la variedad asociada al abanico



Observemos que cuando  $r = 0$  tenemos el abanico de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Esto es,

$$\mathcal{H}_0 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

$\blacktriangle$

**Observación 2.2.3.** Se puede ver fácilmente que el cono generado por  $(0, 1)$  y  $(-1, r)$  es suave sólomente cuando  $r = 1$  ó  $0$ , por lo que las únicas superficies de Hirzebruch suaves son  $\mathcal{H}_1 \simeq Bl(\mathbb{P}^2)$  y  $\mathcal{H}_0 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . En general, la superficie  $\mathcal{H}_r$  es el blow-up de la superficie  $\mathbb{P}^2(1, 1, r)$  en un punto singular.

A continuación trateremos de entender el conjunto de órbitas de la acción de  $T_N$  sobre  $X_\Sigma$ . La herramienta clave para comenzar a hacer distinciones entre órbitas viene de tomar ciertos límites de los grupos uniparamétricos de  $T_N$ .

Para fijar ideas, veamos qué pasa en el caso  $X_\Sigma = \mathbb{C}^2$ , es decir, vamos a tomar al abanico  $\Sigma$  como el generado por  $\sigma = Cone(e_1, e_2) \subseteq \mathbb{R}^2$  y sus caras. Recordemos que  $(\mathbb{C}^*)^2$  actúa sobre  $\mathbb{C}^2$  vía la multiplicación coordenada a coordenada. El conjunto de órbitas será entonces

$$\{(\mathbb{C}^*)^2 \cdot (1, 1); (\mathbb{C}^*)^2 \cdot (1, 0); (\mathbb{C}^*)^2 \cdot (0, 1); \{(0, 0)\}\}.$$

Por otro lado, tomemos un elemento  $n = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$  y consideremos el grupo uniparamétrico  $\alpha^n : \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^2 \subseteq \mathbb{C}^2$ . Haciendo tender el parámetro  $t \in \mathbb{C}^*$  a cero, se ve claramente que

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} \alpha^n(t) \iff n \in \sigma.$$

Más aún, si llamamos  $\rho_i = Cone(e_i)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha^n(t) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } n \in \{0\} \\ (1, 0) & \text{si } n \in Relint(\rho_2) \\ (0, 1) & \text{si } n \in Relint(\rho_1) \\ (1, 1) & \text{si } n \in Relint(\sigma). \end{cases}$$

Observemos que si  $\rho \in \Sigma$ , vale que  $n \in \rho$  si y sólo si el límite  $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha^n(t)$  existe y pertenece a  $U_\rho$ . Esto vale en general, como muestra la siguiente proposición:

**Proposición 2.2.3.** Sean  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un cono y  $n \in N$ . Entonces el límite  $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha^n(t)$  existe en  $U_\sigma$  si y sólo si  $n \in \sigma$ . Más aún, si  $n \in Relint(\sigma)$ , vale que  $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha^n(t) = \gamma_\sigma$ , donde  $\gamma_\sigma$  es el punto distinguido de la Definición 2.1.1.

*Demostración.* Sea  $n \in N$ . Vamos a usar el hecho de que

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} \alpha^n(t) \iff \exists \lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha^n(t)) \quad \forall f \in \mathbb{C}[U_\sigma].$$

Como  $\mathbb{C}[U_\sigma] = \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ , basta probarlo para los caracteres  $\chi^m$  con  $m \in \sigma^\vee$ . Pero

$$\chi^m(\alpha^n(t)) = t^{\langle m, n \rangle},$$



por lo que el límite  $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha^n(t)$  existirá en  $U_\sigma$  si y sólo si  $\langle m, n \rangle \geq 0$  para cada  $m \in \sigma^\vee$ , es decir,  $n \in (\sigma^\vee)^\vee = \sigma$ .

Si además  $n \in \text{Relint}(\sigma)$ , tenemos que  $\langle m, n \rangle = 0$  para  $m \in \sigma^\perp$  y mayor que cero para  $m \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$ . Luego, si  $m \in \sigma^\vee \cap M$ ,

$$\chi^m(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \chi^m(\alpha^n(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp \\ 1 & \text{si } n \in \sigma^\perp, \end{cases}$$

es decir,  $p = \gamma_\sigma$ .

□

**Observación 2.2.4.** Esto nos permite recuperar el abanico  $\Sigma$  de una variedad tórica  $X$ : sean  $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n$  el toro de  $X$  y  $N$  el conjunto de grupos uniparamétricos de  $T$ . Para cada  $p \in X$ , definamos el conjunto

$$\sigma_p = \{n \in N \mid \lim_{t \rightarrow 0} \alpha^n(t) = p\}.$$

Éstos conjuntos serán los conos del abanico  $\Sigma$ .

La última proposición nos permite probar una de las implicaciones pendientes de la Proposición 2.2.2, pues si  $X_\Sigma$  es completa, entonces todos sus grupos uniparamétricos tendrán límite en algún  $U_\sigma \subseteq \alpha_\Sigma$ . Esto implica que  $|\Sigma| = N_{\mathbb{R}}$ .

Observemos que  $\gamma_\tau \in U_\sigma$  sólo cuando  $\tau \leq \sigma$ . Como además  $\gamma_\tau$  contiene la información de  $\tau^\vee$  y  $\tau^\perp$ , resulta que la aplicación  $\sigma \mapsto \gamma_\sigma \in X_\Sigma$  es inyectiva. Denotaremos  $O(\sigma)$  a la órbita de  $\gamma_\sigma$ . El siguiente teorema da una descripción bastante completa de cómo se distribuyen las órbitas de  $X_\Sigma$ . Para ver una demostración consultar [CLS].

**Teorema 2.2.3.** Sea  $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$  un abanico.

1. La aplicación  $\Sigma \longrightarrow \{\text{Órbitas de } X_\Sigma\}$  definida por

$$\sigma \mapsto O(\sigma) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*)$$

es una biyección.

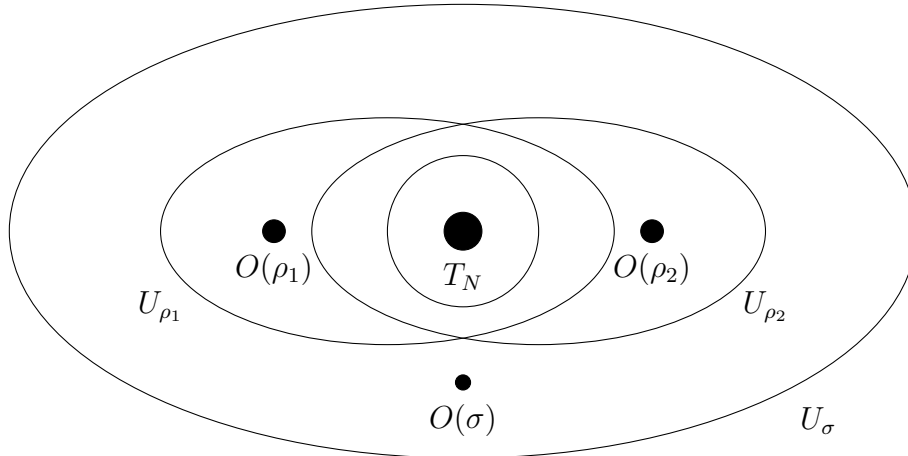
2. Si  $\sigma \in \Sigma$  entonces  $\dim(O(\sigma)) = \text{codim}(\sigma)$ .
3. Para cada abierto de la forma  $U_\sigma$  vale que

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau \leq \sigma} O(\tau)$$

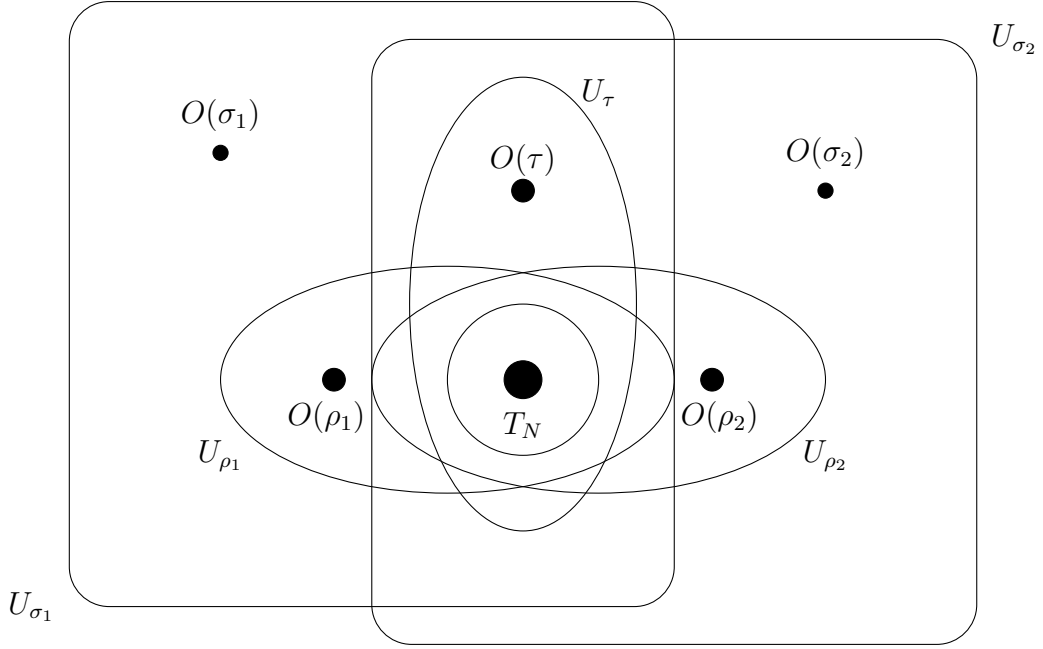
4. Si,  $\tau, \sigma \in \Sigma$  entonces  $\tau \leq \sigma$  si y sólo si  $O(\sigma) \subseteq \overline{O(\tau)}$ . En particular,

$$\overline{O(\tau)} = \bigcup_{\tau \leq \sigma} O(\sigma).$$

En el teorema anterior, las clausuras de las órbitas se entienden tanto en la topología Zariski como en la clásica. Esto se debe a que éstos son conjuntos construibles. Para un mayor entendimiento del contenido del teorema, analicemos el espacio de órbitas de una variedad afín  $U_\sigma$ . Tomemos como ejemplo  $\mathbb{C}^2$ , donde ya describimos el espacio de órbitas.



De hecho, el espacio de órbitas será el mismo para cualquier superficie tórica afín. Si ahora pensamos en una superficie abstracta, como por ejemplo la que resulta de tomar el abanico de  $\mathbb{R}^2$  generado por dos conos  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  con caras de dimensión 1  $\{\rho_1, \tau\}$  y  $\{\rho_2, \tau\}$  respectivamente, los espacios de órbitas se pegarán de la siguiente manera:



## 2.3 Morfismos tóricos

Dados dos abanicos  $\Sigma \subseteq N$ ,  $\Sigma' \subseteq N'$ , es natural preguntarse cuáles son los morfismos  $X_{\Sigma} \rightarrow X_{\Sigma'}$  que son compatibles con las acciones de  $T_N$  y  $T_{N'}$ . Comencemos dando la siguiente definición:

**Definición 2.3.1.** Decimos que un morfismo  $\phi : X_{\Sigma} \rightarrow X_{\Sigma'}$  es *tórico* si  $\phi(T_N) \subseteq T_{N'}$  y el morfismo  $\phi|_{T_N} : T_N \rightarrow T_{N'}$  es un morfismo de grupos.

Como  $T_N \subseteq X_{\Sigma}$  es un abierto Zariski (denso), de la definición se sigue que cualquier morfismo tórico  $\phi$  es equivariante, es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_N \times X_{\Sigma} & \longrightarrow & X_{\Sigma} \\ \phi|_{T_N} \times \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ T_{N'} \times X_{\Sigma'} & \longrightarrow & X_{\Sigma'} \end{array}$$

donde las flechas horizontales vienen dadas por las acciones de los toros, conmuta.

Veamos qué implica esto en términos de grupos uniparamétricos. Si  $\sigma \in \Sigma$  y  $\alpha \in \text{Relint}(\sigma)$ , tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha^n(t) = \gamma_{\sigma}.$$

Por otro lado, el morfismo  $f \circ \alpha^n : \mathbb{C}^* \rightarrow T_{N'}$  es un morfismo de grupos por lo que define un grupo uniparamétrico. Pero entonces, al ser  $f$  continua,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \alpha^n(t) = f(\gamma_\sigma).$$

De esta igualdad podemos concluir que varias cosas:

1. El grupo uniparamétrico  $f \circ \alpha^n$  está en  $|\Sigma'|$ , es decir,  $f \circ \alpha^n = \alpha^{n'}$  para algún  $n' \in N'$  y existe un cono  $\sigma' \in \Sigma'$  tal que  $n' \in \sigma'$ . En particular, podemos tomar  $\sigma'$  tal que  $n' \in \text{Relint}(\sigma')$ .
2.  $f(\gamma_\sigma)$  es el punto distinguido de  $\sigma'$ .
3.  $\{f(\alpha^n) | n \in \text{Relint}(\sigma)\} \subseteq \{\alpha^{n'} | n' \in \text{Relint}(\sigma')\}$ . Clausurando, se ve que todos los grupos uniparamétricos de  $\sigma$  van a parar por  $f$  a grupos uniparamétricos de  $\sigma'$ .

Estas observaciones motivan la siguiente definición:

**Definición 2.3.2.** Si  $\Sigma \subseteq N$ ,  $\Sigma' \subseteq N'$  son dos abanicos, decimos que un morfismo de reticulados  $\bar{\phi} : N \rightarrow N'$  es *compatible con  $\Sigma$  y  $\Sigma'$*  si para cada  $\sigma \in \Sigma$  existe un cono  $\sigma' \in \Sigma'$  tal que  $\phi(\sigma) \subseteq \sigma'$ .

En la última definición estamos aplicando el morfismo de reticulados  $\phi$  a un conjunto que, por definición, vive en  $N_{\mathbb{R}}$ . Para alivianar la notación llamaremos de la misma manera al morfismo extendido a  $N_{\mathbb{R}}$ . Redondeemos lo hecho hasta ahora con la siguiente proposición:

**Proposición 2.3.1.** Sean  $X_\Sigma$ ,  $X_{\Sigma'}$  dos variedades tóricas. Existe una biyección entre el conjunto de morfismos de reticulados  $N \rightarrow N'$  compatibles con  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  y el conjunto de morfismos tóricos  $X_\Sigma \rightarrow X_{\Sigma'}$ .

*Demostración.* Como vimos antes, hay una aplicación evidente

$$\{\text{Morfismos tóricos } X_\Sigma \rightarrow X_{\Sigma'}\} \longrightarrow \{\text{Morfismos } N \rightarrow N' \text{ compatibles con } \Sigma \text{ y } \Sigma'\}.$$

Ésta viene dada por  $\phi \mapsto \bar{\phi}$ , donde  $\bar{\phi}(n)$  es el elemento  $n' \in N'$  tal que

$$\phi \circ \alpha^n = \alpha^{n'}.$$

Es claro que  $\bar{\phi}$  es un morfismo de grupos. Además, las observaciones hechas anteriormente nos dicen que es compatible con  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ .

Para definir una aplicación inversa le asignaremos a a cada morfismo compatible  $N \rightarrow N'$  un morfismo de grupos  $T_N \rightarrow T_{N'}$  que se pueda extender a  $X_\Sigma$ . La forma canónica de hacerlo es asignarle a cada  $\bar{\phi} : N \rightarrow N'$  el morfismo

$$\bar{\phi} \otimes_{\mathbb{Z}} 1 : T_N \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \rightarrow N' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \simeq T_{N'}$$

que sugerentemente llamaremos  $\phi|_{T_N}$ . Por construcción,  $\phi|_{T_N}$  es un morfismo de grupos. A nivel de anillos de coordenadas, tenemos el morfismo dual

$$\phi|_{T_N}^* : \mathbb{C}[M'] \rightarrow \mathbb{C}[M]$$

que coincide con el inducido por  $\bar{\phi}^* : M' \rightarrow M$  (recordemos que  $M$  y  $N$  son duales entre sí). Para cada  $\sigma \in \Sigma$  tenemos la inclusión  $T_N \subseteq U_\sigma$  que se dualiza

$$\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \hookrightarrow \mathbb{C}[M].$$

Es fácil ver que  $\phi(\sigma) \subseteq \sigma'$  implica que  $\bar{\phi}^*((\sigma')^\vee \cap M') \subseteq \sigma^\vee \cap M$ . Pero entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[(\sigma')^\vee \cap M'] & \xrightarrow{\bar{\phi}^*} & \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}[M'] & \xrightarrow{\phi|_{T_N}^*} & \mathbb{C}[M] \end{array}$$

Si miramos los morfismos duales y denotamos a  $\phi_\sigma$  al dual del primer morfismo, resulta que  $\phi_\sigma$  extiende a  $\phi|_{T_N}$ :

$$\begin{array}{ccc} U_\sigma & \xrightarrow{\phi_\sigma} & U_{\sigma'} \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_N & \xrightarrow{\phi|_{T_N}} & T_{N'} \end{array}$$

Los morfismos  $\{\phi_\sigma\}$  se pegan para dar lugar a un morfismo  $\phi : X_\Sigma \rightarrow X_{\Sigma'}$  que extiende a  $\phi|_{T_N}$ . Las dos aplicaciones de esta demostración son inversas por construcción. □

Con este resultado ya podemos probar la vuelta de la Proposición 2.2.2: si una variedad  $X_\Sigma$  admite un abanico  $\Sigma'$  tal que  $X_\Sigma \simeq X_{\Sigma'} \times \mathbb{C}^*$  entonces tenemos el morfismo tórico dado por la proyección  $\pi : X_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Éste debe venir de un morfismo  $\bar{\pi} : N \rightarrow \mathbb{Z}$  compatible con  $\Sigma$  y  $\{0\}$ . Esto es,

$$\bar{\pi}(|\Sigma|) = \bar{\pi}(\langle \Sigma \rangle) = \{0\}.$$

Pero  $\pi$  no es el morfismo constante, por lo que  $\bar{\pi} \neq 0$ . Luego,  $\langle \Sigma \rangle \neq N$ . Además, si miramos con detenimiento ésta última demostración, podemos rescatar la siguiente proposición:

**Proposición 2.3.2.** Sea  $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un abanico. Son equivalentes:

1.  $X_{\Sigma}$  no tiene factores tóricos.
2.  $\Gamma(X_{\Sigma}, \mathcal{O}_{X_{\Sigma}})^* = \mathbb{C}^*$ .
3.  $\langle \Sigma \rangle = N_{\mathbb{R}}$ .

# Capítulo 3

## Divisores

En esta sección demostraremos algunos resultados acerca de los divisores de una variedad tórica  $X_\Sigma$  y daremos una descripción de los grupos  $Cl(X_\Sigma)$  y  $Pic(X_\Sigma)$  en términos de la información de su abanico  $\Sigma$ .

Comencemos estudiando la aplicación  $div : \mathbb{C}(X_\Sigma)^* \rightarrow Div(X_\Sigma)$ . Sabemos que  $T_N \subseteq X_\Sigma$  es un abierto Zariski, por lo que tenemos la inclusión

$$\mathbb{C}[T_N] = \mathbb{C}[M] \hookrightarrow \mathbb{C}(X_\Sigma)^*.$$

Dado  $m \in M$ , el caracter  $\chi^m$  no tiene ceros ni polos a lo largo de  $T_N$ , por lo que  $div(\chi^m) \in Div(X_\Sigma)$  deberá estar soportado en  $X_\Sigma \setminus T_N$ . El Teorema 2.2.3 nos dice que

$$X_\Sigma \setminus T_N = \bigcup_{\rho \in \Sigma(1)} D_\rho.$$

Entonces  $div(\chi^m) = \sum_{\rho} v_{D_\rho}(\chi^m) D_\rho$ , donde  $v_D$  es la valuación asociada al anillo  $\mathcal{O}_{X_\Sigma, D}$  para cada divisor primo  $D$ . Resulta que la valuación  $v_{D_\rho}$  es en realidad una aplicación que ya conocemos:

**Proposición 3.0.1.** Para cada  $\rho \in \Sigma(1)$  y  $m \in M$ , se tiene que  $v_{D_\rho} = \langle m, u_\rho \rangle$  y por lo tanto

$$div(\chi^m) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle m, u_\rho \rangle D_\rho.$$

*Demostración.* Para calcular el orden con el que  $\chi^m$  se anula sobre  $D_\rho$  podemos restringirnos al abierto  $U_\rho$ . Pero  $U_\rho = Spec(\rho^\vee \cap M) \simeq \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^*)^{n-1}$ , donde el morfismo tórico viene dado por el morfismo de reticulados que manda  $u_\rho \mapsto e_1$  y luego se completa a una base  $B^\perp = \{v_2, \dots, v_n\}$  de  $\rho^\perp$ . Este isomorfismo manda al divisor

$D_\rho$  a  $\{0\} \times (\mathbb{C}^*)^{n-1}$ . Si pensamos en la aplicación en los anillos de coordenadas,

$$\chi^m \mapsto x_1^{\langle m, u_\rho \rangle} \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{\langle m, v_i \rangle},$$

de donde es claro que  $v_{D_\rho} = \langle m, u_\rho \rangle$ .  $\square$

En realidad, los divisores de la forma  $\sum a_\rho D_\rho$  constituyen un conjunto muy particular. La acción de  $T_N$  en  $X_\Sigma$  induce una acción en  $Div(X_\Sigma)$ . Ésta viene dada por  $t \cdot \sum a_D D \mapsto \sum a_D tD$ , donde  $tD$  es la imagen del divisor primo  $D$  por la multiplicación por  $t$ . Denotaremos  $Div_{T_N}(X_\Sigma)$  al subgrupo de divisores fijo por la acción de  $T_N$ . Claramente, todo divisor de la forma  $\sum a_\rho D_\rho$  está en  $Div_{T_N}(X_\Sigma)$ . Veamos que éstos son todos:

**Lema 3.0.1.** Sea  $\sum_{i=1}^r a_i D_i$  un divisor invariante por la acción de  $T_N$ . Entonces existen  $\rho_i$  tal que  $D_i = D_{\rho_i}$  para cada  $1 \leq i \leq r$ .

Luego,

$$Div_{T_N}(X_\Sigma) = \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{Z} \cdot D_\rho.$$

*Demostración.* Sea  $D = \sum_{i=1}^r a_i D_i$  un divisor invariante. Para cada  $t \in T_N$ , tenemos  $Sop(D) = Sop(tD)$ , es decir,

$$\bigcup_{i=1}^r D_i = \bigcup_{i=1}^r tD_i.$$

En particular, el conjunto  $\bigcup D_i$  es  $T_N$  invariante, por lo que debe ser una unión de órbitas. Como  $\dim(D_i) = n - 1$ , debe existir un conjunto  $\{\rho_j\}_{1 \leq j \leq s} \subseteq \Sigma(1)$  tal que

$$\bigcup_{i=1}^r D_i = \bigcup_{j=1}^s D_{\rho_j}.$$

Para completar la demostración basta con intersecar a ambos lados con  $D_{\rho_j}$ .  $\square$

Ahora ya estamos en condiciones de describir al grupo de clases de  $X_\Sigma$ :

**Teorema 3.0.1.** En una variedad tórica  $X_\Sigma$  la sucesión

$$M \longrightarrow Div_{T_N}(X_\Sigma) \longrightarrow Cl(X_\Sigma) \longrightarrow 0.$$

es exacta, donde el primer morfismo es  $m \mapsto div(\chi^m)$  y el segundo es el cociente. Además  $X_\Sigma$  no tiene factores tóricos si y sólo si el primer morfismo es inyectivo. Esto es, la sucesión



$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \text{Div}_{T_N}(X_\Sigma) \longrightarrow \text{Cl}(X_\Sigma) \longrightarrow 0$$

es exacta.

*Demostración.* Comencemos por la última afirmación. Sabemos de la Proposición 2.3.2 que  $X_\Sigma$  no tiene factores tóricos si y sólo si  $\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma})^* = \mathbb{C}^*$  o equivalentemente  $\langle \Sigma(1) \rangle = N_{\mathbb{R}}$ .

Supongamos entonces que  $X_\Sigma$  no tiene factores y tomemos  $m \in M$  tal que  $\text{div}(\chi^m) = 0 \in \text{Div}_{T_N}(X_\Sigma)$ . Pero entonces  $\chi^m$  no tiene ceros ni polos en  $X_\Sigma$ , esto es,  $\chi^m \in \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma})^*$ . Luego,  $\chi^m \equiv 1$  y por lo tanto  $m = 0$ .

Si por el contrario suponemos que el primer morfismo es inyectivo, tenemos

$$\sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle m, u_\rho \rangle D_\rho = 0 \iff m = 0$$

Pero esto es equivalente a

$$\langle m, u_\rho \rangle = 0 \quad \forall \rho \in \Sigma(1) \iff m = 0,$$

de donde se sigue que  $\langle \Sigma(1) \rangle = N_{\mathbb{R}}$  y por lo tanto  $X_\Sigma$  no tiene factores tóricos.

Veamos ahora la exactitud en  $\text{Div}_{T_N}(X_\Sigma)$ . Claramente, la composición

$$m \mapsto \text{div}(\chi^m) \mapsto \overline{\text{div}(\chi^m)}$$

es el morfismo nulo.

Para ver la otra inclusión, tomemos  $D \in \text{Div}_{T_N}(X_\Sigma)$  tal que  $\overline{D} = 0 \in \text{Cl}(X_\Sigma)$ . Debe existir entonces una función  $f \in \mathbb{C}(X_\Sigma)^*$  tal que  $D = \text{div}(f)$ . En particular,  $\text{div}(f)|_{T_N} = 0$  y por lo tanto  $f \in \mathbb{C}[T_N]^* = \mathbb{C}[M]^*$ . Como  $\mathbb{C}[M] \simeq \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  y

$$\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]^* = \{cx^\alpha \mid c \in \mathbb{C}^*, \alpha \in \mathbb{Z}^n\}$$

(sale de cálculo directo), se sigue que  $f = c\chi^m$  para algún  $c \in \mathbb{C}^*$  y  $m \in M$ . Entonces  $D = \text{div}(\chi^m)$ .

Por último, probemos que el segundo morfismo de la sucesión es sobreyectivo. Recordemos que  $X_\Sigma \setminus T_N = \bigcup_{\rho} D_\rho$ , por lo que tenemos la sucesión exacta

$$\bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{Z}D_\rho \longrightarrow \text{Cl}(X_\Sigma) \longrightarrow \text{Cl}(T_N) \longrightarrow 0.$$

Para terminar la demostración basta con observar que  $T_N \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ , por lo que  $\text{Cl}(T_N) = 0$ .  $\square$

Éste último teorema nos dice que el grupo de clases de una variedad tórica  $X_\Sigma$  es el grupo abeliano generado por los  $D_\rho$ , que cumplen (a lo sumo)  $n$  ecuaciones dadas por  $M$ . Esto nos da una forma canónica de calcular grupos de clases.

**Observación 3.0.1.** Mirando la sucesión exacta, es claro que el grupo de clases de una variedad tórica  $X_\Sigma$  depende sólomente del conjunto  $\Sigma(1)$ . Esto es coherente con el Teorema 2.2.3, ya que los conos de dimensión mayor aportan órbitas de dimensión más chica.

Una aplicación directa del resultado anterior es la siguiente:

**Proposición 3.0.2.** Si  $X_{\Sigma_1}, X_{\Sigma_2}$  son variedades tóricas, entonces

$$Cl(X_{\Sigma_1} \times X_{\Sigma_2}) = Cl(X_{\Sigma_1}) \oplus Cl(X_{\Sigma_2})$$

*Demostración.* Recordemos de la proposición [] que  $X_{\Sigma_1} \times X_{\Sigma_2}$  es la variedad asociada al abanico  $\Sigma_1 \times \Sigma_2$  y su toro es  $T_{N_1 \times N_2}$ . Además,

$$\Sigma_2 \times \Sigma_2(1) = \Sigma_1(1) \times \{0\} \cup \{0\} \times \Sigma_2(1),$$

por lo que

$$Div_{T_{N_1 \times N_2}}(X_{\Sigma_1} \times X_{\Sigma_2}) \simeq Div_{T_{N_1}}(X_{\Sigma_1}) \oplus Div_{T_{N_2}}(X_{\Sigma_2}).$$

Si ahora usamos la Proposición 3.0.1, la sucesión exacta queda

$$M_1 \oplus M_2 \longrightarrow Div_{T_{N_1}}(X_{\Sigma_1}) \oplus Div_{T_{N_2}}(X_{\Sigma_2}) \longrightarrow Cl(X_{\Sigma_1} \times X_{\Sigma_2}) \longrightarrow 0,$$

de donde se sigue que  $Cl(X_{\Sigma_1} \times X_{\Sigma_2}) = Cl(X_{\Sigma_1}) \oplus Cl(X_{\Sigma_2})$ .  $\square$

Veamos algunos ejemplos de cómo lo desarrollado hasta ahora en esta sección nos permite calcular fácilmente el grupo de clases de una variedad tórica:

**Ejemplo 3.0.1.** Calculemos el grupo de clase de  $\mathbb{P}^n$ . Recordemos del Ejemplo 2.2.2 que los rayos de  $\Sigma$  están generados por los elementos

$$\{u_1 = e_1, \dots, u_n = e_n, u_{n+1} = -e_1 - \dots - e_n\}$$

respectivamente. Sabemos que una presentación del grupo de clases es

$$Cl(\mathbb{P}^n) = \langle \overline{D_{\rho_1}}, \dots, \overline{D_{\rho_{n+1}}} \mid div(\chi^{e_1}) = \dots = div(\chi^{e_n}) = 0 \rangle.$$

Pero

$$div(\chi^{e_i}) = \sum_{j=1}^{n+1} \langle e_i, u_j \rangle \overline{D_{\rho_j}} = \overline{D_{\rho_i}} - \overline{D_{\rho_{n+1}}},$$

Por lo que  $\overline{D_{\rho_1}} = \cdots = \overline{D_{\rho_{n+1}}}$  y por lo tanto

$$Cl(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}$$

y es generado por cualquier  $\overline{D_{\rho_i}}$ . ▲

**Ejemplo 3.0.2.** El ejemplo anterior y la Proposición 3.0.2 podemos deducir que

$$Cl(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \simeq \mathbb{Z}^2$$

con generadores  $\overline{D_{\rho_i \times \{0\}}}$  y  $\overline{D_{\{0\} \times \rho_j}}$ . ▲

**Ejemplo 3.0.3.** Veamos qué pasa en los espacios proyectivos con pesos  $\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1})$  del Ejemplo 2.2.3. En este caso, tenemos

$$M = \{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid m_1 q_1 + \cdots + m_{n+1} q_{n+1} = 0\}.$$

Además el abanico  $\Sigma \subseteq N$  cumple  $\Sigma(1) = \{\rho_i = Cone(\overline{e_i})\}$ . Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Z}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

donde el primer morfismo manda  $m \mapsto (\langle m, u_i \rangle)_{1 \leq i \leq n+1}$  y el segundo morfismo está definido por  $(a_1, \dots, a_{n+1}) \mapsto q_1 a_1 + \cdots + q_{n+1} a_{n+1}$ , es exacta.

Como la variedad no tiene factores tóricos, tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Div_{T_N}(\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1})) \longrightarrow Cl(\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1})) \longrightarrow 0.$$

Observemos que si identificamos a  $Div_{T_N}(\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1}))$  con  $\mathbb{Z}^{n+1}$  entonces el primer morfismo de ambas sucesiones coincide. Luego,

$$Cl(\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1})) \simeq \mathbb{Z}.$$

▲

**Ejemplo 3.0.4.** Recordemos del Ejemplo 2.2.4 que cada superficie de Hirzebruch  $\mathcal{H}_r$  viene dada por el abanico de  $\mathbb{R}^2$  completo con

$$\Sigma(1) = \{\rho_1 = Cone(e_1), \rho_2 = Cone(e_2), \rho_3 = Cone(-e_2), \rho_4 = Cone(-e_1 + r e_2)\}.$$

Las ecuaciones para el grupo de clase son

$$\begin{aligned} \bar{0} = \overline{div(\chi^{e_1})} &= \sum_{i=1}^4 \langle e_1, u_i \rangle D_{\rho_i} \\ &= \overline{D_{\rho_1}} - \overline{D_{\rho_4}} \\ \bar{0} = \overline{div(\chi^{e_2})} &= \sum_{i=1}^4 \langle e_2, u_i \rangle D_{\rho_i} \\ &= \overline{D_{\rho_2}} - \overline{D_{\rho_3}} + r \overline{D_{\rho_4}}. \end{aligned}$$

Deducimos fácilmente que el grupo está generado libremente por  $\overline{D_{\rho_2}}$  y  $\overline{D_{\rho_4}}$ . Luego, para cada  $r \in \mathbb{N}$  tenemos

$$Cl(\mathcal{H}_r) \simeq \mathbb{Z}^2.$$

▲

El Teorema 3.0.1 también nos permite describir al grupo  $Pic(X_\Sigma)$ . Llamemos  $CDiv_{T_N}(X_\Sigma)$  al subgrupo de  $Div_{T_N}(X_\Sigma)$  de divisores Cartier. Como tenemos la inclusión  $div(M) \subseteq CDiv_{T_N}(X_\Sigma)$ , podemos restringir la sucesión exacta para obtener el siguiente resultado:

**Teorema 3.0.2.** En una variedad tórica  $X_\Sigma$  la sucesión

$$M \longrightarrow CDiv_{T_N}(X_\Sigma) \longrightarrow Pic(X_\Sigma) \longrightarrow 0.$$

es exacta, donde el primer morfismo es  $m \mapsto div(\chi^m)$  y el segundo es el cociente. Además si  $X_\Sigma$  no tiene factores tóricos entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow CDiv_{T_N}(X_\Sigma) \longrightarrow Pic(X_\Sigma) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Para que esta descripción sea igual de exhaustiva que la que tenemos para  $Cl(X_\Sigma)$ , todavía falta hacer una caracterización del grupo  $CDiv_{T_N}(X_\Sigma)$ . Para ello, veamos primero cómo deben verse sus elementos localmente.

**Proposición 3.0.3.** Sea  $\sigma$  un cono en  $N_{\mathbb{R}}$ . Son equivalentes:

1.  $D \in CDiv_{T_N}(U_\sigma)$ .
2.  $D = div(\chi^m)$  para algún  $m \in M$

*Demostración.* Ya sabemos que la segunda afirmación implica la primera. Veamos entonces la vuelta. Como  $dim(\sigma^\vee) = dim(M_{\mathbb{R}})$ , podemos encontrar un  $\tilde{m} \in \sigma^\vee \cap M$  tal que  $\langle \tilde{m}, u_\rho \rangle \geq 0$  para todo  $\rho \in \sigma(1)$ .

Sea  $D = \sum a_\rho D_\rho \in CDiv_{T_N}(X_\Sigma)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $D \geq 0$ . Si éste no fuera el caso, debe existir un  $k \geq 0$  tal que

$$\tilde{D} = D + div(\chi^{\tilde{m}}) \geq 0.$$

En esta situación,

$$\tilde{D} = div(\chi^m) \iff D = div(\chi^{m-k\tilde{m}}).$$

Como  $D$  es Cartier, para cada  $p \in U_\sigma$  debe existir un abierto que contenga a  $p$  de la forma  $U = (U_\sigma)_f$  para algún  $f \in \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$  y un elemento  $g \in \mathbb{C}[(U_\sigma)_f] = \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]_f$  tal que  $D|_U = \text{div}(g)$ . Como  $\text{div}(f)|_U = 0$ , podemos tomar  $g \in \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$  (es decir, sin denominadores). Si pensamos a  $\text{div}(g)$  de forma global, tenemos

$$\begin{aligned} \text{div}(g) &= \sum_{\rho \in \sigma(1)} v_{D_\rho}(g) D_\rho + \sum_{D' \neq D_\rho \forall \rho} v_{D'}(g) D' \\ &\geq \sum_{\rho \in \sigma(1)} v_{D_\rho}(g) D_\rho. \end{aligned}$$

Observemos que hasta ahora no tenemos ninguna condición para  $p \in U_\sigma$  (y por lo tanto para  $g$ ). Si tuviésemos  $p \in \bigcap D_\rho$ , entonces el último término sería igual a  $D$ . Recordemos del Teorema 2.2.3 que  $O(\sigma) \subseteq \bigcap D_\rho$ , por lo que si pedimos  $p \in O(\sigma)$  tenemos

$$(3.1) \quad \text{div}(g) \geq D.$$

Por otro lado, el ideal

$$I = \{h \in \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \mid \text{div}(h) \geq D\}$$

es  $T_N$ -invariante, por lo que la Proposición 1.1.2 nos dice que

$$I = \bigoplus_{\chi^m \in I} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

En particular, tenemos una escritura

$$g = \sum_{i=1}^N c_i \chi^{m_i}$$

donde cada  $c_i \in \mathbb{C}^*$  y  $\chi^{m_i} \in I$ . Dividiendo por  $g$ , tenemos

$$1 = \sum_{i=1}^N c_i \frac{\chi^{m_i}}{g}.$$

La ecuación (1) nos dice que  $\frac{\chi^{m_i}}{g} \in \mathbb{C}[U]$ . Luego, debe ser  $\frac{\chi^{m_i}}{g}(p) \neq 0$  para algún  $1 \leq i \leq N$ . Achicando el abierto  $U$  si fuese necesario, tenemos  $\text{div}(\frac{\chi^{m_i}}{g})|_U = 0$  y por lo tanto

$$\text{div}(\chi^{m_i})|_U = \text{div}(g)|_U = D|_U.$$

Esto quiere decir que  $\text{div}(\chi^{m_i})$  y  $D$  coinciden en un abierto Zariski que interseca a cada  $D_\rho$ . Como además el soporte de ambos está contenido en  $\bigcup D_\rho$ , se sigue que  $\text{div}(\chi^{m_i}) = D$ .  $\square$

**Observación 3.0.2.** En particular, en cualquier variedad tórica afín  $U_\sigma$  vale que  $\text{Pic}(U_\sigma) = 0$ .

Con esta última proposición en mente, es claro que un divisor invariante  $D$  es Cartier si y sólo si para cada  $\sigma \in \Sigma$  existe un  $m_\sigma$  tal que  $D|_{U_\sigma} = \text{div}(\chi^{m_\sigma})|_{U_\sigma}$ . Más aún, el elemento  $m_\sigma$  es único módulo  $\sigma^\perp \cap M$  (pues éstos son los caracteres que definen el divisor trivial en  $U_\sigma$ ). De aquí en más denotaremos  $M(\sigma) = \sigma^\perp \cap M$ . Ahora bien, si  $\tau \leq \sigma$ ,

$$(D|_{U_\sigma})|_{U_\tau} = D|_{U_\tau},$$

por lo que  $m_\sigma$  es congruente con  $m_\tau$  módulo  $\tau^\perp \cap M$ . En otras palabras, el morfismo cociente

$$\phi_{\tau,\sigma} : M/M(\sigma) \longrightarrow M/M(\tau)$$

cumple  $[m_\sigma] \mapsto [m_\tau]$ . El poset  $(\Sigma, \leq)$  junto con los morfismos  $\{\phi_{\tau,\sigma}\}$  constituyen un sistema inverso. Luego, si pensamos a un elemento  $D \in \text{CDiv}_{T_N}(X_\Sigma)$  como una colección  $\{m_\sigma\}_\Sigma$  que se pegan en las intersecciones, tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 3.0.4.** En una variedad tórica  $X_\Sigma$ , vale que

$$\text{CDiv}_{T_N}(X_\Sigma) \simeq \varprojlim M/M(\sigma).$$

**Ejemplo 3.0.5.** Sea  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$  el abanico dado por

$$\Sigma = \{\rho_1 = \text{Cone}(de_1 - e_2), \rho_2 = \text{Cone}(e_2), \{0\}\}.$$

Como todos sus conos son suaves,  $\Sigma$  es suave y por lo tanto la variedad tórica  $X_\Sigma$  es no singular. En particular,  $\text{Pic}(X_\Sigma) = \text{Cl}(X_\Sigma)$ . Sabemos que el grupo de clase está generado por  $\overline{D_{\rho_1}}$  y  $\overline{D_{\rho_2}}$  con ecuaciones

$$\bar{0} = \text{div}(\chi^{e_1}) = \langle e_1, de_1 - e_2 \rangle \overline{D_{\rho_1}} + \langle e_1, e_2 \rangle \overline{D_{\rho_2}} = d\overline{D_{\rho_1}}.$$

$$\bar{0} = \text{div}(\chi^{e_2}) = \langle e_2, de_1 - e_2 \rangle \overline{D_{\rho_1}} + \langle e_2, e_2 \rangle \overline{D_{\rho_2}} = -\overline{D_{\rho_1}} + \overline{D_{\rho_2}}.$$

Luego,  $\text{Pic}(X_\Sigma) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  con generador  $\overline{D_{\rho_1}} = \overline{D_{\rho_2}}$ .

Para un mayor entendimiento de la variedad  $X_\Sigma$  podemos usar el teorema 2.2.3 para obtener

$$X_\Sigma = U_\sigma \setminus \{\gamma_\sigma\},$$

donde  $\sigma = \text{Cone}(de_1 - e_2, e_2)$ . Como el conjunto  $\mathcal{A} = \{(1, a) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq a \leq d\}$  generan  $S_\sigma$ , sabemos que  $U_\sigma$  es la clausura Zariski del morfismo que sale de  $(\mathbb{C}^*)^2$  definido por

$$(x, y) \mapsto (x, xy, \dots, xy^d) \in \mathbb{C}^{d+1}.$$

▲

El último ejemplo ilustra como el grupo de Picard de una variedad tórica puede tener torsión. La siguiente proposición nos da una condición suficiente para evitar que esto pase.

**Proposición 3.0.5.** Sea  $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un abanico. Si  $\Sigma$  contiene un cono de dimensión máxima entonces  $\text{Pic}(X_\Sigma)$  es un grupo abeliano libre.

*Demostración.* Sea  $D$  un divisor Cartier tal que  $\overline{kD} = \bar{0}$  en  $\text{Pic}(X_\Sigma)$ . La Proposición 3.0.4 nos dice que podemos suponer que tenemos una escritura  $D = \sum a_\rho D_\rho$  y que  $kD = \text{div}(\chi^m)$  para algún  $m \in M$ .

Sea  $\sigma \in \Sigma$  un cono de dimensión máxima. La restricción  $D|_{U_\sigma}$  es Cartier, por lo que, gracias a la Proposición 3.0.3, existe  $m' \in M$  tal que

$$D|_{U_\sigma} = \sum_{\rho \in \sigma(1)} a_\rho D_\rho = \text{div}(\chi^{m'})|_{U_\sigma}.$$

En particular,  $a_\rho = \langle m', u_\rho \rangle$  para cada  $\rho \in \sigma(1)$ . Además,  $kD = \text{div}(\chi^m)$  implica que  $ka_\rho = \langle m, u_\rho \rangle$  para todo  $\rho \in \Sigma$ . Luego, tenemos que

$$\langle km', u_\rho \rangle = \langle m, u_\rho \rangle \quad \forall \rho \in \sigma(1).$$

Como  $\langle u_\rho \rangle_{\sigma(1)} = N_{\mathbb{R}}$ , se sigue que  $km' = m$ . Pero entonces

$$kD = \text{div}(\chi^{km'}).$$

Luego,  $D = \text{div}(\chi^{m'})$  y por lo tanto  $\overline{D} = \bar{0} \in \text{Pic}(X_\Sigma)$ . □

Un elemento  $D \in \text{Pic}(X_\Sigma)$  está caracterizado por su haz asociado  $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$ . Para terminar esta sección daremos una descripción de las secciones globales de este haz. Esto nos será de particular utilidad cuando trabajemos con foliaciones.

**Definición 3.0.1.** Si  $D = \sum a_\rho D_\rho$  es un divisor, definimos el poliedro  $P_D \subseteq M_{\mathbb{R}}$  asociado a  $D$  como

$$P_D = \{x \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle x, u_\rho \rangle \geq -a_\rho \quad \forall \rho \in \Sigma(1)\}.$$

Nótese que estamos usando la palabra “poliedro” en el sentido usual. No obstante,  $P_D$  no tiene por qué ser acotado. Esto se condice con la siguiente proposición:

**Proposición 3.0.6.** Sea  $D$  un divisor  $T_N$  invariante en una variedad tórica  $X_\Sigma$ . Entonces

$$\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) = \bigoplus_{m \in P_D} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

*Demostración.* Para empezar, escribamos  $D = \sum a_\rho D_\rho$ . Sea  $f$  una sección global de  $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$ . Por definición,  $\text{div}(f) + D \geq 0$ . En particular,

$$(\text{div}(f) + D)|_{T_N} = \text{div}(f)|_{T_N} \geq 0.$$

Luego,  $f \in \mathbb{C}[T_N] = \mathbb{C}[M]$ . Con esto en mente, la Proposición 1.1.2 nos dice que

$$\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) = \bigoplus_{\chi^m \in \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

Pero  $\text{div}(\chi^m) + D \geq 0$  si y sólo si  $m \in P_D$ , de donde

$$\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) = \bigoplus_{m \in P_D} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

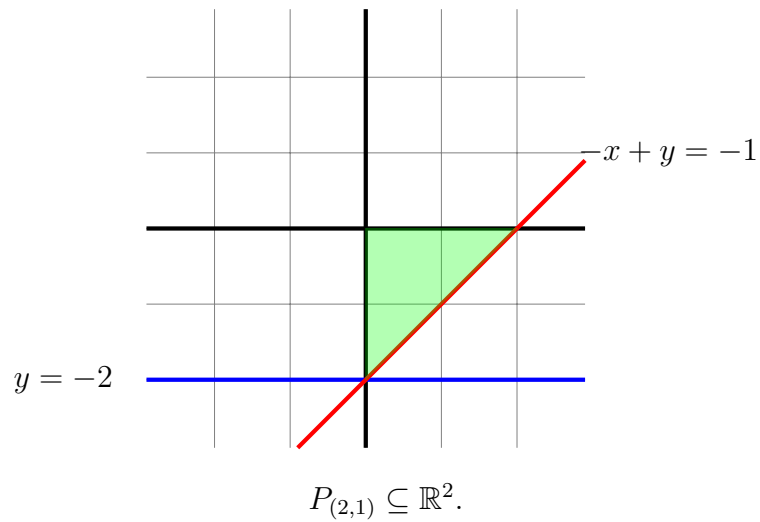
□

**Observación 3.0.3.** En el caso en que la variedad  $X_\Sigma$  sea completa, cualquier  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de las secciones globales de un haz coherente es de dimensión finita (ver[Sh]). En particular, todos los poliedros  $P_D$  son acotados. Intuitivamente, esto pasa porque  $\Sigma$  tiene “suficientes” rayos.

**Ejemplo 3.0.6.** Volvamos al Ejemplo 2.2.4 para recordar el abanico  $\Sigma$  que asociado a la variedad  $\mathcal{H}_1$ . Además, en el Ejemplo 3.0.4 vimos que  $Cl(\mathcal{H}_r) \simeq \mathbb{Z}^2$  con generadores  $\overline{D_{\rho_2}}$  y  $\overline{D_{\rho_4}}$ . Además, la variedad  $\mathcal{H}_1$  es suave. Tomemos entonces un elemento  $(a, b) = \overline{D}$  en el grupo de Picard e identifiquémoslo con un representante en  $Div_{T_N}$  de la forma  $D = aD_{\rho_2} + bD_{\rho_4}$ . Entonces

$$P_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0; -a \leq y \leq 0; -x + y \leq -1\}.$$





Luego, la cantidad de puntos enteros en  $P_D$  es

$$\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(a, b)) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0 \text{ ó } b < 0 \\ 1 & \text{si } a \cdot b = 0 \\ \frac{(b+1)(b+2)}{2} - \frac{(b-a-1)(b-a)}{2} & \text{si } 1 \leq a \leq b \\ \frac{(b+1)(b+2)}{2} & \text{si } 1 \leq b \leq a \end{cases}$$

▲

Cabe aclarar que el problema de contar puntos enteros en polígonos en el plano fue estudiado por Georg A. Pick dando lugar a la conocida fórmula

$$A = i + \frac{b}{2} - 1.$$

Su generalización a dimensiones más altas se corresponde con los *polinomios de Erhart*. En 1962 Erhart probó que la cantidad  $L(P, t) = |P \cap \mathbb{Z}^n|$  es un polinomio con coeficientes racionales de grado  $d = \dim(P)$ . Barvinok, por otra parte, probó en el año 1994 que el problema de contar puntos enteros en un poliedro tiene complejidad polinomial en el volumen del mismo.



# Capítulo 4

## Variedades tóricas como buenos cocientes

### 4.1 Algunas definiciones

Para las construcciones que siguen vamos a usar algunos elementos de *Geometric Invariant Theory*. A continuación repasaremos los conceptos más importantes. Para más detalle consultar [GIT]. Si bien el contexto natural para hablar de cocientes por un grupo es el de los *stacks* (donde por definición estos cocientes siempre existen), vamos a restringirnos a cocientes de variedades algebraicas por grupos algebraicos afines. Cuando no hagamos otra aclaración,  $G$  será un grupo afín actuando sobre una variedad algebraica  $X$ .

**Definición 4.1.1.** Sea  $\pi : X \rightarrow Y$  un morfismo que es constante en las  $G$ -órbitas. Decimos que  $\pi$  es *buen cociente categórico* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Para todo abierto  $U \subseteq Y$  el morfismo natural  $\mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))$  induce un isomorfismo

$$\mathcal{O}_Y(U) \simeq \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G.$$

2. Para todo cerrado  $G$ -invariante  $F \subseteq X$  se tiene que  $\pi(F) \subseteq Y$  es cerrado.
3. Si  $H, F \subseteq X$  son cerrados  $G$ -invariantes disjuntos, entonces  $\pi(F)$  y  $\pi(H)$  son disjuntos.

En este caso, diremos que  $Y \simeq X//G$ .

**Teorema 4.1.1.** Sea  $\pi : X \rightarrow Y$  un buen cociente categórico. Entonces:

1.  $Y$  es un cociente en la categoría de variedades. Es decir, para cualquier morfismo  $\phi : X \rightarrow Z$  que sea constante sobre las  $G$ -órbitas existe una única  $\tilde{\phi} : Y \rightarrow Z$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Z \\ \downarrow \pi & \nearrow \tilde{\phi} & \\ Y & & \end{array}$$

2.  $\pi$  es sobreyectiva.
3. Un conjunto  $U \subseteq Y$  es abierto  $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq X$  es abierto. Es decir,  $Y$  tiene la topología cociente.
4. Si  $x, y \in X$ , entonces  $\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow \overline{G \cdot x} \cap \overline{G \cdot y} \neq \emptyset$ .
5. Para cada  $y \in Y$ , existe una única  $G$ -órbita cerrada incluida en  $\pi^{-1}(y)$ .

Con este resultado podemos afirmar que la notación  $Y \simeq X//G$  no es abusiva, pues el punto 1 nos dice que  $X//G$  (en caso de existir) es único salvo isomorfismo.

El punto 4 nos sugiere que un cociente categórico no tiene por qué separar órbitas. El siguiente ejemplo ilustra esta cuestión:

**Ejemplo 4.1.1.** Consideremos la acción diagonal de  $G = \mathbb{C}^*$  sobre  $\mathbb{C}^n$  definida por

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

La órbita  $\{(0, \dots, 0)\}$  se encuentra en la clausura de todas las órbitas, por lo que cualquier función que sea invariante por  $G$  es constante. Con esto en mente, es fácil ver que el morfismo a un punto  $\mathbb{C}^n \rightarrow *$  es un buen cociente categórico.  $\blacktriangle$

Es sabido que, si en el ejemplo anterior decidimos quitar el origen antes de cocientar, el resultado será  $\mathbb{P}^n$ . En este caso, todas las órbitas serán cerradas por lo que podemos pensar al cociente como un espacio de órbitas. Idealmente, éste es el tipo de cocientes sobre el que nos gustaría trabajar.

**Definición 4.1.2.** Sea  $\pi : X \rightarrow Y$  un buen cociente categórico. Decimos que  $X//G$  es un buen cociente geométrico si todas las  $G$ -órbitas son cerradas. En este caso notamos  $Y \simeq X/G$ .

Si combinamos el teorema anterior con esta última definición, obtenemos la siguiente proposición:

**Proposición 4.1.1.** Sea  $\pi : X \rightarrow X//G$  un buen cociente categórico. Son equivalentes:

1.  $X//G$  es un buen cociente geométrico.
2. Si  $x, y \in X$  entonces  $\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow y \in G.x$ .
3.  $\pi$  induce una biyección entre las  $G$ -órbitas y los puntos de  $X//G$ .

Por último, es muy importante destacar que los conceptos utilizados para definir estos cocientes son de carácter local. En particular, tenemos el siguiente (muy útil) resultado:

**Proposición 4.1.2.** Sea  $\pi : X \rightarrow Y$  un morfismo que es constante en las  $G$ -órbitas. Sea  $\{V_i\}$  un cubrimiento de  $Y$ . Entonces  $\pi$  es un buen cociente categórico (geométrico) si y sólo si cada morfismo

$$\pi|_{\pi^{-1}(V_i)} : \pi^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$$

es un buen cociente categórico (geométrico).

## 4.2 El anillo de coordenadas homogéneas

Tomemos como modelo al espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$ . La presentación estándar de esta variedad es el cociente de  $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0)/\sim$ , donde  $z \sim w$  si y sólo si existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tal que  $\lambda z = w$ . Es decir, pensamos a  $\mathbb{P}^n$  como el cociente de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$  por la acción diagonal del grupo  $\mathbb{C}^*$ . Esto nos permite trasladar resultados, como por ejemplo el Nullstellensatz, del espacio afín al proyectivo.

A continuación vamos a generalizar estos conceptos para variedades tóricas normales. Sabemos que toda variedad tórica es de la forma  $X_\Sigma$  para algún abanico  $\Sigma$ . Nuestro objetivo será dar una descripción de  $X_\Sigma$

$$X_\Sigma \simeq \mathbb{C}^r \setminus Z//G$$

En lo que sigue, asumiremos que  $X_\Sigma$  no contiene factores tóricos o equivalentemente  $\langle \Sigma \rangle = \mathbb{R}^n$ .

### 4.2.1 El grupo $G$

La Proposición 3.0.1 nos da la sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i} CDiv_{T_N}(X) \xrightarrow{q} Cl(X) \rightarrow 0$$

donde  $CDiv_{T_N}$  denota los divisores Cartier invariantes por la acción del toro y el primer morfismo está definido por  $m \in M \mapsto \sum \langle m, u_r \rangle D_r \in CDiv_{T_N}$ . Aplicando  $Hom(-, \mathbb{C}^*)$ , queda

$$1 \rightarrow Hom(Cl(X), \mathbb{C}^*) \rightarrow Hom(CDiv_{T_N}, \mathbb{C}^*) \rightarrow N \otimes \mathbb{C}^* \rightarrow 1$$

Sabemos que  $CDiv_{T_N} = \bigoplus \mathbb{Z}D_\rho$  donde  $\rho$  recorre  $\Sigma(1)$ . En otras palabras,  $CDiv_{T_N} \simeq \mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$ , por lo que  $Hom(CDiv_{T_N}, \mathbb{C}^*) \simeq (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)}$ . Este último isomorfismo manda un elemento de  $h \in Hom(CDiv_{T_N}, \mathbb{C}^*)$  a la tupla  $(a_\rho)_{\Sigma(1)}$  de modo que  $h(D_\rho) = a_\rho$ . Por otro lado, tenemos  $N \otimes \mathbb{C}^* = T_N$ . Escribamos  $G = Hom(Cl(X), \mathbb{C}^*)$  y reemplazemos todas estas identificaciones en la sucesión:

$$1 \rightarrow G \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)} \xrightarrow{i_*} T_N \rightarrow 1$$

**Observación 4.2.1.** En particular, esta sucesión nos da la igualdad

$$(\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)} / G \simeq T_N$$

como grupos algebraicos. De esta forma, podemos entender la construcción que sigue como un cociente  $\pi$  que extienda a  $i^*$ :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)} & \xrightarrow{i^*} & T_N \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & G & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z & \xrightarrow{\pi} & X_\Sigma \end{array}$$

Si pensamos a  $T_N$  como el conjunto de caracteres de  $M$ ,

$$(i_*(a_\rho)_{\Sigma(1)})(m) = \prod_{\rho} a_\rho^{\langle m, u_\rho \rangle},$$

de modo que tomando una base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $M$  podemos escribir a  $G$  como el subgrupo de  $(\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)}$  que cumple las ecuaciones

$$\prod_{\rho \in \Sigma(1)} a_\rho^{\langle e_i, u_\rho \rangle} - 1 = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

**Observación 4.2.2.** Una vez fijado el isomorfismo  $N \simeq \mathbb{Z}^n$ , podemos identificar a  $T_N$  de forma canónica con  $(\mathbb{C}^*)^n$ . En éstas coordenadas,

$$i_*(a_\rho)_{\Sigma(1)} = \left( \prod_{\rho} a_\rho^{(e_i, u_\rho)} \right)_{1 \leq i \leq n}.$$

Como  $Cl(X)$  es un grupo abeliano,  $G$  es el producto de un toro con un grupo abeliano finito. En particular,  $G$  es reductivo. Esto es fundamental para nuestra construcción, ya que nos provee de la siguiente proposición, cuya demostración se puede consultar en [GIT]:

**Proposición 4.2.1.** Sea  $G$  un grupo reductivo actuando sobre una variedad afín  $X = Spec(A)$ . Entonces

1.  $A^G$  es una  $\mathbb{C}$ -álgebra finitamente generada.
2. El morfismo cociente  $X \rightarrow Spec(A^G)$  es un buen cociente categórico.

**Observación 4.2.3.** En el caso en que  $X_\Sigma$  es suave y tiene un punto fijo por la acción de  $T_N$  (o equivalentemente,  $\Sigma$  es suave con un cono de dimensión  $n$ ), tenemos que  $Cl(X_\Sigma) = Pic(X_\Sigma)$  es un grupo abeliano libre, por lo que  $G$  será un toro de dimensión igual a  $|\Sigma(1)| - dim(X_\Sigma)$ , pues  $dim(X_\Sigma) = dim(T_N)$ .

Es claro que  $\bar{D} \in Cl(X_\Sigma)$  induce un caracter en  $G = Hom(Cl(X_\Sigma), \mathbb{C}^*)$  via la evaluación. Se puede ver que éstos son todos los caracteres de  $G$ , es decir,

$$Cl(X_\Sigma) = Hom(G, \mathbb{C}^*).$$

En coordenadas,  $\bar{D} = \sum a_\rho D_\rho$  nos da el morfismo  $g = (g_\rho) \mapsto \prod g_\rho^{a_\rho} = g^{\bar{D}}$ . (Las ecuaciones de  $G$  nos dicen que el morfismo no depende de la elección de  $D$ : dos representantes de la misma clase difieren en algún  $div(\chi^m)$  y por lo tanto inducen el mismo caracter).

Si bien hay dos formas estándar de graduar a  $S$  (tomando un multigrado a  $\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$  o asignando a todas las variables el mismo grado), esta última caracterización de  $Hom(G, \mathbb{C}^*)$  sugiere tomar la graduación al grupo de clases inducida por

$$\prod_{\rho \in \Sigma(1)} x_\rho^{a_\rho} \mapsto \overline{\sum_{\rho \in \Sigma(1)} a_\rho D_\rho}.$$

De esta forma, si tomamos un elemento  $g \in G$  y un  $f = \sum b_a x^a$  homogéneo de grado  $\bar{D}$ ,

$$g.f(x) = \sum b_a(g^{-1})^a x^a = (g^{-1})^{\bar{D}} f.$$

Es decir, los subespacios de  $S$  de la forma {polinomios homogéneos de grado  $\bar{D}$ } diagonalizan simultáneamente las operaciones  $f \mapsto g.f$ .

**Definición 4.2.1.** El *anillo de coordenadas homogéneas* de la variedad tórica  $X_\Sigma$  es el anillo de polinomios  $\mathbb{C}[x_\rho | \rho \in \Sigma(1)]$  graduado por el grupo  $Cl(X_\Sigma)$ .

### 4.2.2 El conjunto $Z$

El anillo de coordenadas de  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)}$  es  $\mathbb{C}[x_\rho | \rho \in \Sigma(1)] := S$ . Para cada  $\sigma \in \Sigma$  definamos el monomio

$$x^\sigma = \prod_{\rho \notin \sigma(1)} x_\rho$$

Observemos que si  $\tau$  es una cara de  $\sigma$  entonces  $x^\sigma$  divide a  $x^\tau$  en  $S$ . Llamemos  $C$  al ideal generado por estos monomios. La observación nos dice que  $C = \langle x^\sigma | \sigma \in \Sigma_{max} \rangle$ . Como  $C$  es un ideal monomial,  $V(C) := Z$  será unión de subespacios “cartesianos”. Sea  $V = V(x_{\rho_1}, \dots, x_{\rho_s})$  un subespacio maximal en  $Z$ . Si  $\sigma \in \Sigma$ , entonces  $x^\sigma$  se anula sobre  $V$ , por lo que debe ser divisible por algún  $x_{r_i}$ . Esto es,  $x_{r_i} \notin \sigma(1)$ . Por otro lado, si consideramos un subconjunto  $A$  de  $\{x_{r_1}, \dots, x_{r_s}\}$ , la maximalidad de  $V$  nos dice que  $V(A) \not\subseteq Z$ , de lo que se sigue que  $A \subseteq \sigma(1)$  para algún  $\sigma \in \Sigma$ . Esto sugiere la siguiente definición:

**Definición 4.2.2.** decimos que  $A \subseteq \Sigma(1)$  es una *colección primitiva* si es minimal entre los subconjuntos que no están contenidos en  $\sigma(1)$  para algún  $\sigma \in \Sigma$ .

La discusión anterior nos dice que

$$Z = \bigcup_{A \subseteq \Sigma(1) \text{ prim.}} V(A).$$

Como  $G \subseteq (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)}$ , tenemos una acción bien definida de  $G$  sobre  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z$ .

**Observación 4.2.4.** Toda colección primitiva tiene cardinal mayor o igual a 2, por lo que  $\text{codim}(Z) \geq 2$ .



### 4.2.3 El morfismo $\pi$

Como nuestro objetivo es describir a  $X_\Sigma$  como un cociente, necesitamos un morfismo  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z \rightarrow X_\Sigma$  que sea constante sobre las  $G$ -órbitas. Para conseguirlo, vamos a escribir a  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z = X_{\widehat{\Sigma}}$  y explicitar un morfismo de reticulados que sea compatible con los abanicos  $\widehat{\Sigma}$  y  $\Sigma$ .

Notemos que hay una “copia cuadrada” de  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^{\Sigma(1)}$  (cuando decimos “copia”, nos referimos al sentido combinatorio. En general, no será una copia algebraica de  $\Sigma$ ): para cada  $\sigma \in \Sigma$ , escribamos

$$\hat{\sigma} := \text{Cone}(e_\rho | \rho \in \sigma(1))$$

y definamos  $\widehat{\Sigma} = \{\hat{\sigma} | \sigma \in \Sigma\}$ . De esta forma, es inmediato que el morfismo de reticulados  $e_\rho \mapsto u_\rho$  es compatible con los abanicos. Esto induce un morfismo tórico  $X_{\widehat{\Sigma}} \xrightarrow{\pi} X_\Sigma$ . En particular, tenemos un morfismo de grupos algebraicos  $(\mathbb{C}^*)^n \xrightarrow{\pi} T_N$ . Visto desde el punto de vista uniparamétrico,  $\mathbb{Z}^{\Sigma(1)} \otimes \mathbb{C}^* \xrightarrow{\pi} N \otimes \mathbb{C}^*$  coincide con el morfismo  $i_*$  de la sucesión exacta corta de la Observación 4.2.1 (pues  $e_\rho \otimes t \xrightarrow{\pi} u_\rho \otimes t$ ). Como consecuencia de esto,  $\pi(G) = 1$  y por lo tanto  $\pi$  es constante sobre las  $G$ -órbitas.

Veamos ahora que  $X_{\widehat{\Sigma}} = \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z$ . Para ello, vamos a hacer uso de la correspondencia entre conos de un abanico y órbitas de su variedad asociada. Si llamamos  $\widetilde{\Sigma}$  al abanico que consiste de  $\text{Cone}(e_\rho | \rho \in \Sigma(1))$  y sus caras, sabemos que su variedad asociada es  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)}$ . Claramente, los conos de  $\widehat{\Sigma}$  están en  $\widetilde{\Sigma}$ . Recordemos que el teorema de correspondencia nos dice que

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau \leq \sigma} O_\tau.$$

Entonces podemos escribir a  $X_{\widehat{\Sigma}} = X_{\widetilde{\Sigma}} \setminus \bigcup_{\tau \notin \widehat{\Sigma}} O_\tau$ . Más aún, el mismo teorema nos dice que  $\overline{O_\tau} = \bigcup_{\tau \leq \sigma} O_\sigma$ . Entonces la última igualdad nos queda

$$X_{\widehat{\Sigma}} = X_{\widetilde{\Sigma}} \setminus \bigcup_{\tau \in \widetilde{\Sigma} \setminus \widehat{\Sigma} \text{ minimal}} \overline{O_\tau}.$$

Pero  $\overline{O_\tau} = V(x_\rho | \rho \in \tau(1))$ . Además, al tomar los  $\tau$  minimales entre los que no están en  $\widehat{\Sigma}$  nos quedamos sólo con las colecciones primitivas, de lo que se sigue que

$$\bigcup_{\tau \in \widetilde{\Sigma} \setminus \widehat{\Sigma} \text{ minimal}} \overline{O_\tau} = Z.$$

Conseguimos entonces un morfismo  $\pi : \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z \rightarrow X_\Sigma$  que es constante sobre las  $G$ -órbitas. Con todo esto, podemos probar el siguiente teorema:

**Teorema 4.2.1.** 1 Sea  $X_\Sigma$  una variedad sin factores tóricos y  $\pi : \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z \rightarrow X_\Sigma$  como antes. Entonces

1.  $\pi$  es un buen cociente categórico para la acción de  $G$  sobre  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z$ , de modo que

$$X_\Sigma \simeq \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z // G$$

2.  $\pi$  es un buen cociente geométrico si y solo si  $\Sigma$  es simplicial.

*Demostración.* Para el primer ítem, basta probar que  $\pi|_{\pi^{-1}(U_\sigma)} : \pi^{-1}(U_\sigma) \rightarrow U_\sigma$  es un buen cociente categórico. Recordemos que  $\pi^{-1}(U_\sigma) = \bigcup_{\pi(\hat{\sigma}) \subseteq \sigma} U_{\hat{\sigma}}$ . Pero  $\hat{\Sigma}$  es una copia cuadrada de  $\Sigma$ , por lo que  $\pi^{-1}(U_\sigma) = U_{\hat{\sigma}}$ . Esto, junto con la Proposición 4.1.2, nos permiten restringir el problema a  $\pi : U_{\hat{\sigma}} \rightarrow U_\sigma$ .

Como  $G$  es un grupo reductivo, sabemos que  $U_{\hat{\sigma}} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[U_{\hat{\sigma}}]^G)$  es un buen cociente categórico. Por otro lado,  $\pi$  es constante en las  $G$ -órbitas, por lo que  $\pi^*$  se factoriza

$$\mathbb{C}[U_\sigma] \xrightarrow{\pi^*} \mathbb{C}[U_{\hat{\sigma}}]^G \hookrightarrow \mathbb{C}[U_{\hat{\sigma}}]$$

Esto reduce la cuestión a probar que el primer morfismo es un isomorfismo.

Como  $T_N \subseteq \text{Im}(\pi)$ , el morfismo es dominante y por lo tanto  $\pi^*$  es inyectivo. Veamos entonces que es sobreyectivo:

El anillo de coordenadas de  $U_{\hat{\sigma}}$  es

$$\mathbb{C}[U_{\hat{\sigma}}] = \mathbb{C}[\hat{\sigma}^\vee \cap \mathbb{Z}^{\Sigma(1)}].$$

Escribiendo  $\hat{\sigma}^\vee = \{a = (a_\rho) \in \mathbb{Z}^{\Sigma(1)} \mid a_\rho \geq 0 \forall \rho \in \sigma\}$ , tenemos

$$\mathbb{C}[U_{\hat{\sigma}}] = S_{x^\sigma}.$$

Si tomamos un elemento de  $(S_{x^\sigma})^G$  y lo escribimos de la forma  $f = \sum b_a x^a$ , tenemos que

$$f(g.x) = f \quad \forall g \in G$$

Esto es,  $\sum b_a g^a x^a = \sum b_a x^a$  para cada  $g \in G$ . Equivalentemente, los exponentes  $a = (a_\rho)$  tales que  $b_a \neq 0$  cumplen que  $g^a = 1$  para todo  $G$ . Entonces, por lo visto en la sección anterior, debe ser

$$\overline{\sum a_\rho D_\rho} = \bar{0} \in \text{Cl}(X_\Sigma),$$

es decir, debe existir un  $m \in M$  tal que  $a = (\langle m, u_\rho \rangle)$ . Además,

$$\langle m, u_\rho \rangle \geq 0 \quad \forall \rho \in \sigma$$

implica que  $m \in \sigma^\vee \cap M$ . Recordemos que  $\pi^* : \chi^m \mapsto \prod x_\rho^{\langle m, u_\rho \rangle}$ .

Entonces todos los monomios de grado  $\bar{0}$  están en la imagen de  $\pi^*$  y por lo tanto el morfismo es sobreyectivo.

**Observación 4.2.5.** En particular, probamos que  $\pi^* : \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \xrightarrow{\sim} (S_{x^\sigma})_0$  es un isomorfismo.

Pasemos ahora a la segunda proposición del teorema . Nuevamente, la estrategia general será mirar el caso afín. Recordemos que  $X_\Sigma$  es simplicial si y sólo si todos los conos de  $\Sigma$  lo son.

Veamos que si  $\pi$  es un cociente geométrico entonces  $X_\Sigma$  es simplicial. Supongamos por el contrario que existe un cono  $\sigma$  que no lo es. Esto es, existen  $\{n_\rho\}_{\sigma(1)}$  (no todos nulos) tales que  $\sum n_\rho u_\rho = 0$ . En un principio,  $n_\rho \in \mathbb{R}$ . Es fácil ver (por ejemplo, por inducción en la dimensión del espacio) que podemos tomar  $n_\rho \in \mathbb{Z}$ . A continuación vamos a usar esta identidad para encontrar una  $G$ -órbita que no sea cerrada.

Extendiendo por 0 cuando  $\rho \notin \sigma(1)$ , podemos definir  $n = (n_\rho)_{\Sigma(1)} \in \mathbb{Z}^n$ . Podemos considerar entonces el grupo uniparamétrico  $\alpha^n$  de  $(\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)}$ . Recordemos que las ecuaciones para  $G$  son

$$\prod_{\rho \in \Sigma(1)} a_\rho^{\langle e_i, u_\rho \rangle} - 1 = 0 \quad 1 \leq i \leq n.$$

Si las evaluamos en  $\alpha^n$ , nos queda

$$\prod_{\rho \in \Sigma(1)} (t^{n_\rho})^{\langle e_i, u_\rho \rangle} - 1.$$

Pero

$$\sum n_\rho \langle e_i, u_\rho \rangle = \langle e_i, \sum n_\rho u_\rho \rangle = 0,$$

y por lo tanto  $\alpha^n$  es un grupo uniparamétrico de  $G$ .

Claramente, el límite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha^n(t)$$

existirá sólo cuando  $n_\rho \geq 0$  para todo  $\rho \in \sigma(1)$ . Como no podemos garantizar que esto pase, deberemos movernos a otra  $G$ -órbita: consideremos el punto  $y \in U_\sigma$  tal que

$$y_\rho = \begin{cases} 1 & \text{si } n_\rho \geq 0 \\ 0 & \text{si } n_\rho < 0 \end{cases}$$

Si miramos la curva  $\alpha^n \cdot y \subseteq G \cdot y$ , tenemos que el límite

$$y_0 := \lim_{t \rightarrow 0} \alpha^n(t) \cdot y = \begin{cases} 0 & \text{si } n_\rho > 0 \\ 1 & \text{si } n_\rho \leq 0. \end{cases}$$

Una observación muy importante es que  $y_0 \notin Z$ , pues el elemento  $x^\sigma$  de  $C$  no se anula sobre  $y_0$ . Para concluir que la órbita de  $y$  no es cerrada vamos a necesitar suponer, sin pérdida de generalidad, que existe algún  $\rho_0$  para el cual  $n_{\rho_0} > 0$ . Entonces

$$G \cdot y \subseteq \{x_{\rho_0} \neq 0\}.$$

Como  $y_0 \notin \{x_{\rho_0} \neq 0\}$ , se sigue que  $G \cdot y$  no es cerrado y por lo tanto  $\pi$  no es un buen cociente geométrico.

Para probar la otra implicación, supongamos que  $\sigma \in \Sigma$  es simplicial y veamos que las  $G$ -órbitas en  $U_\sigma$  son cerradas.

Recordemos que  $G$  es el producto de un toro con un grupo abeliano finito. Entonces la componente conexa de la identidad  $G_0$  (es un toro y) tiene índice finito. Luego, basta ver que las  $G_0$  órbitas son cerradas. Tomemos entonces  $p \in U_\sigma$  y  $p' \in \overline{G_0 \cdot p}$ . Afirimo:  $\overline{G_0 \cdot p}$  es una variedad tórica (afín). Para probar esta afirmación basta ver que  $G_0 \cdot p$  es isomorfo a un toro. En efecto, la órbita es un grupo vía  $(g \cdot p, g' \cdot p) \mapsto (g \cdot g') \cdot p$ . Recordemos que la acción de  $G_0$  es por multiplicación estándar. Sea  $S \subseteq \Sigma(1)$  el conjunto de coordenadas distintas de cero de  $p$ . Entonces podemos pensar a la acción de  $G_0$  dentro del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \longrightarrow & G_0 \cdot p \\ q \downarrow & \nearrow \cdot p & \\ (\mathbb{C}^*)^S & & \end{array}$$

donde  $q$  es la proyección y  $\cdot p$  es completar con ceros y multiplicar por  $p$ . Ahora, es fácil ver que  $G_0 \cdot p \simeq q(G_0)$ . Luego, la Proposición 1.1.1 nos dice que  $G_0 \cdot p \subseteq (\mathbb{C}^*)^S$  es un toro.

Ahora estamos en condiciones de hacer uso del siguiente lema:

**Lema 4.2.1.** Sea  $X$  una variedad tórica afín con toro  $T$ . Si  $p \in T$ ,  $p' \in X$  entonces existe  $q \in T$  y un grupo uniparamétrico  $\alpha$  tal que

$$p' = \lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) \cdot q \cdot p.$$

Si bien el lema nos dice que podemos tomar  $\tilde{q}, \tilde{\alpha}$  en  $G_0 \cdot p$ , podemos levantarlos a un grupo uniparamétrico  $\alpha$  y un punto  $q$  en  $G_0$ :

$$\tilde{\alpha} = \alpha \cdot p \quad \text{y} \quad \tilde{q} = q \cdot p$$

El levantamiento de  $\tilde{\alpha}$  se corresponde con la correspondiente preimagen en el morfismo  $\hat{q} : \mathbb{Z}^{\dim(G)} \rightarrow \mathbb{Z}^S$  de grupos uniparamétricos inducido por  $q$ . Para concluir que  $p' \in G_0 \cdot p$ , vamos a probar que  $\alpha$  es el grupo trivial.

Por un lado,  $\alpha \subseteq (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)}$ , por lo que debe venir dado por algún  $n \in \mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$ . Además,  $\alpha \subseteq G$ , de donde se sigue que para cada  $1 \leq i \leq n$

$$\prod_{\rho \in \Sigma(1)} (t^{n_\rho})^{\langle e_i, u_\rho \rangle} - 1 = 0$$

y por lo tanto

$$\sum_{\rho \in \Sigma(1)} n_\rho u_\rho = 0.$$

Por otra parte, recordemos que

$$\mathbb{C}[U_{\hat{\sigma}}] = S_{x^\sigma}.$$

En otras palabras, si  $\rho \notin \sigma(1)$ , el monomio  $x_\rho$  es inversible, de modo que  $p' \in U_{\hat{\sigma}}$  implica que  $p'_\rho \neq 0$ . Entonces, mirando el límite en cada una de estas coordenadas

$$p'_\rho = \lim_{t \rightarrow 0} t^{n_\rho} q_\rho p_\rho$$

debe ser  $n_\rho = 0$  para  $\rho \notin \sigma(1)$ . Entonces la suma anterior es en realidad

$$\sum_{\rho \in \sigma(1)} n_\rho u_\rho = 0.$$

Luego, como  $\sigma$  es simplicial, se sigue que  $n_\rho = 0$  para todo  $\rho \in \Sigma(1)$ . Esto implica que  $\alpha$  es el grupo uniparamétrico trivial y por lo tanto  $p' = q \cdot p$ , es decir, la órbita  $G \cdot p$  es cerrada. □

El teorema anterior se puede entender como un resultado de coordenadas globales. Si  $\Sigma$  tiene un cono suave de dimensión máxima, (igual a la dimensión de  $X_\Sigma$ )

digamos  $\sigma$ , tenemos  $U_\sigma \simeq \mathbb{C}^n$ . Como  $n \leq |\Sigma(1)|$ , nos podemos preguntar si las coordenadas usuales de  $\mathbb{C}^n$  son compatibles vía algún morfismo  $\phi$  con la construcción previa.

**Definición 4.2.3.** Si  $\Sigma' \subseteq \Sigma$ , diremos que  $\Sigma'$  es *completo en  $\Sigma$*  si

$$\Sigma' = \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma(1) \subseteq \Sigma'(1)\}.$$

Observemos que si  $\sigma \in \Sigma$  tiene dimensión máxima entonces el abanico generado por  $\sigma$  y todas sus caras es completo en  $\Sigma$ . La siguiente proposición responde nuestra pregunta (para ver una demostración ver [CLS]):

**Proposición 4.2.2.** Sean  $X_\Sigma$  una variedad sin factores tóricos y  $\Sigma'$  completo en  $\Sigma$  tal que  $X_{\Sigma'} \subseteq X_\Sigma$  no tiene factores tóricos. Definamos  $\phi : \mathbb{C}^{\Sigma'(1)} \rightarrow \mathbb{C}^{\Sigma(1)}$  de modo que

$$\phi(a)_\rho = \begin{cases} a_\rho & \text{si } \rho \in \Sigma' \\ 1 & \text{si } \rho \notin \Sigma'. \end{cases}$$

Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\Sigma'(1)} \setminus Z' & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ X_{\Sigma'} & \xrightarrow{\quad} & X_\Sigma \end{array}$$

En particular, si tenemos un  $\sigma \in \Sigma$  con las hipótesis de antes, podemos considerar el abanico  $\Sigma'$  generado por  $\sigma$  y sus caras. Entonces la proposición anterior nos provee del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\sigma(1)} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z \\ \pi' \downarrow \wr & & \downarrow \pi \\ U_\sigma & \xrightarrow{\quad} & X_\Sigma \end{array}$$

**Observación 4.2.6.** La proposición no le pide ningún tipo de suavidad a  $\Sigma'$ .

Otra forma de entender este resultado es que  $\phi$  es un levantamiento de  $i : X_{\Sigma'} \rightarrow X_\Sigma$  a sus respectivas presentaciones cocientes. Un análisis interesante sobre la existencia de este tipo de levantamientos se puede ver en [B].

**Ejemplo 4.2.1.** Recordemos el Ejemplo 2.2.3. El abanico asociado a  $\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1})$  cumple que  $|\Sigma(1)| = n + 1$ . Además, la única colección primitiva es  $\{\rho_1, \dots, \rho_{n+1}\}$ . Luego,

$$Z = V(x_{\rho_1}, \dots, x_{\rho_{n+1}}) = \{0\}.$$

Recordemos del Ejemplo 3.0.3 la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Z}^{n+1} \longrightarrow Cl(\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1})) \longrightarrow 0$$

donde  $Cl(\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1})) \simeq \mathbb{Z}$  (esto es,  $G \simeq \mathbb{C}^*$ ) y el segundo morfismo es

$$(a_1, \dots, a_{n+1}) \mapsto q_1 a_1 + \dots + a_{n+1} q_{n+1}.$$

En particular,  $e_i \mapsto q_i$  para cada  $1 \leq i \leq n+1$ . Entonces la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+1} \longrightarrow T_N \longrightarrow 0$$

tiene por primer morfismo  $t \mapsto (t^{q_1}, \dots, t^{q_{n+1}})$ . Luego,

$$\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1}) \simeq \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*,$$

donde la acción está dada por  $t \cdot (x_1, \dots, x_{n+1}) = (t^{q_1} x_1, \dots, t^{q_{n+1}} x_{n+1})$ . A nivel de su anillo de coordenadas homogéneas, si  $t \in \mathbb{C}^*$  cada monomio  $x_i$  cumple

$$t \cdot x_i = t^{q_i} x_i,$$

de donde se sigue que  $gr(x_i) = q_i \in Cl(\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1})) \simeq \mathbb{Z}$ . ▲

**Observación 4.2.7.** En el caso  $q_1 = \dots = q_{n+1} = 1$  obtenemos la presentación estándar del espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$ .

**Ejemplo 4.2.2. Superficies de Hirzebruch.** En el Ejemplo 2.2.4 vimos que la superficie de Hirzebruch  $\mathcal{H}_r$  viene dada por el abanico completo de  $\mathbb{R}^2$  con

$$\Sigma(1) = \{\rho_1 = Cone(e_1), \rho_2 = Cone(e_2), \rho_3 = Cone(-e_2), \rho_4 = Cone(-e_1 + re_2)\}.$$

Las colecciones primitivas para  $\Sigma$  son  $\{\rho_1, \rho_4\}$  y  $\{\rho_2, \rho_3\}$ , por lo que  $Z \subseteq \mathbb{C}^4$  será

$$Z = \{x_1 = x_4 = 0\} \cup \{x_2 = x_3 = 0\}.$$

Además,  $G \subseteq (\mathbb{C}^*)^4$  viene dado por las ecuaciones

$$\prod_{i=1}^4 x_i^{\langle e_j, u_i \rangle} = 1 \quad j = 1, 2,$$

o equivalentemente  $x_1 = x_4$  y  $x_3 = x_2 x_4^r$ . Es decir,  $G \simeq (\mathbb{C}^*)^2$  vía

$$(t_1, t_2) \longmapsto (t_1, t_2, t_1^r t_2, t_1).$$

Tenemos entonces para cada  $r \in \mathbb{N}$  el buen cociente geométrico  $\mathcal{H}_r \simeq \mathbb{C}^4 \setminus Z / (\mathbb{C}^*)^2$ , donde la acción está dada por  $(t_1, t_2) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = (t_1 x_1, t_2 x_2, t_1^r t_2 x_3, t_1 x_4)$ . ▲

Para terminar, veamos qué pasa cuando nuestra variedad  $X_\Sigma$  tiene factores tóricos. Sabemos que podemos escribir

$$X_{\Sigma, N} = X_{\Sigma, N'} \times (\mathbb{C}^*)^s,$$

donde  $N' = N \cap \langle \Sigma \rangle$  y  $X_{\Sigma, N'}$  no tiene factores tóricos. Entonces, aplicando la construcción previa a esta nueva variedad tenemos

$$\begin{aligned} X_\Sigma &\simeq (\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z) // G \times (\mathbb{C}^*)^s \\ &\simeq (\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \times (\mathbb{C}^*)^s \setminus Z \times (\mathbb{C}^*)^s) // G, \end{aligned}$$

donde en la segunda línea extendimos la acción de  $G$  a  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \times (\mathbb{C}^*)^s$  trivialmente sobre  $(\mathbb{C}^*)^s$ . Para que esta escritura se parezca más a lo conseguido en el caso sin factores, podemos pensar  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \times (\mathbb{C}^*)^s \subseteq \mathbb{C}^{\Sigma(1)+s}$  y definir

$$Z' = \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \times V(x_1, \dots, x_s) \cup Z \times \mathbb{C}^s,$$

de modo que

$$X_\Sigma = \mathbb{C}^{\Sigma(1)+s} \setminus Z' // G.$$

Si bien en este caso conseguimos una expresión similar a la anterior, esta vez tenemos que  $\text{codim}(Z') = 1$ . Esto le quita mucha utilidad a la construcción, ya que por ejemplo no podemos aplicar el teorema de extensión de Hartog para extender las funciones regulares de  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)+s} \setminus Z'$  a todo  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)+s}$ .



# Capítulo 5

## Aplicaciones

### 5.1 Algunas aplicaciones clásicas

Tanto en el espacio afín como en el proyectivo podemos dar una descripción de las subvariedades cerradas en función de cierta familia de ideales. A continuación vamos a imitar la demostración del Nullstellensatz proyectivo para generalizar esta descripción para variedades tóricas.

Si  $f \in S$  es un polinomio homogéneo y  $x \in \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z$  cumple que  $f(x) = 0$ , entonces, por lo visto en la sección 4.2.1,  $f$  se anula en  $G \cdot x$ . Esto nos dice que la ecuación  $f = 0$  está bien definida en  $X_{\Sigma}$ . En general, dado un ideal homogéneo  $I \subseteq S$  tenemos que

$$x \in V(I) \Leftrightarrow \overline{G \cdot x} \subseteq V(I) \quad (\subseteq \mathbb{C}^{\Sigma(1)}).$$

Comenzaremos trabajando en el caso simplicial, donde el morfismo  $\pi$  es un cociente geométrico. La ecuación anterior sugiere definir la asignación  $I \mapsto V_X(I) \subseteq X_{\Sigma}$  de la siguiente manera:

$$V_X(I) = \{p \in X_{\Sigma} \mid \pi^{-1}(p) \subseteq V(I)\}.$$

En este caso, tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 5.1.1.** Sea  $S$  el anillo de coordenadas homogéneas de la variedad simplicial  $X_{\Sigma}$ . Entonces

1. Dado un ideal homogéneo  $I \subseteq S$ ,  $V_X(I)$  es una subvariedad de  $X_{\Sigma}$ .
2. Todas las subvariedades son de esta forma.
3. (Nullstellensatz débil)  $V_X(I) = \emptyset$  si y sólo si  $C^k \subseteq I$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Para probar la primer afirmación basta con recordar que  $X_\Sigma$  tiene la topología cociente respecto a  $\pi$  y observar que

$$V(I) = \pi^{-1}(V_X(I))$$

es cerrado en  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z$ .

Por el contrario, si  $V$  es una subvariedad de  $X_\Sigma$  entonces  $\pi^{-1}(V)$  es un cerrado  $G$ -invariante y por lo tanto su clausura Zariski  $\overline{\pi^{-1}(V)} =: W$  también lo es. Veamos que  $I(W)$  es homogéneo: para ello, escribamos a  $f$  como suma de polinomios homogéneos

$$f = \sum_{a \in Cl(X_\Sigma)} f_a \in I(W)$$

y veamos que cada  $f_a \in I(W)$ . Sea  $x \in W$ . Para cada  $g \in G$  tenemos que  $f(g \cdot x) = 0$ . Esto es,

$$\sum_{a \in Cl(X_\Sigma)} f_a(g \cdot x) = \sum_{a \in Cl(X_\Sigma)} g^a f_a(x) = 0.$$

Pero entonces  $\sum f_a(x)y^a = 0$  en  $\mathbb{C}[G]$ . Luego, como los caracteres de  $G$  son linealmente independientes en su anillo de coordenadas, debe ser que  $f_a(x) = 0$  para cada  $a \in Cl(X_\Sigma)$ . Como el elemento  $x$  era arbitrario, probamos que cada  $f_a$  se anula sobre todo  $W$ . Entonces  $I(W)$  es homogéneo y, como  $V_X(I(W)) = V$ , la segunda afirmación queda demostrada.

Para probar el último ítem basta observar que

$$\begin{aligned} V_X(I) = \emptyset &\Leftrightarrow V(I) \subseteq Z = V(C) \\ &\Leftrightarrow C^k \subseteq I \end{aligned}$$

donde en la última equivalencia usamos el Nullstellensatz en el contexto afín.  $\square$

Con todas estas herramientas, es fácil probar que la aplicación  $I \mapsto V_X(I)$  induce una biyección

$$\{\text{ideales radicales homogéneos } I \subseteq C\} \longleftrightarrow \{\text{subvariedades de } X_\Sigma\}.$$

En el caso en el que la variedad no sea simplicial, no podemos asegurar que los cerrados de la forma  $\pi^{-1}(V)$  sean  $G$ -invariantes. Esto se traduce en que la correspondencia deje de valer (para ver un ejemplo donde esto pase ver [Cox]). No obstante, podemos recuperar un resultado intermedio:

**Proposición 5.1.2.** Sea  $X_\Sigma$  una variedad tórica y  $S$  su anillo de coordenadas homogéneas. Entonces

1. Si  $I \subseteq S$  es un ideal homogéneo entonces  $V_X(I) = \{p \in X_\Sigma | \pi^{-1}(p) \cap V_I \neq \emptyset\}$  es una subvariedad de  $X_\Sigma$ .
2. Todas las subvariedades son de esta forma.

Una forma de generalizar lo hecho en esta sección es pasar del ideal  $I$  de una variedad  $V \subseteq X_\Sigma$  al haz de ideales  $I_V$ . A continuación analizaremos la relación que existe entre los haces cuasi-coherentes sobre una variedad tórica  $X_\Sigma$  y el conjunto de  $S$ -módulos graduados. Las ideas desarrolladas surgen de llevar los conceptos utilizados por Serre en el espacio proyectivo (ver [S]) al contexto tórico. Nuevamente, trabajaremos con variedades sin factores tóricos.

La graduación de  $S$  por  $Cl(X_\Sigma)$  nos da una descomposición

$$S = \bigoplus_{a \in Cl(X_\Sigma)} S_a$$

de modo que  $S_a \cdot S_b \subseteq S_{a+b}$  para cualquier elección de  $a$  y  $b$ . En particular,  $S_0 \cdot S_a \subseteq S_a$  para todo  $a \in Cl(X_\Sigma)$ , por lo que podemos pensar a cada componente homogénea como un  $S_0$ -módulo. El siguiente lema nos provee una información muy útil acerca de esta caracterización. Para ver una demostración consultar [Cox] o [CLS].

**Lema 5.1.1.** Para cada  $a \in Cl(X_\Sigma)$  se tiene que  $S_a$  es un  $S_0$ -módulo finitamente generado.

En la Observación 4.2.5 afirmamos que  $\pi^*$  induce isomorfismos  $\mathbb{C}[U_\sigma] \xrightarrow{\pi^*} (S_{x^\sigma})_0$ . Supongamos  $\tau \leq \sigma$ , esto es,  $\tau = \sigma \cap m^\perp$  para un cierto  $m \in \sigma^\vee \cap M$ . Como  $\pi^*(\chi^m) \in S_0$ , tomar elementos de grado 0 conmuta con localizar por  $\pi^*(\chi^m)$  y por lo tanto

$$(S_{x^\tau})_0 \simeq ((S_{x^\sigma})_0)_{\pi^*(\chi^m)}.$$

Con todas estas aclaraciones, es fácil ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$(5.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\tau^\vee \cap M] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] & = & (\mathbb{C}[\tau^\vee \cap M])_{\chi^m} \\ \pi^* \downarrow & & \downarrow \pi^* & & \\ (S_{x^\tau})_0 & \longrightarrow & (S_{x^\sigma})_0 & = & ((S_{x^\tau})_0)_{\pi^*(\chi^m)} \end{array}$$

**Definición 5.1.1.** Un  $S$ -módulo  $F$  se dice *graduado* si tiene una descomposición

$$F = \bigoplus_{a \in Cl(X_\Sigma)} F_a$$

que cumple  $S_a \cdot F_b \subseteq F_{a+b}$  para todo  $a, b \in Cl(X_\Sigma)$ .

Veamos cómo podemos construir un haz sobre  $X_\Sigma$  a partir de un  $S$ -módulo graduado  $F$ . Si  $\sigma \in \Sigma$ , entonces la localización  $F_{x^\sigma}$  es un  $S_{x^\sigma}$ -módulo. Como  $(S_{x^\sigma})_0 \cdot (F_{x^\sigma})_0 \subseteq (F_{x^\sigma})_0$ , se sigue que  $(F_{x^\sigma})_0$  es un  $(S_{x^\sigma})_0$ -módulo. La Observación 4.2.5 nos dice que

$$U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[(S_{x^\sigma})_0]),$$

por lo que podemos usar la teoría de hecha en espacios afines (ver [Har]) para construir un haz cuasi-coherente sobre  $U_\sigma$  a partir de  $(F_{x^\sigma})_0$ . Gracias a (1), estos haces se pegan vía la localización para dar lugar a un haz cuasi-coherente sobre  $X_\Sigma$  que denotaremos  $\tilde{F}$ . Observemos que  $\tilde{F}$  cumple

$$\Gamma(U_\sigma, \tilde{F}) = (F_{x^\sigma})_0.$$

Los morfismos de módulos graduados se traducen en morfismos de haces en el siguiente sentido:

**Proposición 5.1.3.** Si  $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3 \rightarrow 0$  es una sucesión exacta de  $S$ -módulos graduados, entonces

$$0 \rightarrow \tilde{F}_1 \rightarrow \tilde{F}_2 \rightarrow \tilde{F}_3 \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de haces cuasi-coherentes.

*Demostración.* La demostración es trivial restringiendo los haces a un abierto de la forma  $U_\sigma$ , pues localizar y tomar elementos de grado cero son funtores exactos.  $\square$

Una pregunta natural es si tomar un  $S$ -módulo finitamente generado resultará en un haz coherente. En respuesta, demostremos la siguiente proposición:

**Proposición 5.1.4.** Sea  $F$  un  $S$ -módulo graduado finitamente generado. Entonces  $\tilde{F}$  es un haz coherente sobre  $X_\Sigma$ .

*Demostración.* Tomemos un conjunto finito de generadores homogéneos  $\{f_i\}$  y notemos  $a_i = \text{gr}(f_i)$ . Es claro que los  $f_i$  también generan  $F_{x^\sigma}$ . Sea  $f \in (F_{x^\sigma})_0$ . Sabemos que  $f$  se escribe de la forma

$$f = \sum s_i f_i$$

para alguna elección de  $s_i \in S_{x^\sigma}$ . El grado de  $f$  nos dice que cada sumando  $s_i f_i$  está en  $(F_{x^\sigma})_0$  y por lo tanto  $s_i \in (S_{x^\sigma})_{-a_i}$ . Basta con ver entonces que  $(S_{x^\sigma})_\beta$  es un  $(S_{x^\sigma})_0$ -módulo finitamente generado para todo  $\beta = \bar{B} \in \text{Cl}(X_\Sigma)$ , pues si  $\{s_j^i\}$  generan  $(S_{x^\sigma})_{-a_i}$  entonces el conjunto  $\{s_j^i f_i\}$  generará  $(F_{x^\sigma})_0$ .

Llamando  $\bar{E} \in Cl(X_\Sigma)$  al grado de  $x^\sigma$ , sabemos que los monomios de la forma

$$\frac{x^D}{(x^\sigma)^k}$$

que cumplen  $\bar{D} - k\bar{E} = \beta$  son un conjunto de generadores de  $(S_{x^\sigma})_\beta$ . Despejando, tenemos  $\bar{D} = \beta + k\bar{E}$ , de donde se sigue que  $D = B + kE + \text{div}(\chi^m)$  para algún  $m \in M$ . Reemplazando, queda

$$\frac{x^{B+kE+\text{div}(\chi^m)}}{(x^\sigma)^k} = \frac{x^{kE+\text{div}(\chi^m)}}{(x^\sigma)^k} \cdot x^B.$$

Pero  $x^B \in S_\beta$  y el factor que lo acompaña está en  $(S_{x^\sigma})_0$ . Como  $S_\beta$  es un  $S_0$ -módulo finitamente generado y  $S_0 \subseteq (S_{x^\sigma})_0$ , se sigue que  $(S_{x^\sigma})_\beta$  es un  $(S_{x^\sigma})_0$ -módulo finitamente generado. □

Ahora que tenemos una aplicación

$$\{S\text{-módulos graduados}\} \longrightarrow \{\text{haces cuasi-coherentes sobre } X_\Sigma\}$$

que se restringe a

$$\{S\text{-módulos graduados finitamente generados}\} \longrightarrow \{\text{haces coherentes sobre } X_\Sigma\},$$

podemos estudiar su posible inyectividad/sobreyectividad. El siguiente teorema nos dice que, en efecto, ambas funciones son sobreyectivas:

**Teorema 5.1.1.** Sea  $\mathcal{H}$  un haz cuasi-coherente sobre  $X_\Sigma$ . Entonces:

1. Existe un  $S$ -módulo graduado  $F$  tal que  $\mathcal{H} \simeq \tilde{F}$ .
2. Si  $\mathcal{H}$  es coherente, podemos elegir un  $F$  finitamente generado.

*Demostración.* Si bien no haremos una prueba completa del teorema, hay algunos elementos de la demostración que vale la pena mencionar. Sabemos que si  $D \sim E$  en  $Cl(X_\Sigma)$  entonces  $\mathcal{O}_X(D) \sim \mathcal{O}_X(E)$ . Tiene sentido entonces pensar en el haz  $\mathcal{O}_X(a)$  para  $a \in Cl(X_\Sigma)$ . Se puede probar sin mucha dificultad que

$$(5.2) \quad \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_X(a)) \simeq S_a.$$

Además, si  $a = \bar{D}$  y  $b = \bar{E}$ , entonces los morfismos canónicos

$$\mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(E) \rightarrow \mathcal{O}_X(D + E)$$

inducen morfismos

$$(5.3) \quad \mathcal{O}_X(a) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(b) \rightarrow \mathcal{O}_X(a+b).$$

Sea  $\mathcal{H}$  un haz cuasi-coherente sobre  $X_\Sigma$ . Definamos

$$\mathcal{H}(a) = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(a)$$

y

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigoplus_{a \in Cl(X_\Sigma)} \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{H}(a)).$$

Usando (4.2) y (4.3) se puede ver que  $\Gamma(\mathcal{H})$  es un  $S$ -módulo graduado con graduación  $(\Gamma(\mathcal{H}))_a = \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{H}(a))$ .

Si llamamos  $a_\sigma = gr(x_\sigma)$ , los elementos de  $(\Gamma(\mathcal{H})_{x_\sigma})_0$  son de la forma

$$\frac{h}{(x^\sigma)^k}$$

con  $h \in \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{H}(k \cdot a_\sigma))$ . Observemos que  $(x^\sigma)^{-k} \in \Gamma(U_\sigma, \mathcal{O}_X(-k \cdot a_\sigma))$ , por lo que tenemos un morfismo

$$\Gamma(U_\sigma, \mathcal{O}_X(-k \cdot a_\sigma)) \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma(U_\sigma, \mathcal{H}(k \cdot a_\sigma)) \longrightarrow \Gamma(U_\sigma, \mathcal{H})$$

que induce un morfismo de  $(S_{x^\sigma})_0$ -módulos  $(\Gamma(\mathcal{H})_{x^\sigma})_0 \rightarrow \Gamma(U_\sigma, \mathcal{H})$ . Esto, en el abierto afín  $U_\sigma$ , es equivalente a un morfismo de haces

$$\widetilde{\Gamma}(\mathcal{H})|_{U_\sigma} \rightarrow \mathcal{H}|_{U_\sigma}.$$

Estos morfismos se pegan para dar lugar a un  $\widetilde{\Gamma}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}$ , que resultará un isomorfismo.

En el caso en que  $\mathcal{H}$  sea coherente,  $\Gamma(\mathcal{H})$  podría no ser finitamente generado, por lo que nos tendremos que quedar con un submódulo adecuado que sí lo es ( e induce el mismo haz).  $\square$

**Ejemplo 5.1.1.** Si tomamos  $\mathcal{H} = \mathcal{O}_X$ , tenemos que  $\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_X(a)) \simeq S_a$  (por (2)). En este caso, el  $S$ -módulo graduado asociado es  $\Gamma(\mathcal{O}_X) = S$ .  $\blacktriangle$

La última frase de la demostración anterior nos da la pauta de que la aplicación  $F \rightarrow \widetilde{F}$  no es inyectiva. Tomando como ejemplo al espacio proyectivo, un resultado de Serre (ver [S]) es que en  $\mathbb{P}^n$  un módulo graduado finitamente generado  $F$  induce el haz trivial si y sólo si  $F_n = 0$  para  $n$  suficientemente grande. Es decir,

$$\widetilde{F} = 0 \Leftrightarrow \langle x_1, \dots, x_n \rangle^n \cdot F = 0 \quad \text{para } n \gg 0.$$

Generalizando una de las implicaciones de este resultado, tenemos la siguiente proposición (para la otra tendremos que poner hipótesis sobre  $X_\Sigma$ ):

**Proposición 5.1.5.** Sea  $F$  un  $S$ -módulo graduado finitamente generado tal que

$$C^n \cdot F = 0 \quad \text{para } n \gg 0.$$

Entonces  $\widetilde{F} = 0$ .

*Demostración.* Recordemos que  $C = \langle x^\sigma \rangle_\Sigma$ . En cada abierto afín  $U_\sigma$ , sabemos que

$$\widetilde{F}|_{U_\sigma} = \widetilde{(F_{x^\sigma})_0}.$$

Luego,  $\widetilde{F}|_{U_\sigma} = 0$  si y sólo si  $\widetilde{(F_{x^\sigma})_0} = 0$  para cada  $\sigma \in \Sigma$  (aquí estamos usando nuevamente la correspondencia entre módulos y haces en variedades afines; ver [Har]). Pero  $(x^\sigma)^n \cdot F = 0$  implica que  $F_{x^\sigma} = 0$ , por lo que  $\widetilde{F}|_{U_\sigma} = 0$ . Luego,  $\widetilde{F} = 0$ .  $\square$

La vuelta no es cierta para variedades tóricas generales. En [Cox] se puede ver un ejemplo de  $S$ -módulo graduado finitamente generado que cumple las hipótesis de la proposición pero no induce el haz trivial sobre  $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ . Para poder tener un resultado en la otra dirección, debemos agregar la hipótesis de suavidad.

**Proposición 5.1.6.** Sean  $X_\Sigma$  una variedad tórica suave y  $F$  un  $S$ -módulo graduado finitamente generado tal que  $\widetilde{F} = 0$  sobre  $X_\Sigma$ . Entonces existe un  $n \gg 0$  tal que  $C^n \cdot F = 0$ .

*Demostración.* El argumento en la prueba anterior nos dice que  $(F_{x^\sigma})_0 = 0$  para todo  $\sigma \in \Sigma$ .

Tomemos un  $f \in F_a$ . Escribiendo  $a = \overline{D}$ , tenemos  $x^{-D}f \in (F_{x^\sigma})_0 = \{0\}$ . Esto quiere decir que existe un  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$(x^\sigma)^k x^{-D}f = 0 \in F.$$

Si escribimos

$$-D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} b_\rho D_\rho,$$

podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $b_\rho = 0$  para cada  $\rho \in \sigma(1)$ . Si este no fuera el caso (la hipótesis de suavidad nos dice que el conjunto  $\sigma(1)$  es linealmente independiente) podemos tomar un  $m \in M$  de modo que  $\langle m, u_\rho \rangle = -b_\rho$  y cambiar a  $D$  por  $D' = D + \text{div}(\chi^m)$ .

Recordemos que  $x^\sigma = \prod_{\rho \notin \sigma(1)} x_\rho$ . Como  $x^{-D}$  es un monomio en las mismas variables que  $x^\sigma$ , debe existir un  $g \in S$  tal que  $g \cdot x^{-D} = (x^\sigma)^N$  para algún  $k \geq 0$ . En particular,

podemos mutiplicar la ecuación anterior por  $g$  y obtener

$$\begin{aligned}(x^\sigma)^k g \cdot x^{-D} f &= 0 \\ (x^\sigma)^{k+N} f &= 0.\end{aligned}$$

Probamos entonces que todo elemento de  $F$  se anula al ser multiplicado por una potencia suficientemente grande de  $x^\sigma$  para todo  $\sigma \in \Sigma$ . Como  $F$  es finitamente generado, esto implica que  $C^n \cdot F = 0$  para  $n$  suficientemente grande. □

## 5.2 Foliaciones en variedades tóricas

### 5.2.1 Foliaciones en variedades suaves

En esta sección estudiaremos algunos aspectos de los espacios de foliaciones en una variedad tórica suave y completa. Para ello, usaremos su anillo de coordenadas homogéneas, junto con algunos resultados conocidos de la teoría de foliaciones holomorfas.

**Definición 5.2.1.** Una foliación regular holomorfa  $\mathcal{F}$  de dimensión  $k$  en una variedad compleja  $X$  es una descomposición del espacio  $X$  en subvariedades holomorfas conexas de dimensión  $k$ , que llamaremos *hojas*, que cumplen las siguientes propiedades:

1. Para todo  $p \in X$  existe una única hoja  $L_p$  que pasa por  $p$ .
2. Para todo  $p \in X$  existe una carta local holomorfa  $(U, \phi : U \rightarrow V_k \times V_{n-k})$ , con  $p \in U$  y  $V_k$  y  $V_{n-k}$  son abiertos de  $\mathbb{C}^k$  y  $\mathbb{C}^{n-k}$  respectivamente, que cumple que para todo  $(x, y) \in V_k \times V_{n-k}$  se tiene

$$\phi^{-1}(V_k) \times \{y\} \subseteq L_{\phi^{-1}(x,y)}$$

es un abierto de la hoja.

En una carta trivializadora, toda foliación regular de codimensión 1 puede ser definida por una 1-forma nunca nula e integrable. Esto se debe al teorema de Frobenius.



Más en general, dada  $\omega \in \Omega^1(U)$  que cumple  $\omega \wedge d\omega = 0$  podemos definir una foliación regular  $\mathcal{F}(\omega)$  en  $U \setminus \text{sing}(\omega)$ , donde  $\text{sing}(\omega) = \{\omega = 0\}$ . Observemos que este conjunto es una subvariedad de  $U$ , pues para cada abierto afín  $W$  de  $U$  tenemos

$$\omega(x) = \sum f_i(x) dx_i,$$

de donde  $\text{sing}(\omega) \cap W = V(f_1, \dots, f_n)$ .

En un primer intento, podríamos decir que una foliación global viene dada por una 1-forma  $\omega \in \Gamma(X, \Omega^1)$ . No obstante, hay variedades, como por ejemplo los espacios proyectivos, donde esto sería imposible de aplicar. Para describir una foliación  $\mathcal{F}$  de forma global, necesitamos la siguiente proposición:

**Proposición 5.2.1.** Una foliación (posiblemente con singularidades) de codimensión 1 en una variedad compleja  $X$  está definida por un cubrimiento por abiertos conexos  $\{U_i\}$  junto con 1-formas  $\omega_i \in \Omega^1(U_i)$  y funciones de transición  $g_{ij} : U_{ij} := U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}$  tales que:

1. Para cada  $i$ ,  $\omega_i \neq 0$  en  $\Omega^1(U_i)$  y es integrable, i.e.,  $\omega_i \wedge d\omega_i = 0$ .
2. Si  $U_{ij} \neq \emptyset$  entonces  $g_{ij} \in \mathcal{O}(U_{ij})^*$  y  $\omega_i = g_{ij} \omega_j$ .

La segunda condición nos dice que  $\omega_i(x) = 0$  si y sólo si  $\omega_j = 0$  en  $U_i \cap U_j$ . Podemos definir entonces el lugar singular de  $\mathcal{F}$  como

$$\text{sing}(\mathcal{F}) = \bigcup_i \text{sing}(\omega_i),$$

que nuevamente resulta una subvariedad de  $X$  por lo dicho anteriormente.

**Observación 5.2.1.** La familia de funciones  $\{g_{ij}\}$  junto con los abiertos  $\{U_i\}$  definen un line bundle  $\mathcal{L}$  sobre  $X$ , pues cumplen las condiciones de cociclo. Es por esto que muchas veces pensamos a la familia  $\{\omega_i, g_{ij}\}$  como un elemento de  $H^0(X, \Omega^1(\mathcal{L}))$ .

Supongamos que tenemos dos familias  $\omega = \{\omega_i, g_{ij}\}$ ,  $\omega' = \{\omega'_i, g'_{ij}\}$  que satisfacen las condiciones de la proposición. Es fácil ver que las foliaciones que definen son las mismas si y sólo si existe una familia  $\{h_i \in \mathcal{O}^*(U_i)\}$  que cumple  $\omega_i = h_i \omega'_i$  en  $U_i$ . En este caso diremos que las familias son *equivalentes*. Cuando esto pasa, las condiciones de cociclo nos dicen que las dos familias de funciones de transición inducen el mismo line bundle. Además, las funciones  $\{h_i\}$  se pegan para dar lugar a una  $h \in \mathcal{O}^*(X)$  bien definida y nunca nula. Todo esto nos induce una relación de equivalencia en  $H^0(X, \Omega^1(\mathcal{L}))$ .

Podemos pensar entonces a cada foliación  $\mathcal{F}$  en  $X$  como una única clase de equivalencia de un elemento  $\omega \in H^0(X, \Omega^1(\mathcal{L}))$ . En el caso en que la variedad fuese completa, tenemos que  $\Gamma(X, \mathcal{O}^*) = \mathbb{C}^*$ , por lo que la relación de equivalencia nos dice  $\omega \sim \omega'$  si y sólo si existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\omega = \lambda\omega'$ . Esto quiere decir que podemos identificar a las foliaciones en  $X$  con un único elemento de  $\mathbb{P}H^0(X, \Omega(\mathcal{L}))$ .

A continuación usaremos estas ideas para describir el espacio de foliaciones  $Fol(X_\Sigma, \mathcal{L})$  para una variedad tórica  $X_\Sigma$  suave y completa.

Dada una foliación  $\mathcal{F}$  en  $X_\Sigma$  podemos considerar la foliación pull-back  $\mathcal{F}^*$  en  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z$ . Ésta última viene dada por una 1-forma  $\omega$ . Como  $Z$  tiene codimensión al menos 2, usando el teorema de extensión de Hartog podemos pensar a  $\omega$  definida en todo  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)}$ . Más adelante veremos que  $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^{\Sigma(1)})$  debe ser homogénea de grado  $\mathcal{L} \in Pic(X_\Sigma)$ .

Para fijar ideas nos vamos a focalizar por un momento en el espacio proyectivo. Allí tenemos la sucesión de Euler (ver [Har])

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^1 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0.$$

Para describir el espacio  $Fol(n, d)$  podemos tensorizar la sucesión con  $\mathcal{O}(d)$  y mirar la sucesión exacta larga en cohomología de haces:

$$0 \longrightarrow H^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}^1(d)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1))^{n+1} \xrightarrow{r} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \longrightarrow \dots$$

De esto podemos intepretar que todo elemento  $\eta \in H^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}^1(d))$  se identifica con un  $s \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1))^{n+1}$  que cumple la condición  $r(s) = 0$ . Equivalentemente, en coordenadas homogéneas, podemos pensar en una 1-forma diferencial

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} A_i dx_i$$

donde los polinomios  $A_i$  son homogéneos de grado  $d-1$  (en este caso, decimos que  $\omega$  tiene grado total  $d$ ).

**Observación 5.2.2.** Vale la pena mencionar que, si pensamos a la graduación en el contexto tórico (es decir, llegando al grupo de clases), estamos pidiendo que  $gr(A_i) = \overline{d \cdot D} - \overline{1 \cdot D_{\rho_i}}$ , donde  $D = D_\rho$  para cualquier  $\rho$ .

La condición de descenso se traduce en la anulación del polinomio homogéneo de grado  $d$ :

$$\sum_{i=1}^{n+1} A_i x_i = 0.$$

Esto nos da ecuaciones lineales para los coeficientes de los  $A_i$ . Desde un punto de vista geométrico, esto es equivalente a pedir que tanto el lugar singular  $S_\omega$  como las hojas de foliación que define  $\omega$  en el espacio afín sean conos con el origen removido. A nivel de los espacios tangentes, esto es lo mismo que pedir  $w(\frac{\partial}{\partial r}) = 0$ .

Volvamos ahora a  $X_\Sigma$ . En [Ba-Cox], Baytrev y Cox dan la siguiente sucesión de Euler para variedades tóricas simpliciales sin factores tóricos:

$$0 \longrightarrow \widehat{\Omega}_{X_\Sigma}^1 \longrightarrow \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathcal{O}_{X_\Sigma}(-D_\rho) \longrightarrow Cl(X_\Sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{X_\Sigma} \longrightarrow 0$$

donde  $\widehat{\Omega}_{X_\Sigma}^1$  es el haz de 1-formas Zariski. En el caso suave, tenemos

$$0 \longrightarrow \Omega_{X_\Sigma}^1 \longrightarrow \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathcal{O}_{X_\Sigma}(-D_\rho) \longrightarrow Pic(X_\Sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{X_\Sigma} \longrightarrow 0.$$

Para describir  $Fol(X_\Sigma, \mathcal{L})$  tomemos  $\alpha = \overline{D} \in Pic(X_\Sigma)$  tal que  $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(\alpha) \sim \mathcal{L}$  y repitamos lo hecho en  $\mathbb{P}^n$  para conseguir la sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow H^0(\Omega_{X_\Sigma}^1(\alpha)) \longrightarrow \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} H^0(\mathcal{O}_{X_\Sigma}(\alpha - \overline{D}_\rho)) \xrightarrow{r} H^0(Pic(X_\Sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{X_\Sigma}(\alpha)) \longrightarrow \dots$$

De la misma forma que antes, el anillo de coordenadas homogéneas nos permite describir a un elemento de  $H^0(\Omega_{X_\Sigma}^1(\alpha))$  con una forma homogénea

$$\omega = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} A_\rho dx_\rho \in \Omega^1(\mathbb{C}^{\Sigma(1)})$$

de grado total  $\alpha$ . Esto es,  $gr(A_\rho) = \alpha - \overline{D}_\rho$ . La condición de descenso vendrá de pedir que cada  $G$ -órbita esté totalmente contenida en el lugar singular de  $\omega$  o bien en una sola hoja. Veamos qué quiere decir esto en términos de los coeficientes de los  $A_\rho$ .

Recordemos de la Observación 3.0.5 que estamos en el caso en que  $G \simeq (\mathbb{C}^*)^s$ , donde  $s = |\Sigma(1)| - \dim(X_\Sigma)$ . Fijemos un isomorfismo  $\phi : (\mathbb{C}^*)^s \rightarrow G$  (habrá uno por cada base que encontremos para  $Pic(X_\Sigma)$ ). Esto nos da, para cada  $x \in X$  una parametrización  $\phi_x$  de la órbita  $G \cdot x$ . Si  $t = (t_1, \dots, t_s)$ , podemos definir  $\phi_x(t) = \phi(t) \cdot x$ . Observemos que  $G \cdot x$  está totalmente contenida en una sola hoja o en el lugar singular si y sólo si  $\phi_x^*(t)(\omega) = 0$ . Pero

$$\phi_x^*(t)(\omega) = 0 \iff \phi_x^*(\omega)(t)\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq s.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \phi_x^*(\omega)(t)\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) &= \sum_{\rho} A_{\rho}(\phi(t) \cdot x) \phi_x^*(dz_{\rho})\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) \\
 (5.4) \qquad \qquad \qquad &= \sum_{\rho} \phi(t)^{\alpha - \overline{D}_{\rho}} A_{\rho}(x) \phi_x^*(dz_{\rho})\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) = 0
 \end{aligned}$$

Observemos que la proyección a la coordenada  $z_{\rho}$  es un caracter de  $G$ , por lo que  $z_{\rho} \circ \phi$  es un caracter de  $(\mathbb{C}^*)^s$ . Luego, la coordenada  $\rho$ -ésima de  $\phi$  es de la forma

$$(\phi)_{\rho}(t) = \prod_{i=1}^s t_i^{a_i^{\rho}}$$

para algún  $(a_{\rho_1}, \dots, a_{\rho_s}) \in \mathbb{Z}^s$  (si queremos ser más precisos, los  $a_i^{\rho}$  son las coordenadas de  $\overline{D}_{\rho}$  en la base de  $Pic(X_{\Sigma})$  elegida). En particular,

$$\begin{aligned}
 \phi_x^*(dz_{\rho})\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)(t) &= \frac{\partial}{\partial t_i}(\phi_x)_{\rho} \\
 &= x_{\rho} \frac{\partial}{\partial t_i}(\phi)_{\rho}(t) \\
 &= x_{\rho} a_i^{\rho} t_i^{-1} (\phi)_{\rho}(t) \\
 &= x_{\rho} a_i^{\rho} t_i^{-1} \phi(t)^{\overline{D}_{\rho}}.
 \end{aligned}$$

Reemplazando en (4.4), tenemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{\rho} \phi(t)^{\alpha - \overline{D}_{\rho}} A_{\rho}(x) \phi_x^*(dz_{\rho})\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) &= \sum_{\rho} \phi(t)^{\alpha - \overline{D}_{\rho}} A_{\rho}(x) x_{\rho} a_i^{\rho} t_i^{-1} \phi(t)^{\overline{D}_{\rho}} \\
 &= t_i^{-1} \sum_{\rho} \phi(t)^{\alpha} A_{\rho}(x) x_{\rho} a_i^{\rho} \\
 &= t_i^{-1} \phi(t)^{\alpha} \sum_{\rho} x_{\rho} a_i^{\rho} A_{\rho}(x) = 0
 \end{aligned}$$

Pero  $t_i^{-1} \phi(t)^{\alpha} \neq 0$  por ser un caracter de  $(\mathbb{C}^*)^s$ . Luego, debe ser

$$\sum_{\rho} x_{\rho} a_i^{\rho} A_{\rho}(x) = 0$$

Estas condiciones son equivalentes a pedir que las contracciones con los correspondientes campos de Euler se anulen.

Ahora que sabemos qué condiciones deben cumplir los  $A_{\rho}$ , veamos qué quiere decir todo esto en términos de sus coeficientes.

**Definición 5.2.2.** Para cada  $D = \sum_{\rho} b_{\rho} D_{\rho} \in \text{Div}_{T_N}(X_{\Sigma})$ , llamaremos  $n_D$  a la cantidad de puntos enteros en el polítopo

$$P_D = \{x \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_{\rho} \rangle \geq -b_{\rho} \quad \forall \rho \in \Sigma(1)\}.$$

Es decir,  $n_D = |P_D \cap M|$ .

**Observación 5.2.3.** Como la variedad  $X_{\Sigma}$  es completa, tenemos que  $|\Sigma| = N_{\mathbb{R}}$  y por lo tanto todos los polítopos de la forma  $P_D$  serán acotados.

La Proposición 3.0.6 nos dice que

$$n_{\rho} = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X_{\Sigma}, \mathcal{O}_{X_{\Sigma}}(D)).$$

En particular,  $n_D$  está bien definido en el grupo de clases. Como  $Cl(X_{\Sigma})$  está generado por elementos de  $\text{Div}_{T_N}(X_{\Sigma})$  podemos definir  $n_{\alpha}$  para  $\alpha \in Cl(X_{\Sigma})$ . Más aún, la cantidad de monomios en  $\mathbb{C}[x_{\rho}]_{\Sigma(1)}$  de grado  $\alpha$  es  $n_{\alpha}$ .

Con todo esto, probemos el siguiente lema:

**Lema 5.2.1.** El conjunto  $H^0(\Omega_{X_{\Sigma}}^1(\alpha))$  puede identificarse con un subespacio de codimensión menor o igual a  $n_{\alpha}(|\Sigma(1)| - \dim(X_{\Sigma}))$  de  $\mathbb{C}^N$ , donde  $N = \sum n_{\alpha - \overline{D_{\rho}}}$ .

*Demostración.* Antes en esta sección habíamos identificado a los elementos de  $H^0(\Omega_{X_{\Sigma}}^1(\alpha))$  con ciertas formas diferenciales de la forma  $\omega = \sum_{\rho} A_{\rho} dx_{\rho}$ , donde los  $A_{\rho}$  son homogéneos de grado  $\alpha - \overline{D_{\rho}}$  que además cumplen las ecuaciones

$$(5.5) \quad \sum_{\rho} x_{\rho} a_i^{\rho} A_{\rho} = 0 \quad 1 \leq i \leq |\Sigma(1)| - \dim(X_{\Sigma}) .$$

A esta altura podemos afirmar que el polinomio  $\sum_{\rho} x_{\rho} a_i^{\rho} A_{\rho}$  es homogéneo de grado  $\alpha$  y que cada ecuación polinomial induce  $n_{\alpha}$  ecuaciones lineales homogéneas en los coeficientes de los  $A_{\rho}$ . En otras palabras, tenemos  $n_{\alpha}$  ecuaciones lineales para cada  $1 \leq i \leq s$ .

Identificando a cada  $A_{\rho}$  con sus coeficientes, podemos pensar a  $\omega$  en  $\bigoplus_{\rho} \mathbb{C}^{n_{\alpha - \overline{D_{\rho}}}}$ . □

**Observación 5.2.4.** La ecuación de integrabilidad  $\omega \wedge d\omega = 0$  se traduce en  $\binom{|\Sigma(1)|}{3}$  ecuaciones cuadráticas homogéneas en los coeficientes de los  $A_{\rho}$ .

Ahora ya estamos en condiciones de describir  $Fol(X_{\Sigma}, \alpha)$ .

**Proposición 5.2.2.** Sea  $X_\Sigma$  una variedad tórica completa y suave. Para cada  $\alpha \in \text{Pic}(X_\Sigma)$ , el espacio  $\text{Fol}(X_\Sigma, \alpha)$  es una subvariedad de  $\mathbb{P}^N$ , donde

$$N = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} n_{\alpha - \overline{D}_\rho} - 1,$$

dada por  $n_\alpha(|\Sigma(1)| - \dim(X_\Sigma))$  ecuaciones lineales y las ecuaciones cuadráticas derivadas de la ecuación de integrabilidad  $\omega \wedge d\omega = 0$ .

*Demostración.* La demostración es un corolario inmediato de lo desarrollado en esta sección. Las ecuaciones lineales son las proyectivizadas de 5.5.  $\square$

**Ejemplo 5.2.1.** Veamos que lo desarrollado en esta sección coincide con las descripciones clásicas de los espacios de foliaciones proyectivas. Es decir, vamos a tomar  $X_\Sigma = \mathbb{P}^n$ . De los Ejemplos 2.2.2 y 3.0.1 sabemos que  $|\Sigma(1)| - \dim(\mathbb{P}^n) = 1$  y que  $\text{Cl}(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}$  con generador  $\overline{D}_{\rho_i}$ .

Además, tenemos el isomorfismo  $\mathbb{C}^* \rightarrow G \subseteq (\mathbb{C}^*)^{n+1}$  definido por

$$t \mapsto (t, \dots, t)$$

de modo que  $a_1^\rho = 1$  para cada  $\rho \in \Sigma(1)$ . Entonces las ecuaciones de descenso serán las derivadas de

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i A_i(x) = 0$$

Observemos que  $n_k = 0$  para  $k < 0$ , pues en este caso  $\mathcal{O}(k)$  no tendrá secciones globales. Esto nos dice que los espacios

$$\text{Fol}(\mathbb{P}^n, k) = \mathbb{P}^0 = \emptyset$$

para  $k \leq 0$ .

Para  $k \geq 1$ , tenemos  $k = \overline{D}$  con  $D = kD_{n+1}$ . Entonces  $P_D \subseteq \mathbb{R}^n = M_{\mathbb{R}}$  es el tetraedro definido por los planos  $x_i = 0$  para  $1 \leq i \leq n$  y  $-x_1 - \dots - x_n = -k$ . Los puntos enteros de  $P_D$  son las tuplas en  $\mathbb{Z}^n$  con coordenadas positivas que suman a lo sumo  $k$ . De esta forma, es claro que

$$n_k = \binom{n+k}{k}$$

y por lo tanto

$$N = \sum_{i=1}^{n+1} n_{k-1} - 1 = (n+1) \binom{n+k-1}{k-1} - 1.$$

Tendremos una ecuación lineal por cada monomio de grado  $k$ . Es decir, para  $k \geq 1$  podemos identificar el espacio  $Fol(\mathbb{P}^n, k)$  con la subvariedad de  $\mathbb{P}^N$  que cumple las  $n_k = \binom{n+k}{k}$  ecuaciones lineales y las ecuaciones cuadráticas de integrabilidad.

Un caso de particular interés es cuando  $n = 2$ , porque la ecuación de integrabilidad es trivial (no hay 3-formas no nulas). En este caso, tenemos que  $Fol(\mathbb{P}^2, k)$  es un subvariedad de  $\mathbb{P}^{3\binom{k+1}{k-1}-1}$  definida por ecuaciones lineales. En particular  $Fol(\mathbb{P}^2, k)$  es irreducible.  $\blacktriangle$

**Ejemplo 5.2.2.** Recordemos que  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \simeq \mathcal{H}_0$  viene dado por el abanico  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$  completo que cumple

$$\Sigma(1) = \{\rho_1 = Cone(e_1); \rho_2 = Cone(e_2), \rho_3 = Cone(-e_2); \rho_4 = Cone(-e_4)\}$$

por lo que ya sabemos que

$$Cl(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Z}^2$$

con generadores  $\overline{D_{\rho_1}}$  y  $\overline{D_{\rho_2}}$ . Por otro lado, el Ejemplo 4.2.2 nos dice que  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  es el cociente

$$\mathbb{C}^4 \setminus Z/G,$$

donde  $Z = \{x_1 = x_4 = 0\} \cup \{x_2 = x_3 = 0\}$  y el grupo  $G$  es la imagen del morfismo  $(\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow (\mathbb{C}^*)^4$  definido por

$$(t_1, t_2) \mapsto (t_1, t_2, t_2, t_1).$$

En este caso, los coeficientes  $a_j^i$  son

$$a_1 = (1, 0, 0, 1) \text{ y } a_2 = (0, 1, 1, 0),$$

por lo que las ecuaciones polinomiales de descenso serán

$$\begin{aligned} x_1 A_1 + x_4 A_4 &= 0 \\ x_2 A_2 + x_3 A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Tomemos un elemento  $(a, b) \in Pic(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$  y elijamos el representante en  $Div_{TN}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$  definido por  $D = aD_{\rho_1} + bD_{\rho_2}$ . Su poliedro asociado es

$$P_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a; -b \leq y \leq 0\},$$

Si  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ , éste será el rectángulo con vértices  $(0, 0), (-a, 0), (-a, -b)$  y  $(0, -b)$ , por lo que

$$n_{(a,b)} = (a+1)(b+1).$$

De la misma forma tenemos que, como  $\overline{D_{\rho_1}} = \overline{D_{\rho_4}}$  y  $\overline{D_{\rho_2}} = \overline{D_{\rho_3}}$ ,

$$\begin{aligned} N &= 2n_{(a,b+1)} + 2n_{(a+1,b)} - 1 \\ &= 2[(a+1)b + a(b+1)] - 1. \end{aligned}$$

Como  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  es una superficie, no tenemos condiciones de integrabilidad. Concluimos entonces que para  $a, b \geq 0$  el espacio  $Fol(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, (a, b))$  es la variedad lineal

$$V \subseteq \mathbb{P}^{2[(a+1)b+a(b+1)]-1}$$

dada por las  $2(a+1)(b+1)$  ecuaciones lineales derivadas de las condiciones de descenso. ▲

**Ejemplo 5.2.3.** Por último, hagamos un ejemplo menos habitual en la teoría de foliaciones como lo es la variedad tórica de los Ejemplos 3.0.6 y 2.2.4

$$\mathcal{H}_1 \simeq Bl(\mathbb{P}^2).$$

En el Ejemplo 2.2.4 vimos que tenemos una presentación

$$\mathcal{H}_1 \simeq \mathbb{C}^4 \setminus Z/G$$

donde la variedad  $Z$  es la misma que en el ejemplo anterior y  $G$  es la imagen del morfismo

$$(t_1, t_2) \longmapsto (t_1, t_2, t_1 t_2, t_1).$$

Entonces las condiciones de descenso serán

$$\begin{aligned} x_1 A_1 + x_3 A_3 + x_4 A_4 &= 0 \\ x_2 A_2 + x_3 A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, en el Ejemplo 3.0.6 calculamos  $n_{(a,b)}$  para cada  $(a, b) \in Pic(\mathcal{H}_1)$ . Recordemos que

$$\overline{D_{\rho_1}} = \overline{D_{\rho_4}} \text{ y } \overline{D_{\rho_3}} = \overline{D_{\rho_2}} + \overline{D_{\rho_4}}.$$

Luego, los polinomios  $A_1, A_2, A_3$  y  $A_4$  deberán ser de grado  $(a, b-1), (a-1, b), (a-1, b-1)$  y  $(a, b-1)$  respectivamente.

Una vez más, no tenemos ecuaciones de integrabilidad. Luego, si

$$N = 2(2n_{(a,b-1)} + n_{(a-1,b)} + n_{(a-1,b-1)}) - 1,$$

el espacio  $Fol(\mathcal{H}_1, (a, b))$  se puede identificar con la subvariedad de  $\mathbb{P}^N$  dada por las  $2n_{(a,b)}$  ecuaciones lineales derivadas de las ecuaciones de descenso. ▲



### 5.2.2 El caso simplicial

A lo largo de esta sección  $\Sigma$  será un abanico simplicial y completo. Para adaptar lo hecho en la sección anterior a orbifolds, debemos cambiar nuestra definición de foliación.

**Definición 5.2.3.** Una foliación  $\mathcal{F}$  en  $X_\Sigma$  viene dada por una forma global torcida  $\omega \in H^0(X_\Sigma, \widehat{\Omega}_{X_\Sigma}^1(\alpha))$ , donde  $\alpha \in \text{Pic}(X_\Sigma)$ , que cumple

1. (Condición de integrabilidad)  $\omega \wedge d\omega = 0$ .
2.  $\text{Codim}(\text{sing}(\omega)) \geq 2$ .

**Observación 5.2.5.** Si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  cumplen la segunda condición y definen la misma foliación  $\mathcal{F}$ , entonces  $\omega_1 = \lambda\omega_2$  para algún  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Para ver esto, podemos restringir la foliación  $\mathcal{F}$  a la parte no singular de  $X_\Sigma$ , que llamaremos  $\widetilde{X}_\Sigma$ . Por lo visto en la sección anterior, debe existir una función  $h \in \mathcal{O}_{X_\Sigma}^*(\widetilde{X}_\Sigma)$  tal que

$$\omega_1|_{\widetilde{X}_\Sigma} = h\omega_2|_{\widetilde{X}_\Sigma}.$$

Como  $\text{codim}(X \setminus \widetilde{X}_\Sigma) \geq 2$ , podemos extender a  $h$  (y por lo tanto la igualdad anterior) a todo  $X_\Sigma$ . Además, el anillo de coordenadas de cada abierto afín es noetheriano, por lo que podemos usar el Hauptidealsatz de Krull en cada uno de ellos para obtener  $\text{codim}(V(h)) \leq 1$ . Pero  $V(h) \subseteq \text{sing}(\omega_1)$ , por lo que  $V(h) = \emptyset$ . Pero entonces  $h \in \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}^*) = \mathbb{C}^*$ , pues  $X_\Sigma$  es completa.

Con esto en mente, podemos identificar a cada foliación  $\mathcal{F}$  en  $X_\Sigma$  con una clase de equivalencia en  $\mathbb{P}(H^0(X_\Sigma, \widehat{\Omega}_{X_\Sigma}^1(\alpha)))$ . Nuevamente, podemos usar la sucesión de Euler

$$0 \longrightarrow \widehat{\Omega}_{X_\Sigma}^1 \longrightarrow \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathcal{O}_{X_\Sigma}(-D_\rho) \longrightarrow \text{Cl}(X_\Sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{X_\Sigma} \longrightarrow 0$$

y repetir lo hecho en la sección anterior para escribir cada elemento  $\omega \in H^0(X_\Sigma, \widehat{\Omega}_{X_\Sigma}^1(\alpha))$  de la forma

$$\omega = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} A_\rho dx_\rho \in \Omega^1(\mathbb{C}^{\Sigma(1)})$$

donde los  $A_\rho$  tienen grado  $\alpha - \overline{D_\rho}$ . Al igual que en el caso anterior, las condiciones de descenso vendrán de pedir que cada órbita  $G \cdot x$  esté totalmente contenida en una hoja de  $\mathcal{F}$  o bien en  $\text{sing}(\mathcal{F})$ . Esto es equivalentemente a que para cada  $x \in \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z$  tengamos  $\phi_x^*(\omega) = 0$ , donde  $\phi_x(g) = g \cdot x \in \mathbb{C}^{\Sigma(1)}$ .

Observemos que si  $X_\Sigma$  no es suave, sólomente podemos asegurar que  $G$  es el producto de un toro por un grupo abeliano finito, digamos

$$G \simeq (\mathbb{C}^*)^s \times H.$$

Nuevamente, la Observación 4.2.1 nos dice que  $s = |\Sigma(1)| - \dim(X_\Sigma)$ . Todos los morfismos  $\phi_x$  se factorizan por la componente de la identidad  $G_0 \simeq (\mathbb{C}^*)^s$ : si  $G_i$  es la componente de  $g \in G$ , entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{\phi_x} & \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z \\ g^{-1} \downarrow & \nearrow \phi_{gx} & \\ G_0 & & \end{array}$$

conmuta. En particular,

$$\phi_x^*(\omega) = 0 \quad \forall x \iff (\phi_x|_{G_0})^*(\omega) = 0 \quad \forall x$$

y por lo tanto (ahora sí) podemos hacer la misma cuenta que en el caso suave y obtener las ecuaciones de descenso

$$\sum_{\rho} x_{\rho} a_i^{\rho} A_{\rho}(x) = 0 \quad 1 \leq i \leq s$$

donde los  $a_i^{\rho}$  son los exponentes de las variables  $t_i$  en un isomorfismo  $\phi_0 : (\mathbb{C}^*)^s \rightarrow G_0$  (que son los mismos que los del isomorfismo  $\phi : (\mathbb{C}^*)^s \times H \rightarrow G$ ).

Analícemos brevemente qué quiere decir la condición del lugar singular de  $\mathcal{F}$  con respecto a los  $A_{\rho}$  (esto aplicará también al caso no singular). El conjunto  $\pi^{-1}(\text{sing}(\mathcal{F}))$  es el conjunto  $V(\{A_{\rho}\}_{\Sigma(1)}) \subseteq \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z$  descrito en la Sección 5.1. Como el morfismo  $\pi$  es un cociente geométrico (es dominante) entonces

$$\dim(\pi^{-1}(V)) \geq \dim(V) + s$$

(ver [M]). Luego,  $\dim(V(\{A_{\rho}\}_{\Sigma(1)})) \geq n + s - 1 = |\Sigma(1)| - 1$ . Pero entonces el ideal  $I(V(\{A_{\rho}\}_{\Sigma(1)})) \subseteq \mathbb{C}[x_{\rho} | \rho \in \Sigma(1)]$  tiene altura 1 y por lo tanto es principal. En particular, hemos demostrado la siguiente proposición:

**Proposición 5.2.3.** Sea  $\omega = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} A_{\rho} dx_{\rho}$ . Entonces  $\text{codim}(\text{sing}(\omega)) \geq 2$  si y sólo si los polinomios  $A_{\rho}$  no tienen un factor en común.

**Observación 5.2.6.** En particular, la condición  $\text{codim}(\text{sing}(\omega)) \geq 2$  es una condición abierta en los coeficientes de los  $A_{\rho}$  (podemos pensar, por ejemplo, en que ciertas resultantes no se anulen).

Con todo esto, podemos adaptar la Proposición 5.2.2 al caso simplicial:

**Proposición 5.2.4.** Sea  $X_\Sigma$  una variedad tórica completa y simplicial. Para cada  $\alpha \in \text{Pic}(X_\Sigma)$ , el espacio  $\text{Fol}(X_\Sigma, \alpha)$  es un abierto Zariski de una subvariedad de  $\mathbb{P}^N$ , donde

$$N = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} n_{\alpha - D_\rho} - 1,$$

dada por  $n_\alpha(|\Sigma(1)| - \dim(X_\Sigma))$  ecuaciones lineales y las ecuaciones cuadráticas derivadas de la ecuación de integrabilidad  $\omega \wedge d\omega = 0$ .

**Ejemplo 5.2.4.** Veamos que esta descripción coincide con la hecha en [C-S] para los espacios proyectivos con pesos. En el Ejemplo 4.2.1 vimos que el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1})$  es el cociente

$$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / G$$

donde  $G \subseteq (\mathbb{C}^*)^{n+1}$  es la imagen del morfismo  $\mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+1}$  dado por

$$t \longmapsto (t^{q_1}, \dots, t^{q_{n+1}}).$$

Entonces los coeficientes  $a_1^\rho$  vienen dados por  $a_1 = (q_1, \dots, q_{n+1})$ , por lo que la condición de descenso será

$$\sum_{j=1}^{n+1} q_j x_j A_j = 0.$$

Por otro lado, en el Ejemplo 3.0.3 se puede observar que el grupo

$$\text{Cl}(\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1})) \simeq \mathbb{Z}$$

está generado por la clase del divisor

$$D = \sum_{i=1}^{n+1} d_i D_{\rho_i},$$

donde los  $d_i$  cumplen  $\sum_{i=1}^{n+1} d_i q_i = 1$ . Sea  $m = \text{mcm}(q_1, \dots, q_{n+1})$ . Se puede ver que, mediante el mismo isomorfismo, el grupo  $\text{Pic}(\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1})) \subseteq \text{Cl}(\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1}))$  se corresponde con el subgrupo  $m\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ . Así, para cada  $k \in m\mathbb{Z}$  podemos pensar al espacio  $\text{Fol}(\mathbb{P}^n(q_1, \dots, q_{n+1}), k)$  como un abierto Zariski de la subvariedad de  $\mathbb{P}^N$  dada por las ecuaciones cuadráticas de integrabilidad y las  $n_{kD}$  ecuaciones lineales, donde

$$N = \sum_{i=1}^{n+1} n_{(kD - D_{\rho_i})} - 1.$$

▲



# Bibliografía

- [A] Audin, M. (1991). The topology of Torus actions on symplectic manifolds.
- [F] Fulton, W. (1993). Introduction to toric varieties (No. 131). Princeton University Press.
- [CLS] Cox, D. A., Little, J. B., Schenck, H. K. (2011). Toric varieties. American Mathematical Soc..
- [Hu] Humphreys, J. E. (2012). Linear algebraic groups (Vol. 21). Springer Science and Business Media.
- [Cox] Cox, D. A. (1995). The homogeneous coordinate ring of a toric variety, *J. Algebraic Geometry* 4.
- [Har] Hartshorne, R. (2013). Algebraic geometry (Vol. 52). Springer Science and Business Media.
- [Sh] Shafarevich, I. R. (1994). Basic algebraic geometry (Vol. 2). Berlin: Springer-Verlag.
- [GIT] Mumford, D., Kirwan, F., Fogarty, J. (1994). Geometric invariant theory.
- [M] Mumford, D. (1999). The red book of varieties and schemes: includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians (Vol. 1358). Springer Science and Business Media.
- [D] Dolgachev, I. (1982). Weighted projective varieties. In *Group actions and vector fields* (pp. 34-71). Springer Berlin Heidelberg.
- [B] Berchtold, F. (2003). Lifting of morphisms to quotient presentations. *manuscripta mathematica*, 110(1), 33-44.
- [S] Serre, J. P. (1955). Faisceaux algébriques cohérents. *Annals of Mathematics*, 197-278.

- [Ba-Cox] Batyrev, V. V., Cox, D. A. (1994). On the Hodge structure of projective hypersurfaces in toric varieties. In *Duke Math. J.*
- [J] Jouanolou, J. P. (2006). *Equations de Pfaff algébriques* (Vol. 708). Springer.
- [C-S] Corrêa Jr, M., and Soares, M. G. (2012). A note on Poincaré problem for quasi-homogeneous foliations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 140(9), 3145-3150.