UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

El método de los momentos en problemas de controlabilidad.

Pablo Andres Torres

Director: Constanza Sanchez de la Vega

11 de julio de 2017

Agradecimientos

A mi abuela por que sin ella nada de esto hubiera sido posible.

A Mer, Dam, Nacho, Fede y el Viejo por bancarme todo este tiempo en todo.
A mi grupo de escape Emi, Juan y Feli por haber hecho tan divertida la carrera.
A Cos por dirigirme , enseñarme y ayudarme en todo este proceso.
Al jurado Daniel Carando y Diego Rial por haber leido esta tesis.
A Leon y a Rocio por introducirme en este mundo.
A Roman , Susan y Kike por ayudarme en este viaje.
A mis compañeros de cursada y los excelentes docentes que tuve durante toda la carrera.

Índice general

Introducción

Los problemas de control pueden describirse a partir de un modelo matemático que describe el sistema en consideración a través de la *ecuación de estado*

$$A(y) = f(u). \tag{0.1}$$

Aquí, u es el *control* que podemos elegir libremente en un conjunto de *controles admisibles* para actuar sobre el sistema y la variable y, solución de la ecuación (0.1) describe el *estado* del sistema dependiendo de u. Esta ecuación de estado en la práctica puede ser un sistema algebraico o funcional. En muchos problemas, se busca analizar la *controlabilidad* del sistema que consiste en estudiar la existencia de un control que lleve el sistema en cierto tiempo $T > 0$ de un estado inicial a un estado final deseado. Más precisamente, diremos que un sistema es exactamente controlable a tiempo $T > 0$ si dada una condición inicial para el sistema existe un control u en el espacio de los controles de manera que lleve el sistema que estudiamos desde el estado inicial hasta el un estado final deseado. En el caso en que el estado final es cero, se lo conoce como controlabilidad a cero. Por otro lado, diremos que es aproximadamente controlable si podemos llevar el estado inicial arbitrariamente cerca del estado final deseado. En esta tesis estudiaremos el problema de controlabilidad para sistemas de evolución parabólicos de primer orden.

La controlabilidad de sistemas parabólicos fue investigado en un principio por H.O. Fattorini y D.L. Russell en 1971 [7] y 1974 [8], en donde probaron los primeros resultados de controlabilidad a cero para la ecuación del calor, primero en una dimensión y luego en una bola N dimensional. En estos artículos, los autores reformulan el problema de controlabilidad a cero en un problema de los momentos en $L^2[0,T]$ para la función control. Este método es todavía utilizado para resolver cierto tipo de problemas de controlabilidad, ver por ejemplo [3], en donde se prueba cierto tipo de controlabilidad local bilineal para la ecuación de Schrödinger y [9] en donde se prueba controlabilidad para un sistema de dos ecuaciones parabólicas de una dimensión acopladas.

En 1988, J.L. Lions [13] presenta un método general para estudiar la controlabilidad exacta de problemas de evolución llamado Hilbert Uniqueness Method (HUM) extensamente utilizado en la literatura a partir de entonces. Se puede ver una mención a este método en el teorema 3.7 del capítulo 3. Más tarde, en 1996, A. Fursikov y O. Imanuvilov en [10], y por otro lado en 1995, G. Lebeau y L. Robbiano [12] prueban resultados de controlabilidad a cero de sistemas parabólicos a primer orden para dominios en dimensión N usando el método de las desiguadades de tipo Carleman, que no desarrollaremos en esta tesis. En esta tesis desarrollaremos el método descripto por Fattorini y Russell. Para ello comenzaremos con un ejemplo sencillo para mostrar formalmente cómo se utiliza.

Consideremos el siguiente problema:

$$P : \begin{cases} y_t = y_{xx} + f(x)u(t), \text{ en } (0,T) \times (0,\pi) \text{ con } f \in L^2(0,\pi) \\ y(\cdot,0) = 0, \quad y(\cdot,\pi) = 0 \\ y(0,\cdot) = y_0, \; y_0 \in L^2(0,\pi) \text{ dado.} \end{cases}$$

Nos preguntamos si existe un control u de manera tal que $y(T) = 0$. Si podemos encontrar u diremos que el sistema es controlable a cero y lo estudiaremos con más detalle en el capítulo 3.
Sabemos que $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(kx)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal en el espacio $L^2(0,\pi)$, entonces propondremos como una solución formal a este problema, la serie:

$$y(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)\sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(kx).$$

Sea $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(kx)$ y $y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(kx)$. Luego si y es solución tiene que cumplir:

$$y_k'(t) = -k^2 y_k(t) + f_k u(t) \Longleftrightarrow y_k(t) = e^{-k^2 t} y_k^0 + \int_0^t e^{-k^2(t-s)} f_k u(s) ds.$$

Con lo cual si buscamos un control u que cumpla $y(T) = 0$ debe ser:

$$0 = y_k(T) = e^{-k^2 T} y_k^0 + \int_0^T e^{-k^2(T-s)} f_k u(s) ds. \tag{0.2}$$

Supongamos que $f_k \neq 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$, entonces podemos acomodar la ecuación (0.2) y obtenemos :

$$\int_0^T e^{-k^2 s} u(T-s) ds = -\frac{e^{-k^2 T} y_k^0}{f_k}.$$

Es decir, buscamos un control $u \in L^2(0,T)$ que satisfaga:

$$\langle e^{-k^2 t}, u(T-\cdot)\rangle_{L^2(0,T)} = c_k, \text{ con } c_k = -\frac{e^{-k^2 T} y_k^0}{f_k}.$$

Esto es lo que se conoce como un problema de los momentos, que en su forma más general consiste en lo siguiente: dada una sucesión $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ y una familia de funciones $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, se quiere determinar si existe $f \in \mathcal{H}$ de modo que $\langle g_k, f\rangle_{\mathcal{H}} = c_k\ \forall k \in \mathbb{N}$. El caso que tendrá interés en esta tesis será el caso en el que la familia de funciones $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ son exponenciales y veremos que la resolubilidad de estos problemas están relacionados con propiedades de estas funciones.
Retomando el ejemplo diremos que una familia de funciones $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un sistema biortogonal para la familia $\{e^{-k^2 t}\}_{k\in\mathbb{N}}$ si se cumple que:

$$\langle e^{-k^2 t}, \gamma_j(t)\rangle_{L^2(0,T)} = \delta_{k,j}.$$

En estas condiciones una solución formal al problema de los momentos viene dada por:

$$u(T-s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k(s).$$

Para ver que esta expresión es efectivamente una solución al problema de controlabilidad bastará con analizar si esta serie pertenece al espacio $L^2(0,T)$. Luego estudiaremos cuáles son las propiedades que necesitaremos de las familias $\{e^{-k^2 t}\}_{k\in\mathbb{N}}$ para poder asegurar que tenemos sistema biortogonal y en ese caso qué necesitaremos pedir para que la serie converja.
En esta tesis estudiamos cómo resolver la controlabilidad de ciertos problemas de evolución en espacios de Hilbert separables mediante el método de los momentos que consistirá en transformar el problema de controlabilidad en un problema de los momentos como hicimos en el ejemplo previo.

En el capítulo 1 daremos resultados clásicos del análisis funcional que utilizaremos a lo largo de la tesis.

En el capítulo 2 estudiaremos propiedades de familias de elementos de un espacio de Hilbert que resultan más fuertes que el concepto de independencia lineal y más débiles que el concepto de Base de Hilbert. Luego generalizaremos estas propiedades a familias de subespacios mediante el concepto de ángulo generalizado. Finalmente aplicaremos lo estudiado en el producto tensorial entre espacios de Hilbert.

En el capítulo 3 describiremos cómo se utiliza el método de los momentos para resolver problemas de evolución del tipo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + Ax = f \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Finalmente en el capítulo 4 daremos aplicaciones y ejemplos de lo expuesto a lo largo de la tesis.

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo daremos algunos resultados clásicos del análisis funcional que pueden verse en [17]. Dada una familia de elementos $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ notaremos $Span\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ al subespacio generado por $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Definición 1.1. Dada una familia de elementos $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diremos que es completa en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ si $\overline{Span\{\varphi_n\}}_{n\in\mathbb{N}} = \mathcal{H}$.

Definición 1.2. Diremos que una familia $\{\varphi_\alpha\}$ es base del espacio $\mathcal{H}$ si todo elemento $x \in \mathcal{H}$ se escribe de forma única como:

$$x = \sum_{\alpha\in I} \langle x, \varphi_\alpha\rangle \varphi_\alpha.$$

Donde el conjunto de indices I es a lo sumo numerable.

Definición 1.3. Diremos que el espacio $\mathcal{H}$ es *separable* si admite una base de cardinal a lo sumo numerable.

Definición 1.4. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{W}$ dos espacios de Hilbert, diremos que una transformación lineal $T : \mathcal{H} \to \mathcal{W}$ es continua o acotada si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{H}$ vale:

$$\|Tx\|_{\mathcal{W}} \leq C \|x\|_{\mathcal{H}}.$$

Llamaremos $\|T\|$ a la menor de las constantes que satisfacen esta desigualdad y puede verse que:

$$\|T\| = \sup_{x\in\mathcal{H}, \|x\|=1} \|Tx\|.$$

A menudo llamaremos operador lineal a estas transformaciones.

Dados dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathcal{W}$ notaremos $\mathcal{H} \times \mathcal{W}$ al espacio formado por pares $(h, w), h \in \mathcal{H},\ w \in \mathcal{W}$ dotado del producto interno $\langle (x, y), (z, w)\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{W}} = \langle x, z\rangle_{\mathcal{H}} + \langle y, w\rangle_{\mathcal{W}}$ y la norma $\|(h, w)\|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{W}} = \|h\|^2_{\mathcal{H}} + \|w\|^2_{\mathcal{W}}$. Puede verse que con esta definición $\mathcal{H} \times \mathcal{W}$ resulta un espacio de Hilbert.

Definición 1.5. Sean $\mathcal{H}$, $\mathcal{W}$ dos espacios de Hilbert y $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{W}$ un operador acotado , aquí $D(T) \subset \mathcal{H}$ subespacio, es el dominio del operador T . Definimos el gráfico de T como el conjunto $G(T) = \{(x, Tx)/x \in D(T)\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{W}$ que por comodidad notaremos G_T.

Definición 1.6. Diremos que un operador $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{W}$ es *cerrado* si G_T es cerrado dentro del producto $\mathcal{H} \times \mathcal{W}$.

Teorema 1.1. *(Teorema del gráfico cerrado) Sea $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{W}$ un operador entre los espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{W}$. Entonces T es cerrado si y solo si cada vez que una sucesión $x_n \to x$ con $x_n \in D(T)$ y $Tx_n \to y$ se tiene que $x \in D(T)$ y $Tx = y$.*

Definición 1.7. Dado un operador $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{W}$ diremos que el operador T' es una extensión de T si:

- $D(T) \subset D(T')$.
- $T'|_{D(T)} = T$.

Observación 1.1. Notemos que si T' es una extensión de T entonces tenemos que $G_T \subset G_{T'}$.

Definición 1.8. Diremos que un operador $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{W}$ es *clausurable* si existe una extensión T' cerrada y en este caso la notaremos $\overline{T}$.

Proposición 1.1. *Sea T un operador clausurable, entonces existe una única extensión cerrada normal $\overline{T}$, además $G_{\overline{T}} = \overline{G_T}$.*

Demostración. Como T es clausurable existe S una extensión cerrada y $G_T \subset G_S$ con lo cual $\overline{G_T} \subset G_S$. Luego si $(0, y) \in \overline{G_T}$ implica que $(0, y) \in G_S$ con lo cual $y = 0$ ($y = Sx$ para algún x). Definimos $\overline{T}$ en $D(\overline{T}) = \{x \in \mathcal{H}/\exists y_x \in \mathcal{H}$ con $(x, y_x) \in \overline{G_T}\} \subset \mathcal{H}$ subespacio, como $\overline{T}x = y_x$. Asi $\overline{T}$ resulta lineal, extiende a T y $G_{\overline{T}} = \overline{G_T}$. □

Definición 1.9. Sea $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador con $D(T)$ denso en $\mathcal{H}$, definimos el operador adjunto $T^* : D(T^*) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como aquel que tiene como dominio al conjunto:

$$\begin{aligned} D(T^*) &= \{z \in \mathcal{H}/\exists y \in \mathcal{H} \text{ y } \langle Tx, z\rangle = \langle x, y\rangle\ \forall x \in D(T)\} \\ &= \{z \in \mathcal{H}/\langle T-, z\rangle \text{ es un funcional acotado en } D(T)\} \end{aligned}$$

y para cada $z \in D(T^*)$ definimos $T^*z = y$.

Observación 1.2. De la definición se deduce que T^* es lineal y $\langle Tx, z\rangle = \langle x, T^*z\rangle$.

Definición 1.10. Sea $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, un operador $T^* : D(T^*) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ su adjunto diremos que:

- T es *normal*, si $T^*T = TT^*$.
- T es *autoadjunto*, si $T^* = T$.
- T es *unitario*, si $T^*T = TT^* = Id_{\mathcal{H}}$.

Observación 1.3. Notemos que si T es unitario, entonces $T(S^\perp) = (T(S))^\perp$ para todo subespacio S.

Proposición 1.2. *Sea $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador, $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ su adjunto entonces si T es acotado T^* también y además vale que:*

$$\|T\| = \|T^*\|.$$

Proposición 1.3. *Sea $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador, $T^* : D(T^*) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ su adjunto entonces si T es inversible T^* también y además vale que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Proposición 1.4. *Sea $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $D(T) \subset \mathcal{H}$ denso, entonces:*

- *a) T^* es cerrado.*
- *b) T es clausurable $\Longleftrightarrow$ $D(T^*)$ es denso. Además en este caso se tiene $(T^*)^* = \overline{T}$.*

Demostración. a) Sea $V : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dado por $V(x, y) = (-y, x)$. Notemos que:

$$V \circ V(x, y) = V(-y, x) = (-x, -y) = -Id_{\mathcal{H}^2}(x, y)$$

y además V es unitario ya que:

$$\begin{aligned}\langle V(x, y), (z, w)\rangle_{\mathcal{H}^2} &= \langle(-y, x), (z, w)\rangle_{\mathcal{H}^2} = -\langle y, z\rangle_{\mathcal{H}} + \langle x, w\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle(x, y), (w, -z)\rangle_{\mathcal{H}^2} = \langle(x, y), -V(z, w)\rangle_{\mathcal{H}^2}.\end{aligned}$$

Con lo cual $V^* = -V$ y en consecuencia $V \circ V^* = -V \circ V = Id$. Para concluir notemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}V(G_T^\perp) = V(G_T)^\perp &= \{(x, y) \in \mathcal{H}^2 / \langle(x, y), (-Tz, z)\rangle_{\mathcal{H}^2} = 0,\ \forall z \in D(T)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathcal{H}^2 / \langle y, z\rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, Tz\rangle_{\mathcal{H}},\ \forall z \in D(T)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathcal{H}^2 / \langle T-, x\rangle_{\mathcal{H}} = \langle -, y\rangle_{\mathcal{H}} \text{ en } D(T)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathcal{H}^2 / x \in D(T^*) \text{ y } y = T^*x\} = G_{T^*}.\end{aligned}$$

Luego G_{T^*} es cerrado , con lo cual T^* es cerrado.

b) $\Rightarrow$ Supongamos que T es clausurable. Tenemos que:

$$\overline{G_T} = (G_T^\perp)^\perp = (V^2(G_T^\perp))^\perp = (V(V(G_T^\perp)))^\perp = (V(G_{T^*}))^\perp.$$

Supongamos que $D(T^*)$ no es denso, existe entonces $z \neq 0 \in D(T^*)^\perp$ con lo cual $(z,0) \in (G_{T^*})^\perp$ luego $V(z,0) \in V(G_{T^*})^\perp = \overline{G_T} = G_{\overline{T}}$ y necesariamente $z = 0$ que es absurdo.
$\Leftarrow$ Supongamos ahora que $D(T^*)$ es denso, entonces por el ítem a) $(T^*)^*$ es cerrado y además $V(\overline{G_T}) = V(G_{T^*}^\perp) = G_{(T^*)^*}$, luego T es clausurable y además $(T^*)^* = \overline{T}$. $\square$

Usaremos la notación $\mathcal{H}^*$ para describir al espacio dual del Hilbert $\mathcal{H}$, esto es, el espacio formado vectorial formado por los funcionales de $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ continuos.
Daremos ahora una lista de resultados clásicos.

Teorema 1.2. *(Hahn-Banach) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y S un subespacio cerrado propio, sea $\varphi : S \to \mathbb{C}$ un funcional acotado, entonces existe una extensión de φ, $\varphi' : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ acotada y además $\|\varphi\| = \|\varphi'\|$.*

Teorema 1.3. *(Riesz) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ un funcional acotado, entonces existe $x_\varphi \in \mathcal{H}$ tal que:*

$$\varphi(h) = \langle h, x_\varphi \rangle, \ \forall h \in \mathcal{H}.$$

Además en este caso se tiene que $\|\varphi\| = \|x_\varphi\|_{\mathcal{H}}$.

Notaremos $\langle h, \varphi \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}^*}$ (que suele llamarse producto de dualidad) al valor $\langle h, x_\varphi \rangle_{\mathcal{H}} = \varphi(h) \in \mathbb{C}$.

Definición 1.11. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert diremos que una función $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ se dirá una forma bilineal si $B(.,h) : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ y $B(h,.) : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ son lineales.

Teorema 1.4. *(Lax-Milgram) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ una forma bi-lineal para la cual existen constantes $a, b > 0$ tales que:*

$$|B(u,v)| \leq a \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}}$$

y

$$b \|v\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B(v,v), \ v \in \mathcal{H}.$$

Sea además un funcional $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ acotado entonces existe un único elemento $u \in \mathcal{H}$ tal que:

$$B(u,v) = \langle \varphi, v \rangle_{\mathcal{H}^*\times\mathcal{H}}$$

para todo $v \in \mathcal{H}$.

Definición 1.12. Un operador acotado $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido entre espacios de Hilbert se dice positivo si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Definición 1.13. Sea $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador acotado y positivo. La raíz cuadrada de T es un operador A acotado y autoadjunto tal que $A^2 = T$.

Teorema 1.5. *Sea $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador definido entre espacios de Hilbert acotado y positivo. Entonces existe una raíz cuadrada para T, más aún dicha raíz conmuta con todos los operadores con los que T conmuta.*

Capítulo 2

El problema de los momentos.

2.1. Familias en espacios de Hilbert

En esta sección trabajaremos con familias de elementos en un espacio de Hilbert separable. Definiremos distintos grados de independencia lineal que luego utilizaremos para estudiar la resolubilidad del problema de los momentos. Comenzaremos con las definiciónes elementales y luego mostraremos resultados que serán importantes a la hora de determinar si un problema de momentos admite solución y en ese caso que podemos decir de ella.
Por comodidad a partir de ahora dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ denotaremos el producto $\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}}$ de forma más simplificada como $\langle f, g\rangle$, del mismo modo para la norma de un elemento en $\mathcal{H}$ notaremos $\|f\|$ a $\|f\|_{\mathcal{H}}$ sin hacer referencia al espacio si queda claro en el contexto. Los resultados que exhibiremos a continuación pueden verse en [2] y [15].

Definición 2.1. Diremos que la familia $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *linealmente independiente* W o también más sencillamente $W - l.i.$ si no existe un vector $(a_n) \in \ell^2$ distinto de cero tal que $\sum_{j=1}^{N} a_j\langle f, \varphi_j\rangle \to 0$ para toda $f \in \mathcal{H}$ que cumple $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 < \infty$.

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 < \infty$ para toda $f \in \mathcal{H}$ en este caso el concepto de independencia lineal W significa que la suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n$ es única en sentido débil, en otras palabras:

$$a_n \in \ell^2,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n = 0 \text{ débil en } \mathcal{H} \Rightarrow a_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sin embargo esta propiedad no caracteriza a las familias W-l.i veámoslo con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1. Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y definimos:

$$\phi_1 := \varphi_1, \quad \phi_n := n(\varphi_n - \varphi_{n-1}), \quad n = 2, 3, ...$$

Mostremos que la familia $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface que la suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n$ es única en sentido débil pero la definición de independencia lineal W no se satisface. Debemos ver que si $(a_n) \in \ell^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n = 0$ débil en $\mathcal{H}$ entonces $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que para toda $f \in \mathcal{H}$ vale $\langle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n, f\rangle = 0$ entonces tomando $f = \varphi_m$ y observando que:

$$\langle\phi_n, \varphi_m\rangle = \begin{cases} m & \text{, si} \quad m = n \\ -(m+1) & \text{, si} \quad m+1 = n \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obtenemos que : $0 = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, a_n\phi_n\rangle = a_m m - a_{m+1}(m+1)$ y luego se tiene $a_m\frac{m}{m+1} = a_{m+1}$ con lo cual $a_m = \frac{m-1}{m}\frac{m-2}{m-1}...\frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{m}a_1$ finalmente esto nos permite escribir la suma parcial:

$$\sum_{n=1}^{R} a_n\phi_n = a_1\varphi_1 + 2a_2(\varphi_2 - \varphi_1)... + Ra_R(\varphi_R - \varphi_{R-1}) =$$

$$= a_1(\varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1)... + (\varphi_R - \varphi_{R-1})) = a_1\varphi_R$$

Y entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n = 0$ débil si y solo si $a_1 = a_2 = ... = 0$ como queríamos. Ahora mostremos que la definición de W-l.i. no se satisface.
Sea $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n\rangle|^2 < \infty$ tomemos $a_n = 1/n \in \ell^2$ como: $\sum_{n=1}^{N} \phi_n/n = \varphi_N$ entonces la suma $\sum_{n=1}^{N} \phi_n/n$ converge a 0 débil, ya que

$$\lim_{N\to\infty}\langle f, \sum_{n=1}^{N}\phi_n/n\rangle = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_j\langle\varphi_j, \sum_{n=1}^{N}\phi_n/n\rangle = \lim_{N\to\infty} c_N = 0.$$

Observación 2.1. Notemos que una familia de elementos $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $W-l.i.$ resulta linealmente independiente pues si tenemos que $\sum_{j=1}^{N} c_j\varphi_{n_j} = 0$ entonces tomando la sucesión $\{a_n\} \in \ell^2$ que surge de completar por cero la secuencia finita $\{c_j\}_{j=1}^{j=N}$ y llamando $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n$ obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 < \infty \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n = 0 \text{ débil en } \mathcal{H}.$$

Como $\mathscr{F}$ es $W-l.i.$ entonces $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y en definitiva $c_j = 0, j = 1...N$.

Definición 2.2. Decimos que la familia $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *minimal* , si para todo $n \in \mathbb{N}$ el elemento φ_n no pertenece a la clausura del subespacio generado por los demás elementos, es decir:

$$\varphi_n \notin \overline{Span\{\varphi_j\}_{j\neq n}}.$$

Definición 2.3. Dada una familia $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decimos que $\mathscr{F}' = \{\varphi'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un *sistema bi − ortogonal para* $\mathscr{F}$ si se cumple:

$$\langle \varphi_i, \varphi'_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i = j \\ 0, & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Observación 2.2. De la definición previa se sigue que toda la familia que sea ortonormal es un sistema biortogonal de si misma.

Proposición 2.1. *La familia $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es minimal $\Longleftrightarrow$ Existe un sistema $\mathscr{F}' = \{\varphi'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ biortogonal para $\mathscr{F}$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Si la familia es minimal por el teorema de Hahn-Banach para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\Phi_n \in \mathcal{H}^*$ tal que $\Phi_n(\varphi_n) = 1$ y $\Phi_n(\overline{Span\{\varphi_j\}_{j\neq n}}) = 0$ llamemos φ'_n al elemento de $\mathcal{H}$ que cumple $\Phi_n(f) = \langle f, \varphi'_n \rangle$ luego $\mathscr{F}' = \{\varphi'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el sistema biortogonal buscado.

$\Leftarrow$ Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_{n_0} \in \overline{Span\{\varphi_j\}_{j\neq n_0}}$,entonces existen $v_j \in Span\{\varphi_j\}_{j\neq n_0}$ tales que: $\varphi_{n_0} = \lim_{j\to\infty} v_j$ como $\langle v_j, \varphi'_{n_0} \rangle = 0$, $\forall j \in \mathbb{N} - \{n_0\}$ se tiene que $\langle \varphi_{n_0}, \varphi'_{n_0} \rangle = 0$ lo que es un absurdo. $\square$

Observación 2.3. Notemos que si la familia $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es minimal tenemos que , llamando $V := \overline{Span\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}}$, resulta $\mathcal{H} = V \oplus V^\perp$ con lo cual para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $\gamma_n \in V$, $\gamma_n^\perp \in V^\perp$ de modo que $\varphi'_n = \gamma_n + \gamma_n^\perp$ y como $\langle \varphi_m, \varphi'_n \rangle = \langle \varphi_m, \gamma_n \rangle$ siempre podemos tomar el conjunto biortogonal dentro de $V = \overline{Span\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}}$. De esto se deduce que el sistema biortogonal en general no es unico sin embargo en V si lo es por esto en lo que sigue llamaremos *el sistema biortogonal* de una familia $\mathscr{F}$ al único sistema dentro de $V := \overline{Span\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}}$.

Veremos ahora que las propiedades enunciadas no son equivalentes, más precisamente que ser W-l.i. no implica necesariamente ser minimal.

Ejemplo 2.2. Sea $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$, $\mathscr{F} = \{t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ veremos que esta familia es W-l.i. pero no minimal. Consideremos la familia de polinomios $\{P(t)\}$ que es densa en $L^2(0, 1)$, es sencillo verificar que para $R \in \mathbb{N}$ la familia $\{t^R P(t)\}$

es densa en $L^2(0,1)$(ver [11]). En consecuencia la familia $\{t^R, t^{R+1}, t^{R+2}, ...\}$ es completa en $L^2(0,1)$ pues:

$$\overline{Span\{t^R, t^{R+1}, t^{R+2}, ...\}} = \overline{\{t^R P(t)\}} = L^2(0,1)$$

y $t^k \in \overline{Span\{t^j\}_{j>k}} \subset \overline{Span\{t^j\}_{j\neq k}}$ con lo cual la familia $\mathscr{F} = \{t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es minimal. Veamos que si es W-l.i.
Sea χ_s la característica del intervalo $[0,s]$ entonces:

$$\langle \chi_s, t^j \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^s t^j = \frac{s^{j+1}}{j+1}. \tag{2.1}$$

Con lo cual :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle \chi_s, t^j \rangle\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{2j+2}}{(j+1)^2} < \infty, \quad s \in [0,1].$$

Supongamos que $\mathscr{F}$ no es W-l.i. entonces existe $\{a_n\} \in \ell^2$ distinta de cero tal que $\sum_{j=1}^{N} \langle a_j \chi_s, t^j \rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ para todo $s \in [0,1]$. Definimos la función $F(s) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \langle \chi_s, t^j \rangle$ como $\mathscr{F}$ no es W-l.i entonces $F \equiv 0$, pero por (1.1)

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_j \frac{s^{j+1}}{j+1}$$

con lo cual F es analítica y en consecuencia $a_j = 0$ para todo j lo que es absurdo.
Luego $\mathscr{F}$ es W-l.i.

Definición 2.4. Diremos que la familia $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *minimal uniforme* si existe un sistema biortogonal $\mathscr{F}' = \{\varphi'_n\}$ y $M > 0$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi'_n\| \leq M.$$

Veamos que esta propiedad es estrictamente más fuerte que la de ser minimal.

Ejemplo 2.3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal. Consideramos la familia $\mathscr{F} = \{\frac{1}{n}\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\mathscr{F}' = \{n\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es claro que $\mathscr{F}'$ es un sistema biortogonal para $\mathscr{F}$ y en consecuencia esta es minimal pero sin embargo, como $\|n\varphi_n\| = n$ se tiene que la familia $\mathscr{F}$ no es minimal uniforme.

Definición 2.5. Una familia $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que es una *Base de Riesz* de $V := \overline{Span\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}}$ si existe un operador $T : V \to V$ lineal, acotado e invertible y una base $\{e_n\}$ ortonormal de V de modo que $T(e_n) = \varphi_n$. Diremos directamente que $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}$ es base de Riesz sin hacer referencia al espacio V si $V = \mathcal{H}$ y también llamaremos ortogonalizador de $\mathscr{F}$ al isomorfismo T.

Todas las propiedades para una familia $\mathscr{F}$ como las que enunciamos hasta ahora quedan relacionadas de forma tal que cada una es implicada por la siguiente, de forma más precisa se tiene la siguiente proposición:

Proposición 2.2. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de elementos de $\mathcal{H}$, $V := \overline{Span\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}}$ y dadas las siguientes afirmaciones:*

- *a) La familia $\mathscr{F}$ es base de Riesz de V.*
- *b) La familia $\mathscr{F}$ es minimal uniforme.*
- *c) La familia $\mathscr{F}$ es minimal .*
- *d) La familia $\mathscr{F}$ es W-l.i.*

Se tiene: a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d)

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) Supongamos que $\mathscr{F}$ es base de Riesz de V sea el ortogonalizador $T : V \to V$ y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de V tal que $T(e_n) = \varphi_n$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$\psi'_n : V \to \mathbb{C}, \quad \psi'_n(\varphi) = \langle T^{-1}(\varphi), e_n\rangle$$

entonces ψ'_n es lineal y por Cauchy-Schwarz : $|\psi'_n(\varphi)| \leq \|T^{-1}\| \, \|\varphi\| \, \|e_n\|$ con lo cual $\|\psi'_n\| \leq \|T^{-1}\|$.
Notemos que:

$$\psi'_n(\varphi_n) = \langle T^{-1}(\varphi_n), e_n\rangle = 1 \text{ y } \psi'_n(\varphi_m) = \langle T^{-1}(\varphi_m), e_n\rangle = 0, \; m \neq n.$$

Sea $\varphi'_n \in V$ el elemento que cumple $\psi_n(\varphi) = \langle \varphi, \varphi'_n\rangle$.
Por la construcción resulta que la familia $\mathscr{F}' = \{\varphi'_n\}$ es un sistema biortogonal para $\mathscr{F}$ y además:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi'_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\psi_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\psi'_n\| \leq \left\|T^{-1}\right\|.$$

Luego $\mathscr{F}$ es minimal uniforme.

b) $\Rightarrow$ c) Es inmediato.

c) $\Rightarrow$ d) Supongamos que $\mathscr{F}$ es minimal, veamos que es W-l.i.
Supongamos que no, entonces existe $\{a_n\} \in \ell^2$ distinta de cero de modo que para toda $f \in \mathcal{H}$ que cumple $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 < \infty$ vale que

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \langle f, \varphi_n \rangle \xrightarrow[N \to \infty]{} 0,$$

consideremos $\mathscr{F}' = \{\varphi'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ el sistema biortogonal a $\mathscr{F}$, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \varphi'_m, \varphi_n \rangle|^2 = 1$$

y $\sum_{n=1}^{N} a_n \langle \varphi'_m, \varphi_n \rangle = a_m$ si $N > m$, tenemos que $a_m = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ lo que es absurdo. Luego $\mathscr{F}$ es W-l.i. $\square$

Estudiaremos con más profundidad a las familias que cumplen ser base de Riesz pues serán muy importantes a la hora de comprender y estudiar el problema de los momentos en general. Probaremos a continuación un resultado de N.K.Bari que nos será de mucha utilidad a la hora de trabajar con bases de Riesz.

Teorema 2.1. *(Bari) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de elementos de $\mathcal{H}$, $V := \overline{Span\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}}$ entonces:*

- *a) Si $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de Riesz de V, $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal en V y T el ortogonalizador que cumple $T(e_n) = \varphi_n$, entonces el sistema biortogonal $\mathscr{F}' = \{\varphi'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenido en V también es una base de Riesz de V , más aún $\{\varphi'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ puede expresarse, vía el ortogonalizador T y la base ortonormal $T^{-1}\varphi_n$ de $T^{-1}(V)$, mediante la fórmula:*

$$\varphi'_n = (T^{-1})^* T^{-1} \varphi_n$$

- *b) La familia $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es base de Riesz de $V \iff$ Para toda sucesión finita: $\{c_j,\ j = 1, ...N\}$ existen constantes $m, M > 0$ tales que*

$$m \sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j \right\|^2 \leq M \sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 .$$

Además en este caso , si $\mathscr{F}' = \{\varphi'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es el sistema biortogonal asociado a* $\mathscr{F}$ *, todo elemento* $f \in V$ *tiene expansiones en serie de la forma:*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi'_n \rangle \varphi_n, \qquad f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi'_n.$$

Demostración. a) Vimos en la demostración de la primera implicación en la proposición 2.2 que si $\mathscr{F}$ era base de Riesz entonces poseía un sistema biortogonal $\mathscr{F}' = \{\varphi'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cumplía que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para toda $\varphi \in V$:

$$\langle T^{-1}(\varphi), e_n \rangle = \langle \varphi, \varphi'_n \rangle$$

de aquí se deduce que $e_n \in D((T^{-1})^*)$ y como $e_n = T^{-1}(\varphi_n)$ se tiene:

$$\langle \varphi, (T^{-1})^* e_n \rangle = \langle \varphi, (T^{-1})^* T^{-1}(\varphi_n) \rangle = \langle \varphi, \varphi'_n \rangle, \quad \forall \varphi \in V$$

se deducen las fórmulas:

$$(T^{-1})^* e_n = \varphi'_n, \quad (T^{-1})^* T^{-1}(\varphi_n) = \varphi'_n$$

de la primera fórmula y el hecho de que como T^{-1} es un isomorfismo entonces $(T^{-1})^*$ también, se tiene que $\{\varphi'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de Riesz de V

b) $\Rightarrow$ Si $\mathscr{F}$ es base de Riesz , $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de V y T el ortonormalizador computando obtenemos:

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|} \sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 = \frac{1}{\|T^{-1}\|} \left\| \sum_{j=1}^{N} c_j e_j \right\|^2 = \frac{1}{\|T^{-1}\|} \left\| \sum_{j=1}^{N} c_j T^{-1} \varphi_j \right\|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j \right\|^2$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j \right\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{N} c_j T(e_j) \right\|^2 \leq \|T\| \left\| \sum_{j=1}^{N} c_j e_j \right\|^2 \leq \|T\| \sum_{j=1}^{N} |c_j|^2$$

$\Leftarrow$ Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de V , definimos $T : V \to V$ como $T(e_n) = \varphi_n$ extendemos por linealidad a $Span\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y luego por densidad a V.
Las cotas de la hipótesis nos dicen que T está bien definido , es acotado con norma menor o igual que $M^{1/2}$ e inversible con la norma de la inversa mayor o igual que $m^{1/2}$, luego $\mathscr{F}$ es base de Riesz

Si $f \in V$ tenemos : $T^{-1}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ con lo cual aplicando T se tiene $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ y multiplicando por φ'_n resulta $c_n = \langle f, \varphi'_n \rangle$.

Ahora de forma similar $T^*(f) = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n T^{-1}\varphi_n$ y entonces aplicando $(T^{-1})^*$ se tiene $f = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \varphi'_n$ multiplicando por φ_n resulta $c'_n = \langle f, \varphi_n \rangle$ □

Para completar esta parte de la teoría presentaremos un ejemplo de una familia minimal uniforme que no es base de Riesz .

Ejemplo 2.4. Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\phi_n = \varphi_0 + \varphi_n$ y $\mathscr{F} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces:
a) $\mathscr{F}$ es completa.
b) $\mathscr{F}$ es minimal uniforme.
c) $\mathscr{F}$ no es base de Riesz pero su sistema biortogonal si lo es.

Demostremos estas afirmaciones:
a) Sea $V := \overline{Span\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ si $f \in V^{\perp}$ y $f = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j$ multiplicando por ϕ_n con $n > 1$ obtenemos que $c_0 + c_n = 0$, con lo cual $c_n = -c_0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ y como $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ debe estar en ℓ^2 necesariamente $c_0 = 0$ y entonces $c_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Luego $f = 0$.
b) Es inmediato corroborar que la familia $\mathscr{F}' = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema biortogonal uniformemente acotado en norma por 1 para $\mathscr{F}$ y además es base de Riesz vía el ortogonalizador $T(\varphi_m) = \varphi_{m+1}$.
c) Tomemos la sucesión $a_n = 1/n\ \in \ell^2$ como

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\phi_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\varphi_n + \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right)\varphi_0$$

entonces $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\phi_n$ no puede converger en $\mathcal{H}$ ya que en la igualdad anterior el primer término de la derecha converge pero el segundo no. Luego por el teorema de Bari b) $\mathscr{F}$ no es base de Riesz.

Por último demostraremos unos lemas que serán útiles más adelante.

Lema 2.1. *Sea $\mathcal{H}$ un Hilbert y $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia en $\mathcal{H}$. Supongamos que se tiene una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^{\infty}$ con $\alpha_n \neq 0$ y consideremos la familia $\mathscr{F}' = \{\alpha_n\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces si $\mathscr{F}$ es $W - l.i.$ también lo es $\mathscr{F}'$.*

Demostración. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ de manera que para toda $f \in \mathcal{H}$ que satisface

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \alpha_n\varphi_n\rangle|^2 < \infty$$

se cumple $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\langle f, \alpha_n\varphi_n\rangle = 0$ osea que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{\alpha_n}\langle f, \varphi_n\rangle = 0$ para toda f que cumpla:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 < \infty$$

como $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ entonces $\{a_n\overline{\alpha_n}\} \in \ell^2$ y si f es tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 < \infty \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 < \infty$$

con lo cual como $\mathscr{F}$ es $W - l.i.$ resulta $a_n\overline{\alpha_n} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y en consecuencia $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego $\mathscr{F}'$ es $W - l.i.$. □

Lema 2.2. *(Invarianza por isomorfismos)*
Sea $\mathcal{H}$ un Hilbert y $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia en $\mathcal{H}$, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un isomorfismo, definimos $T(\mathscr{F}) := \{T(\varphi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces :
a) $\mathscr{F}$ es base de Riesz $\iff T(\mathscr{F})$ lo es.
b) $\mathscr{F}$ es minimal uniforme $\iff T(\mathscr{F})$ lo es.
c) $\mathscr{F}$ es minimal $\iff T(\mathscr{F})$ lo es.
d) $\mathscr{F}$ es $W - l.i.$ $\iff T(\mathscr{F})$ es $W - l.i.$.

Demostración. a) Si S es un ortogonalizador para $\mathscr{F}$, entonces $T \circ S$ es un ortogonalizador para $T(\mathscr{F})$ y recíprocamente : si S es un ortogonalizador de $T(\mathscr{F})$ entonces $T^{-1} \circ S$ lo es para $\mathscr{F}$.
b) Si $\mathscr{F}' = \{\varphi'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema biortogonal uniformemente acotado en norma para $\mathscr{F}$ entonces $\{(T^*)^{-1}\varphi'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lo es para $T(\mathscr{F})$ pues:

$$\langle T(\varphi_m), (T^*)^{-1}\varphi'_n\rangle = \langle \varphi_m, T^*(T^*)^{-1}\varphi'_n\rangle = \langle \varphi_m, \varphi'_n\rangle$$

además

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|(T^*)^{-1}\varphi'_n\right\| \leq \left\|(T^*)^{-1}\right\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi'_n\|$$

luego $T(\mathscr{F})$ es minimal uniforme , recíprocamente , si $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema biortogonal uniformemente acotado en norma para $T(\mathscr{F})$ entonces $\{T^*\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lo es para $\mathscr{F}$ pues:

$$\langle \varphi_m, T^*\phi_n\rangle = \langle T\varphi_m, \phi_n\rangle \text{ y además } \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^*\phi_n\| \leq \|T^*\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\phi_n\| .$$

c) Es inmediato de b).
d) Sea un vector $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ tal que para todo $f \in \mathcal{H}$ que satisface $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle T\varphi_n, f\rangle|^2 < \infty$ se tiene $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n\langle T\varphi_n, f\rangle = 0$ sea $g = T^*f$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \varphi_n, g\rangle|^2 < \infty$ y $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n\langle \varphi_n, g\rangle = 0$ luego como $\mathscr{F}$ es $W - l.i.$ debe ser $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ con lo cual $T(\mathscr{F})$ es $W - l.i.$. □

En general un sistema biortogonal para una familia minimal $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede ser incompleto en $\overline{Span\{\varphi_n\}}_{n\in\mathbb{N}}$, este último lema nos dará una condición que nos garantice que el sistema biortogonal es completo.
Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado por $F(e_n) = \varphi_n$ y extendiendo por densidad.

Lema 2.3. *Si $\mathscr{F}$ es completa , minimal y $\mathscr{F}' = \{\varphi_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema biortogonal , resulta:*
$\mathscr{F}'$ es completa en $\mathcal{H} \iff$ El operador F definido arriba admite una clausura.

Demostración. Como $\mathscr{F}$ es minimal esto implica que $\varphi_n' \in D(F^*)$ y también $F^*(\varphi_n') = e_n$ pues

$$x = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n, \quad \langle Fx, \varphi_k' \rangle = c_k = \langle x, e_k \rangle.$$

Si $\mathscr{F}'$ es completa en $\mathcal{H}$ entonces $D(F^*)$ es denso en $\mathcal{H}$ y como F^* está definido en un conjunto denso si y solo si F admite una clausura se tiene el lema. □

A continuación mostraremos cómo se comportan las familias de subespacios al aplicarle una proyección, esto será de interés a la hora de analizar familias en $L^2(0,+\infty)$ y su proyección al espacio $L^2(0,T)$.

Lema 2.4. *Sea $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de elementos de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea $V = \overline{Span\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$. Sea S un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $P_S : \mathcal{H} \to S$, $P_V : \mathcal{H} \to V$ las proyecciones, entonces si la familia $P_S\mathscr{F} := \{P_S\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es minimal en S, entonces $\mathscr{F}$ es minimal en V, más aún en este caso se tiene que si $P_S\mathscr{F}' = \{(P_S\varphi_n)'\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el sistema biortogonal para $P_S\mathscr{F}$ entonces $\mathscr{F}' = \{\varphi_n' = P_V(P_S\varphi_n)'\}_{n\in\mathbb{N}}$ es biortogonal para $\mathscr{F}$.*

Demostración. Notemos que:

$$\begin{aligned}\delta_{i,j} = \langle (P_S\varphi_i)', P_S\varphi_j \rangle &= \langle (P_S\varphi_i)', P_S\varphi_j + P_{S^\perp}\varphi_j \rangle \\ &= \langle (P_S\varphi_i)', \varphi_j \rangle = \langle P_V(P_S\varphi_i)', \varphi_j \rangle\end{aligned}$$

con $\delta_{i,j}$ la delta de Kronecker, luego $\mathscr{F}$ es minimal y su sistema biortogonal es $\{P_V(P_S\varphi_n)'\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

2.2. Familias de subespacios en espacios de Hilbert

En esta sección estudiaremos familias de subespacios en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ separable. Daremos definiciones y propiedades para familias de subespacios similares a las propiedades ya vistas para familias de elementos y luego analizaremos el producto tensorial entre espacios de Hilbert que necesitaremos para estudiar espacios del tipo $L^2(0,T;\mathcal{H})$ que poseen una identificación natural con el espacio $L^2(0,T;\mathbb{C})\overline{\otimes}\mathcal{H}$. Durante esta sección asumiremos los subespacios cerrados y dados S, T notaremos $S^\perp$ y $T^\perp$ a sus complementos ortogonales y también P_S, P_T a las proyecciones $P : S \oplus S^\perp \to S$ y $P_T : T \oplus T^\perp \to T$ a las que llamaremos *proyectores ortogonales* , también distinguiremos el caso en el que P tenga dominio en una suma directa de subespacios $P : S \oplus T \to S$ y en ese caso diremos que P es un *proyector oblicuo sobre S paralelo a T*. Los resultados expuestos aquí pueden verse en [2] .

Definición 2.6. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y S, T dos subespacios de $\mathcal{H}$ definimos el *ángulo* entre S y T como el número $\alpha = \alpha(S,T) \in [0,\pi/2]$ que satisface la ecuación:

$$\cos(\alpha) = \sup_{s\in S, s\neq 0,\ t\in T, t\neq 0} \frac{|\langle s,t\rangle|}{\|s\|\,\|t\|}.$$

Observación 2.4. Notemos que para dos subespacios S, T de dimensión uno esta definición coincide con la de ángulo entre rectas conocido. Sin embargo si S y T tienen un elemento en común v distinto de cero entonces:

$$1 \geq \cos(\alpha) \geq \frac{|\langle v,v\rangle|}{\|v\|\,\|v\|} = 1$$

con lo cual $\alpha(S,T) = 0$ de modo que esta definición de ángulo no coincide con la usual entre planos en $\mathbb{R}^3$.

Observación 2.5. Del mismo modo que en la observación anterior, si dos subespacios S y T tienen un elemento en común distinto de cero su ángulo $\alpha(S,T)$ es cero, no obstante puede ocurrir que $\alpha(S,T) = 0$ pese a que $S \cap T = \{0\}$.

Ejemplo 2.5. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de un Hilbert $\mathcal{H}$, sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y sean:
$S = \overline{Span\{e_{2m-1}\}}_{m\in\mathbb{N}}$, $T = \overline{Span\{e_{2m-1} + a_m e_{2m}\}}_{m\in\mathbb{N}}$ entonces:
$\alpha(S,T) = 0$ pero $S \cap T = \{0\}$.

Veamos que $S \cap T = \{0\}$, sea $f_n = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j^{(n)}(e_{2j-1} + a_j e_{2j}) \in T$ (con $c_j = 0$ salvo finitos) que converge a un elemento f en S.
Entonces la sucesión $\{\{c_j^{(n)}\}_{j\in\mathbb{N}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en ℓ^2 a alguna sucesión $\{c_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, como $f_n \to f$ se tiene que:

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{2j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j c_j e_{2j}$$

y $f \in S$ implica que $c_j = 0\ \forall j \in \mathbb{N}$ con lo cual $f = 0$ y luego $S \cap T = \{0\}$.
Por otro lado:

$$\cos^2(\alpha(S,T)) \geq \frac{|\langle e_{2m-1}, e_{2m-1} + a_m e_{2m}\rangle|^2}{\|e_{2m-1}\|^2 \|e_{2m-1} + a_m e_{2m}\|^2} = \frac{1}{(1+a_m)^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$$

y entonces $\alpha(S,T) = 0$.

Lema 2.5. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert , S y T dos subespacios .*
Si $dim(S) < \infty$ o $dim(T) < \infty$ y $\alpha(S,T) = 0$ entonces S y T tienen un elemento en común distinto de cero.

Demostración. Supongamos sin perdida de generalidad que $dim(S) < \infty$.
Como $\alpha(S,T) = 0$ existen sucesiones:
$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ y $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ de norma 1 tales que $\langle s_n, t_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ entonces $\|s_n - t_n\| = \langle s_n - t_n, s_n - t_n\rangle = 2 - 2\mathrm{Re}\left(\langle s_n, t_n\rangle\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ como la dimensión de S es finita , existe una subsucesión $\{s_{n_j}\}$ que converge a $s \in S$, entonces $\|s\| = 1$ y como $\left\|s_{n_j} - t_{n_j}\right\| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ entonces t_{n_j} también converge a s luego $s \in S \cap T$. $\square$

Observación 2.6. Notemos que el resultado previo vale en particular si $dim(\mathcal{H}) < \infty$.

En el siguiente lema conectaremos la definición de ángulo con la noción de proyector ortogonal.

Lema 2.6. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y S, T dos subespacios, sean $P_S : \mathcal{H} \to S$ y $P_T : \mathcal{H} \to T$ los proyectores ortogonales entonces se tiene que:*

- *a)* $\cos(\alpha(S,T)) = \|P_S|_T\| = \|P_S P_T\|$.
- *b) Si existe $(P_S|_T)^{-1}$ vale que: $sen(\alpha(S^\perp, T)) = \frac{1}{\left\|P_S|_T^{-1}\right\|}$.*

- *c)* $sen(\alpha(S,T)) = \text{ínf}_{s\in S, \|s\|=1, t\in T} \|s-t\|$.

Demostración. Directo de las definiciónes se tiene:

$$a)\cos(\alpha) = \sup_{s\in S, s\neq 0,\ t\in T, t\neq 0} \frac{|\langle s, P_S t + P_{S^\perp} t\rangle|}{\|s\|\,\|t\|} = \sup_{t\in T, t\neq 0}\sup_{s\in S, s\neq 0} \frac{|\langle s, P_S t\rangle|}{\|s\|\,\|t\|}$$
$$= \sup_{t\in T, t\neq 0} \frac{\|P_S t\|}{\|t\|} = \|P_S|_T\|\,.$$

$$b)\frac{1}{\left\|P_S|_T^{-1}\right\|^2} = \text{ínf}_{t\in T, \|t\|=1} \|P_S t\|^2 = \text{ínf}_{t\in T, \|t\|=1} (1 - \|P_{S^\perp} t\|^2)$$
$$= 1 - \sup_{\|t\|=1} \|P_{S^\perp}|_T t\|^2 = 1 - \|P_{S^\perp}|_T\|^2\,.$$

Ahora por el ítem a) tenemos que:
$1 - \|P_{S^\perp}|_T\|^2 = 1 - \cos^2(\alpha(S^\perp, T)) = sen^2(\alpha(S^\perp, T))$

$$c)\ \text{ínf}_{s\in S, \|s\|=1, t\in T} \|s-t\|^2 = \text{ínf}_{s\in S, \|s\|=1, t\in T} \|P_T s + P_{T^\perp} s - t\|^2$$
$$= \text{ínf}_{s\in S, \|s\|=1} \|P_{T^\perp} s\|^2$$
$$= 1 - \sup_{s\in S, \|s\|=1} \|P_T s\|^2\,.$$

Nuevamente por el ítem a):

$$1 - \sup_{s\in S, \|s\|=1} \|P_T s\|^2 = 1 - \|P_T|_S\|^2 = 1 - \cos^2(\alpha(S,T)) = sen^2(\alpha(S,T)).$$

□

Notaremos $P_{S\oplus T}^{S}$ al operador $P : S\oplus T \subset \mathcal{H} \to S$ dado por $P(s+t) = s$,este operador es un proyector (es decir $P^2 = P$) y por otro lado dado un proyector P con dominio $D(P) \subset \mathcal{H}$ tomando $S = Im(P)$ y $T = Nu(P)$ resulta $P = P_{S\oplus T}^{S}$ con lo cual todos los proyectores pueden pensarse como $P_{S\oplus T}^{S}$ para S y T adecuados.
A continuación daremos un lema que nos permitirá caracterizar mejor a estos proyectores.

Lema 2.7. *Sea $\mathcal{H} = S\oplus T$ y el operador P^* definido como: $P^* := (P_{S\oplus T}^{S})^*$ entonces este operador coincide con el operador dado por $(P^\perp) := P_{S^\perp\oplus T^\perp}^{T^\perp}$.*

Demostración. 1) Primero chequeemos que $S^\perp$ y $T^\perp$ están en suma directa para corroborar que $P^\perp$ está bien definido.
Como:

$$S^\perp \cap T^\perp = \{x \in \overline{Span\{S,T\}}/x \perp S, x \perp T\} = \{0\}.$$

2) Ahora chequeemos que $P^\perp \subset P^*$ es decir. para todo $a = s + t \in D(P)$ y un $b = s^\perp + t^\perp$ arbitrario , debemos ver que:

$$\langle Pa, b\rangle = \langle a, P^\perp b\rangle.$$

Efectivamente:

$$\langle P(s+t), b\rangle = \langle s, s^\perp + t^\perp\rangle = \langle s, t^\perp\rangle = \langle s+t, t^\perp\rangle = \langle a, P^\perp b\rangle$$

3) Veamos que P^* es un proyector. Sea $b \in D(P^*)$ es decir, b satisface:

$$\langle Pa, b\rangle = \langle a, P^* b\rangle, \ \forall a \in D(P).$$

Entonces para todo $a \in D(P)$ vale que:

$$\langle P(Pa), b\rangle = \langle Pa, P^* b\rangle.$$

Como P es proyector ($P^2 = P$) se tiene:

$$\langle a, P^* b\rangle = \langle P(Pa), b\rangle = \langle Pa, P^* b\rangle.$$

Comparando los extremos de esta igualdad se tiene que $P^* b \in D(P^*)$ y $P^*(P^* b) = P^* b$, luego P^* es proyector. y además tenemos que:

$$P^* = P^{Im(P^*)}_{Nu(P^*)\oplus Im(P^*)} : Nu(P^*) \oplus Im(P^*) \to Im(P^*).$$

Si podemos probar que $Im(P^*) \subset T^\perp$ y $Nu(P^*) \subset S^\perp$ entonces la igualdad que buscamos mostrar se deduce del ítem 2).
Sea $a \in D(P^*)$, como $0 = \langle Pt, a\rangle = \langle t, P^* a\rangle$ para todo $t \in T$ se tiene que $P^* a \perp T$ con lo cual $Im(P^*) \subset T^\perp$. Si $P^* a = 0$ entonces para $s \in S$ se tiene $0 = \langle s, P^* a\rangle = \langle Ps, a\rangle = \langle s, a\rangle$ y en consecuencia $Nu(P^*) \perp S$. □

Estableceremos una relación entre los proyectores oblicuos y los proyectores ortogonales mediante el siguiente lema.

Lema 2.8. *Dados, S, T subespacios de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, los operadores $P = P^S_{S\oplus T}$ y $P' := (P_{S^\perp}|_T)^{-1} P_{S^\perp}$ existen al mismo tiempo y son iguales.*

Demostración. P' está bien definido si y solo si $P_{S^\perp}|_T$ tiene núcleo trivial que es equivalente a que $S \cap T = \{0\}$ ya que $P_{S^\perp}s = 0$ para $s \in (S^\perp)^\perp = S$ Pero que $S \cap T = \{0\}$ es la condición necesaria para la existencia de P.
Veamos que $P \subset P'$. Si $a = s + t, s \in S, t \in T$ entonces $P_{S^\perp}a = P_{S^\perp}s$ y $P'a = s = Pa$ solo resta chequear que los dominios sean iguales. Sea $a \in D(P')$, como $D((P_{S^\perp}|_T)^{-1}) = Im(P_S^\perp|_T) = P_{S^\perp}T$ se sigue que $P_{S^\perp}a = P_{S^\perp}t$ para algún $t \in T$ con lo cual $P_{S^\perp}(a - t) = 0$ y en consecuencia $a - t = s \in S$ luego $D(P') = D(P)$ como queríamos. □

Relacionemos estos conceptos con la definición de ángulo entre subespacios.

Lema 2.9. *Dados, S, T subespacios de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tales que $S \cap T = \{0\}$ entonces:*

- *a) El operador $P^S_{S\oplus T}$ es acotado $\iff \alpha(S,T) > 0$ y en ese caso se tiene que $\left\|P^S_{S\oplus T}\right\| = \frac{1}{sen(\alpha(S,T))}$.*
- *b) El subespacio $S \oplus T$ es cerrado $\iff \alpha(S,T) > 0$.*
- *c) $\alpha(S,T) = \alpha(S^\perp, T^\perp)$.*

Demostración. a) De la definición se tiene:

$$\frac{1}{\left\|P^S_{S\oplus T}\right\|} = \inf_{t\in T, t\neq 0, s\in S, s\neq 0} \frac{\|t-s\|}{\left\|P^S_{S\oplus T}(t-s)\right\|} = \inf_{t\in T,, s\in S, s\neq 0} \frac{\|t-s\|}{\|s\|}.$$

Ahora por el ítem c) del lema 2.6 se tiene que

$$\frac{1}{\left\|P^S_{S\oplus T}\right\|} = sen(\alpha(S,T)).$$

b) $\Rightarrow$ Si $S \oplus T$ es cerrado y $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n, s_n) = (x, y)$ entonces existen $s \in S$, $t \in T$ tales que $x = s + t$. Como $\lim_{n\to\infty} s_n = y$ se tiene que $s = y$ con lo cual el gráfico de $P^S_{S\oplus T}$ es cerrado. Por el teorema de gráfico cerrado, $P^S_{S\oplus T}$ es acotado y en consecuencia por el ítem a) $sen(\alpha(S,T)) = \frac{1}{\left\|P^S_{S\oplus T}\right\|} > 0$ y en definitiva $\alpha(S,T) > 0$.
$\Leftarrow$ Si $\alpha(S,T) > 0$ entonces por el ítem a) el operador $P^S_{S\oplus T}$ es acotado, en consecuencia la convergencia de una sucesión $\{s_n + t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ implica la convergencia de la sucesión $P^S_{S\oplus T}(s_n + t_n) = s_n$. Como S es cerrado , existe $s \in S$ tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ y entonces debe existir $t \in T$ de modo que se

cumpla $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Luego $S \oplus T$ es cerrado.
c) Por el ítem a) y el lema 2.7 se tiene:

$$sen(\alpha(S,T)) = \frac{1}{\left\|P^S_{S\oplus T}\right\|} = \frac{1}{\left\|(P^S_{S\oplus T})^*\right\|} = \frac{1}{\left\|P^{T^\perp}_{S^\perp\oplus T^\perp}\right\|} = sen(\alpha(S^\perp,T^\perp)).$$

$\square$

Más adelante trabajaremos con familias de exponenciales reales en $L^2(0,+\infty)$ y será de interés considerar la restricción de estas funciones al espacio $L^2(0,T)$. A continuación daremos un lema que nos ayudara a entender como los proyectores funcionan con la restricción.

Lema 2.10. *Sean S,T dos subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Sea $P_S|_T$ el proyector $P_S : \mathcal{H} \to S$ restringido al subespacio T y $P_T|_S$ el proyector $P_T : \mathcal{H} \to T$ restringido a S. Entonces:*

- *a) El proyector $P_S|_T$ restringido a T es un isomorfismo con su imagen $\iff \alpha(S^\perp,T) > 0$.*
- *b) Se tiene que:*

$$(P_S|_T : T \to S)^* = P_T|_S : S \to T.$$

- *c) El operador $P_S|_T : T \to S$ es un isomorfismo de subespacios $\iff$ $\alpha(S,T^\perp) > 0$ y $\alpha(S^\perp,T) > 0$.*

Demostración. a) $\Rightarrow$ Si $P_S|_T$ es un isomorfismo por 2.6 b) tenemos que $sen(\alpha(S^\perp,T)) = \frac{1}{\left\|P_S|_T^{-1}\right\|}$ y en particular $\alpha(S^\perp,T) > 0$.
$\Leftarrow$ Si $\alpha(S^\perp,T) > 0$ volviendo en los pasos de la demostración de 2.6 ítem b) tenemos que:

$$0 < sen^2(\alpha(S^\perp,T)) = 1 - \sup_{t\in T,\|t\|=1} \|P_{S^\perp}t\|^2 = \inf_{t\in T,\|t\|=1} \|P_S t\|^2.$$

Con lo cual $P_S|_T$ es inyectivo y luego biyectivo con su imagen.

b) Dados $s \in S$, $t \in T$ escribimos $s = s_T + s_{T^\perp}, s_T \in T, s_{T^\perp} \in T^\perp$, $t = t_S + t_{S^\perp}, t_S \in S, t_{S^\perp} \in S^\perp$ entonces:

$$\langle P_S t, s\rangle = \langle t_S, s\rangle = \langle t_S + t_{S^\perp}, s\rangle = \langle t, s_T + s_{T^\perp}\rangle = \langle t, s_T\rangle = \langle t, P_T s\rangle.$$

c) El operador $P_S|_T : T \to S$ es un isomorfismo de subespacios si y solo si es un isomorfismo con su imagen y esta coincide con el subespacio S. Que este operador sea un isomorfismo por el ítem a) es equivalente a que $\alpha(S^{\perp}, T) > 0$.Por otro lado la imagen de este operador será densa en S si y solo si el adjunto es inversible. Por el ítem b), que $(P_S|_T : T \to S)^*$ sea inversible es equivalente a que $\alpha(S, T^{\perp}) > 0$. □

Observación 2.7. Notemos que si tenemos dos subespacios cerrados S , T tales que $\alpha(S,T) > 0$ entonces $S \oplus T$ es cerrado y podemos concluir la igualdad:

$$S \oplus T = \overline{Span\{S,T\}}.$$

A continuación estableceremos una relación entre las propiedades de las familias de elementos en un espacio de Hilbert vistas en la sección anterior y la noción de ángulo entre subespacios.
Dada una familia $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decíamos que era minimal si para todo $n \in \mathbb{N}$, resultaba que $\varphi_n \notin \overline{Span\{\varphi_j\}}_{j\in\mathbb{N}, j\neq n}$. Sean los espacios $E = \overline{Span\{\varphi_n\}}_{n\in\mathbb{N}}$, $E_n = \overline{Span\{\varphi_j\}}_{j\in\mathbb{N}, j\neq n}$ y por comodidad $\langle\varphi_n\rangle := Span\{\varphi_n\}$ por el lema 2.5 como $\langle\varphi_n\rangle \cap E_n = \{0\}$ entonces $\alpha(\langle\varphi_n\rangle, E_n) > 0$ y con esto (por el lema 2.9 ítem a)) existen operadores acotados

$$P_n = P^{\langle\varphi_n\rangle}_{\langle\varphi_n\rangle\oplus E_n} : E \to \langle\varphi_n\rangle.$$

Si llamamos $\{\varphi'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a el sistema biortogonal dentro de E asociado a $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tenemos que:

$$\left\langle \varphi_n, \frac{P_n^*(\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} \right\rangle = \left\langle P_n(\varphi_n), \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|^2} \right\rangle = \left\langle \varphi_n, \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|^2} \right\rangle = 1$$

y también si $n \neq m$:

$$\left\langle \varphi_m, \frac{P_n^*(\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} \right\rangle = \left\langle P_n(\varphi_m), \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|^2} \right\rangle = \left\langle 0, \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|^2} \right\rangle = 0.$$

Con lo cual podemos concluir que $\varphi'_n = \frac{P_n^*(\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$ y también $P_n(x) = \langle x, \varphi'_n\rangle\varphi_n$ Luego:

$$\|P_n\| = \|\varphi'_n\|\,\|\varphi_n\| = \frac{\|P_n\varphi'_n\|}{\|\varphi'_n\|}$$

y entonces por el lema 2.9 se tiene que:

$$\|P_n\| = \|\varphi'_n\|\,\|\varphi_n\| = \frac{1}{sen(\alpha(\langle\varphi_n\rangle, E_n))} \geq 1.$$

Observación 2.8. Notemos que de lo anterior se deduce que si la familia $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface estimaciones $m \le \|\varphi_n\| \le M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces que exista $c > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ valga $\alpha(\langle\varphi_n\rangle, E_n) \ge c > 0$ es equivalente a que la familia $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea minimal uniforme. Es decir si la familia es minimal uniforme entonces existe $K > 0$ que acota las normas de la familia biortogonal y:

$$\frac{1}{sen(\alpha(\langle\varphi_n\rangle, E_n))} = \|\varphi_n'\| \, \|\varphi_n\| < MK.$$

Con lo cual existe $c > 0$ y $\alpha(\langle\varphi_n\rangle, E_n) \ge c > 0$. Por otro lado si existe $c > 0$ y $\alpha(\langle\varphi_n\rangle, E_n) \ge c > 0$ entonces $sen(\alpha(\langle\varphi_n\rangle, E_n)) > sen(c)$ y en consecuencia :

$$\|\varphi_n'\| = \frac{1}{\|\varphi_n\| \, sen(\alpha(\langle\varphi_n\rangle, E_n))} \le \frac{1}{msen(c)}.$$

Con lo cual la familia es minimal uniforme.

Ahora daremos las definiciones de minimalidad, minimalidad uniforme y base de Riesz para familias de subespacios similares a las ya vistas para familias de elementos en un espacio de Hilbert.

Definición 2.7. Sean $\mathscr{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subespacios de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, sea $E = \overline{Span\{S_n\}}_{n\in\mathbb{N}}$ y $E_n = \overline{Span\{S_j\}}_{j\in\mathbb{N}, j\neq n}$.
En estas condiciones decimos que $\mathscr{S}$ es *minimal* si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un proyector acotado $P_n : E \to S_n$ paralelo a E_n.
Decimos que la familia de subespacios $\mathscr{S}'=\{S_n' := P_n^* S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema biortogonal para $\mathscr{S}$.

Definición 2.8. Diremos que la familia $\mathscr{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *minimal uniforme* si existe $M > 0$ tal que:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| \le M.$$

Definición 2.9. Diremos que la familia $\mathscr{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *base de Riesz* de E si existe un isomorfismo $V : \overline{Span\{S_n\}}_{n\in\mathbb{N}} \to \overline{Span\{S_n\}}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la familia $\{V^{-1}S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ortogonal es decir $V^{-1}S_n \perp V^{-1}S_m, \ n \neq m$.

Definición 2.10. Diremos que la familia $\mathscr{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *base* de $\mathcal{H}$ si es base de Riesz y $\mathcal{H} = \overline{Span\{S_n\}}_{n\in\mathbb{N}}$.

Observación 2.9. A veces puede ser conveniente trabajar con un sistema biortogonal a la familia $\mathscr{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que no este contenida en E , con lo cual llamaremos a cualquier familia de subespacios $\{S_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfaga:

$$P_E S_n' = P_n^* S_n, \ P_n = P_{S_n \oplus E_n}^{S_n} : E \to S_n, \ P_E : E \oplus E^\perp \to E$$

un sistema biortogonal para $\mathscr{S}$.

Observación 2.10. Estas definiciones para familias de subespacios son consistentes con las ya dadas para familias de elementos en el sentido siguiente: Dada una familia de subespacios $\mathscr{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisface alguna de las propiedades previas. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos una base ortonormal $\{\varphi_{j,n}\}_{j=1}^{dim(S_n)}$ de S_n entonces la familia $\{\varphi_{j,n}\}_{j,n}$ satisface la propiedad homónima. De forma recíproca si la familia de elementos $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una propiedad entonces la familia de subespacios $\{S_n := \langle\varphi_n\rangle\}_{n\ in\mathbb{N}}$ también la tiene.

Daremos un resultado útil sobre el comportamiento del ángulo entre subespacios y los isomorfismos.

Lema 2.11. *(Pavlov) Sean S, T subespacios de un Hilbert $\mathcal{H}$ y $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un isomorfismo.*
Entonces:

$$sen(\alpha(US, UT)) \geq \left\|U^{-1}\right\|^{-1} \|U\|^{-1} sen(\alpha(S, T)).$$

Demostración. (del lema) Dados $s \in S$, $t \in T$ se tiene:

$$\left\|\frac{Us}{\|Us\|} - Ut\right\| \geq \frac{1}{\|U^{-1}\|} \left\|\frac{s}{\|Us\|} - t\right\| \geq \frac{\|U\|^{-1}}{\|U^{-1}\|} \left\|\frac{s}{\|s\|} - \frac{\|Us\|}{\|s\|}t\right\|.$$

Ahora por el lema 2.6 ítem c) concluimos:

$$sen(\alpha(US, UT)) \geq \frac{\|U^{-1}\|}{\|U\|} sen(\alpha(S, T)).$$

□

A continuación daremos el resultado análogo al teorema de Bari 2.1 para familias de subespacios. Una exposición con más profundidad puede verse en [15]

Teorema 2.2. *Sean $\mathscr{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subespacios minimal de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, sea $E = \overline{Span\{S_n\}}_{n\in\mathbb{N}}$ y $E_n = \overline{Span\{S_j\}}_{j\in\mathbb{N}, j\neq n}$. Son equivalentes:*

- *a) $\mathscr{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de Riesz de E*
- *b) En E las normas $\|.\|_{\mathcal{H}}$ y $(\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(.)\|^2)^{1/2}$ son equivalentes, es decir, existen constantes $m, M > 0$ tales que:*

$$m \|x\|_{\mathcal{H}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(x)\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2} \leq M \|x\|_{\mathcal{H}}.$$

- *c) Existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier partición de la familia inicial $\mathscr{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en dos subfamilias $\mathscr{S}_1$ y $\mathscr{S}_2$ con $\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 = \mathscr{S}$ y $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2 = \emptyset$ si $J_1 := \overline{Span\{S_n\}}_{S_n\in\mathscr{S}_1}$ y $J_2 := \overline{Span\{S_m\}}_{S_m\in\mathscr{S}_2}$ resulta:*

$$\alpha(J_1, J_2) \geq \varepsilon > 0$$

.

Demostración. a) $\Rightarrow$ c) Sea $V : E \to E$ el ortogonalizador de $\mathscr{S}$ como $\mathscr{S}_1$ y $\mathscr{S}_2$ son disjuntas tenemos que $V^{-1}J_1 \perp V^{-1}J_2$. Luego por el lema de Pavlov:

$$\begin{aligned} sen(\alpha(J_1, J_2)) = sen(\alpha(VV^{-1}J_1, VV^{-1}J_2)) &\geq \frac{\|V^{-1}\|}{\|V\|} sen(\alpha(V^{-1}J_1, V^{-1}J_2)) \\ &= \frac{\|V^{-1}\|}{\|V\|}. \end{aligned}$$

y entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(J_1, J_2) \geq \varepsilon > 0$.
c) $\Rightarrow$ b) Notemos que como $\mathscr{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es minimal, existen los proyectores $P_n : E = S_n \oplus E_n \to S_n$ y su sistema biortogonal venía dado por $S'_n = P_n^* S_n$ en particular en E tenemos que $P_n P_m = 0$ si $n \neq m$ y $P_n P_m = P_n$ si $n = m$ de aquí deducimos que:

$$\sum_{j=1}^{N} \|P_j x\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\| \sum_{j=1}^{N} P_j x \right\|_{\mathcal{H}}^2 .$$

Sean $J_N = \overline{Span\{S_j\}}_{j=1}^{N}$ y $L_N = \overline{Span\{S_j\}}_{j>N}$ por hipótesis existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(J_N, L_N) \geq \varepsilon > 0$ para todo $N \in \mathbb{N}$ con lo cual existen proyectores $P_{J_N} : E = J_N \oplus L_N \to J_N$ acotados y tales que $\|P_{J_N}\| = \frac{1}{sen(\alpha(J_N, L_N))}$, se satisface $P_{J_N} x = \sum_{j=1}^{N} P_j x$ y en consecuencia dado $x \in E$ con $\|x\| = 1$ tenemos que:

$$\sum_{j=1}^{N} \|P_j x\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\| \sum_{j=1}^{N} P_j x \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \|P_{J_N}\|^2 = \left(\frac{1}{sen(\alpha(J_N, L_N))} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{sen(\varepsilon)} \right)^2$$

$$\sum_{j=1}^{N} \|P_j x\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\| \sum_{j=1}^{N} P_j x \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \|P_{J_N}\|^2 = \left(\frac{1}{sen(\alpha(J_N, L_N))} \right)^2 \geq 1.$$

Con lo cual las normas son equivalentes.
b) $\Rightarrow$ a) Sean los proyectores $P_n : E = S_n \oplus E_n \to S_n$ como las normas son equivalentes , el operador $T : E \to \ell^2$, $T(x) = \{P_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un isomorfismo

más aún, de la definición de T se sigue que $TS_n \perp TS_m$ para todo $n \neq m$. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y $J : \ell^2 \to \mathcal{H}$ el isomorfismo dado por $J(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, si $S \perp T$ en $\mathcal{H}$ entonces $JS \perp JT$ luego $JP : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un ortogonalizador para $\mathscr{S}$ y luego esta es base de Riesz.

□

Será de ayuda tener un resultado equivalente al ya visto para familias de elementos que nos muestre como se transfieren las propiedades enunciadas por isomorfismos.

Teorema 2.3. *(Invarianza por isomorfismos)*
Sea $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un isomorfismo, sea $T(\mathscr{S}) := \{TS_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ el resultado de aplicar T a la familia de subespacios $\mathscr{S} := \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sean $E = \overline{Span\{S_n\}}_{n\in\mathbb{N}}$ y $E_n = \overline{Span\{S_j\}}_{j\in\mathbb{N}, j\neq n}$ entonces:

- *a) $T(\mathscr{S})$ es minimal $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{S}$ es minimal.*
- *b) $T(\mathscr{S})$ es minimal uniforme $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{S}$ es minimal uniforme.*
- *c) $T(\mathscr{S})$ es base de Riesz de $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{S}$ es Base de Riesz.*
- *d) $T(\mathscr{S})$ es base $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{S}$ es base.*

Demostración. a) Para ver que $T\mathscr{S}$ es minimal debemos ver que existen proyectores
$Q_n : TE \to TS_n$ paralelos a TE_n. Como $\mathscr{S}$ es minimal existen proyectores acotados $P : E \to S_n$ paralelos a S_n y en particular (por el lema (1.8)) $\alpha(S_n, E_n) > 0$. Como $S_n \cap E_n = \{0\}$ y T es un isomorfismo entonces $TS_n \cap TE_n = \{0\}$ y luego podemos tomar $Q_n := TP_n$ que está bien definido y $TP_n : TE \to TS_n$ paralelo a TE_n. Para ver que es acotado por el lema de Pavlov tenemos que:

$$sen(\alpha(TS_n, TE_n)) \geq \frac{\|T^{-1}\|}{\|T\|} sen(\alpha(S_n, E_n)) > 0$$

y en consecuencia $\alpha(TS_n, TE_n) > 0$ nuevamente por el lema (1.8) concluimos que los operadores Q_n son acotados, es decir $T\mathscr{S}$ es minimal .
b) Solo debemos ver la cota, como $\mathscr{S}$ es minimal por el lema (1.8) vimos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tenía que que $\|P_n\| = \frac{1}{sen(\alpha(S_n,E_n))}$ entonces de la uniformidad se deduce que existe $M > 0$ tal que $M \geq \frac{1}{sen(\alpha(S_n,E_n))}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ luego usando el lema de Pavlov tenemos :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|Q_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{sen(\alpha(TS_n, TE_n))} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|T^{-1}\|^{-1}}{\|T\|^{-1}} \frac{1}{sen(\alpha(S_n, E_n))} \leq \frac{\|T^{-1}\|^{-1}}{M\,\|T\|^{-1}}$$

Luego $T\mathscr{S}$ es minimal uniforme.
c) Si $\mathscr{S}$ es base de Riesz y V es un ortgonalizador, tomando $V' = TV$ entonces $V'^{-1}TS_n = (TV)^{-1}TS_n = V^{-1}T^{-1}TS_n = V^{-1}S_n$ con lo cual V' es un ortogonalizador para $\{TS_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Luego $T\mathscr{S}$ es base de Riesz.
d) El resultado se deduce de que $E = \mathcal{H}$ y en consecuencia: $TE = T\mathcal{H} = \mathcal{H}$.
$\square$

A continuación definiremos el producto tensorial entre espacios de Hilbert y mostraremos algunas propiedades clásicas.

Definición 2.11. Sea $\mathcal{H}$ y $\mathscr{H}$ dos $\mathbb{C}$-espacios de Hilbert. Definimos $\mathcal{H}\otimes\mathscr{H}$ el *producto tensorial algebraico* entre los espacios $\mathcal{H}$ y $\mathscr{H}$ que se construye de la siguiente manera. Consideremos el espacio vectorial formado por el conjunto de pares

$$(\mathcal{H},\mathscr{H}) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j(h_j, v_j) : c_j \in \mathbb{C}, h_j \in \mathcal{H}, v_j \in \mathscr{H}, j = 1...n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sea N el subespacio de $(\mathcal{H},\mathscr{H})$ generado por los elementos de la forma:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_j d_k (h_j, v_k) - 1 \times \left(\sum_{j=1}^{n} c_j h_k, b_k v_k \right).$$

Donde en la expresión previa la notación $1 \times \left(\sum_{j=1}^{n} c_j h_k, b_k v_k\right)$ representa al par $\left(\sum_{j=1}^{n} c_j h_k, b_k v_k\right)$ con coeficiente 1.
El producto tensorial algebraico $\mathcal{H}\otimes\mathscr{H}$ consiste entonces en el cociente:

$$(\mathcal{H},\mathscr{H})/N.$$

Observación 2.11. El producto $\mathcal{H}\times\mathscr{H}$ puede pensarse como un subconjunto de $(\mathcal{H},\mathscr{H})$ identificando los pares del producto usual (h, v) con el elemento $1(h, v) \in (\mathcal{H},\mathscr{H})$.

A la clase de equivalencia de un elemento (h, v) la notaremos $h \otimes v$ y los llamaremos tensores simples. Todo elemento de $\mathcal{H}\otimes\mathscr{H}$ puede representarse como una combinación lineal finita de tensores simples. Notemos que una combinación de este estilo es igual a cero solo si es una suma finita de elementos de la forma:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_j b_k h_j \otimes v_k - \left(\sum_{j=1}^{n} c_j h_j\right) \otimes \left(\sum_{k=1}^{m} b_k v_k\right).$$

En particular se tiene la siguiente igualdad:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j h_j\right) \otimes \left(\sum_{k=1}^{m} b_k v_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_j b_k h_j \otimes v_k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} h_j \otimes c_j b_k v_k.$$

Observación 2.12. Sean $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $\{l_\beta\}_{\beta\in J}$ bases ortonormales de $\mathcal{H}$ y $\mathscr{H}$ respectivamente, entonces dada $f = \sum_{j=1}^{n} c_j h_j \otimes v_j$ podemos representarla como:

$$f = \sum_{\beta} h_\beta \otimes l_\beta = \sum_{\alpha} e_\alpha \otimes v_\alpha$$

donde $h_\beta \in Span\{h_j\}_{j=1}^{j=m}$ y $v_\alpha \in Span\{v_j\}_{j=1}^{j=m}$.

Notaremos $\langle,\rangle_{\mathcal{H}}$ y $\langle,\rangle_{\mathscr{H}}$ al producto interno de $\mathcal{H}$ y $\mathscr{H}$ respectivamente y definimos un producto en $\mathcal{H}\otimes\mathscr{H}$ dado por :

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} c_j h_j \otimes v_j, \sum_{k=1}^{m} d_k h_k \otimes v_k \right\rangle := \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \overline{c_j} d_k \langle h_j, h_k\rangle_{\mathcal{H}} \langle v_j, v_k\rangle_{\mathscr{H}}.$$

De esta manera la norma de un elemento $f = \sum_{j=1}^{n} c_j h_j \otimes v_j$ resulta:

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} c_j h_j \otimes v_j \right\|^2_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{c_j} c_k \langle h_j, h_k\rangle_{\mathcal{H}} \langle v_j, v_k\rangle_{\mathscr{H}}.$$

Puede verse que esta aplicación resulta un producto interno en $\mathcal{H}\otimes\mathscr{H}$.(Ver [19] capítulo 3) En consecuencia el espacio $\mathcal{H}\otimes\mathscr{H}$ resulta un pre-Hilbert, llamaremos *producto tensorial completo* a la completación del espacio $\mathcal{H}\otimes\mathscr{H}$ y lo notaremos $\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$.
Para el espacio $\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$ tenemos las siguientes propiedades que pueden verse en [19].

Proposición 2.3. *Sean $\mathcal{H}$ y$\mathscr{H}$ dos espacios de Hilbert y consideremos el espacio $\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$ entonces:*

- *Sean $M_{\mathcal{H}}$ y $M_{\mathscr{H}}$ dos conjuntos completos en $\mathcal{H}$ y $\mathscr{H}$ respectivamente entonces el conjunto $\{h\otimes v : h\in M_{\mathcal{H}}, v\in M_{\mathscr{H}}\}$ es completo en $\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$.*
- *Si $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $\{l_\beta\}_{\beta\in J}$ son bases ortonormales de $\mathcal{H}$ y $\mathscr{H}$ respectivamente entonces $\{e_\alpha\otimes l_\beta, \alpha\in I, \beta\in J\}$ es base ortonormal de $\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$.*
- *Se tiene que $(dim\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}) = (dim\mathcal{H})(dim\mathscr{H})$ (dimensión como espacios de Hilbert).*

- *Si $\mathcal{H} \neq \{0\}$ y $\mathscr{H} \neq \{0\}$ entonces $\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$ es separable si y solo si $\mathcal{H}$ y $\mathscr{H}$ son separables.*

- *El espacio $\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$ es completo si y solo si $\mathcal{H}$ o $\mathscr{H}$ son de dimension finita.*

Supongamos ahora que el espacio $\mathscr{H}$ es separable y sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal numerable. Dada $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n h_n \otimes e_n \in \mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$ podemos calcular su norma de forma más sencilla haciendo directamente:

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \, \|h_n\|^2_{\mathcal{H}} .$$

De forma análoga si el separable resulta el espacio $\mathcal{H}$ con base ortonormal $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podemos calcular la norma de $f = \sum_{n=1}^{\infty} l_n \otimes c_n v_n$ como:

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \, \|v_n\|^2_{\mathscr{H}} .$$

A continuación estudiaremos la noción de ángulo entre subespacios previamente definida en el caso de que el espacio sea un producto tensorial entre dos espacios de Hilbert que asumiremos separables.

Definición 2.12. Dado S un subespacio de $\mathscr{H}$ y $\varphi \in \mathcal{H}$ definimos:
$\varphi \otimes S := \{\varphi \otimes s, s \in S\} \subset \mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$ subespacio.

Lema 2.12. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de elementos en $\mathcal{H}$ distintos de cero y sea $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subespacios de $\mathscr{H}$ también distintos de cero. Sean $\mathscr{M} \subset \mathbb{N}$, $\mathscr{N} \subset \mathbb{N}$ dos subconjuntos. Consideremos los subespacios:*

$\mathscr{H}_n := \varphi_n \otimes \mathscr{H} \subset \mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$
$\mathscr{H}_{\mathscr{M}} := \overline{Span\{\mathscr{H}_m\}}_{m\in\mathscr{M}} \subset \mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$, $\mathscr{H}_{\mathscr{N}} := \overline{Span\{\mathscr{H}_n\}}_{n\in\mathscr{N}} \subset \mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$
$\mathcal{H}_{\mathscr{M}} := \overline{Span\{\varphi_m\}}_{m\in\mathscr{M}} \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{\mathscr{N}} := \overline{Span\{\varphi_n\}}_{n\in\mathscr{N}} \subset \mathcal{H}$
$\mathscr{S}_{\mathscr{M}} := \overline{Span\{\varphi_m \otimes S_m\}}_{m\in\mathscr{M}} \subset \mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$, $\mathscr{S}_{\mathscr{N}} := \overline{Span\{\varphi_n \otimes S_n\}}_{n\in\mathscr{N}} \subset \mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$
$S_{\mathscr{M}} := \overline{Span\{S_m\}}_{m\in\mathscr{M}} \subset \mathscr{H}$, $S_{\mathscr{N}} := \overline{Span\{S_n\}}_{n\in\mathscr{N}} \subset \mathscr{H}$.

Entonces:

- *a)* $\alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}}, \mathscr{H}_{\mathscr{N}}) = \alpha_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_{\mathscr{M}}, \mathcal{H}_{\mathscr{N}})$

- *b)* $\alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}(\mathscr{S}_{\mathscr{M}}, \mathscr{S}_{\mathscr{N}}) \geq \alpha_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_{\mathscr{M}}, \mathcal{H}_{\mathscr{N}})$

- *c)* $\alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}(\mathscr{S}_{\mathscr{M}}, \mathscr{S}_{\mathscr{N}}) \geq \alpha_{\mathscr{H}}(S_{\mathscr{M}}, S_{\mathscr{N}})$

Demostración. a) Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathscr{H}$, dado $\eta = \sum_{j=1}^{\infty} \eta^{(j)} e_j \in \mathscr{H}$ por el lema 2.6 ítem c) tenemos:

$$sen^2(\alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}}, \mathscr{H}_{\mathscr{N}})) =$$

$$= \inf_{\eta_m\in\mathscr{H}, \eta_n\in\mathscr{H}, \left\|\sum_m \varphi_m\otimes\eta_m\right\|_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}=1} \left\| \sum_{m\in\mathscr{M}} \varphi_m \otimes \eta_m - \sum_{n\in\mathscr{N}} \varphi_n \otimes \eta_n \right\|^2_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}$$

$$= \inf_{\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2=1} \sum_{j=1}^{\infty} \inf_{\left\|\sum_m \eta_m^{(j)}\varphi_m\right\|^2_{\mathcal{H}}=a_j^2, \eta_m^{(j)}\in\mathbb{C}, \eta_n^{(j)}\in\mathbb{C}} \left\| \sum_{m\in\mathscr{M}} \varphi_m \eta_m^{(j)} - \sum_{n\in\mathscr{N}} \varphi_n \eta_n^{(j)} \right\|^2_{\mathcal{H}}$$

$$= \inf_{\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2=1} \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \inf_{\left\|\sum_m \phi_m\right\|_{\mathcal{H}}=1, \phi_m\in\mathcal{H}_{\mathscr{M}}, \phi_n\in\mathcal{H}_{\mathscr{N}}} \left\| \sum_{m\in\mathscr{M}} \phi_m - \sum_{n\in\mathscr{N}} \phi_n \right\|^2_{\mathcal{H}}$$

$$= \inf_{\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2=1} \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 sen^2(\alpha_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_{\mathscr{M}}, \mathcal{H}_{\mathscr{N}})) = sen^2(\alpha_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_{\mathscr{M}}, \mathcal{H}_{\mathscr{N}}))$$

y concluimos $\alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}}, \mathscr{H}_{\mathscr{N}}) = \alpha_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_{\mathscr{M}}, \mathcal{H}_{\mathscr{N}})$.
b) Por el lema 2.6 ítem c) y el inciso a) tenemos que

$$sen^2(\alpha_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_{\mathscr{M}}, \mathcal{H}_{\mathscr{N}})) = sen^2(\alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}}, \mathscr{H}_{\mathscr{N}}))$$

$$= \inf_{\eta_m\in\mathscr{H}, \eta_n\in\mathscr{H}, \left\|\sum_m \varphi_m\otimes\eta_m\right\|_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}=1, n\in\mathscr{N}, m\in\mathscr{M}} \left\| \sum_{m\in\mathscr{M}} \varphi_m \otimes \eta_m - \sum_{n\in\mathscr{N}} \varphi_n \otimes \eta_n \right\|^2_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}$$

$$\leq \inf_{\eta_m\in S_m, \eta_n\in S_n, \left\|\sum_m \varphi_m\otimes\eta_m\right\|_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}=1, n\in\mathscr{N}, m\in\mathscr{M}} \left\| \sum_{m\in\mathscr{M}} \varphi_m \otimes \eta_m - \sum_{n\in\mathscr{N}} \varphi_n \otimes \eta_n \right\|^2_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}$$

$$= sen^2(\alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}(\mathscr{S}_{\mathscr{M}}, \mathscr{S}_{\mathscr{N}}))$$

y luego $\alpha_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_{\mathscr{M}}, \mathcal{H}_{\mathscr{N}}) \leq \alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}(\mathscr{S}_{\mathscr{M}}, \mathscr{S}_{\mathscr{N}})$.
c) Sea $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Para cada n y m en $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ respectivamente escribimos $\varphi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n^{(k)} h_k$ y $\varphi_m = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_m^{(k)} h_k$.
Luego repitiendo el procedimiento realizado en el item a):

$$sen^2(\alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}}, \mathscr{H}_{\mathscr{N}})) =$$

$$= \inf_{\eta_m\in\mathscr{H}, \eta_n\in\mathscr{H}, \left\|\sum_m \varphi_m\otimes\eta_m\right\|_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}=1} \left\| \sum_{m\in\mathscr{M}} \varphi_m \otimes \eta_m - \sum_{n\in\mathscr{N}} \varphi_n \otimes \eta_n \right\|^2_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}$$

$$= \inf_{\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2=1} \sum_{j=1}^{\infty} \inf_{\left\|\sum_m \varphi_m^{(j)}\eta_m\right\|_{\mathscr{H}}^2=a_j^2} \left\| \sum_{m\in\mathscr{M}} \varphi_m^{(j)}\eta_m - \sum_{n\in\mathscr{N}} \varphi_m^{(j)}\eta_n \right\|_{\mathscr{H}}^2$$

$$= \inf_{\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2=1} \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \inf_{\left\|\sum_m \phi_m\right\|_{\mathscr{H}}=1, \phi_m\in S_{\mathscr{M}}, \phi_n\in S_{\mathscr{N}}} \left\| \sum_{m\in\mathscr{M}} \phi_m - \sum_{n\in\mathscr{N}} \phi_n \right\|_{\mathscr{H}}^2$$

$$= \inf_{\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2=1} \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 sen^2(\alpha_{\mathscr{H}}(S_{\mathscr{M}}, S_{\mathscr{N}})) = sen^2(\alpha_{\mathscr{H}}(S_{\mathscr{M}}, S_{\mathscr{N}}))$$

y concluimos $\alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}}, \mathscr{H}_{\mathscr{N}}) = \alpha_{\mathscr{H}}(S_{\mathscr{M}}, S_{\mathscr{N}})$ y finalmente por el item b) $\alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}(\mathscr{S}_{\mathscr{M}}, \mathscr{S}_{\mathscr{N}}) \geq \alpha(S_{\mathscr{M}}, S_{\mathscr{N}})$.

□

Como consecuencia del lema previo se tiene el siguiente resultado importante a la hora de decidir si una familia de subespacios del producto tensorial posee alguna de las propiedades que trabajamos antes.

Corolario 2.1. *Sea $\mathscr{F} := \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de elementos de un espacio $\mathcal{H}$ tal que existen $m, M > 0$ y se cumple:*
$m \leq \|\varphi_n\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sea $\mathscr{F}_{\mathscr{H}} := \{\varphi_n \otimes \mathscr{H}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subespacios de $\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$,$\mathscr{S} := \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subespacios de $\mathscr{H}$ distintos de cero y $\mathscr{F}_{\mathscr{S}} := \{\varphi_n \otimes S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subespacios de $\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}$. Entonces:

- *a) $\mathscr{F}$ es base de Riesz $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}$ es base de Riesz.*
- *b) $\mathscr{F}$ es minimal uniforme $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}$ es minimal uniforme.*
- *c) $\mathscr{F}$ es minimal $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}$ es minimal.*
- *d) $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}$ es base de Riesz $\Rightarrow$ $\mathscr{F}_{\mathscr{S}}$ es base de Riesz.*
- *e)$\mathscr{F}_{\mathscr{H}}$ es minimal uniforme $\Rightarrow$ $\mathscr{F}_{\mathscr{S}}$ es minimal uniforme.*
- *f)$\mathscr{F}_{\mathscr{H}}$ es minimal $\Rightarrow$ $\mathscr{F}_{\mathscr{S}}$ es minimal.*

Demostración. a) $\Rightarrow$ Si $\mathscr{F}$ es base de Riesz entonces también lo es la familia de subespacios $\{\langle\varphi_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por el teorema 2.2 existe $\varepsilon > 0$ tal que dados $\mathscr{M} \subset \mathbb{N}$ y $\mathscr{N} \subset \mathbb{N}$ que cumplen $\mathscr{M} \cup \mathscr{N} = \mathbb{N}, \mathscr{M} \cap \mathscr{N} = \emptyset$ resulta:

$$\alpha(\overline{Span\{\varphi_m\}}_{m\in\mathscr{M}}, \overline{Span\{\varphi_n\}}_{n\in\mathscr{N}}) \geq \varepsilon > 0.$$

Ahora por el lema 2.12 tenemos que

$$\begin{aligned}&\alpha(\overline{Span\{\varphi_n \otimes \mathscr{H}\}}_{n\in\mathscr{N}}, \overline{Span\{\varphi_m \otimes \mathscr{H}\}}_{m\in\mathscr{M}})\\ &\qquad = \alpha(\overline{Span\{\varphi_m\}}_{m\in\mathscr{M}}, \overline{Span\{\varphi_n\}}_{n\in\mathscr{N}}) \geq \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Con lo cual nuevamente por el teorema 2.2 concluimos que $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}$ es base de Riesz.

$\Leftarrow$ Con los mismos lineamientos que en la implicación anterior, tenemos que si $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}$ es base de Riesz entonces:

$$\begin{aligned}&\alpha(\overline{Span\{\varphi_m\}}_{m\in\mathscr{M}}, \overline{Span\{\varphi_n\}}_{n\in\mathscr{N}})\\ &\qquad = \alpha(\overline{Span\{\varphi_n \otimes \mathscr{H}\}}_{n\in\mathscr{N}}, \overline{Span\{\varphi_m \otimes \mathscr{H}\}}_{m\in\mathscr{M}}) \geq \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

y luego por el teorema 2.2 $\mathscr{F}$ es base de Riesz.

b) $\Rightarrow$ Supongamos que $\mathscr{F}$ es minimal uniforme, entonces la familia de subespacios $\{\langle\varphi_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es minimal uniforme con lo cual existen proyectores:

$P_n : \langle\varphi_n\rangle \oplus \overline{Span\{\varphi_m\}}_{m\in\mathbb{N}, m\neq n} \to \langle\varphi_n\rangle$ acotados y una constante $C > 0$ de modo que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| \leq C$.

Como:

$$\|P_n\| = \frac{1}{sen(\alpha(\langle\varphi_n\rangle, \overline{Span\{\varphi_m\}}_{m\in\mathbb{N}, m\neq n}))}$$

tenemos que por el lema 2.12

$$sen(\alpha(\langle\varphi_n\rangle, \overline{Span\{\varphi_m\}}_{m\in\mathbb{N}, m\neq n})) = sen(\alpha(\varphi_n \otimes \mathscr{H}, \overline{Span\{\varphi_m \otimes \mathscr{H}\}}_{m\in\mathbb{N}, m\neq n}))$$

y como vale la estimación

$$\frac{1}{C} \leq sen(\alpha(\varphi_n \otimes \mathscr{H}, \overline{Span\{\varphi_m \otimes \mathscr{H}\}}_{m\in\mathbb{N}, m\neq n}))$$

concluimos que $\alpha(\varphi_n \otimes \mathscr{H}, \overline{Span\{\varphi_m \otimes \mathscr{H}\}}_{m\in\mathbb{N}, m\neq n}) > 0$. Ahora por el lema 2.9 existen proyectores:

$$Q_n : \varphi_n \otimes \mathscr{H} \oplus \overline{Span\{\varphi_m \otimes \mathscr{H}\}}_{m\in\mathbb{N}, m\neq n} \to \varphi_n \otimes \mathscr{H}$$

uniformemente acotados y en consecuencia $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}$ es minimal uniforme.

$\Leftarrow$ Si $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}$ es minimal uniforme existen los proyectores Q_n y en particular $C > 0$ tal que:

$$\frac{1}{C} \leq sen(\alpha(\varphi_n \otimes \mathscr{H}, \overline{Span\{\varphi_m \otimes \mathscr{H}\}}_{m\in\mathbb{N}, m\neq n})) = sen(\alpha(\langle\varphi_n\rangle, \overline{Span\{\varphi_m\}}_{m\in\mathbb{N}, m\neq n}))$$

en particular se tiene que $\alpha(\langle\varphi_n\rangle, \overline{Span\{\varphi_m\}}_{m\neq n}) > 0$ y como se satisfacen las hipótesis de la observación 2.8 existen los proyectores

$$P_n : \langle\varphi_n\rangle \oplus \overline{Span\{\varphi_m\}}_{m\in\mathbb{N}, m\neq n} \to \langle\varphi_n\rangle$$

que resultan uniformemente acotados y en consecuencia $\mathscr{F}$ es minimal uniforme.

c) De la definición y el hecho de que:

$$\alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}}, \mathscr{H}_{\mathscr{N}}) > 0 \Longleftrightarrow \alpha_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_{\mathscr{M}}, \mathcal{H}_{\mathscr{N}}) > 0.$$

Se tiene que $\mathscr{F}$ es minimal $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}$ lo es.

d) Sean $\mathscr{M} \subset \mathbb{N}$ y $\mathscr{N} \subset \mathbb{N}$ tales que $\mathscr{M} \cup \mathscr{N} = \mathbb{N}, \mathscr{M} \cap \mathscr{N} = \emptyset$. Como $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}$ es base de Riesz existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H})}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}}, \mathscr{H}_{\mathscr{N}}) \geq \varepsilon > 0$ luego por el lema 2.12 :

$$\alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}(\mathscr{S}_{\mathscr{M}}, \mathscr{S}_{\mathscr{N}}) \geq \alpha_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_{\mathscr{M}}, \mathcal{H}_{\mathscr{N}}) \geq \varepsilon > 0$$

y nuevamente por el teorema 2.2 $\mathscr{F}_{\mathscr{S}}$ es base de Riesz.

e) Si $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}$ es minimal uniforme entonces existen proyectores

$$P_n : \langle\varphi_n \otimes S_n\rangle \oplus \overline{Span\{\varphi_m \otimes S_m\}}_{m\in\mathbb{N}, m\neq n} \to \langle\varphi_n \otimes S_n\rangle.$$

Estos proyectores serán acotados ya que

$$\alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}(\mathscr{S}_{\mathscr{M}}, \mathscr{S}_{\mathscr{N}}) \geq \alpha_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_{\mathscr{M}}, \mathcal{H}_{\mathscr{N}}) > 0$$

y luego la familia $\mathscr{F}_{\mathscr{S}}$ es minimal. Para chequear la uniformidad basta computar:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{sen(\alpha_{\mathcal{H}\overline{\otimes}\mathscr{H}}(\mathscr{S}_{\mathscr{M}}, \mathscr{S}_{\mathscr{N}}))} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{sen(\alpha_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_{\mathscr{M}}, \mathcal{H}_{\mathscr{N}}))} \leq C.$$

Donde la constante C existe por la minimalidad uniforme de la familia $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}$.

f) La demostración está contenida en la demostración del ítem e). □

Observación 2.13. El resultado anterior es de gran importancia ya que para decidir si una familia de subespacios del producto tensorial satisface alguna de las propiedades enunciadas anteriormente alcanzará con analizar si la familia de los coeficientes en alguno de los espacios que componen el producto la satisface.

2.3. El problema de los momentos

En esta parte estudiaremos en abstracto el problema de los momentos. A lo largo de la sección daremos condiciones necesarias para que el problema tenga solución que vendrán dadas en términos de las propiedades que cumpla la familia $\mathscr{F}$ involucrada. Los resultados que expondremos pueden verse en [2].

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de elementos arbitraria en $\mathcal{H}$. Definimos el operador de los momentos $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}$ como:

$$\mathcal{P}_{\mathscr{F}} : D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}) \subset \mathcal{H} \to \ell^2, \;\; \mathcal{P}_{\mathscr{F}}(f) = \{\langle f, \varphi_n\rangle_{\mathcal{H}}\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

El dominio de este operador es

$$D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}) = \{f \in \mathcal{H}/\{\langle f, \varphi_n\rangle_{\mathcal{H}}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\}.$$

El problema de los momentos consiste en:
Dada una sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ decidir si el operador de los momentos es sobreyectivo, es decir, determinar si existe $f \in \mathcal{H}$ (y hallarla si es posible) tal que $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}(f) = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en otras palabras , determinar si $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}})$.

Observación 2.14. El operador $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}$ es cerrado pues si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ entonces como cada coordenada:

$$\langle f_n, \varphi_k\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{resulta} \;\; \{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} = 0$$

Observación 2.15. Si la familia $\mathscr{F}$ no es completa en $\mathcal{H}$ definiendo $V := \overline{Span\{\varphi_n\}}_{n\in\mathbb{N}}$, tenemos que $\mathcal{H} = V \oplus V^{\perp}$ con lo cual el operador $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}$ tiene núcleo no trivial $V^{\perp}$.
Consideremos el operador $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}$ restringido a V , $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V : D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}) \cap V \to \ell^2$, este nuevo operador es un isomorfismo con su imagen y además como $Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}) = Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V)$ para estudiar la resolubilidad de un problema de los momentos alcanzara con estudiar la imagen del operador $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V$ que es inversible, cerrado como $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}$ y además su inverso $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1}$ también es cerrado ya que si:

$$\{\langle f_n, \varphi_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \;\in \ell^2 \;\; \text{y} \;\; f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \;\in V$$

resulta $\langle f, \varphi_k\rangle = 0 \;\; \forall k \in \mathbb{N}$ y entonces $f = 0$

A continuación enunciaremos y demostraremos un resultado que nos permitirá caracterizar la resolubilidad de un problema de los momentos en términos de las propiedades de la familia $\mathscr{F}$ asociada.

Teorema 2.4. *(Resolubilidad) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia, $V := \overline{Span\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la base estándar de ℓ^2 y $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}$ el operador de los momentos $\mathcal{P}_{\mathscr{F}} : D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}) \to \ell^2$ entonces:*

- *a) El operador $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V$ es un isomorfismo entre V y $\ell^2 \iff$ La familia $\mathscr{F}$ es base de Riesz de V. En particular si $\mathscr{F}$ es base de Riesz de V resulta $Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}) = \ell^2$.*
- *b) $Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}) = \ell^2 \Rightarrow \mathscr{F}$ es minimal uniforme.*
- *c) La familia $\mathscr{F}$ es minimal $\iff$ La base estándar de ℓ^2: $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está incluida en $Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}})$.*
- *d) $\overline{Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}})} = \ell^2 \iff$ La familia $\mathscr{F}$ es $W - l.i.$.*

Demostración. a) $\Rightarrow$ Si $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V$ es un isomorfismo entre V y ℓ^2 entonces por el lema 2.2 la familia $\{\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1}(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz de V.
Como:

$$\{\langle \mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1}(e_n), \varphi_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}} = \mathcal{P}_{\mathscr{F}}\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1}(e_n) = \mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1}e_n = e_n$$

entonces $\mathscr{F}$ es un sistema biortogonal para $\{\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1}(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenido en V, luego por el teorema de Bari (teorema 2.1 a)) $\mathscr{F}$ es base de Riesz de V.

$\Leftarrow$ Debemos ver que $Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V) = \ell^2$. Si $\mathscr{F}$ es base de Riesz de V y $\mathscr{F}' = \{\varphi'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ su sistema biortogonal ,$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de V y $T : V \to V$ el ortogonalizador que cumple $T(\phi_n) = \varphi_n$ dada $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ por (2.1) podemos tomar $f \in V$ de la forma $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n$ entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V((T^{-1})^*f) &= \mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(T^{-1})^*\phi_n\right) \\
&= \mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi'_n\right) \\
&= \left\{\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi'_n, \varphi_k\right\rangle\right\}_{k\in\mathbb{N}} = \{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

y entonces $Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V) = \ell^2$.

Observación 2.16. Notemos en este caso que si $\mathscr{F}$ es base de Riesz de V entonces $D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}) = \mathcal{H}$ ya que podemos descomponer $\mathcal{H} = V \oplus V^{\perp}$.

b) Como $Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}) = \ell^2$, los elementos $\varphi'_n = \mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1} e_n$ existen en V y como se vio en a) resultan un sistema biortogonal para $\mathscr{F}$. Por el teorema de gráfico cerrado el operador es $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1}$ es acotado y en consecuencia:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi'_n\| \leq \left\|\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1}\right\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \|e_n\|_{\ell^2} = \left\|\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1}\right\| < \infty,$$

luego $\mathscr{F}$ es minimal uniforme.

c) $\Rightarrow$ Si $\mathscr{F}$ es minimal y $\mathscr{F}' = \{\varphi'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es su sistema biortogonal, por definición:

$$\mathcal{P}_{\mathscr{F}}(\varphi'_n) = \{\langle \varphi'_n, \varphi_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}} = e_n.$$

$\Leftarrow$ Como antes los elementos $\varphi'_n = \mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1} e_n$ existen en V y son un sistema biortogonal para $\mathscr{F}$, luego la familia es minimal.

d) $\Rightarrow$ Supongamos que $\mathscr{F}$ no es $W-l.i.$, existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ distinta de cero tal que para toda $f \in D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}})$ se tiene

$$\left\langle f, \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}})^{\perp}$. Efectivamente para toda $f \in D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}})$:

$$\langle \mathcal{P}_{\mathscr{F}} f, a_n\rangle_{\ell^2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (\mathcal{P}_{\mathscr{F}} f)_n \overline{a_n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle f, \varphi_n\rangle\, \overline{a_n} = \lim_{N\to\infty} \left\langle f, \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\rangle = 0$$

y luego $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 0$.

$\Leftarrow$ Si $\overline{Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}})} \neq \ell^2$ entonces tomamos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}})}^{\perp}$ distinta de cero y como para toda $f \in D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}})$ resulta:

$$\langle \mathcal{P}_{\mathscr{F}} f, a_n\rangle_{\ell^2} = 0 \text{ entonces } \lim_{N\to\infty} \left\langle f, \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\rangle = 0$$

y $\mathscr{F}$ no es $W-l.i.$ $\square$

Veamos algunos ejemplos donde el problema de los momentos tiene solución.

Ejemplo 2.6. Consideremos el problema de los momentos asociado a la familia $\mathscr{F}$ del ejemplo (1.4). Como $D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}) = \{f \in \mathcal{H}/f \perp \varphi_0\}$ tenemos que: dada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ tomamos $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n \in D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}})$ y $\mathcal{P}_{\mathscr{F}} f = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esto nos da un ejemplo de un problema de los momentos que es resoluble con una familia que no es base de Riesz.
Si tomamos la familia del ejemplo (1.3) que es $W - l.i$ pero no minimal nos muestra que puede darse $\overline{Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}})} = \ell^2$ sin que la base estándar de ℓ^2 este contenida en $Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}})$.

En general dada una familia $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con sistema biortogonal $\mathscr{F}' = \{\varphi_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un elemento $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ una solución formal al problema de los momentos $\mathcal{P}_{\mathscr{F}} f = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la siguiente :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n'.$$

Si esta serie converge entonces:

$$\mathcal{P}_{\mathscr{F}} f = \{\langle f, \varphi_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

El siguiente resultado nos dará una forma de identificar cuando esta solución formal es una solución correcta al problema.

Teorema 2.5. *Sea $\mathcal{H}$ un Hilbert, $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia minimal con sistema biortogonal $\mathscr{F}' = \{\varphi_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ entonces:*

- *a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}) \iff$ Existe $f \in \mathcal{H}$ tal que:*

$$\left\langle \sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n', g \right\rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} \langle f, g\rangle.$$

  Para cada combinación lineal finita $g = \sum_{j=1}^{M} c_j\varphi_j$.

- *b) Si $Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}) = \ell^2$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n'$ converge a una $f \in \mathcal{H}$ y $\mathcal{P}_{\mathscr{F}} f = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. a) $\Rightarrow$ Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}})$ entonces existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $\mathcal{P}_{\mathscr{F}} f = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $g = \sum_{j=1}^{M} c_j\varphi_j$ entonces si $N > M$:

$$\left\langle \sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n', g \right\rangle = \sum_{n=1}^{M} a_n\overline{c_n} = \sum_{n=1}^{M} \langle f, \varphi_n\rangle\overline{c_n} = \left\langle f, \sum_{j=1}^{M} c_j\varphi_j \right\rangle = \langle f, g\rangle.$$

$\Leftarrow$ Supongamos que existe $f \in \mathcal{H}$ tal que para cualquier g de la forma $g = \sum_{j=1}^{M} c_j \varphi_j$ vale:

$$\left\langle \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi'_n, g \right\rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} \langle f, g \rangle$$

entonces tomando $g = \varphi_j$ resulta que para $N > j$, $\langle \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi'_n, \varphi_j \rangle = a_j$ y en consecuencia $\langle f, \varphi_j \rangle = a_j$. Luego $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}})$.

b) El resultado se sigue del hecho que el operador $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1}$ es acotado y que para cada $N \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1}(\{a_j\}_{j=1}^{N}) = \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi'_j.$$

□

Observación 2.17. El teorema anterior nos muestra que si la serie $\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi'_n$ converge débil en $\mathcal{H}$ entonces tomar $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi'_n$ nos da una solución al problema de los momentos $\mathcal{P}_{\mathscr{F}} f = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ahora mostraremos un corolario del teorema que nos permitirá decidir cuando un problema de los momentos es resoluble en base a estimaciones de las normas de la familia biortogonal.

Corolario 2.2. *Sea $\mathcal{H}$ un Hilbert, $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia minimal con sistema biortogonal $\mathscr{F}' = \{\varphi'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces:*

a) Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, \|\varphi'_n\| < \infty \Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}})$.

b) Si existe $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \, \|\varphi'_n\|^2 = \infty$ entonces $Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}) \neq \ell^2$.

Demostración. a) Como la suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi'_n$ converge en norma entonces también lo hace en forma débil, luego por la observación previa se tiene el enunciado.

b) Para mostrar este ítem necesitaremos un lema previo.

Lema 2.13. *(Orlicz) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{x_1, ...x_N\}$ una familia finita de elementos de $\mathcal{H}$, entonces*

$$\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2 \leq \text{máx} \left\{ \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right\|^2 / \, |a_n| = 1, n = 1, ..., n = N \right\}.$$

Demostración. (del lema) Hacemos inducción en N de la siguiente afirmación:
Dados $\{x_1, ...x_N\} \subset \mathcal{H}$ existen $\{a_1, ...a_N\}$ de modulo 1 de modo que:

$$\sum_{1\leq i<j\leq N} \operatorname{Re}\left(a_i\overline{a_j}\langle x_i, x_j\rangle\right) \geq 0.$$

Para $N = 1$ no hay nada que probar, para $N = 2$ tomando $a_2 = 1$ solo hay que elegir un valor de a_1 con modulo 1 tal que $\operatorname{Re}\left(\langle a_1x, y\rangle\right) \geq 0$. El paso inductivo resulta de tomar los del paso $N - 1$, $a_2, ..., a_N$ de manera que

$$\sum_{2\leq i<j\leq N} \operatorname{Re}\left(a_i\overline{a_j}\langle x_i, x_j\rangle\right) \geq 0$$

y luego elegir a_1 de modo que $\operatorname{Re}\left(\left\langle a_1x_1, \sum_{j=2}^N a_jx_j\right\rangle\right) \geq 0$ ya que

$$\sum_{1\leq i<j\leq N} \operatorname{Re}\left(\langle a_ix_i, a_jx_j\rangle\right) = \operatorname{Re}\left(\left\langle a_1x_1, \sum_{j=2}^N a_jx_j\right\rangle\right) + \sum_{2\leq i<j\leq N} \operatorname{Re}\left(\langle a_ix_i, a_jx_j\rangle\right)$$

y cada sumando es mayor o igual que cero.
Finalmente para la demostración del lema, dados $\{x_1, ...x_N\}$ elegimos $\{a_1, ...a_N\}$ como recién y entonces:

$$\left\|\sum_{n=1}^N a_nx_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^N \|x_n\|^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq N} \operatorname{Re}\left(a_i\overline{a_j}\langle x_i, x_j\rangle\right) \geq \sum_{n=1}^N \|x_n\|^2.$$

□

Continuamos con la demostración del ítem b) del corolario.
Dados $\varphi'_1, ...\varphi'_N$ por el lema existen $b_1, ..., b_N$ de modulo 1 y $c_1, ..., c_N$ con $|c_j| = |a_j|$ tales que $b_j = c_j/a_j$ y además:

$$\left\|\sum_{j=1}^N c_j\varphi'_j\right\|^2 = \left\|\sum_{j=1}^N \frac{c_j}{a_j}(a_j\varphi'_j)\right\|^2 = \left\|\sum_{j=1}^N b_j(a_j\varphi'_j)\right\|^2 \geq \sum_{j=1}^N |a_j|^2 \left\|\varphi'_j\right\|^2.$$

Supongamos que $Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}}) = \ell^2$ entonces el operador $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1}$ es acotado y llamando $C = \left\|\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1}\right\|$ por (2.5) se tiene:

$$\left\|\sum_{j=1}^N c_j\varphi'_j\right\|^2 = \left\|\mathcal{P}_{\mathscr{F}}|_V^{-1}\{c_j\}_{j=1}^N\right\|^2 \leq C\sum_{j=1}^N |c_j|^2 = C\sum_{j=1}^N |a_j|^2 \leq C\|a_n\|_{\ell^2},$$

que es absurdo. □

En general la estrategia para resolver un problema de los momentos consiste en lo siguiente: Dada $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ y una familia $\mathscr{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si existe $\mathscr{F}' = \{\varphi'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistema biortogonal para $\mathscr{F}$ entonces siempre se tiene una expresión formal de la solución dada por:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi'_n.$$

El problema consiste en evaluar cuando esta serie converge en $\mathcal{H}$.

2.4. Familias de exponenciales reales.

En esta sección trataremos con funciones de la forma $\{e^{-\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{N}}$ en el caso en el que la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este formada por números reales pediremos que la sucesión $\Gamma = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaga:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \lambda_n < \ldots\ ,\ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty. \tag{2.2}$$

Sin embargo, la gran mayoría de los resultados que expondremos en esta sección valen también para sucesiones en números complejos “ cerca de del semieje real positivo ” donde cerca viene dado en el sentido siguiente: existe $\delta > 0$ de modo que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{Re}\,(\lambda_n) \geq \delta|\lambda_n|, \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty.$$

Para más simplicidad vamos mirar el caso (2.2) y usaremos las siguientes notaciones:

- $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$.
- $\mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$ el conjunto de funciones holomorfas en $\mathbb{C}_+$.
- $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C}_+)$ es el espacio de Hardy de funciones holomorfas y acotadas sobre $\mathbb{C}_+$.

Los resultados que expondremos pueden verse en [18].
La transformada de Laplace jugara un rol fundamental en esta sección. Recordemos la definición y algunas propiedades importantes:

Definición 2.13. Sea $g \in L^2(0, +\infty)$ le asociamos su transformada de Laplace dada por:

$$G(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} g(x)dx,\ \lambda = a + bi,\ a > 0. \tag{2.3}$$

Teorema 2.6. *La función G posee las siguientes propiedades:*

- $G \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$.
- *Para todo* $\varepsilon > 0$, G *está acotada en* $\mathbb{C}_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(\lambda) > \varepsilon\}$ *y además se tiene que* $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty,\ \lambda\in\mathbb{C}_\varepsilon} G(\lambda) = 0$.

Este importante resultado conduce a la definición del espacio de Hardy:

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+) = \{G \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)/\exists\alpha > 0,\ \int_{\mathbb{R}} |G(a+bi)|^2 db \leq \alpha,\ a > 0\} \tag{2.4}$$

munido de la norma :

$$\|G\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)} = \sup_{a>0}\left(\int_{\mathbb{R}} |G(a+bi)|^2 db\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.7. *Sea* $G \in \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)$ *entonces* G *se extiende a* $\overline{\mathbb{C}_+}$ *a una función* $\overline{G}$ *y satisface:*

- *la asignación:* $b \mapsto \overline{G}(ib)$ *pertenece a* $L^2(\mathbb{R})$.
- *la asignación:* $a \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}} |\overline{G}(a+bi)|^2 db\right)^{1/2}$ *es decreciente, más aún se tiene que :* $\left\|\overline{G}\right\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)} = \left(\int_{\mathbb{R}} |\overline{G}(bi)|^2 db\right)^{1/2}$.

Y con esta norma el espacio $\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)$ *resulta un espacio de Hilbert.*

Teorema 2.8. *La transformada de Laplace es una isometría entre el espacio* $L^2(0,+\infty)$ *y el espacio* $\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)$ *es decir:*

- *La transformada es un isomorfismo lineal.*
- *para toda* $g \in L^2(0,+\infty)$ *se tiene:* $\|G\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)} = \|g\|_{L^2(0,+\infty)}$.

2.5. Familias de exponenciales reales en $L^2(0,+\infty)$

Trabajaremos con la familia de exponenciales reales , $\left(e^{-\lambda_n t}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface las hipótesis 2.2. Nuestro objetivo es dar condiciones que garanticen que esta familia es minimal y completa en $L^2(0,+\infty)$.

Teorema 2.9. *Sea la familia* $\left(e^{-\lambda_n t}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cumpliendo las hipótesis* (2.2) *entonces:*

- *Si:* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\lambda_n}=\infty$ *entonces la familia* $\left(e^{-\lambda_n t}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *es completa en* $L^2(0,+\infty)$ *pero no es minimal.*

- *Si:* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\lambda_n}<\infty$ *entonces la familia* $\left(e^{-\lambda_n t}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *no es completa en* $L^2(0,+\infty)$ *pero si es minimal, más aún, tiene un sistema biortogonal* $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *que satisface:*

$$\int_0^\infty |q_k(t)|^2 dt \approx \frac{\pi}{2|\lambda_k J'(\lambda_k)|^2}$$

cuando $k\to\infty$ *y donde:*

$$J(\lambda)=\frac{\prod_{k\in\mathbb{N}}\frac{1-\lambda/\lambda_k}{1+\lambda/\overline{\lambda_k}}}{(1+\lambda)^2},\ \lambda\in\mathbb{C}_+.$$

La siguiente condición conocida en la literatura como condición de Blashcke es la clave para entender el funcionamiento de estas familias.

Teorema 2.10. *Sea* $f\in\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C}_+), f\not\equiv 0$ *sea* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *la sucesión de ceros de* f *en* $\mathbb{C}_+$ *entonces se satisface la siguiente condición:*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\operatorname{Re}(z_k)}{1+|(z_k)|^2}<\infty \tag{2.5}$$

De forma inversa tenemos que: si $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que satisface (2.5) podemos construir $f\in\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C}_+)$ de modo tal que $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sean sus ceros. Para ser más específico, se tiene lo siguiente:

Teorema 2.11. *Sea* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}_+$ *si*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\operatorname{Re}(z_n)}{1+|(z_n)|^2}<\infty$$

entonces el producto infinito:

$$W(\lambda)=\prod_{n\in\mathbb{N}}\frac{1-\lambda/z_n}{1+\lambda/\overline{z_n}}\ ,\ \lambda\in\mathbb{C}_+, \tag{2.6}$$

que llamaremos producto de Blashcke, converge absolutamente en $\mathbb{C}_+$ *a una función* $W\in\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C}_+)$ *y además los ceros de* W *son exactamente* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Demostracion de 2.9. Supongamos primero que vale $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\lambda_n}=\infty$, sea $\varphi\in L^2(0,+\infty)$ tal que

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_n t}\varphi(t)dt=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

sea $J:\mathbb{C}_+\to\mathbb{C}$ la transformada de Laplace de φ :

$$J(\lambda)=\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\varphi(t)dt.$$

Por el teorema 2.8 sabemos que J es holomorfa sobre $\mathbb{C}_+$ y uniformemente acotada en el conjunto $\mathbb{C}_\varepsilon=\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,(\lambda)>\varepsilon\}$ para todo $\varepsilon>0$. Además por la elección de φ se tiene que $J(\lambda_n)=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Supongamos que $\varphi\not\equiv 0$ entonces la función J es no-nula , por otro lado por las hipótesis que cumple $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y el teorema 2.5 se tiene que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\lambda_n}{1+\lambda_n^2}<\infty$ por comparación resulta $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{\lambda_n}<\infty$ lo que es absurdo pues la serie por hipótesis diverge , luego $\varphi\equiv 0$ y en consecuencia la familia $(e^{-\lambda_n t})_{n\in\mathbb{N}}$ resulta completa en $L^2(0,+\infty)$. Sin embargo la familia no es minimal pues si fijamos n_0 ,la sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N},n\neq n_0}$ cumple las mismas propiedades que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con lo cual siguiendo el razonamiento anterior podemos concluir que la familia $(e^{-\lambda_n t})_{n\in\mathbb{N},n\neq n_0}$ es completa en $L^2(0,+\infty)$ y como consecuencia se tiene $e^{-\lambda_{n_0}t}\in\overline{Span\{e^{-\lambda_n t}\}}_{n\in\mathbb{N},n\neq n_0}$ luego $(e^{-\lambda_n t})_{n\in\mathbb{N}}$ no es minimal.
Supongamos ahora que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\lambda_n}<\infty$ por el teorema 2.11 aplicado a la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tenemos que:

$$W(\lambda)=\prod_{n\in\mathbb{N}}\frac{1-\lambda/\lambda_n}{1+\lambda/\overline{\lambda_n}}\ ,\ \lambda\in\mathbb{C}_+$$

es una función holomorfa en $\mathbb{C}_+$ con lo cual si definimos:

$$J(\lambda)=\frac{W(\lambda)}{(1+\lambda)^2},\ \lambda\in\mathbb{C}_+$$

también resulta holomorfa en $\mathbb{C}_+$. Como la transformada de Laplace es una isometría con $L^2(0,+\infty)$ existe $g\in L^2(0,+\infty)$ tal que

$$J(\lambda)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}g(t)dt$$

y además vale que:

$$\|g\|^2_{L^2(0,\infty)}=\int_0^{\infty}|g(t)|^2\,dt=\|J(\lambda)\|^2_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)}=\int_{-\infty}^{+\infty}|J(i\tau)|^2\,d\tau.$$

Como la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son los ceros de J se sigue que $J(ib)\neq 0$ y en consecuencia $\int_{-\infty}^{+\infty}|J(i\tau)|^2\,d\tau > 0$ luego g es un elemento no trivial en el espacio $\overline{Span\{e^{-\lambda_n t}\}}_{n\in\mathbb{N}}^{\perp}$ y en definitiva la familia no es completa.
Para ver que es minimal propondremos un sistema biortogonal. Para $k\in\mathbb{N}$ sea :

$$J_k(\lambda) := \frac{J(\lambda)}{J'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)},\ \lambda\in\mathbb{C}_+.$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} J'(\lambda) &= \frac{W'(\lambda)(1+\lambda)^2 - W(\lambda)2(1+\lambda)}{(1+\lambda)^4} \\ &= \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{-2\lambda_n}{(\lambda_n+\lambda)^2}\prod_{m\neq n}\frac{1-\lambda/\lambda_m}{1+\lambda/\overline{\lambda_m}}(1+\lambda)^2 - W(\lambda)2(1+\lambda)}{(1+\lambda)^4}. \end{aligned}$$

Con lo cual $J'(\lambda_k) = \frac{W'(\lambda_k)}{(1+\lambda_k)^2} = \frac{-1}{2\lambda_k(1+\lambda_k)^2}\prod_{m\neq k}\frac{1-\lambda_k/\lambda_m}{1+\lambda_k/\overline{\lambda_m}}\neq 0$.
Con lo cual la familia $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ resulta una familia de funciones holomorfas y en consecuencia existen funciones $q_k\in L^2(0,+\infty)$ tales que:

$$J_k(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}q_k(t)dt,$$

$$\int_0^\infty |q_k(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^\infty |J_k(i\tau)|^2\,d\tau.$$

Notemos que $J_n(\lambda_n)=1$ ya que:

$$\begin{aligned} J_n(\lambda_n) &= \frac{-1}{2\lambda_n(1+\lambda_n)^2 J'(\lambda_n)}\prod_{m\neq n}\frac{1-\lambda_n/\lambda_m}{1+\lambda_n/\overline{\lambda_m}} \\ &= \frac{-1}{2\lambda_n(1+\lambda_n)^2\frac{-1}{2\lambda_n(1+\lambda_n)^2}\prod_{m\neq n}\frac{1-\lambda_n/\lambda_m}{1+\lambda_n/\overline{\lambda_m}}}\prod_{m\neq n}\frac{1-\lambda_n/\lambda_m}{1+\lambda_n/\overline{\lambda_m}} = 1 \end{aligned}$$

y además si $n\neq m$ entonces $J_m(\lambda_n)=0$ con lo cual la familia $\{q_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema biortogonal para $\{e^{-\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Buscaremos ahora una estimación para la norma de las funciones $\{q_n(t)\}$.De la definición de W se sigue que $|W(ib)|=1$ para todo $b\in\mathbb{R}$.Computando

obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |q_k(t)|^2\,dt &= \int_{-\infty}^\infty |J_k(i\tau)|^2\,d\tau \\ &= \frac{1}{|J'(\lambda_k)|^2}\int_{-\infty}^\infty \frac{d\tau}{|(1+i\tau)^2(i\tau-\lambda_k)|^2} \\ &= \frac{2}{|J'(\lambda_k)|^2}\int_0^\infty \frac{d\tau}{(1+\tau^2)^2(\tau^2+\lambda_k^2)}\end{aligned}$$

y usando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se deduce que:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty |q_k(t)|^2\,dt &= \left(\lim_{k\to\infty}\frac{2}{|\lambda_k J'(\lambda_k)|^2}\right)\left(\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty \frac{d\tau}{(1+\tau^2)^2(1+\tau^2/\lambda_k^2)}\right) \\ &= \left(\lim_{k\to\infty}\frac{2}{|\lambda_k J'(\lambda_k)|^2}\right)\int_0^\infty \frac{d\tau}{(1+\tau^2)^2} \\ &= \left(\lim_{k\to\infty}\frac{2}{|\lambda_k J'(\lambda_k)|^2}\right)\frac{\pi}{4} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\,|\lambda_k J'(\lambda_k)|^2}.\end{aligned}$$

Como queríamos.

□

2.6. Familias de exponenciales reales en $L^2(0,T)$

El objetivo de esta sección es trabajar con la familia $\{e^{-\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{N}}$ esta vez vista en el espacio $L^2(0,T)$ queremos obtener condiciones similares a las probadas en la sección anterior respecto a la convergencia de la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{\lambda_n}$.En este caso si $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{\lambda_n}=\infty$ obtendremos , como antes, que la familia $\{e^{-\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completa en $L^2(0,T)$ pero no es minimal, sin embargo si $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{\lambda_n}<\infty$ para probar algo similar a lo anterior será necesario hacer más trabajo y lo abordaremos en lo que sigue.
Definimos el espacio $A(\Gamma,T) := \overline{Span\{e^{-\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{N}}}^{L^2(0,T)} \subset L^2(0,T),\ 0<T\le\infty$.
Trabajaremos con la función:

$$J(\lambda)=\frac{\prod_{k\in\mathbb{N}}\frac{1-\lambda/\lambda_k}{1+\lambda/\overline{\lambda_k}}}{(1+\lambda)^2}.$$

Definida anteriormente con el producto infinito de Blashcke

$$W(\lambda)=\prod_{n\in\mathbb{N}}\frac{1-\lambda/z_n}{1+\lambda/\overline{z_n}}.$$

El objetivo será mostrar el siguiente resultado:

Teorema 2.12. *Supongamos que* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *satisface:* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$*. Para todo* $T > 0$ *existe una familia* $\{\Upsilon_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *biortogonal a* $\{e^{-\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y constantes* $C_1 = C_1(\Gamma, T); C_2 = C_2(\Gamma, T)$ *mayores que cero tales que:*

$$\frac{C_1 \|J\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)}}{|\lambda_n J'(\lambda_n)|} \le \|\Upsilon_n\|_{L^2(0,T)} \le \frac{C_2 \|J\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)}}{|\lambda_n J'(\lambda_n)|},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Este teorema será una consecuencia del siguiente:

Teorema 2.13. *En las hipótesis del teorema 2.12 el operador* R_T *dado por:*

$$R_T : A(\Gamma,\infty) \to A(\Gamma,T),\ R_T(f) := f|_{(0,T)}$$

es un isomorfismo , en particular, existe una constante $C_T > 0$ *tal que*

$$\|f\|_{L^2(0,T)} \le \|f\|_{L^2(0,\infty)} \le C_T \|f\|_{L^2(0,T)}, \forall f \in L^2(0,\infty).$$

Supongamos cierto el teorema 2.13 probemos 2.12.

Demostración de 2.12. Por el teorema 2.9 tenemos que :

$$\begin{aligned}\delta_{n,m} &= \langle e^{-\lambda_n t}, q_m\rangle_{L^2(0,\infty)}\\ &= \langle R_T^{-1} R_T e^{-\lambda_n t}, q_m\rangle_{L^2(0,\infty)}\\ &= \langle e^{-\lambda_n t}, (R_T^{-1})^* q_m\rangle_{L^2(0,T)}\end{aligned}$$

entonces poniendo $\Upsilon_m = (R_T^{-1})^* q_m$ y por ser R_T es un isomorfismo se sigue el teorema. □

Nos concentraremos entonces en mostrar que el operador de restricción R_T es un isomorfismo.
Definimos los polinomios de Dirichlet :

$$\mathscr{Q} = \left\{ P(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j e^{-\lambda_j t},\ a_j \in \mathbb{C}, N \ge 1, t > 0 \right\}.$$

Si podemos mostrar que existe $C_T > 0$ tal que para todo polinomio $P \in \mathscr{Q}$ se tiene $\|P\|_{L^2(0,\infty)} \le C_T \|P\|_{L^2(0,T)}$ entonces por densidad habremos probado el teorema. Comenzaremos con un lema que nos dará una cota para un sector de $\mathbb{C}$ que contiene a la semirrecta (ε, ∞).

Lema 2.14. *Sea $\varepsilon > 0$ y el sector de $\mathbb{C}$ dado por:*

$$S_\varepsilon^M := \left\{ z = x + iy, x > \varepsilon, \frac{|y|}{x - \varepsilon} < M \right\}.$$

Entonces existe una constante $C_\varepsilon^M > 0$ tal que para todo $P \in \mathscr{Q}$ se tiene que: $|P(z)| \leq C_\varepsilon^M \|P\|_{L^2(0,+\infty)} e^{-\lambda_1 \mathrm{Re}(z)}, \ \forall z \in S_\varepsilon^M$.

Demostración. Sea $\Delta = \{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de $\Gamma = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que:

$$D_1 = \{\lambda_1\}; \ D_k \cap D_l = \emptyset, k \neq l; \ \cup_{k\in\mathbb{N}} D_k = \Gamma.$$

Sea $P(t) = \sum_{j=1}^N c_j e^{-\lambda_j t} \in \mathscr{Q}$, si existe $m = m(N, \Delta) \geq 1$ tal que $(\lambda_j)_{1\leq j\leq N} \in \cup_{k=1}^{k=m} D_k$ podemos escribir a P como:

$$P = \sum_{k=1}^m \sum_{\lambda_j \in D_k} c_j e^{-\lambda_j t} = \sum_{k=1}^m g_k(t).$$

Ahora utilizando la familia biortogonal $\{q_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la familia $\{e^{-\lambda_n t}\}$ en $L^2(0, +\infty)$ tenemos que:

$$c_n = \int_0^\infty P(\tau) q_n(\tau) d\tau.$$

Dado $z = x+iy$ tenemos : $g_k(z) = \sum_{\lambda_j \in D_k} c_j e^{-\lambda_j z} = \sum_{\lambda_j \in D_k} \int_0^\infty P(\tau) q_j(\tau) d\tau e^{-\lambda_j z}$ con lo cual:

$$\begin{aligned}
|g_k(z)|^2 &\leq \left(\int_0^\infty \left| P(\tau) \sum_{\lambda_j \in D_k} q_j(\tau) e^{-\lambda_j \mathrm{Re}(z)} \right| d\tau \right)^2 \\
&\leq \int_0^\infty \left| \sum_{\lambda_j \in D_k} q_j(\tau) e^{-\lambda_j \mathrm{Re}(z)} \right|^2 d\tau \, \|P\|^2_{L^2(0,+\infty)}
\end{aligned}$$

Ahora para estimar la integral del miembro de la derecha, notemos que la transformada de Laplace de $\sum_{\lambda_j \in D_k} q_j(\tau) e^{-\lambda_j \mathrm{Re}(z)}$ viene dada por:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} \sum_{\lambda_j \in D_k} q_j(\tau) e^{-\lambda_j \mathrm{Re}(z)} d\tau &= \sum_{\lambda_j \in D_k} \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} q_j(\tau) d\tau e^{-\lambda_j \mathrm{Re}(z)} \\
&= \sum_{\lambda_j \in D_k} J_j(\lambda) e^{-\lambda_j \mathrm{Re}(z)}.
\end{aligned}$$

Como la transformada de Laplace es una isometría tenemos que:

$$\int_0^{\infty}\left|\sum_{\lambda_j\in D_k} q_j(\tau)e^{-\lambda_j \mathrm{Re}(z)}\right|^2 d\tau = \left\|\sum_{\lambda_j\in D_k} J_j(\lambda)e^{-\lambda_j \mathrm{Re}(z)}\right\|^2_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{\lambda_j\in D_k} J_j(i\tau)e^{-\lambda_j \mathrm{Re}(z)}\right|^2 d\tau.$$

Y en consecuencia podemos escribir :

$$|g_k(z)|^2 \leq \|P\|^2_{L^2(0,\infty)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{\lambda_j\in D_k} J_j(i\tau)e^{-\lambda_j \mathrm{Re}(z)}\right|^2 d\tau.$$

Sea Γ_k una curva cerrada que rodea solo a los λ_j con solo los indices j tales que $\lambda_j \in D_k$ y que no contiene a $i\tau$ entonces como λ_j es un cero simple de J el teorema de los residuos nos dice que:

$$\sum_{\lambda_j\in D_k} J_j(i\tau)e^{-\lambda_j z} = \frac{J(i\tau)}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\frac{e^{-\psi z}}{J(\psi)(i\tau-\psi)}d\psi.$$

Con lo cual:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{\lambda_j\in D_k} J_j(i\tau)e^{-\lambda_j \mathrm{Re}(z)}\right|^2 d\tau = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|J(i\tau)|^2\left(\int_{\Gamma_k}\left|\frac{e^{-\psi z}}{J(\psi)(i\tau-\psi)}\right||d\psi|\right)^2 d\tau$$
$$\leq \frac{1}{4\rho^2\pi^2}\left(\int_{\Gamma_k}\left|\frac{e^{-\psi z}}{J(\psi)}\right||d\psi|\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}|J(i\tau)|^2\, d\tau$$
$$\leq \frac{\|J\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)}}{4\rho^2\pi^2}\left(\int_{\Gamma_k}\left|\frac{e^{-\psi z}}{J(\psi)}\right||d\psi|\right)^2.$$

Donde recordemos que $\{\lambda_j\}$ es una sucesión creciente y $\lambda_1 > 0$. En la ecuación ρ es aquel que cumple $|i\tau-\psi| \geq \rho = \min_{k\geq 1} dist(\Gamma_k, i\mathbb{R}) > 0$ para todo $\psi \in \Gamma_k$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Finalmente obtenemos la estimación:

$$|g_k(z)|^2 \leq \frac{\|J\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)}}{4\rho^2\pi^2}\left(\int_{\Gamma_k}\left|\frac{e^{-\psi z}}{J(\psi)}\right||d\psi|\right)^2\|P\|_{L^2(0,\infty)}.$$

Y entonces para acotar un polinomio $P \in \mathscr{Q}$ tenemos:

$$|P(z)|^2 \leq \frac{\|J\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)}}{4\rho^2\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\left(\int_{\Gamma_k}\left|\frac{e^{-\psi z}}{J(\psi)}\right||d\psi|\right)^2\|P\|_{L^2(0,\infty)}.$$

Para terminar la demostración del teorema necesitamos una estimación de $\left(\int_{\Gamma_k}\left|\frac{e^{-\psi z}}{J(\psi)}\right||d\psi|\right)$. Para poder hacer esto estudiaremos el comportamiento del producto de Blashcke, empezando con el siguiente resultado que puede verse en [5].

Proposición 2.4. *Sea $\theta_0 \in [0, \pi/2)$ fijo. Se tiene:*

- *a) Existe una sucesión creciente de números positivos $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cumple $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ y tal que:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left|W(r_n e^{i\theta})\right|}{r_n} = 0$$

  uniformemente para todo $|\theta| \leq \theta_0$.

- *b) En todo el sector $-\pi/2 < \alpha < \theta < \beta < \pi/2$ que no contiene a λ_n vale que :*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log\left|W(re^{i\theta})\right|}{r} = 0.$$

Asumamos cierto esto y además notemos que podemos suponer que o bien $\{r_n\}$ o bien una subsucesión de $\{r_n\}$ es tal que toda franja $r_n < |z| < r_{n+1}$ contiene un elemento $\lambda_j \in \Gamma$. Sea $0 < \theta_0 < \pi/2$ y consideremos los siguientes subconjuntos de Γ:

$$\mathcal{O}_k := \{z = re^{i\theta}/r_k < |z| < r_{k+1},\ |\theta| < \theta_0\} \cap \Gamma.$$

Con lo cual una elección natural del conjunto Γ_k viene dado por la frontera del conjunto $\{z = re^{i\theta}/r_k < |z| < r_{k+1},\ |\theta| < \theta_0\}$ notemos que dicho conjunto viene dado por los segmentos $\Gamma_k^{\pm\theta_0} := \{r_k < |z| < r_{k+1},\ |\theta| = \theta_0\}$ y dos arcos $\Gamma_k^{r_l} = \{|z| = r_l,\ |\theta| \leq \theta_0\}$, $(l = k, k+1)$.
La elección de θ_0 garantiza que las rectas $\{z = re^{i\pm\theta_0},\ r > 0\}$ no se cortan con Γ y como $\Gamma_k^{r_k} \cap \Gamma = \emptyset,\ k \geq 1$ tenemos:

$$\int_{\Gamma_k}\left|\frac{e^{-\psi z}}{J(\psi)}\right||d\psi| = \left(\int_{\Gamma_k^{\pm\theta_0}} + \int_{\Gamma_k^{r_k}} + \int_{\Gamma_k^{r_{k+1}}}\right)\left|\frac{e^{-\psi z}}{J(\psi)}\right||d\psi|\,.$$

Ahora o bien utilizando el primer inciso de la proposición 2.4 para $\psi \in \Gamma_k^{r_k}$ y $\psi \in \Gamma_k^{r_{k+1}}$ o bien utilizando la segunda parte para $\psi \in \Gamma_k^{\pm\theta_0}$ podremos concluir que existe para todo $\eta > 0$ una constante $C_\eta > 0$ tal que si k es suficientemente grande entonces:

$$|W(\psi)| \geq C_\eta e^{-\eta|\psi|}, \quad \psi \in \Gamma_k$$

ya que esta desigualdad es equivalente a que la expresión:

$$r_k\left(\eta+\frac{\log\left|W(r_ke^{i\theta})\right|}{r_k}\right)$$

sea mayor que cero y esto ocurre para k suficientemente grande como consecuencia de la proposición 2.4. Además si $\psi = re^{i\theta}$ y $z = x+iy \in \mathbb{C}_+$ tenemos:

$$\left|e^{-\psi z}\right| = e^{-\mathrm{Re}(\psi z)} = e^{-r(xcos(\theta)-ysen(\theta)}.$$

Puesto que como $x>0$, $|\theta|\leq\theta_0<\pi/2$ y $z\in S_\varepsilon^M$ tenemos que:

$$\begin{aligned} xcos(\theta)-ysen(\theta) &\geq xcos(\theta)-|y|\,|sen(\theta)| \\ &\geq x(cos(\theta)-Msen(\theta)) \end{aligned}$$

y dado que $\lim_{\theta\to 0}(cos(\theta)-Msen(\theta)) = 1$ vemos que para todo $\beta\in(0,1)$ existe un $\theta_0\in(0,\pi/2)$ de modo que:

$$xcos(\theta)-ysen(\theta)\geq\beta x,\quad \theta\in(0,\theta_0].$$

Así que volviendo tenemos que $\left|e^{-\psi z}\right|\leq e^{-r\beta x}$ y con esto finalmente podemos acotar:

$$e^{\lambda_1 x}\left|\frac{e^{-\psi z}}{J(\psi)}\right|\leq C_\eta(1+r)^2e^{-(r\beta-\lambda_1)x+\eta r}.$$

Además si $r\geq r_2$:

$$-(r\beta-\lambda_1)x+\eta r\leq-\eta r\Longleftrightarrow x\geq\frac{2\eta r}{r\beta-\lambda_1}\geq\frac{2\eta r_2}{r_2\beta-\lambda_1}.$$

Siempre y cuando podamos elegir r_2 tal que $r_2\beta-\lambda_1>0$. No obstante siempre podremos hacer esto fijo primero $\beta\in(0,1)$. Finalmente tenemos:

$$\forall\eta>0,\ \left(x\geq\frac{2\eta r_2}{r_2\beta-\lambda_1}\Rightarrow e^{\lambda_1 x}\left|\frac{e^{-\psi z}}{J(\psi)}\right|\leq C_\eta(1+r)^2e^{-\eta r},\ \forall r\geq r_2\right).$$

Y usando esto:

$$\int_{\Gamma_k^{\pm\theta_0}} e^{\lambda_1 x}\left|\frac{e^{-\psi z}}{J(\psi)}\right||d\psi|\leq C_\eta\int_{r_k}^{r_{k+1}}(1+r)^2e^{-\eta r}dr$$

y si k es suficientemente grande:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_k^{r_l}} e^{\lambda_1 x}\left|\frac{e^{-\psi z}}{J(\psi)}\right||d\psi| &\leq C_\eta(1+r_l)^2e^{-\eta r_l}\int_{r_le^{-i\theta_0}}^{r_le^{+i\theta_0}}|d\psi| \\ &\leq 2\theta_0 r_l C_\eta(1+r_l)^2e^{-\eta r_l},\ l=k,l=k+1.\end{aligned}$$

Usando estas estimaciones podemos escribir:

$$\begin{aligned} e^{2\lambda_1 x}\left|P(z)\right|^2 &\leq \frac{\|J\|^2_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)}}{4\rho^2\pi^2}\sum_{k=1}^{m} e^{2\lambda_1 x}\left(\int_{\Gamma_k}\left|\frac{e^{-\psi z}}{J(\psi)}\right||d\psi|\right)^2 \|P\|^2_{L^2(0,\infty)} \\ &\leq C_\eta^2 \frac{\|J\|^2_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)}}{4\rho^2\pi^2}\left(1+\int_{r_2}^{r_{m+1}}(1+r)^2 e^{-\eta r}dr + \sum_{k=2}^{m+1} r_k(1+r_k)^2 e^{-\eta r}\right)\|P\|^2_{L^2(0,\infty)}. \end{aligned}$$

Por otra parte como:

$$\int_{r_2}^{r_{m+1}}(1+r)^2 e^{-\eta r}dr < \int_{r_2}^{\infty}(1+r)^2 e^{-\eta r}dr$$

y también:

$$\lim_{k\to\infty} r_k(1+r_k)^2 e^{-\eta r_k} = \lim_{k\to\infty} r_k^3 e^{-\eta r_k}$$

y la elección de $\mathcal{O}_k$ implica que cada intervalo (r_k, r_{k+1}) contiene al menos un valor $\lambda_n \in \Gamma$, nos lleva a que $\lim_{k\to\infty} r_k/k = \infty$ (ya que $\lim_{n\to\infty}\lambda_n/n = \infty$) por lo tanto la serie $\sum_{k=2}^{\infty} r_k(1+r_k)^2 e^{-\eta r_k}$ converge a una constante $\mathcal{C}_\eta > 0$ y con esto concluimos:

$$e^{2\lambda_1 x}\left|P(z)\right|^2 \leq \mathcal{C}_\eta^2 \|P\|^2_{L^2(0,+\infty)}.$$

Ahora para terminar la demostración de este lema notemos que dado un polinomio $P(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j e^{-\lambda_j t}$ nuestro objetivo es poder acotar las integrales:

$$\int_{\Gamma_k}\left|\frac{e^{-\psi z}}{J(\psi)}\right||d\psi|.$$

Dado $\varepsilon > 0$ por el lema previo vimos que si k es suficientemente grande entonces estas integrales están uniformemente acotadas, luego el resto de los casos quedan acotados por ser finitos. En resumen hemos demostrado que dado $M > 0$ para todo $\eta > 0$ existe una constante $C_\eta > 0$ de modo que si $z = x + iy \in S_\varepsilon^M$ se tiene:

$$\left|P(z)\right|^2 \leq C_\eta^2 \|P\|^2_{L^2(0,+\infty)} e^{-2\lambda_1 x}.$$

□

Para terminar la prueba de que R_T es un isomorfismo supongamos que tenemos una sucesión de polinomios $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{Q}$ que satisface:

$$\|P_m\|_{L^2(0,+\infty)} = 1,\ (\forall m \geq 1),\ \lim_{m\to\infty}\|P_m\|_{L^2(0,T)} = 0. \tag{2.7}$$

Por hipótesis y el lema previo, dado $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ la sucesión $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{Q}$ está uniformemente acotada en el sector S_ε^M. Utilizaremos el siguiente teorema que puede verse en [1] capítulo 5.

Teorema 2.14. *Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ una familia de funciones. Supongamos que para todo compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $C_K > 0$ tal que :*

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \leq C_K, \ \forall f \in \mathcal{F}$$

entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua.

Demostración de 2.13. Debemos mostrar que existe una constante $C_T > 0$ tal que para cualquier polinomio $P \in \mathscr{Q}$ se tiene $\|P\|_{L^2(0,+\infty)} \leq C_T \|P\|_{L^2(0,T)}$, supongamos que esto no es así, existe entonces una sucesión $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\|P_m\|_{L^2(0,\infty)} = 1, \ (\forall m \geq 1), \ \lim_{m\to\infty} \|P_m\|_{L^2(0,T)} = 0$, como la familia $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada en S_ε^M , entonces resulta equicontinua en S_ε^M , con lo cual existe una subsucesión $\{P_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y una función $P \in \mathcal{H}(S_\varepsilon^M)$ de manera tal que $P_{m_k} \to P$ uniformemente sobre compactos de S_ε^M. Por el teorema de convergencia mayorada de Lebesgue , tenemos que $P_{m_k} \to P$ en $L^2(\eta,\infty)$ para todo $\eta > \varepsilon$. Por 2.7 tenemos que $P = 0$ en el intervalo (η, T) para todo $0 < \varepsilon < \eta < T$.
Como P es holomorfa tenemos que $P = 0$ en el intervalo (ε, ∞) y en consecuencia $\lim_{k\to\infty} \|P_{m_k}\|_{L^2(T,+\infty)} = 0$. Como por hipótesis $\lim_{k\to\infty} \|P_{m_k}\|_{L^2(0,T)} = 0$ se sigue que:

$$\lim_{k\to\infty} \|P_{m_k}\|_{L^2(0,+\infty)} = 0,$$

pero esto contradice que $\|P_m\|_{L^2(0,+\infty)} = 1$. Hemos concluido la demostración de que R_T es un isomorfismo.

□

Observación 2.18. Utilizando las proposiciones de la sección 1.2 hemos mostrado que si la sucesión de números reales $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la condición de Blashcke (2.5) entonces la familia $\{e^{-\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es minimal en el espacio $L^2(0,+\infty)$. Por lo visto recién, resulta minimal en el espacio $L^2(0,T)$, con lo cual, dada una familia de subespacios $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tenemos que la familia conjunta de subespacios $\{e^{-\lambda_n t} \otimes S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es minimal en el espacio $L^2(0,T)\overline{\otimes}\mathcal{H}$.

Observación 2.19. Es posible demostrar un resultado recíproco, es decir, si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con $dim(\mathcal{H}) < \infty$ y una familia $\{e^{-\lambda_n t} \otimes S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es minimal en $L^2(0,T)\overline{\otimes}\mathcal{H}$ entonces la sucesión de números $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la condición de Blashcke. En el caso de que el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ sea de dimensión infinita es todavía un problema abierto determinar si la condición de Blashcke (2.5) es necesaria para que la familia sea minimal.

Volviendo al teorema 2.13 vimos que existen constantes que hacen verdadera la siguiente cadena de desigualdades:

$$\frac{C_1 \|J\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)}}{|\lambda_n J'(\lambda_n)|} \leq \|\Upsilon_n\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C_2 \|J\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)}}{|\lambda_n J'(\lambda_n)|}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para poder estimar la norma $\|\Upsilon_n\|_{L^2(0,T)}$ será útil conocer estimaciones de $J'(\lambda_n)$.
Tenemos que:

$$J'(\lambda) = \frac{(1+\lambda)^2 W'(\lambda) - (1+\lambda)W(\lambda)}{(1+\lambda)^4}.$$

En particular evaluando en la sucesión $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ obtenemos:

$$J'(\lambda_k) = \frac{W'(\lambda_k)}{(1+\lambda_k)^2}.$$

Computando resulta:

$$W'(\lambda_k) = \frac{-1}{2\lambda_k} \prod_{n\in\mathbb{N}, n\neq k} \frac{1-\lambda_k/\lambda_n}{1+\lambda_k/\lambda_n}.$$

Con lo cual:

$$J'(\lambda_k) = -\frac{\prod_{n\in\mathbb{N},n\neq k} \frac{1-\lambda_k/\lambda_n}{1+\lambda_k/\lambda_n}}{2\lambda_k(1+\lambda_k)^2}.$$

Esto nos lleva a analizar el comportamiento del producto $\prod_{n\in\mathbb{N},n\neq k} \frac{1-\lambda_k/\lambda_n}{1+\lambda_k/\lambda_n}$. Trabajaremos con el concepto de indice de condensación para una sucesión.

Definición 2.14. Sea $\Gamma = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, definimos la función de interpolación:

$$E(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Una condición suficiente para que la función E este bien definida es que exista un número $d \in [0, +\infty]$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = d.$$

A este número (si existe) se lo llamara densidad y diremos que la sucesión Γ es medible. Además en este caso se tiene que:

$$E'(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\lambda}{\lambda_n^2} \prod_{m\neq n} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right),$$

en particular evaluando en λ_n resulta:

$$\begin{aligned} E'(\lambda_n) &= \frac{-2}{\lambda_n}\prod_{m\neq n}\left(1-\frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2}\right) \\ &= \frac{-2}{\lambda_n}\prod_{m\neq n}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\right)\prod_{m\neq n}\left(1+\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\right). \end{aligned}$$

Usando esto obtenemos la relación:

$$\begin{aligned} J'(\lambda_n) &= -\frac{\prod_{n\in\mathbb{N},n\neq m}\frac{1-\lambda_m/\lambda_n}{1+\lambda_m/\lambda_n}}{2\lambda_m(1+\lambda_m)^2} \\ &= \frac{E'(\lambda_n)}{4(1+\lambda_n^2)}\prod_{m\neq n}\frac{1}{\left(1+\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\right)^2}. \end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}<\infty$ dado $\varepsilon>0$ si n es suficientemente grande entonces existe $C_\varepsilon>0$ tal que $\prod_{m\neq n}\left(1+\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\right)\leq C_\varepsilon e^{\varepsilon\lambda_n}$.

Definición 2.15. Dada una sucesión $\Gamma=\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos con densidad d definimos el indice de condensación como el número $C(\Gamma)$ dado por:

$$C(\Gamma)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log\frac{1}{|E'(\lambda_n)|}}{\lambda_n}$$

y si $d=\infty$ entonces definimos $C(\Gamma)=\infty$.

Observación 2.20. De la definición se sigue que dado $\varepsilon>0$ existe una constante $C_\varepsilon>0$ tal que :

$$\frac{1}{|E'(\lambda_n)|}\leq C_\varepsilon e^{(C(\Gamma)+\varepsilon)\lambda_k},\ k\in\mathbb{N}.$$

El siguiente resultado puede verse en [5]

Teorema 2.15. *Si existe una constante $k>0$ tal que para todo par de números $n,m\in\mathbb{N}$ vale que:*

$$|\lambda_m-\lambda_n|\geq k\,|m-n|$$

entonces $C(\Gamma)=0$.

Usando estos resultados y volviendo a la cota:

$$\|\Upsilon_n\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C_2 \|J\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)}}{|\lambda_n J'(\lambda_n)|}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tenemos que si $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de números reales positivos y $\varepsilon > 0$ entonces para k suficientemente grande vale que:

$$\begin{aligned}\|\Upsilon_k\|_{L^2(0,T)} &\leq \frac{C_2 \|J\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)}}{|\lambda_k J'(\lambda_k)|} \\ &\leq C_2 \|J\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)} C_\varepsilon e^{(C(\Gamma)+\varepsilon)\lambda_k}.\end{aligned}$$

Y en particular si $C(\Gamma) = 0$ concluimos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante $C_\varepsilon > 0$ tal que:

$$\|\Upsilon_k\|_{L^2(0,T)} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon\lambda_k}.$$

Capítulo 3

El método de los momentos.

En este capítulo estudiaremos sistemas de la forma :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dx}{dt} + Ax = f \\ x(0) = x_0. \end{array} \right.$$

con A un operador autoadjunto y estrictamente positivo con autovalores λ_n y autofunciones φ_n. Veremos como entender soluciones de un problema de este tipo en distintos espacios de Hilbert que construiremos durante el capítulo. A continuación introduciremos el control en la no homogeneidad f y estudiaremos el problema de controlabilidad en forma abstracta. Finalmente caracterizaremos la controlabilidad en términos de las propiedades ciertas familias de exponenciales como lo desarrollado en el capítulo 1. Los resultados que expondremos en esta sección pueden verse en [2].

Sea $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$ dos espacios de Hilbert tales que $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H}$ con $\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{H}$. Identificamos $\mathcal{H}$ con $\mathcal{H}^*$ y sea $\mathcal{V}^*$ el espacio dual de $\mathcal{V}$ entonces $\mathcal{H}$ puede identificarse con un subespacio de $\mathcal{V}^*$ de modo que la inclusión $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}^*$ resulta continua (Ver [14]). Se tiene:

$$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \cong \mathcal{H}^* \hookrightarrow \mathcal{V}^*.$$

Sea $G(a, b)$ una forma sesquilineal y continua en $\mathcal{V}$. Para cada $\alpha \geq 0$ definimos la forma G_α como:

$$G_\alpha(a, b) = G(a, b) + \alpha\langle a, b\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Supondremos que existe $C_\alpha > 0$ de modo que :

$$\forall a \in \mathcal{V} \ , \ G_\alpha(a, a) \geq C_\alpha \|a\|_{\mathcal{V}}^2 . \tag{3.1}$$

Por la continuidad de las formas G_α y la desigualdad (3.1) tenemos que la norma generada por G_α que definimos como: $\|a\|_\alpha = G_\alpha(a,a)$ es equivalente a la norma en $\mathcal{V}$, es decir existen constantes $m, M > 0$ tales que:

$$m\,\|x\|_{\mathcal{V}} \leq G_\alpha(x,x) \leq M\,\|x\|_{\mathcal{V}}.$$

Así el espacio $\mathcal{V}$ con la norma $\|.\| : \alpha$ y el producto $\langle x, y\rangle_\alpha = G_\alpha(x,y)$ resulta un espacio de Hilbert. El siguiente resultado puede verse en [16] pág. 276.

Teorema 3.1. *En las condiciones previas existe un único operador A autoadjunto y estrictamente positivo de modo que se satisface*

$$\langle Aa, b\rangle_{\mathcal{H}} = G(a,b) \;\; \forall a \in D(A), b \in \mathcal{V}$$

y así para cada $\alpha \geq 0$ tenemos definido un operador A_α autoadjunto y estrictamente positivo que se corresponde con la forma G_α y viene dado por: $A_\alpha = A + \alpha Id$. Además en este caso se tiene que $D(A_\alpha) = D(A)$.

También puede verse en [16] pág. 276 lo siguiente.

Lema 3.1. *En las condiciones anteriores para cada $\alpha \geq 0$ existe un operador B_α autoadjunto y estrictamente positivo que satisface $B_\alpha^2 = A_\alpha$ con $D(B_\alpha) = \mathcal{V}$ y poniendo $B_\alpha = A_\alpha^{1/2}$satisface:*

$$\langle A_\alpha^{1/2} a, A_\alpha^{1/2} b\rangle_{\mathcal{H}} = G_\alpha(a,b), \;\; a \in \mathcal{V}, \;\; b \in \mathcal{V}. \tag{3.2}$$

A partir de ahora asumiremos que el operador A tiene asociados autovalores $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y autofunciones $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que forman una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

Observación 3.1. Como A es autoadjunto y estrictamente positivo se tiene que $\{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\} \subset \mathbb{R}_{\geq C}$ donde C es la constante (3.1) pues si $Av = \lambda v$ entonces $< Av, v >= \lambda \|v\|_{\mathcal{H}}^2 > C\,\|v\|_{\mathcal{H}}^2$ con lo cual $\lambda \geq C$.

Definición 3.1. Para $r \in \mathbb{R}$ definimos el espacio de sucesiones

$$\ell_r^2 = \left\{ (c_n)_{n\in\mathbb{N}} / \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 (\lambda_n + \alpha)^r < \infty \right\}$$

munido del producto interno:

$$\langle \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda_n+\alpha)^{r/2}\overline{b_n(\lambda_n+\alpha)^{r/2}}$$

y la norma

$$\|(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_r = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 (\lambda_n + \alpha)^r \right)^{1/2}.$$

Definición 3.2. Para $r \geq 0$ definimos los espacios $W_r = \{f \in \mathcal{H}/f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n,\ (c_n) \in \ell_r^2\}$ munido del producto:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n \ ,\ g = \sum_{n=1}^{\infty} d_n\varphi_n \ ;\ \langle f, g\rangle_{W_r} := \langle (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle_{\ell_r^2}$$

y la norma

$$\|f\|_{W_r} = \|(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_r \,.$$

Definición 3.3. Para $r > 0$ definimos los espacios W_{-r} como la clausura de las sumas finitas de la forma:

$$\sum c_n\varphi_n, \text{ con la norma } \left\|\sum c_n\varphi_n\right\| = \sum |c_n|^2 (\lambda_n + \alpha)^{-r}.$$

Observación 3.2. Notemos que W_{-r} coincide con el espacio de series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$ con $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_{-r}^2$. Esto se debe a que si $f \in W_{-r}$ existe $f_k = \sum c_n^{(k)}\varphi_n$ tal que $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ luego la sucesión $\{c_n^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en ℓ_{-r}^2 y en consecuencia existe $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty}\{c_n^{(k)}\} = \{c_n\}$ y en definitiva $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$.

Observación 3.3. Presentamos algunas observaciones que serán útiles a lo largo del capítulo:

- Con las definiciones anteriores resulta que ℓ_r^2 y W_r son espacios de Hilbert.
- $\varphi_n \in W_r$ para todo $r \in \mathbb{R}$.
- Por la construcción de los espacios W_r y $W_{-r'}$ y que por hipótesis $\lambda_n \geq C$ tenemos que $W_r \subset \mathcal{H} \subset W_{-r'}$ para $r > 0, r' > 0$.
- Tenemos que $W_r \subset W_s$ si $s < r$.
- El espacio ℓ_r^2 es isomorfo a ℓ^2 vía la multiplicación $M_{-r} : \ell_r^2 \to \ell^2$ definida como $M_{-r}(\{c_n\}) = \{c_n(\lambda_n + \alpha)^{r/2}\}$ con inversa M_r y en definitiva

$$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_r^2 \Longleftrightarrow \{(\lambda_n + \alpha)^{r/2}c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2.$$

- De forma más general podemos definir $M_s^r : \ell_r^2 \to \ell_{r+s}^2$ dada por $M_s^r(\{c_n\}) = \{c_n(\lambda_n + \alpha)^{-s/2}\}$

Para $r > 0$, por el teorema espectral, se tiene el siguiente lema:

Lema 3.2. *Los espacios W_r coinciden con los dominios de las potencias de los operadores A_α es decir: $W_r = D(A_\alpha^{r/2})$.*

Demostración. Notemos que:

$$\begin{aligned} D(A_\alpha^{r/2}) &= \left\{ f \in \mathcal{H},\ f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n \ / \ \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\lambda_n+\alpha)^{r/2}\varphi_n \text{ converge en } \mathcal{H} \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathcal{H},\ f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n \ / \ \{c_n(\lambda_n+\alpha)^{r/2}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathcal{H}, f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n \ / \ \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_r^2 \right\} = W_r. \end{aligned}$$

□

Observación 3.4. En estas condiciones se tiene que

$$W_0 = D(Id) = \mathcal{H},\ W_2 = D(A) \text{ y tambien } W_1 = D(A_\alpha^{1/2}) = \mathcal{V}.$$

Notemos W_r^* al espacio dual de W_r y $\langle\varphi, f\rangle_*$ al producto de dualidad $\langle\varphi, f\rangle_{W_r\times W_r^*}$ que consiste en el valor de un funcional $f \in W_r^*$ en un objeto $\varphi \in W_r$.
Definimos los operadores $J_s^r : W_r \to W_{r+s}$ como :

$$J_s^r\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M_s^r(c_n)\varphi_n.$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \left\| J_s^r\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n\right)\right\|_{W_{r+s}} = \|\{M_s^r(c_n)\}\|_{\ell_{r+s}^2} &= \left\|\{c_n(\lambda_n+\alpha)^{-s/2}\}\right\|_{\ell_{r+s}^2} \\ &= \|\{c_n\}\|_{\ell_r^2} \\ &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n\right\|_{W_r}, \end{aligned}$$

con lo cual estos operadores resultan isometrías entre los espacios W_r y W_{r+s}.
Por comodidad si $r = 0$ notaremos sencillamente $J_s : W_s \to W_0 = \mathcal{H}$ al operador J_r^0.
A continuación daremos una caracterización del espacio dual de W_r.

Lema 3.3. *El espacio W_r^* es isomorfo al espacio W_{-r} .*

Demostración. Sea $g \in W_{-r}$, $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n$. Definimos $T_g : W_r \to \mathbb{C}$ de la siguiente manera. Para $f \in W_r$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n$ definimos $T_g(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \overline{g_n}$. Veamos que estos operadores resultan acotados. Tenemos:

$$|T_g(f)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \overline{g_n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \, (\lambda_n + \alpha)^{r/2} \, |\overline{g_n}| \, (\lambda_n + \alpha)^{-r/2} \leq \|f\|_{W_r} \|g\|_{W_{-r}}.$$

Con lo cual $T_g \in W_r^*$ y además $\|T_g\| = \|g\|_{W_{-r}}$.
Por otro lado, dada $\Psi \in W_r^*$ consideremos el operador dual a los operadores J_r definidos previamente. Esto es $J_r^* : W_r^* \to \mathcal{H}^*$ dado por $J_r^*(\Psi)(h) = \Psi(J_r(h))$. Ahora como $J_r^*(\Psi) \in \mathcal{H}^*$, por Riesz existe $g \in \mathcal{H}$ tal que $J_r^*(\Psi)(h) = \langle h, g \rangle_{\mathcal{H}}$ y como $\mathcal{H} \subset W_{-r}$ entonces $g \in W_{-r}$,así definimos $L : W_r^* \to W_{-r}$ como $L(\Psi) = g_\Psi$. Veamos ahora que la asignación $T : W_{-r} \to W_r^*$ dada por $T(g) = T_g$ es un isomorfismo.
Como $\|T(g)\|_{W_r^*} = \|g\|_{W_{-r}}$ y $\|L(\Psi)\|_{W_{-r}} = \|g_\Psi\|_{W_{-r}} = \|J_r^*(\Psi)\| = \|\Psi\|$ entonces ambos operadores (T y L) son acotados con lo cual solo resta ver que $T_{L(\Psi)} = \Psi$ y $L(T_g) = g$. Como $J_r^*(T_g)(h) = \langle h, g \rangle_{\mathcal{H}}$ tenemos que $L(T_g) = g$ y por otro lado $T_{L(\Psi)}(h) = \langle h, L(\Psi) \rangle_{\mathcal{H}}$ para todo $h \in W_r$ con lo cual por la definición de L concluimos que $T_{L(\Psi)} = \Psi$. $\square$

Vamos a trabajar con un sistema de la forma:

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f \qquad 0 < t < T \tag{3.3}$$

con condición inicial:

$$x(0) = x_0 \tag{3.4}$$

y con A un operador autoadjunto estrictamente positivo con autovalores $\{\lambda_n\}$ y autofunciones $\{\varphi_n\}$ como antes. Para empezar debemos ver como entendemos las soluciones del problema (3.3) así también como entendemos que se satisfagan las condiciones iniciales (3.4).
Definimos nuevos espacios:

Definición 3.4.

El espacio $L^2(0, T; W_r)$ es el espacio de funciones medibles $f : (0, T) \to W_r$ tales que:

$$\|f\|^2_{L^2(0,T;W_r)} := \int_0^T \|f(t)\|^2_{W_r} \, dt < \infty.$$

El espacio $C(0, T; W_r)$ es el espacio de funciones continuas en $(0, T)$ a valores en W_r.

Observación 3.5. El espacio $L^2(0,T;W_r)$ resulta un espacio de Hilbert con el producto:

$$\langle f,g\rangle_{L^2(0,T;W_r)} = \int_0^T \langle f(t),g(t)\rangle_{W_r} dt.$$

A partir de ahora abreviaremos el espacio $L^2(0,T;\mathbb{C})$ directamente poniendo $L^2(0,T)$.
Consideremos el espacio $\mathcal{D}(0,T)$ de distribuciones sobre $(0,T)$.
Para $f \in L^2(0,T;W_r)$ definimos su derivada generalizada como un elemento de $\mathscr{L}(\mathcal{D}(0,T),W_r)$ de la siguiente manera.
Dada una función $f \in L^2(0,T;W_r)$, f puede representarse como:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n$$

como $\int_0^T \|f(t)\|_{W_r}^2 dt < \infty$ entonces $f_n(t) \in L^2(0,T)$ y además se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^2(0,T)}^2 (\lambda_n+\alpha)^r < \infty$ pues:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^2(0,T)}^2 (\lambda_n+\alpha)^r = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T |f_n|^2 (\lambda_n+\alpha)^r dt =$$
$$\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 (\lambda_n+\alpha)^r dt = \int_0^T \|f\|_{W_r}^2 dt < \infty.$$

En particular también tenemos que $\{|f_n|\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_r^2$ en casi todo t.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos la derivada generalizada usual: si $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$:

$$\frac{df_n}{dt}(\eta) := -f_n\left(\frac{d\eta}{dt}\right) = -\int_0^T f_n(t)\eta'(t)dt \tag{3.5}$$

y definimos:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dt}\varphi_n, \quad \frac{df}{dt}(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dt}(\eta)\varphi_n.$$

Por (3.5) se tiene que:

$$\left|\frac{df_n}{dt}(\eta)\right|^2 \le \|f_n\|_{L^2(0,T)}^2 \|\eta'\|_{L^2(0,T)}^2$$

y en consecuencia $\frac{df}{dt} : \mathcal{D}(0,T) \to W_r$ resulta lineal , continuo y satisface la identidad:

$$\frac{df}{dt}(\eta) = -f\left(\frac{d\eta}{dt}\right).$$

Nos interesa buscar una solución al problema (3.3) que sea continua respecto de t.
Sea $f \in L^2(0,T;W_{r-1})$, $x_0 \in W_r$ decimos que $x \in C(0,T;W_r)$ es una solución de (3.3) con dato inicial (3.4) si la suma $\frac{dx}{dt} + Ax$ pertenece al espacio $L^2(0,T;W_{r-1})$, vale $\frac{dx}{dt} + Ax = f$ en ese espacio y $x(0) = x_0$ en W_r.

Teorema 3.2. *Sea $f \in L^2(0,T;W_{r-1})$, $x_0 \in W_r$, entonces existe una única solución $x \in C(0,T;W_r)$ al problema (2.3) que cumple $x(0) = x_0$ y además la asignación $\Gamma : L^2(0,T;W_{r-1}) \times W_r \to C(0,T;W_r)$; $\Gamma(f,x_0) = x$ es continua.*

Demostración. Como $f \in L^2(0,T;W_{r-1})$ y $x_0 \in W_r$ podemos representar f y x_0 en la forma:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n \qquad\qquad x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^0 \varphi_n$$

con $\{|f_n(t)|\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{r-1}$ y $\{x_n^0\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_r$, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(t)\|^2_{L^2(0,T)} (\lambda_n + \alpha)^{r-1} < \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left|x_n^0\right|^2 (\lambda_n + \alpha)^r < \infty.$$

Formalmente la solución buscada será de la forma:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) \varphi_n. \tag{3.6}$$

Entonces:

$$\frac{dx}{dt} + Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dx_n(t)}{dt} \varphi_n + A\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)\varphi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{dx_n(t)}{dt} + \lambda_n x_n(t)\right) \varphi_n$$

y

$$x(0) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(0) \varphi_n$$

con lo cual para que x sea solución, para cada $n \in \mathbb{N}$ debe valer:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dx_n}{dt} + \lambda_n x_n = f_n \\ x_n(0) = x_n^0 \end{array} \right. \tag{3.7}$$

De esto resulta:

$$x_n(t) = x_n^0 e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \tag{3.8}$$

y $x_n \in C(0,T;\mathbb{C})$ ya que $f_n \in L^2(0,T)$.
Proponemos $x(t)$ con los coeficientes como (3.8) veamos que la solución propuesta satisface (3.3) y (3.4). De (3.8) resulta:

$$|x_n(t)| \leq \left|x_n^0\right| e^{-\lambda_n t} + \left|\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau\right| \leq \left|x_n^0\right| e^{-\lambda_n t} + \left\|e^{-\lambda_n(t-\tau)}\right\|_{L^2(0,t)} \|f_n\|_{L^2(0,t)}.$$

Para continuar necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.4. *En estas condiciones, existe $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $t \in [0,T]$*

$$\left\|e^{-\lambda_n(t-\tau)}\right\|_{L^2(0,t)}^2 = \frac{1-e^{-2\lambda_n t}}{2\lambda_n} \leq \frac{M}{(\lambda_n+\alpha)}.$$

Demostración. (del lema) Como $\lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq C}$ basta ver que existe una constante k_α tal que la función $g(x) = (1+\frac{\alpha}{x})(1-e^{-xT})$ está acotada por k_α para todo $x > C$ y esto se debe a que:

$$\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)(1-e^{-xT}) \leq \left(1+\frac{\alpha}{C}\right).$$

□

Continuamos con la demostración del teorema 3.2 .
Por el lema 3.4 existe una constante $\gamma_\alpha > 0$ tal que:

$$|x_n(t)|^2 \leq \gamma_\alpha \left(\left|x_n^0\right|^2 + \frac{\|f_n\|_{L^2(0,t)}^2}{(\lambda_n+\alpha)}\right)$$

con lo cual:

$$(\lambda_n+\alpha)^r |x_n(t)|^2 \leq \gamma_\alpha \left((\lambda_n+\alpha)^r \left|x_n^0\right|^2 + (\lambda_n+\alpha)^{r-1} \|f_n\|_{L^2(0,t)}^2\right)$$

y sumando sobre $n \in \mathbb{N}$ obtenemos:

$$\|x(t)\|_{W_r}^2 \leq \gamma_\alpha \left(\|x_0\|_{W_r}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;W_{r-1})}^2\right) \tag{3.9}$$

y por lo tanto $\{x_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_r^2$ para cada $t \in (0,T)$.
Luego la solución construida con los coeficientes (3.8) satisface $x(t) \in W_r$ además por la construcción se satisface (3.3) y (3.4). Como la cota (3.9) es uniforme en t, por el teorema de Weierstrass resulta que x es continua en t, es decir $x(t) \in C(0,T;W_r)$ .Tomando supremo y raíz cuadrada en la cota obtenida en (3.9) se tiene:

$$\|x(t)\|_{C(0,T;W_r)} \leq \gamma'_\alpha \left(\|x_0\|_{W_r} + \|f\|_{L^2(0,T;W_{r-1})}\right)$$

y de esta desigualdad se deduce la unicidad de x y también que la asignación Γ es continua. □

Definición 3.5. Definimos el espacio $X_r(0,T)$ como:

$$X_r(0,T) = \{x \in \mathcal{H}/x \in L^2(0,T;W_{r+1}), dx/dt \in L^2(0,T;W_{r-1})\}$$

munido de la norma:

$$\|f\|^2_{X_r(0,T)} = \|f\|^2_{L^2(0,T;W_{r+1})} + \left\|\frac{df}{dt}\right\|^2_{L^2(0,T;W_{r-1})}$$

Mas adelante necesitaremos que la solución del problema (3.3) y (3.4) pertenezca al espacio $X_r(0,T)$.

Teorema 3.3. *En las condiciones del teorema 3.2 la solución del problema* (3.3) *y* (3.4) *pertenece al espacio* $X_r(0,T)$ *,más aún la asignación:* $\Gamma : L^2(0,T;W_{r-1}) \times W_r \to X_r(0,T),\ \Gamma(f,x_0) = x$ *es continua.*

Demostración. Por el teorema 3.2 existe una solución al problema en el espacio $C(0,T;W_r)$. Se quiere ver que $x \in x_r(0,T)$ es decir que $x \in L^2(0,T;W_{r+1})$ (notar que $W_{r+1} \subset W_r$ es un subespacio más chico).
Supongamos primero que en (3.7) las soluciones x_n son reales.
De (3.7)

$$\frac{dx_n(t)}{dt} + \lambda_n x_n(t) = f_n(t)$$

y entonces multiplicando por $x_n(t)(\lambda_n+\alpha)^r$ obtenemos:

$$x_n(t)(\lambda_n+\alpha)^r\frac{dx_n(t)}{dt} + x_n(t)(\lambda_n+\alpha)^r\lambda_n x_n(t) = x_n(t)(\lambda_n+\alpha)^r f_n(t)$$

ahora integrando entre 0 y T obtenemos:

$$\frac{1}{2}(\lambda_n+\alpha)^r(|x_n(T)|^2 - |x_n(0)|^2) + \lambda_n(\lambda_n+\alpha)^r\int_0^T |x_n(t)|^2\,dt =$$

$$\int_0^T (\lambda_n+\alpha)^{\frac{r-1}{2}} f_n(t)(\lambda_n+\alpha)^{\frac{r+1}{2}} x_n(t)dt$$

y finalmente sumando $\alpha(\lambda_n+\alpha)^r\int_0^T |x_n(t)|^2\,dt$ de los 2 lados de la igualdad , luego usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Young con $\varepsilon > 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\lambda_n{+}\alpha)^r&(|x_n(T)|^2 - |x_n(0)|^2) + (\lambda_n+\alpha)^{r+1}\int_0^T |x_n(t)|^2\,dt\\ &= \alpha(\lambda_n+\alpha)^r\int_0^T |x_n(t)|^2\,dt + \int_0^T (\lambda_n+\alpha)^{\frac{r-1}{2}} f_n(t)(\lambda_n+\alpha)^{\frac{r+1}{2}} x_n(t)dt\\ &\le \alpha(\lambda_n+\alpha)^r\|x_n\|^2_{L^2(0,T)} + \frac{1}{2\varepsilon}(\lambda_n+\alpha)^{r-1}\|f_n\|^2_{L^2(0,T)} + \frac{\varepsilon}{2}(\lambda_n+\alpha)^{r+1}\|x_n\|^2_{L^2(0,T)}.\end{aligned}$$

Ahora eligiendo $\varepsilon < 2$ y pasando $\frac{1}{2}(\lambda_n+\alpha)^r(|x_n(T)|^2 - |x_n(0)|^2)$ para el otro lado obtenemos y usando las desigualdades del teorema 3.2 resulta:

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)(\lambda_n+\alpha)^{r+1}\|x_n\|^2_{L^2(0,T)} &\le \alpha(\lambda_n+\alpha)^r\|x_n\|^2_{L^2(0,T)} + \frac{1}{2\varepsilon}(\lambda_n+\alpha)^{r-1}\|f_n\|^2_{L^2(0,T)}\\ &\quad - \frac{1}{2}(\lambda_n+\alpha)^r(|x_n(T)|^2 - |x_n(0)|^2)\\ &\le \gamma_\alpha\left((\lambda_n+\alpha)^r\left|x_n^0\right|^2 + (\lambda_n+\alpha)^{r-1}\|f_n\|^2_{L^2(0,t)}\right)\\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon}(\lambda_n+\alpha)^{r-1}\|f_n\|^2_{L^2(0,T)} - \frac{1}{2}(\lambda_n+\alpha)^r(|x_n(T)|^2 - |x_n(0)|^2\end{aligned}$$

Ahora sumando en n obtenemos que exista una constante K_α de modo que:

$$\|x\|^2_{L^2(0,T;W_{r+1})} \le K_\alpha\left(\|f\|^2_{L^2(0,T,W_{r-1})} + \|x\|^2_{C(0,T;W_r)}\right),\ K_\alpha > 0$$

y por último usando nuevamente la desigualdad del teorema 3.2 resulta $x \in L^2(0,T;W_{r+1})$ y de las igualdades (3.7) $dx/dt \in L^2(0,T,W_{r-1})$.
Obteniendo:

$$\|x\|^2_{X_r(0,T)} \le K'_\alpha\left(\|x_0\|^2_{W_r} + \|f\|^2_{L^2(0,T;W_{r-1})}\right),\ K'_\alpha > 0. \tag{3.10}$$

Ahora en el caso complejo debemos multiplicar por $\overline{x_n(t)}(\lambda_n+\alpha)^r$ luego multiplicar el conjugado de la igualdad $\frac{dx_n(t)}{dt} + \lambda_n x_n(t) = f_n(t)$ por el factor $x_n(t)(\lambda_n+\alpha)^r$ juntar ambas expresiones y a partir de ahí las desigualdades se siguen igual que antes. Queda probado el teorema. □

Ahora llevaremos esto al contexto de los problemas de controlabilidad. Sea $\mathcal{U}$ un espacio de Hilbert y pongamos $\mathscr{U} = L^2(0,T,\mathcal{U})$. Sea $B \in \mathscr{L}(\mathcal{U}, W_{r-1})$, para $r \in \mathbb{R}$ consideremos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{dx}{dt} + Ax = Bu & 0 < t < T,\quad u \in \mathscr{U}\\ x(0) = x_0 & x_0 \in W_r\end{array}\right. \tag{3.11}$$

Notemos que como B es un operador acotado, tenemos que:

$$\int_0^T \|Bu(t)\|_{W_{r-1}}\,dt \le \|B\|\,\|u\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})}$$

con lo cual $Bu \in L^2(0,T;W_{r-1})$. Por el teorema 3.2 tenemos que para cada $u \in \mathscr{U}$ existe una solución $x_u \in C(0,T;W_r)$ del problema (3.11) con lo cual podemos definir el conjunto de alcanzables $R(T,x_0)$ como el conjunto del final de las trayectorias $x_u(T)$ con x_u solución de (3.11) esto es:

$$R(T,x_0) = \{x_u(T)/x_u \in C(0,T;W_r),\ u \in \mathscr{U}\}.$$

Como $B(u(t)) \in W_{r-1}$ ponemos:

$$B(u(t)) = \sum_{n=1}^{\infty}(Bu(t))_n\varphi_n, \ \{B(u(t))_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{r-1} \text{ ctp.} \tag{3.12}$$

Definimos dos operadores $S(T) \in \mathscr{L}(W_r, W_r)$ y $K(T) \in \mathscr{L}(\mathscr{U}, W_r)$ como:

$$S(T)x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n^0 e^{-\lambda_n T}\right)\varphi_n. \tag{3.13}$$

$$K(T)u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T e^{-\lambda_n(T-\tau)}(Bu(\tau))_n d\tau\right]\varphi_n. \tag{3.14}$$

Con lo cual por la relación (3.8) tenemos que:

$$x_u(T) = S(T)x_0 + K(T)u \tag{3.15}$$

Nos interesa analizar el conjunto $R(T, 0) := R(T)$ ya que el conjunto $R(T, x_0)$ puede obtenerse de $R(T)$ vía un traslado $S(T)x_0$.
Nos concentraremos ahora en el estudio del conjunto $R(T) = Im(K(T))$.
Recordemos que $W_r^* \cong W_{-r}$ y dada $f \in W_r^*$ le asociamos una serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$ con $(c_n) \in \ell^2_{-r}$ con lo cual para $g \in W_r, \ g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\varphi_n$ escribimos:

$$\langle g, f\rangle_* = f(g) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\overline{c_n}.$$

Identificando $\mathcal{U}$ con $\mathcal{U}^*$ y dado que $B \in \mathscr{L}(\mathcal{U}, W_{r-1})$ definimos:
$B^* \in \mathscr{L}(W_{r-1}^*, \mathcal{U}^*) = \mathscr{L}(W_{1-r}, \mathcal{U})$ por la igualdad:

$$\langle Bg, f\rangle_* = \langle g, B^*f\rangle_{\mathcal{U}}, \quad g \in \mathcal{U}, \quad f \in W_{1-r}. \tag{3.16}$$

Con lo cual los coeficientes de $Bu(t)$ pueden expresarse como:

$$B(u(t))_n = \langle B(u(t)), \varphi_n\rangle_* = \langle u(t), B^*\varphi_n\rangle_{\mathcal{U}}. \tag{3.17}$$

Poniendo:

$$x_{u,n}(T) = \langle x_u(T), \varphi_n\rangle_*$$

resulta:

$$x_u(T) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x_u(T), \varphi_n\rangle_*\varphi_n$$

Como $\|x_u(T)\|_{W_r} = \|x_{u,n}(T)\|_{\ell^2_r}$ el conjunto de alcanzables $R(T) \subset W_r$ queda caracterizado por el conjunto de sucesiones $\{(x_{u,n}(T))_{n\in\mathbb{N}}/u \in \mathcal{U}\} \subset \ell^2_r$. Observemos ahora que por (3.14) y (3.17) tenemos que:

$$(3.18)\quad x_{u,n}(T) = \int_0^T e^{-\lambda_n(T-\tau)}(Bu(\tau))_n d\tau = \int_0^T \langle u(\tau), e^{-\lambda_n(T-\tau)}B^*\varphi_n\rangle_{\mathcal{U}} d\tau$$
$$= \langle u(\tau), e^{-\lambda_n(T-\tau)}B^*\varphi_n\rangle_{\mathscr{U}}.$$

Consideremos la familia:
(3.19)
$$\mathscr{F} = \{e_n(T-\tau)\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad e_n(T-\tau) = e^{-\lambda_n(T-\tau)}B^*\varphi_n \in \mathscr{U} = L^2(0,T;\mathcal{U}).$$

Llamaremos a este tipo de familias, familias de vectores exponenciales por que consisten en una multiplicación de una función escalar en $L^2(0,T)$ y un vector del espacio $\mathcal{U}$. Notemos que el espacio $\mathcal{U}$ puede ser de dimensión finita o de dimensión infinita y más adelante trataremos ambos casos.
Realizamos el cambio de variable $t = T - \tau$ con lo cual la fórmula (3.19) queda expresada:

$$x_{u,n}(T) = \langle u(T-t), e^{-\lambda_n t}B^*\varphi_n\rangle_{\mathscr{U}} = \langle u(T-t), e_n(t)\rangle_{\mathscr{U}}$$

Y con esto el problema de controlabilidad se transforma en un problema de los momentos de la familia $\mathscr{F}$.
Hemos concluido el siguiente resultado:

Teorema 3.4. *El conjunto de alcanzables $R(T) \subset W_r$ del problema* (3.11) *es isométrico al conjunto $\{(x_{u,n}(T))_{n\in\mathbb{N}}/u \in \mathcal{U}\} \subset \ell^2_r$ vía la asignación: $x_u(T) \to (x_{u,n}(T))_{n\in\mathbb{N}}$. Además el conjunto $\{(x_{u,n}(T))_{n\in\mathbb{N}}/u \in \mathcal{U}\}$ coincide con el conjunto de sucesiones $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_r$ tales que el problema de los momentos $c_n = \langle u(T-t), e^{-\lambda_n t}B^*\varphi_n\rangle_{\mathscr{U}}$ tiene alguna solución $u \in \mathscr{U}$.*

Podríamos enunciar un problema de los momentos en ℓ^2_r pero ya que lo hemos hecho en ℓ^2 y siendo que estos espacios son isomorfos vía la asignación M_r como lo visto en las observaciones 3.3 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.1. *El conjunto $R'(T) := \{M_r(c_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^2$ coincide con el conjunto de sucesiones $(c'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para las cuales el problema de los momentos:*

$$(3.20)\qquad c'_n = \langle u(T-\cdot), (\lambda_n+\alpha)^{r/2}e_n\rangle_{\mathscr{U}}$$

tiene alguna solución $u \in \mathscr{U}$.

Notaremos $e_n' = (\lambda_n + \alpha)^{r/2} e_n$.
Volvemos al análisis del conjunto $R(T)$ de alcanzables.
Queremos estudiar la imagen del operador $K(T)$ que venía dado por:

$$K(T)u = x_u(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-\cdot), e_n \rangle_{\mathscr{U}} \varphi_n. \tag{3.21}$$

Sea $\mathcal{H}_0$ un espacio de Hilbert incluido de forma continua en W_r que contiene a todas las autofunciones φ_n (en particular puede ocurrir $\mathcal{H}_0 = W_r$).
Introducimos las definiciones de controlabilidad:

Definición 3.6. Decimos que un sistema de la forma (3.11) es *exactamente controlable* relativo a $\mathcal{H}_0$ en tiempo T si $\mathcal{H}_0 \subset R(T)$.

En otras palabras la definición anterior es equivalente a que dada $f \in \mathcal{H}_0 \subset W_r$ exista $u \in \mathscr{U}$ tal que $x_u(T) = K(T)u = f$.

Observación 3.6. En particular puede ocurrir $\mathcal{H}_0 = R(T)$. Esta condición especial está relacionada con una importante propiedad de la familia $\mathscr{F}$ que veremos más adelante.

Definición 3.7. Decimos que un sistema de la forma (3.11) es *aproximadamente controlable* a tiempo $T > 0$, si $\overline{R(T)}^{\|\cdot\|_{W_r}} = W_r$.

La definición anterior significa que dada $f \in W_r$ y $\varepsilon > 0$ existe $u \in \mathscr{U}$ de modo que se satisface: $\|x_u(T) - f\|_{W_r} < \varepsilon$.

Observación 3.7. Un caso particular de esto es que existan $u_n \in \mathscr{U}$ de modo que $K(T)u_n = \varphi_n$. Distinguiremos este caso del resto como también el caso en el que existan $u_n \in \mathscr{U}$ de modo que $K(T)u_n = \varphi_n$ y además exista $k > 0$ de modo que: $\|u_n\|_{\mathscr{U}} \leq k \|\varphi_n\|_{\mathcal{H}_0}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Estas dos propiedades más fuertes que cumplir $\overline{R(T)}^{\|\cdot\|_{W_r}} = W_r$ están intrínsecamente ligadas a las propiedades de la familia $\mathscr{F}$ vistas en el capítulo anterior.

Establezcamos la relación entre la controlabilidad del sistema (3.11) y las propiedades de la familia $\mathscr{F}$ en el espacio $\mathscr{U}$.
Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y consideremos el espacio $W_{(a_n)}$ dado por la clausura de las sumas finitas de la forma $\sum_j c_{n_j} \varphi_{n_j}$ con la norma

$$\left\| \sum_j c_{n_j} \varphi_{n_j} \right\|_{(a_n)} := \left(\sum_j \left| c_{n_j} \right|^2 a_{n_j}^2 \right)^{1/2}.$$

Enunciaremos los resultados de controlabilidad para espacios particulares $\mathcal{H}_0 = W_{(a_n)}$.Para que estos estén contenidos en nuestra teoría pediremos que $\mathcal{H}_0 \hookrightarrow W_r$ y para esto bastara con que exista una constante $N > 0$ y se satisfaga:

$$(\lambda_n + \alpha)^r \leq N a_n \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.22}$$

Junto a estos nuevos espacios definimos:

$$\ell^2_{(a_n)} := \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}} / (a_n c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\}.$$

Con lo cual $f \in W_{(a_n)}$ si y solo si $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n,\ \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{(a_n)}$ como lo visto para los espacios W_r.

Observación 3.8. Notemos que en estas condiciones se tiene que $W_r = W_{(r_n)}$ tomando $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como $r_n = (\lambda_n + \alpha)^{r/2}$ y que, como antes, los espacios $\ell^2_{(a_n)}$ son isométricos al espacio ℓ^2 vía la multiplicación $M_{(a_n^{-1})}$.

Definimos $\mathscr{F}_0 = \{a_n e_n(t)\}$ y $\mathscr{F}' = \{r_n e_n(t)\} = e'_n(t)$, con $r_n = (\lambda_n + \alpha)^{r/2}$. Así como antes definimos las isometrias M_r entre los espacios ℓ^2 y ℓ^2_r en este contexto podemos definir los siguientes operadores que resultan isometrías:

$$\mathcal{L}_0 : \ell^2 \to \mathcal{H}_0, \quad \mathcal{L}_0((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{a_n} \varphi_n$$

$$\mathcal{L}' : \ell^2 \to W_r, \quad \mathcal{L}'((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{r_n} \varphi_n$$

así como también los operadores de los problemas de momentos de $\mathscr{F}_0$ y $\mathscr{F}'$, $\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}$ y $\mathcal{P}_{\mathscr{F}'}$ que recordemos vienen dados por:

$$\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0} : D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}) \subset \mathscr{U} \to \ell^2,\ \mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}(g) = \{\langle g, a_n e_n \rangle_{\mathscr{U}}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

y

$$\mathcal{P}_{\mathscr{F}'} : D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}'}) \subset \mathscr{U} \to \ell^2,\ \mathcal{P}_{\mathscr{F}'}(g) = \{\langle g, r_n e_n \rangle_{\mathscr{U}}\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Recordemos que:

$$D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}'}) = \{v \in \mathscr{U} / \{\langle v, r_n e_n \rangle_{\mathscr{U}}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\} = \{v \in \mathscr{U} / \{\langle v, e_n \rangle_{\mathscr{U}}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_r\}.$$

Además

$$D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}) = \{v \in \mathscr{U} / \{\langle v, a_n e_n \rangle_{\mathscr{U}}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\} = \{v \in \mathscr{U} / \{\langle v, e_n \rangle_{\mathscr{U}}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{(a_n)}\}$$

que es un subconjunto de $\mathscr{U}$ debido a la cota pedida en (3.22).
En estas condiciones notemos que si $u \in D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0})$ entonces:

$$\mathcal{L}_0(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}(u)) = \mathcal{L}_0(\{\langle u, a_n e_n\rangle_{\mathscr{U}}\}_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u, a_n e_n\rangle_{\mathscr{U}}}{a_n}\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\langle u, e_n\rangle_{\mathscr{U}}\varphi_n.$$

Análogamente si $u \in D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}'})$ entonces:

$$\mathcal{L}'(\mathcal{P}_{\mathscr{F}'}(u)) = \mathcal{L}'(\{\langle u, r_n e_n\rangle_{\mathscr{U}}\}_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u, r_n e_n\rangle_{\mathscr{U}}}{r_n}\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\langle u, e_n\rangle_{\mathscr{U}}\varphi_n.$$

En estas condiciones se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Los operadores $\mathcal{L}_0$ y $\mathcal{L}'$ son isometrías en sus espacios y además valen las fórmulas:*

$$K(T) = \mathcal{L}'\mathcal{P}_{\mathscr{F}'}L, \qquad K(T)|_{L^{-1}D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0})} = \mathcal{L}_0\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}L|_{L^{-1}D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0})}$$

donde $L : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ es la isometría $L(u)(t) = u(T-t)$.

Demostración. $\mathcal{L}_0$ es isometría pues:

$$\|\mathcal{L}_0(x_n)\|_{\mathcal{H}_0} = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x_n}{a_n}\right|^2 a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n^2\right| = \|x_n\|_{\ell^2}$$

luego $\mathcal{L}'$ también lo es por ser un caso particular tomando $a_n = r_n,\ \mathcal{H}_0 = W_r$.
Las fórmulas se verifican por las igualdades (3.20) y (3.21). □

Observación 3.9. Supongamos que $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema biortogonal para la familia $\mathscr{F}$ entonces $\{a_n^{-1}\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lo es para $\mathscr{F}_0$ y también $\{r_n^{-1}\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lo es para $\mathscr{F}'$.
Esto se debe a que $a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$ y las formulas:

$$\langle a_m^{-1}\varrho_m, a_n e_n\rangle_{\mathscr{U}} = a_m^{-1}a_n\langle \varrho_m, e_n\rangle_{\mathscr{U}} = \delta_{m,n}$$

$$\langle r_m^{-1}\varrho_m, r_n e_n\rangle_{\mathscr{U}} = r_m^{-1}r_n\langle \varrho_m, e_n\rangle_{\mathscr{U}} = \delta_{m,n}.$$

Estamos en condiciones de enunciar el teorema de controlabilidad para un sistema como (3.11).

Teorema 3.5. *(Controlabilidad) Sea* $\mathcal{H}_0 = W_{(a_n)}$ *,las familias* $\mathscr{F}_0 = \{a_n e_n(t)\}$ *y* $\mathscr{F}' = \{r_n e_n(t)\} = e_n'(t)$ *, los espacios* $V_0 := \overline{Span\{a_n e_n(t)\}}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $V' := \overline{Span\{r_n e_n(t)\}}_{n\in\mathbb{N}}$*, entonces:*

- *a) El sistema* (3.11) *es exactamente controlable relativo a* $\mathcal{H}_0 = W_{(a_n)}$ *y más aún* $R(T) = \mathcal{H}_0$ *en tiempo* $T \iff$ *La familia* $\mathscr{F}_0$ *es una base de Riez de* V_0*.*
- *b) Si el sistema* (3.11) *es exactamente controlable a tiempo* T *relativo a* $\mathcal{H}_0 \Rightarrow$ *La familia* $\mathscr{F}_0$ *es minimal uniforme.*
- *c) Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *existen* $u_n \in \mathscr{U}$ *tales que* $K(T)u_n = \varphi_n$ *y una constante* $k > 0$ *tal que* $\|u_n\|_{\mathscr{U}} \leq k\,\|\varphi_n\|_{\mathcal{H}_0}$ *(En particular el sistema* (3.11) *es aproximadamente controlable a tiempo* T*)* $\iff$ *La familia* $\mathscr{F}_0$ *es minimal uniforme en* $\mathscr{U}$*.*
- *d) Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *existen* $u_n \in \mathscr{U}$ *tales que* $K(T)u_n = \varphi_n$ *(En particular el sistema* (3.11) *es aproximadamente controlable a tiempo* T*)* $\iff$ *La familia* $\mathscr{F}_0$ *es minimal en* $\mathscr{U}$*.*
- *e) El sistema* (3.11) *es aproximadamente controlable a tiempo* $T \iff$ *La familia* $\mathscr{F}'$ *es* $W - l.i.$

Demostración. Comenzaremos mostrando que :

$$D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}) = \mathscr{U} \iff R(T) = Im(K(T)) \subset \mathcal{H}_0.$$

$\Rightarrow$ Como $R(T) \subset \mathcal{H}_0$ entonces $D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}) = \mathscr{U}$ pues:
Dada $u \in \mathscr{U}$ y $f = K(T)u \in \mathcal{H}_0$, es decir $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n,\ \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{(a_n)}$ de la definición de $K(T)$ resulta $\langle u(T-\cdot), e_n\rangle_{\mathscr{U}} = c_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ con lo cual $\langle u(T-\cdot), a_n e_n\rangle_{\mathscr{U}} = a_n c_n$ y en definitiva $\{\langle u(T-\cdot), a_n e_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.Luego $Lu \in D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0})$ y como L es isometría resulta $D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}) = \mathscr{U}$.
$\Leftarrow$ Supongamos que $D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}) = \mathscr{U}$ entonces para toda $u \in \mathscr{U}$ tenemos que $\{\langle u(T-\cdot), a_n e_n\rangle_{\mathscr{U}}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^2$ con lo cual:

$$K(T)u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-\cdot), e_n\rangle_{\mathscr{U}}\varphi_n \in \mathcal{H}_0.$$

Continuamos con la demostración del teorema.
a) $\Rightarrow$ Supongamos que el sistema (3.11) es exactamente controlable relativo a $\mathcal{H}_0 = W_{(a_n)}$ y más aún $R(T) = \mathcal{H}_0$. Por lo visto previamente tenemos que $D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}) = \mathscr{U}$ y además por el teorema 2.4 tenemos que $\mathscr{F}_0$ es base de Riesz de V_0 si y solo si $\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}|_{V_0}$ es un isomorfismo con ℓ^2. Dada $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ entonces

$\{\frac{c_n}{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{(a_n)}$, como $R(T) = \mathcal{H}_0$ existe $u \in \mathscr{U}$ tal que $K(T)u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{a_n}\varphi_n$ luego $\mathcal{L}_0\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}(u(T-\cdot)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{a_n}\varphi_n$ con lo cual $\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}(u(T-\cdot)) = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ luego el operador $\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}|_{V_0}$ es inversible y en consecuencia por el teorema del gráfico cerrado resulta un isomorfismo.
$\Leftarrow$ Para ver que $R(T) = \mathcal{H}_0$ notemos que como $\mathscr{F}_0$ es base de Riesz de V_0 entonces por el teorema 2.4 $\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}|_{V_0}$ es un isomorfismo entre V_0 y ℓ^2. En particular $Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}) = \ell^2$.Dada $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n \in \mathcal{H}_0$ tenemos que $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{(a_n)}$ con lo cual $\{c_na_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Sea $u \in \mathscr{U}$ tal que $\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}(u(T-\cdot)) = \{c_na_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces por las formulas de la proposición 3.1 obtenemos que $K(T)u = \mathcal{L}_0\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}(u(T-\cdot)) = f$ luego $\mathcal{H}_0 \subset R(T)$. Para la otra inclusión solo notemos que por 2.4 tenemos que $D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}) = \mathscr{U}$ y entonces $R(T) = Im(K(T)) \subset \mathcal{H}_0$.

b) Por las fórmulas de la proposición 3.1 $\mathcal{H}_0 \subset R(T)$ es equivalente a que $Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}) = \ell^2$ con lo cual por 2.4 implica que $\mathscr{F}_0$ es minimal uniforme.

c) Sea Φ_n la base canonica de ℓ^2.
$\Rightarrow$ Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in \mathscr{U}$ que satisface la igualdad $K(T)u_n = \varphi_n$ entonces por la definición de $K(T)$ y el hecho de que φ_n son base de $\mathcal{H}$ se tiene que :

$$\langle u_n(T-t), e_k(t)\rangle_{\mathscr{U}} = \begin{cases} 0 & ,\text{si} \quad k \neq n \\ 1 & ,\text{si} \quad k = n \end{cases}$$

Luego se tiene:

$$\langle a_n^{-1}u_n(T-t), a_ke_k(t)\rangle_{\mathscr{U}} = \delta_{k,n}$$

con lo cual la familia $\{a_n^{-1}u_n(T-t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema biortogonal para $\mathscr{F}_0$. Para terminar notemos que:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|a_n^{-1}Lu_n\right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n^{-1}\left\|u_n\right\| \leq k \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n^{-1}\left\|\varphi_n\right\|_{\mathcal{H}_0} = k$$

y entonces $\mathscr{F}_0$ es minimal uniforme.

$\Leftarrow$ Supongamos que $\mathscr{F}_0$ es minimal uniforme , entonces existe $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{U}$ un sistema biortogonal para $\mathscr{F}_0$, podemos evaluar en la fórmula de la proposición 3.1 y obtenemos:

$$\begin{aligned} K(T)(L^{-1}(\varrho_n)) &= \mathcal{L}_0\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}L|_{L^{-1}D(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0})}(L^{-1}(\varrho_n)) \\ &= \mathcal{L}_0\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}(\varrho_n) \\ &= \mathcal{L}_0(\Phi_n) = a_n^{-1}\varphi_n. \end{aligned}$$

Con lo cual la implicación queda probada tomando $u_n = a_n L^{-1}(\varrho_n)$ ya que

$$\|u_n\|_{\mathscr{U}} = \left\|a_n L^{-1}(\varrho_n)\right\|_{\mathscr{U}} = \|\varrho_n\|_{\mathscr{U}}\, a_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varrho_n\|_{\mathscr{U}}\, a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varrho_n\|_{\mathscr{U}}\, \|\varphi_n\|_{\mathcal{H}_0}.$$

d) La demostración está contenida en el ítem c).

e) Siendo $\mathcal{L}'$ y L isometrías por la fórmula $K(T) = \mathcal{L}'\mathcal{P}_{\mathscr{F}'}L$ que el sistema (3.11) sea aproximadamente controlable es equivalente a que $\overline{Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}'})} = \ell^2$ y por 2.4 esto es equivalente a que $\mathscr{F}'$ sea W-l.i. $\square$

Mostraremos ahora un resultado de controlabilidad en relación a los diferentes espacios de la forma $\mathcal{H}_0 = W_{(a_n)}$.

Teorema 3.6. *a) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números positivos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} < \infty$. Si el sistema* (3.11) *es aproximadamente controlable a tiempo T y la familia $\mathscr{F}_0$ es minimal uniforme, entonces el sistema es exactamente controlable a tiempo T en $W_{(b_n)}$.*

b)Supongamos que la familia $\mathscr{F}$ es minimal en $\mathscr{U}$, sea $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema biortogonal para $\mathscr{F}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de modo que se satisface:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varrho_n\|_{\mathscr{U}}\, a_n^{-1} = \infty$$

entonces el sistema (3.11) *no es exactamente controlable a tiempo T relativo al espacio $\mathcal{H}_0 = W_{(a_n)}$.*

Demostración. a) Mostremos que $W_{(b_n)} \subset R(T)$. Por la demostración del teorema (3.5) ítem c) y como la familia $\mathscr{F}_0$ es minimal uniforme relativo a $W_{(a_n)}$, tenemos que por ser minimal podemos construir como en la demostración $a_n^{-1}Lu_n$ que es un sistema biortogonal a $\mathscr{F}_0$ y por ser uniforme entonces existe $M > 0$ tal que $\|a_n^{-1}Lu_n\|_{\mathscr{U}} < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Llamemos $\varrho_n = Lu_n$ .Tenemos por la construcción que ϱ_n es biortogonal para $\mathscr{F}$ y satisface $\|\varrho_n\|_{\mathscr{U}} < Ma_n$. Tomamos $\varrho_n' = r_n^{-1}\varrho_n$, esta familia resulta un sistema biortogonal para $\mathscr{F}'$ y además satisface $\|\varrho_n'\|_{\mathscr{U}} \leq Ma_n r_n^{-1}$.
Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n \in W_{(b_n)}$, o sea que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 b_n^2 < \infty$, mostremos que $x \in R(T)$. Por la fórmula de la proposición (3.1) basta ver que la sucesión $\{x_n r_n\}$ pertenece a la imagen del operador $\mathcal{P}_{\mathscr{F}'}$ pero para esto por 2.2 es

suficiente mostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n r_n| \, \|\varrho'_n\|_{\mathscr{U}}$ es convergente. Veámoslo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n r_n| \, \|\varrho'_n\|_{\mathscr{U}} \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |x_n r_n| \, a_n r_n^{-1} = M \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \, a_n =$$
$$= M \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \, b_n a_n b_n^{-1} \leq M \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \, b_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} \right)^{1/2} < \infty.$$

b) Como $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varrho_n\|_{\mathscr{U}} \, a_n^{-1} = \infty$ existe $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ de modo que se cumple $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|^2 \, \|\varrho_n\|_{\mathscr{U}}^2 \, a_n^{-2} = \infty$ en otras palabras , $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|^2 \, \|\varrho_n^0\|_{\mathscr{U}}^2 = \infty$ donde $\{\varrho_n^0\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n^{-1} \varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema biortogonal de la familia $\mathscr{F}_0$.
Luego por el corolario 2.2 ítem b) resulta $Im(\mathcal{P}_{\mathscr{F}_0}) \neq \ell^2$ y en consecuencia $W_{(a_n)} \nsubseteq R(T)$ como queríamos. $\square$

A continuación exhibiremos un resultado muy importante que nos dirá que la controlabilidad aproximada en realidad se corresponde con una controlabilidad exacta para un espacio adecuado. Este resultado utiliza el método de Hilbert Uniqueness Method introducido por J.L. Lions en [13].

Teorema 3.7. *Si el sistema* (3.11) *con* $x(0) = 0$ *es aproximadamente controlable a tiempo* $T > 0$ *entonces existe un espacio* $\mathcal{H}_0$ *denso en* W_r *de modo que* $R(T) = \mathcal{H}_0$ *.*

Demostración. Vamos a considerar el operador A esta vez como operador entre los espacios W_{r+1} y W_{r-1} siguiendo la regla:

$$A\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\lambda_n\varphi_n$$

Es inmediato que el operador es continuo entre estos espacios y en consecuencia su operador dual $A^* : W_{r-1}^* = W_{-r+1} \to W_{r+1}^* = W_{-r-1}$ es un operador acotado.
Consideremos el sistema dual:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{dy}{dt} + A^*y = 0 & 0 < t < T \\ y(T) = y_T & y_T \in W_r^* = W_{-r} \end{array} \right. \tag{3.23}$$

Análogamente a lo hecho en el teorema 3.3 se puede probar que existe solución de este sistema con dato final $y_T \in W_{-r}$ y $y \in L^2(0, T; W_{-r+1})$, $dy/dt \in L^2(0, T; W_{-r-1})$ con lo cual $A^*y \in L^2(0, T; W_{-r-1})$. Además se puede probar una cota similar a la probada en (3.10) obteniendo en este caso:

$$\|y\|_{L^2(0,T;W_{-r+1})} \leq K \|y_T\|_{W_{-r}} .$$

Como $B^* \in \mathscr{L}(W_{-r+1}, \mathcal{U})$ definimos $v(t) = B^*y(t)$ entonces $v \in \mathscr{U} = L^2(0, T; \mathcal{U})$ y además existe $K > 0$ tal que:

$$\|v\|_{\mathscr{U}} \leq K \|y\|_{L^2(0,T;W_{-r+1})} \leq K \|y_0\|_{W_{-r}} .$$

Definimos en W_{-r} una nueva norma de la siguiente manera: dada $y_T \in W_{-r}$ definimos $\|y_T\| = \|B^*y\|_{\mathscr{U}}$ donde y es la solución de la ecuación (3.23). Veamos que efectivamente es una norma en W_{-r}. Es claro que como la ecuación y B^* son lineales y $\|\cdot\|_{\mathscr{U}}$ es efectivamente una norma tenemos que vale la desigualdad triangular y los escalares salen en modulo. Resta ver entonces que si $\|y_T\| = 0$ entonces $y_T = 0$, esto equivale a ver que si $B^*y = 0$ entonces $y_T = 0$. Sea ahora $u \in \mathscr{U} = L^2(0, T; \mathcal{U})$ y $x \in L^2(0, T; W_{r+1})$ con $dx/dt \in L^2(0, T; W_{r-1})$ una solución del problema (3.11) , esto es:

$$\frac{dx}{dt} + Ax - Bu = 0 \text{ como función en } L^2(0, T; W_{r-1})$$

con condición inicial $x(0) = 0$.
Por otro lado sea $y_T \in W_{-r}$ e y la solución del problema (3.23) , esto es $y \in L^2(0,T;W_{-r+1})$ que satisface:

$$-\frac{dy}{dt} + A^*y = 0 \text{ como función de } L^2(0,T;W_{-r-1})$$

con condición final $y(T) = y_T$.
Tenemos entonces:
(3.24)

$$0 = \int_0^T \left\langle \frac{dx}{dt} + Ax - Bu, y \right\rangle_{W_{r-1}\times W_{-r+1}} dt - \int_0^T \left\langle x, -\frac{dy}{dt} + A^*y \right\rangle_{W_{r+1}\times W_{-r-1}} dt.$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\langle \frac{dx}{dt}, y \right\rangle_{W_{r-1}\times W_{-r+1}} dt + \int_0^T \left\langle x, \frac{dy}{dt} \right\rangle_{W_{r+1}\times W_{-r-1}} dt = \\ = \int_0^T \frac{d}{dt}\langle x, y\rangle_{W_r\times W_{-r}} dt \\ = \langle x(T), y(T)\rangle_{W_r\times W_{-r}} - \langle x(0), y(0)\rangle_{W_r\times W_{-r}}.\end{aligned}$$

(3.25)

Por otro lado:

$$\begin{aligned}(3.26) \quad \int_0^T \langle Ax - Bu, y\rangle_{W_{r-1}\times W_{-r+1}} dt - \int_0^T \langle x, A^*y\rangle_{W_{r+1}\times W_{-r-1}} dt \\ = -\int_0^T \langle u, B^*y\rangle_{U} = -\langle u, B^*y\rangle_{\mathscr{U}}.\end{aligned}$$

Ahora combinando (3.25) y (3.26) con (3.24) y usando que $x(0) = 0$ obtenemos:

$$(3.27) \qquad \langle x(T), y_T\rangle_{W_r\times W_{-r}} = \langle u, B^*y\rangle_{\mathscr{U}}.$$

Si $B^*y = 0$ entonces el lado izquierdo de (3.27) es cero para cualquier $u \in \mathscr{U}$.
Como el sistema (3.11) es aproximadamente controlable, el conjunto $R(T)$ es denso en W_r , y en consecuencia $y_T = 0$.
Definimos $\mathcal{J}$ como la clausura del espacio W_{-r} con esta nueva norma. Por lo visto el espacio $\mathcal{J}$ está bien definido y vale $W_{-r} \subset \mathcal{J}$.
Sea $\mathcal{H}_0$ el espacio dual de $\mathcal{J}$ entonces $\mathcal{H}_0 \hookrightarrow W_r$ de forma densa y continua.
Resta ver que el sistema (3.11) satisface $R(T) = \mathcal{H}_0$.

Dado $x_u(T) \in R(T) \subset W_r$ tenemos por (3.27) que para todo $y_T \in W_{-r}$ resulta:

$$\langle x_u(T), y_T \rangle_{W_r \times W_{-r}} \leq \|u\|_{\mathscr{U}} \|y_T\|_{\mathcal{J}}$$

entonces $x_u(T) \in W_r^*$ es lineal y continuo se extiende por Hahn-Banach a $\mathcal{J}$ y en definitiva $x_u(T) \in \mathcal{J}^* = \mathcal{H}_0$ con lo cual $R(T) \subset \mathcal{H}_0$.
Definimos el operador $\Lambda : W_{-r} \to W_r$ de la siguiente manera:

$$W_{-r} \to L^2(0,T;W_{-r+1}) \to L^2(0,T;\mathcal{U}) \to C(0,T;W_r) \to W_r$$

$$y_t \to y \text{ solución de (3.23)} \to u = B^* y \to x_u \text{ solución de (3.11)} \to x_u(T).$$

Es fácil verificar que Λ es lineal y además se tiene que:

$$\|\Lambda y_T\|_{W_r} = \|x_u(T)\|_{W_r} \leq k \|Bu\|_{L^2(0,T;W_{r-1})} \leq k' \|u\|_{\mathscr{U}} = k' \|B^* y\|_{\mathscr{U}} = k' \|y_T\|_{\mathcal{J}}$$

con lo cual podemos extender Λ a $\mathcal{J}$ y además $\mathcal{J}$ resulta un espacio de Hilbert con el producto interno que se deduce de la norma.
Ahora por (3.27) tenemos que:

$$\langle x_u(T), y_T \rangle = \langle \Lambda y_T, y_T \rangle_{W_r \times W_{-r}} = \langle B^* y, B^* y \rangle = \|B^* y\|_{\mathscr{U}}^2 = \|y_T\|_{\mathcal{J}}^2.$$

Definimos $B : W_{-r} \times W_{-r} \to \mathbb{C}$ como $B(y_T, z_T) = \langle \Lambda y_T, z_T \rangle_{W_r \times W_{-r}}$. B resulta una forma bilineal continua que además satisface $|B(y_T, z_T)| \leq \|y_T\|_{\mathcal{J}} \|z_T\|_{\mathcal{J}}$. Con un argumento similar podemos extender B al espacio $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$. Como $|B(y_T, z_T)| \leq \|y_T\|_{\mathcal{J}} \|z_T\|_{\mathcal{J}}$ y $B(y_T, y_T) = \langle \Lambda y_T, y_T \rangle \geq \|y_T\|_{\mathcal{J}}^2$ estamos en las hipótesis del teorema de Lax-Milgram.
Dado un elemento $\Psi \in \mathcal{H}_0 = \mathcal{J}^*$ existe un único elemento $z \in \mathcal{J}$ tal que $B(z, y_T) = \Psi(y_T)$ para todo $y_T \in \mathcal{J}$ como Λy_T cumple esto concluimos que Λy_T es el único $z \in \mathcal{J}$ que cumple $B(\Lambda y_T, y_T) = \Psi(y_T)$ con lo cual Λ es una biyeccion entre $\mathcal{J}$ y $\mathcal{H}_0$ y como Λ es lineal y continuo concluimos que es un isomorfismo y en definitiva $\mathcal{H}_0 \subset R(T)$. $\square$

Capítulo 4

Aplicaciones y ejemplos.

En esta sección presentaremos algunas aplicaciones de lo expuesto en las secciones 1 y 2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera $\partial\Omega = \Gamma$.
Sea $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0,T), T > 0$ y sean $a_0,\ a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ $(i,j = 1...N)$, $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Vamos a suponer en esta sección que existe $k > 0$ tal que para todo $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^N$ vale que:

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) v_i v_j \geq k \sum_{j=1}^{N} v_j^2, \text{ en casi todo } x \in \Omega. \tag{4.1}$$

Usando la notación del capítulo anterior, ponemos $\mathcal{H} = L^2(\Omega),\ \mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ así se tiene que $\mathcal{V}^* = H^{-1}(\Omega)$ (ver [14]). Para $f, g \in H_0^1(\Omega)$ definimos:

$$G(f,g) = \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial g}{\partial x_j}} + \int_\Omega a_0(x) f \overline{g}.$$

Puede verse el siguiente lema en [6].

Lema 4.1. *La forma G definida anteriormente es sesquilineal y continua .*

Continuamos con definiciones que utilizaremos durante esta sección.
Sea $G_\alpha(f,g) = G(f,g) + \alpha\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)}$ como en el capítulo anterior y tomamos $\alpha_0 > \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ para que se satisfaga valga la ecuación (4.1). Llamamos A al operador generado por G_{α_0}, puede verse en [6] teorema 5 pagina 305 que existen autovalores λ_n de A que satisfacen $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ y autofunciones $\varphi_n \in L^2(\Omega)$ correspondientes a λ_n que cumplen:

$$A\varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x) \text{ para } x \in \Omega, \qquad \varphi_n|_\Gamma = 0.$$

Supondremos a partir de ahora que φ_n son funciones reales. Se tiene que el operador A también admite la siguiente expresión diferencial:

$$Af = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) + a_0(x)f.$$

A continuación analizaremos el problema de control de un sistema como (3.11) para un espacio $\mathcal{U}$ de dimensión finita y también de dimensión infinita.

Observación 4.1. En general para un sistema como este caracterizar los espacios W_r definidos en el capítulo 2 no es nada sencillo, sin embargo en este ejemplo y bajo las hipótesis previas puede probarse que existe un número que llamaremos $r*$ (que depende de la suavidad de los coeficientes a_{ij}, a_0) y satisface que para $r \in [0, r*]$:

$$H_0^r(\Omega) \subset W_r \subset H^r(\Omega)$$

(ver [14]) .Por ejemplo para $\mathcal{V} = W_1 = H_0^1(\Omega)$ tenemos que:

$$H_0^2(\Omega) \subset W_2 = D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

y

$$W_4 = D(A^2) = \{f \in H^4(\Omega)/f \in H_0^1(\Omega),\ Af \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Con las notaciones y los supuestos anteriores desarrollaremos algunos ejemplos de controlabilidad.

Ejemplo 4.1. Sea $\mathcal{H} = L^2(\Omega),\ \mathcal{V} = H_0^1(\Omega),\ \mathcal{V}^* = H^{-1}(\Omega)$, $r = 1$, A como antes y $\mathcal{U} = \mathcal{H} = L^2(\Omega)$ y sea $B = Id_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} = \mathcal{U} \to W_{1-1} = W_0 = \mathcal{H}$. Finalmente sea x la solución del problema:

$$\left\{\begin{array}{lr} \frac{dx}{dt} + Ax = Bu = u & Q \\ x|_\Gamma = 0 & u \in \mathscr{U} = L^2(0,T;\mathcal{U}) = L^2(Q) \end{array}\right. \tag{4.2}$$

con condición inicial $x(.,0) = 0$ en Ω.

Por el teorema (3.2) (para el caso $r = 1$) se sigue que para todo $u \in \mathscr{U}$ existe una única solución $x \in C(0,T;H_0^1(\Omega))$ del problema (4.2) con la condición inicial dada.
Para el sistema (4.2) como $B^* = Id_{\mathcal{H}}$ tenemos:

$$\langle Bf, \varphi_n\rangle_* = \langle f, \varphi_n\rangle_{L^2(\Omega)}, \quad f \in \mathcal{U} = L^2(\Omega).$$

En consecuencia la familia $\mathscr{F} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{U}$ de la fórmula (3.19) tiene la forma: $e_n(x,t) = e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x)$. Para este problema tenemos el siguiente resultado de controlabilidad.

Proposición 4.1. *El sistema* (4.2) *es exactamente controlable relativo a* $H_0^1(\Omega)$ *para cualquier tiempo* $T > 0$. *Mas aún vale que* $R(T) = H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Por el teorema (3.5) basta ver que la familia $\mathscr{F}_0 := \{a_n e_n\}$, con $a_n = (\lambda_n + \alpha)^{1/2}$, es una base de Riesz del espacio $\overline{Span\{a_n e_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$.
Como la familia $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ortonormal en $L^2(\Omega)$ se tiene que las familias $\mathscr{F} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\mathscr{F}_0 = \{(\lambda_n + \alpha)^{1/2} e_n\}$ son ortogonales en $\mathscr{U}$. Calculemos la norma de un elemento de $\mathscr{F}_0$.

$$\left\|(\lambda_n + \alpha)^{1/2} e_n\right\|_{\mathscr{U}}^2 = (\lambda_n + \alpha) \int_0^T e^{-2\lambda_n t} dt = \frac{(\lambda_n + \alpha)}{2\lambda_n}(1 - e^{-2\lambda_n T}).$$

Entonces como $\lambda_n \geq C$ para todo n por el lema (3.4) existen constantes m, M tales que:

$$m \leq \left\|(\lambda_n + \alpha)^{1/2} e_n\right\|_{\mathscr{U}}^2 \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego dados $c_1, ..., c_N$ se tiene que:

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} c_n (\lambda_n + \alpha)^{1/2} e_n\right\|_{\mathscr{U}}^2 = \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \left\|(\lambda_n + \alpha)^{1/2} e_n\right\|_{\mathscr{U}}^2$$

y en consecuencia:

$$m \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \leq \left\|\sum_{n=1}^{N} c_n (\lambda_n + \alpha)^{1/2} e_n\right\|_{\mathscr{U}}^2 \leq M \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 .$$

Finalmente por el teorema de Bari (2.1) concluimos que $\mathscr{F}_0 = \{a_n e_n\}$ es base de Riesz de $\overline{Span\{a_n e_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ con lo cual $R(T) = W_{(a_n)} = W_1 = H_0^1(\Omega)$. $\square$

Comenzamos con un ejemplo sencillo donde B es el operador identidad con lo cual para un sistema como (3.11) el lado izquierdo de la igualdad no tiene restricciones y en consecuencia al poder variar u en todo $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ es natural esperar que se tenga controlabilidad exacta , a continuación trabajaremos con el caso en el que el espacio $\mathcal{U}$ tenga dimensión finita.

Para trabajar el siguiente ejemplo que es el caso en el que $dim(\mathcal{U}) < \infty$ necesitaremos algunos resultados previos.

Teorema 4.1. *(Leont'ev) Sea* $\{\lambda_n\}$ *una sucesión de números reales que satisface* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...$ *y:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\log n} = \infty.$$

Si la serie $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ *converge para* $z = t_0 \in \mathbb{R}$ *entonces converge absolutamente y de forma uniforme en el semiplano* $\mathrm{Re}\,(z) \geq t_0 + \varepsilon$ *para todo* $\varepsilon > 0$ *donde representa una función analítica. Mas aún, en este semiplano la función* $f(z)$ *es acotada y decae en forma exponencial cuando* $\mathrm{Re}\,(z) \to \infty$ *con la cota:*

$$|f(z)| < e^{-\delta \mathrm{Re}(z)}, \delta > 0.$$

Demostración. Como la serie converge en $z = t_0$ entonces el término general de la serie está acotado, es decir, existe $C > 0$ tal que:

$$|a_n|\, e^{-\lambda_n t_0} \leq C.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y z tal que $\mathrm{Re}\,(z) \geq t_0 + \varepsilon$ entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n e^{-\lambda_n z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, e^{-\lambda_n t_0} e^{-\lambda_n (\mathrm{Re}(z) - t_0)} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon \lambda_n}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\log n} = \infty$ existe $N > 0$ tal que si $n \geq N$ vale que $\varepsilon \lambda_n > 2 \log n$ con lo cual:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| a_n e^{-\lambda_n z} \right| \leq C \sum_{n=N}^{\infty} e^{-2\log n} = C \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Entonces la serie converge uniformemente y por lo tanto representa una función analítica.

Para el decrecimiento exponencial escribimos f en la forma:

$$f(z) = e^{-\lambda_1 z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_1) z}.$$

Entonces si $0 < \delta \leq \lambda_1$ obtenemos $|f(z)| < e^{-\delta \mathrm{Re}(z)}$. □

Corolario 4.1. *Supongamos que tenemos una sucesión* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *que satisface las hipótesis del teorema (4.1) , sea* $\varepsilon > 0$ *tal que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t}$ *converge a cero en el intervalo* $(t_0, t_0 + \varepsilon)$*. Entonces todos los coeficientes son cero.*

Demostración. Por el teorema previo la serie $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ es analítica en el semiplano $\mathrm{Re}\,(z) > t_0$ en consecuencia como converge a cero tenemos que $f(z) = 0$ en $\mathrm{Re}\,(z) > t_0$. Supongamos que no todos los coeficientes a_n son cero, sea $a_j \neq 0$ el mínimo con la propiedad, escribimos f en la forma:

$$f(t) = a_j e^{-\lambda_j t} \left(1 + \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{a_n}{a_j} e^{-(\lambda_n - \lambda_j) t} \right).$$

Como la serie $\sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{a_n}{a_j} e^{-(\lambda_n-\lambda_j)t}$ satisface las hipótesis del teorema 4.1 entonces decrece exponencialmente cuando $t \to \infty$ luego $f(t) = 0, t > t_0$ es imposible para $a_j \neq 0$. $\square$

Corolario 4.2. *Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en las hipótesis del teorema 4.1 . Si la serie $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t}$ converge a cero débil en $L^2(0,T)$ entonces todos los coeficientes a_n son cero.*

Demostracion de 4.1. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t}$ converge a cero débil en $L^2(0,T)$ entonces está acotada en norma, en particular cada término de la serie está acotado uniformemente de n. Para $\lambda_{\geq}\lambda_0 > 0$ tenemos por el lema (3.4) que existen $m, M > 0$ tales que:

$$\frac{m}{\lambda} \leq \left\|e^{-\lambda_t}\right\|^2_{L^2(0,T)} = \frac{1-e^{-2\lambda T}}{2\lambda} \leq \frac{M}{\lambda}$$

por lo tanto existe $C > 0$ y:

$$\frac{|a_n|}{\sqrt{\lambda_n}} \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Mostremos que en este caso la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t}$ converge absolutamente para $t > 0$ y uniformemente para $t \geq t_0$. Por (4.3) tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, e^{-\lambda_n t} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e^{-\lambda_n t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n e^{-\lambda_n t}} e^{-\lambda_n t/2}.$$

La función $\lambda e^{-\lambda t}$ es acotada para $t > t_0 > 0$ y $\lambda \geq 0$ en consecuencia la desigualdad previa implica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, e^{-\lambda_n t} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t/2}.$$

Si $t \geq t_0 > 0$ entonces como se satisfacen las hipótesis del teorema 4.1 se tiene que para $n > N(t_0) \in \mathbb{N}$ vale la cota $\lambda_n t/2 > 2\log n$ y entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, e^{-\lambda_n t} \leq C' \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\log n} = C' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

La convergencia uniforme de esta serie implica la convergencia en $L^2(t_0,T)$ pero como el limite débil de las sumas parciales coincide con el limite en la norma y la serie tiende a cero para $t \in [t_0, T]$ entonces el corolario se sigue del corolario 4.1. $\square$

Veamos entonces el caso en el que $\mathcal{U}$ es de dimensión finita. Necesitaremos pedir restricciones especiales para el borde Γ de modo los autovalores λ_n tengan el orden de $n^{2/N}$, condiciones como estas pueden verse en [4].

Ejemplo 4.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{V}^* = H^{-1}(\Omega)$, A como antes , $r = 1$,$\mathcal{U} = \mathbb{C}^m$ y sea $B : \mathbb{C}^m \to \mathcal{H}$ dado por:

para $u(t) = (u_1(t), ..., u_m(t)),\ Bu(t) = \sum_{j=1}^{m} b_j u_j(t)$ con $b_j \in L^2(\Omega)$ y $u_j(t) \in L^2(0,T)$.

Consideremos el problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dx}{dt} + Ax = Bu & Q \\ x|_\Gamma = 0 & u \in \mathscr{U} = L^2(0,T;\mathbb{C}^m) \end{array} \right. \tag{4.4}$$

con condición inicial $x(.,0) = 0$ en Ω.
En estas condiciones tenemos que

$$\langle Bu(t), \varphi_n \rangle_* = \langle Bu(t), \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{m} u_j(t) \langle b_j, \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Pongamos $\eta_n = (\langle b_1, \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)}, ..., \langle b_m, \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)}) = (\eta_{n,1}, ..., \eta_{n,m}) \in \mathbb{C}^m$, entonces $B^* : L^2(\Omega) \to \mathbb{C}^m$ viene dado por $B^*(\varphi_n) = \overline{\eta_n}$ y tenemos la igualdad:

$$\langle Bu(t), \varphi_n \rangle_* = \langle u(t), \overline{\eta_n} \rangle_{\mathbb{C}^m}.$$

En consecuencia la familia $\mathscr{F} = \{e^{-\lambda_n t} B^* \varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene la forma:

$$\mathscr{F} = \{e^{-\lambda_n t} \eta_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

De acuerdo a la multiplicidad de los autovalores λ_n escribimos a la familia $\mathscr{F}$ como:

$$\mathscr{F} = \{e^{-\mu_n t} \eta_{n,i}\},\ i = 1...\kappa_n,\ n \in \mathbb{N},\ \eta_{n,i} \in \mathbb{C}^m$$

donde κ_n es la multiplicidad del autovalor μ_n, los μ_n son todos distintos y llamemos $\{\varphi_{n,i}\}_{i=1,...,\kappa_n}$ a las autofunciones del autovalor μ_n.
Tenemos entonces el siguiente resultado de controlabilidad:

Proposición 4.2. *Bajo las hipótesis anteriores se tiene:*

- *a) Si la sucesión $\{\kappa_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no está acotada entonces el sistema* (4.4) *no es aproximadamente controlable para ningún $T > 0$.*

- *b) Si* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \kappa_n = \kappa < \infty$ *entonces para todo* $T > 0$ *el sistema* (4.4) *es aproximadamente controlable* $\Longleftrightarrow m \geq \kappa$ *y para todo* $n \in \mathbb{N}$ *el rango de la matriz:*

$$C_n := [\langle b_j, \varphi_{n,i}\rangle_{L^2(\Omega)}]_{j=1,...,m}^{i=1,...,\kappa_n} \in \mathbb{C}^{m\times k_n} \tag{4.5}$$

  es κ_n.

- *c) Para* $N > 1$ *existe algún* $n \in \mathbb{N}$ *de modo que no puede encontrarse* $u_n \in \mathscr{U}$ *y* $K(T)u_n = \varphi_n$.

- *d) Para* $N = 1$ *si el rango de la matriz* C_n *definida arriba es* n *entonces existen* $u_n \in \mathscr{U}$ *tales que* $K(T)u_n = \varphi_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. a) Por el teorema 3.5 que el sistema (4.4) sea aproximadamente controlable es equivalente a que la familia

$$\mathscr{F}' = \left\{ \left((\mu_n + \alpha)^{1/2} e^{-\mu_n t}\eta_{n,i}\right)_{i=1,...,\kappa_n} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

sea $W - l.i.$. Esto por el lema 2.1 es equivalente a que la familia $\mathscr{F}$ sea $W - l.i.$, para esto es necesario que primero sea linealmente independiente y esto es equivalente a que los vectores $\eta_{n,i},\ i = 1,..,\kappa_n$ que corresponden a una única exponencial $e^{-\mu_n t}$ sean l.i. en $\mathbb{C}^m$. Si para algún n tenemos que $\kappa_n > m$ entonces estos vectores no pueden ser linealmente independientes y en consecuencia el sistema no es aproximadamente controlable.

b) Si $\kappa_n \leq m$ entonces la independencia lineal de los vectores $\eta_{n,j},\ j = 1,...,\kappa_n$ es equivalente a que el rango de la matriz C_n sea κ_n con lo cual para que el sistema sea aproximadamente controlable será necesario que el rango de C_n sea κ_n, veamos que además es suficiente. Debemos ver que $\mathscr{F}'$ es W-l.i.. Sea entonces $\{a_{n,j}\} \in \ell^2$ tal que la serie $\sum_{n,j} a_{n,j}(\mu_n + \alpha)^{1/2}e^{-\mu_n t}\eta_{n,j}$ converge débil a cero en el espacio $L^2(0, T; \mathbb{C}^m)$, definimos los vectores:

$$\mathscr{A}_n = \sum_{j=1}^{\kappa_n} a_{n,j}(\mu_n + \alpha)^{1/2}\eta_{n,j} \in \mathbb{C}^m.$$

Llamemos $\mathscr{A}_n^p$ para $p = 1,...,m$ a las componentes del vector $\mathscr{A}_n$ entonces tenemos que la serie $\sum_n \mathscr{A}_n^p e^{-\mu_n t}$ converge a cero débil en el espacio $L^2(0, T)$ para todo $p = 1,...,m$ con lo cual (notar que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n/\log n = \infty$ por la hipótesis del orden de λ_n) por el corolario 4.2 tenemos que $\mathscr{A}_n^p = 0$ para $p = 1,...,m,\ n \in \mathbb{N}$. Luego la independencia lineal de los vectores $\eta_{n,j},\ j = 1,...,\kappa_n$ implica que $a_{n,j} = 0,\ \forall j = 1,...,\kappa_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Sea $N > 1$. Por el teorema 3.5 el enunciado es equivalente a que la familia $\mathscr{F} = \{e^{-\mu_n t}\eta_{n,i}\}$, $i = 1...\kappa_n$, $n \in \mathbb{N}$ no sea minimal en el espacio $L^2(0,T;\mathbb{C}^m)$. Supongamos que si lo es , entonces la familia $\mathscr{F}_\alpha = \{e^{-(\lambda_n+\alpha)t}\eta_n\}$ es minimal en $L^2(0,T;\mathbb{C}^m)$ (pues si $\alpha > 0$ la asignación $f \to e^{-\alpha t}f$ es un isomorfismo). Como $\mathscr{F}_\alpha = \{e^{-(\lambda_n+\alpha)t}\eta_n\}$ es minimal en $L^2(0,T;\mathbb{C}^m)$ entonces por el lema 2.4 la familia será minimal en $L^2(0,+\infty;\mathbb{C}^m)$ aquí identificaremos el espacio $L^2(0,+\infty;\mathbb{C}^m)$ con el espacio $L^2(0,+\infty)\overline{\otimes}\mathbb{C}^m$ y en consecuencia por la observación 2.19 tenemos que la sucesión $\{\lambda_n+\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe satisfacer la condición de Blashcke con lo cual comparando la sucesión $\{\frac{\lambda_n+\alpha}{1+(\lambda_n+\alpha)^2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ con la sucesión $\{\frac{1}{\lambda_n+\alpha}\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n+\alpha} < \infty.$$

Esto finalmente es un absurdo debido a las estimaciones cumple la sucesión $\{\lambda_n\}$. Luego $\mathscr{F} = \{e^{-\mu_n t}\eta_{n,i}\}$ no puede ser minimal.

d) Debemos mostrar que la familia $\mathscr{F} = \{e^{-\lambda_n t}\eta_n\}$ es minimal. Como el rango de la matriz C_n es n, notemos que $\kappa_n = 1$ con lo cual que el rango sea n es equivalente a que $\eta_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Veamos que en realidad $\eta_n \neq 0$ es suficiente para garantizar la minimalidad. Que $\eta_n \neq 0$ garantiza que los subespacios $S_n := \langle \eta_n \rangle$ son todos distintos de cero, como $N = 1$ y la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene el orden de $n^{2/N} = n^2$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(\lambda_n+\alpha)$ converge con lo cual, por comparación, la sucesión $\{\lambda_n+\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la condición de Blashcke. Luego la familia $\{e^{-(\lambda_n+\alpha)t}\}$ es minimal en $L^2(0,T)$ entonces $\{e^{-\lambda_n t}\}$ es minimal en $L^2(0,T)$ y por lo tanto por (2.1) $\mathscr{F} = \{e^{-\lambda_n t}\eta_n\}$ es minimal en $L^2(0,T;\mathbb{C}^m)$.

$\square$

Definición 4.1. Diremos que un sistema como (3.11) es *controlable a cero en tiempo* T si dado $T > 0$ existe un control u de modo que la solución x_u del sistema satisfaga:

$$x_u(T) = 0.$$

A continuación mostraremos un ejemplo de cómo se aplica el método de los momentos para el control a cero de una ecuación del calor en un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ y con el control en la frontera.
Sea $\Omega = (0,a) \times (0,b)$ con $a > 0, b > 0$ *y* $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$.

Ejemplo 4.3. Consideremos el problema:

$$P : \begin{cases} v_t = \triangle v & Q = (0,T) \times \Omega \\ v = \mathbb{1}_{\Gamma_0} u & \Gamma_0 = (0,T) \times (0,a) \times \{0\} \subset (0,T) \times \partial\Omega \\ v = v_0 & \{0\} \times \Omega \end{cases}$$

Donde $u \in L^2(\Sigma)$ y $v_0 \in H^{-1}(\Omega)$.
Observar que en la teoría desarrollada hasta el momento estudiamos el problema de controlabilidad para controles internos, es decir controles que entran con una no homogeneidad en la ecuación. Formalmente , usando partes, se puede reescribir el problema de controlabilidad de borde como un problema de controlabilidad interno, mostrando que una solución débil del problema con control de borde P es equivalente a una solución débil del problema con control interno:

$$Z : \begin{cases} z_t = \triangle z - Bu & Q = (0,T) \times \Omega \\ z = 0 & (0,T) \times \partial\Omega \\ z = 0 & \{0\} \times \Omega \end{cases}$$

Con $B : L^2(\Gamma_0) \to W_{-2}$ de manera que $B^* : W_2 \to L^2(\Gamma_0)$ este definido por $B^*(\phi) = \overline{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}}$. De esta manera por el teorema 3.5 el problema de controlabilidad aproximada se reduce a estudiar si la familia $\mathscr{F} = \{(\lambda_n + \alpha)^{-1/2} e^{-\lambda_n t} B^*(\varphi_n)\} = \{(\lambda_n + \alpha)^{-1/2} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \eta}\}$ es $W - l.i.$ puesto que estamos mirando $R(T) \subset W_{-1} = H^{-1}$ en el caso $r = -1$.
Sin embargo, no analizaremos el problema de controlabilidad aproximada en este caso sino que estudiaremos el problema de controlabilidad exacta a cero. Para esto desarrollaremos a modo de ejemplo cómo utilizar la técnica del método de los momentos en forma directa en un problema de control de borde.
Tenemos los siguientes resultados que pueden verse en [9].

Proposición 4.3. *Sea $u \in L^2(\Sigma), v_0 \in H^{-1}(\Omega)$. El problema P admite una única solución v que satisface:*

$$v \in L^2(Q) \cap C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega))$$
$$\|v\|_{L^2(Q)} + \|v\|_{C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))} \leq C(\|v_0\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Sigma)}).$$

Donde C es una constante positiva que no depende ni de u ni de v_0.
Para este caso el problema dual viene dado por:

$$P' : \begin{cases} -w_t = \triangle w & Q = (0,T) \times \Omega \\ w = 0 & \Sigma \\ w = w_0 & \{T\} \times \Omega \end{cases}$$

De forma reciproca tenemos el siguiente teorema que puede verse en [6] .

Teorema 4.2. *Para toda $w_0 \in H_0^1(\Omega)$, el problema P' admite una única solución w que satisface:*

- $w \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$.

- $\|w\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega))} + \|u\|_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega))} \leq C(\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Enunciemos entonces un resultado de controlabilidad para este problema.

Teorema 4.3. *Sea $T > 0$ y $v_0 \in H^{-1}(\Omega)$, P el problema como antes. Entonces existe un control $u \in L^2(W)$ tal que $v(T) = 0$ en Ω.*

Demostración. Transformaremos este problema de controlabilidad en un problema de los momentos. Primero busquemos la relación entre la solución v del problema P y la solución w del problema P' que viene dada por la integración por partes:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \langle v_t - \triangle v, w\rangle dt - \int_0^T \langle v, -w_t - \triangle w\rangle dt \\
0 &= \int_0^T \langle v_t, w\rangle dt - \int_0^T \langle v, w_t\rangle dt + \int_0^T \langle \triangle w, v\rangle dt - \int_0^T \langle \triangle v, w\rangle dt \\
0 &= \int_0^T \frac{d}{dt}\langle v, w\rangle dt + \int_{\Gamma_0} v\frac{\partial w}{\partial \eta} d\sigma dt - \int_{\Gamma_0} w\frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma dt \\
0 &= \langle v(T), w_0\rangle - \langle v_0, w(0)\rangle + \int_{\Gamma_0} v\frac{\partial w}{\partial \eta} d\sigma dt
\end{aligned}
$$

y con esto concluimos:

$$
\langle v(T), w_0\rangle = \langle v_0, w(0)\rangle - \int_{\Gamma_0} v\frac{\partial w}{\partial \eta} d\sigma dt \tag{4.6}
$$

Aquí para cada par $(v_0, w_0) \in H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ $\langle , \rangle$ denota el producto de dualidad entre $H^{-1}(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $\frac{\partial w}{\partial \eta}$ es la derivada exterior de Ω y $d\sigma$ es la medida de $\partial\Omega$.
Sabemos que el operador $A = -\triangle$ con dominio $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ posee como autovalores:

$$
\lambda_{k,l} = \frac{\pi^2}{a^2}k^2 + \frac{\pi^2}{b^2}l^2 \quad k, l \geq 1.
$$

Esta sucesión de autovalores posee como autofunciones asociadas, a la base ortonormal de $L^2(\Omega)$:

$$
\varphi_{k,l}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} sen\left(\frac{\pi}{a}kx\right) sen\left(\frac{\pi}{b}ly\right)
$$

Así una solución de P' con dato inicial $\varphi_{k,l}$ viene dada por:

$$\varphi(t,x,y) = e^{-\lambda_{k,l}(T-t)}\varphi_{k,l}(x,y).$$

Entonces por (4.6) puesto que $u_0 \in H^{-1}(\Omega)$y $\varphi_{k,l} \in H_0^1$ se tiene que $u(T) = 0$ en Ω si y solo si para cada par v_0 y $\varphi_{k,l}$ se tiene:

$$e^{-\lambda_{k,l}T}\langle u_0, \varphi_{k,l}\rangle = \int_0^T e^{\lambda_{k,l}(T-t)} \int_{W_0} v\frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial \eta} d\sigma dt. \tag{4.7}$$

Sobre Γ_0 se tiene que:

$$\frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial \eta}(x) = -\frac{2\pi l}{b\sqrt{ab}} sen\left(\frac{\pi}{a}kx\right).$$

Luego la ecuación (4.7) podemos escribirla como:

$$e^{-\lambda_{k,l}T}\langle u_0, \varphi_{k,l}\rangle = -\frac{\sqrt{2}\pi l}{b\sqrt{b}} \int_0^T e^{\lambda_{k,l}(T-t)} \int_0^a v\phi_k d\sigma dt, \tag{4.8}$$

donde para todo $k, l \geq 1$ ponemos:

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} sen\left(\frac{\pi}{a}kx\right)\ ,\ x \in (0,a).$$

Notemos que la familia $(\phi_k)_{k\geq 1}$ resulta una base ortonormal de $L^2(0,a)$.
Sea:

$$u_k(t) = \int_0^a u(t,x)\phi_k(x)dx.$$

Con estas nuevas notaciones, re-escribimos (4.8) en la forma:

$$\int_0^T e^{-\lambda_{k,l}(T-t)}u_k(t)dt = -\frac{\rho}{l}e^{-\lambda_{k,l}T}\langle v_0, \varphi_{k,l}\rangle \tag{4.9}$$

con $\rho = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{2}\pi}$. Fijemos $k \geq 1$ y sean:

$$f_k(t) = u_k(T-t)$$

$$c_{k,l} = -\rho\langle u_0, \varphi_{k,l}\rangle.$$

Así, queda resolver el problema de los momentos dado por:

$$\int_0^T e^{-\lambda_{k,l}t} f_k(t)dt = \frac{1}{l}e^{-\lambda_{k,l}T}c_{k,l}\ ,\ l \geq 1.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ fijo, como $\sum_{l=1}^{\infty} 1/\lambda_{k,l} < \infty$,la familia $\{e^{-\lambda_{k,l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ es minimal en $L^2(0,T)$ por el teorema 2.12 ,posee una familia biortogonal $\Upsilon_{k,l}(t)$ en $L^2(0,T)$ con la que podemos expresar formalmente la solución al problema de los momentos en la forma:

$$f_k(t) = \sum_{l\geq 1} \frac{1}{l} e^{-\lambda_{k,l}T} c_{k,l} \Upsilon_{k,l}(t).$$

Como $f_k(t) = u_k(T-t)$ se tiene que para todo $(t,x) \in \Gamma_0$:

$$u(T-t,x) = \sum_{l\geq 1;k\geq 1} \frac{1}{l} e^{-\lambda_{k,l}T} c_{k,l} \Upsilon_{k,l}(t)\phi_k(x).$$

Lo que debemos ver es que esta solución formal pertenece a $L^2(W_0)$. Formalmente tenemos que:

$$u(T-t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} e^{-\lambda_{k,l}T} c_{k,l} \Upsilon_{k,l}(t) \right) \phi_k(x).$$

Con lo cual se tiene que:

$$\int_0^a |u(T-t,x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} e^{-\lambda_{k,l}T} c_{k,l} \Upsilon_{k,l}(t) \right)^2 .$$

Lo que tenemos que chequear para concluir que esta solución formal es efectivamente una solución tradicional es:

1. para todo $k \geq 1$, la función $g_k(t) = \sum_{l\geq 1} \frac{1}{l} e^{-\lambda_{k,l}T} c_{k,l} \Upsilon_{k,l}(t) \in L^2(0,T)$.
2. la sucesión $\{|| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} e^{-\lambda_{k,l}T} c_{k,l} \Upsilon_{k,l}(t)||_{L^2(0,T)}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.

Como para todo $k \geq 1$ fijo se tiene que

$$\sum_{l\geq 1} \frac{1}{\lambda_{k,l}} < \infty,$$

el teorema (2.9) nos dice que la familia $F_k = \{e^{-\lambda_{k,l}t}\}_{l\in\mathbb{N}}$ admite una familia biortogonal $(p_{k,l})_{l\geq 1}$ en $L^2(0,+\infty)$ tal que:

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^{\infty} |p_{k,l}(t)|^2 dt = \lim_{l\to\infty} \frac{\pi}{2|\lambda_{k,l} J'(\lambda k,l)|^2},$$

donde:

$$J(\lambda) = \frac{\prod_{l\geq 1} \frac{1-\lambda/\lambda_{k,l}}{1+\lambda/\overline{\lambda_{k,l}}}}{(1+\lambda)^2} \ , \ \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Luego si ponemos: $\Gamma_k = (\lambda_{k,l})_{l\geq 1} \in \ell^2$ resulta que $c(\Gamma_k) = 0$, $k \geq 1$ ya que:

$$|\lambda_{k,l} - \lambda_{k,m}| = \frac{\pi^2}{b^2}|l^2 - m^2| \geq 2\frac{\pi^2}{b^2}|l - m|$$

y el resultado se sigue del teorema (2.15).
Como consecuencia se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante C_ε que no depende ni de k ni de l de modo que:

$$\int_0^\infty |p_{k,l}(t)|^2 dt \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon\lambda_{k,l}}.$$

Pongamos:

$$A(\Gamma_k; T) = \overline{\langle e^{-\lambda_{k,l}t}; l \geq 1\rangle}_{L^2(0,T)} \ , \ 0 < T \leq +\infty \ , \ k \geq 1.$$

El operador de restricción dado por:

$$R_{T,k} : A(\Gamma_k, +\infty) \to A(\Gamma_k, T)$$

resulta un isomorfismo como consecuencia del teorema (2.13). La familia:

$$\Upsilon_{k,l}(t) = (R_{T,k}^{-1})^* p_{k,l} \ , \ l \geq 1$$

es la familia biortogonal a la familia F_k sobre $L^2(0, T)$ y:

$$\|\Upsilon_{k,l}(t)\|_{L^2(0,T)} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon\lambda_{k,l}} ||(R_{T,k}^{-1})^*|| \ , \ l \geq 1.$$

Para terminar necesitamos el siguiente lema

Lema 4.2. *Existe una constante $C = C_T$ tal que:*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} ||(R_{T,k}^{-1})^*|| \leq C.$$

Con este lema se tiene que:

$$\frac{1}{l^2} e^{-2\lambda_{k,l}T} |c_{k,l}|^2 \, \|\Upsilon_{k,l}(t)\|^2_{L^2(0,T)} \leq \frac{C_\varepsilon}{l^2} e^{-2\lambda_{k,l}(T-\varepsilon)} ||c_{k,l}|^2.$$

Esto prueba que : $\sum_{l\geq 1} \frac{1}{l} e^{-\lambda_{k,l}T} c_{k,l} \Upsilon_{k,l}(t) \in L^2(0, T)$ para todo $k \geq 1$, además:

$$\begin{aligned} \sum_{l\geq 1} \frac{C_\varepsilon}{l^2} e^{-2\lambda_{k,l}(T-\varepsilon)} |c_{k,l}|^2 &\leq C_\varepsilon ||u_0||^2_{L^2(\Omega)} e^{-2\frac{\pi^2}{b^2}k^2(T-\varepsilon)} \sum_{l\geq 1} \frac{e^{-2\frac{\pi^2}{a^2}l^2(T-\varepsilon)}}{l^2} \\ &\leq C_\varepsilon ||u_0||^2_{L^2(\Omega)} e^{-2\frac{\pi^2}{b^2}k^2(T-\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que: $\{\left\|\sum_{l\geq 1} \frac{1}{l} e^{-\lambda_{k,l}T} c_{k,l} \Upsilon_{k,l}(t)\right\|_{L^2(0,T)}\}_{k\geq 1} \in \ell^2$ con esto hemos probado el resultado de controlabilidad. $\square$

Ahora probemos el lema:

Demostracion de 4.2. Notemos probar la cota del lema es equivalente a probar una cota similar para $||R_{T,k}^{-1}||$.
Sea $P(t) = \sum a_n e^{-\lambda_{k,n}t}$ un polinomio cualquiera de $A(\Gamma_k, T)$ se tiene que:

$$|a_n| = \left| \int_0^T P(t)\Upsilon_{k,n}(t)dt \right| \leq \|P\|_{L^2(0,T)} \|\Upsilon_{k,n}(t)\|_{L^2(0,T)} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon\lambda_{k,n}} \|P\|_{L^2(0,T)}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Con lo cual podemos ver que:

$$\begin{aligned} |P(t)| &\leq C_\varepsilon \|P\|_{L^2(0,T)} \sum_{n\geq 1} e^{-\lambda_{k,n}(t-\varepsilon)} \\ &\leq C_\varepsilon \|P\|_{L^2(0,T)} \sum_{n\geq 1} e^{-(\frac{\pi^2}{a^2}k^2+\frac{\pi^2}{b^2}n^2)(t-\varepsilon)} \\ &\leq C_\varepsilon \|P\|_{L^2(0,T)} e^{\frac{\pi^2}{a^2}(t-\varepsilon)} \sum_{n\geq 1} e^{-\frac{\pi^2}{b^2}n^2(T-\varepsilon)} \\ &\leq C_{\varepsilon,T} \|P\|_{L^2(0,T)} e^{\frac{\pi^2}{a^2}t}, \quad \forall t \geq T > \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Donde:

$$C_{\varepsilon,T} = C_\varepsilon e^{\frac{\pi^2}{a^2}\varepsilon} \sum_{n\geq 1} e^{-\frac{\pi^2}{b^2}n^2(T-\varepsilon)}.$$

De (4.10) se sigue que:

$$\|P\|_{L^2(T,\infty)} \leq C_{\varepsilon,T} \|P\|_{L^2(0,T)} e^{-\frac{\pi^2}{a^2}T}$$

y en consecuencia:

$$\|P\|_{L^2(0,\infty)} \leq (1 + C_{\varepsilon,T}e^{-\frac{\pi^2}{a^2}T}) \|P\|_{L^2(0,T)}.$$

Esto prueba que:

$$\left\|R_{T,k}^{-1}\right\| \leq 1 + C_{\varepsilon,T}e^{-\frac{\pi^2}{a^2}T}\ , \forall k \geq 1.$$

Sea ahora $P(t) = e^{-\lambda_{1,1}t}$ se tiene que:

$$\frac{\|P\|_{L^2(0,\infty)}}{\|P\|_{L^2(0,T)}} = \frac{1}{\sqrt{1-P(T)}}.$$

Esto nos permite llegar a la estimación:

$$\frac{1}{\sqrt{1-p(T)}} \leq \left\|R_{T,k}^{-1}\right\| \leq 1 + C_{\varepsilon,T}e^{-\frac{\pi^2}{a^2}T}, \ \forall k \geq 1, \ \forall \varepsilon > 0, \ \forall T > \varepsilon \tag{4.11}$$

como queríamos. □

Bibliografía

[1] RB Ash and WP Novinger, *Complex analysis*, 2007.

[2] Sergei A. Avdonin and Sergei A. Ivanov, *Families of exponentials*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems, Translated from the Russian and revised by the authors.

[3] Karine Beauchard and Camille Laurent, *Local controllability of 1D linear and nonlinear Schrödinger equations with bilinear control*, J. Math. Pures Appl. (9) **94** (2010), no. 5, 520–554. MR 2732927

[4] M. Sh. Birman and M. Z. Solomjak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987, Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller.

[5] Ralph Philip Boas, Jr., *Entire functions*, Academic Press Inc., New York, 1954.

[6] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[7] H. O. Fattorini and D. L. Russell, *Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension*, Arch. Rational Mech. Anal. **43** (1971), 272–292.

[8] ______, *Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations*, Quart. Appl. Math. **32** (1974/75), 45–69.

[9] Enrique Fernández-Cara, Manuel González-Burgos, and Luz de Teresa, *Boundary controllability of parabolic coupled equations*, Journal of Functional Analysis **259** (2010), no. 7, 1720–1758.

[10] A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes Series, vol. 34, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.

[11] SV Hruvsvcev, NK Nikolskii, and BS Pavlov, *Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels*, Complex analysis and spectral theory, Springer, 1981, pp. 214–335.

[12] G. Lebeau and L. Robbiano, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, Comm. Partial Differential Equations **20** (1995), no. 1-2, 335–356.

[13] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*, Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], vol. 8, Masson, Paris, 1988, Contrôlabilité exacte. [Exact controllability], With appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch.

[14] J.-L. Lions and E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972, Translated from the French by P. Kenneth, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181.

[15] N. K. Nikolʹskiĭ, *Treatise on the shift operator*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 273, Springer-Verlag, Berlin, 1986, Spectral function theory, With an appendix by S. V. Hruščev [S. V. Khrushchëv] and V. V. Peller, Translated from the Russian by Jaak Peetre.

[16] Michael Reed and Barry Simon, *Functional analysis, vol. i*, Academic Press, San Diego, 1980.

[17] Walter Rudin, *Functional analysis*, second ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[18] Laurent Schwartz, *étude des sommes d'exponentielles. 2ième éd*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, V. Actualités Sci. Ind., Hermann, Paris, 1959.

[19] Joachim Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 68, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980, Translated from the German by Joseph Szücs.