UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

El Fenómeno de Ruptura de Simetría para Ecuaciones Elípticas No Lineales con coeficientes no acotados

Carla M. Oliva

Director: Dr. Pablo L. De Nápoli

10 de agosto de 2017

Índice general

Agradecimientos

Le agradezco y dedico especialmente este trabajo a mi mamá, quien está siempre acompañándome incondicionalmente.

Agradezco a mis hermanas Ceci y Estefy, que cerca o lejos, siempre están apoyándome.

A mi papá.

A mis abuelos Leonor y Juan Carlos.

A Vicki Montero, por tantos años de amistad y aguante en épocas de estudio.

A Bianca y Arnold por su dulce compañía.

A mi director Pablo De Nápoli, por todas sus explicaciones y por la dedicación en la realización de esta tesis.

A ellos, lo mejor de Exactas: Marie Fiorenzo, Maga Klinger, Lucho Fages Casale, Marce Valdettaro, Noe Cucco, Sol Scelza, Yami Carrizo, Manolo López Galván, Juan Pablo Vicedo, Marie Glassman, Pablo Colombo, Gis Pardo, Vero Moyano y Marce Villagra.

A estos genios que me acompañaron en el camino siempre alentándome y de los cuales aprendí mucho: Carlos Sánchez, Diana Rubio, María Inés Troparevsky, Mariel Rosenblatt y Rosa Piotrkowski.

A Susana Gabbanelli, Gabriela Vargas y Sebastián Grynberg, por el apoyo, las palabras de aliento y la buena onda en la oficina y los pasillos de la FI.

Especialmente a Nico Vorobioff, por toda su ayuda, consejos y apoyo en este último tiempo.

Introducción

En esta tesis estudiamos la existencia de soluciones del problema modelo

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |x|^a |u|^{p-2} u = |x|^b |u|^{q-2} u \\ \\ u \geq 0 \text{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{1}$$

donde $a \geq 0, b \geq 0$, $1 < p, q < \infty$ y $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ denota el p-Laplaciano (cuando $p = 2$, es el operador Laplaciano clásico).

El objetivo aquí será probar que, bajo ciertas condiciones, dicho problema tiene al menos una solución (no trivial) radial y otra no radial. Es decir que se rompe la simetría, pues si bien la ecuación es simétrica (en el sentido de ser invariante por rotaciones), hay soluciones (no negativas y no triviales) no simétricas.

Notamos que esto contrasta con el clásico resultado de Gidas-Ni-Nirenberg (Teorema 1 de [2]):

Teorema: *En la bola $B(0, R)$ contenida en $\mathbb{R}^N$, sea $u > 0$, una solución positiva en $C^2\left(\overline{B(0,R)}\right)$ de*

$$\Delta u + f(u) = 0 \qquad \textit{con} \qquad u = 0 \qquad \textit{en} \qquad \partial B(0, R).$$

Aquí f es de clase C^1. Luego u es radialmente simétrica y $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$, para $0 < r < R$.

Aunque la ecuación de (1) es muy similar a la de este Teorema, probaremos que tiene al menos una solución positiva no radial. Esto se debe a que en la ecuación a estudiar aparecen pesos dados por potencias positivas de $|x|$.

El trabajo se basa fundamentalmente en las técnicas del cálculo de variaciones, utilizando la teoría de la diferenciablidad en espacios de Banach y el método de multiplicadores de Lagrange para problemas variacionales con restricciones. Para la obtención de soluciones con simetría radial, juega un papel muy importante el Principio de Criticalidad Simétrica (ver sección 5 del capítulo 1), que establece que bajo ciertas condiciones, los puntos críticos de una funcional invariante por la acción de un grupo cuando se la restringe al subespacio de funciones invariantes, son también puntos críticos del funcional sin restringir.

Dividimos este trabajo en tres capítulos y dos apéndices A y B.

En el capítulo 1, exponemos definiciones y resultados de la teoría de análisis funcional, que luego aplicaremos en los siguientes capítulos.

En el capítulo 2, desarrollamos con detalle la primera parte de la tesis doctoral de Paul Sintzoff, "Symmetry and Singularities for Some Semilinear Elliptic Problems" (también publicada en formato de artículo en [3]). Aquí analizamos el problema modelo (1) con p=2,

$$\begin{cases} -\Delta u + |x|^a u = |x|^b |u|^{q-1} \\ \\ u > 0 \text{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{2}$$

considerando u estrictamente positiva, donde $N \geq 3$, $0 \leq a < N$, $b \geq 0$ y $q > 2$. En este capítulo usamos propiedades analítico-funcionales de los espacios de Sobolev homogéneos y con pesos, tales como la densidad de las funciones suaves con soporte compacto, y teoremas de inmersión. Dichos resultados están demostrados en los apéndices A y B, pero no en el trabajo original de Sintzoff. En la sección 2 de este capítulo hemos completado el primer lema con argumentos de densidad y mostramos que las funciones radiales de $H^1_a(\mathbb{R}^N)$ son funciones continuas en $\mathbb{R}^N - \{0\}$.

En la sección 3, probamos la existencia de una solución radial del problema (2) bajo condiciones adecuadas. Aquí exponemos detalladamente los argumentos del trabajo de Sintzoff que involucran el Teorema de Mutiplicadores de Lagrange, el Principio de Criticalidad Simétrica (para espacios de Hilbert) y el Principio Fuerte del Máximo (para operadores elípticos lineales de segundo orden en forma de divergencia).

En la sección 4, demostramos la existencia de soluciones no radiales, en una bola de radio suficientemente grande, completando los argumentos del trabajo original.

Finalizando el capítulo 2, en la sección 5, obtenemos condiciones necesarias para la existencia de una solución del problema (2). En esta parte agregamos la prueba de que si u es solución del mencionado problema, entonces u satisface la identidad de Derrick Pohozaev.

En el capítulo 3 se considera el caso del p-Laplaciano siguiendo el trabajo de Hui-Mei He y Jian-Qing Chen, "On The Existence of Solutions to a class of p-Laplace Elliptic Equations" [4]. Aquí los argumentos son similares, pero aparecen dificultades técnicas, debido a que ahora no trabajamos en un espacio de Hilbert, sino en un espacio de Banach. Explotamos diversas propiedades analítico-funcionales de dicho espacio, como el hecho de ser reflexivo, separable y uniformemente convexo.

Capítulo 1

Definiciones y Resultados Preliminares

En este trabajo asumimos que el lector tiene los conocimientos previos y necesarios de funciones integrables, funciones medibles, espacios de Hilbert, y de Banach, espacios reflexivos, separables, espacios L^p, etc.

A continuación repasaremos los resultados y propiedades más elementales. La mayoría de las demostraciones se pueden ver en el libro de Brézis [5], y para el resto, citamos al autor correspondiente.

1.1. Espacios de Hilbert y de Banach.

Definición 1.1.1 *(Espacio Métrico Separable)*
Se dice que un espacio métrico (E,d) es separable si existe un subconjunto $D \subset E$ numerable y denso.

Proposición 1.1.2 *Sea (E, d) un espacio métrico separable y sea F un subconjunto de E. Entonces F (con la métrica inducida) es un espacio métrico separable.*

Recordamos que un espacio de Banach $E = (E, \|.\|_E)$ es un espacio normado completo. En esta tesis trabajaremos solamente con espacios de Banach reales (sobre $\mathbb{R}$). Si E es un espacio de Banach notamos por $E' = \{\gamma : E \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{lineal y continua}\}$ a su espacio dual con la norma

$$\|\gamma\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} |\gamma(x)|$$

y por E'' a su bidual (dual de E').

Definición 1.1.3 *(Espacio de Banach Reflexivo)*
Sea E un espacio de Banach y sea J la inyección canónica de E en E'', donde J está definida por

$$J(\gamma)(x) = \gamma(x) \qquad \forall\, x \in E, \forall\, \gamma \in E'.$$

Se dice que E es reflexivo si $J(E) = E''$.

Proposición 1.1.4 *Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea $M \subset E$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces M, dotado de la norma inducida por E, es reflexivo.*

Definición 1.1.5 *(Espacio de Banach Uniformemente Convexo)*
Se dice que un espacio de Banach $(E, \|.\|_E)$ es uniformemente convexo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x,\, y \in E,\ \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1 \text{ y } \|x - y\| > \varepsilon \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta.$$

Es importante notar que esta noción depende no sólo del espacio sino de su norma: un espacio puede ser uniformemente convexo con una norma y no serlo con una equivalente.

Observación 1.1.6 *Sea $(E, \|.\|_E)$ un espacio de Banach uniformemente convexo, y sea $F \subseteq E$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces $(F, \|.\|_E)$ es uniformemente convexo.*

Teorema 1.1.7 *Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.*

Teorema 1.1.8 *Todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

Teorema 1.1.9 *Sean E_1y E_2 espacios de Banach. Entonces $E = E_1 \times E_2$ es un espacio de Banach con cualquiera de las normas $\|(x,y)\|_p = \left(\|x\|^p_{E_1} + \|y\|^p_{E_2}\right)^{\frac{1}{p}}$ con $x \in E_1$, $y \in E_2$, $1 \leq p < \infty$. Notemos que todas estas normas en $E_1 \times E_2$ resultan equivalentes.*

Teorema 1.1.10 *Sean E_1 y E_2 espacios de Banach separables, entonces $E_1 \times E_2$ es separable.*

Teorema 1.1.11 *Sean E_1 y E_2 espacios de Banach reflexivos, entonces $E_1 \times E_2$ es reflexivo.*

Teorema 1.1.12 *Sea $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_k = \{x = (x_1, x_2, ..., x_k) : x_j \in E_j\}$ con $(E_j, \|.\|_{E_j})$ Banach uniformemente convexo. Entonces $(E, \|.\|_E)$ es uniformemente convexo si $\|x\|_E = \left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j\|_{E_j}^p\right)^{\frac{1}{p}}$ con $p > 1$.*

Demostración: Ver el trabajo original de Clarkson [1] (Teorema 1). □

Observación 1.1.13 *Sean E y F espacios de Banach, y sea $T : E \longrightarrow F$ una isometría biyectiva lineal. Si F es separable, entonces E es separable.*

Observación 1.1.14 *Sean E y F espacios de Banach, y sea $T : E \longrightarrow F$ una isometría biyectiva lineal. Si F es reflexivo, entonces E es reflexivo.*

Observación 1.1.15 *Sean E y F espacios de Banach, y sea $T : E \longrightarrow F$ una isometría biyectiva lineal. Si F es uniformemente convexo, entonces E es uniformemente convexo.*

Definición 1.1.16 *(convergencia débil) Sean E un espacio de Banach, y $(u_n) \in E$ una sucesión. Decimos que u_n converge débilmente a u, esto es $u_n \rightharpoonup u$, si y sólo si $\forall\ \gamma \in E'$, $\gamma(u_n) \to \gamma(u)$.*

Observación 1.1.17 *Si H es un espacio de Hilbert, por el Teorema de Representación de Riesz, toda $\gamma \in H'$ es de la forma $\gamma(x) = \langle x, f \rangle$ con $f \in H$ fija. Entonces $u_n \rightharpoonup u$ en $H \iff \langle u_n, f \rangle \to \langle u, f \rangle\ \forall\ f \in H$.*

Definición 1.1.18 *Sean E y F espacios de Banach tales que $E \subset F$, decimos que la inmersión $E \hookrightarrow F$ es continua si,*

$$u_n \to u \quad en \quad E \quad \Rightarrow \quad u_n \to u \quad en \quad F.$$

O equivalentemente,

$$existe \quad C > 0 \quad tal\ que \quad \|u\|_F \leq C\, \|u\|_E \quad para\ toda \quad u \in E.$$

Observación 1.1.19 *Sean E y F espacios de Banach, si la inmersión $E \hookrightarrow F$ es continua, entonces la inmersión $F' \hookrightarrow E'$ es continua (si $\gamma : F \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal continua entonces, $\gamma|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal continua.).*

Observación 1.1.20 *Sean E y F espacios de Banach, si la inmersión $E \hookrightarrow F$ es continua, entonces*

$$u_n \rightharpoonup u \quad en \quad E \quad \Longrightarrow \quad u_n \rightharpoonup u \quad en \quad F.$$

Teorema 1.1.21 *(Semicontinuidad inferior débil de la norma)*
Sea E un espacio de Banach y $(u_n) \subset E$ una sucesión. Entonces la norma es débilmente secuencialmente continua. Si $u_n \rightharpoonup u$, y $\|u_n\| \leq M$, entonces $\|u\| \leq M$.
Equivalentemente: Si $u_n \rightharpoonup u$,

$$\|u\| \leq \liminf \|u_n\|.$$

Definición 1.1.22 *Sean E un espacio de Banach y una funcional $J : C \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que J es (secuencialmente) débilmente semicontinua inferiormente en $u_0 \in C$ si para toda sucesión $(u_n) \subset C$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ implica que $J(u_0) \leq \liminf\limits_{n \to +\infty} J(u_n)$.*

Definición 1.1.23 *Sean E un espacio de Banach y $C \subset E$. Se dice que C es débilmente secuencialmente cerrado si $(u_n) \in C \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $u_n \rightharpoonup u$ implica que $u \in C$.*

Definición 1.1.24 *Sean E un espacio de Banach y $J : C \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcional no lineal. Se dice que J es coerciva sobre C si $J(u) \to +\infty$ cuando $\|u\|_E \to +\infty$ sobre C.*

Definición 1.1.25 *Sea C un subconjunto abierto de un espacio de Banach E. Un funcional no lineal $J : C \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es diferenciable Gateaux en un punto $u \in C$ si existe un funcional $g \in E'$ (a menudo denotado por $J'(u)$) tal que*

$$\frac{d}{dt} J(u + t\,v)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{J(u + t\,v) - J(u)}{t} = J'(u)\,v \quad \forall v \in E.$$

Teorema 1.1.26 *Sean E un espacio de Banach reflexivo, $C \subset$ es un conjunto no vacío y débilmente secuencialmente cerrado en E y $J : C \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ débilmente semicontinua inferiormente y asumimos que*

1. *C es acotado. o*

2. *J es coerciva en C.*

Luego

1. $\inf\limits_{u \in C} J(u) > -\infty$;

2. *hay al menos un $u_0 \in C$ tal que $J(u_0) = \inf\limits_{u \in C} J(u)$.*

Además, si u_0 es un punto interior de C y J es diferenciable Gateaux en u_0, entonces $J'(u_0) = 0$.

Demostración: Ver Teorema 1.37 de Baisheng Yan [6]. $\square$

Teorema 1.1.27 *Sean E, espacio de Banach y $J : E \longrightarrow (-\infty, +\infty)$ una funcional convexa, semi-continua inferiormente (para la topología fuerte). Entonces φ es secuencialmente semi-continua inferiormente para la topología débil. En particular, si $u_n \rightharpoonup u$ entonces*

$$J(x) \leq \liminf \varphi(x_n).$$

Teorema 1.1.28 *(Versión secuencial del Teorema de Banach-Alaoglu) Sea E un espacio de Banach reflexivo y separable, y sea (x_n) una sucesión acotada en E. Entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) que converge débil en E.*

Observación 1.1.29 *En particular este teorema puede aplicarse a un Hilbert separable.*

1.2. Espacios de Lebesgue L^p

Recordamos la definición de los espacios L^p (Espacios de Lebesgue). Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ dotado de la medida de Lebesgue dx.

Definición 1.2.1 *Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \le p < \infty$; se define*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty \right\},$$

que es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = \infty$,

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y existe } C > 0 \text{ tal que } |f(x)| \le C \text{ para casi todo } x \in \Omega \}$$

con

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ínf}\{ C > 0 \text{ tales que } |f(x)| \le C \text{ para casi todo } x \in \Omega \}$$

Similarmente se definen los espacios de Lebesgue con pesos, reemplazando en su definición la medida de Lebesgue por una medida pesada $w(x)\,dx$:

Definición 1.2.2 *Sean $1 \le p < \infty$ y $w : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa (un peso). Se define*

$$L^p(\Omega, w) = L^p(\Omega, w(x)\,dx) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \int_\Omega |f|^p w(x) dx < \infty \right\},$$

y se nota

$$\|f\|_{L^p(\Omega,w)} = \left[\int_\Omega f(x)|^p \;\; w(x) dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Utilizaremos esto para los pesos potenciales $w(x) = |x|^c$ con $c \ge 0$. Por brevedad notaremos ocasionalmente $L^p_c(\Omega) = L^p(\Omega;\, |x|^c\,dx)$.

Lema 1.2.3 *(Lema de Fatou)*
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto arbitrario. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones no negativas,

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, dx.$$

Teorema 1.2.4 *(Teorema de Convergencia Mayorada)*
Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L^1(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto arbitrario. Supongamos que

1. *$f_n(x) \to f(x)$ c.t.p. en Ω,*
2. *existe una función g en $L^1(\Omega)$ tal que para cada n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p. en Ω.*

Entonces f está en $L^1(\Omega)$ y $||f_n - f||_{L^1} \to 0$.

Teorema 1.2.5 *(Desigualdad de Hölder)*
Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^{p'}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces $f.g \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega |f(x).g(x)|\, dx \leq ||f||_{L^p}.||g||_{L^{p'}}.$$

Teorema 1.2.6 *$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Teorema 1.2.7 *$L^p(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Teorema 1.2.8 *(Teorema de Densidad)*
El espacio $C_0(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

Teorema 1.2.9 *$L^p(\Omega)$ es separable para $1 \leq p < \infty$.*

La siguiente observación será de utilidad en toda la tesis:

Observación 1.2.10 *(Fórmula para integrar una función radial) Sea $g(x) = g_0(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una función radial integrable. Por Teorema de cambio de Variable vale*

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(|x|)\, dx = \omega_N \int_0^\infty g_0(s) s^{N-1} ds,$$

donde ω_N es la superficie de la bola unitaria en $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1.2.11 *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces, para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$, la función $y \mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable sobre $\mathbb{R}^N$. Se define*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Entonces $(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Proposición 1.2.12 *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Entonces*

$$Sop(f * g) \subset Sop(f) + Sop(g).$$

Proposición 1.2.13 *Sean $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N)$. Entonces*

$$(f * g) \in C(\mathbb{R}^N).$$

Notaciones:

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_k C^k(\Omega),$$
$$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega),$$
$$D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega).$$

Proposición 1.2.14 *Sean $f \in C_0^k(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N)$ (k natural). Entonces*

$$(f * g) \in C^k(\mathbb{R}^N) \quad y \quad D^k(f * g) = D^k(f) * g,$$

donde D^k designa una cualquiera de las derivadas parciales

$$D^k f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial X_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial X_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial X_N^{\alpha_N}} f \quad con \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N = k.$$

En particular, si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N)$, entonces $(f * g) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Definición 1.2.15 *Se llama sucesión regularizante a toda sucesión $(\rho_n)_{n\geq 1}$ de funciones tal que*

$$\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \quad Sop(\rho_n) \subset B(0, \tfrac{1}{n}), \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \, dx = 1, \quad \rho_n \geq 0 \quad en \quad \mathbb{R}^N.$$

Observación 1.2.16 *Veamos que existen sucesiones regularizantes. En efecto, basta fijar una función $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $sop(\rho) \subset B(0,1)$, $\rho \geq 0$ en $\mathbb{R}^N$ y $\int_{\mathbb{R}^N} \rho \, dx > 0$; tomar por ejemplo*

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

y considerar a continuación $\rho_n(x) = C\, n^N \rho(n\, x)$ con $C = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\, dx\right)^{-1}$.

Proposición 1.2.17 *Sea $f \in C(\mathbb{R}^N)$, entonces $\rho_n * f \longrightarrow f$ uniformemente sobre todo compacto de $\mathbb{R}^N$.*

Teorema 1.2.18 *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces*

$$\rho_n * f \longrightarrow f \quad en \quad L^p(\mathbb{R}^N).$$

Corolario 1.2.19 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto arbitrario. Entonces $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Lema 1.2.20 *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y $1 \leq p < \infty$. Si $v_n \to u$ en $L^p(\Omega)$, existe una subsucesión (w_n) de (v_n) y $g \in L^p(\Omega)$ tal que, casi todo punto sobre $\Omega, w_n(x) \to u(x)$ y*

$$|u(x)|, |w_n(x)| \leq g(x).$$

Ver [7] apéndice A, Lema A.1.

Demostración: Tomando si es necesario una subsucesión, podemos asumir que $v_n(x) \to u(x)$ c.t.p. sobre Ω. Existe una subsucesión (w_n) de (v_n) tal que

$$|w_{j+1} - w_j|_p \leq 2^{-j}, \qquad \forall j \geq 1.$$

Definimos

$$g(x) := |w_1(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} |w_{j+1}(x) - w_j(x)|.$$

Es claro que, c.t.p. sobre Ω, $|w_n(x)| \leq g(x)$ y entonces $|u(x)| \leq g(x)$. $\square$

Teorema 1.2.21 *Asumimos que* $|\Omega| < \infty$, $1 \leq p$, $r < \infty$, $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ *y*

$$|f(x,u)| \leq c \left(1 + |u|^{\frac{p}{r}}\right).$$

Luego, para toda $u \in L^p(\Omega)$, $f(.,u) \in L^r(\Omega)$, *el operador*

$$A : L^p(\Omega) \to L^r(\Omega) : u \mapsto f(x,u)$$

es continuo.

Ver [7] apéndice A, Teorema A.2.

Demostración:

1. Sea $u \in L^p(\Omega)$. De
$$|f(x,u)|^r \leq c^r \left(1 + |u|^{\frac{p}{r}}\right)^r \in L^1(\Omega),$$
sigue que $f(.,u) \in L^r(\Omega)$.

2. Asumimos que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$. Consideramos una subsucesión (v_n) de (u_n). Sean (w_n) y g como las dadas en el lema anterior. De
$$\begin{aligned} |f(x,w_n) - f(x,u)|^r &\leq (|f(x,w_n)| + |f(x,u)|)^r \\ &\leq \left(c \left(1 + |w_n|^{\frac{p}{r}}\right) + c \left(1 + |u|^{\frac{p}{r}}\right)\right)^r \\ &\leq \left(2\, c \left(1 + |g|^{\frac{p}{r}}\right)\right)^r \\ &= 2^r\, c^r \left(1 + |g|^{\frac{p}{r}}\right)^r \in L^1(\Omega), \end{aligned}$$
sigue que por el Teorema de Convergencia Mayorada, $Aw_n \to Au$ en $L^r(\Omega)$. Y luego $Au_n \to Au$ en $L^r(\Omega)$.

$\square$

1.3. Espacios de Sobolev $W^{1,p}$

Recordamos las fórmulas de integración por partes que son consecuencias del teorema de la divergencia (Gauss-Green):

Proposición 1.3.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acoctado de clase C^1, y notemos por η a su normal exterior unitaria. Sean $u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ entonces*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} u\, v\, \eta^i\, ds$$

donde η^i denota la i-ésima componente de la normal.

Similarmente si $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$,

i)

$$\int_\Omega v\, \Delta u + \nabla u \nabla v\, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta}\, ds,$$

ii)

$$\int_\Omega v\, \Delta u - u\, \Delta v\, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta}\, ds,$$

iii)

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\, ds,$$

En particular, esto motiva la siguiente definición de derivada débil:

Definición 1.3.2 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y $1 \le p \le \infty$. Sea $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$. Decimos que $v_i \in L^1_{Loc}(\Omega)$ es la derivada débil de u con respecto a x_i si*

$$\int_\Omega u \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v_i \varphi\, dx \quad \textit{para toda} \quad \varphi \in C^1_0(\Omega).$$

Observación 1.3.3 *Si la derivada débil v_i exite, es única.*

Como consecuencia del teorema de Green, toda función $u \in C^1(\Omega)$ tiene derivadas en sentido débil, y coinciden con las derivadas en sentido clásico.

Notación:

$$v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i},$$
$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Definición 1.3.4 *El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ consiste de todas las funciones $u \in L^p(\Omega)$ tales que para cada $i = 1, 2, ..., N$ existe la derivada débil con respecto a x_i y $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$.*

Notación:

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Definición 1.3.5 *Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$,*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposición 1.3.6 *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

Proposición 1.3.7 *$W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$. El espacio $H^1(\Omega)$ es un Hilbert separable.*

Lema 1.3.8 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$(f * u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad y \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(f * u) = f * \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2, ..., N.$$

Definición 1.3.9 *Cuando $1 \leq p < N$, llamamos exponente crítico de Sobolev a $p^* = \frac{Np}{N-p}$.*

Teorema 1.3.10 *(Desigualdad de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)*
Sea p tal que $1 \leq p < N$. Entonces existe una constante C, que depende sólo de p y N, tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \qquad \forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Corolario 1.3.11 *Sea $1 \leq p < N$. Entonces la inmersión*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \textit{es continua} \quad \forall\, q \in [p, p^*].$$

Teorema 1.3.12 *(Teorema de Rellich-Kondrachow)*
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase C^1. Se verifica,
si $p < N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ es compacta $\forall q \in [1, p^*)$,
si $p = N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ es compacta $\forall q \in [1, \infty)$,
si $p > N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ es compacta.

Definición 1.3.13 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N, 1 \leq p < \infty$. $W_0^{1,p}(\Omega)$ designa la clausura del espacio $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Cuando $p = 2$ se nota*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Si Ω es un abierto acotado de clase C^1, recordamos que una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ está en $W_0^{1,p}(\Omega)$ si y sólo $u = 0$ en $\partial\Omega$ en el sentido de la traza.

Teorema 1.3.14 *El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ dotado de la norma inducida por $W^{1,p}(\Omega)$, es un espacio de Banach separable; es reflexivo si $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar de $H^1(\Omega)$.*

Teorema 1.3.15 *Sea Ω un conjunto acotado de $\mathbb{R}^N$. El espacio $\left(W_0^{1,p}(\Omega), \|.\|_{W^{1,p}}\right)$ es uniformemente convexo.*

Demostración: Ver Teorema 6 de [8]. □

Lema 1.3.16 *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, con soporte compacto de u incluido en Ω, entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Teorema 1.3.17 *(Desigualdad de Poincaré)*
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto acotado. Entonces existe $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

En particular, $\|\nabla u\|_{L^p}$ es una norma equivalente a la usual en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.4. Los Multiplicadores de Lagrange

Teorema 1.4.1 *(Multiplicadores de Lagrange)*
Sea E un espacio de Banach y consideremos las funcionales no lineales $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ y $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $u_0 \in M = \{u \in E \text{ tal que } I(u) = \alpha\}$ es un extremo (máximo o mínimo) de $J|_M$ y si $DI(u_0) \neq 0$ (u_0 es punto regular de la superficie M), entonces:

1. *$DJ(u_0)(h) = 0$ para toda $h \in T_{u_0}M = \{h \in E \text{ tal que } DI(u_0)(h) = 0\}$, o también $T_{u_0}M = \{h \in E$ tal que existe una curva c parametrizada por $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow c \subset M$ diferenciable C^1 tal que $\gamma(0) = u_0$ y $\gamma'(0) = h\}$ ($T_{u_0}M$ es un hiperplano cerrado en E, que se denomina el hiperplano tangente a M en u_0.).*

2. *Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $DJ(u_0) = \lambda DI(u_0)$.*

Demostración: Ver Terorema 4.8 y su demostración en [6] (en la parte de Preliminares). $\square$

1.5. El Principio de Criticalidad Simétrica

Definición 1.5.1 *Una acción de un grupo topológico G sobre un espacio de Banach E es una función continua*

$$G \times E \longrightarrow E : [g, u] \longrightarrow g.u$$

tal que

$$\begin{aligned} &1 \cdot u = u, \\ &(g \cdot x)u = g.(xu), \\ &u \mapsto g \cdot u \quad \text{es lineal.} \end{aligned}$$

La acción es isométrica si

$$\|g \cdot u\| = \|u\|.$$

El espacio de puntos invariantes está definido por

$$F_{ix}(G) := \{u \in E : g \cdot u = u, \forall g \in G\}.$$

Un subconjunto $B \subset E$ es G-invariante si $g \cdot B = B$ para toda $g \in G$. Una función $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es G-invariante si $J \circ g = J$ para toda $g \in G$. Una función $f : E \longrightarrow E$ es equivariante si $g \circ f = f \circ g$ para toda $g \in G$.

Observación 1.5.2 *Sea G un grupo que actúa en forma isométrica sobre un espacio de Hilbert H, entonces vale que g es unitario, es decir*

$$\langle x\,,\,g.y\rangle = \langle g^{-1}.x\,,\,y\rangle \quad \forall x, y \in H, \forall g \in G.$$

Demostración: Usando la identidad de Polarización

$$\langle u\,,\,v\rangle = \frac{1}{2}\left[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right],$$

y tomando $u = x$ y $v = g \cdot y$,

$$\begin{aligned}
\langle x\,,\,g.y\rangle &= \frac{1}{2}\left[\|x+g.y\|^2 - \|x-g\cdot y\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\|g\cdot(g^{-1}\cdot x+y)\|^2 - \|g\cdot(g^{-1}\cdot x-y)\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\|g^{-1}\cdot x+y\|^2 - \|g^{-1}\cdot x-y\|^2\right] \quad \text{pues la acción es isométrica,} \\
&= \langle g^{-1}\cdot x, y\rangle \quad \text{por la identidad de Polarización.}
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.5.3 *(Principio de Criticalidad Simétrica para espacios de Hilbert)*
Sean H un espacio de Hilbert, G un grupo que actúa sobre H en forma isométrica, $F_{ix}(G) := \{u \in H : g.u = u, \forall g \in G\}$, y $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcional de clase C^1, J G-invariante, todos como en la Definición 1.5.1. Si u_0 es punto crítico de $J|_{F_{ix}(G)}$, entonces u_0 es punto crítico de J, es decir, $J'(u_0)(h) = 0$ para toda $h \in H$.

Demostración: Por hipótesis u_0 es un punto crítico de $J|_{F_{ix}(G)}$, es decir que $u_0 \in F_{ix}(G)$ y $\frac{\partial J}{\partial v}(u_0) = 0$ para toda $v \in F_{ix}(G)$.

Veamos que $F_{ix}(G)$ es un subespacio vectorial cerrado de H :
Sea $(u_n) \in F_{ix}(G)$ y supongamos que $u_n \to u$, queremos ver que $u \in F_{ix}(G)$. Ahora

$$g \cdot u_n = u_n \quad \forall g \in G,\ \forall n$$

Como la acción es continua,

$$g \cdot u_n \to g \cdot u$$

Entonces $g \cdot u = u$, y por lo tanto $u \in F_{ix}(G)$. Luego $F_{ix}(G)$ es cerrado.

Por un teorema de análisis funcional, sabemos que, como H es un espacio de Hilbert y $F_{ix}(G) \subset H$ es un subespacio cerrado, entonces

$$H = F_{ix}(G) \oplus F_{ix}(G)^{\perp}.$$

Sea $v \in H$, queremos ver que

$$\frac{\partial J}{\partial v}(u_0) = 0.$$

Por ser J diferenciable, vale que

$$\frac{\partial J}{\partial v}(u_0) = \langle \nabla J(u_0), v \rangle.$$

Y $\nabla J(u_0) \in H$, entonces

$$\nabla J(u_0) = v_1 + v_2,$$

donde $v_1 \in F_{ix}(G)$ y $v_2 \in F_{ix}(G)^{\perp}$. Por hipótesis,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial J}{\partial v_1}(u_0) &= \langle \nabla J(u_0), v_1 \rangle \\ &= \langle v_1 + v_2, v_1 \rangle \\ &= \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle \\ &= \langle v_1, v_1 \rangle \qquad \text{pues } v_1 \ y \ v_2 \text{ son ortogonales,} \\ &= \|v_1\|^2, \end{aligned}$$

entonces $v_1 = 0$. Por lo tanto

$$\nabla J(u_0) = v_2 \in F_{ix}(G)^{\perp}.$$

Ahora derivamos la ecuación

$$J(g \cdot u) = J(u)$$

en la dirección de un v,

$$\frac{\partial J}{\partial v}(g \cdot u) = \frac{\partial J}{\partial v}(u) \quad \forall v.$$

Calculamos $\frac{\partial J}{\partial v}(g.u)$ por definición de derivada direccional,

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial v}(g.u) &= \lim_{t\to 0}\frac{J(g.(u+t\,v))-J(g\cdot u)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{J(g\cdot u+t\,g\cdot v)-J(g\cdot u)}{t}, \quad \text{pues la acción es lineal.}\end{aligned}$$

Tomamos $w = g.u$, y $h = tg.v$. Además J es diferenciable por hipótesis en w, entonces

$$J(w+h) = J(w) + \langle \nabla J(w)\,,\, h\rangle + o(\|h\|),$$

donde

$$\begin{aligned}\|h\| &= \|tg\cdot v\|\\ &= |t|\|g.v\|\\ &= |t|\|v\|, \quad \text{pues la acción es isométrica.}\end{aligned}$$

Y como v está fijo, $o(\|h\|) = o(|t|)$. Luego volviendo a la ecuación anterior y reemplazando queda

$$\begin{aligned}J(g\cdot u+tg\cdot v) &= J(g.u) + \langle \nabla J(g\cdot u)\,,\, tg.v\rangle + o(|t|)\\ J(g\cdot u+tg\cdot v) &= J(g.u) + t\,\langle \nabla J(g\cdot u)\,,\, g\cdot v\rangle + o(|t|)\\ \frac{J(g\cdot u+tg.v)-J(g\cdot u)}{t} &= \langle \nabla J(g\cdot u)\,,\, g\cdot v\rangle + \frac{o(|t|)}{t}.\end{aligned}$$

Ahora tomando límite cuando $t \to 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{J(g\cdot u+tg\cdot v)-J(g.u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\langle \nabla J(g\cdot u), g\cdot v\rangle + \frac{o(|t|)}{t}\\ \frac{\partial J}{\partial v}(g.u) &= \langle \nabla J(g.u)\,,\, g.v\rangle + \lim_{t\to 0}\frac{o(|t|)}{t},\end{aligned}$$

y como $\lim_{t\to 0}\frac{o(|t|)}{t} = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial v}(g.u) &= \langle \nabla J(g.u)\,,\, g.v\rangle\\ &= \langle g^{-1}.\nabla J(g.u)\,,\, v\rangle \quad \text{por la Observación 1.5.2.}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial v}(g\cdot u) &= \frac{\partial J}{\partial v}(u) \quad \forall v\\ \langle g^{-1}\cdot \nabla J(g.u), v\rangle &= \langle \nabla J(g\cdot u), v\rangle \quad \forall v,\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$g^{-1} \cdot \nabla J(g \cdot u) = \nabla J(u).$$

En particular vale la ecuación anterior en $u_0 \in F_{ix}(G)$,

$$\begin{aligned} g^{-1} \cdot \nabla J(g.u_0) &= \nabla J(u_0) \\ g^{-1} \cdot \nabla J(u_0) &= \nabla J(u_0) \qquad \text{pues} \quad g \cdot u_0 = u_0, \end{aligned}$$

es decir que $\nabla J(u_0) \in F_{ix}(G)$. Luego

$$\nabla J(u_0) \in F_{ix}(G) \cap F_{ix}(G)^{\perp} = \{0\},$$

entonces $\nabla J(u_0) = 0$, y por lo tanto $\frac{\partial J}{\partial v}(u_0) = 0 \ \forall \ v \in H$, es decir u_0 es punto crítico de J. □

Definición 1.5.4 *(Espacio de Banach Estrictamente Convexo)*
Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ es estrictamente convexo si para cada u y $v \in E$ con $\|u\| = \|v\| = 1$, $u \neq v$ y $\beta \in (0,1)$, se tiene que $\|\beta\, u + (1-\beta)\, v\| < 1$. Notemos que esta propiedad depende no sólo del espacio sino de su norma, ya que un espacio puede ser estrictamente convexo con una norma y no serlo con otra norma equivalente.

Observación 1.5.5 *Si E es uniformemente convexo, entonces E es estrictamente convexo.*

Demostración: Ver Teorema 2 en Dinca [8]. □

Proposición 1.5.6 *Sean E un espacio de Banch reflexivo y estrictamente convexo, y $U(f) = \{u \in E : f(u) = \|u\|_E^2 \quad y \quad \|u\|_E = \|f\|_{E^*}\}$, entonces*

$$card(U(f)) = 1 \quad \forall f \in E'.$$

Demostración: Ver Proposición $1-ii$ en Dinca [8], tomando como función de normalización φ la identidad, y aplicándoselo al espacio dual E'. □

Teorema 1.5.7 *(Principio de Criticalidad Simétrica para espacios de Banach)*
Sea E un espacio de Banach reflexivo con $\|.\|_E$ tal que:
para cada $f \in E'$, existe un único $u_0 \in E$ tal que $f(u_0) = \|u_0\|_E^2 = \|f\|_{E'}^2$. Sean

i) G, *un subgrupo de isometrías* $g : E \longrightarrow E\,(\|g(u)\| = \|u\|\,\forall u \in E)$;

ii) $\Sigma = \{u \in E : g\,u = g(u) = u, \forall g \in G\}$ *subespacio cerrado G-invariante;*

iii) J *un funcional* C^1, $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $J \circ g = J\,\forall g \in G$.

Luego $u \in \Sigma$ *es un punto crítico de* $J \Longleftrightarrow u$ *es un punto crítico de* $J|_{\sum}$.

.

Demostración: Ver Proposición 3.1 en Souto [9]. □

1.6. El Principio Fuerte del Máximo

Consideramos un operador diferencial lineal de segundo orden L dado por:

$$Lu = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x) \tfrac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x)\,u \right] + c_i(x) \tfrac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)\,u,$$

donde los coeficientes a_{ij}, b_i, c_i, $d\,(i, j = 1, ..., N)$ son funciones medibles en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Supongamos que L es estrictamente elíptico en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, esto es, existe $\hat{\lambda} > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq \hat{\lambda}\,|\xi|^2 \qquad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{1.1}$$

También asumimos que L tiene coeficientes acotados, o sea que para algunas constantes Λ y $\nu \geq 0$ tenemos, para todo $x \in \Omega$

$$\sum_{i,j=1}^{N} |a_{ij}(x)|^2 \leq \Lambda^2, \quad \hat{\lambda}^{-2} \sum_{i=1}^{N} |b_i(x)|^2 + |c_i(x)|^2 + \hat{\lambda}^{-1}|d(x)| \leq \nu^2. \tag{1.2}$$

Supondremos que

$$\int_\Omega \left(d(x)\,v - \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\,\tfrac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \leq 0 \quad \forall v \in C_0^1(\Omega) \quad v \geq 0. \tag{1.3}$$

Teorema 1.6.1 *(Principio Fuerte del Máximo)*
Sean L un operador que satisface las condiciones (1.1), (1.2) y (1.3) y $u \in H^1(\Omega)$ tal que $Lu \geq 0$ en Ω. Entonces, si para alguna bola $B \subset \Omega$ tenemos

$$\sup_B = \sup_\Omega \geq 0$$

la función u es constante en Ω y se tiene la igualdad en (1.3) cuando $u \not\equiv 0$.

Demostración: Ver en Gilbarg-Trudinger [10], Teorema 8.19. □

Observación 1.6.2 *Notemos que*

$$\inf_\Omega u = -\sup_\Omega(-u)$$

Entonces, el Principio Fuerte del Mínimo para soluciones de $Lu \geq 0$, seguirá inmediatamente por el reemplazo de u con $-u$.

Teorema 1.6.3 *(Principio Fuerte del Máximo para ecuaciones con el p-Laplaciano)*
Sea Ω un conjunto acotado y sea d no negativa en Ω. Además, asumimos que para $1 < p \leq N$ la función f satisface

$$\begin{cases} f(x,s) \leq g(x) + c\,|s|^\beta \quad 1 \leq \beta < \infty,\ c \geq 0, \\ \text{se tiene para c.t.p. } x \in \Omega \quad y \quad \forall s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

con

1. $p - 1 \leq \beta < p^* - 1$,
   $g \in L^r(\Omega) \cap L^{\frac{p^*}{\beta}}(\Omega)$,
   $r > \frac{N}{p}$ *si* $1 < p < N$,

   o

2. $p - 1 \leq \beta < \infty$,
   $g \in L^r(\Omega)$,
   $r > 1$ *si* $p = N$.

Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *una solución débil no negativa y no trivial de*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + d\,|u|^{p-2}\,u = f(.,u) \quad en\,\Omega, \\ u = 0 \quad sobre\,\partial\Omega, \end{cases}$$

tal que $f(.,u)$ *es no negativa en* Ω. *Luego* u *es positiva en* Ω *y* $u \in L^\infty(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\Omega)$ *para algún* $\alpha \in (0,1)$.

Demostración: Ver en Drábek [11]. □

Capítulo 2

Una Ecuación Elíptica Semilineal sobre $\mathbb{R}^N$ con Coeficientes No Acotados

2.1. Resultados Principales

En este este capítulo, estudiaremos el problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u + |x|^a u = |x|^b u^{q-1}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ \\ u > 0 \text{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $N \geq 3$, $a, b \geq 0$, $1 < q < \infty$ y Δu denota el operador Laplaciano clásico.

También analizaremos el problema análogo en una bola

$$\begin{cases} -\Delta u + |x|^a u = |x|^b u^{q-1}, \quad u \in H^1(B(0,R)), \\ \\ u > 0 \text{ en c.t.p. en } B(0,R), \\ \\ u \equiv 0 \text{ (en el sentido de la traza) en } \partial B(0,R), \end{cases} \tag{2.2}$$

para R suficientemente grande.

Para obtener soluciones radiales y no radiales, consideraremos los problemas de minimización

$$m = m(a,b,q) := \inf_{\substack{u\in H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N) \\ \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b|u|^q dx=1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a u^2 dx,$$

y

$$M = M(a,b,q) := \inf_{\substack{u\in H^1_{a}(\mathbb{R}^N) \\ \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b|u|^q dx=1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a u^2 \, dx,$$

donde

$$H^1_a(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |x|^a u^2 dx < \infty \right\}$$

es un espacio de Sobolev con pesos, y $H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ es el subespacio de sus funciones radiales.

Los resultados más importantes que probaremos en este capítulo son:

Teorema 1:
Si $0 \leq a < N,\ b \geq 0,\ N \geq 3,$

$$2 < q < \tilde{q} := 2^* + \tfrac{2b}{N-2} \quad y \quad 2b - \left(1 + \tfrac{q}{2}\right) a < (N-1)(q-2),$$

entonces m *se alcanza.*

Teorema 2:
Sea u_0 *función donde se alcanza* m*. Entonces hay un múltiplo de* u_0 *que proporciona una solución radial no trivial de (2.1) .*

Bajo una condición de subcriticalidad, se obtiene un resultado análogo de existencia para el caso de funciones sin simetría radial en $\mathbb{R}^N$.

Teorema 3:
Si $0 < a < N,\ b \geq 0,\ N \geq 3$ *y*

$$2 < q < q^{\#} := 2^* - \tfrac{4b}{a(N-2)},$$

entonces M *se alcanza.*

Estos resultados nos conducirán al siguiente teorema, que es el resultado principal del capítulo, en el que se trabaja en una bola:

Teorema 4:
Si $0 \leq a < N$, $b \geq 0$, $N \geq 3$, $2 < q < 2^*$, $aq < 2b$ *y*

$$2b - \left(1 + \tfrac{q}{2}\right) a < (N-1)(q-2),$$

entonces, para todo R *suficientemente grande, el problema (2.2) tiene una solución radial no trivial y otra no radial.*

Por otra parte usando la identidad de Derrick-Pohozaev, podemos establecer un resultado de no existencia para el problema en $\mathbb{R}^N$:

Teorema 5:
Sean $0 \leq a < N$, $b \geq 0$, *si*

$$q \geq \tilde{q} := \tfrac{2N}{N-2} + \tfrac{2b}{N-2}$$

o si

$$q \leq 2 + 2\,\tfrac{b-a}{N+a}$$

luego no hay solución no trivial para el problema (2.1).

2.2. Espacios y Desigualdades para Funciones Radiales

Definición 2.2.1 *(Función Radial)*
Decimos que u es una Función Radial, si existe una función u_0 *tal que* $u(x) = u_0(|x|)$.

Introducimos algunos espacios adaptados al problema. Sean

$$\begin{aligned} D(\Omega) &= \{u \in C^\infty(\Omega)\text{: el soporte de u es compacto en}\,\Omega\}, \\ D_r(\Omega) &= \{u \in C^\infty(\Omega)\text{ función radial : el soporte de u es compacto en}\,\Omega\}, \end{aligned}$$

y denotemos por $H^1_r(\mathbb{R}^N)$, $D^{1,2}_r(\mathbb{R}^N)$ y $H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ a los espacios de funciones radialmente simétricas respectivamente en

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{R}^N) &= \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\}, \\ D^{1,2}(\mathbb{R}^N) &= \left\{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\} \quad (N \geq 3), \\ H^1_a(\mathbb{R}^N) &= \left\{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |x|^a u^2 dx < \infty\right\} \qquad \text{con } a \geq 0, \end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 + |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \\
\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\, dx\right)^{\frac{1}{2^*}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \\
\|u\|_{H^1_a(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a u^2 + |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Observación 2.2.2 $H^1(\mathbb{R}^N) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Demostración: Si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, entonces $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Además por la desigualdad de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\, \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

De esta manera $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ y por lo tanto $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Además la inmersión es continua. □

Observación 2.2.3 $H^1_a(\mathbb{R}^N) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demostración: Por un lado, usando las desigualdades de Hölder y Sobolev, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|\leq 1} |u|^2\, dx &\leq C\, \left(\int_{|x|\leq 1} |u|^{2^*}\, dx\right)^{2/2^*} \\
&\leq C\, \|\nabla u\|^2_{L^2}
\end{aligned}
$$

y también

$$\int_{|x|\geq 1} |u|^2\, dx \leq \int_{|x|\geq 1} |x|^a\, |u|^2\, dx.$$

Se deduce que

$$\|u\|_{L^2} \leq C\, \|u\|_{H^1_a}$$

y por lo tanto

$$\|u\|_{H^1} \leq C\, \|u\|_{H^1_a}.$$

□

Observación 2.2.4 *Si definimos*

$$\widetilde{H}^1_a(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |x|^a u^2 dx < \infty \right\}$$

entonces

$$\widetilde{H}^1_a(\mathbb{R}^N) = H^1_a(\mathbb{R}^N).$$

Demostración: Si $u \in H^1_a(\mathbb{R}^N)$, entonces $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ por la observación anterior, y $u \in L^2_a(\mathbb{R}^N)$ luego $u \in \widetilde{H}^1_a(\mathbb{R}^N)$. Recíprocamente si $u \in \widetilde{H}^1_a(\mathbb{R}^N)$, entonces $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, luego $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Y como $u \in L^2_a(\mathbb{R}^N)$, concluimos que $u \in H^1_a(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Definición 2.2.5 *Definimos el espacio $H^1_0(\Omega)$ como la clausura de $D(\Omega)$ con respecto a la norma $(\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})^{\frac{1}{2}}$.*

Definición 2.2.6 *Definimos el espacio $D^{1,2}_0(\Omega)$ como la clausura de $D(\Omega)$ con respecto a la norma $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.*

Observación 2.2.7 *Si $|\Omega| < \infty$ tenemos $H^1_0(\Omega) = D^{1,2}_0(\Omega)$.*

Demostración: Es claro que $H^1_0(\Omega) \subset D^{1,2}_0(\Omega)$. Sea $u \in H^1_0(\Omega)$, entonces existe una sucesión d_n en $D(\Omega)$ tal que

$$d_n \to u \quad \text{con respecto a la norma} \quad (\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})^{\frac{1}{2}},$$

lo que implica que

$$\|\nabla(d_n - u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad \text{y} \quad \|d_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

Es decir que $d_n \to u$ con respecto a la norma $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, y por lo tanto $u \in D^{1,2}_0(\Omega)$.

Falta ver que $D^{1,2}_0(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$. Sea $u \in D^{1,2}_0(\Omega)$, entonces existe una sucesión $b_n \in D(\Omega)$ tal que

$$b_n \to u \quad \text{con respecto a la norma} \quad \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

o sea $\|\nabla(b_n - u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$. Por la desigualdad de Poincaré, existe $C > 0$ tal que

$$\|b_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C \; \|\nabla(b_n - u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Luego $\|b_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$. De esta manera,

$$\left(\|\nabla(b_n - u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|b_n - u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0,$$

es decir $b_n \to u$ con respecto a la norma $(\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})^{\frac{1}{2}}$, y por lo tanto $u \in H_0^1(\Omega)$. $\square$

El siguiente lema radial es una versión mejorada del Lema radial de Strauss (ver [12], lema 1).

Lema 2.2.8 *Si $N \geq 2$, $0 \leq a < N$, existe A_N tal que, para todo $v \in H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$, tenemos $v \in C(\mathbb{R}^N - \{0\})$ y*

$$|x|^{\frac{N-1}{2}+\frac{a}{4}}|v(x)| \leq A_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |v|^2 dx\right)^{\frac{1}{4}} \|\nabla v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Demostración: Consideremos $u \in H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N) \cap D(\mathbb{R}^N)$. Sea r_0 tal que el soporte de u está contenido en $B(0, r_0)$, entonces

$$2u\tfrac{du}{ds}s^{\frac{a}{2}}s^{N-1} \leq \tfrac{d}{ds}\left(u^2 s^{\frac{a}{2}} s^{N-1}\right) \qquad \text{pues } s \geq 0,$$

e integrando a ambos miembros,

$$\begin{aligned}\int_r^{r_0} 2u\tfrac{du}{ds}s^{\frac{a}{2}}s^{N-1}ds &\leq \int_r^{r_0} \tfrac{d}{ds}\left(u^2 s^{\frac{a}{2}} s^{N-1}\right) ds \\ &= -u^2(r) r^{\frac{a}{2}} r^{N-1} \qquad \text{pues} \quad u(r_0) = 0,\end{aligned}$$

es decir,

$$u^2(r) r^{\frac{a}{2}} r^{N-1} \leq -\int_r^{r_0} 2u\tfrac{du}{ds}s^{\frac{a}{2}}s^{N-1}ds.$$

Además,

$$
\begin{aligned}
-\int_r^{r_0} 2u\tfrac{du}{ds}s^{\frac{a}{2}}s^{N-1}ds &\leq 2\int_r^{r_0} |u|\left|\tfrac{du}{ds}\right| s^{\frac{a}{2}}s^{N-1}ds \\
&= \tfrac{2}{|\partial B_1|}\int_r^{r_0} |\partial B_1||u|\left|\tfrac{du}{ds}\right| s^{\frac{a}{2}}s^{N-1}ds \\
&\leq \tfrac{2}{|\partial B_1|}\int_0^{\infty} |\partial B_1||u|\left|\tfrac{du}{ds}\right| s^{\frac{a}{2}}s^{N-1}ds \\
&= \tfrac{2}{|\partial B_1|}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\frac{a}{2}}|u(x)||\nabla u|dx,
\end{aligned}
$$

por el Teorema de Cambio de Variable. Y por la desigualdad de Hölder vale que,

$$
\tfrac{2}{|\partial B_1|}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\frac{a}{2}}|u(x)||\nabla u|dx \leq \tfrac{2}{|\partial B_1|}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.
$$

Ahora juntando las desigualdades queda,

$$
u^2(r)r^{\frac{a}{2}}r^{N-1} \leq \tfrac{2}{|\partial B_1|}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.
$$

Luego elevando ambos miembros a la $\frac{1}{2}$, y llamando A_N a $\left(\frac{2}{|\partial B_1|}\right)^{\frac{1}{2}}$, llegamos a,

$$
|x|^{\frac{N-1}{2}+\frac{a}{4}}|u(x)| \leq A_N\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|u|^2 dx\right)^{\frac{1}{4}}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{2}}.
$$

Consideremos ahora $v \in H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$. Como $D_r(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ (ver apéndice B, Obs. (B.0.8)), existe $(v_n) \in D_r(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$
v_n \longrightarrow v \qquad \text{en } H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N),
$$

o sea,

$$
\|v_n - v\|_{H^1_a(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando}\, n \to +\infty.
$$

En particular,

$$
v_n \longrightarrow v \qquad \text{en } L^2_a(\mathbb{R}^N).
$$

Pasando entonces a una subsucesión podemos también suponer que

$$v_n(x) \to v(x) \text{ en casi todo punto.}$$

Además por lo demostrado anteriormente, (v_n) cumple

$$|x|^{\frac{N-1}{2}+\frac{a}{4}}|v_n(x)| \leq A_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|v_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{4}} \|\nabla v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{2}}.$$

Notemos que

1. $$\|v_n\|_{L^2_a(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|v_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|v\|_{L^2_a(\mathbb{R}^N)}$$

   cuando $n \to +\infty$, pues

   $$\begin{aligned}\left|\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|v_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right| &= \left|\|v_n\|_{L^2_a(\mathbb{R}^N)} - \|v\|_{L^2_a(\mathbb{R}^N)}\right| \\ &\leq \|v_n - v\|_{L^2_a(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|v_n - v\|_{H^1_a(\mathbb{R}^N)},\end{aligned}$$

   por la desigualdad triangular, y $\|v_n - v\|_{H^1_a(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0$ cuando $n \to +\infty$, con lo cual

   $$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|v_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{cuando}\, n \to +\infty.$$

2. $$\|\nabla v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad \text{cuando}\, n \to +\infty,$$

   pues, por la desigualdad triangular

   $$\begin{aligned}\left|\|\nabla v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right| &\leq \|v_n - v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \\ &\leq \|v_n - v\|_{H^1_a(\mathbb{R}^N)},\end{aligned}$$

   y $\|v_n - v\|_{H^1_a(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0$ cuando $n \to +\infty$, con lo cual

   $$\|\nabla v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad \text{cuando}\, n \to +\infty.$$

Luego vale que para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|x|^{\frac{N-1}{2}+\frac{a}{4}}|v(x)| \leq A_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |v|^2 dx\right)^{\frac{1}{4}} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{2}} \quad \forall\, v \in H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N).$$

Veamos ahora que $v \in C(\mathbb{R}^N - \{0\})$. Como $v_n \longrightarrow v$ en $H^1_a(\mathbb{R}^N)$, entonces (v_n) es de Cauchy, es decir

$$\|v_n - v_m\|_{H^1_a(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0.$$

Usamos la desigualdad recién probada para $(v_n - v_m)$,

$$\begin{aligned}
|x|^{\frac{N-1}{2}+\frac{a}{4}}|v_n(x) - v_m(x)| &\leq A_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |v_n - v_m|^2 dx\right)^{\frac{1}{4}} \|\nabla (v_n - v_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq A_N \|v_n - v_m\|_{H^1_a(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{2}} \|v_n - v_m\|_{H^1_a(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{2}} \\
&= A_N \|v_n - v_m\|_{H^1_a(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Podemos tomar una sucesión creciente de compactos

$$K_l = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \tfrac{1}{l} \leq |x| \leq l\right\}, l \in \mathbb{N}$$

cuya unión es $\mathbb{R}^N - \{0\}$. Para cada uno de ellos, vale

$$\begin{aligned}
|v_{n_i}(x) - v_{n_j}(x)| &\leq A_N \|v_{n_i} - v_{n_j}\|_{H^1_a(\mathbb{R}^N)} |x|^{-(\frac{N-1}{2}+\frac{a}{4})} \\
&\leq A_N \|v_{n_i} - v_{n_j}\|_{H^1_a(\mathbb{R}^N)}\, M \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Esto implica que $v_{n_i}(x)$ es uniformemente de Cauchy en K_l, entonces existe $\tilde{v}_l$ tal que

$$v_{n_i} \longrightarrow \tilde{v}_l \qquad \text{uniformemente en}\, K_l,$$

y (v_{n_i}) es una sucesión de funciones continuas, con lo cual $\tilde{v}_l$ es continua. Ahora bien, como $\tilde{v}_l(x) = \tilde{v}_s(x)$ si $x \in K_l$ y $s \geq l$, podemos definir $\tilde{v}$ para $x \in \mathbb{R}^N$ por

$$\tilde{v}(x) = \tilde{v}_l(x) \quad \text{si}\, x \in K_l.$$

Entonces $\tilde{v} \in C\left(\mathbb{R}^N - \{0\}\right)$. Luego,

$$v = \tilde{v} \qquad \text{en casi todo punto},$$

es decir que $v \in C(\mathbb{R}^N - \{0\})$. $\square$

Lema 2.2.9 *Sea* $N > 2$. *Luego existe* $\hat{C} = \hat{C}(N) > 0$ *tal que para toda* $v \in D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $v \in C(\mathbb{R}^N - \{0\})$ *y se tiene que*

$$|v(x)| \leq \hat{C}\ |x|^{-\left(\frac{N-2}{2}\right)} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Demostración: Sea $u \in D_r(\mathbb{R}^N)$. Notemos w_N al volumen de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^N$. Tenemos

$$-u(r) = u(\infty) - u(r) = \int_r^\infty u'(s)ds.$$

Así

$$\begin{aligned} |u(r)| &\leq \int_r^\infty |u'(s)|ds \\ &= \int_r^\infty |u'(s)| s^{\frac{N-1}{2}} s^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} ds \\ &\leq \left(\int_r^\infty |u'(s)|^2 s^{N-1} ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_r^\infty s^{-(N-1)} ds\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

por la desigualdad de Hölder.
Acotemos el primer factor,

$$\begin{aligned} \left(\int_r^\infty |u'(s)|^2 s^{N-1} ds\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\tfrac{1}{Nw_N}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_r^\infty Nw_N |u'(s)|^2 s^{N-1} ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\tfrac{1}{Nw_N}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty Nw_N |u'(s)|^2 s^{N-1} ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \tfrac{(w_N)^{-\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

por el Teorema de Cambio de Variable. Y como $N^{\frac{1}{2}} \geq 1$, queda que:

$$\left(\int_r^\infty |u'(s)|^2 s^{N-1} ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq (w_N)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por otro lado, integrando el segundo factor,y aplicando la regla de Barrow teniendo en cuenta que $u \in D_r(\mathbb{R}^N)$, queda que:

$$\left(\int_r^\infty s^{-(N-1)} ds \right)^{\frac{1}{2}} = \left(-\tfrac{1}{2-N} r^{2-N} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\tfrac{1}{N-2} \right)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{2-N}{2}}.$$

Luego,

$$|u(r)| \leq (w_N)^{-\frac{1}{2}} \, \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left(\tfrac{1}{N-2} \right)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{2-N}{2}}.$$

Así, tomando $\hat{C} = (w_N)^{-\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{N-2} \right)^{\frac{1}{2}}$, vale que

$$|u(x)| \leq \hat{C} \, \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} |x|^{\frac{2-N}{2}}.$$

Consideremos ahora $v \in D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Como $D_r(\mathbb{R}^N)$ es denso en $D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, (ver apéndice A, Obs. (A.0.2)), existe $(v_n) \in D_r(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \longrightarrow v \qquad \text{con respecto a la norma} \, \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

es decir

$$\|\nabla(v_n - v)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \, n \to +\infty.$$

Por la desigualdad de Sobolev, se deduce que

$$v_n \to v \text{ en } L^{2^*}$$

y como antes podemos suponer pasando a una subsucesión que

$$v_n(x) \to v(x) \text{ en casi todo punto.}$$

Por la desigualdad probada recién,

$$|v_n(x)| \leq \hat{C} \, \|\nabla v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} |x|^{\frac{2-N}{2}}.$$

Notemos que

$$\left| \|\nabla v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right| \longrightarrow 0,$$

pues

$$\left| \|\nabla v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right| \leq \|\nabla (v_n - v)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \quad \text{por la desigualdad triangular.}$$

Luego,

$$|v(x)| \leq \hat{C}\ \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} |x|^{\frac{2-N}{2}} \quad \forall v \in D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Y análogamente, como en el lema 2.2.8, se prueba que v es igual en casi todo punto a una función continua fuera del origen. $\square$

Lema 2.2.10 *Sea $N > 2$. Asumimos que $2 \leq q < \infty$ y escribimos $q = \frac{2(N+c)}{N-2}$ para algún c tal que $-2 \leq c < \infty$. Entonces existe $\tilde{C} > 0$ tal que para toda $v \in D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N)$*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |v|^q dx \right)^{\frac{2}{q}} \leq \tilde{C} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx.$$

Observación 2.2.11 *Notemos que la relación $q = \frac{2(N+c)}{N-2}$ viene impuesta por el requerimiento de que la desigualdad sea invariante por reescale. Si $c = 0$, coincide con el exponente crítico de Sobolev 2^*.*

Demostración: Sea $u \in D_r(\mathbb{R}^N)$. Por el Teorema de Cambio de Variable, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |u|^q dx &= \int_0^\infty r^c |u(r)|^q N w_N r^{N-1} dr \\ &= N w_N \int_0^\infty r^{N-1+c} |u(r)|^q dr. \end{aligned}$$

Integrando por partes, tomando $g' = r^{N-1+c}$ y $f = |u(r)|^q$ y teniendo en cuenta que $u(\infty) = 0$, se sigue que

$$\begin{aligned} N w_N \int_0^\infty r^{N-1+c} |u(r)|^q dr &= N w_N \left[0 - \int_0^\infty \tfrac{r^{N+c}}{N+c}\, q\, |u(r)|^{q-2} u(r) u'(r) dr \right] \\ &= -\tfrac{q N w_N}{N+c} \int_0^\infty r^{N+c} |u(r)|^{q-2} u(r) u'(r) dr. \end{aligned}$$

Ahora acotando y usando que $q = \frac{2(N+c)}{N-2}$

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{qNw_N}{N+c}\int_0^\infty r^{N+c}|u(r)|^{q-2}u(r)u'(r)dr &\leq \tfrac{2Nw_N}{N-2}\int_0^\infty r^{N+c}|u(r)|^{q-1}|u'(r)|dr\\
&= \tfrac{2Nw_N}{N-2}\int_0^\infty r^{N+c-\left(\frac{N-1}{2}\right)}|u(r)|^{q-1}|u'(r)|r^{\frac{N-1}{2}}dr\\
&\leq \tfrac{2Nw_N}{N-2}\left(\int_0^\infty |u'(r)|^2r^{N-1}dr\right)^{\frac{1}{2}}.\\
&\quad.\left(\int_0^\infty r^{\left(N+c-\left(\frac{N-1}{2}\right)\right)2}|u(r)|^{(q-1)2}dr\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

por la desigualdad de Hölder.
Notemos que por el Teorema de Cambio de Variable,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty |u'(r)|^2r^{N-1}dr &= \tfrac{1}{Nw_N}\int_0^\infty Nw_N|u'(r)|^2r^{N-1}dr\\
&= \tfrac{1}{Nw_N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx.
\end{aligned}
$$

Es claro que

$$
\begin{aligned}
&\left[N+c-\left(\tfrac{N-1}{2}\right)\right]2 = (N-1+c)+(2+c),\\
&q+q-2 = (q-1)2.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{2Nw_N}{N-2}\left(\int_0^\infty |u'(r)|^2r^{N-1}dr\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty r^{\left(N+c-\left(\frac{N-1}{2}\right)\right)2}|u(r)|^{(q-1)2}dr\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad= \tfrac{2(Nw_N)^{\frac{1}{2}}}{N-2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\left(\int_0^\infty r^{N-1+c}|u(r)|^q r^{2+c}|u(r)|^{q-2}dr\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Como $|u(r)| \leq \hat{C}\ \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}r^{\frac{2-N}{2}}$ por el Lema 2.2.9, se sigue que

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty r^{N-1+c}|u(r)|^q r^{2+c}|u(r)|^{q-2}dr\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\hat{C}\right)^{\frac{q-2}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{q-2}{2}}\cdot \\ &\quad\cdot\left(\int_0^\infty r^{N-1+c}|u(r)|^q r^{2+c} r^{\frac{2-N}{2}(q-2)}dr\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\hat{C}\right)^{\frac{q-2}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{q-2}{2}}\cdot \\ &\quad\cdot\left(\int_0^\infty r^{N-1+c}|u(r)|^q r^0 dr\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

pues considerando que $q = \frac{2(N+c)}{N-2}$, vale que $2 + c + \frac{2-N}{2}(q-2) = 0$.
Luego,

$\frac{2(Nw_N)^{\frac{1}{2}}}{N-2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left(\int_0^\infty r^{N-1+c}|u(r)|^q r^{2+c}|u(r)|^{q-2}dr\right)^{\frac{1}{2}}$

$\leq \left(\hat{C}\right)^{\frac{q-2}{2}} \frac{2(Nw_N)^{\frac{1}{2}}}{N-2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{q}{2}} \left(\int_0^\infty r^{N-1+c}|u(r)|^q dr\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\hat{C}\right)^{\frac{q-2}{2}} \frac{2}{N-2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{q}{2}} \left(\int_0^\infty Nw_N r^{N-1} r^c|u(r)|^q dr\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\hat{C}\right)^{\frac{q-2}{2}} \frac{2}{N-2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{q}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c|u(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{2}}$, por Teorema de Cambio de Variable.

Es decir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c|u(x)|^q dx \leq \left(\hat{C}\right)^{\frac{q-2}{2}} \frac{2}{N-2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{q}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c|u(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lo que implica que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c|u(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\hat{C}\right)^{\frac{q-2}{2}} \frac{2}{N-2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{q}{2}},$$

y elevando a la $\frac{2^2}{q}$, obtenemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c|u(x)|^q dx\right)^{\frac{2}{q}} \leq \left(\hat{C}\right)^{\frac{(q-2)2}{q}} \left(\frac{2}{N-2}\right)^{\frac{2^2}{q}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2.$$

Luego llamando $\tilde{C}$ a $\left(\hat{C}\right)^{\frac{(q-2)2}{q}} \left(\frac{2}{N-2}\right)^{\frac{2^2}{q}}$, llegamos a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |u(x)|^q dx\right)^{\frac{2}{q}} \leq \tilde{C}\, \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Consideremos ahora $v \in D^{1,2}_r(\mathbb{R}^N)$. Como $D_r(\mathbb{R}^N)$ es denso en $D^{1,2}_r(\mathbb{R}^N)$ (ver apéndice A, Obs. (A.0.2)), existe $(v_n) \in D_r(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{con respecto a la norma } \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

es decir

$$\|\nabla (v_n - v)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0.$$

Por la desigualdad probada anteriormente, vale que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |v_n(x)|^q dx\right)^{\frac{2}{q}} \leq \tilde{C}\, \|\nabla v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Notemos que

1. $$\left| \|\nabla v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty,$$

   pues, por la desigualdad triangular,

   $$\left| \|\nabla v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right| \leq \|\nabla (v_n - v)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

   y como $\|\nabla (v_n - v)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0$, entonces

   $$\|\nabla v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty.$$

2. Veamos que

   $$\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |v_n(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}_{\|v_n\|_{L^q_c(\mathbb{R}^N)}} \longrightarrow \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |v(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}_{\|v\|_{L^q_c(\mathbb{R}^N)}}.$$

Notemos que (v_n) es de Cauchy en $D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y vale la desigualdad anterior, con lo cual

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |v_n(x) - v_m(x)|^q dx\right)^{\frac{2}{q}} \leq \tilde{C} \|\nabla(v_n - v_m)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0,$$

cuando n, $m \to \infty$. De ahí resulta que (v_n) también es de Cauchy en $L^q(\mathbb{R}^N, |x|^c\, dx)$. Luego, por la completitud de $L^q(\mathbb{R}^N, |x|^c\, dx)$, existe $\tilde{v} \in L^q(\mathbb{R}^N, |x|^c\, dx)$ tal que

$$v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{v} \quad \text{en} \quad L^q_c(\mathbb{R}^N).$$

Por otro lado, por la desigualdad de Sobolev (1.3.10)

$$\|v_n - v\|_{L^{2^*}} \leq C \, \|\nabla(v_n - v)\|_{L^2}.$$

En efecto existe una subsucesión (v_{n_k}) tal que

$$\left.\begin{array}{l} v_{n_k} \longrightarrow v \quad \text{c.t.p.} \\ v_{n_k} \longrightarrow \tilde{v} \quad \text{c.t.p.} \end{array}\right\} \Longrightarrow v = \tilde{v}.$$

Entonces obtenemos

$$v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{en} \quad L^q_c(\mathbb{R}^N),$$

y por lo tanto, por la desigualdad triangular, resulta que

$$\|v_n\|_{L^q_c(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow \|v\|_{L^q_c(\mathbb{R}^N)}.$$

Luego,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |v(x)|^q dx\right)^{\frac{2}{q}} \leq \tilde{C} \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall v \in D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

$\square$

2.3. Existencia de una Solución Radial

En esta sección probaremos que, bajo ciertas condiciones,

$$m = m(a,b,q) := \inf_{\substack{u \in H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N) \\ \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q dx = 1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a u^2 dx$$

se alcanza. Luego veremos con detalle que a causa del Teorema de Multiplicadores de Lagrange (ver 1.4.1), el Principio de Criticalidad Simétrica (ver 1.5.3) y el Principio Fuerte del Máximo (ver 1.6.1), obtendremos una solución débil u_0 de

$$\begin{cases} -\Delta u + |x|^a u = \tilde{\lambda} |x|^b u^{q-1}, \\ \\ u > 0 \text{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad u \in H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

De ahí $v_0 = \tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-2}} u_0$ será una solución de (2.1).

Para ver que m se alcanza, necesitaremos primero demostrar que ciertas inmersiones son continuas.

Observación 2.3.1 *Si* $0 \leq a < N$, $b \geq 0$, $q > 2$ *y* $2b - \left(1 + \frac{q}{2}\right) a < (N-1)(q-2)$, *la inmersión*

$$H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b dx)$$

es continua.

Demostración: Consideremos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|x| \leq 1} |x|^b |u|^q dx, \\ I_2 &= \int_{|x| \geq 1} |x|^b |u|^q dx, \quad \text{e} \\ I &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^b |u|^q dx. \end{aligned}$$

1.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|x|\leq 1} |x|^b |u|^q dx \\ &= \int_{|x|\leq 1} |x|^{b-c}|x|^c|u|^q dx \\ &\leq 1^{b-c}\int_{|x|\leq 1} |x|^c|u|^q dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |x|^c|u|^q dx \\ &\leq \tilde{C}\|\nabla u\|^q_{L^2(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

por el Lema 2.2.10.

Y como $\|\nabla u\|^q_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|^q_{H^1_{r,a}}$, se sigue que

$$I_1 \leq C_1 \, \|u\|^q_{H^1_{r,a}}.$$

2.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|x|\geq 1} |x|^b |u|^q dx \\ &= \int_{|x|\geq 1} |x|^{b-a}|u|^{q-2}|x|^a|u|^2 dx \\ &= \int_{|x|\geq 1} |x|^{b-a-(q-2)\left[\frac{N-1}{2}+\frac{a}{4}\right]} \left[|x|^{\frac{N-1}{2}+\frac{a}{4}}|u|\right]^{q-2} |x|^a|u|^2 dx. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{array}{rcl} 2b - \left(1+\frac{q}{2}\right)a &<& (N-1)(q-2) \\ b - \left(1+\frac{q}{2}\right)\frac{a}{2} &<& \frac{(N-1)}{2}(q-2) \\ b - \frac{a}{2} - \frac{qa}{4} &<& \frac{(N-1)}{2}(q-2) \\ b - a + a - \frac{a}{2} - \frac{qa}{4} &<& \frac{(N-1)}{2}(q-2) \\ b - a + \frac{a}{2} - \frac{qa}{4} &<& \frac{(N-1)}{2}(q-2) \\ b - a + \frac{a}{4}(2-q) &<& \frac{(N-1)}{2}(q-2) \\ b - a - (q-2)\left[\frac{a}{4}+\frac{N-1}{2}\right] &<& 0, \end{array}$$

y como $|x| \geq 1$, entonces $|x|^{b-a-(q-2)\left[\frac{N-1}{2}+\frac{a}{4}\right]} \leq 1$. Y por el lema 2.2.8, se sigue que

$$\int_{|x|\geq 1} |x|^{b-a-(q-2)\left[\frac{N-1}{2}+\frac{a}{4}\right]} \left[|x|^{\frac{N-1}{2}+\frac{a}{4}}|u|\right]^{q-2} |x|^a|u|^2dx$$

$$\leq A_N^{q-2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|u|^2dx\right)^{\frac{q-2}{4}} \|\nabla u\|_2^{\frac{q-2}{2}} \int_{|x|\geq 1} |x|^a|u|^2dx.$$

Sabemos que valen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|u|^2dx\right)^{\frac{q-2}{4}} &\leq \|u\|_{H^1_{r,a}}^{\frac{q-2}{2}}, \\ \|\nabla u\|_2^{\frac{q-2}{2}} &\leq \|u\|_{H^1_{r,a}}^{\frac{q-2}{2}} \qquad \text{y} \\ \int_{|x|\geq 1} |x|^a|u|^2dx &\leq \|u\|^2_{H^1_{r,a}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C_2 \|u\|_{H^1_{r,a}}^{\frac{q-2}{2}+\frac{q-2}{2}+2} \\ &= C_2 \|u\|^q_{H^1_{r,a}}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} I^{\frac{1}{q}} &= (I_1+I_2)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(C_1 \|u\|^q_{H^1_{r,a}} + C_2 \|u\|^q_{H^1_{r,a}}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C_3 \|u\|_{H^1_{r,a}}, \end{aligned}$$

entonces la inmersión $H^1_{r,a}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n, |x|^b dx)$ es continua. $\square$

Observación 2.3.2 *Sean* $0 < \varepsilon < 1$ *y* $\Omega_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^N / \varepsilon \leq |x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\}$. *Luego para* $a \geq 0$, *la inmersión*

$$H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^1(\Omega_\varepsilon)$$

es continua.

Demostración: Como $0 < \varepsilon < 1$ y $a \geq 0$, vale que

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^a, \\ \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx &\leq \left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^a \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |x|, \\ (\varepsilon)^a &\leq |x|^a, \\ 1 &\leq \left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^a |x|^a, \\ \int_{\Omega_\varepsilon} u^2 dx &\leq \left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^a \int_{\mathbb{R}^N} |x|^a u^2 dx. \end{aligned}$$

Luego existe $C_\varepsilon = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^a$ tal que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 + u^2 dx \leq C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a u^2 dx,$$

es decir la inmersión $H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^1(\Omega_\varepsilon)$ es continua. $\square$

Teorema 2.3.3 *Si* $0 \leq a < N$, $b \geq 0$, $N \geq 3$,

$$2 < q < \tilde{q} = 2^* + \tfrac{2b}{N-2} \quad y \quad 2b - \left(1 + \tfrac{q}{2}\right) a < (N-1)(q-2),$$

luego m se alcanza.

Demostración: Sea $(u_n) \subset H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ una sucesión minimizante para m, es decir

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_n|^q dx = 1,$$

$$\|u_n\|^2_{H^1_{r,a}} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + |x|^a u_n^2 dx \to m.$$

Notemos entonces que $\|u_n\|_{H^1_{r,a}}$ está acotada, y por lo tanto (u_n) está acotada en $H^1_{r,a}$. Como $H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Hilbert separable (ver apéndice B, Obs. (B.0.13)), y $(u_n) \subset H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ es una sucesión acotada, por el Teorema 1.1.28, existe (u_{n_k}) una subsucesión débilmente convergente en $H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$.

Por simplicidad, podemos asumir que $u_n \rightharpoonup u$ en $H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$. Así que por la semicontinuidad inferior débil de la norma (Teorema 1.1.21), como

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N), \qquad \text{y}$$

$$\|u_n\|^2_{H^1_{r,a}} \leq m,$$

tenemos que

$$\|u\|^2_{H^1_{r,a}} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a u^2 dx \leq m.$$

Además, como la inmersión $H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b dx)$ es continua (Observación 2.3.1), por el Teorema 1.1.20, vale que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b dx).$$

Ahora con ésta última convergencia débil y teniendo en cuenta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_n|^q dx = 1,$$

por la semicontinuidad inferior débil de la norma (Teorema 1.1.21), obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q dx \leq 1.$$

Si c está definida por $q = 2^* + \frac{2c}{N-2}$, luego $c < b$, pues $q < 2^* + \frac{2b}{N-2}$ por hipótesis. Y por el Lema 2.2.10

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leq\varepsilon} |x|^b |u_n|^q dx &= \int_{|x|\leq\varepsilon} |x|^{b-c} |x|^c |u_n|^q dx \\
&\leq \varepsilon^{b-c} \int_{|x|\leq\varepsilon} |x|^c |u_n|^q dx \\
&\leq \varepsilon^{b-c} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |u_n|^q dx \\
&\leq \varepsilon^{b-c} \left(\tilde{C}\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}} \\
&\leq \varepsilon^{b-c} \left(\tilde{C}\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + |x|^a u_n^2 dx\right)^{\frac{q}{2}} \\
&\leq \varepsilon^{b-c} C,
\end{aligned}$$

ya que (u_n) es acotada en $H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$.
En la demostración anterior vimos que si

$$2b - \left(1 + \tfrac{q}{2}\right) a < (N-1)(q-2),$$

entonces

$$b - a - (q-2)\left[\tfrac{a}{4} + \tfrac{N-1}{2}\right] < 0.$$

Además,

$$\begin{aligned}
-b + a + (q-2)\left[\tfrac{N-1}{2} + \tfrac{a}{4}\right] &= -b + a\left(1 + \tfrac{q-2}{4}\right) + \tfrac{(q-2)(N-1)}{2} \\
&= -b + a\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{q}{4}\right) + \tfrac{(q-2)(N-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Usando el Lema 2.2.8 y que (u_n) es acotada en $H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$, deducimos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} |x|^b |u_n|^q \, dx &= \int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} |x|^{b-a} |u_n|^{q-2} |x|^a u_n^2 \, dx \\
&= \int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} |x|^{b-a-(q-2)\left[\frac{a}{4}+\frac{N-1}{2}\right]+(q-2)\left[\frac{a}{4}+\frac{N-1}{2}\right]} . \\
&\qquad\qquad .|u_n|^{q-2}|x|^a u_n^2 \, dx \\
&= \int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} |x|^{b-a-(q-2)\left[\frac{a}{4}+\frac{N-1}{2}\right]} . \\
&\qquad\qquad . \left(|x|^{\left[\frac{a}{4}+\frac{N-1}{2}\right]}|u_n|\right)^{q-2} |x|^a u_n^2 \, dx \\
&\leq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{b-a-(q-2)\left[\frac{a}{4}+\frac{N-1}{2}\right]} \tilde{A_N} \int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} |x|^a u_n^2 \, dx \\
&\leq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{b-a-(q-2)\left[\frac{a}{4}+\frac{N-1}{2}\right]} \tilde{A_N} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^a u_n^2 \, dx \\
&\leq (\varepsilon)^{-b+a+(q-2)\left[\frac{a}{4}+\frac{N-1}{2}\right]} \tilde{A_N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + |x|^a u_n^2 \, dx \\
&\leq (\varepsilon)^{-b+a\left(\frac{1}{2}+\frac{q}{4}\right)+\frac{(q-2)(N-1)}{2}} \; C.
\end{aligned}$$

Ahora, para todo $t < 1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo n,

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq \frac{1}{\varepsilon}} |x|^b |u_n|^q dx \geq t.$$

Por la Observación 2.3.2 y el Teorema 1.1.20, como $u_n \rightharpoonup u$ en $H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$,

$$u_n \mid_{\Omega_\varepsilon} \rightharpoonup u \mid_{\Omega_\varepsilon} \quad \text{en } H^1(\Omega_\varepsilon).$$

Por el Teorema de Rellich-Kondrachow (Teorema 1.3.12) en $H^2(\Omega_\varepsilon)$, existe una subsucesión (u_{n_k}) tal que

$$u_{n_k} \longrightarrow u \quad \text{en} \quad L^2(\Omega_\varepsilon),$$

entonces, existe $(u_{n_{k_j}})$ tal que

$$u_{n_{k_j}} \longrightarrow u \quad \text{c.t.p.}$$

Además por el lema (2.2.8)

$$\begin{aligned} |u_{n_{k_j}}(x)| &\leq A_N \, \|u_{n_{k_j}}\|_{H^1_a} \, |x|^{-\left(\frac{N-1}{2}+\frac{a}{4}\right)} \\ &\leq A_N \, \|u_{n_{k_j}}\|_{H^1_a} \, \varepsilon^{-\left(\frac{N-1}{2}+\frac{a}{4}\right)} \\ &\leq C_\varepsilon, \end{aligned}$$

y

$$\left.\begin{array}{l} u_{n_{k_j}} \longrightarrow u \\ |u_{n_{k_j}}| \leq C_\varepsilon \end{array}\right\} \Longrightarrow |u| \leq C_\varepsilon.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_{n_{k_j}} - u|^q \, dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} |u_{n_{k_j}} - u|^{q-2} |u_{n_{k_j}} - u|^2 \, dx \\ &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} (2\, C_\varepsilon)^{q-2} \, |u_{n_{k_j}} - u|^2 \, dx \\ &\leq (2\, C_\varepsilon)^{q-2} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_{n_{k_j}} - u|^2 \, dx \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

es decir que

$$u_{n_{k_j}} \to u \quad \text{en } L^q(\Omega_\varepsilon) \quad \forall \quad 2 < q < \infty.$$

Podemos suponer que

$$u_n \to u \quad \text{en } L^q(\Omega_\varepsilon) \quad \forall \quad 2 < q < \infty.$$

De esta manera, considerando

$$\begin{aligned} f(x,u) &= u^q, \\ c &\geq 1, \\ r &= 1 \quad \text{y}, \end{aligned}$$

$$A : L^q(\Omega_\varepsilon) \longrightarrow L^1(\Omega_\varepsilon), \quad A(u) = u^q,$$

por el Teorema 1.2.21,

$$|u_n|^q \to |u|^q \, \text{en} \, L^1(\Omega_\varepsilon).$$

Así que

$$\left| \int_{\Omega_\varepsilon} |u_n|^q |x|^b \, dx - \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^q |x|^b \, dx \right| \leq \int_{\Omega_\varepsilon} |x|^b \left| |u_n|^q - |u|^q \right| \, dx \quad \text{y}$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |x|^b \left| |u_n|^q - |u|^q \right| \, dx \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty.$$

Por lo tanto

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |u_n|^q |x|^b dx \to \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^q |x|^b dx.$$

Luego tomando límite,

$$1 \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^b dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^q |x|^b dx \geq t.$$

Finalmente $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^b dx = 1$ y m se alcanza en u. $\square$

En las siguientes subsecciones, demostraremos los puntos importantes que nos llevan a concluir que el problema (2.1) tiene una solución radial no trivial.

2.3.1. Aplicación de los Multiplicadores de Lagrange

Observación 2.3.4 *Sean*

1. u_0 *una función donde se alcanza* m,
2. $H = H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$,
3. $J : H \longrightarrow \mathbb{R},\ J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a u^2\, dx$,
4. $I : H \longrightarrow \mathbb{R},\ I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q\, dx$,

entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} 2\nabla u_0 \nabla v + 2|x|^a u_0\, v\, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q\, |x|^b |u_0|^{q-2} u_0\, v\, dx \quad \forall\, v \in H.$$

Demostración: Notemos que J está bien definida por la definición de $H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ e I está bien definida por la Observación 2.3.1.
Sea $v \in H$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial v}(u_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{J(u_0 + h\, v) - J(u_0)}{h} \\ &= \left.\frac{d}{dh}\right|_{h=0} J(u_0 + h\, v),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}J(u_0 + h\, v) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_0 + h\, v)|^2 + |x|^a (u_0 + h\, v)^2\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 + 2h \nabla u_0 \nabla v + h^2 |\nabla v|^2 + |x|^a \left(|u_0|^2 + 2h\, u_0\, v + h^2 |v|^2\right) dx,\end{aligned}$$

y

$$\frac{d}{dh} J(u_0 + h\, v) = \int_{\mathbb{R}^N} 2\nabla u_0 \nabla v + 2h |\nabla v|^2 + |x|^a \left(2\, u_0\, v + 2h |v|^2\right) dx,$$

entonces evaluando en $h = 0$,

$$\frac{\partial J}{\partial v}(u_0) = \int_{\mathbb{R}^N} 2\nabla u_0 \nabla v + 2|x|^a u_0\, v\, dx.$$

Análogamente, dado $v \in H$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial v}(u_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{I(u_0 + h\,v) - I(u_0)}{h} \\ &= \frac{d}{dh}\bigg|_{h=0} I(u_0 + h\,v), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} I(u_0 + h\,v) &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_0 + h\,v|^q \, dx, \\ \frac{d}{dh} I(u_0 + h\,v) &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b q |u_0 + h\,v|^{q-2}(u_0 + h\,v)\, v \, dx, \end{aligned}$$

y evaluando en $h = 0$,

$$\frac{\partial I}{\partial v}(u_0) = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b q |u_0|^{q-2} u_0\, v\, dx.$$

Como $u_0 \in H$ es una función que minimiza J sujeto a $I(u) = 1$, e $I'(u_0) \neq 0$, pues existe algún v tal que $\frac{\partial I}{\partial v}(u_0) \neq 0$, entonces por el Teorema de Multiplicadores de Lagrange (1.4.1), existe λ tal que

$$J'(u_0) = \lambda\, I'(u_0).$$

En nuestro caso,

$$\int_{\mathbb{R}^N} 2\nabla u_0 \nabla v + 2|x|^a u_0\ v\, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q\,|x|^b |u_0|^{q-2} u_0\ v\ dx \quad \forall\, v \in H,$$

que era lo que queríamos probar. □

2.3.2. Aplicación del Principio de Criticalidad Simétrica

Observación 2.3.5 *Sean*

1. u_0, *una función donde se alcanza* m,
2. $H = H_a^1(\mathbb{R}^N)$,

3. *$G = O(N) = \left\{A \in \mathbb{R}^{N\times N} / A\, A^t = Id\right\}$, el grupo ortogonal que actúa sobre H, mediante la acción*

$$A.u(x) = u(Ax) \quad \forall u \in H,\ \forall A \in G,$$

4. *$\tilde{J} : H \longrightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{J}(u) = J(u) - \lambda\, I(u)$ con J, I y λ como en la observación anterior (2.3.4).*

Entonces u_0 es punto crítico de $\tilde{J}$.

Demostración:

- Afirmamos que la acción de G sobre H es isométrica, es decir que

$$\|A.u\|_{H^1_a(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{H^1_a(\mathbb{R}^N)} \quad \forall A \in G,\ \forall u \in H^1_a(\mathbb{R}^N).$$

  Pues,

$$\begin{aligned}
\|A.u\|^2_{H^1_a(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(A.u(x))|^2 + |x|^a (A.u(x))^2\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u(Ax))|^2 + |x|^a (u(Ax))^2\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(Ax)\, A|^2 + |x|^a (u(Ax))^2\, dx,
\end{aligned}$$

  y con el cambio de variable $y = Ax$,

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^2 + |y|^a (u(y))^2\, dy \\
&= \|u\|^2_{H^1_a(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

  ya que como $A \in G$, $|det(A)| = 1$ y $|y| = |Ax| = |x|$.

- Afirmamos que $\tilde{J}$ es $G-$ invariante, es decir que

$$\tilde{J}(A.u) = \tilde{J}(u) \quad \forall A \in G, \forall u \in H.$$

  Pues, usando la misma cuenta que en el ítem anterior con el cambio de variable $y = Ax$,

$$\begin{aligned}
\tilde{J}(A.u) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(A.u(x))|^2 + |x|^a (A.u(x))^2 \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |A.u(x)|^q \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u(Ax))|^2 + |x|^a (u(Ax))^2 \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u(Ax)|^q \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(Ax) \, A|^2 + |x|^a (u(Ax))^2 \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u(Ax)|^q \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^2 + |y|^a (u(y))^2 \, dy - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |y|^b |u(y)|^q \, dy \\
&= J(u) - \lambda \, I(u) \\
&= \tilde{J}(u).
\end{aligned}$$

- Ahora sea,

$$F_{ix}(G) := \{u \in H : A.u = u \, \forall A \in G\}.$$

Afirmamos que

$$F_{ix}(G) = H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N).$$

Pues,

1. $H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N) \subseteq F_{ix}(G)$:
   Si $u \in H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$, entonces $u(x) = \tilde{u}(|x|)$. Sea $A \in G$,

   $$\begin{aligned}
   A.u(x) &= u(Ax) \\
   &= \tilde{u}(|Ax|) \\
   &= \tilde{u}(|x|), \quad \text{pues } |Ax| = |x| \text{ si } A \in G, \\
   &= u(x).
   \end{aligned}$$

   Luego $u \in H$ y cumple que $A.u = u \, \forall A \in G$, por lo tanto $u \in F_{ix}(G)$.

2. $F_{ix}(G) \subseteq H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$:
   Consideremos $\tilde{u}(r) = u(r.e_1)$ con $e_1 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^N$. Por un lema de álgebra lineal, sabemos que si $N \geq 2$, x e $y \in \mathbb{R}^N$, existe $A \in G$ tal que $Ax = y$. En particular si tomamos $y = e_1 \cdot |x|$, existe $A \in G$ tal que $Ax = e_1 \cdot |x|$.

Sea entonces $u \in F_{ix}(G)$, tenemos que

$$\begin{aligned} u(x) &= A.u(x) \\ &= u(Ax) \\ &= u(e_1.|x|) \\ &= \tilde{u}(|x|). \end{aligned}$$

Luego $u \in F_{ix}(G) \subset H$ y u es una función radial, por lo tanto $u \in H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$.

Como $u_0 \in F_{ix}(G) = H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ es una función que minimiza J restringido a $I(u) = 1$, y por la Observación 2.3.4

$$\begin{aligned} J'(u_0) &= \lambda I'(u_0) \\ J'(u_0) - \lambda I'(u_0) &= 0 \\ \tilde{J}'(u_0) &= 0, \end{aligned}$$

entonces u_0 es punto crítico de $\tilde{J}$ restringido a $F_{ix}(G) = H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$. Luego, por el Pricipio de Criticalidad Simétrica (1.5.3), u_0 es un punto crítico de $\tilde{J}$. □

2.3.3. Aplicación del Principio Fuerte del Máximo

Es importante destacar aquí que ya sabemos que, a causa del Lema (2.2.8), la función u_0 donde se alcanza m puede tomarse como una función continua en $\mathbb{R}^N - \{0\}$.

Observación 2.3.6 *Sea u_0, una función donde se alcanza m. Entonces $|u_0|$ es también una función donde se alcanza m, es decir que hay una solución no negativa del problema de extremos, y podemos considerar entonces $u_0 \geq 0$ como solución del problema de minimización.*

Demostración: Notemos que

1.

$$\begin{aligned} I(|u_0|) &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_0|^q \, dx \\ &= I(u_0), \end{aligned}$$

2.
$$\nabla(|u_0|)(x) = \frac{u_0(x)}{|u_0(x)|}\,\nabla u_0(x) \quad \text{por la Regla de la Cadena.}$$

Aplicando módulo,

$$\begin{aligned}
|\nabla(|u_0|)(x)| &= \left|\frac{u_0(x)}{|u_0(x)|}\,\nabla u_0(x)\right| \\
&= \frac{|u_0(x)|}{|u_0(x)|}\,|\nabla u_0(x)| \\
&= |\nabla u_0(x)|,
\end{aligned}$$

entonces,
$$|\nabla(|u_0|)(x)|^2 = |\nabla u_0(x)|^2.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
J(|u_0|) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(|u_0|)|^2 + |x|^a|u_0|^2\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 + |x|^a u_0^2\,dx \\
&= J(u_0).
\end{aligned}$$

Luego $|u_0|$ es una función donde se alcanza m.

□

Definición 2.3.7 *Decimos que $u \in H_a^1(\mathbb{R}^N)$ es solución débil de*

$$-\Delta u + |x|^a u = \tilde{\lambda}\,|x|^b|u|^{q-2}u,$$

si

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v + |x|^a u\,v\,dx = \tilde{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b|u|^{q-2}u\,v\,dx \quad \forall\, v \in H_a^1(\mathbb{R}^N).$$

Observación 2.3.8 *Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$-\Delta u + |x|^a u = \tilde{\lambda}\, |x|^b |u|^{q-2} u,$$

multiplicando por $v \in C_0^2(\mathbb{R}^N) \cap H_a^1(\mathbb{R}^N)$,

$$-v\,\Delta u + |x|^a u\, v = \tilde{\lambda}\, |x|^b |u|^{q-2} u\, v, \quad \forall\, v \in C_0^2(\mathbb{R}^N) \cap H_a^1(\mathbb{R}^N),$$

e integrando a ambos miembros,

$$\int_{\mathbb{R}^N} -v\,\Delta u + |x|^a u\, v\, dx = \tilde{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^{q-2} u\, v\, dx, \quad \forall\, v \in C_0^2(\mathbb{R}^N) \cap H_a^1(\mathbb{R}^N).$$

Luego, por el Teorema de Green vale que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v + |x|^a u\, v\, dx = \tilde{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^{q-2} u\, v\, dx \quad \forall\, v \in C_0^2(\mathbb{R}^N) \cap H_a^1(\mathbb{R}^N).$$

Es decir, toda solución clásica es una solución en sentido débil.

Observación 2.3.9 *Si u_0 es una función donde se alcanza m, entonces u_0 es solución débil de*

$$\begin{cases} -\Delta u + |x|^a u = \frac{\lambda\, q}{2} |x|^b |u|^{q-2} u, \\ \\ u \geq 0 \textit{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad u \in H_{r,a}^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Demostración: Por la Observación 2.3.5,

$$\begin{aligned} \tilde{J}'(u_0) &= 0 \\ J'(u_0) - \lambda\, I'(u_0) &= 0 \\ J'(u_0) &= \lambda\, I'(u_0) \\ \int_{\mathbb{R}^N} 2\nabla u_0 \nabla v + 2|x|^a u_0\, v\, dx &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q |x|^b |u_0|^{q-2} u_0\, v\, dx \quad \forall\, v \in H_a^1(\mathbb{R}^N), \\ \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla v + |x|^a u_0\, v\, dx &= \frac{\lambda\, q}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_0|^{q-2} u_0\, v\, dx \quad \forall\, v \in H_a^1(\mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

entonces por la Observación 2.3.6 y la Definición 2.3.7, u_0 es solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta u + |x|^a u = \frac{\lambda\, q}{2} |x|^b |u|^{q-2} u, \\ \\ u \geq 0 \text{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad u \in H_{r,a}^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

□

Observación 2.3.10 *Si u_0 es una función donde se alcanza m, entonces u_0 es solución débil de*

$$\begin{cases} -\Delta u + |x|^a u = \frac{\lambda q}{2}|x|^b|u|^{q-2}u, \\ \\ u > 0 \textit{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad u \in H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Demostración: Por la Observación 2.3.9 sabemos que $u_0 \geq 0$. Notemos que $u_0 \not\equiv 0$, pues si no, u_0 no cumpliría la restricción del problema de minimización. Entonces tenemos que ver que u_0 no puede valer cero para ningún $x \in \mathbb{R}^N$.

Notemos que por la Definición 2.3.7, tomando $v = u_0 \in H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ y $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda q}{2}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 + |x|^a u_0^2 \, dx &= \frac{\lambda q}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_0|^{q-2} u_0^2 \, dx \\ &= \frac{\lambda q}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_0|^q \, dx. \end{aligned}$$

Como $u_0 \not\equiv 0$,

$$\lambda = \frac{2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 + |x|^a u_0^2 \, dx}{q \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_0|^q \, dx} = \frac{2}{q}\, m,$$

y como $q > 2$,

$$\lambda \geq 0.$$

Tenemos entonces,

$$\underbrace{\underbrace{-\Delta u_0 + |x|^a u_0}_{\Delta(-u_0) - |x|^a(-u_0)}}_{L(-u_0)} = \underbrace{\frac{\lambda q}{2} |x|^b |u_0|^{q-2} u_0}_{\geq 0},$$

con $L(u_0) = \Delta(u_0) - |x|^a(u_0) \geq 0$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}, \quad b_i = 0, \quad c_i = 0, \quad d(x) = -|x|^a,$$

son los coeficientes del operador L del Principio Fuerte del Máximo (1.6.1). Es claro que se cumplen las condiciones (1.1), (1.2) y (1.3) de dicho Principio. Supongamos que existe una bola B tal que

$$0 = \inf_{B} u_0 = \inf_{\mathbb{R}^N} u_0 \geq 0,$$

entonces u_0 debe ser constante.

Como u_0 es continua, y $u_0 \not\equiv 0$, resulta que u_0 no se puede anular, con lo cual

$$u_0 > 0.$$

Luego, si u_0 es una función donde se alcanza m, entonces u_0 es solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta u + |x|^a u = \frac{\lambda q}{2} |x|^b |u|^{q-2} u, \\ \\ u > 0 \text{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad u \in H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

$\square$

Teorema 2.3.11 *Sea u_0 función donde se alcanza m. Entonces, $v_0 = \tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-2}} u_0$, con $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda q}{2}$ y $\lambda = \frac{2}{q} m$, es solución débil de*

$$\begin{cases} -\Delta v + |x|^a v = |x|^b \, v^{q-1}, \\ \\ v > 0 \text{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad v \in H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

es decir que, el problema (2.1) tiene una solución radial no trivial.

Demostración: Por la Observación 2.3.10, u_0 es solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta u + |x|^a u = \frac{\lambda q}{2} |x|^b \, u^{q-1}, \\ \\ u > 0 \text{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad u \in H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Con lo cual

$$-\Delta u_0 + |x|^a u_0 = \tilde{\lambda} \, |x|^b \, u_0^{q-1} \qquad \text{con } \tilde{\lambda} = \tfrac{\lambda q}{2},$$

y multiplicando a ambos miembros por $\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-2}}$

$$\begin{aligned} -\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-2}} \Delta u_0 + \tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-2}} |x|^a u_0 &= \tilde{\lambda} \, \tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-2}} \, |x|^b \, u_0^{q-1} \\ -\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-2}} \Delta u_0 + \tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-2}} |x|^a u_0 &= \tilde{\lambda}^{\frac{q-1}{q-2}} \, |x|^b \, u_0^{q-1} \\ -\Delta \left(\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-2}} u_0 \right) + |x|^a \left(\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-2}} u_0 \right) &= |x|^b \left(\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-2}} u_0 \right)^{q-1}. \end{aligned}$$

Luego $v_0 = \tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-2}} u_0$ (con $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda q}{2}$ y $\lambda = \frac{2}{q} m$) es solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta v + |x|^a v = |x|^b \, v^{q-1}, \\ \\ v > 0 \text{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad v \in H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

es decir que, el problema (2.1) tiene una solución radial no trivial. $\square$

2.4. Existencia de Soluciones No Radiales

Usamos los resultados anteriores para construir soluciones no radiales del problema 2.2

$$\begin{cases} -\Delta u + |x|^a u = |x|^b u^{q-1}, \quad u \in H^1(B(0,R)), \\ \\ u > 0 \text{ en c.t.p. en } B(0,R), \\ \\ u \equiv 0 \text{ (en el sentido de la traza) en } \partial B(0,R), \end{cases}$$

cuando R es suficientemente "grande".

Consideremos ahora

$$M = M(a,b,q) := \inf_{\substack{u \in H^1_a(\mathbb{R}^N) \\ \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q dx = 1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a u^2 \, dx.$$

Claramente $M \leq m$. Probaremos que M se alcanza bajo ciertas condiciones.

Observación 2.4.1 *Sean $a \geq 0$, $\varepsilon > 0$. Luego la inmersión*

$$H^1_a(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^1\left(\left\{|x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\}\right)$$

es continua.

Demostración:

i) Por un lado, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\left\{|x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\}} |\nabla u|^2 \, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx \\ &\leq \|u\|^2_{H^1_a(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

ii) Por otra parte, usando las desigualdades de Hölder, y de Sobolev tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\int_{\left\{|x|\leq\frac{1}{\varepsilon}\right\}} u^2\,dx &= \int_{\left\{|x|\leq\frac{1}{\varepsilon}\right\}} u^2 \cdot 1\,dx, \\
&\leq \left(\int_{\left\{|x|\leq\frac{1}{\varepsilon}\right\}} |u|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \cdot \left(\int_{\left\{|x|\leq\frac{1}{\varepsilon}\right\}} 1\,dx\right)^{1-\frac{2}{2^*}}, \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-\frac{2}{2^*}}, \\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx\right), \\
&\leq C\,\|u\|^2_{H^1_a(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Luego juntando i) y ii) concluimos que

$$\|u\|_{H^1\left(\left\{|x|\leq\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right)} \leq \tilde{C}\,\|u\|_{H^1_a(\mathbb{R}^N)}.$$

□

Teorema 2.4.2 *Si* $0 < a < N,\ b \geq 0,\ N \geq 3$ *y*

$$2 < q < q^{\#} := 2^* - \tfrac{4b}{a(N-2)},$$

luego M *se alcanza.*

Demostración: Sea $(u_n) \subset H^1_a(\mathbb{R}^N)$ una sucesión minimizante para M, es decir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_n|^q dx = 1,$$

$$\|u_n\|^2_{H^1_a} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + |x|^a u_n^2 dx \to M.$$

Notemos entonces que $\|u_n\|_{H^1_a}$ está acotada, y por lo tanto (u_n) está acotada en H^1_a. Como $H^1_a(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Hilbert separable (ver apéndice B, Obs. (B.0.13)), y $(u_n) \subset H^1_a(\mathbb{R}^N)$ es una sucesión acotada, por el Teorema 1.1.28, existe (u_{n_k}) una subsucesión débilmente convergente en $H^1_a(\mathbb{R}^N)$.

Por simplicidad, podemos asumir que $u_n \rightharpoonup u$ en $H_a^1(\mathbb{R}^N)$. Así que por la semicontinuidad inferior débil de la norma (Teorema 1.1.21), como

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } H_a^1(\mathbb{R}^N), \qquad \text{y}$$

$$\|u_n\|_{H_a^1}^2 \leq M,$$

tenemos que

$$\|u\|_{H_a^1}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a u^2 dx \leq M.$$

Además, como la inmersión $H_a^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b dx)$ es continua (Observación 2.3.1), por el Teorema 1.1.20, vale que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b dx).$$

Ahora con ésta última convergencia débil y teniendo en cuenta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_n|^q dx = 1,$$

por la semicontinuidad inferior débil de la norma (Teorema 1.1.21), obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q dx \leq 1.$$

Si c está definida por $q = 2^* - \frac{4c}{a(N-2)}$, luego $c > b$, pues $q < 2^* - \frac{4b}{a(N-2)}$ por hipótesis.Y los exponentes

$$r = \frac{a}{c}, \quad s = \frac{a2^*}{aq - 2c}$$

son conjugados, es decir que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Verifiquémoslo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}+\frac{1}{s} &= \frac{c}{a}+\frac{aq-2c}{a2^*}\\
&= \frac{2^*c+aq-2c}{a2^*}\\
&= \frac{2^*c+2^*a-\frac{4ca}{a(N-2)}-2c}{a2^*}\\
&= \frac{(N-2)2^*c+2^*a(N-2)-4c-2c(N-2)}{(N-2)a2^*}\\
&= \frac{2Nc+2Na-4c+4c-2cN}{2Na}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Notemos además que

$$\left(q-\frac{2}{r}\right)s=2^*$$

pues,

$$\begin{aligned}
\left(q-\frac{2}{r}\right)s &= qs-\frac{2s}{r}\\
&= \frac{qa2^*}{aq-2c}-\frac{2a2^*}{aq-2c}\,\frac{c}{a}\\
&= \frac{2^*(qa-2c)}{aq-2c}\\
&= 2^*.
\end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} |x|^b|u_n|^q dx &= \int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} |x|^{b-c}|x|^c|u_n|^q dx\\
&= \int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} \left(\tfrac{1}{|x|}\right)^{c-b} |x|^c|u_n|^q dx\\
&\leq \int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} (\varepsilon)^{c-b}|x|^c|u_n|^q dx\\
&\leq \varepsilon^{c-b}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c|u_n|^q dx\\
&= \varepsilon^{c-b}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c|u_n|^{\frac{2}{r}}|u_n|^{q-\frac{2}{r}} dx\\
&\leq \varepsilon^{c-b}\left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|x|^c|u_n|^{\frac{2}{r}}\right)^r dx\right]^{\frac{1}{r}}\cdot\\
&\qquad\cdot\left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_n|^{q-\frac{2}{r}}\right)^s dx\right]^{\frac{1}{s}} \qquad \text{por desig. de Hölder}\\
&= \varepsilon^{c-b}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|u_n|^2 dx\right]^{\frac{1}{r}}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx\right]^{\frac{1}{s}}\\
&\leq C\,\varepsilon^{c-b} \qquad \text{por 1. y 2. que siguen a continuación.}
\end{aligned}
$$

Como (u_n) está acotada en $H_a^1(\mathbb{R}^N)$, tenemos que

$$\|u_n\|_{H_a^1} \leq C_1$$

con C_1 independiente de n. En particular, tenemos que

1. $\left[\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|u_n|^2 dx\right]^{\frac{1}{r}} \leq C_1$

2. $\left[\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx\right]^{\frac{1}{s}} \leq C_2^{2^*/s}$ con C_2 independiente de n pues, por la desigualdad de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (ver Teorema 1.3.10),

$$\|u_n\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_3\,\|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C_3\|u_n\|_{H_a^1} \leq C_3C_1 = C_2.$$

Ahora, para todo $t<1$, existe $\varepsilon>0$ tal que, para todo n,

$$\int_{|x|\leq\frac{1}{\varepsilon}} |x|^b|u_n|^q dx \geq t.$$

Por la Observación (2.4.1) y el Teorema (1.1.20), como $u_n \rightharpoonup u$ en $H^1_a(\mathbb{R}^N)$,

$$u_n\,|_{\{|x|\leq \frac{1}{\varepsilon}\}} \rightharpoonup u\,|_{\{|x|\leq \frac{1}{\varepsilon}\}} \quad \text{en } H^1(\{|x|\leq \tfrac{1}{\varepsilon}\}).$$

Y por el Teorema de Rellich-Kondrachow (Teorema (1.3.12)), ya que $q < 2^*$, se sigue que

$$u_n \to u \quad \text{en } L^q(\{|x|\leq \tfrac{1}{\varepsilon}\}).$$

De esta manera, considerando

$$\begin{aligned} f(x,u) &= u^q, \\ c &\geq 1, \\ r &= 1 \quad \text{y,} \end{aligned}$$

$$A : L^q(\{|x|\leq \tfrac{1}{\varepsilon}\}) \longrightarrow L^1(\{|x|\leq \tfrac{1}{\varepsilon}\}), \quad A(u) = u^q,$$

por el Teorema 1.2.21,

$$|u_n|^q \to |u|^q \,\text{en}\, L^1(\{|x|\leq \tfrac{1}{\varepsilon}\}).$$

Así que

$$\left| \int_{\{|x|\leq \frac{1}{\varepsilon}\}} |u_n|^q |x|^b\, dx - \int_{\{|x|\leq \frac{1}{\varepsilon}\}} |u|^q |x|^b\, dx \right| \leq \int_{\{|x|\leq \frac{1}{\varepsilon}\}} |x|^b \left||u_n|^q - |u|^q\right|\, dx \quad \text{y}$$

$$\int_{\{|x|\leq \frac{1}{\varepsilon}\}} |x|^b \left||u_n|^q - |u|^q\right|\, dx \;\to\; 0 \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty.$$

Por lo tanto

$$\int_{\{|x|\leq \frac{1}{\varepsilon}\}} |u_n|^q |x|^b dx \to \int_{\{|x|\leq \frac{1}{\varepsilon}\}} |u|^q |x|^b dx.$$

Luego tomando límite,

$$1 \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^b dx \geq \int_{\{|x|\leq \frac{1}{\varepsilon}\}} |u|^q |x|^b dx \geq t.$$

Finalmente $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^b dx = 1$ y M se alcanza en u. $\square$

Observación 2.4.3 *Sea* $u \in D(B(0,1))$, $u \not\equiv 0$, $u \geq 0$, *y su traslación* $u_\lambda(x) := u(x-(\lambda,0,...,0))$ *con* $\lambda > 0$. *Entonces,*

1. $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx$,
2. $\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a u_\lambda^2\,dx \leq (\lambda+1)^a \int_{\mathbb{R}^N} u^2\,dx$,
3. $\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_\lambda|^q\,dx \geq (\lambda-1)^b \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q\,dx$,
4. $u_\lambda \in H_a^1(\mathbb{R}^N)$.

Demostración:

1. Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\nabla u_\lambda(x_1,x_2,...,x_N) &= \nabla u(x_1-\lambda,x_2,...,x_N)\,Id_{N\times N}\\ &= \nabla u(x_1-\lambda,x_2,...,x_N).\end{aligned}$$

Luego, por sustitución

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x_1-\lambda,x_2,...,x_N)|^2\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t_1,x_2,...,x_N)|^2\,dt_1\,dx_2\ldots dx_N\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx.\end{aligned}$$

2. Usando la sustitución $y = x - \lambda\,e_1$ y que $|y| \leq 1$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a u_\lambda^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^a u^2(x-\lambda e_1)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |y+\lambda e_1|^a u^2(y)\,dy\\ &= \int_{B(0,1)} |y+\lambda e_1|^a u^2(y)\,dy\\ &\leq \int_{B(0,1)} (|y|+|\lambda||e_1|)^a u^2(y)\,dy\\ &\leq \int_{B(0,1)} (1+\lambda)^a u^2(y)\,dy\\ &= (1+\lambda)^a \int_{\mathbb{R}^N} u^2(y)\,dy.\end{aligned}$$

3. Usando la sustitución $y = x - \lambda\, e_1$ y que $|y| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_\lambda|^q\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u(x - \lambda e_1)|^q\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |y + \lambda e_1|^b |u(y)|^q\, dy \\
&= \int_{B(0,1)} |y + \lambda e_1|^b |u(y)|^q\, dy \\
&= \int_{B(0,1)} |\lambda e_1 - (-y)|^b |u(y)|^q\, dy \\
&\geq \int_{B(0,1)} (|\lambda||e_1| - |-y|)^b |u(y)|^q\, dy \\
&\geq \int_{B(0,1)} (\lambda - 1)^b |u(y)|^q\, dy \\
&= (\lambda - 1)^b \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^q\, dy.
\end{aligned}$$

4. $u \in D(B(0,1)) \subset \overline{D(B(0,1))}^{\|.\|_{H^1}} = H^1(B(0,1))$, y usando 1 y 2, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^2 + |x|^a\, u_\lambda^2\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^a\, u_\lambda^2\, dx \\
&\leq \int_{B(0,1)} |\nabla u|^2\, dx + (\lambda + 1)^a \int_{B(0,1)} u^2\, dx \\
&\leq \|u\|^2_{H^1(B(0,1))} + (\lambda + 1)^a \|u\|^2_{H^1(B(0,1))} \\
&= C_{\lambda,a} \|u\|^2_{H^1(B(0,1))} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

por lo tanto $u_\lambda \in H^1_a(\mathbb{R}^N)$.

□

Observación 2.4.4 *Sean $u \in H^1_a(\mathbb{R}^N)$ y $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, C^∞ tal que*

$$sop(\varphi) \subseteq [-1, 1],$$

$$\varphi \equiv 1 \quad en \quad \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \quad y$$

$$0 \leq \varphi \leq 1.$$

Sea $\varphi_R : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_R(x) = \varphi\left(\frac{|x|}{R}\right)$,

$$\varphi_R(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \notin B(0,R) \\ 1 & si \quad x \in B\left(0, \frac{R}{2}\right) \end{cases}$$

Sea $u_R = u\,\varphi_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} u$. *Luego*

$$u_R \to u \quad en \quad H^1_a(\mathbb{R}^N) \quad y$$

$$u_R \to u \quad en \quad L^q(\mathbb{R}^N,\, |x|^b\, dx).$$

Demostración:

1. Veamos que $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_R - u)|^2 + |x|^a (u_R - u)^2\, dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

   a) $|\nabla(u_R - u)|^2$
   $= |\nabla(u\,\varphi_R - u)|^2$
   $= |\nabla u \cdot \underbrace{\varphi_R}_{\varphi\left(\frac{|x|}{R}\right)} + \quad u \cdot \underbrace{\nabla\varphi_R}_{\varphi'\left(\frac{|x|}{R}\right)\underbrace{\nabla\left(\frac{|x|}{R}\right)}_{\frac{1}{R}\frac{x}{|x|}}} - \nabla u|^2$
   $= \left|\nabla u \cdot \varphi\left(\frac{|x|}{R}\right) + u \cdot \varphi'\left(\frac{|x|}{R}\right) \cdot \frac{1}{R}\frac{x}{|x|} - \nabla u\right|^2$
   $\leq \left(|\nabla u| \underbrace{\left|\varphi\left(\frac{|x|}{R}\right) - 1\right|}_{\leq 1} + |u| \cdot \underbrace{\left|\varphi'\left(\frac{|x|}{R}\right)\right|}_{\leq C \text{ pues } \varphi \in D[-1,1]} \cdot \frac{1}{R}\right)^2$
   $\leq \left(|\nabla u| + |u|\,\frac{C}{R}\right)^2$
   $= |\nabla u|^2 + 2\,\frac{C}{R}\,|\nabla u|\,|u| + \left(\frac{C}{R}\right)^2\, u^2$
   $= g_1.$

   Notemos que g_1 es integrable, ya que, como $u \in H^1_a(\mathbb{R}^N)$,

i) $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx < \infty$,

ii) $2\,\frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|\,|u| \, dx \leq 2\,\frac{C}{R}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$

por la desigualdad de Hölder, y

iii) $\left(\frac{C}{R}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \, dx < \infty$.

b) $|x|^a\,|u_R - u|^2$
$= |x|^a\,|u\,\varphi_R(x) - u|^2$
$= |x|^a\,|u\,(\,\varphi_R(x) - 1)\,|^2$
$= |x|^a\,|u|^2 \underbrace{\left|\varphi\left(\frac{|x|}{R}\right) - 1\right|^2}_{\leq 1}$
$\leq |x|^a\,|u|^2$
$= g_2$.

Notemos que g_2 es integrable, pues $u \in H^1_a(\mathbb{R}^N)$.

Consideramos $g = g_1 + g_2$, g es integrable, entonces por el Teorema de Convergencia Mayorada,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_R - u)|^2 + |x|^a\,(u_R - u)^2 \, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{R\to+\infty} |\nabla(u_R - u)|^2 + |x|^a\,(u_R - u)^2 \, dx = 0$$

ya que $u_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} u$. Luego,

$$u_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{en} \quad H^1_a(\mathbb{R}^N).$$

2. Como $u_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} u$ en $H^1_a(\mathbb{R}^N)$ y la inmersión $H^1_a(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N,\,|x|^b\,dx)$ es continua, vale que

$$u_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{en} \quad L^q(\mathbb{R}^N,\,|x|^b\,dx).$$

$\square$

Observación 2.4.5 *Sean u_R y u como en la observación anterior. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_R|^2 + |x|^a\, u_R^2\, dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a\, u^2\, dx, \quad y$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\, |u_R|^q\, dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\, |u|^q\, dx.$$

Demostración:

1. Como $u_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} u$ en $H_a^1(\mathbb{R}^N)$,

   $$\left| \|u_R\|_{H_a^1(\mathbb{R}^N)} - \|u\|_{H_a^1(\mathbb{R}^N)} \right| \leq \|u_R - u\|_{H_a^1(\mathbb{R}^N)} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

   entonces

   $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_R|^2 + |x|^a\, u_R^2\, dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a\, u^2\, dx.$

2. Como $u_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} u$ en $L^q(\mathbb{R}^N,\, |x|^b\, dx)$,

   $$\left| \|u_R\|_{L_b^q(\mathbb{R}^N)} - \|u\|_{L_b^q(\mathbb{R}^N)} \right| \leq \|u_R - u\|_{L_b^q(\mathbb{R}^N)} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

   entonces

   $\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\, |u_R|^q\, dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\, |u|^q\, dx.$

$\square$

Observación 2.4.6 *Sean u y u_R como en la observación (2.4.4) Entonces $u_R \in H_0^1(B(0,R))$.*

Demostración: Como $u \in H_a^1(\mathbb{R}^N)$ y $D(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H_a^1(\mathbb{R}^N)$ (ver Obs. (B.0.7)), existe $(u_n) \in D(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $H_a^1(\mathbb{R}^N)$, lo que implica que

$$\|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad \text{y} \quad \|\nabla(u_n - u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

Queremos ver que

$$\underbrace{u_n\,\varphi_R}_{\in D(B(0,R))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u\,\varphi_R = u_R \quad \text{en} \quad H^1(B(0,R)).$$

Notemos que

1.
$$\begin{aligned}
|\nabla(u_n\,\varphi_R - u\,\varphi_R)|^2 &= |\nabla[(u_n-u)\,\varphi_R]|^2\\
&= |\nabla(u_n-u)\,\varphi_R + (u_n-u)\,\nabla\varphi_R|^2\\
&= \left(|\nabla(u_n-u)|\,\underbrace{\left|\varphi\left(\frac{|x|}{R}\right)\right|}_{\leq 1} + |u_n-u|\,\underbrace{|\nabla\varphi_R|}_{\leq \frac{C}{R}\leq 1}\right)^2
\end{aligned}$$

para R suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
&\leq (|\nabla(u_n-u)| + |u_n-u|)^2\\
&= |\nabla(u_n-u)|^2 + 2|\nabla(u_n-u)|\,|u_n-u| + |u_n-u|^2.
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
|(u_n-u)\,\varphi_R|^2 &= |u_n-u|^2\,\underbrace{|\varphi_R|^2}_{\leq 1}\\
&\leq |u_n-u|^2.
\end{aligned}$$

Entonces, por 1 y 2,

$$\begin{aligned}
\|u_n\,\varphi_R - \underbrace{u\,\varphi_R}_{u_R}\|^2_{H^1(B(0,R))} &= \int_{B(0,R)} |\nabla(u_n\,\varphi_R - u\,\varphi_R)|^2 + |u_n\,\varphi_R - u\,\varphi_R|^2\,dx\\
&\leq \underbrace{\int_{B(0,R)} |\nabla(u_n-u)|^2\,dx}_{A} + \underbrace{2\int_{B(0,R)} |\nabla(u_n-u)|\,|u_n-u|\,dx}_{B}\\
&\quad + \underbrace{2\int_{B(0,R)} |u_n-u|^2\,dx}_{C}
\end{aligned}$$

donde

$A \leq \|\nabla(u_n - u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$,

$B \leq 2\,\|\nabla(u_n - u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,\|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ por la desigualdad de Hölder,

$C \leq 2\,\|u_n - u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, y

$\|\nabla(u_n - u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$ y $\|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$, con lo cual resulta que

$$\|u_n\,\varphi_R - u\,\varphi_R\|_{H^1(B(0,R))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por lo tanto

$$\|u_R\|_{H^1(B(0,R))} \leq \underbrace{\|u_R - u_n\,\varphi_R\|_{H^1(B(0,R))}}_{\to 0} + \underbrace{\|u_n\,\varphi_R\|_{H^1(B(0,R))}}_{<\infty} < \infty,$$

pues $(u_n\,\varphi_R) \in D(B(0,R)) \subset H^1(B(0,R))$. Luego $u_R \in H^1_0(B(0,R))$. $\square$

Teorema 2.4.7 *Si* $0 \leq a < N$, $b \geq 0$, $N \geq 3$, $2 < q < 2^*$, $aq < 2b$ *y*

$$2b - \left(1 + \tfrac{q}{2}\right) a < (N-1)(q-2),$$

luego, para todo R suficientemente grande, el problema (2.2) tiene una solución radial no trivial y otra no radial.

Demostración:

1. *a*) Por el Teorema (2.3.3),
$$m > 0.$$

   b) Definimos
$$\tilde{M} = \tilde{M}(a,b,q) := \inf_{\substack{u\in H^1_a(\mathbb{R}^N)\\ u\not\equiv 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a u^2\,dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q\,dx\right)^{\frac{2}{q}}}.$$

   Veamos que
$$M = \tilde{M} = 0.$$

Es claro que $M \geq \tilde{M}$. Ahora bien, sea $u \not\equiv 0, u \in H_a^1(\mathbb{R}^N)$, entonces $u \in L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b\, dx)$ por la observación (2.3.1). Consideramos

$$\tilde{u} = \frac{u}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}} = \frac{u}{\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b\, dx)}},$$

$\tilde{u} \in H_a^1(\mathbb{R}^N)$ y $\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |\tilde{u}|^q\, dx = 1$. Luego

$$\begin{aligned} M &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{u}|^2 + |x|^a |\tilde{u}|^2\, dx \\ &= \frac{1}{\|u\|^2_{L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b\, dx)}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a |u|^2\, dx \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a |u|^2\, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q\, dx\right)^{\frac{2}{q}}}, \end{aligned}$$

es decir que $M \leq \tilde{M}$.

Por otro lado, tomando $u \in D(B(0,1))$ y su traslación $u_\lambda(x) := u(x - \lambda\, e_1)$ y usando la observación (2.4.3), resulta que

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{u \in H_a^1(\mathbb{R}^N) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a |u|^2\, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q\, dx\right)^{\frac{2}{q}}} &\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^2 + |x|^a |u_\lambda|^2\, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_\lambda|^q\, dx\right)^{\frac{2}{q}}} \\ &\leq \frac{(\lambda+1)^a \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |u|^2\, dx}{(\lambda-1)^{b\frac{2}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q\, dx\right)^{\frac{2}{q}}}, \end{aligned}$$

lo cual tiende a 0 cuando λ tiende a $+\infty$ siempre que $aq < 2b$, implicando que $M = 0$.

2. Definimos:

   a) $m(R) = m(a,b,q,R) := \inf_{\substack{u \in H^1_{0,rad}(B(0,R)) \\ \int_{B(0,R)} |x|^b |u|^q\, dx = 1}} \int_{B(0,1)} |\nabla u|^2 + |x|^a u^2\, dx.$

   b) $M(R) = M(a,b,q,R) := \inf_{\substack{u \in H^1_0(B(0,R)) \\ \int_{B(0,R)} |x|^b |u|^q\, dx = 1}} \int_{B(0,1)} |\nabla u|^2 + |x|^a u^2\, dx.$

Veamos que $m(R)$ y $M(R)$ se alcanzan para todo $R > 0$. Verifiquemos que se cumplen las hipótesis del Teorema (1.1.26) con

$$H = H_0^1(B(0,R))$$

que es espacio de Hilbert, en particular reflexivo (ver Teorema (1.1.8)),

$$C = \left\{ u \in H : \int_{B(0,R)} |x|^b |u|^q \, dx = 1 \right\},$$

y

$$J : C \subset H \longrightarrow \mathbb{R}, \quad J(u) = \int_{B(0,R)} |x|^a \, u^2 + |\nabla u|^2 \, dx.$$

- Veamos que C es débilmente secuencialmente cerrado:

  Si $u_n \rightharpoonup u_0$ en $H_0^1(B(0,R))$, entonces $u_n \to u_0$ en $L^q(B(0,R))$ por el Teorema de Rellich-Kondrachow, pues $2 < q < 2^*$.
  Usamos el Teorema (1.2.21) con $r = 1$ y $p = q$, $f(x,u_0) = |x|^b |u_0|^q$ verifica
  $$|f(x,u_0)| \leq K \, (1 + |u_0|^q) \, ,$$
  pues
  $$\begin{aligned} |f(x,u_0)| &= |x|^b |u_0|^q \\ &\leq R^b |u_0|^q \quad \text{pues} \quad x \in B(0,R), \\ &\leq R^b (1 + |u_0|^q) \\ &= K \, (1 + |u_0|^q). \end{aligned}$$
  Entonces,
  $$\int_{B(0,R)} |u_n|^q |x|^b \, dx \to \int_{B(0,R)} |u_0|^q |x|^b \, dx,$$
  y como $\int_{B(0,R)} |u_n|^q |x|^b \, dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
  $$\int_{B(0,R)} |u_0|^q |x|^b \, dx = 1,$$
  es decir que $u_0 \in C$. Luego C es débilmente secuencialmente cerrado.

- Veamos que J es secuencialmente débilmente semicontinua inferiormente en $u_0 \in C$:

Sea $(u_n) \subset C$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$. Por la desigualdad de Poincaré, la norma $\|u\|' = \left(\int_{B(0,R)} |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$ es equivalente a la usual en $H_0^1(B(0,R))$. Entonces, por el Teorema (1.1.21),

$$\|u_0\|' \leq \liminf \|u_n\|',$$

es decir que

$$\left(\int_{B(0,R)} |\nabla u_0|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \liminf \left(\int_{B(0,R)} |\nabla u_n|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por otro lado, como $u_n \rightharpoonup u_0$ en $H_0^1(B(0,R))$, por el Teorema de Rellich-Kondrachow (1.3.12), $u_n \to u_0$ en $L^2(B(0,R))$. Luego usando el Teorema (1.2.21) con $r = 1$ y $p = 2$, análogamente como en el primer punto,

$$\int_{B(0,R)} |u_n|^2 |x|^a\, dx \to \int_{B(0,R)} |u_0|^2 |x|^a\, dx.$$

Con lo cual, $J(u_0) \leq \liminf J(u_n)$, es decir que J es secuencialmente débilmente semicontinua inferiormente en $u_0 \in C$.

- Veamos que J es coerciva:

  $J(u) \geq \int_{B(0,R)} |\nabla u|^2\, dx$. Por la desigualdad de Poincaré,

$$\int_{B(0,R)} |\nabla u|^2\, dx \geq K \int_{B(0,R)} |u|^2\, dx \quad \forall u \in H_0^1(B(0,R)).$$

  Con lo cual,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1(B(0,R))} &\leq \tilde{K}\, J(u) \\ &= \tilde{K} \int_{B(0,R)} |\nabla u|^2 + |x|^a u^2\, dx. \end{aligned}$$

  Luego, si $\|u\|_{H_0^1(B(0,R))} \to +\infty$, entonces $J(u) \to +\infty$, es decir que J es coerciva.

Finalmente, se cumple que J es secuencialmente débilmente semicontinua inferiormente y la condición 2 del Teorema (1.1.26). De ahí resulta que $M(R)$ se alcanza para todo $R > 0$.

Análogamente se prueba que $m(R)$ se alcanza también para todo $R > 0$. Observemos que en este caso, (u_n) son radiales para todo $n \in \mathbb{N}$ y si $u_n \rightharpoonup u_0$, implica que u_0 también será radial, pues las funciones radiales son un subespacio cerrado.

3. Veamos que

   a) $\lim\limits_{R\to+\infty} m(R) = m > 0.$

   b) $\lim\limits_{R\to+\infty} M(R) = M = 0.$

   Probemos *b*) :

   - Sea $u \in H_a^1(\mathbb{R}^N)$, podemos conseguir $\tilde{u} \in H_0^1(B(0,R))$ (con R suficientemente grande) que la aproxime.
     Consideramos φ, φ_R y u_R como en la observación (2.4.4). Luego, por las observaciones (2.4.4), (2.4.5) y (2.4.6), resulta que

$$\begin{aligned} M(R) &\leq \frac{\int_{B(0,R)} |\nabla u_R|^2 + |x|^a\, u_R^2\, dx}{\left(\int_{B(0,R)} |x|^b\, |u_R|^q\, dx\right)^{\frac{2}{q}}} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_R|^2 + |x|^a\, u_R^2\, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\, |u_R|^q\, dx\right)^{\frac{2}{q}}} \\ &\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a\, u^2\, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\, |u|^q\, dx\right)^{\frac{2}{q}}}. \end{aligned}$$

     Por definición de ínfimo podemos conseguir $u \in H_a^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a\, u^2\, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\, |u|^q\, dx\right)^{\frac{2}{q}}} < M + \varepsilon.$$

     Entonces

$$M(R) < M + \varepsilon.$$

- Veamos que $H_0^1(B(0,R)) \subset H_a^1(\mathbb{R}^N)$:

  Sea $u \in H_0^1(B(0,R)) = \overline{D(B(0,R))}^{\|.\|_{H^1}}$, entonces existe $(u_n) \in D(B(0,R)) \subset D(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|u_n - u\|_{H^1(B(0,R))} \to 0$. Veamos que $\|u_n - u\|_{H_a^1(\mathbb{R}^N)} \to 0$,

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|^2_{H_a^1(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u)|^2 + |x|^a (u_n - u)^2 \, dx \\
&= \int_{B(0,R)} |\nabla(u_n - u)|^2 + |x|^a (u_n - u)^2 \, dx \\
&\leq \int_{B(0,R)} |\nabla(u_n - u)|^2 \, dx + R^a \int_{B(0,R)} (u_n - u)^2 \, dx \\
&\leq \|u_n - u\|^2_{H^1(B(0,R))} + R^a \|u_n - u\|^2_{H^1(B(0,R))} \\
&= (1 + R^a) \|u_n - u\|^2_{H^1(B(0,R))} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

  Como $(u_n) \in D(\mathbb{R}^N)$, $D(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H_a^1(\mathbb{R}^N)$ y

$$\|u_n - u\|_{H_a^1(\mathbb{R}^N)} \to 0,$$

  entonces $u \in H_a^1(\mathbb{R}^N)$. Luego,

$$M(R) \geq M.$$

- Por los puntos anteriores obtenemos

$$M \leq M(R) < M + \varepsilon,$$

  con lo cual

$$|M(R) - M| < \varepsilon \quad \text{si} \quad R \geq R_0(\varepsilon),$$

  lo que impica que

$$\exists \lim_{R \to +\infty} M(R) = M = 0.$$

Análogamente se demuestra a).

4. Como en la sección anterior, ahora con $H = H_0^1(B(0,R))$, usando el Teorema de Multiplicadores de Lagrange (1.4.1), el Principio de Criticalidad Simétrica (1.5.3) y el Principio Fuerte del Máximo (1.6.1), obtenemos para R suficientemente grande una solución radial no trivial

del problema (2.2), que es $v_0 = \tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-2}}\, u_0$, con u_0 función donde se alcanza $m(R)$, $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda q}{2}$ y $\lambda = \frac{2}{q}\, m(R)$. Y por otro lado usando Multiplicadores de Lagrange (1.4.1) y el Principio Fuerte del Máximo (1.6.1), obtenemos una solución no radial del problema (2.2), que es $w_0 = \tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-2}}\, \bar{u}_0$, con $\bar{u}_0$ función donde se alcanza $M(R)$, $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda q}{2}$ y $\lambda = \frac{2}{q}\, M(R)$.

5. Finalmente observamos que como consecuencia de lo demostrado anteriormente,
$$\lim_{R\to+\infty} M(R) = M = 0$$
pero
$$\lim_{R\to+\infty} m(R) = m > 0$$
entonces para R suficientemente grande $m(R) > M(R)$. En consecuencia, las soluciones obtenidas como minimizantes de $m(R)$ (radial) y de $M(R)$ (no radial) serán distintas.

$\square$

2.5. Condiciones Necesarias

De la identidad de Derrick-Pohozaev podemos obtener algunas condiciones necesarias para la existencia de soluciones del problema (2.1).

Teorema 2.5.1 *Sean* $0 \leq a < N$, $N \geq 3$, $b \geq 0$, *si*
$$q \geq \tilde{q} := \tfrac{2N}{N-2} + \tfrac{2b}{N-2} \tag{2.3}$$
o si
$$q \leq 2 + 2\,\tfrac{b-a}{N+a} \tag{2.4}$$
luego no hay soluciones no triviales para el problema (2.1).

Demostración: Por el absurdo, asumimos que $u \not\equiv 0$, $u \in D(\mathbb{R}^N)$ es una solución del problema (2.1). Entonces
$$-\Delta u + |x|^a\, u = |x|^b\, u^{q-1},$$
multiplicamos a ambos miembros por $x.\nabla u$ e integramos sobre $\mathbb{R}^N$,
$$\int_{\mathbb{R}^N} -\Delta u \,.\, x \,.\, \nabla u \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^a\, u \,.\, x \,.\, \nabla u \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\, u^{q-1} \,.\, x \,.\, \nabla u \, dx. \tag{2.5}$$

- Veamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} -\Delta u \,.\, x \,.\, \nabla u \, dx = \tfrac{2-N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx.$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} -\Delta u \,.\, x \,.\, \nabla u \, dx = -\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} u_{x_i x_i} \, x_j \, u_{x_j} \, dx$$

por (1.3.1)-(i)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} u_{x_i} (x_j \, u_{x_j})_{x_i} \, dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} u_{x_i} \, \delta_{ij} \, u_{x_j} + u_{x_i} x_j \, u_{x_j \, x_i} \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \sum_{j=1}^{N} \left(\tfrac{|\nabla u|^2}{2} \right)_{x_j} x_j \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx + \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\tfrac{|\nabla u|^2}{2} \right)_{x_j} x_j \, dx
\end{aligned}$$

y por (1.3.1)

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \tfrac{|\nabla u|^2}{2} \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - N \int_{\mathbb{R}^N} \tfrac{|\nabla u|^2}{2} \, dx \\
&= \left(1 - \tfrac{N}{2}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx \\
&= \tfrac{2-N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

- Veamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b \, u^{q-1} .\, x \,. \nabla u \, dx = -\left(\tfrac{N+b}{q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} u^q |x|^b \, dx.$$

Por (1.3.1), vale que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b . \, x \, . \, \underbrace{u^{q-1}.\nabla u}_{\left(\frac{u^q}{q}\right)'} \, dx &= -\sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \tfrac{u^q}{q} \left[b\,|x|^{b-1} \tfrac{2\,x_i^2}{2|x|} + |x|^b \right] \, dx \\
&= -\sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \tfrac{u^q}{q} b\,|x|^{b-2}\,x_i^2 + \tfrac{u^q}{q}\,|x|^b \, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \tfrac{u^q}{q}\, b\,|x|^{b-2}\,|x|^2\,dx - N\int_{\mathbb{R}^N} \tfrac{u^q}{q}\,|x|^b\,dx \\
&= -\tfrac{b}{q}\int_{\mathbb{R}^N} u^q\,|x|^b\,dx - \tfrac{N}{q}\int_{\mathbb{R}^N} u^q\,|x|^b\,dx \\
&= -\left(\tfrac{N+b}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N} u^q\,|x|^b\,dx.
\end{aligned}$$

- Análogamente al punto anterior, vale que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a\, u\, .\, x\, .\nabla u\, dx = -\left(\tfrac{N+a}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N} u^2|x|^a\,dx.$$

Por lo tanto reemplazando en la ecuación (2.5) resulta que

$$\tfrac{2-N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx - \left(\tfrac{N+a}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N} u^2|x|^a\,dx = -\left(\tfrac{N+b}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N} u^q|x|^b\,dx,$$

equivalentemente

$$\tfrac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \left(\tfrac{N+a}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N} u^2|x|^a\,dx - \left(\tfrac{N+b}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N} u^q|x|^b\,dx = 0, \quad (2.6)$$

es decir que u satisface la identidad de Derrick-Pohozaev.

Por otro lado, multiplicando a ambos miembros por u e integrando sobre $\mathbb{R}^N$ en la ecuación del problema (2.1), vemos que

$$\begin{aligned}
-\Delta u + |x|^a\,u &= |x|^b\,u^{q-1} \\
\int_{\mathbb{R}^N} -u\,.\,\Delta u + |x|^a\,u^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\,u^q\,dx \\
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |x|^a\,u^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\,u^q\,dx \quad \text{por} \quad (1{,}3{,}1) - (i).
\end{aligned}$$

De ahí reemplazando en (2.6), obtenemos

$$\left(\tfrac{N-2}{2} - \tfrac{N+b}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx \,+\, \left(\tfrac{N+a}{2} - \tfrac{N+b}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |x|^a\, dx = 0.$$

Ahora bien, sea $u \in H_a^1(\mathbb{R}^N)$, como $D(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H_a^1(\mathbb{R}^N)$ (ver apéndice B, Obs. (B.0.7)), existe $(u_n) \in D(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $H_a^1(\mathbb{R}^N)$, y

$$\left(\tfrac{N-2}{2} - \tfrac{N+b}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2\, dx \,+\, \left(\tfrac{N+a}{2} - \tfrac{N+b}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |x|^a\, dx = 0.$$

Luego, igual que en la demostración de por ejemplo el Lema (2.2.8), resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx, \quad \text{y}$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |x|^a\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |x|^a\, dx.$$

Con lo cual, si $u \not\equiv 0$, $u \in H_a^1(\mathbb{R}^N)$ es solución del problema (2.1), vale que

$$\left(\tfrac{N-2}{2} - \tfrac{N+b}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx \,+\, \left(\tfrac{N+a}{2} - \tfrac{N+b}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |x|^a\, dx = 0.$$

Como $u \not\equiv 0$, $\left(\tfrac{N-2}{2} - \tfrac{N+b}{q}\right)$ y $\left(\tfrac{N+a}{2} - \tfrac{N+b}{q}\right)$ no pueden tener el mismo signo. Notemos además que

$$\tfrac{N-2}{2} - \tfrac{N+b}{q} > 0 \quad \text{y} \quad \tfrac{N+a}{2} - \tfrac{N+b}{q} < 0$$

no puede suceder, ya que es equivalente a

$$q > \tfrac{2N}{N-2} + \tfrac{2b}{N-2} \quad \text{y} \quad q < 2 + 2\,\tfrac{b-a}{N+a},$$

que es absurdo, pues

$$2 < \tfrac{2N}{N-2} \quad \text{y} \quad 2\,\tfrac{b-a}{N+a} < \tfrac{2b}{N-2}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\tfrac{N-2}{2} - \tfrac{N+b}{q} < 0 \quad \text{y} \quad \tfrac{N+a}{2} - \tfrac{N+b}{q} > 0.$$

Esto es equivalente a

$$q < \tfrac{2N}{N-2} + \tfrac{2b}{N-2} \quad \text{y} \quad q > 2 + 2\,\tfrac{b-a}{N+a},$$

lo cual es una contradicción.

□

Capítulo 3

Una Ecuación Análoga Involucrando el p-Laplaciano

3.1. Resultados Principales

En este este capítulo, estudiaremos la existencia de soluciones del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |x|^a |u|^{p-2} u = |x|^b |u|^{q-2} u \\ \\ u \geq 0 \text{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $a, b \geq 0$, $1 < p, q < \infty$ y $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ denota el p-Laplaciano.

También analizaremos el problema análogo en una bola

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |x|^a |u|^{p-2} u = |x|^b |u|^{q-2} u, \quad u \in W^{1,p}(B(0,R)), \\ \\ u > 0 \text{ en c.t.p. en } B(0,R), \\ \\ u \equiv 0 \text{ (en el sentido de la traza) en } \partial B(0,R), \end{cases} \tag{3.2}$$

para R suficientemente grande.

Para obtener soluciones radiales y no radiales, consideraremos los problemas de minimización

$$m_p = m(a,b,p,q) := \inf_{\substack{u\in W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N) \\ \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b|u|^q dx=1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a|u|^p dx,$$

y

$$M_p = M(a,b,p,q) := \inf_{\substack{u\in W^{1,p}_{a}(\mathbb{R}^N) \\ \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b|u|^q dx=1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a|u|^p \, dx,$$

donde

$$W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|u|^p dx < \infty \right\} \quad \text{con } a \geq 0$$

es un espacio de Sobolev con pesos, y $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ es el subespacio de sus funciones radiales.

Los resultados más importantes que probaremos en este capítulo son:

Teorema 1:
Si $0 \leq a < N(p-1)$, $b \geq 0$, $1 < p < N$, *y*

$$p < q < \tilde{q} := \tfrac{Np}{N-p} + \tfrac{bp}{N-p},$$

$$pb - a\left(p + \tfrac{(p-1)(q-p)}{p}\right) < (q-p)(N-1),$$

entonces se alcanza m_p.

Teorema 2:
Sea u_0 *función donde se alcanza* m_p. *Entonces hay un múltiplo de* u_0 *que proporciona una solución radial no trivial de (3.1) .*

Bajo una condición de subcriticalidad, se obtiene un resultado análogo de existencia para el caso de funciones sin simetría radial en $\mathbb{R}^N$.

Teorema 3:
Si $0 < a < N(p-1)$, $b \geq 0$, $1 < p < N$ *y*

$$p < q < q^{\#} := p^* - \tfrac{p^2 b}{a(N-p)},$$

entonces M_p *se alcanza.*

Estos resultados nos conducirán al siguiente teorema, que es el resultado principal del capítulo, en el que se trabaja en una bola:

Teorema 4:
Si $0 \leq a < N(p-1)$, $b \geq 0$, $N \geq 3$, $p < q < p^*$, $aq < pb$ *y*

$$pb - \left(1 + \tfrac{q}{p}\right) a < (N-1)(q-p),$$

entonces, para todo R *suficientemente grande, el problema (3.2) tiene una solución radial no trivial y otra no radial.*

Por otra parte usando la identidad de Derrick-Pohozaev, podemos establecer un resultado de no existencia para el problema en $\mathbb{R}^N$:

Teorema 5:
Sean $0 \leq a < N(p-1)$, $b \geq 0$, $1 < p < N$, *si*

$$q \geq \tilde{q} := \tfrac{pN}{N-p} + \tfrac{pb}{N-p}$$

o si

$$q \leq p + p\,\tfrac{b-a}{N+a}$$

entonces no hay soluciones no triviales para el problema (3.1).

3.2. Espacios y Desigualdades para Funciones Radiales

Comenzaremos introduciendo los espacios funcionales con los que vamos a trabajar en lo sucesivo.

Denotamos por $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ al espacio de funciones radialmente simétricas en

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^p(\mathbb{R}^N) : \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^N)\right\}.$$

$D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ es denotado por el espacio de funciones radialmente simétricas en

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^{\frac{Np}{N-p}}(\mathbb{R}^N) : \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^N)\right\} \ (1 < p < N).$$

También denotamos por $W_{r,a}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ al espacio de funciones radialmente simétricas en

$$W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |u|^p dx < \infty\right\} \qquad \text{con } a \geq 0.$$

Las normas asociadas a cada espacio son,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p + |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \\
\|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \\
\|u\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |u|^p + |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Observación 3.2.1 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Demostración: Si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, entonces $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Además por la desigualdad de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

De esta manera $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ y por lo tanto $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Además la inmersión es continua. □

Observación 3.2.2 $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Demostración: Por un lado, usando las desigualdades de Hölder y Sobolev, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leq 1} |u|^p\, dx &\leq C\, \left(\int_{|x|\leq 1} |u|^{p^*}\, dx\right)^{p/p^*} \\
&\leq C\, \|\nabla u\|_{L^p}^p
\end{aligned}$$

y también

$$\int_{|x|\geq 1} |u|^p\, dx \leq \int_{|x|\geq 1} |x|^a\, |u|^p\, dx.$$

Se deduce que

$$\|u\|_{L^p} \leq C\, \|u\|_{W_a^{1,p}}$$

y por lo tanto

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C\, \|u\|_{W_a^{1,p}}.$$

□

Observación 3.2.3 *Si definimos*

$$\widetilde{W}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |u|^p dx < \infty \right\}$$

entonces

$$\widetilde{W}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Demostración: Si $u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, entonces $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ por la observación anterior, y $u \in L_a^p(\mathbb{R}^N)$ luego $u \in \widetilde{W}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Recíprocamente si $u \in \widetilde{W}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, entonces $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, luego $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Y como $u \in L_a^p(\mathbb{R}^N)$, concluimos que $u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Lema 3.2.4 *Supongamos que* $1 < p < N$ *y* $\frac{p}{p-1}(1-N) \leq a < N(p-1)$. *Entonces, existe* $A_N > 0$, *tal que, para toda* $v \in W_{r,a}^{1,p}(\mathbb{R}^N), v \in C(\mathbb{R}^N - \{0\})$, *y tenemos que*

$$|x|^{\frac{N-1}{p} + \frac{a(p-1)}{p^2}} |v(x)| \leq A_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |v|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p^2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p^2}}.$$

Demostración: Sea $u \in W_{r,a}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap D_r(\mathbb{R}^N)$. Sea r_0 tal que el soporte de u está contenido en $B(0, r_0)$.
Notemos que

$$\tfrac{d}{dr}\left(|u|^p\right) = p|u|^{p-2} u \tfrac{du}{dr}.$$

De

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dr}\left(|u|^p r^{a\frac{p-1}{p}} r^{N-1}\right) &= p|u|^{p-2} u \,\tfrac{du}{dr}\, r^{a\frac{p-1}{p}} r^{N-1} + \\ &\quad + |u|^p \left(a \left(\tfrac{p-1}{p}\right) + N - 1 \right) r^{a\left(\frac{p-1}{p}\right)-1} r^{N-1}\end{aligned}$$

y $a \geq \frac{p}{p-1}(1-N)$ por hipótesis (o sea que $a\left(\frac{p-1}{p}\right) + N - 1 \geq 0$), conseguimos que

$$\tfrac{d}{dr}\left(|u|^p r^{a\frac{p-1}{p}} r^{N-1}\right) \geq p|u|^{p-2} u \tfrac{du}{dr} r^{a\frac{p-1}{p}} r^{N-1},$$

e integrando a ambos miembros,

$$\begin{aligned}\int_r^{r_0} pu|u|^{p-2} \tfrac{du}{ds} s^{a\left(\frac{p-1}{p}\right)} s^{N-1} ds &\leq \int_r^{r_0} \tfrac{d}{ds}\left(|u|^p s^{a\left(\frac{p-1}{p}\right)} s^{N-1}\right) ds \\ &= |u(r_0)|^p r_0^{a\left(\frac{p-1}{p}\right)} r_0^{N-1} - |u(r)|^p r^{a\frac{p-1}{p}} r^{N-1} \\ &= -|u(r)|^p r^{a\frac{p-1}{p}} r^{N-1} \qquad \text{pues}\, u(r_0) = 0,\end{aligned}$$

es decir

$$|u(r)|^p r^{a\left(\frac{p-1}{p}\right)} r^{N-1} \leq -\int_r^{r_0} pu|u|^{p-2}\tfrac{du}{ds} s^{a\left(\frac{p-1}{p}\right)} s^{N-1} ds.$$

Además,

$$\begin{aligned}
-\int_r^{r_0} pu|u|^{p-2}\tfrac{du}{ds} s^{a\left(\frac{p-1}{p}\right)} s^{N-1} ds &\leq \int_r^{r_0} p|u||u|^{p-2}\left|\tfrac{du}{ds}\right| s^{a\left(\frac{p-1}{p}\right)} s^{N-1} ds \\
&= \tfrac{p}{|\partial B_1|}\int_r^{r_0} |\partial B_1||u|^{p-1}\left|\tfrac{du}{ds}\right| s^{a\left(\frac{p-1}{p}\right)} s^{N-1} ds \\
&\leq \tfrac{p}{|\partial B_1|}\int_0^{\infty} |\partial B_1||u|^{p-1}\left|\tfrac{du}{ds}\right| s^{a\left(\frac{p-1}{p}\right)} s^{N-1} ds \\
&= \tfrac{p}{|\partial B_1|}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p-1}|\nabla u||x|^{a\left(\frac{p-1}{p}\right)} dx,
\end{aligned}$$

por el Teorema de Cambio de Variable.
Y por la desigualdad de Hölder vale que,

$$\begin{aligned}
\tfrac{p}{|\partial B_1|}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p-1}|\nabla u||x|^{a\left(\frac{p-1}{p}\right)} dx &\leq \tfrac{p}{|\partial B_1|}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(|u(x)|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(|x|^{a\frac{p-1}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \tfrac{p}{|\partial B_1|}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p|x|^a dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Ahora juntando las desigualdades queda,

$$|u(r)|^p r^{a\left(\frac{p-1}{p}\right)} r^{N-1} \leq \tfrac{p}{|\partial B_1|}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p|x|^a dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

$$|u(x)|^p |x|^{a\left(\frac{p-1}{p}\right)} |x|^{N-1} \leq \tfrac{p}{|\partial B_1|}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p|x|^a dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Luego elevando ambos miembros a la $\frac{1}{p}$, y llamando A_N a $\left(\frac{p}{|\partial B_1|}\right)^{\frac{1}{p}}$, llegamos a,

$$|u(x)||x|^{a\frac{p-1}{p^2}}|x|^{\frac{N-1}{p}} \leq A_N\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p|x|^a dx\right)^{\frac{p-1}{p^2}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{p}}.$$

Consideremos ahora $v \in W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$. Como $D_r(\mathbb{R}^N)$ es denso en $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ (ver Obs. (B.0.8)), existe $(v_n) \in D_r(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \longrightarrow v \qquad \text{en } W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N),$$

o sea,

$$\|v_n - v\|_{W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando}\, n \to +\infty.$$

En particular,

$$v_n \longrightarrow v \qquad \text{en } L^p_a(\mathbb{R}^N).$$

Pasando entonces a una subsucesión podemos también suponer que

$$v_n(x) \to v(x) \text{ en casi todo punto.}$$

Además por lo demostrado anteriormente, (v_n) cumple que

$$|v_n(x)||x|^{a\frac{p-1}{p^2}}|x|^{\frac{N-1}{p}} \leq A_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^p |x|^a dx\right)^{\frac{p-1}{p^2}} \|\nabla v_n\|^{\frac{1}{p}}_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Notemos que

1. $\|v_n\|_{L^p_a(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |v_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|v\|_{L^p_a(\mathbb{R}^N)}$

   cuando $n \to +\infty$, pues

$$\begin{aligned} \left| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |v_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \right| &= \left| \|v_n\|_{L^p_a(\mathbb{R}^N)} - \|v\|_{L^p_a(\mathbb{R}^N)} \right| \\ &\leq \|v_n - v\|_{L^p_a(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|v_n - v\|_{W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

   por la desigualdad triangular, y $\|v_n - v\|_{W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0$ cuando $n \to +\infty$, con lo cual

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |v_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{cuando}\, n \to +\infty.$$

2. $$\|\nabla v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \qquad \text{cuando}\, n \to +\infty,$$

pues

$$\begin{aligned}\left| \|\nabla v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} - \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right| &\leq \|v_n - v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|v_n - v\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)},\end{aligned}$$

por la desigualdad triangular, y $\|v_n - v\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0$ cuando $n \to +\infty$, con lo cual

$$\|\nabla v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \qquad \text{cuando}\, n \to +\infty.$$

Luego vale que

$|v(x)||x|^{a\frac{p-1}{p^2}}|x|^{\frac{N-1}{p}} \leq A_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^p |x|^a dx\right)^{\frac{p-1}{p^2}} \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{p}}$
para todo $v \in W_{r,a}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Veamos ahora que $v \in C(\mathbb{R}^N - \{0\})$. Como $v_n \longrightarrow v$ en $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, entonces (v_n) es de Cauchy, es decir

$$\|v_n - v_m\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0.$$

Usamos la desigualdad recién probada para $(v_n - v_m)$,

$$\begin{aligned}|v_n(x) - v_m(x)||x|^{a\frac{p-1}{p^2}}|x|^{\frac{N-1}{p}} &\leq A_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n - v_m|^p |x|^a dx\right)^{\frac{p-1}{p^2}} \|\nabla(v_n - v_m)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq A_N \|v_n - v_m\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{p-1}{p}} \|v_n - v_m\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{p}} \\ &= A_N \|v_n - v_m\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Podemos tomar una sucesión creciente de compactos

$$K_l = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \tfrac{1}{l} \leq |x| \leq l\right\} \; l \in \mathbb{N},$$

cuya unión es $\mathbb{R}^N - \{0\}$. Para cada uno de ellos, vale

$$\begin{aligned}|v_{n_i}(x) - v_{n_j}(x)| &\leq A_N \|v_{n_i} - v_{n_j}\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)} |x|^{-(\frac{N-1}{p} + a\frac{p-1}{p^2})} \\ &\leq A_N \|v_{n_i} - v_{n_j}\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)} M \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Esto implica que $v_{n_i}(x)$ es uniformemente de Cauchy en K_l, entonces existe $\tilde{v}_l$ tal que

$$v_{n_i} \longrightarrow \tilde{v}_l \qquad \text{uniformemente en}\, K_l,$$

y (v_{n_i}) es una sucesión de funciones continuas, con lo cual $\tilde{v}_l$ es continua. Ahora bien, como $\tilde{v}_l(x) = \tilde{v}_s(x)$ si $x \in K_l$ y $s \geq l$, podemos definir $\tilde{v}$ para $x \in \mathbb{R}^N$ por

$$\tilde{v}(x) = \tilde{v}_l(x) \quad \text{si}\, x \in K_l.$$

Entonces $\tilde{v} \in C\left(\mathbb{R}^N - \{0\}\right)$. Luego,

$$v = \tilde{v} \qquad \text{en casi todo punto},$$

es decir que $v \in C(\mathbb{R}^N - \{0\})$. □

Lema 3.2.5 *Si* $1 < p < N$, $p \leq r < \frac{pN}{N-p} = p^*$, *luego para toda* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, *tenemos que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{N(r-p)}{p^2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right)^{\frac{Np+r(p-N)}{p^2}}.$$

Demostración: Sea $r = (1-\theta)p + \theta p^*$ con $\theta \in [0,1)$. Notemos que $p \leq r < p^* = \frac{pN}{N-p}$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(1-\theta)p} |u|^{\theta p^*} \, dx,$$

por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(1-\theta)p\frac{1}{1-\theta}} \, dx \right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\theta p^* \frac{1}{\theta}} \, dx \right)^{\theta} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx \right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \, dx \right)^{\theta} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx \right)^{1-\theta} \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{p^*\theta}
\end{aligned}$$

por Teorema 1.3.10,

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx\right)^{1-\theta} C \, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{p^*\theta} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx\right)^{1-\theta} C \, \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{p^*\theta}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx\right)^{\frac{Np+r(p-N)}{p^2}} C \, \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{N(r-p)}{p^2}}
\end{aligned}$$

pues, despejando θ de $r = (1-\theta)p + \theta p^*$, queda

$$\begin{aligned}
r &= (1-\theta)p + \theta p^* \\
r &= p - \theta p + \theta p^* \\
r - p &= \theta(p^* - p) \\
\frac{r-p}{p^* - p} &= \theta \\
\frac{r-p}{\frac{pN}{N-p} - p} &= \theta \\
\frac{(r-p)(N-p)}{pN - p(N-p)} &= \theta \\
\frac{(r-p)(N-p)}{p^2} &= \theta,
\end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned}
1 - \theta = 1 - \frac{(r-p)(N-p)}{p^2} \\
&= \frac{p^2 - r(N-p) + pN - p^2}{p^2} \\
&= \frac{pN + r(p-N)}{p^2},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{p^*\theta}{p} &= \frac{pN}{N-p} \, \frac{(r-p)(N-p)}{p^2} \frac{1}{p} \\
&= \frac{N(r-p)}{p^2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 3.2.6 *Para* $1 < p < N,\ p < q < \frac{pN}{N-p} + \frac{c}{\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}},\ \frac{p}{p-1}(1-N) \leq a < N(p-1),\ q - \frac{c}{\frac{N-1}{p}+a\frac{p-1}{p^2}} \geq p$, *existe* $B_{N,p,c}$ *tal que para toda* $v \in D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, *tenemos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c|v|^q dx \leq B_{N,p,c}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx\right)^{\frac{c}{p(N-1)+a(p-1)}+\frac{N}{p^2}\left(q-p-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right)}.$$

Demostración: Sea $u \in D_r(\mathbb{R}^N)$.

$$\begin{aligned} I := \int_{\mathbb{R}^N} |x|^c|u|^q dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|x|^{\frac{N-1}{p}+a\frac{p-1}{p^2}}\right)^{\frac{c}{\frac{N-1}{p}+a\frac{p-1}{p^2}}} |u|^{\frac{c}{\frac{N-1}{p}+a\frac{p-1}{p^2}}} |u|^{q-\frac{c}{\frac{N-1}{p}+a\frac{p-1}{p^2}}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[|x|^{\frac{N-1}{p}+a\frac{p-1}{p^2}}|u|\right]^{\frac{c}{\frac{N-1}{p}+a\frac{p-1}{p^2}}} |u|^{q-\frac{c}{\frac{N-1}{p}+a\frac{p-1}{p^2}}} dx \end{aligned}$$

Por el Lema 3.2.4, se sigue que

$$I \leq \left[A_N\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|u|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p^2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p^2}}\right]^{\frac{c}{\frac{N-1}{p}+a\frac{p-1}{p^2}}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-\frac{c}{\frac{N-1}{p}+a\frac{p-1}{p^2}}} dx$$

y por Lema 3.2.5, que podemos utilizar pues $p \leq \underbrace{q - \frac{c}{\frac{N-1}{p}+a\frac{p-1}{p^2}}}_{r} < \frac{pN}{N-p}$,

$$\begin{aligned} I &\leq A_N^{\frac{c}{\frac{N-1}{p}+a\frac{p-1}{p^2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|u|^p dx\right)^{\frac{(p-1)c}{p(N-1)+a(p-1)}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{c}{p(N-1)+a(p-1)}} \\ &\cdot C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{N}{p^2}\left[q-\frac{c}{\frac{N-1}{p}+a\frac{p-1}{p^2}}-p\right]}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx\right)^{\frac{Np}{p^2}+\left[q-\frac{c}{\frac{N-1}{p}+a\frac{p-1}{p^2}}\right]\frac{p-N}{p^2}} \\ &= \tilde{C}_{N,p,a,c}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a|u|^p dx\right)^{\frac{(p-1)c}{p(N-1)+a(p-1)}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx\right)^{\frac{Np}{p^2}+\left[q-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right]\frac{p-N}{p^2}} \\ &\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{c}{p(N-1)+a(p-1)}+\frac{N}{p^2}\left[q-p-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right]} \\ &\leq B_{N,p,c}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{c}{p(N-1)+a(p-1)}+\frac{N}{p^2}\left[q-p-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right]}. \end{aligned}$$

Consideremos ahora $v \in D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Como $D_r(\mathbb{R}^N)$ es denso en $D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (ver Obs. (A.0.2)), existe $(v_n) \in D_r(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{con respecto a la norma } \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

es decir que

$$\|\nabla(v_n - v)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0.$$

Por la desigualdad probada anteriormente, vale que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |v_n|^q dx \leq B_{N,p,c} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx \right)^{\frac{c}{p(N-1)+a(p-1)} + \frac{N}{p^2}\left(q-p-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right)}.$$

Notemos que

1. $$\left| \|\nabla v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} - \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty,$$

   pues

   $$\left| \|\nabla v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} - \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right| \leq \|\nabla(v_n - v)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

   por la desigualdad triangular, y como $\|\nabla(v_n - v)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0$, entonces

   $$\|\nabla v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty.$$

2. Veamos que

   $$\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |v_n(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}}_{\|v_n\|_{L^q_c(\mathbb{R}^N)}} \longrightarrow \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |v(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}}_{\|v\|_{L^q_c(\mathbb{R}^N)}}.$$

   Notemos que (v_n) es de Cauchy en $D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y vale la desigualdad anterior, con lo cual

   $$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |v_n - v_m|^q dx$$
   $$\leq B_{N,p,c} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(v_n - v_m)|^p dx \right)^{\frac{c}{p(N-1)+a(p-1)} + \frac{N}{p^2}\left(q-p-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right)} \to 0,$$

cuando n, $m \to \infty$. De ahí resulta que (v_n) también es de Cauchy en $L^q(\mathbb{R}^N,\, |x|^c\, dx)$. Luego, por la completitud de $L^q(\mathbb{R}^N,\, |x|^c\, dx)$, existe $\tilde{v} \in L^q(\mathbb{R}^N,\, |x|^c\, dx)$ tal que

$$v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{v} \quad \text{en} \quad L^q_c(\mathbb{R}^N).$$

Por otro lado, por la desigualdad de Sobolev (1.3.10)

$$\|v_n - v\|_{L^{p^*}} \leq C\, \|\nabla(v_n - v)\|_{L^p}.$$

En efecto existe una subsucesión (v_{n_k}) tal que

$$\left.\begin{array}{ll} v_{n_k} \longrightarrow v & \text{c.t.p.} \\ v_{n_k} \longrightarrow \tilde{v} & \text{c.t.p.} \end{array}\right\} \Longrightarrow v = \tilde{v}.$$

Entonces obtenemos

$$v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{en} \quad L^q_c(\mathbb{R}^N),$$

y por lo tanto, por la desigualdad triangular, resulta que

$$\|v_n\|_{L^q_c(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow \|v\|_{L^q_c(\mathbb{R}^N)}.$$

Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |v|^q dx \leq B_{N,p,c} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{c}{p(N-1)+a(p-1)} + \frac{N}{p^2}\left(q-p-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right)}$$

para toda $v \in D^{1,p}_r(\mathbb{R}^N)$.

$\square$

3.3. Existencia de una Solución Radial

Observación 3.3.1 *Si* $1 < p < N$, $\frac{p}{p-1}(1-N) \leq a < N(p-1)$, *y*

$$pb - ap - a\frac{(p-1)(q-p)}{p} < (q-p)(N-1),$$

la inmersión

$$W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b dx)$$

es continua.

Demostración: Consideremos la integral

$$I = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q dx.$$

y la partimos de la siguiente manera: $I = I_1 + I_2$ donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|x|\leq 1} |x|^b |u|^q dx, \\ I_2 &= \int_{|x|\geq 1} |x|^b |u|^q dx. \end{aligned}$$

1. Sea c tal que

$$p + \frac{c}{\frac{N-1}{p} + \frac{a(p-1)}{p^2}} \leq q < p^* + \frac{c}{\frac{N-1}{p} + \frac{a(p-1)}{p^2}},$$

entonces

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|x|\leq 1} |x|^b |u|^q \, dx \\ &= \int_{|x|\leq 1} |x|^{b-c} |x|^c |u|^q \, dx \\ &\leq 1^{b-c} \int_{|x|\leq 1} |x|^c |u|^q \, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |u|^q \, dx, \end{aligned}$$

por Lema 3.2.6,

$$\begin{aligned} &\leq B_{N,p,c} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{c}{p(N-1)+a(p-1)} + \frac{N}{p^2}\left(q-p-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right)} \\ &= B_{N,p,c} \, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{c}{(N-1)+\frac{a(p-1)}{p}} + \frac{N}{p}\left(q-p-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right)}. \end{aligned}$$

Notemos que $\frac{c}{(N-1)+\frac{a(p-1)}{p}} + \frac{N}{p}\left(q-p-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right) > 0$, pues

$$\begin{aligned} p + \frac{c}{\frac{N-1}{p} + \frac{a(p-1)}{p^2}} &\leq q \\ \Leftrightarrow \frac{c}{\frac{N-1}{p} + \frac{a(p-1)}{p^2}} &\leq q - p < (q-p)\tfrac{N}{N-1}, \end{aligned}$$

entonces las siguientes condiciones resultan equivalentes

$$\begin{aligned}
(q-p)\tfrac{N}{N-1} &> \frac{c}{\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}}\\
q-p &> \frac{c}{\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}}\left(1-\tfrac{1}{N}\right)\\
q-p-\frac{c}{\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}} &> -\frac{c}{\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}}\,\frac{1}{N}\\
\frac{c}{\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}}+N\left(q-p-\frac{c}{\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}}\right) &> 0\\
\frac{cp}{(N-1)+\frac{a(p-1)}{p}}+N\left(q-p-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right) &> 0\\
\frac{c}{(N-1)+\frac{a(p-1)}{p}}+\frac{N}{p}\left(q-p-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right) &> 0.
\end{aligned}$$

Además veamos que $\frac{c}{(N-1)+\frac{a(p-1)}{p}}+\frac{N}{p}\left(q-p-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right)<q$, pues

$$\begin{aligned}
&\tfrac{c}{(N-1)+\frac{a(p-1)}{p}}+\tfrac{N}{p}\left(q-p-\tfrac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right)\\
&=\tfrac{1}{p}\left(\tfrac{c}{\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}}\right)+\tfrac{N}{p}\left(q-p-\tfrac{c}{\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}}\right)\\
&=\left(\tfrac{1}{p}-\tfrac{N}{p}\right)\left(\tfrac{c}{\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}}\right)+\tfrac{N}{p}(q-p)\\
&\leq\left(\tfrac{1}{p}-\tfrac{N}{p}\right)(q-p)+\tfrac{N}{p}(q-p) \qquad \text{pues} \quad p+\left(\tfrac{c}{\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}}\right)\leq q,\\
&=\tfrac{1}{p}(q-p)\\
&<q \qquad \text{pues} \quad p>1.
\end{aligned}$$

Por otro lado como,

$$\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\leq\|u\|_{W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{c}{(N-1)+\frac{a(p-1)}{p}}+\frac{N}{p}\left(q-p-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right)} &< \|\nabla u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\
&\leq \|u\|^q_{W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$I_1 \leq C_1 \, \|u\|^q_{W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)}.$$

2.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{|x|\geq 1} |x|^b |u|^q dx \\
&= \int_{|x|\geq 1} |x|^{b-a} |u|^{q-p} |x|^a |u|^p dx \\
&= \int_{|x|\geq 1} |x|^{b-a-(q-p)\left[\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}\right]} \left[|x|^{\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}} |u| \right]^{q-p} |x|^a |u|^p dx.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
pb - ap - a\tfrac{(p-1)(q-p)}{p} &< (q-p)(N-1) \\
p(b-a) - a(p-1)\tfrac{q-p}{p} &< (q-p)((N-1) \\
p(b-a) &< (q-p)((N-1) + a(p-1)\tfrac{q-p}{p} \\
b - a &< \frac{(q-p)\left[N - 1 + \frac{a(p-1)}{p}\right]}{p} \\
b - a &< (q-p)\left[\tfrac{N-1}{p} + \tfrac{a(p-1)}{p^2}\right] \\
b - a - (q-p)\left[\tfrac{N-1}{p} + \tfrac{a(p-1)}{p^2}\right] &< 0,
\end{aligned}$$

y como $|x| \geq 1$, entonces $|x|^{b-a-(q-p)\left[\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}\right]} \leq 1$. Y por el lema 3.2.4, se sigue que

$$\int_{|x|\geq 1} |x|^{b-a-(q-p)\left[\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}\right]} \left[|x|^{\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}} |u| \right]^{q-p} |x|^a |u|^p dx$$

$$\leq A_N^{q-p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |u|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p^2}(q-p)} \|\nabla u\|^{\frac{q-p}{p}}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \int_{|x|\geq 1} |x|^a |u|^p dx.$$

Sabemos que valen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |u|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p^2}(q-p)} &\leq \|u\|_{W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{p-1}{p}(q-p)}, \\
\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{q-p}{p}} &\leq \|u\|_{W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{q-p}{p}} \qquad \text{y} \\
\int_{|x|\geq 1} |x|^a |u|^p dx &\leq \|u\|_{W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)}^{p}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C_2 \, \|u\|_{W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{p-1}{p}(q-p)+\frac{q-p}{p}+p} \\
&= C_2 \, \|u\|_{W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)}^{q}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
I^{\frac{1}{q}} &= (I_1 + I_2)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(C_1 \, \|u\|_{W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)}^{q} + \, C_2 \, \|u\|_{W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)}^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C_3 \, \|u\|_{W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

entonces la inmersión $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n, |x|^b dx)$ es continua. $\square$

Observación 3.3.2 *Sean $0 < \varepsilon < 1$ y $\Omega_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^N / \varepsilon \leq |x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\}$. Luego para $a \geq 0$, la inmersión*

$$W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$$

es continua.

Demostración: Como $0 < \varepsilon < 1$ y $a \geq 0$, vale que

$$\begin{aligned}
1 &\leq \left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^a, \\
\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^p dx &\leq \left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^a \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx.
\end{aligned}$$

Además

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &\leq |x|, \\
(\varepsilon)^a &\leq |x|^a, \\
1 &\leq \left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^a |x|^a, \\
\int_{\Omega_\varepsilon} u^p dx &\leq \left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^a \int_{\mathbb{R}^N} |x|^a u^p dx.
\end{aligned}
$$

Luego existe $C_\varepsilon = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^a$ tal que

$$
\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^p + u^p \, dx \leq C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a u^p \, dx,
$$

es decir la inmersión $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$ es continua. $\square$

Consideremos el siguiente problema de minimización

$$
m_p = m(a,b,p,q) := \inf_{\substack{u \in W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N) \\ \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q dx = 1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a |u|^p dx.
$$

Teorema 3.3.3 *Si* $0 \leq a < N(p-1)$, $b \geq 0$, $N \geq 3, 1 < p < N$,

$$
p < q < \tilde{q} := \tfrac{Np}{N-p} + \tfrac{bp}{N-p} \quad y
$$

$$
pb - a\left(p + \tfrac{(p-1)(q-p)}{p}\right) < (q-p)(N-1),
$$

luego se alcanza m_p.

Demostración: Sea $(u_n) \subset W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ una sucesión minimizante para m_p, es decir que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_n|^q dx = 1,
$$

$$
\|u_n\|^p_{W^{1,p}_{r,a}} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p + |x|^a |u_n|^p dx \to m_p.
$$

Notemos entonces que $\|u_n\|_{W^{1,p}_{r,a}}$ está acotada, y por lo tanto (u_n) está acotada en $W^{1,p}_{r,a}$. Además $W^{1,p}_{r,a}$ es un espacio de Banach reflexivo y separable (ver apéndice B, Obs. (B.0.12)), con lo cual, por el Teorema de Banach-Alaoglu (1.1.28), existe una subsucesíon (u_{n_k}) tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$. Para simplificar, notaremos u_{n_k} como u_n. Podemos asumir entonces que $u_n \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$. Así que por la semicontinuidad inferior débil de la norma (corolario (1.1.27)), como

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N), \qquad \text{y}$$

$$\|u_n\|^p_{W^{1,p}_{r,a}} \leq m_p,$$

tenemos que

$$\|u\|^p_{W^{1,p}_{r,a}} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a |u|^p dx \leq m_p.$$

Además, como la inmersión $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b dx)$ es continua (Observación 3.3.1), por el Teorema 1.1.20, vale que

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{en } L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b dx).$$

Ahora con ésta última convergencia débil y teniendo en cuenta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_n|^q dx = 1,$$

por la semicontinuidad inferior débil de la norma (corolario (1.1.27)), obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q dx \leq 1.$$

Si c está definida por $q = p^* + \frac{pc}{N-p}$, luego $c < b$, pues $q < p^* + \frac{pb}{N-p}$ por hipótesis. Y por el Lema 3.2.6

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leq\varepsilon} |x|^b|u_n|^q dx &= \int_{|x|\leq\varepsilon} |x|^{b-c}|x|^c|u_n|^q dx \\
&\leq \varepsilon^{b-c}\int_{|x|\leq\varepsilon} |x|^c|u_n|^q dx \\
&\leq \varepsilon^{b-c}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c|u_n|^q dx \\
&\leq \varepsilon^{b-c}\tilde{C}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx\right)^{\frac{c}{p(N-1)+a(p-1)}+\frac{N}{p^2}\left[q-p-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right]} \\
&\leq \varepsilon^{b-c}\tilde{C}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p + |x|^a u_n^p dx\right)^{\frac{c}{p(N-1)+a(p-1)}+\frac{N}{p^2}\left[q-p-\frac{cp^2}{p(N-1)+a(p-1)}\right]} \\
&\leq \varepsilon^{b-c}C,
\end{aligned}$$

ya que (u_n) es acotada en $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$.

En la demostración de la Observación 3.3.1 vimos que si

$$pb - ap - \tfrac{a(p-1)(q-p)}{p} < (q-p)(N-1),$$

entonces

$$b - a - (q-p)\left[\tfrac{N-1}{p} + \tfrac{a(p-1)}{p^2}\right] < 0.$$

Además,

$$\begin{aligned}
-b + a + (q-p)\left[\tfrac{N-1}{p} + \tfrac{a(p-1)}{p^2}\right] &= -b + a\left(1 + \tfrac{(q-p)(p-1)}{p^2}\right) + \tfrac{(q-p)(N-1)}{p} \\
&= -b + a\left(\tfrac{p^2+qp-q-p^2+p}{P^2}\right) + \tfrac{(q-p)(N-1)}{p} \\
&= a\left(\tfrac{q+1}{p} - \tfrac{q}{p^2}\right) - b + \tfrac{(q-p)(N-1)}{p}.
\end{aligned}$$

Usando el Lema 3.2.4 y que la sucesión (u_n) es acotada en $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$, deducimos que

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} |x|^b|u_n|^q\,dx &= \int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} |x|^{b-a}|u_n|^{q-p}|x|^a|u_n|^p\,dx \\
&= \int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} |x|^{b-a-(q-p)\left[\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}\right]+(q-p)\left[\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}\right]}. \\
&\qquad .|u_n|^{q-p}|x|^a|u_n|^p\,dx \\
&= \int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} |x|^{b-a-(q-p)\left[\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}\right]}. \\
&\qquad .\left(|x|^{\left[\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}\right]}|u_n|\right)^{q-p}|x|^a|u_n|^p\,dx \\
&\leq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{b-a-(q-p)\left[\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}\right]} A_N\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^a|u_n|^p\,dx\right)^{\frac{p-1}{p^2}}. \\
&\qquad .\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p^2}}\int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}}|x|^a|u_n|^p\,dx \\
&\leq (\varepsilon)^{a\left(\frac{q+1}{p}-\frac{q}{p^2}\right)-b+\frac{(q-p)(N-1)}{p}} A_N\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^a|u_n|^p\,dx\right)^{\frac{p-1}{p^2}}. \\
&\qquad .\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p^2}}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^a|u_n|^p\,dx \\
&\leq (\varepsilon)^{a\left(\frac{q+1}{p}-\frac{q}{p^2}\right)-b+\frac{(q-p)(N-1)}{p}} C.
\end{aligned}$$

Ahora, para todo $t<1$, existe $\varepsilon>0$ tal que, para todo n,

$$\int_{\varepsilon\leq|x|\leq\frac{1}{\varepsilon}}|x|^b|u_n|^q dx\geq t.$$

Por la observación 3.3.2 y el Teorema 1.1.20, como $u_n\rightharpoonup u$ en $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$,

$$u_n\,|_{\Omega_\varepsilon}\rightharpoonup u\,|_{\Omega_\varepsilon}\quad \text{en } W^{1,p}(\Omega_\varepsilon).$$

Por el Teorema de Rellich-Kondrachow (Teorema 1.3.12) en $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$, existe una subsucesión (u_{n_k}) tal que

$$u_{n_k} \longrightarrow u \quad \text{en} \quad L^2(\Omega_\varepsilon),$$

entonces, existe $(u_{n_{k_j}})$ tal que

$$u_{n_{k_j}} \longrightarrow u \quad \text{c.t.p.}$$

Además por el lema (3.2.4)

$$\begin{aligned} |u_{n_{k_j}}(x)| &\leq A_N \, \|u_{n_{k_j}}\|_{W_a^{1,p}} \, |x|^{-\left(\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}\right)} \\ &\leq A_N \, \|u_{n_{k_j}}\|_{W_a^{1,p}} \, \varepsilon^{-\left(\frac{N-1}{p}+\frac{a(p-1)}{p^2}\right)} \\ &\leq C_\varepsilon, \end{aligned}$$

y

$$\left.\begin{array}{l} u_{n_{k_j}} \longrightarrow u \\ |u_{n_{k_j}}| \leq C_\varepsilon \end{array}\right\} \Longrightarrow |u| \leq C_\varepsilon.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_{n_{k_j}} - u|^q \, dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} |u_{n_{k_j}} - u|^{q-2} |u_{n_{k_j}} - u|^2 \, dx \\ &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} (2\, C_\varepsilon)^{q-2} \, |u_{n_{k_j}} - u|^2 \, dx \\ &\leq (2\, C_\varepsilon)^{q-2} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_{n_{k_j}} - u|^2 \, dx \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

es decir que

$$u_{n_{k_j}} \to u \quad \text{en } L^q(\Omega_\varepsilon) \quad \forall \quad 2 < q < \infty.$$

Podemos suponer que

$$u_n \to u \quad \text{en } L^q(\Omega_\varepsilon) \quad \forall \quad 2 < q < \infty.$$

De esta manera, considerando

$$\begin{aligned} f(x,u) &= u^q, \\ c &\geq 1, \\ r &= 1 \quad \text{y}, \end{aligned}$$

$$A : L^q(\Omega_\varepsilon) \longrightarrow L^1(\Omega_\varepsilon), \quad A(u) = u^q,$$

por el Teorema 1.2.21,

$$|u_n|^q \to |u|^q \,\text{en}\, L^1(\Omega_\varepsilon).$$

Así que

$$\left| \int_{\Omega_\varepsilon} |u_n|^q |x|^b \, dx - \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^q |x|^b \, dx \right| \leq \int_{\Omega_\varepsilon} |x|^b \, ||u_n|^q - |u|^q| \, dx \quad \text{y}$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |x|^b \, ||u_n|^q - |u|^q| \, dx \;\to\; 0 \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty.$$

Por lo tanto

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |u_n|^q |x|^b dx \to \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^q |x|^b dx.$$

Luego tomando límite,

$$1 \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^b dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^q |x|^b dx \geq t.$$

Concluimos que $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^b dx = 1$ y m_p se alcanza en u. □

En las siguientes subsecciones, demostraremos los puntos importantes que nos llevan a concluir que el problema (3.1) tiene una solución radial no trivial.

3.3.1. Aplicación de los Multiplicadores de Lagrange

Observación 3.3.4 *Sean*

1. u_0 *una función donde se alcanza* m_p,

2. $E = W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$,

3. $J : E \longrightarrow \mathbb{R},\ J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a u^p \, dx$,

4. $I : E \longrightarrow \mathbb{R},\ I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q \, dx$,

entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} p|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla v + p|x|^a|u_0|^{p-2}\, u_0 \; v \, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q\,|x|^b|u_0|^{q-2}u_0 \; v \, dx \quad \forall\, v \in E.$$

Demostración: Notemos que J está bien definida por la definición de $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ e I está bien definida por la Observación 3.3.1.
Sea $v \in E$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial v}(u_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{J(u_0 + h\, v) - J(u_0)}{h} \\ &= \frac{d}{dh}\bigg|_{h=0} J(u_0 + h\, v), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} J(u_0 + h\, v) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_0 + h\, v)|^p + |x|^a|u_0 + h\, v|^p \, dx, \quad \text{y} \\ \frac{d}{dh} J(u_0 + h\, v) &= \int_{\mathbb{R}^N} p|\nabla(u_0 + h\, v)|^{p-2}\nabla(u_0 + h\, v)\, \nabla v + \\ &\qquad + |x|^a p\, |u_0 + h\, v|^{p-2}(u_0 + h\, v)\, v \, dx, \end{aligned}$$

entonces evaluando en $h = 0$,

$$\frac{\partial J}{\partial v}(u_0) = \int_{\mathbb{R}^N} p|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla v + p\,|x|^a|u_0|^{p-2}u_0\, v \, dx.$$

Análogamente, dado $v \in E$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial v}(u_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{I(u_0 + h\, v) - I(u_0)}{h} \\ &= \frac{d}{dh}\bigg|_{h=0} I(u_0 + h\, v), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} I(u_0 + h\,v) &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_0 + h\,v|^q \, dx, \\ \frac{d}{dh} I(u_0 + h\,v) &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b q |u_0 + h\,v|^{q-2} (u_0 + h\,v)\, v\, dx, \end{aligned}$$

y evaluando en $h = 0$,

$$\frac{\partial I}{\partial v}(u_0) = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b q |u_0|^{q-2} u_0\, v\, dx.$$

Como $u_0 \in E$ es una función que minimiza J sujeto a $I(u) = 1$, e $I'(u_0) \neq 0$, pues existe algún v tal que $\frac{\partial I}{\partial v}(u_0) \neq 0$, entonces por el Teorema de Multiplicadores de Lagrange (1.4.1), existe λ tal que

$$J'(u_0) = \lambda\, I'(u_0).$$

En nuestro caso,

$$\int_{\mathbb{R}^N} p|\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla v + p\,|x|^a |u_0|^{p-2} u_0\ v\, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q\,|x|^b |u_0|^{q-2} u_0\ v\ dx \quad \forall\, v \in E,$$

que era lo que queríamos probar. □

3.3.2. Aplicación del Principio de Criticalidad Simétrica

Observación 3.3.5 *Sean*

1. u_0, *una función donde se alcanza* m_p,

2. $E = W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,

3. $G = O(N) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{N\times N} / A\, A^t = Id \right\}$, *el grupo ortogonal que actúa sobre* E, *mediante la acción*

$$A.u(x) = u(Ax) \quad \forall u \in E,\ \forall A \in G,$$

4. $\tilde{J} : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{J}(u) = J(u) - \lambda\, I(u)$ *con* J, I *y* λ *como en la observación anterior (3.3.4).*

Entonces u_0 *es punto crítico de* $\tilde{J}$.

Demostración:

- E es un espacio de Banach uniformemente convexo y reflexivo por el Teorema (B.0.11). Luego, por la Observación (1.5.5), E es estrictamente convexo. Con lo cual, usando la Proposición (1.5.6), tenemos que para cada $f \in E'$, existe un único $u \in E$ tal que $f(u) = \|u\|_E^2 = \|f\|_{E'}^2$.

- Afirmamos que la acción de G sobre E es isométrica, es decir

$$\|A.u\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \quad \forall A \in G,\ \forall u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

  Pues,

$$\begin{aligned}
\|A.u\|^p_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(A.u(x))|^p + |x|^a |A.u(x)|^p\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u(Ax))|^p + |x|^a |u(Ax)|^p\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(Ax)\, A|^p + |x|^a |u(Ax)|^p\, dx,
\end{aligned}$$

  y con el cambio de variable $y = Ax$,

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^p + |y|^a |u(y)|^p\, dy \\
&= \|u\|^p_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

  ya que como $A \in G$, $|det(A)| = 1$ y $|y| = |Ax| = |x|$.

- Afirmamos que $\tilde{J}$ es $G-$invariante, es decir

$$\tilde{J}(A.u) = \tilde{J}(u) \quad \forall A \in G, \forall u \in E.$$

  Pues, usando la misma cuenta que en el ítem anterior con el cambio de variable $y = Ax$,

$$\begin{aligned}
\tilde{J}(A.u) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(A.u(x))|^p + |x|^a |A.u(x)|^p \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |A.u(x)|^q \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u(Ax))|^p + |x|^a |u(Ax)|^p \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u(Ax)|^q \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(Ax)\, A|^p + |x|^a |u(Ax)|^p \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u(Ax)|^q \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^p + |y|^a |u(y)|^p \, dy - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |y|^b |u(y)|^q \, dy \\
&= J(u) - \lambda\, I(u) \\
&= \tilde{J}(u).
\end{aligned}$$

- Ahora sea,

  $$\Sigma := \{u \in E : A.u = u \,\forall A \in G\}.$$

  Afirmamos que

  $$\Sigma = W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N).$$

  Pues,

  1. $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N) \subseteq \Sigma$:
     Si $u \in W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$, entonces $u(x) = \tilde{u}(|x|)$. Sea $A \in G$,

     $$\begin{aligned}
     A.u(x) &= u(Ax) \\
     &= \tilde{u}(|Ax|) \\
     &= \tilde{u}(|x|), \quad \text{pues } |Ax| = |x| \text{ si } A \in G, \\
     &= u(x).
     \end{aligned}$$

     Luego $u \in E$ y cumple que $A.u = u \,\forall A \in G$, por lo tanto $u \in \Sigma$.

  2. $\Sigma \subseteq W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$:
     Consideremos $\tilde{u}(r) = u(r.e_1)$ con $e_1 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^N$.
     Por un lema de álgebra lineal, sabemos que si $N \geq 2$, x e $y \in \mathbb{R}^N$, existe $A \in G$ tal que $Ax = y$.
     En particular si tomamos $y = e_1.|x|$, existe $A \in G$ tal que $Ax = e_1.|x|$.

Sea $u \in \Sigma$, entonces

$$\begin{aligned} u(x) &= A.u(x) \\ &= u(Ax) \\ &= u(e_1.|x|) \\ &= \tilde{u}(|x|). \end{aligned}$$

Luego $u \in \Sigma \subset E$ y u es una función radial, por lo tanto $u \in W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$.

Además Σ es un subespacio cerrado de E, pues la acción es continua y la demostración es análoga a la de $F_{ix}(G)$ es cerrado en H que aparece en (1.5.3).

Como $u_0 \in \Sigma = W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ es una función que minimiza J restringido a $I(u) = 1$, y por la Observación 3.3.4

$$\begin{aligned} J'(u_0) &= \lambda I'(u_0) \\ J'(u_0) - \lambda I'(u_0) &= 0 \\ \tilde{J}'(u_0) &= 0, \end{aligned}$$

entonces u_0 es punto crítico de $\tilde{J}$ restringido a $\Sigma = W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$. Luego, por el Pricipio de Criticalidad Simétrica para espacios de Banach (1.5.7), u_0 es un punto crítico de $\tilde{J}$. □

3.3.3. Solución No Negativa

En esta subsección es importante destacar que gracias al lema (3.2.4), una función u_0 donde se alcanza m_p, puede considerarse como una función continua en $\mathbb{R}^N - \{0\}$.

Observación 3.3.6 *Sea u_0, una función donde se alcanza m_p. Entonces $|u_0|$ es también una función donde se alcanza m_p, es decir que hay una solución no negativa del problema de extremos, y podemos considerar entonces $u_0 \geq 0$ como solución del problema de minimización.*

Demostración: Notemos que

1.
$$\begin{aligned} I(|u_0|) &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_0|^q \, dx \\ &= I(u_0), \end{aligned}$$

2.
$$\nabla(|u_0|)(x) = \frac{u_0(x)}{|u_0(x)|}\, \nabla u_0(x) \quad \text{por la Regla de la Cadena.}$$

Aplicando módulo,
$$\begin{aligned} |\nabla(|u_0|)(x)| &= \left| \frac{u_0(x)}{|u_0(x)|}\, \nabla u_0(x) \right| \\ &= \frac{|u_0(x)|}{|u_0(x)|}\, |\nabla u_0(x)| \\ &= |\nabla u_0(x)|, \end{aligned}$$

entonces,
$$|\nabla(|u_0|)(x)|^2 = |\nabla u_0(x)|^2.$$

Luego,
$$\begin{aligned} J(|u_0|) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(|u_0|)|^2 + |x|^a |u_0|^2 \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 + |x|^a u_0^2 \, dx \\ &= J(u_0). \end{aligned}$$

Luego $|u_0|$ es una función donde se alcanza m_p.

$\square$

Definición 3.3.7 *Decimos que $u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ es solución débil de*
$$-\Delta_p u + |x|^a |u|^{p-2} u = \tilde{\lambda}\, |x|^b |u|^{q-2} u,$$
si
$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + |x|^a |u|^{p-2}\, u\, v \, dx = \tilde{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^{q-2} u\, v\, dx \quad \forall\, v \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Observación 3.3.8 *Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$-\Delta_p u + |x|^a\, |u|^{p-2}\, u = \tilde{\lambda}\, |x|^b |u|^{q-2} u,$$

multiplicando por $v \in C_0^2(\mathbb{R}^N) \cap W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$-v\,\Delta_p u + |x|^a\, |u|^{p-2}\, u\, v = \tilde{\lambda}\, |x|^b |u|^{q-2} u\, v, \quad \forall\, v \in C_0^2(\mathbb{R}^N) \cap W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

e integrando a ambos miembros,

$$\int_{\mathbb{R}^N} -v\,.\underbrace{\Delta_p u}_{div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)} + |x|^a\, |u|^{p-2} u\, v\, dx = \tilde{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^{q-2} u\, v\, dx,$$

para todo $v \in C_0^2(\mathbb{R}^N) \cap W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Luego, por el Teorema de Green vale que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u\, \nabla v + |x|^a\, u\, v\, dx = \tilde{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^{q-2} u\, v\, dx$$

para todo $v \in C_0^2(\mathbb{R}^N) \cap W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Es decir, toda solución clásica es una solución en sentido débil.

Observación 3.3.9 *Si u_0 es una función donde se alcanza m_p, entonces u_0 es solución débil de*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |x|^a\, |u|^{p-2}\, u = \frac{\lambda\, q}{p} |x|^b |u|^{q-2} u, \\ \\ u \geq 0,\ u \not\equiv 0 \text{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad u \in W_{r,a}^{1,p}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Demostración: Por la Observación 3.3.5,

$$\begin{aligned} \tilde{J}'(u_0) &= 0 \\ J'(u_0) - \lambda\, I'(u_0) &= 0 \\ J'(u_0) &= \lambda\, I'(u_0) \end{aligned}$$

con lo cual se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} p\,|\nabla u_0|^{p-2}\,\nabla u_0\,\nabla v + p\,|x|^a\,|u_0|^{p-2}\,u_0\,v\,dx$$
$$= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q|x|^b|u_0|^{q-2}u_0\,v\,dx \quad \forall\, v \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

es decir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^{p-2}\,\nabla u_0\,\nabla v + |x|^a\,|u_0|^{p-2}\,u_0\,v\,dx$$
$$= \tfrac{\lambda\,q}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b|u_0|^{q-2}u_0\,v\,dx \quad \forall\, v \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

entonces por la Observación 3.3.6 y la Definición 3.3.7, u_0 es solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |x|^a\,|u|^{p-2}\,u = \tfrac{\lambda\,q}{p}|x|^b|u|^{q-2}\,u, \\ \\ u \geq 0,\, u \not\equiv 0 \text{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad u \in W_{r,a}^{1,p}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

□

Teorema 3.3.10 *Sea u_0 una función donde se alcanza m_p. Entonces, $v_0 = \tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}}\,u_0$ (con $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda\,q}{p}$ y $\lambda = \frac{p}{q}\,m_p$) es solución débil de*

$$\begin{cases} -\Delta_p v + |x|^a|v|^{p-2}\,v = |x|^b\,|v|^{q-2}\,v, \\ \\ v \geq 0,\, v \not\equiv 0 \textit{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad v \in W_{r,a}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

es decir que, el problema (3.1) tiene una solución radial no trivial.

Demostración: Notemos que por la Definición 3.3.7, tomando $v = u_0 \in W_{r,a}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda\,q}{p}$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p + |x|^a|u_0|^p\,dx = \tfrac{\lambda\,q}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b|u_0|^{q-2}u_0^2\,dx$$
$$= \tfrac{\lambda\,q}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b|u_0|^q\,dx.$$

Como $u_0 \not\equiv 0$,

$$\lambda = \frac{p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p + |x|^a |u_0|^p \, dx}{q \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_0|^q \, dx} = \frac{p}{q} m_p.$$

Por la Observación 3.3.9, u_0 es solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |x|^a |u|^{p-2} \, u = \frac{\lambda \, q}{p} |x|^b \, |u|^{q-2} \, u, \\ \\ u \geq 0, \; u \not\equiv 0 \text{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad u \in W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Con lo cual

$$-\Delta_p u_0 + |x|^a \, u_0^{p-1} = \tilde{\lambda} \, |x|^b \, u_0^{q-1} \qquad \text{con } \tilde{\lambda} = \frac{\lambda \, q}{p},$$

y multiplicando a ambos miembros por $\tilde{\lambda}^{\frac{p-1}{q-p}}$

$$\begin{aligned} -\tilde{\lambda}^{\frac{p-1}{q-p}} \Delta_p u_0 + \tilde{\lambda}^{\frac{p-1}{q-p}} |x|^a \, u_0^{p-1} &= \tilde{\lambda} \, \tilde{\lambda}^{\frac{p-1}{q-p}} \, |x|^b \, u_0^{q-1} \\ -\tilde{\lambda}^{\frac{p-1}{q-p}} \, div \, [|\nabla u_0|^{p-2} \, \nabla u_0] + |x|^a \, \left[\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} \, u_0\right]^{p-1} &= |x|^b \, [\tilde{\lambda}^{\frac{q-1}{q-p}} \, u_0^{q-1}] \\ -div \left[\tilde{\lambda}^{\frac{p-1}{q-p}} \left(|\nabla u_0|^{p-2} \, \nabla u_0\right)\right] + |x|^a \left[\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} u_0\right]^{p-1} &= |x|^b \left[\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} u_0\right]^{q-1} \\ -div \left[\left(\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}}\right)^{p-2} |\nabla u_0|^{p-2} \, \tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} \, \nabla u_0\right] + |x|^a \left[\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} u_0\right]^{p-1} &= |x|^b \left[\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} u_0\right]^{q-1} \\ -div \, \left[|\nabla \left(\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} \, u_0\right) |^{p-2} \, \nabla \left(\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} \, u_0\right)\right] + |x|^a \left[\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} u_0\right]^{p-1} &= |x|^b \left[\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} u_0\right]^{q-1} \\ -\Delta_p \left[\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} \, u_0\right] + |x|^a \left[\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} u_0\right]^{p-1} &= |x|^b \left[\tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} u_0\right]^{q-1}. \end{aligned}$$

Luego $v_0 = \tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} u_0$ (con $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda \, q}{p}$ y $\lambda = \frac{p}{q} \, m_p$) es solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta_p v + |x|^a \, v^{p-1} = |x|^b \, v^{q-1}, \\ \\ v \geq 0, \; v \not\equiv 0 \text{ en c.t.p. en } \mathbb{R}^N, \quad v \in W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

es decir que, el problema (3.1) tiene una solución radial no trivial. □

3.4. Existencia de Soluciones No Radiales

Usamos resultados anteriores para construir soluciones no radiales del problema (3.2)

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |x|^a |u|^{p-2} u = |x|^b |u|^{q-2} u, \quad u \in W^{1,p}(B(0,R)), \\ \\ u > 0 \text{ en c.t.p. en } B(0,R), \\ \\ u \equiv 0 \text{ (en el sentido de la traza) en } \partial B(0,R), \end{cases}$$

cuando R es suficientemente grande.

Consideremos ahora

$$M_p = M(a,b,p,q) := \inf_{\substack{u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q dx = 1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a |u|^p \, dx.$$

Es claro que $M_p \leq m_p$, y usando nuestros resultados previos, probamos que M_p se alcanza bajo algunas condiciones.

Observación 3.4.1 *Sean $a \geq 0$, $\varepsilon > 0$. Luego la inmersión*

$$W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,p}\left(\left\{|x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\}\right)$$

es continua.

Demostración:

i)

$$\begin{aligned} \int_{\left\{|x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\}} |\nabla u|^p \, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx \\ &\leq \|u\|^p_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

ii)

$$\int_{\left\{|x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\}} |u|^p \, dx = \int_{\left\{|x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\}} |u|^p \, . \, 1 \, dx,$$

por la desigualdad de Hölder,

$$\leq \left(\int_{\left\{|x|\leq\frac{1}{\varepsilon}\right\}} |u|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \cdot \left(\int_{\left\{|x|\leq\frac{1}{\varepsilon}\right\}} 1\,dx\right)^{1-\frac{p}{p^*}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \cdot \left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^{1-\frac{p}{p^*}},$$

por la desigualdad de Sobolev,

$$\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,dx\right)$$

$$\leq C\,\|u\|^p_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Luego

$$\|u\|_{W^{1,p}\left(\left\{|x|\leq\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right)} \leq \tilde{C}\,\|u\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

□

Teorema 3.4.2 *Si* $0 < a < N(p-1),\ b \geq 0,\ 1 < p < N,\ \ N \geq 3$ *y*

$$p < q < q^{\#} := p^* - \tfrac{p^2 b}{a(N-p)},$$

luego M_p *se alcanza.*

Demostración: Sea $(u_n) \subset W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ una sucesión minimizante para M_p, es decir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_n|^q dx = 1,$$

$$\|u_n\|^p_{W_a^{1,p}} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p + |x|^a |u_n|^p dx \to M_p.$$

Notemos entonces que $\|u_n\|_{W_a^{1,p}}$ está acotada, y por lo tanto (u_n) está acotada en $W_a^{1,p}$. Como $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Banach, reflexivo y separable (ver Teorema (B.0.11)) y $(u_n) \subset W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ es una sucesión acotada, por el Teorema de Banach-Alaoglu (1.1.28), existe (u_{n_k}) una subsucesión débilmente convergente en $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Por simplicidad, podemos asumir como antes que $u_n \rightharpoonup u$ en $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Así que la por semicontinuidad inferior débil de la norma (corolario (1.1.27)), como

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N), \qquad \text{y}$$

$$\|u_n\|^p_{W^{1,p}_a} \leq M_p,$$

tenemos que

$$\|u\|^p_{W^{1,p}_a} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a|u|^p dx \leq M_p.$$

Además, como la inmersión $W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b dx)$ es continua (Observación 3.3.1), por el Teorema 1.1.20, vale que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b dx).$$

Ahora con ésta última convergencia débil y teniendo en cuenta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_n|^q dx = 1,$$

por la semicontinuidad inferior débil de la norma (corolario (1.1.27)), obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q dx \leq 1.$$

Si c está definida por $q = p^* - \frac{p^2 c}{a(N-p)}$, luego $c > b$, pues $q < p^* - \frac{p^2 b}{a(N-p)}$ por hipótesis.Y los exponentes

$$r = \frac{a}{c}, \quad s = \frac{ap^*}{aq - pc}$$

son conjugados, es decir que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Verifiquémoslo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} + \frac{1}{s} &= \frac{c}{a} + \frac{aq - pc}{ap^*} \\
&= \frac{p^*c + aq - pc}{ap^*} \\
&= \frac{p^*c + p^*a - \frac{p^2 ca}{a(N-p)} - pc}{ap^*} \\
&= \frac{(N-p)p^*c + p^*a(N-p) - p^2c - pc(N-p)}{(N-p)ap^*} \\
&= \frac{pNc + pNa - p^2c + p^2c - pcN}{pNa} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Notemos además que

$$\left(q-\frac{p}{r}\right)s = p^*$$

pues,

$$\begin{aligned}\left(q-\frac{p}{r}\right)s &= qs - \frac{ps}{r}\\ &= \frac{qap^*}{aq-pc} - \frac{pap^*}{aq-pc}\,\frac{c}{a}\\ &= \frac{p^*(qa-pc)}{aq-pc}\\ &= p^*.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} |x|^b|u_n|^q dx &= \int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} |x|^{b-c}|x|^c|u_n|^q dx\\ &= \int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} \left(\tfrac{1}{|x|}\right)^{c-b} |x|^c|u_n|^q dx\\ &\leq \int_{|x|\geq\frac{1}{\varepsilon}} (\varepsilon)^{c-b}|x|^c|u_n|^q dx\\ &\leq \varepsilon^{c-b}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c|u_n|^q dx\\ &= \varepsilon^{c-b}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c|u_n|^{\frac{p}{r}}|u_n|^{q-\frac{p}{r}} dx\\ &\leq \varepsilon^{c-b}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^c|u_n|^{\frac{p}{r}}\right)^r dx\right]^{\frac{1}{r}}\cdot\\ &\qquad\cdot\left[\int_{\mathbb{R}^N}\left(|u_n|^{q-\frac{p}{r}}\right)^s dx\right]^{\frac{1}{s}} \qquad \text{por desig. de Hölder}\\ &= \varepsilon^{c-b}\left[\int_{\mathbb{R}^N}|x|^a|u_n|^p dx\right]^{\frac{1}{r}}\left[\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p^*} dx\right]^{\frac{1}{s}}\\ &\leq C\,\varepsilon^{c-b} \qquad \text{por 1. y 2. que siguen a continuación.}\end{aligned}$$

Como (u_n) está acotada en $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, tenemos que

$$\|u_n\|_{W_a^{1,p}} \leq C_1$$

con C_1 independiente de n. En particular, tenemos que

1. $\left[\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |u_n|^p dx\right]^{\frac{1}{r}} \leq C_1$

2. $\left[\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx\right]^{\frac{1}{s}} \leq C_2^{p^*/s}$ con C_2 independiente de n pues, por la desigualdad de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (ver Teorema 1.3.10),

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_3 \, \|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_3 \|u_n\|_{W_a^{1,p}} \leq C_3 C_1 = C_2.$$

Ahora, para todo $t < 1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo n,

$$\int_{|x| \leq \frac{1}{\varepsilon}} |x|^b |u_n|^q dx \geq t.$$

Por la Observación (3.4.1) y el Teorema (1.1.20), como $u_n \rightharpoonup u$ en $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$u_n \mid_{\{|x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}} \rightharpoonup u \mid_{\{|x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}} \quad \text{en } W^{1,p}(\{|x| \leq \tfrac{1}{\varepsilon}\}).$$

Y por el Teorema de Rellich-Kondrachow (Teorema 1.3.12), ya que $q < p^*$, se sigue que

$$u_n \to u \quad \text{en } L^q(\{|x| \leq \tfrac{1}{\varepsilon}\}).$$

De esta manera, considerando

$$\begin{aligned} f(x,u) &= u^q, \\ c &\geq 1, \\ r &= 1 \quad \text{y}, \end{aligned}$$

$$A : L^q(\{|x| \leq \tfrac{1}{\varepsilon}\}) \longrightarrow L^1(\{|x| \leq \tfrac{1}{\varepsilon}\}), \quad A(u) = u^q,$$

por el Teorema 1.2.21,

$$|u_n|^q \to |u|^q \,\text{en}\, L^1(\{|x| \leq \tfrac{1}{\varepsilon}\}).$$

Así que

$$\left| \int_{\{|x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}} |u_n|^q |x|^b \, dx - \int_{\{|x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}} |u|^q |x|^b \, dx \right| \leq \int_{\{|x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}} |x|^b \left||u_n|^q - |u|^q\right| \, dx \quad \text{y}$$

$$\int_{\{|x|\leq\frac{1}{\varepsilon}\}} |x|^b \,||u_n|^q - |u|^q| \;dx \;\to\; 0 \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty.$$

Por lo tanto

$$\int_{\{|x|\leq\frac{1}{\varepsilon}\}} |u_n|^q |x|^b dx \to \int_{\{|x|\leq\frac{1}{\varepsilon}\}} |u|^q |x|^b dx.$$

Luego tomando límite,

$$1 \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^b dx \geq \int_{\{|x|\leq\frac{1}{\varepsilon}\}} |u|^q |x|^b dx \geq t.$$

Finalmente $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^b dx = 1$ y M_p se alcanza en u. □

Observación 3.4.3 *Sea* $u \in D(B(0,1))$, $u \not\equiv 0$, $u \geq 0$, *y su traslación* $u_\lambda(x) := u(x - (\lambda, 0, ..., 0))$ *con* $\lambda > 0$. *Entonces,*

1. $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^p \,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \,dx$,
2. $\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a \,|u_\lambda|^p \,dx \leq (\lambda+1)^a \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \,dx$,
3. $\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_\lambda|^q \,dx \geq (\lambda-1)^b \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \,dx$,
4. $u_\lambda \in W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)$.

Demostración:

1. Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\nabla u_\lambda(x_1, x_2, ..., x_N) &= \nabla u(x_1 - \lambda, x_2, ..., x_N)\, Id_{N\times N} \\ &= \nabla u(x_1 - \lambda, x_2, ..., x_N).\end{aligned}$$

Luego, por sustitución

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^p \,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x_1 - \lambda, x_2, ..., x_N)|^p \,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t_1, x_2, ..., x_N)|^p \,dt_1 \,dx_2 \ldots dx_N \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \,dx.\end{aligned}$$

2. Usando la sustitución $y = x - \lambda\, e_1$ y que $|y| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |u_\lambda|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |u(x-\lambda e_1)|^p \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |y+\lambda e_1|^a |u(y)|^p \, dy \\
&= \int_{B(0,1)} |y+\lambda e_1|^a |u(y)|^p \, dy \\
&\leq \int_{B(0,1)} (|y| + |\lambda||e_1|)^a |u(y)|^p \, dy \\
&\leq \int_{B(0,1)} (1+\lambda)^a |u(y)|^p \, dy \\
&= (1+\lambda)^a \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p \, dy.
\end{aligned}$$

3. Usando la sustitución $y = x - \lambda\, e_1$ y que $|y| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_\lambda|^q \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u(x-\lambda e_1)|^q \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |y+\lambda e_1|^b |u(y)|^q \, dy \\
&= \int_{B(0,1)} |y+\lambda e_1|^b |u(y)|^q \, dy \\
&= \int_{B(0,1)} |\lambda e_1 - (-y)|^b |u(y)|^q \, dy \\
&\geq \int_{B(0,1)} (|\lambda||e_1| - |-y|)^b |u(y)|^q \, dy \\
&\geq \int_{B(0,1)} (\lambda-1)^b |u(y)|^q \, dy \\
&= (\lambda-1)^b \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^q \, dy.
\end{aligned}$$

4. $u \in D(B(0,1)) \subset \overline{D(B(0,1))}^{\|.\|_{W^{1,p}}} = W^{1,p}(B(0,1))$, y usando 1 y 2,

obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^p + |x|^a\,|u_\lambda|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^a\,|u_\lambda|^p\,dx\\
&\leq \int_{B(0,1)} |\nabla u|^p\,dx + (\lambda+1)^a \int_{B(0,1)} |u|^p\,dx\\
&\leq \|u\|^p_{W^{1,p}(B(0,1))} + (\lambda+1)^a \|u\|^p_{W^{1,p}(B(0,1))}\\
&= C_{\lambda,a}\|u\|^p_{W^{1,p}(B(0,1))}\\
&< \infty,
\end{aligned}$$

por lo tanto $u_\lambda \in W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)$.

$\square$

Observación 3.4.4 *Sean $u \in W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)$ y $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, C^∞ tal que*

$$sop(\varphi) \subseteq [-1,1],$$

$$\varphi \equiv 1 \quad en \quad \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \quad y$$

$$0 \leq \varphi \leq 1.$$

Sea $\varphi_R : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_R(x) = \varphi\left(\frac{|x|}{R}\right)$,

$$\varphi_R(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \notin B(0,R)\\ 1 & si \quad x \in B\left(0, \frac{R}{2}\right)\end{cases}$$

Sea $u_R = u\,\varphi_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} u$. Luego

$$u_R \to u \quad en \quad W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N) \quad y$$

$$u_R \to u \quad en \quad L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b\,dx).$$

Demostración:

1. Veamos que $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_R - u)|^p + |x|^a |u_R - u|^p\,dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

a)
$$
\begin{aligned}
&|\nabla(u_R - u)|^p \\
&= |\nabla(u\,\varphi_R - u)|^p \\
&= |\nabla u \cdot \underbrace{\varphi_R}_{\varphi\left(\frac{|x|}{R}\right)} + \quad u \cdot \underbrace{\nabla\varphi_R}_{\varphi'\left(\frac{|x|}{R}\right)\underbrace{\nabla\left(\frac{|x|}{R}\right)}_{\frac{1}{R}\frac{x}{|x|}}} - \nabla u|^p \\
&= \left|\nabla u \cdot \varphi\left(\frac{|x|}{R}\right) + u \cdot \varphi'\left(\frac{|x|}{R}\right) \cdot \frac{1}{R}\frac{x}{|x|} - \nabla u\right|^p \\
&\leq \left(|\nabla u| \underbrace{\left|\varphi\left(\frac{|x|}{R}\right) - 1\right|}_{\leq 1} + |u| \cdot \underbrace{\left|\varphi'\left(\frac{|x|}{R}\right)\right|}_{\leq C\,\text{pues}\,\varphi\in D[-1,1]} \cdot \frac{1}{R}\right)^p \\
&\leq \left(|\nabla u| + |u|\,\frac{C}{R}\right)^p \\
&\leq \left[|\nabla u| + |u| + \frac{C}{R}\,(|\nabla u| + |u|)\right]^p \\
&= \left(1 + \frac{C}{R}\right)^p\,[|\nabla u| + |u|]^p \\
&\leq \left(1 + \frac{C}{R}\right)^p\,2^{p-1}\,[|\nabla u|^p + |u|^p] \\
&= g_1.
\end{aligned}
$$

Notemos que g_1 es integrable, ya que, como $u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,

i) $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,dx < \infty$, y

ii) $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\,dx < \infty$.

b)
$$
\begin{aligned}
&|x|^a\,|u_R - u|^p \\
&= |x|^a\,|u\,\varphi_R(x) - u|^p \\
&= |x|^a\,|u\,(\,\varphi_R(x) - 1)\,|^p \\
&= |x|^a\,|u|^p \underbrace{\left|\varphi\left(\frac{|x|}{R}\right) - 1\right|^p}_{\leq 1} \\
&\leq |x|^a\,|u|^p \\
&= g_2.
\end{aligned}
$$

Notemos que g_2 es integrable, pues $u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Consideramos $g = g_1 + g_2$, g es integrable, entonces por el Teorema de Convergencia Mayorada,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_R - u)|^p + |x|^a\, |u_R - u|^p\, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{R\to+\infty} |\nabla(u_R - u)|^p + |x|^a\, |u_R - u|^p\, dx = 0,$$

ya que $u_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} u$. Luego,

$$u_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{en} \quad W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

2. Como $u_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} u$ en $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y la inmersión $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N,\, |x|^b\, dx)$ es continua, vale que

$$u_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{en} \quad L^q(\mathbb{R}^N,\, |x|^b\, dx).$$

$\square$

Observación 3.4.5 *Sean u_R y u como en la observación anterior. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_R|^p + |x|^a\, |u_R|^p\, dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a\, |u|^p\, dx, \quad y$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\, |u_R|^q\, dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\, |u|^q\, dx.$$

Demostración:

1. Como $u_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} u$ en $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$\left| \|u_R\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)} - \|u\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \right| \leq \|u_R - u\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

entonces

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_R|^p + |x|^a\, |u_R|^p\, dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a\, |u|^p\, dx.$$

2. Como $u_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} u$ en $L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b\, dx)$,

$$\left| \|u_R\|_{L^q_b(\mathbb{R}^N)} - \|u\|_{L^q_b(\mathbb{R}^N)} \right| \leq \|u_R - u\|_{L^q_b(\mathbb{R}^N)} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\, |u_R|^q\, dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\, |u|^q\, dx.$$

□

Observación 3.4.6 *Sean u y u_R como en la observación (3.4.4) Entonces $u_R \in W_0^{1,p}(B(0,R))$.*

Demostración: Como $u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $D(\mathbb{R}^N)$ es denso en $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (ver Obs. (B.0.7)), existe $(u_n) \in D(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, lo que implica que

$$\|u_n - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad \text{y} \quad \|\nabla(u_n - u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

Queremos ver que

$$\underbrace{u_n\, \varphi_R}_{\in D(B(0,R))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u\, \varphi_R = u_R \quad \text{en} \quad W^{1,p}(B(0,R)). \tag{3.3}$$

Notemos que

1.

$$\begin{aligned} |\nabla(u_n\, \varphi_R - u\, \varphi_R)|^p &= |\nabla[(u_n - u)\, \varphi_R]|^p \\ &= |\nabla(u_n - u)\, \varphi_R + (u_n - u)\, \nabla\varphi_R|^p \\ &= \left(|\nabla(u_n - u)|\, \underbrace{\left|\varphi\left(\frac{|x|}{R}\right)\right|}_{\leq 1} + |u_n - u|\, \underbrace{|\nabla\varphi_R|}_{\leq \frac{C}{R} \leq 1} \right)^p \end{aligned}$$

para R suficientemente grande,

$$\begin{aligned} &\leq (|\nabla(u_n - u)| + |u_n - u|)^p \\ &\leq 2^{p-1}\, (|\nabla(u_n - u)|^p + |u_n - u|^p)\,. \end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
|(u_n - u)\,\varphi_R|^p &= |u_n - u|^p \underbrace{|\varphi_R|^p}_{\leq 1} \\
&\leq |u_n - u|^p.
\end{aligned}
$$

Entonces, por 1 y 2,

$\|u_n\,\varphi_R - \underbrace{u\,\varphi_R}_{u_R}\|^p_{W^{1,p}(B(0,R))}$

$= \int_{B(0,R)} |\nabla(u_n\,\varphi_R - u\,\varphi_R)|^p + |u_n\,\varphi_R - u\,\varphi_R|^p\,dx$

$\leq \underbrace{2^{p-1} \displaystyle\int_{B(0,R)} |\nabla(u_n - u)|^p\,dx}_{A} + \underbrace{(2^{p-1}+1) \displaystyle\int_{B(0,R)} |u_n - u|^p\,dx}_{B}$

donde

$A \leq 2^{p-1}\,\|\nabla(u_n - u)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}$,

$B \leq (2^{p-1})\ \|u_n - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}$, y

$\|\nabla(u_n - u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$ y $\|u_n - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$, con lo cual resulta que

$$\|u_n\,\varphi_R - u\,\varphi_R\|_{W^{1,p}(B(0,R))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por lo tanto

$$\|u_R\|_{W^{1,p}(B(0,R))} \leq \underbrace{\|u_R - u_n\,\varphi_R\|_{W^{1,p}(B(0,R))}}_{\to 0} + \underbrace{\|u_n\,\varphi_R\|_{W^{1,p}(B(0,R))}}_{<\infty} < \infty,$$

pues $(u_n\,\varphi_R) \in D(B(0,R)) \subset W^{1,p}(B(0,R))$.

Como hemos demostrado (3.3), concluimos que $u_R \in W_0^{1,p}(B(0,R))$. $\square$

Teorema 3.4.7 *Si* $0 \leq a < N(p-1)$, $b \geq 0$, $N \geq 3$, $2 < p < q < p^*$, $aq < pb$ *y*

$$pb - \left(1 + \tfrac{q}{p}\right) a < (N-1)(q-p),$$

luego, para todo R *suficientemente grande, el problema (3.2) tiene una solución radial no trivial y otra no radial.*

Demostración:

1. *a*) Por el Teorema (3.3.3),
$$m_p > 0.$$
Pues
$$\begin{aligned} p &> 2 \\ q &> \frac{2q}{p} \\ q - \frac{q}{p} + 1 &> \frac{q}{p} + 1 \\ \frac{pq - q + p}{p} &> 1 + \frac{q}{p} \\ \frac{p^2 + pq - p^2 - q + p}{p} &> 1 + \frac{q}{p} \\ p + \tfrac{(p-1)(q-p)}{p} &> 1 + \frac{q}{p} \\ pb - a\left(p + \tfrac{(p-1)(q-p)}{p}\right) &< pb - a\left(1 + \frac{q}{p}\right), \end{aligned}$$
entonces por hipótesis
$$pb - a\left(p + \tfrac{(p-1)(q-p)}{p}\right) < pb - a\left(1 + \tfrac{q}{p}\right) < (N-1)(q-p).$$
Y claramente vale que $p < q < p^* < p^* + \frac{pb}{N-p}$.

   b) Definimos
$$\tilde{M}_p = \tilde{M}(a,b,p,q) := \inf_{\substack{u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a |u|^p \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}}.$$
Veamos que
$$M_p = \tilde{M}_p = 0.$$
Es claro que $M_p \geq \tilde{M}_p$. Ahora bien, sea $u \not\equiv 0, u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, entonces $u \in L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b \, dx)$ por la observación (3.3.1). Consideramos
$$\tilde{u} = \frac{u}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}} = \frac{u}{\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b \, dx)}},$$

$\tilde{u} \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |\tilde{u}|^q \, dx = 1$. Luego

$$\begin{aligned} M_p &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{u}|^p + |x|^a |\tilde{u}|^p \, dx \\ &= \frac{1}{\|u\|^p_{L^q(\mathbb{R}^N, |x|^b \, dx)}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a |u|^p \, dx \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a |u|^p \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}}, \end{aligned}$$

es decir que $M_p \leq \tilde{M}_p$.
Por otro lado, tomando $u \in D(B(0,1))$ y su traslación $u_\lambda(x) := u(x - \lambda \, e_1)$ y usando la observación (3.4.3), resulta que

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a |u|^p \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}} &\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^p + |x|^a |u_\lambda|^p \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_\lambda|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}} \\ &\leq \frac{(\lambda+1)^a \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |u|^p \, dx}{(\lambda-1)^{b\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}}, \end{aligned}$$

lo cual tiende a 0 cuando λ tiende a $+\infty$ siempre que $aq < pb$, implicando que $M(a,b,p,q) = 0$.

2. Definimos:

   a) $m_p(R) = m(a,b,p,q,R) := \inf\limits_{\substack{u \in W^{1,p}_{0,rad}(B(0,R)) \\ \int_{B(0,R)} |x|^b |u|^q \, dx = 1}} \int_{B(0,1)} |\nabla u|^p + |x|^a |u|^p \, dx.$

   b) $M_p(R) = M(a,b,p,q,R) := \inf\limits_{\substack{u \in W^{1,p}_{0}(B(0,R)) \\ \int_{B(0,R)} |x|^b |u|^q \, dx = 1}} \int_{B(0,1)} |\nabla u|^p + |x|^a |u|^p \, dx.$

   Veamos que $m_p(R)$ y $M_p(R)$ se alcanzan para todo $R > 0$. Verifiquemos que se cumplen las hipótesis del Teorema (1.1.26) con

$$E = W_0^{1,p}(B(0,R))$$

   que es espacio de Banach, en particular reflexivo, pues es uniformemente convexo por el Teorema (1.3.15),

$$C = \left\{ u \in E : \int_{B(0,R)} |x|^b |u|^q \, dx = 1 \right\},$$

y

$$J : C \subset E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad J(u) = \int_{B(0,R)} |x|^a \, |u|^p + |\nabla u|^p \, dx.$$

- Veamos que C es débilmente secuencialmente cerrado:

  Si $u_n \rightharpoonup u_0$ en $W_0^{1,p}(B(0,R))$, entonces $u_n \to u_0$ en $L^q(B(0,R))$ por el Teorema de Rellich-Kondrachow, pues $p < q < p^*$.
  Usamos el Teorema (1.2.21) (con $r = 1$ y $p = q$), $f(x, u_0) = |x|^b |u_0|^q$, verifica

  $$|f(x, u_0)| \leq K \, (1 + |u_0|^q)\,,$$

  pues

  $$\begin{aligned} |f(x, u_0)| &= |x|^b |u_0|^q \\ &\leq R^b |u_0|^q \quad \text{pues} \quad x \in B(0,R), \\ &\leq R^b (1 + |u_0|^q) \\ &= K\,(1 + |u_0|^q). \end{aligned}$$

  Entonces,

  $$\int_{B(0,R)} |u_n|^q |x|^b \, dx \to \int_{B(0,R)} |u_0|^q |x|^b \, dx,$$

  y como $\int_{B(0,R)} |u_n|^q |x|^b \, dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

  $$\int_{B(0,R)} |u_0|^q |x|^b \, dx = 1,$$

  es decir que $u_0 \in C$. Luego C es débilmente secuencialmente cerrado.

- Veamos que J es secuencialmente débilmente semicontinua inferiormente en $u_0 \in C$:

  Sea $(u_n) \subset C$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$. Por la desigualdad de Poincaré, la norma $\|u\|' = \left(\int_{B(0,R)} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$ es equivalente a la usual en $W_0^{1,p}(B(0,R))$. Entonces, por el Teorema (1.1.27),

  $$\|u_0\|' \leq \liminf \|u_n\|',$$

es decir que

$$\left(\int_{B(0,R)} |\nabla u_0|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \liminf \left(\int_{B(0,R)} |\nabla u_n|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por otro lado, como $u_n \rightharpoonup u_0$ en $W_0^{1,p}(B(0,R))$, por el Teorema de Rellich-Kondrachow (1.3.12), $u_n \to u_0$ en $L^p(B(0,R))$. Luego usando el Teorema (1.2.21) (con $r=1$), análogamente como en el primer punto,

$$\int_{B(0,R)} |u_n|^p |x|^a \, dx \to \int_{B(0,R)} |u_0|^p |x|^a \, dx.$$

Con lo cual, $J(u_0) \leq \liminf J(u_n)$, es decir J es secuencialmente débilmente semicontinua inferiormente en $u_0 \in C$.

- Veamos que J es coerciva:

  $J(u) \geq \int_{B(0,R)} |\nabla u|^p \, dx$. Por la desigualdad de Poincaré,

  $$\int_{B(0,R)} |\nabla u|^p \, dx \geq K \int_{B(0,R)} |u|^p \, dx \quad \forall u \in W_0^{1,p}(B(0,R)).$$

  Con lo cual,

  $$\begin{aligned} \|u\|_{W_0^{1,p}(B(0,R))} &\leq \tilde{K}\, J(u) \\ &= \tilde{K} \int_{B(0,R)} |\nabla u|^p + |x|^a |u|^p \, dx. \end{aligned}$$

  Luego, si $\|u\|_{W_0^{1,p}(B(0,R))} \to +\infty$, entonces $J(u) \to +\infty$, es decir que J es coerciva.

Finalmente, se cumple que J es secuencialmente débilmente semicontinua inferiormente y la condición 2 del Teorema (1.1.26). De ahí resulta que $M_p(R)$ se alcanza para todo $R > 0$.

Análogamente se prueba que $m_p(R)$ se alcanza también para todo $R > 0$. Observemos que en este caso, (u_n) son radiales para todo $n \in \mathbb{N}$ y si $u_n \rightharpoonup u_0$, implica que u_0 también será radial, pues las funciones radiales son un subespacio cerrado.

3. Veamos que

   a) $\lim\limits_{R\to+\infty} m_p(R) = m_p > 0.$

   b) $\lim\limits_{R\to+\infty} M_p(R) = M_p = 0.$

   Probemos $b)$:

   - Sea $u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, podemos conseguir $\tilde{u} \in W_0^{1,p}(B(0,R))$ (con R suficientemente grande) que la aproxime.
     Consideramos φ, φ_R y u_R como en la observación (3.4.4). Luego, por las observaciones (3.4.4), (3.4.5) y (3.4.6), resulta que

$$\begin{aligned} M_p(R) &\le \frac{\int_{B(0,R)} |\nabla u_R|^p + |x|^a |u_R|^p \, dx}{\left(\int_{B(0,R)} |x|^b |u_R|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_R|^p + |x|^a |u_R|^p \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u_R|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}} \\ &\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a |u|^p \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}}. \end{aligned}$$

     Por definición de ínfimo podemos conseguir $u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a |u|^p \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}} < M_p + \varepsilon.$$

     Entonces

$$M_p(R) < M_p + \varepsilon.$$

   - Veamos que $W_0^{1,p}(B(0,R)) \subset W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$:

     Sea $u \in W_0^{1,p}(B(0,R)) = \overline{D(B(0,R))}^{\|.\|_{W^{1,p}}}$, entonces existe $(u_n) \in D(B(0,R)) \subset D(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|u_n - u\|_{W^{1,p}(B(0,R))} \to 0$. Veamos que $\|u_n - u\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \to 0$,

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|^p_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u)|^p + |x|^a \, |u_n - u|^p \, dx \\
&= \int_{B(0,R)} |\nabla(u_n - u)|^p + |x|^a \, |u_n - u|^p \, dx \\
&\le \int_{B(0,R)} |\nabla(u_n - u)|^p \, dx + R^a \int_{B(0,R)} |u_n - u|^p \, dx \\
&\le \|u_n - u\|^p_{W^{1,p}(B(0,R))} + R^a \, \|u_n - u\|^p_{W^{1,p}(B(0,R))} \\
&= (1 + R^a) \, \|u_n - u\|^p_{W^{1,p}(B(0,R))} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Como $(u_n) \in D(\mathbb{R}^N)$, $D(\mathbb{R}^N)$ es denso en $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $\|u_n - u\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \to 0$, entonces $u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Luego,

$$M_p(R) \ge M_p.$$

- Por los puntos anteriores obtenemos

$$M_p \le M_p(R) < M_p + \varepsilon,$$

con lo cual

$$|M_p(R) - M_p| < \varepsilon \quad \text{si} \quad R \ge R_0(\varepsilon),$$

lo que impica que

$$\exists \lim_{R \to +\infty} M_p(R) = M_p = 0.$$

Análogamente se demuestra a).

4. Como en la sección anterior, ahora con $E = W_0^{1,p}(B(0,R))$, usando los Teoremas de Multiplicadores de Lagrange (1.4.1), el Principio de Criticalidad Simétrica (1.5.7), y agregando además el Principio Fuerte del Máximo (1.6.3) con

$d = |x|^a$, $\Omega = B(0,R)$, $f(x,u) = |x|^b \, |u|^{q-1}$, $g \equiv 0$, $\beta = q - 1$, y $c = R^b$,

obtenemos para R suficientemente grande una solución radial positiva del problema (3.2), que es $v_0 = \tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} \, u_0$, con u_0 función donde se alcanza $m_p(R)$, $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda q}{p}$ y $\lambda = \frac{p}{q} m_p(R)$. Y por otro lado usando Multiplicadores de Lagrange (1.4.1) y el Principio Fuerte del Máximo (1.6.3), obtenemos una solución no radial positiva del problema (3.2), que es $w_0 = \tilde{\lambda}^{\frac{1}{q-p}} \bar{u}_0$, con $\bar{u}_0$ función donde se alcanza $M_p(R)$, $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda q}{p}$ y $\lambda = \frac{p}{q} M_p(R)$.

5. Finalmente observamos que como consecuencia de lo demostrado anteriormente,
$$\lim_{R\to+\infty} M_p(R) = M_p = 0$$
pero
$$\lim_{R\to+\infty} m_p(R) = m_p > 0$$
entonces para R suficientemente grande $m_p(R) > M_p(R)$. En consecuencia, las soluciones obtenidas como minimizantes de $m_p(R)$ (radial) y de $M_p(R)$ (no radial) serán distintas.

$\square$

3.5. Condiciones Necesarias

De la identidad de Derrick-Pohozaev podemos obtener algunas condiciones necesarias para la existencia de soluciones del problema (3.1).

Teorema 3.5.1 *Sean* $0 \leq a < N(p-1)$, $b \geq 0$, $1 < p < N$, *si*
$$q \geq \tilde{q} := \tfrac{pN}{N-p} + \tfrac{pb}{N-p} \tag{3.4}$$
o si
$$q \leq p + p\,\tfrac{b-a}{N+a} \tag{3.5}$$
luego no hay soluciones no triviales para el problema (3.1).

Demostración: Por el absurdo, asumimos que $u \not\equiv 0$, $u \in D(\mathbb{R}^N)$ es una solución del problema (3.1). Entonces u es punto crítico del funcional
$$F(u) = \tfrac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + |x|^a |u|^p)\, dx - \tfrac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b |u|^q\, dx.$$
Sea
$$u_t(x) = u\left(\tfrac{x}{t}\right).$$

Como u es punto crítico de F,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=1} F(u_t) &= F'(u_1).\left.\frac{d}{dx}\right|_{t=1}(u_t)\\ &= F'(u).u'(x).\left(\tfrac{-1}{t^2}\right)\\ &= 0 \qquad \text{pues} \qquad F'(u)=0.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$F(u_t) = \tfrac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_t|^p + |x|^a|u_t|^p\,dx - \tfrac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^b|u_t|^q\,dx.$$

Ahora haciendo el cambio de variable

$$y = \tfrac{x}{t}, \qquad dy = \tfrac{1}{t^N}dx,$$

vale que $t\,y = x$, $t^N\,dy = dx$, y

$$\nabla(u_t) = \nabla u\left(\tfrac{x}{t}\right).\tfrac{1}{t}.$$

Con lo cual resulta que,

$$F(u_t) = \tfrac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u(y)|^p.\tfrac{1}{t^p} + t^a|y|^a|u(y)|^p\right]\, t^N\,dy - \tfrac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} t^b|y|^b|u(y)|^q\,t^N\,dy.$$

Derivamos con respecto a t,

$$\begin{aligned}0 &= \tfrac{d}{dt}F(u_t)\\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^N}\frac{N-p}{p}|\nabla u|^p\,t^{N-p-1} + \frac{N+a}{p}|y|^a|u|^p\,t^{N+a-1}\,dy - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{N+b}{q}|y|^b|u|^q\,t^{N+b-1}\,dy.\end{aligned}$$

Especializamos en $t=1$,

$$0 = \tfrac{N-p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,dx + \tfrac{N+a}{p}\int_{R^N}|x|^a|u|^p\,dx - \tfrac{N+b}{q}\int_{R^N}|x|^b|u|^q\,dx,$$

luego,

$$\tfrac{N-p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,dx + \left(\tfrac{N+a}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p|x|^a\,dx - \left(\tfrac{N+b}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}u^q|x|^b\,dx = 0, \quad (3.6)$$

es decir que u satisface la identidad de Derrick-Pohozaev.

Por otro lado, multiplicando a ambos miembros por u e integrando sobre $\mathbb{R}^N$ en la ecuación del problema (3.1), vemos que

$$\begin{aligned} -\Delta_p u + |x|^a\,|u|^{p-1} &= |x|^b\,|u|^{q-1} \\ \int_{\mathbb{R}^N} -u\,.\,\Delta_p u + |x|^a\,|u|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\,|u|^q\,dx \\ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + |x|^a\,|u|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^b\,|u|^q\,dx \quad \text{por} \quad (1{,}3{,}1) - i). \end{aligned}$$

De ahí reemplazando en (3.6), obtenemos

$$\left(\tfrac{N-p}{p} - \tfrac{N+b}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,dx \;+\; \left(\tfrac{N+a}{p} - \tfrac{N+b}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |x|^a\,dx = 0.$$

Ahora bien, sea $u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, como $D(\mathbb{R}^N)$ es denso en $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (ver Obs. (B.0.7)), existe $(u_n) \in D(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. y

$$\left(\tfrac{N-p}{p} - \tfrac{N+b}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p\,dx \;+\; \left(\tfrac{N+a}{p} - \tfrac{N+b}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p |x|^a\,dx = 0.$$

Luego, igual que en la demostración de por ejemplo el Lema (3.2.4), resulta que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p\,dx &\to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,dx, \quad \text{y} \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p |x|^a\,dx &\to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |x|^a\,dx. \end{aligned}$$

Con lo cual, si $u \not\equiv 0$, $u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ es solución del problema (3.1), vale que

$$\left(\tfrac{N-p}{p} - \tfrac{N+b}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,dx \;+\; \left(\tfrac{N+a}{p} - \tfrac{N+b}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |x|^a\,dx = 0.$$

Como $u \not\equiv 0$, $\left(\tfrac{N-p}{p} - \tfrac{N+b}{q}\right)$ y $\left(\tfrac{N+a}{p} - \tfrac{N+b}{q}\right)$ no pueden tener el mismo signo. Notemos además que

$$\tfrac{N-p}{p} - \tfrac{N+b}{q} > 0 \quad \text{y} \quad \tfrac{N+a}{p} - \tfrac{N+b}{q} < 0$$

no puede suceder, ya que es equivalente a

$$q > \tfrac{pN}{N-p} + \tfrac{pb}{N-p} \quad \text{y} \quad q < p + p\,\tfrac{b-a}{N+a},$$

que es absurdo, pues

$$p < \tfrac{pN}{N-p} \quad \text{y} \quad p\,\tfrac{b-a}{N+a} < \tfrac{pb}{N-p}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\tfrac{N-p}{p} - \tfrac{N+b}{q} < 0 \quad \text{y} \quad \tfrac{N+a}{p} - \tfrac{N+b}{q} > 0.$$

Esto es equivalente a

$$q < \tfrac{pN}{N-p} + \tfrac{pb}{N-p} \quad \text{y} \quad q > p + p\,\tfrac{b-a}{N+a},$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Apéndice A

Sobre el Espacio de Sobolev Homogéneo $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

En este apéndice, demostraremos la densidad de las funciones suaves con soporte compacto en el espacio de Sobolev homogéneo $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, introducido en la sección 3.2.

Observación A.0.1 *$D(\mathbb{R}^N)$ es denso en $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 < p < \infty$.*

Demostración:

Etapa 1: Sea $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, veamos que existe una sucesión (u_n) de funciones en $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con soporte compacto, tal que

$$\|u - u_n\|_{D^{1,p}} \to 0$$

Esto está basado sobre un método de truncamiento estándar: fijamos una función η en $C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \eta(x) \leq 1, \eta = 1$ en $(-\infty, 1]$ y $\eta(x) = 0$ si $x > 2$. Consideremos las funciones

$$\eta_n(x) = \eta\left(\tfrac{|x|}{n}\right).$$

Deducimos que $\eta_n \equiv 1$ en $B(0,n)$, $0 \leq \eta_n \leq 1$ y η_n está soportada en $B(0,2n)$. Además, como

$$\nabla \eta_n(x) = \nabla\left(\eta\left(\tfrac{|x|}{n}\right)\right) = \eta'\left(\tfrac{|x|}{n}\right)\tfrac{1}{n}\tfrac{x}{|x|},$$

vale que

$$|\nabla \eta_n(x)| \leq \tfrac{C}{n}\,\mathbf{1}_{A_n}(x) \tag{A.1}$$

donde

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^N : n \leq |x| \leq 2n\},$$

y C es independiente de n (aquí $\mathbf{1}_{A_n}$ denota la función característica del conjunto A_n). Establecemos $u_n = u\eta_n$. Luego $u_n \to u$ puntualmente cuando $n \to +\infty$ ya que $\eta_n \to 1$, y

$$|u_n(x)| \leq |u(x)| \quad \text{y} \quad u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

Por lo tanto $u_n \to u$ en $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ por Teorema de Convergencia Mayorada.

Ahora queremos ver que $\nabla(u_n) \to \nabla u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Entonces, sea $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n \, \varphi_{x_j} \, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \left(\tfrac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \eta_n + u \cdot \tfrac{\partial \eta_n}{\partial x_j} \right) \varphi \, dx,$$

donde $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ es la derivada débil de u respecto de x_j. Es decir, la derivada débil de u_n respecto de x_j es

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \eta_n + u \cdot \frac{\partial \eta_n}{\partial x_j}.$$

Deducimos que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right\|_{L^p} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j}(1 - \eta_n) \right\|_{L^p} + \left\| u \cdot \frac{\partial \eta_n}{\partial x_j} \right\|_{L^p}.$$

El primer término va a cero cuando $n \to +\infty$, por Teorema de Convergencia Mayorada (como antes) ya que $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y $\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(1 - \eta_n) \right| \leq \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|$.

Consideramos el segundo término:

$$\left\| u \cdot \frac{\partial \eta_n}{\partial x_j} \right\|_{L^p} \leq \frac{C}{n} \left(\int_{A_n} |u|^p \, dx \right)^{1/p}$$

por (A.1), pues $\left| \frac{\partial \eta_n}{\partial x_j}(x) \right| \leq \left| \frac{\nabla \eta_n}{\partial x_j}(x) \right| \leq \frac{C}{n} \mathbf{1}_{A_n}(x)$. Para estimar esta igualdad, usamos la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_{A_n} |u|^p \, dx &= \int_{A_n} |u|^p, 1 \, dx \\
&\leq \left(\int_{A_n} |u|^{p^*} \, dx \right)^{1/r} |A_n|^{1/r'} \\
&\leq \left(\int_{|x|>n} |u|^{p^*} \, dx \right)^{1/r} (Cn^N)^{1/r'}
\end{aligned}$$

donde $r = \frac{p^*}{p} = \frac{N}{N-p} > 1$. De ahí

$$r' = \frac{r}{r-1} = \frac{\frac{N}{N-p}}{\frac{p}{N-p}} = \frac{N}{p}$$

y obtenemos

$$\left(\int_{A_n} |u|^p \, dx\right)^{1/p} \leq C^{\frac{1}{N}} n \left(\int_{|x|>n} |u|^{p^*} \, dx\right)^{1/p^*}$$

De ahí

$$\left\| u \cdot \frac{\partial \eta_n}{\partial x_j} \right\|_p \leq C^{1+\frac{1}{N}} \left(\int_{|x|>n} |u|^{p^*} \, dx\right)^{1/p^*}$$

pero como $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, la integral de la parte derecha va a 0 cuando $n \to +\infty$.

Notemos que $(u_n) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, pues $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $u_n \longrightarrow u$ en $D^{1,p}$ y además (u_n) es de soporte compacto ya que (η_n) también lo es.

Etapa 2: Sea $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, queremos fabricar una sucesión $(v_n) \in D(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_n \longrightarrow u$ en $D^{1,p}$.

Tomamos una sucesión regularizante $(\rho_n) \in D(\mathbb{R}^N)$ como en la definición 1.2.15, y consideremos

$$v_n = \rho_n * u_n \quad \text{con} \quad u_n = \eta_n \, u \quad \text{como en Etapa 1.}$$

Por la Proposición 1.2.14, $(v_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Y como (ρ_n) y (u_n) tienen soporte compacto, entonces por la Proposición 1.2.12, (v_n) tiene soporte compacto. Es decir $(v_n) \in D(\mathbb{R}^N)$.

Falta ver que $v_n \to u$ en $D^{1,p}$

1. Veamos que $\|v_n - u\|_{L^{p^*}} \to 0$.

$$\begin{aligned}\|\rho_n * (\eta_n \, u) - u\|_{L^{P^*}} &= \|\rho_n * (\eta_n \, u) - \rho_n * u + \rho_n * u - u\|_{L^{p^*}} \\ &\leq \|\rho_n * (\eta_n \, u) - \rho_n * u\|_{L^{p^*}} + \|\rho_n * u - u\|_{L^{p^*}}.\end{aligned}$$

   a) Veamos el primer sumando,

$$\begin{aligned}\|\rho_n * (\eta_n\, u) - \rho_n * u\|_{L^{p^*}} &= \|\rho_n * (\eta_n\, u - u)\|_{L^{p^*}}\\ &\leq \|\rho_n\|_{L^1}\|\eta_n\, u - u\|_{L^{p^*}},\end{aligned}$$

por el Teorema 1.2.11, ya que $\rho_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $(\eta_n\, u - u) \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Luego por lo visto en Etapa 1, $\|\eta_n\, u - u\|_{L^{p^*}} \longrightarrow 0$, con lo cual,

$$\|\rho_n * (\eta_n\, u) - \rho_n * u\|_{L^{p^*}} \longrightarrow 0.$$

b) En el segundo sumando, como $u \in L^{p^*}$, por el Teorema 1.2.18,

$$\|\rho_n * u - u\|_{L^{p^*}} \longrightarrow 0.$$

2. Veamos que $\|\nabla v_n - \nabla u\|_{L^p} \to 0$.

$$\begin{aligned}\|\nabla[\rho_n * (\eta_n\, u)] - \nabla u\|_{L^p} &= \|\nabla[\rho_n * (\eta_n\, u)] - \nabla(\rho_n * u) + \nabla(\rho_n * u) - \nabla u\|_{L^p}\\ &\leq \|\nabla[\rho_n * (\eta_n\, u)] - \nabla(\rho_n * u)\|_{L^p} + \|\nabla(\rho_n * u) - \nabla u\|_{L^p}\end{aligned}$$

a) Veamos el primer sumando,

$$\begin{aligned}\|\nabla[\rho_n * (\eta_n\, u) - \rho_n * u]\|_{L^p} &= \|\nabla[\rho_n * (\eta_n\, u - u)]\|_{L^p}\\ &= \|\nabla(\rho_n) * (\eta_n\, u - u)\|_{L^p}\\ &\leq \|\nabla(\rho_n)\|_{L^1}\|\eta_n\, u - u\|_{L^p}\\ &\leq \|\nabla(\rho_n)\|_{L^1}\|\eta_n\, u - u\|_{L^{p^*}},\end{aligned}$$

por la Proposición 1.2.14 y el Teorema 1.2.11, ya que $(\eta_n\, u - u) \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N)$ y $\nabla\rho_n \in D(\mathbb{R}^N) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$. Luego por lo visto en la Etapa 1, $\|\eta_n\, u - u\|_{L^{p^*}} \longrightarrow 0$, con lo cual,

$$\|\nabla[\rho_n * (\eta_n\, u) - \rho_n * u]\|_{L^p} \longrightarrow 0.$$

b) Veamos el segundo sumando,

$$\|\nabla(\rho_n * u) - \nabla u\|_{L^p} = \|\rho_n * \nabla u - \nabla u\|_{L^p} \quad \text{por Lema } 1{,}3{,}8,$$

y $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, con lo cual por Teorema 1.2.18

$$\|\rho_n * \nabla u - \nabla u\|_{L^p} \longrightarrow 0.$$

Luego, $D(\mathbb{R}^N)$ es denso en $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Observación A.0.2 *Si* $u \in D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *con* $1 < p < \infty$, *tomamos* η_n *como en la Etapa 1 de la demostración anterior, y consideramos*

$$\begin{aligned} u_n(x) &= u(x)\,\eta_n(x) \\ &= \tilde{u}(|x|)\,\eta(\tfrac{|x|}{n}) \\ &= \tilde{u_n}(|x|), \end{aligned}$$

es decir, (u_n) *es radial. Por otro lado, si tomamos* ρ_n *como en la Etapa 2 de la demostración anterior y a la vez le pedimos que sea radial, y consideramos*

$$\begin{aligned} v_n(x) &= (\rho_n * u_n)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)\,u_n(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\rho_n}(|x-y|)\,\tilde{u_n}(|y|)\,dy \\ &= (\tilde{\rho_n} * \tilde{u_n})(|x|) \\ &= \tilde{v_n}(|x|), \end{aligned}$$

con lo cual, (v_n) *es radial.*

Por lo tanto, dado $u \in D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, *existe* $(v_n) \in D_r(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $v_n \to u$ *en* $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, *es decir* $D_r(\mathbb{R}^N)$ *es denso en* $D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *con* $1 < p < \infty$.

Apéndice B

Sobre el Espacio de Sobolev con Pesos $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

En este apéndice, demostraremos algunas propiedades del espacio de Sobolev con pesos $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, introducido en la sección 3.2.

Comenzaremos introduciendo una clase de pesos que nos será de utilidad:

Definición B.0.1 *Decimos que w es un peso en la clase A_p de Muckenhoupt, o un peso A_p, si w es una función no negativa, localmente (Lebesgue) integrable en $\mathbb{R}^N$ (no identicamente cero) tal que*

$$sup\left(\fint_B w(x)\,dx\right)\left(\fint_B w(x)^{\frac{1}{1-p}}\,dx\right)^{p-1} = c_{w,p} < \infty, \tag{B.1}$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas B en $\mathbb{R}^N$. Aquí la integral con barra significa la integral promedio

$$\fint_E f\,d\mu = \tfrac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu,$$

donde μ es una medida y $0 < \mu(E) < \infty$.

Si w es un peso A_p, escribimos $w \in A_p$ y llamamos a la constante $c_{w,p}$ en (B.1) la constante A_p de w.

Observación B.0.2 *La función $w(x) = |x|^a$ es un peso A_p si y sólo si*

$$-N < a < N(p-1).$$

La importancia de la clase A_p radica en el siguiente teorema, que dice que dicha clase es exactamente la clase de pesos que hace que el operador maximal de Hardy-Littlewood

$$M\,f(x) \;=\; \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} |f|\,dy \tag{B.2}$$

sea continua en el espacio de Lebesgue con pesos $L^p(\mathbb{R}^N; w)$.

Teorema B.0.3 *(Muckenhoupt)*
Sea $1 < p < \infty$. Supongamos que w es una función no negativa localmente integrable en $\mathbb{R}^N$. Si $w \in A_p$, existe una constante $c > 0$ que depende sólo de $c_{p,w}$ tal que

$$\|M\,f\|_{L^p(\mathbb{R}^N;w)} \leq c\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N;w)} \tag{B.3}$$

cuando $f \in L^p(\mathbb{R}^N; w)$.

Inversamente, si se cumple (B.3) se tiene para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^N; w)$ con c independiente de f, entonces $w \in A_p$.

La importancia para nosotros de la función maximal (B.2) radica en que nos permitirá acotar a las sucesiones regularizantes, como establece el lema siguiente:

Lema B.0.4 *Supongamos que $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ es no negativa con $\int_{\mathbb{R}^N} \rho\,dx = 1$. Supongamos, además, que ρ es radial y decreciente, es decir, $\rho(x) = \rho(y) \geq \rho(z)$ si $|x| = |y| \leq |z|$. Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^N$. Luego*

$$|\rho * f| \leq M\,f$$

c.t.p. en $\mathbb{R}^N$, donde

$$\rho * f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x-y).f(y)\,dy.$$

Lema B.0.5 *Si $w \in A_p$, $f \in L^p(\mathbb{R}^N; w)$, y ρ_n una sucesión regularizante como en la definición 1.2.15, luego $\rho_n * f \longrightarrow f$ en $L^p(\mathbb{R}^N; w)$.*

Demostración: Ver Kipeläinen [13], Lema 1.5. $\square$

Observación B.0.6 *$D(\mathbb{R}^N)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^N; |x|^a\, dx)$ con $-N < a < N(p-1)$ y $1 < p < \infty$.*

Notación:

$$L^p_a(\mathbb{R}^N) := L^p(\mathbb{R}^N; |x|^a\, dx)$$

Observación B.0.7 *$D(\mathbb{R}^N)$ es denso en $W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)$ con $-N < a < N(p-1)$ y $1 < p < \infty$.*

Demostración:

Etapa 1: Sea $u \in W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)$, veamos que existe una sucesión (u_n) de funciones en $W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)$ con soporte compacto, tal que

$$\|u - u_n\|_{W^{1,p}_a} \to 0.$$

Esto está basado sobre un método de truncamiento estándar: fijamos una función η en $C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \le \eta(x) \le 1, \eta = 1$ en $(-\infty, 1]$ y $\eta(x) = 0$ si $x > 2$. Consideremos las funciones

$$\eta_n(x) = \eta\left(\tfrac{|x|}{n}\right).$$

Deducimos que $\eta_n \equiv 1$ en $B(0,n)$, $0 \le \eta_n \le 1$ y η_n está soportada en $B(0,2n)$. Además, como

$$\nabla \eta_n(x) = \nabla\left(\eta\left(\tfrac{|x|}{n}\right)\right) = \eta'\left(\tfrac{|x|}{n}\right)\tfrac{1}{n}\tfrac{x}{|x|},$$

vale que

$$|\nabla \eta_n(x)| \le \tfrac{C}{n}\,\mathbf{1}_{A_n}(x) \tag{B.4}$$

donde

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^N : n \le |x| \le 2n\},$$

y C es independiente de n (aquí $\mathbf{1}_{A_n}$ denota la función característica del conjunto A_n). Establecemos $u_n = u\,\eta_n$. Luego $u_n \to u$ puntualmente cuando $n \to +\infty$ ya que $\eta_n \to 1$, y

$$|u_n(x)| \le |u(x)|,$$

entonces

$$\begin{aligned} |u_n - u|^p &\le (|u_n| + |u|)^p \\ &\le 2^{p-1}\left(|u_n|^p + |u|^p\right) \quad \text{pues} \quad p \ge 1 \\ &\le 2^p\left(|u|^p\right). \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p |x|^a \, dx \leq 2^p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |x|^a \, dx < \infty \quad \text{pues} \quad u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

De ahí $u_n \to u$ en $L_a^p(\mathbb{R}^N) := L^p(\mathbb{R}^N; |x|^a dx)$ por Teorema de Convergencia Mayorada.

Ahora queremos ver que $\nabla(u_n) \to \nabla u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Entonces, sea $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n \, \varphi_{x_j} \, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \left(\tfrac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \eta_n + u \cdot \tfrac{\partial \eta_n}{\partial x_j} \right) \varphi \, dx,$$

donde $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ es la derivada débil de u respecto de x_j. Es decir, la derivada débil de u_n respecto de x_j es

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \eta_n + u \cdot \frac{\partial \eta_n}{\partial x_j}.$$

Deducimos que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right\|_{L^p} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j}(1 - \eta_n) \right\|_{L^p} + \left\| u \cdot \frac{\partial \eta_n}{\partial x_j} \right\|_{L^p}.$$

El primer término va a cero cuando $n \to +\infty$, por Teorema de Convergencia Mayorada (como antes) ya que $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y $\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(1 - \eta_n) \right| \leq \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|$.

Consideramos el segundo término:

$$\left\| u \cdot \frac{\partial \eta_n}{\partial x_j} \right\|_{L^p} \leq \frac{C}{n} \left(\int_{A_n} |u|^p \, dx \right)^{1/p}$$

por (B.4), pues $\left| \frac{\partial \eta_n}{\partial x_j}(x) \right| \leq \left| \frac{\nabla \eta_n}{\partial x_j}(x) \right| \leq \frac{C}{n} \mathbf{1}_{A_n}(x)$. Para estimar esta última integral, usamos que $1 \leq n \leq |x|$, de ahí

$$\begin{aligned} \int_{A_n} |u|^p \, dx &= \int_{A_n} |u|^p \, 1 \, dx \\ &\leq \int_{A_n} |u|^p |x|^a \, dx \\ &\leq \int_{|x|>n} |u|^p |x|^a \, dx, \end{aligned}$$

y obtenemos

$$\left(\int_{A_n} |u|^p \, dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_{|x|>n} |u|^p |x|^a \, dx\right)^{1/p}$$

De ahí

$$\left\| u \cdot \frac{\partial \eta_n}{\partial x_j} \right\|_{L^p} \leq \frac{C}{n} \left(\int_{|x|>n} |u|^p |x|^a \, dx\right)^{1/p}$$

pero como $u \in L^p_a(\mathbb{R}^N)$ y $\frac{C}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces la integral de la derecha $\to 0$ cuando $n \to \infty$.

Notemos que $(u_n) \in W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)$, pues $u \in W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)$ y $u_n \longrightarrow u$ en $W^{1,p}_a$ y además (u_n) es de soporte compacto ya que (η_n) también lo es.

Etapa 2: Sea $u \in W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)$, queremos fabricar una sucesión $(v_n) \in D(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_n \longrightarrow u$ en $W^{1,p}_a$.

Tomamos una sucesión regularizante $(\rho_n) \in D(\mathbb{R}^N)$ como en la definición 1.2.15, y consideremos

$$v_n = \rho_n * u_n \quad \text{con} \quad u_n = \eta_n \, u \quad \text{como en Etapa 1.}$$

Como $u_n \in W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N), \nabla u_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$, entonces por la desigualded de Sobolev 1.3.10, $u_n \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Con lo cual por la Proposición 1.2.14, $(v_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Y como (ρ_n) y (u_n) tienen soporte compacto, entonces por la Proposición 1.2.12, (v_n) tiene soporte compacto. Es decir que $(v_n) \in D(\mathbb{R}^N)$.

Falta ver que $v_n \to u$ en $W^{1,p}_a$.

1. Veamos que $\|v_n - u\|_{L^p_a} \to 0$.

$$\begin{aligned} \|\rho_n * (\eta_n \, u) - u\|_{L^P_a} &= \|\rho_n * (\eta_n \, u) - \rho_n * u + \rho_n * u - u\|_{L^p_a} \\ &\leq \|\rho_n * (\eta_n \, u) - \rho_n * u\|_{L^p_a} + \|\rho_n * u - u\|_{L^p_a}. \end{aligned}$$

   a) Analicemos el primer sumando:
   Sabemos que $u \in W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)$, por consiguiente, $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, entonces por la desigualdad de Sobolev (1.3.10), se tiene que $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Ahora bien, como $|\eta_n(x) - 1| \leq 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\eta_n u - u|^{p^*} \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\eta_n - 1|^{p^*} |u|^{p^*} \, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \, dx \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Es decir que, $(\eta_n u - u) \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N)$, entonces por el Lema (B.0.4)

$$|\rho * (\eta_n u - u)| \leq M\,(\eta_n u - u).$$

Por otro lado, $(\eta_n u - u) \in L^p_a(\mathbb{R}^N)$, con lo cual por la última desigualdad y el Teorema (B.0.3)

$$\begin{aligned}\|\rho * (\eta_n u - u)\|_{L^p_a} &\leq \|M\,(\eta_n u - u)\|_{L^p_a}\\ &\leq c\,\|\eta_n u - u\|_{L^p_a}\\ &\leq c\,\|\eta_n u - u\|_{W^{1,p}_a},\end{aligned}$$

y $\|\eta_n u - u\|_{W^{1,p}_a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ por lo visto en la Etapa 1. De ahí

$$\|\rho_n * (\eta_n\, u) - \rho_n * u\|_{L^p_a} = \|\rho_n * (\eta_n\, u - u)\|_{L^p_a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) En el segundo sumando, como $u \in L^p_a(\mathbb{R}^N)$, por el Teorema B.0.5,

$$\|\rho_n * u - u\|_{L^p_a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Veamos que $\|\nabla v_n - \nabla u\|_{L^p} \to 0$.

$$\begin{aligned}\|\nabla[\rho_n * (\eta_n\, u)] - \nabla u\|_{L^p} &= \|\nabla[\rho_n * (\eta_n\, u)] - \nabla(\rho_n * u) + \nabla(\rho_n * u) - \nabla u\|_{L^p}\\ &\leq \|\nabla[\rho_n * (\eta_n\, u)] - \nabla(\rho_n * u)\|_{L^p} + \|\nabla(\rho_n * u) - \nabla u\|_{L^p}\end{aligned}$$

a) Veamos el primer sumando,

$$\begin{aligned}\|\nabla[\rho_n * (\eta_n\, u) - \rho_n * u]\|_{L^p} &= \|\nabla[\rho_n * (\eta_n\, u - u)]\|_{L^p}\\ &= \|\rho_n * \nabla(\eta_n\, u - u)\|_{L^p}\end{aligned}$$

por el Lema 1.3.8, pues $(\rho_n) \in D(\mathbb{R}^N) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$ y $(\eta_n\, u - u) \in W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)$. Luego por el Teorema 1.2.11, se tiene que

$$\|\rho_n * \nabla(\eta_n\, u - u)\|_{L^p} \leq \|\rho_n\|_{L^1}\, \|\nabla(\eta_n\, u - u)\|_{L^p},$$

ya que $\nabla(\eta_n\, u - u) \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Y además $\|\nabla(\eta_n\, u - u)\|_{L^p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ por lo visto en la Etapa 1, con lo cual

$$\|\nabla[\rho_n * (\eta_n\, u) - \rho_n * u]\|_{L^p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) Veamos el segundo sumando,

$$\|\nabla(\rho_n * u) - \nabla u\|_{L^p} = \|\rho_n * \nabla u - \nabla u\|_{L^p}$$

por el Lema 1.3.8, y $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, con lo cual por el Teorema 1.2.18

$$\|\rho_n * \nabla u - \nabla u\|_{L^p} \longrightarrow 0.$$

Luego, $D(\mathbb{R}^N)$ es denso en $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. □

Observación B.0.8 *Si $u \in D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 < p < \infty$, tomamos η_n como en la Etapa 1 de la demostración anterior, y consideramos*

$$\begin{aligned} u_n(x) &= u(x)\,\eta_n(x) \\ &= \tilde{u}(|x|)\,\eta\left(\frac{|x|}{n}\right) \\ &= \tilde{u_n}(|x|), \end{aligned}$$

es decir, (u_n) es radial. Por otro lado, si tomamos ρ_n como en la Etapa 2 de la demostración anterior y a la vez le pedimos que sea radial, y consideramos

$$\begin{aligned} v_n(x) &= (\rho_n * u_n)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)\,u_n(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\rho_n}(|x-y|)\,\tilde{u_n}(|y|)\,dy \\ &= (\tilde{\rho_n} * \tilde{u_n})(|x|) \\ &= \tilde{v_n}(|x|), \end{aligned}$$

con lo cual, (v_n) es radial.

Por lo tanto, dado $u \in W_{r,a}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, existe $(v_n) \in D_r(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_n \to u$ en $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, es decir $D_r(\mathbb{R}^N)$ es denso en $W_{r,a}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $-N < a < N(p-1)$ y $1 < p < \infty$.

Observación B.0.9 *Sea $a \geq 0$. La inmersión $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ es continua.*

Demostración: Queremos ver que existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|u\|_{W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Veamos primero que existe $C > 0$ tal que $\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|u\|^p_{W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)}$. En efecto, utilizando las desigualdades de Hölder y de Sobolev, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{L^p} &= \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\,dx \\
&= \int_{|x|<1} |u|^p\,dx + \int_{|x|>1} |u|^p\,dx \\
&\leq \int_{|x|<1} |u|^p \cdot 1\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p|x|^a\,dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \left(\int_{|x|<1} 1\,dx\right)^{1-\frac{p}{p^*}} + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p|x|^a\,dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p|x|^a\,dx \\
&\leq C\,\|u\|^p_{W^{1,p}_a}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,dx \leq \|u\|^p_{W^{1,p}_a}$. Por lo tanto, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)}.$$

□

Observación B.0.10 *El espacio $L^p_a(\mathbb{R}^N)$ es separable.*

Demostración: Sea $D = \left\{ v = \mathbf{1}_{\overline{B(0,k)}}\,P(x) : P \in Q[x_1, x_2, ..., x_N] \right\}$. Claramente D es numerable. Veamos que D es denso.

Por la observación B.0.6, dado $\varepsilon > 0$ y $u \in L^p_a(\mathbb{R}^N)$ existe $\tilde{u} \in D(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^p_a} < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Como $sop(\tilde{u})$ es compacto, entonces $sop(\tilde{u}) \subseteq \overline{B(0,k)}$ para algún k. Para ese k, sea $M = \left(\int_{\overline{B(0,k)}} |x|^a\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$, $0 < M < \infty$.

Por el Teorema de Stone-Weierstrass, los polinomios son densos en $C(\overline{B(0,k)})$, con lo cual existe un polinomio $P \in Q[x_1, x_2, ..., x_N]$ tal que

$$|P(x) - \tilde{u}(x)| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \forall x \in \overline{B(0,k)}.$$

Ahora bien, consideremos

$$v(x) = P(x)\,\mathbf{1}_{\overline{B(0,k)}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u} - v\|_{L^p_a} &= \left(\int_{\overline{B(0,k)}} |\tilde{u}(x) - v(x)|^p |x|^a \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\overline{B(0,k)}} \left(\tfrac{\varepsilon}{2M}\right)^p |x|^a \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2M} \left(\int_{\overline{B(0,k)}} |x|^a \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2M} M \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\|v - u\|_{L^p_a} &\leq \|v - \tilde{u}\|_{L^p_a} + \|\tilde{u} - u\|_{L^p_a} \\
&< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es decir que D es un conjunto numerable denso en $L^p_a(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Teorema B.0.11 *Sea* $a \geq 0.\, W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)$ *es un espacio de Banach para* $1 \leq p \leq \infty$*, es separable para* $1 \leq p < \infty$*, y es reflexivo y uniformemente convexo para* $1 < p < \infty$.

Demostración:

1. Veamos que $W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Banach ($1 \leq p \leq \infty$).

   Sea (u_n) una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}_a(\mathbb{R}^N)$, es decir que

   $$\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}_a} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n,\, m \to \infty.$$

   Por la observación (B.0.9),

   $$\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}} \leq c\, \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}_a} \to 0,$$

es decir que (u_n) es de Cauchy en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ que sabemos que es un espacio de Banach, con lo cual existe $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{en} \quad W^{1,p}.$$

Entonces $\nabla u_n \to \nabla u$ en L^p, $u_n \to u$ en L^p y existe una subsucesión (u_{n_k}) tal que

$$(u_{n_k}) \to u \quad \text{en} \quad c.t.p.$$

Llamemos (u_n) a (u_{n_k}). Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |u_n(x) - u_m(x)|^p \, dx \leq \|u_n - u_m\|_{W_a^{1,p}} < \varepsilon \quad \text{si} \quad n, m \geq n_0(\varepsilon),$$

luego por el Lema de Fatou (1.2.3) cuando $m \to \infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^a |u_n(x) - u(x)|^p \, dx \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq n_0(\varepsilon),$$

o sea

$$u_n \to u \quad \text{en} \quad L_a^p.$$

De ahí resulta que $u \in L_a^p(\mathbb{R}^N)$, pues

$$\|u\|_{L_a^p} \leq \underbrace{\|u - u_n\|_{L_a^p}}_{\to 0} + \underbrace{\|u_n\|_{L_a^p}}_{<\infty} < \infty.$$

Y además

$$\|u_n - u\|_{W_a^{1,p}} = \underbrace{\|u_n - u\|_{L_a^p}}_{\to 0} + \underbrace{\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^p}}_{\to 0},$$

es decir que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{en} \quad W_a^{1,p}.$$

2. Veamos que $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ es separable $(1 \leq p < \infty)$.

   Sea $E = L_a^p(\mathbb{R}^N) \times \left(L^p(\mathbb{R}^N)\right)^N$, que resulta espacio de Banach separable, con la norma

$$\|w\|_E = \left(\|w\|_{L_a^p(\mathbb{R}^N)}^p + \sum_{j=1}^{N} \|\frac{\partial w}{\partial x_j}\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

pues $L^p_a(\mathbb{R}^N)$ y $L^p(\mathbb{R}^N)$ lo son con sus respectivas normas. Sea T : $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow E$, $T(u) = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$, T es una isometría eligiendo una norma adecuada en el producto.

La imagen de T es

$$T\left(W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right) = \left\{(u, v_1, v_2, ..., v_N)/u \in L^p_a(\mathbb{R}^N), v_1, v_2, ..., v_N \in L^p(\mathbb{R}^N) \text{ y } \frac{\partial u}{\partial x_j} = v_j \, \forall j\right\}.$$

donde las derivadas se interpretan en sentido débil. Por lo tanto $T\left(W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right)$ es un subespacio de E. Resulta entonces que $T\left(W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right)$ es separable, y por consiguiente también lo es $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

3. Veamos que $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ es reflexivo y uniformemente convexo si $1 < p < \infty$.

   En efecto, por un argumento análogo el espacio E que definimos antes, es uniformemente convexo. Por lo tanto $T\left(W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right)$, que es un subespacio de E, resulta también uniformemmente convexo (por el Teorema de Clarkson (1.1.12)), y en particular reflexivo. Por consiguiente también lo es $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

$\square$

Corolario B.0.12 *Sea $a \geq 0$. $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, es separable para $1 \leq p < \infty$, y es reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Demostración: Veamos primero que $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ es cerrado:
Sea $(u_n) \in W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W_a^{1,p}$, entonces

$$\|u\|_{W_a^{1,p}} \leq \underbrace{\|u - u_n\|_{W_a^{1,p}}}_{\to 0} + \underbrace{\|u_n\|_{W_a^{1,p}}}_{<\infty},$$

es decir que $u \in W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Y por otro lado, como (u_n) es radial,

$$\begin{array}{ccc} u_n(x) & = & \tilde{u}_n(|x|) \\ \downarrow & & \downarrow \\ u(x) & = & \tilde{u}(|x|), \end{array}$$

resulta que u también es radial. Luego $u \in W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ y por lo tanto $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ es cerrado.

Ahora bien, como $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N) \subset W^{1,p}_{a}(\mathbb{R}^N)$ y $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ es cerrado, por (B.0.11), obtenemos que $W^{1,p}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, es separable para $1 \leq p < \infty$, y es reflexivo para $1 < p < \infty$. $\square$

Observación B.0.13 *Notemos que por todo lo demostrado anteriormente $H^1_a(\mathbb{R}^N) = W^{1,2}_a(\mathbb{R}^N)$ y $H^1_{r,a}(\mathbb{R}^N) = W^{1,2}_{r,a}(\mathbb{R}^N)$ (con $a \geq 0$) son espacios de Hilbert separables.*

Bibliografía

[1] Clarkson, J. A. (1936). Uniformly convex spaces. Transactions of the American Mathematical Society, 40(3), 396-414.

[2] B. Gidas, W.M. Ni and L. Nirenberg, Symmetry and related propreties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.*, 68 (1979), 209-243.

[3] P. Sintzoff. Symmetry of solutions of a semilinear elliptic equation with unbound coefficients. *Diff. Int. Eq.* 7 (2003),769-786.

[4] H-M He, J-Q Chen. On the existence of Solutions to a class of p-Laplace Elliptic Equations. *journal of inequalities in pure and applied mathematics*. Volume 10 (2009), Issue 2, Article 59, 8 pp.

[5] H. Brézis. Analyse functionnelle, Masson Editeur (1983)(Trad. español, Alianza Editorial 1984)

[6] Baisheng Yan. Introduction to Variational Methods in Partial Differential Equations and Applications. A Summer Course at Michigan State University (Math 890, Summer 2008).

[7] M. Willem. Minimax Theorems, Birkhäuser, Boston, 1996.

[8] G. Dinca, P. Jebelean and J. Mawhin. Variational and Topological Methods for Dirichlet Problems with p-Laplacian. Portugaliae Mathematica Vol. 58 Fasc. 3-2001 Nova Série.

[9] D. de Morais Filho, M. Souto and J. Do O. A Compactness Embedding Lemma, A Principle of Symmetric Criticality and Aplications to Elliptic Problems. Universidade Federal de Paraíba, Brasil. Proyecciones, Vol. 19, Nº 1, pp. 1-17, May 2000, Universidad Católica del Norte, Antofagasta Chile.

[10] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer (2001).

[11] P. Drábek. On a Maximum Principle for Weak Solutions of Some Quasi-Linear Elliptic Equations. *Applied Mathematics Letters* 22 (2009), 1567-1570.

[12] W.A. Strauss. Existence of Solitary Waves in Higher Dimensions. *Comm. Math. Phys.* 55 (1977),149-162.

[13] T. Kilpeläinen. Weighted Sobolev Spaces and Capacity. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae.* Series A. I. Mathematica. Volumen 19, 1994, 95-113.