



**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Matemática**

**Tesis de Licenciatura**

**Descomposiciones aproximadas de la identidad y aplicaciones**

**Fernández Vidal, Tomás Ariel**

**Director:** Dr. Daniel E. Galicer

Agosto 2017



# Agradecimientos

*Brillará blanca y celeste,  
la Academia Racing Club.*

A Daniel Galicer por haber aceptado a comienzos del año pasado ser mi director y a partir de allí buscar siempre el mejor resultado, con exigencia, con correcciones y con paciencia, en un área de la Matemática que no conocía. Gracias también por toda la ayuda en los temas que, aún no estando vinculados a la tesis, estuviste siempre pendiente.

A Mariano Merzbacher, por la ayuda desde el primer día hasta el último, desde ayudarme a comprender esta rama de la Matemática hasta los gráficos en el Latex.

Al jurado, Damián Pinasco y Ezequiel Rela, por la predisposición que tuvieron a leer la tesis con tan poco tiempo, las correcciones, y el interés que mostraron.

A mis amigos y compañeros de la facultad Nahuel, Violeta, Franco, Fernando, Pablo, Juan, Emiliano, Javier, nacho, Felipe. Al grupo de Análisis Funcional, en especial a Dani Carando, uno de los mejores profesores, a Martín y Rodrigo, por la ayuda que también me dieron.

A Lautaro, Javier y Mariano, mis amigos desde el jardín.

A mi maestra de primero Alicia.

A mi profesora de secundaria Norma Camús, la mejor y a la que le debo el interés y la decisión de estudiar Matemáticas.

Al Doctor Kreutzer, ya que por obvias razones no podría haber estudiado Matemáticas sin su ayuda.

Quiero en especial agradecer a las personas más importantes en vida, los que siempre estuvieron y van a estar, y que no alcanzan las palabras para decir cuanto los quiero, que son mi familia:

Mi mamá Graciela y mi papá Guillermo.

Mis hermanos y hermanas pichu, maru, nino, juancho, mecha, juli y cami.

A mi, por ahora, único sobrino Demian.

A mis tíos coca y tuti, y mis primos Pablo y Julián.

A mis abuelos tita, lolo y locolin que los extraño muchísimo.

A Luislo, que lo quiero mucho, y es la persona con más fuerza y voluntad que vi en mi vida.

A mis otros tios y primos que no los veo tan seguido, pero sólo por una cuestión de distancia Luis, Marcela, Eduardo, Ana, Silvina, Andrea, Alejandra, Gabriela, Mariana y Alejandro.

Finalmente, a la educación pública, la cual me formó en todo mi aprendizaje, desde jardín, primaria, secundaria hasta la universidad. A los muy buenos docentes que tuve y el esfuerzo que siempre hicieron para dar una educación de muy buena calidad.

# Introducción

Desde mediados del siglo XIX y a lo largo del siglo XX se desarrollaron dos ramas de la matemática, en principio sin vinculación, que impulsaron el Análisis Geométrico Asintótico.

La primera rama a la cual nos referimos es el Análisis Funcional, que estudia los denominados funcionales, es decir, aquellas funciones cuyas variables independientes resultan ser otras funciones. Grandes matemáticos como, entre otros, F. Riesz, M. Stone, A. Kolmogoroff y S. Banach dieron impulso al inicio de esta nueva área de la matemática. Fue Banach quien dio comienzo a la “Teoría de los Espacios de Banach” en su libro *Théorie des opérations linéaires* publicado en 1932. Esta teoría que para mediados del siglo XX aparentaba ser una etapa superada obtuvo un nuevo impulso a fines de la década del 60 y durante los 70 a través de nuevas herramientas como la teoría de la probabilidad.

En paralelo al Análisis Funcional se desarrolló otra área de la matemática, ya a mediados del siglo XIX, la Teoría de Brunn-Minkowski, también conocida como Análisis Geométrico Convexo. Esta rama de la matemática se originó con la tesis de Hermann Brunn en 1887 y está influenciada en sus áreas principales por las ideas de Hermann Minkowski. Esta área, como su nombre lo indica, estudia los cuerpos convexos y las desigualdades geométricas relacionadas en espacios Euclídeos con alguna dimensión fija.

Claramente, la separación en ramas de la matemática no impone límites en cuanto a la vinculación entre estas. Cada área se nutre de los conceptos y las ideas de las otras, así como de resultados, generando nuevas herramientas para la resolución de problemas y la aparición de nuevas teorías por explorar. En este sentido, podríamos decir que el Análisis Geométrico Asintótico se encuentra en un punto intermedio entre el Análisis Funcional y la Teoría de Brunn-Minkowski.

En sus comienzos, la Teoría de Brunn-Minkowski aplicó sus esfuerzos a la geometría de los espacios de dimensión chica, usualmente 2 y 3, sin incursionar en los espacios de dimensiones grandes como objetivo principal, lo que ocurría en algunos casos a través de las generalizaciones de algunos resultados. Por otro lado, como los investigadores del Análisis Funcional estaban abocados al estudio de los espacios de dimensiones infinitas, resultó que los espacios de dimensiones altas carecían de interés, al suponerlos a

estos representados por los espacios de dimensión infinita. Por este hecho, el Análisis Geométrico Asintótico surge con el nombre de “Teoría local de los espacios normados”, debido a que se utilizaba para el estudio de los espacios de Banach de dimensión infinita a través de sus características finito dimensionales.

Sin embargo, en 1961 en su publicación *Some results on convex bodies and Banach spaces*, A. Dvoretzky refutó la teoría de que los espacios de dimensiones altas puedan estudiarse a partir de los espacios de dimensión infinita. Esto promovió el estudio de la Teoría Local, dada la importancia de los espacios de grandes dimensiones para la comprensión de la estructura de los espacios de Banach. Por otro lado, existe una clara relación entre la Teoría Local y la Teoría de Brunn-Minkowski. Esta relación viene dada por el hecho de que toda bola unitaria de un espacio normado es lo que llamamos un *cuerpo convexo*, esto es, un conjunto compacto, convexo, de interior no vacío, mientras que a través de la función de Minkowski se puede ver que todo cuerpo convexo es la bola unitaria de un espacio normado.

A causa de esta relación, la Geometría Convexa fue adquiriendo una mayor importancia en el estudio de la Teoría Local, pero con la particularidad que lo interesante era el comportamiento asintótico de las propiedades geométricas en relación a algún determinado parámetro, usualmente la dimensión, y el estudio de como estas propiedades dependen del parámetro en cuestión.

En el Análisis Geométrico Asintótico se utilizan diversos conceptos y resultados de la Teoría de Brunn-Minkowski, pero desde un nuevo punto de vista, como por ejemplo los problemas isométricos que se relacionan con el Análisis Geométrico Convexo son vistos como problemas isomórficos que se adaptan mejor al Análisis Funcional, pero teniendo solo sentido desde un punto de vista asintótico. Con el transcurso del tiempo, el Análisis Geométrico Asintótico fue separándose de su objetivo inicial convirtiéndose en un nuevo campo de la matemática e impulsando el estudio de otras teorías asintóticas como en probabilidad o en combinatoria.

Lo que da comienzo a nuestro trabajo es un resultado que se encuentra inicialmente en la teoría de Brunn-Minkowski. El problema era el siguiente: para un cuerpo convexo  $K$ , si consideramos todos los elipsoides que lo contienen, donde un elipsoide se define formalmente como la imagen afín de la bola unitaria en un Espacio Euclideo, ¿Hay un elipsoide de volumen mínimo que lo contenga? Afirma Busemann, en su publicación *The Foundations of Minkowskian Geometry* de 1950, que fue Karl Löwner, nacido en Praga en 1893 y exiliado luego de la invasión nazi en 1939, quien descubrió la unicidad de un elipsoide de volumen mínimo, pese a no publicar el resultado. Este resultado, resuelve también, como veremos más adelante, la existencia de un elipsoide de volumen máximo contenido en el cuerpo convexo.

Fritz John, nacido en Berlín en el año 1910, nacionalizado estadounidense luego de la llegada del régimen nazi, fue otro matemático que estudió

los problemas relacionados a los elipsoide y los cuerpos convexos. En 1948, demostró una relación de gran importancia entre un cuerpo convexo y su elipsoide de volumen maximal. Esta relación dice que si  $\mathcal{E}$  es el elipsoide de volumen máximo contenido en  $K$  entonces se verifica

$$\mathcal{E} \subseteq K \subseteq n\mathcal{E},$$

valiendo incluso  $\mathcal{E} \subseteq K \subseteq \sqrt{n}\mathcal{E}$  si  $K$  es simétrico, y siendo  $\sqrt{n}$  óptimo como también veremos más adelante. El criterio utilizado por John para demostrar esto, más un refinamiento de Keith Ball en su publicación [Bal92] dieron paso a una mejor caracterización para poder saber cuándo el elipsoide de volumen mínimo que contiene al cuerpo convexo resulta ser la bola unitaria del Espacio Euclídeo, que notaremos por  $B_2^n$ . Este resultado, llamado Teorema de John, nos dice que si se verifica que  $K \subseteq B_2^n$  entonces existen puntos  $u_1, \dots, u_m$  en la frontera de ambos cuerpos (que llamaremos puntos de contacto) y escalares positivos  $\lambda_i$  de modo que  $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0$  y  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, u_i \rangle u_i$ , para todo  $x$  en el espacio, si y sólo si  $B_2^n$  es el elipsoide de volumen mínimo que contiene a  $K$ .

Motivados por el Teorema de John, diremos que una familia de vectores y escalares  $\{(\lambda_i, u_i)\}$  que verifique  $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0$  y  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, u_i \rangle u_i$ , para todo  $x$  en el espacio, es una descomposición de la identidad. Con la misma idea, si la familia de vectores y escalares cumple  $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0$  y en lugar de generar al operador identidad lo que hace es aproximarlos, lo que querrá decir

$$(1 - \varepsilon)\langle x, x \rangle \leq \left\langle x, \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, u_i \rangle u_i \right\rangle \leq (1 + \varepsilon)\langle x, x \rangle$$

para cierto  $\varepsilon > 0$  chico, entonces la llamaremos una *descomposición aproximada de la identidad*.

Serán estas dos definiciones, vinculadas al Análisis Funcional, el punto de partida para ver y estudiar aplicaciones en diversos campos de la matemática. En este sentido, veremos la desigualdad de Brascamp-Lieb formulada en 1976, la cual establece una desigualdad entre la integral del producto de funciones y el producto de sus integrales, bajo ciertas hipótesis. Esta desigualdad, que generaliza la desigualdad de Hölder, tiene una aplicación directa para encontrar una cota óptima en la desigualdad de Young, dentro de lo que es el Análisis Armónico.

Considerando el cociente entre el volumen de un cuerpo convexo y el del elipsoide de volumen máximo contenido en él. Sabemos que entre todos los cuerpos convexos, este cociente es por lo menos 1, lo cual es óptimo tomando como cuerpo convexo un elipsoide. El problema estará en determinar que cuerpo convexo hace que este cociente sea el mayor posible. Combinaremos

la descomposición de la identidad y la desigualdad de Brascamp-Lieb para ver que, en el caso de considerar cuerpos convexos simétricos, es el cubo de lado 2 quien maximiza el cociente, pudiéndose probar que en el caso no simétrico resulta ser el  $n$  – simplex.

Presentaremos una noción de distancia en cuerpos convexos, donde es necesario abstraerse no solo de la ubicación en el espacio que presentan sino también de las variaciones que pueden exhibir al ser modificados por una transformación afín. Teniendo estimaciones en cuanto a la cantidad de puntos de contacto, entre un cuerpo convexo y el elipsoide de volumen máximo contenido en el, necesarios para generar una descomposición de la identidad, será de nuestro interés estudiar la distancia entre aquellos que requieren de mucho puntos de contacto y aquellos que menos necesitan. Veremos que la distancia es poca, estableciendo una relación entre la distancia y la cantidad de puntos.

Para obtener el resultado antes mencionado, que fue mejorando con el transcurso del tiempo empezando con Rudelson, luego mejorado por Srivastava y finalmente por Friedland y Youssef, será necesario poder generar una buena descomposición de la identidad, a la cual llegaremos mediante el método que dio resolución al problema de Kadison-Singer. Este problema, formulado en 1959 tiene una gran cantidad de equivalencias con problemas fundamentales de diversas áreas ya sea de matemática pura, aplicada, o en ingeniería como veremos más adelante. Este problema, que se refiere a la posible unicidad en la extensión de ciertos funcionales sobre determinadas  $C^*$  – álgebras (siendo la extensión cierta por el Teorema de Hanh-Banach) como veremos en la tesis, fue supuesto por negativo por sus autores e incluso hasta poco antes de su resolución por muchos matemáticos, siendo resuelto por la positiva en el año 2013 mediante un método probabilístico.

El hecho de que se resolviera en forma afirmativa el problema de Kadison-Singer tiene un obvio impacto sobre todas las áreas mencionadas. En particular veremos como es aprovechado el método con el que se resolvió en el estudio de la aproximación de matrices a través de submatrices con un número de columnas apropiado, esto puede relacionarse en como encontrar para un determinado operador un subespacio de su dominio, tal que al restringir el operador a este, aproxime la acción del operador en todo el espacio.

Otro problema que trataremos es el Teorema de Helly, un problema sumamente importante que establece para una familia arbitraria de conjuntos, que si la intersección de una determinada cantidad de cuales quiera de ellos es no vacía entonces la intersección de todos ellos es no vacía. Lo que haremos será un repaso por algunos de los teoremas que intentaron cuantificar este resultado estableciendo una relación en el volumen de la intersección de todos ellos con alguna subfamilia de estos. Utilizando nuevamente el efecto que tuvo el método utilizado para la resolución del problema de Kadison-Singer sobre la descomposición de la identidad, y mediante una nueva versión de la desigualdad de Brascamp-Lieb, veremos un resultado que vincula la cantidad



de elementos en la subfamilia del teorema de Helly, aplicado a semiespacios, con la relación entre el volumen de la intersección de los semiespacios y los de la subfamilia.

Además, mostraremos cómo puede aplicarse en la Teoría de Grafos la aproximación de la identidad, es decir que se verifique que los vectores aproximen a la identidad sin la necesidad de que sumen cero, para aproximar ciertos grafos por otros con una menor cantidad de aristas, lo cual tiene implicancias en la resolución de sistemas lineales en una menor cantidad de pasos, así como también puede relacionarse con problemas de optimización y computación.

El trabajo que hemos realizado está organizado de la siguiente forma.

El Capítulo 1 está dividido en dos secciones. En la primera presentaremos los conceptos y definiciones básicas del Análisis Geométrico Asintótico, veremos los teoremas de John y la distancia de Banach-Mazur. En la segunda sección, veremos la desigualdad de Brascamp-Lieb.

El segundo capítulo lo hemos dividido en cuatro secciones. En la primera veremos que todo cuerpo convexo puede ser aproximado por otro con “pocos” puntos de contacto. Seguiremos este capítulo con un estudio de las funciones potenciales definidas por Batson, Spielman y Srivastava para generar a partir de ellas una descomposición aproximada de la identidad. En la tercera sección estudiaremos lo realizado por Friedland y Youssef acerca de la aproximación de matrices por submatrices, con una cantidad razonable de columnas. Para finalizar el capítulo haremos un breve repaso del problema de Kadison-Singer, algunas conjeturas equivalentes y cómo pudo resolverse.

A lo largo del tercer capítulo presentaremos el Teorema de Helly, y veremos algunas versiones cuantitativas de este. Al finalizar el capítulo, como mencionamos antes, veremos la aplicación de la mejora obtenida por Friedland y Youssef en la demostración realizada por Brazitikos para obtener una leve mejora.

En el último capítulo presentaremos algunas ideas en cuanto a la aproximación de grafos, concentrándonos en lo que llamaremos la similitud espectral, y veremos cómo utilizar nuevamente las funciones potenciales para obtener, en una razonable cantidad de pasos, una buena aproximación de un grafo.



# Índice general

<b>1. Algunas técnicas elementales</b>	<b>1</b>
1.1. Elipsoide de John . . . . .	1
1.2. Desigualdad de Brascamp-Lieb . . . . .	18
<b>2. Aproximación de John</b>	<b>33</b>
2.1. Construcción del cuerpo convexo . . . . .	35
2.2. Método de funciones potenciales . . . . .	42
2.3. Aproximación de matrices . . . . .	56
2.4. Problema de Kadison-Singer . . . . .	72
<b>3. Cuantificación del Teorema de Helly</b>	<b>83</b>
3.1. Refinamiento del argumento de Naszódi . . . . .	85
3.2. Aproximación de volumen . . . . .	88
3.3. Brascamp-Lieb para aproximación de John . . . . .	96
<b>4. Matriz Laplaciana de grafos</b>	<b>101</b>
4.1. Similitud de corte . . . . .	102
4.2. Similitud espectral . . . . .	103



# Capítulo 1

## Elipsoide de John y la desigualdad de Brascamp-Lieb

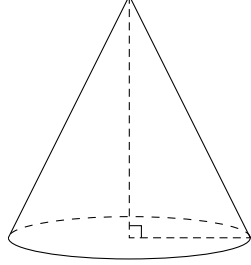
En este capítulo daremos los conceptos y los resultados relacionados a los cuerpos convexos y a los elipsoides contenidos en estos, buscaremos entender la relación entre ambos a partir de lo que definiremos como puntos de contacto y “volume ratio”. Nos basaremos principalmente en el trabajo de Ball [Bal97], el libro [AAGM15] y algunos resultados de la publicación de Marcos Cossarini “Size of the ellipsoids contained in a convex symmetric set”. Discutiremos también el Teorema de Brascamp-Lieb y sus aplicaciones tanto en el Análisis Geométrico Asintótico, como en el Análisis Armónico.

### 1.1. Elipsoide de John

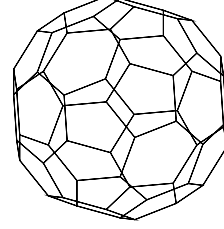
Comenzaremos dando algunas definiciones básicas de los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  sobre los cuales trabajaremos. Llamaremos *cuerpo convexo* a todo subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  compacto y con interior no vacío, y utilizaremos las letras  $K$  o  $H$  para notarlos. Hablaremos de *posición* de un cuerpo convexo  $K$  para referirnos a la imagen de  $K$  por una transformación afín. Además, diremos que  $K$  es centralmente simétrico si coincide con el cuerpo convexo  $-K := \{x \in \mathbb{R}^n : -x \in K\}$ . Fijaremos en  $\mathbb{R}^n$  una estructura Euclídea y una base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , notaremos por  $|\cdot|$  a la norma Euclídea, es decir  $|x| = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}$  si  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ . Tomaremos la notación  $B_2^n$  para hablar de la bola Euclídea unitaria, es decir  $B_2^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ , y nos referiremos por volumen de un conjunto a la medida Lebesgue  $n$ -dimensional del mismo, notándolo como  $\text{Vol}$  o por  $|\cdot|$ , cuando no se preste a confusión.

Un cuerpo convexo centralmente simétrico se identifica con la bola unitaria del espacio normado  $\mathbb{R}_K^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ , donde  $\|\cdot\|_K$  es el funcional de

Figura 1.1: Cuerpos convexos



(a) Cuerpo convexo no simétrico



(b) Cuerpo convexo simétrico

Minkowski dado por  $\|x\|_K = \inf \{t > 0 : \frac{x}{t} \in K\}$  para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ . Utilizaremos el símbolo  $\|\cdot\|$  para las diferentes normas, exceptuando la norma Euclídea ya definida, aclarando en cada caso a cuál nos estamos refiriendo. Llamaremos *elipsoide* a toda imagen afín no degenerada de  $B_2^n$ .

El siguiente lema nos permitirá trabajar con las matrices simétricas definidas positivas cuando queramos estudiar propiedades de los elipsoides.

**Lema 1.1.1.** *Sea  $\mathcal{E} = x_0 + A(B_2^n) \subseteq \mathbb{R}^n$  un elipsoide. Entonces existe una única matriz simétrica definida positiva  $P \in M_n(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\mathcal{E} = x_0 + P(B_2^n)$ .*

*Demostración.* La existencia se sigue de considerar una descomposición polar  $A = PU$ , donde  $P \in M_n(\mathbb{R})$  es una matriz simétrica definida positiva y  $U \in M_n(\mathbb{R})$  es una matriz ortogonal, y notando que  $U$  puede omitirse ya que  $U(B_2^n) = B_2^n$ .

Para probar la unicidad de la matriz  $P$  utilizaremos que está unívocamente determinada por el elipsoide  $\mathcal{E}$ . Para esto, utilizamos el hecho de que si una matriz  $B$  es simétrica y definida positiva, existe una única matriz también simétrica y definida positiva  $\sqrt{B}$  que verifica  $\sqrt{B}^2 = B$ , luego  $B = \sqrt{B}\sqrt{B}^t$ . Tenemos entonces, que el operador  $P \mapsto PP^t = P^2$ , definido sobre el conjunto  $S_n^+(\mathbb{R})$  de las matrices simétricas definidas positivas, resulta ser biyectivo. Ahora si  $P \in S_n^+(\mathbb{R})$  verifica que  $\mathcal{E} = x_0 + P(B_2^n)$ , entonces tenemos que para cada  $u \in \mathbb{R}^n$

$$\max_{y \in \mathcal{E} - x_0} u^t y = \max_{x \in B_2^n} u^t P x = \|u^t P\| = (u^t P P^t u)^{\frac{1}{2}}$$

y como  $P$  es simétrica entonces  $P^t P = P P^t = P^2$ . Supongamos entonces que existe otra matriz  $\tilde{P} \in S_n^+(\mathbb{R})$  tal que  $\mathcal{E} = x_0 + \tilde{P}(B_2^n)$ , por lo hecho anteriormente tenemos que para cada  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $u^t P P^t u = u^t \tilde{P} \tilde{P}^t u$ , o lo que es lo mismo, para cada  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $u^t (P^2 - \tilde{P}^2) u = 0$ .

Si definimos  $A = P^2 - \tilde{P}^2$ , tenemos que la matriz  $A$  es simétrica y por lo tanto existe una base ortonormal  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , con  $v_i$  autovector de  $A$  de autovalor  $\lambda_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Además, cada  $u \in \mathbb{R}^n$  puede escribirse como  $u = \sum_{i=1}^n \langle u, v_i \rangle v_i$ . Por lo tanto tenemos que

$$0 = u^t A u = u^t A \left( \sum_{i=1}^n \langle u, v_i \rangle v_i \right) = u^t \left( \sum_{i=1}^n \langle u, v_i \rangle \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \langle u, v_i \rangle^2 \lambda_i,$$

y en particular si elegimos  $u = v_i$  obtenemos que, para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $\lambda_i = 0$ , es decir que  $A = 0$ . Concluimos entonces que  $P^2 = \tilde{P}^2$  y por la biyección del operador,  $P = \tilde{P}$ .  $\square$

Probado el lema tenemos que el volumen del elipsoide se calcula como

$$\text{Vol}(\mathcal{E}) = \text{Vol}(x_0 + A(B_2^n)) = \text{Vol}(A(B_2^n)) = \omega_n \det A = \omega_n \det P = \omega_n \prod_{i=1}^n \lambda_i,$$

donde  $\omega_n := \text{Vol}(B_2^n)$  y los  $\lambda_i$  son los autovalores de la matriz  $P$  dada en el Lema 1.1.1, positivos por ser  $P$  definida positiva. Además, si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base ortonormal de autovectores de  $P$  entonces

$$\mathcal{E} = x_0 + \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, v_i \rangle^2}{\lambda_i} \leq 1 \right\}.$$

Ahora veremos que dado un cuerpo convexo  $K$  existe un elipsoide entre todos los contenidos en  $K$  que tiene volumen máximo, a este lo llamaremos el elipsoide de volumen maximal contenido en  $K$ . Aunque en principio uno podría suponer que son varios los elipsoides de volumen máximo veremos más adelante que es único.

**Teorema 1.1.2.** *Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo. Entonces  $K$  contiene un elipsoide de volumen máximo.*

*Demostración.* Sea  $N := n + n^2$ . Entonces el conjunto de pares ordenados  $(A, x)$  donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $x \in \mathbb{R}^n$  podemos asociarlo a  $\mathbb{R}^N$ . Sea

$$\mathfrak{F} = \{(A, x) \in \mathbb{R}^N : A(B_2^n) + x \subseteq K\}.$$

Como  $K$  es compacto y  $\mathfrak{F}$  es cerrado, se tiene que  $\mathfrak{F}$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^N$ . Luego, dado que  $(A, x) \mapsto |\det A|$  es una función continua sobre  $\mathfrak{F}$ , existe  $(A_0, x_0) \in \mathfrak{F}$  que maximiza la función sobre  $\mathfrak{F}$ . Luego, por el cálculo del volumen de elipsoides que realizamos arriba,  $\mathcal{E} = A_0(B_2^n) + x_0$  es un elipsoide de volumen máximo.  $\square$

*Observación 1.1.3.* Si  $x_0 + A(B_2^n)$  es un elipsoide de volumen maximal en  $K$ , entonces  $B_2^n$  es un elipsoide de volumen maximal en  $A^{-1}(K - x_0)$ .

Esto se debe a que si  $y_0 + C(B_2^n) \subseteq A^{-1}(K - x_0)$  entonces

$$x_0 + A(y_0) + A(C(B_2^n)) \subseteq K,$$

luego  $|\det(AC)|\omega_n \leq |\det(A)|\omega_n$ . Dado que el determinante del producto es el producto de los determinantes, y que  $|\det(A)| \neq 0$  por ser  $A$  una matriz inversible, se tiene que  $|\det C| \leq 1$  y luego

$$\text{Vol}(y_0 + C(B_2^n)) = |\det(C)|\omega_n \leq \omega_n = \text{Vol}(B_2^n).$$

La observación anterior nos permitirá, más adelante, suponer que la bola Euclídea es un elipsoide de volumen maximal en nuestro cuerpo convexo (lo que facilitará el análisis de las propiedades de los cuerpos convexos, que se preserven por transformaciones afines).

Como habíamos dicho, buscamos probar que el elipsoide de volumen máximo en un cuerpo convexo es único, para eso necesitamos algunos resultados que pasaremos a probar.

**Lema 1.1.4** (Desigualdad de Minkowski). *Para todas  $A_1, A_2 \in GL_n(\mathbb{R}^n)$ , simétricas y definidas positivas y  $\forall \lambda \in [0, 1]$  se tiene :*

$$\det(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2) \geq \det(A_1)^\lambda \det(A_2)^{1-\lambda}.$$

*Demostración.* Es claro que vale para  $\lambda = 0$  y para  $\lambda = 1$ .

Dada una matriz  $A$  definida positiva, sea  $\sqrt{A}$  la raíz cuadrada de  $A$ . Tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle Ax, x \rangle}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle \sqrt{A}\sqrt{A}x, x \rangle}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle \sqrt{A}x, \sqrt{A}x \rangle}{2}} dx,$$

donde en la última igualdad usamos la simetría de la matriz. Usando el cambio de variables dado por  $y = \sqrt{A}x$  tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle y, y \rangle}{2}} |\det(\sqrt{A})^{-1}| dy = (\sqrt{2\pi})^n \frac{1}{\det(\sqrt{A})} = \frac{(\sqrt{2\pi})^n}{\det(A)^{\frac{1}{2}}}.$$

Luego dadas las matrices  $A_1$  y  $A_2$

$$\begin{aligned} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\det(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2)^{\frac{1}{2}}} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle (\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2)x, x \rangle}{2}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( e^{-\frac{\langle A_1 x, x \rangle}{2}} \right)^\lambda \left( e^{-\frac{\langle A_2 x, x \rangle}{2}} \right)^{1-\lambda} dx \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle A_1 x, x \rangle}{2}} dx \right)^\lambda \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle A_2 x, x \rangle}{2}} dx \right)^{1-\lambda} \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{n\lambda}{2}}}{(\det(A_1))^{\frac{\lambda}{2}}} \frac{(2\pi)^{\frac{n(1-\lambda)}{2}}}{(\det(A_2))^{\frac{1-\lambda}{2}}}, \end{aligned}$$



donde en la desigualdad usamos Hölder para  $p = \frac{1}{\lambda}$  y  $q = \frac{1}{1-\lambda}$ . Por lo tanto se sigue el resultado que buscábamos. Por otro lado, la igualdad vale si y sólo si existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $e^{\frac{-\langle A_1 x, x \rangle}{2}} = \alpha e^{\frac{-\langle A_2 x, x \rangle}{2}}$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Como vale para  $x = 0$  se tiene que  $\alpha = 1$  y como  $e^x$  es inyectiva tenemos que  $\langle A_1 x, x \rangle = \langle A_2 x, x \rangle$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Luego por la simetría de  $A_1$  y  $A_2$  y por ser definidas positivas se tiene que  $A_1 = A_2$  como queríamos.  $\square$

**Lema 1.1.5.** *Sea  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  con  $x_0 \neq 0$ , entonces en la cápsula convexa  $\text{conv}(B_2^n \cup (x_0 + B_2^n))$  existe un elipsoide  $\mathcal{E}$  tal que  $\text{Vol}(\mathcal{E}) > \omega_n$ .*

Para ver esto podemos suponer a  $x_0 = r e_1$  con  $r$  un real positivo, y luego basta con considerar el elipsoide  $\mathcal{E} = \frac{r}{2} e_1 + A(B_2^n)$  donde  $A$  es la matriz diagonal, con  $A_{11} = \frac{r}{2} + 1$  y  $A_{ii} = 1$  si  $i \geq 2$ . Luego  $\mathcal{E}$  está en la cápsula convexa y su volumen es  $(\frac{r}{2} + 1)\omega_n > \omega_n$ .

Ahora sí, veremos que el elipsoide de volumen maximal contenido en un cuerpo convexo es único, y a este lo llamaremos *Elipsoide de John*. Esto nos permitirá caracterizar a los cuerpos convexos de acuerdo a quién es su elipsoide de volumen maximal. Sabiendo que un elipsoide puede llevarse a otro a partir de una transformación afín no degenerada, podemos también hablar de la posición en la que se encuentra un cuerpo, de acuerdo a quién es su elipsoide de volumen maximal; ya que sabemos que la relación entre un cuerpo convexo y su elipsoide de volumen maximal se mantiene si aplicamos transformaciones afines no degeneradas.

**Teorema 1.1.6.** *Dado  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo, existe un único elipsoide de volumen maximal contenido en  $K$ .*

*Demostración.* Supongamos que tenemos dos. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que uno de los elipsoides es  $B_2^n$  y el otro  $x_0 + A(B_2^n)$ , con  $A$  matriz simétrica, definida positiva y  $|\det(A)| = 1$ . Esto se debe a que si  $y_0 + C(B_2^n)$  y  $z_0 + B(B_2^n)$  son dos elipsoides maximales en  $K$  entonces  $B_2^n$  y  $C^{-1}(z_0 - y_0) + C^{-1}(B(B_2^n))$  son dos elipsoides maximales del cuerpo convexo  $C^{-1}(K - y_0)$ , luego si vale el teorema para el caso que queremos asumir obtenemos la igualdad  $B_2^n = C^{-1}(z_0 - y_0) + C^{-1}(B(B_2^n))$  y esto vale si y sólo si  $y_0 + C(B_2^n) = z_0 + B(B_2^n)$  como queríamos.

Ahora sí, dado que  $K$  es convexo, tenemos que el elipsoide

$$\frac{1}{2}x_0 + \left(\frac{I+A}{2}\right)(B_2^n) \subseteq \frac{1}{2}B_2^n + \frac{1}{2}(x_0 + A(B_2^n)) \subseteq K$$

y tiene volumen  $\det\left(\frac{I+A}{2}\right)\omega_n$ . Por el Lema de Minkowski y dado que  $B_2^n$  es un elipsoide de volumen maximal tenemos que

$$\omega_n \geq \det\left(\frac{I+A}{2}\right)\omega_n \geq \det(I)^{\frac{1}{2}} \det(A)^{\frac{1}{2}}\omega_n = \omega_n.$$

Entonces  $\det\left(\frac{I+A}{2}\right) = 1 = \det(I)^{\frac{1}{2}} \det(A)^{\frac{1}{2}}$ . Luego  $I = A$ .

Tenemos por lo tanto que  $B_2^n \subseteq K$  y  $x_0 + B_2^n \subseteq K$ , luego la cápsula convexa  $\text{Conv}(B_2^n \cup (x_0 + B_2^n)) \subseteq K$ . Si  $x_0 \neq 0$ , existe un elipsoide en  $\text{Conv}(B_2^n \cup (x_0 + B_2^n))$  con volumen mayor que  $\omega_n$  contradiciendo la maximalidad de  $B_2^n$ .  $\square$

Nos interesarán principalmente aquellos cuerpos convexos que tengan como elipsoide de volumen maximal a la bola Euclídea, tenemos entonces la siguiente definición:

**Definición 1.1.7.** Sea  $K$  un cuerpo convexo, diremos que  $K$  está en posición de John si  $B_2^n$  es el elipsoide de volumen maximal contenido en  $K$ .

Antes de avanzar con los cuerpos en posición de John vamos a dar la definición del polar de un conjunto convexo y algunas propiedades que se desprenden de lo que ya vimos. Probamos que dado un cuerpo convexo  $K$  existe un único elipsoide de volumen maximal contenido en él, a partir de la definición del polar veremos que también existe un único elipsoide de volumen mínimo que contiene al cuerpo convexo. A este elipsoide lo llamaremos, naturalmente, elipsoide de volumen minimal o elipsoide de Löwner. Si el elipsoide de volumen minimal que contiene al cuerpo convexo  $K$  es  $B_2^n$ , diremos que  $K$  está en posición de Löwner.

**Definición 1.1.8.** Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  convexo con 0 en su interior, definimos el polar de  $K$  como el conjunto  $K^o := \{y \in \mathbb{R}^n : \sup_{x \in K} \langle x, y \rangle \leq 1\}$ .

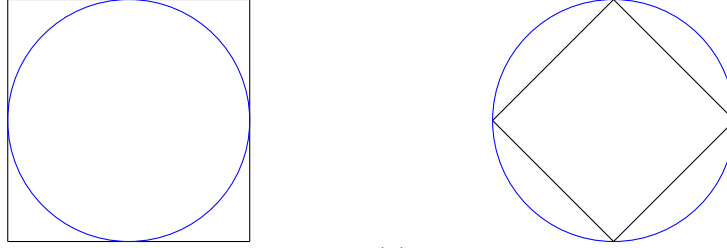
Se verifican las siguientes propiedades:

- Si  $K$  es simétrico entonces  $K^o = B_{X_K^*}$ , es decir es la bola unitaria del dual de  $X_K = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ ;
- si  $K \subseteq L$  entonces  $L^o \subseteq K^o$ ;
- sea  $A$  una matriz inversible entonces  $(AK)^o = (A^t)^{-1}(K^o)$ ;
- si  $\mathcal{E} = A(B_2^n)$  es un elipsoide, entonces  $\mathcal{E}^o = (A^t)^{-1}(B_2^n)$ ;
- sean  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$  dos elipsoides, entonces se tiene que  $\text{Vol}(\mathcal{E}_1) > \text{Vol}(\mathcal{E}_2)$  si y sólo si  $\text{Vol}(\mathcal{E}_1^o) < \text{Vol}(\mathcal{E}_2^o)$ .
- se verifica por Hahn-Banach que  $K = (K^o)^o$ .

De estas propiedades se desprende que  $\mathcal{E}$  es el elipsoide de volumen maximal de  $K$  si y sólo si  $\mathcal{E}^o$  es el elipsoide de volumen minimal que contiene a  $K^o$ . Luego tenemos el siguiente corolario:

**Corolario 1.1.9.** Dado  $K$  un cuerpo convexo, existe un único elipsoide de volumen minimal que contiene a  $K$ .

Figura 1.2: Polar de un cuerpo convexo



(a) Cuerpo convexo  $K$  y su elipsoide de John  
 (b) Cuerpo convexo  $K^o$  y su elipsoide de Löwner

*Demostración.* Supongamos a  $K$  un cuerpo convexo cualquiera, con  $0$  en su interior, consideremos  $K^o$  su polar y sea  $\mathcal{E}$  su elipsoide de volumen maximal, tenemos que  $K = (K^o)^o \subseteq \mathcal{E}^o$ . Sea  $\mathcal{E}_1$  un elipsoide con  $\text{Vol}(\mathcal{E}_1) \leq \text{Vol}(\mathcal{E}^o)$  y tal que  $K \subseteq \mathcal{E}_1$ , entonces  $\mathcal{E}_1^o \subseteq K^o$  es un elipsoide contenido en el polar y  $\text{Vol}(\mathcal{E}_1^o) \geq \text{Vol}(\mathcal{E})$ , luego  $\mathcal{E}_1^o = \mathcal{E}$ , es decir que  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}^o$ . Dado que si  $0 \notin K$  una simple traslación muestra que existe un único elipsoide de volumen minimal que lo contiene, concluimos entonces que todo cuerpo convexo está contenido en un único elipsoide de volumen mínimo.  $\square$

Volviendo a los cuerpos convexos en posición de John, daremos la definición de puntos de contacto, entre el cuerpo convexo y  $B_2^n$ .

**Definición 1.1.10.** Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo simétrico en posición de John, diremos que  $x \in \mathbb{R}^n$  es un punto de contacto de  $K$  y  $B_2^n$  si se verifica que  $|x| = \|x\|_K = 1$ .

Esta definición, nos dice que los puntos de contacto son aquellos puntos que se encuentran tanto en la frontera de  $B_2^n$  como en la del cuerpo convexo. De esta manera, la definición puede extenderse no solo a cuerpos convexos no necesariamente simétricos en posición de John, sino a cuerpos convexos en general, donde nos referiremos a puntos de contacto, como los puntos que se encuentran en la intersección de la frontera del cuerpo convexo y de la de su elipsoide de John.

Podemos relacionar a los puntos de contacto con la noción del polar que dimos anteriormente.

*Observación 1.1.11.* Si  $K$  es un cuerpo convexo en posición de John, sus puntos de contacto con  $B_2^n$  coinciden con los puntos de contacto de  $K^o$  con  $B_2^n$  como su elipsoide de Löwner (Siendo estos naturalmente la intersección de la frontera del cuerpo convexo con la de su elipsoide de Löwner).

Este hecho se debe a que si  $x$  es un punto de contacto de  $K$  y  $B_2^n$ , entonces el hiperplano de soporte de  $K$  en  $x$ , resulta ser el mismo que el de  $B_2^n$  en  $x$ , es decir que es el hiperplano  $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle = 1\}$ . Luego

para todo  $y \in K$  tenemos que  $\langle x, y \rangle \leq 1$ , por lo que  $y \in K^\circ$ , y dado que  $K^\circ \subseteq B_2^n$  entonces es un punto de contacto de  $K^\circ$  y  $B_2^n$ . Por otro lado, si  $x$  es un punto de contacto de  $K^\circ$  y  $B_2^n$ , entonces  $x \in K$ , si estuviera en el interior, entonces existiría  $\lambda > 1$  tal que  $\lambda x \in K$ , pero entonces tenemos que  $\langle \lambda x, x \rangle = \lambda > 1$ , contradiciendo que  $x \in K^\circ$ .

Esto en particular nos dice que si  $K$  es simétrico y  $x$  es un punto tal que  $|x| = \|x\|_K = 1$ , entonces se verifica que  $\|x\|_{K^\circ} = 1$ .

Enunciamos ahora el Teorema de John que describe la distribución de los puntos de contacto de un cuerpo centralmente simétrico sobre la esfera unitaria  $S^{n-1}$ , y cómo a partir de ellos puede construirse el operador identidad.

**Teorema 1.1.12 (John).** *La bola  $B_2^n$  es el elipsoide de volumen maximal de un cuerpo convexo  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  si y sólo si  $B_2^n \subseteq K$  y existen puntos de contacto  $x_1, \dots, x_m$  de  $K$  y  $B_2^n$ , y números reales positivos  $c_1, \dots, c_m$  con  $\sum_{j=1}^m c_j = n$  tal que*

$$\sum_{j=1}^m c_j x_j = 0 \quad (1.1)$$

$$x = \sum_{j=1}^m c_j \langle x, x_j \rangle x_j, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

*Observación 1.1.13.* La condición (1.2) nos dice que el operador  $Id_n$  de  $\mathbb{R}^n$  puede representarse en la forma

$$Id_n = \sum_{j=1}^m c_j x_j \otimes x_j \quad (1.3)$$

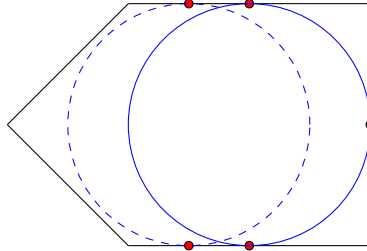
donde  $x_j \otimes x_j$  es la proyección en la dirección de  $x_j$ :  $(x_j \otimes x_j)(x) = \langle x, x_j \rangle x_j$ .

A un conjunto de vectores y escalares  $\{(c_j, x_j)\}_{1 \leq j \leq m}$  que verifique las condiciones (1.1) y (1.2) lo llamaremos una *descomposición de la identidad*. Notemos que, si esta descomposición existe, entonces tenemos, para cada  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |x|^2 &= \langle x, x \rangle = \left\langle x, \sum_{j=1}^m c_j (x_j \otimes x_j)(x) \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^m c_j \langle x, \langle x, x_j \rangle x_j \rangle = \sum_{j=1}^m c_j \langle x, x_j \rangle^2. \end{aligned}$$

Además, si elegimos  $x = e_i, i = 1, \dots, n$  donde  $\{e_i\}$  es la base ortonormal

Figura 1.3: Puntos de contacto en un solo lado de la Bola



estándar de  $\mathbb{R}^n$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 n &= \sum_{i=1}^n |e_i|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_j \langle e_i, x_j \rangle^2 \\
 &= \sum_{j=1}^m c_j \sum_{i=1}^n \langle e_j, x_j \rangle^2 \\
 &= \sum_{j=1}^m c_j |x_j|^2 = \sum_{j=1}^m c_j,
 \end{aligned}$$

esto nos dice que, en la demostración del Teorema de John, si encontramos un conjunto de puntos de contacto entre  $K$  y  $B_2^n$  y escalares tales que  $\{(c_j, x_j)\}_{1 \leq j \leq m}$  sea una descomposición de la identidad, habremos probado también que los escalares suman  $n$ .

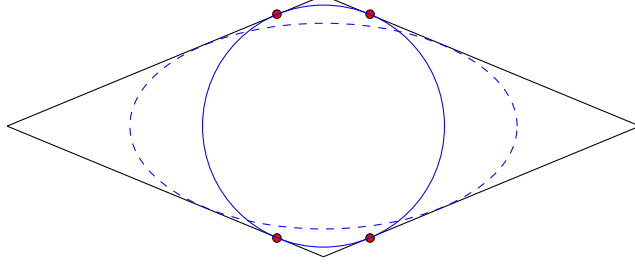
Antes de pasar a la demostración del Teorema de John, interpretemos geoméricamente la necesidad de las condiciones (1.1) y (1.2) para poder asegurar que es la bola  $B_2^n$  el elipsoide de volumen maximal.

La Ecuación (1.1) garantiza que los puntos de contacto no estén todos del mismo lado de bola. Si esto ocurriera podríamos mover la bola en la dirección contraria y así encontrar un elipsoide más grande. Como puede verse en la Figura 1.3.

La Ecuación (1.2) muestra que los puntos de contacto  $x_1, \dots, x_m$  se comportan como una base ortonormal, en el sentido que podemos escribir a la norma euclídea como una suma ponderada de cuadrado de productos internos. Esto garantiza que no todos se encuentren cerca de un subespacio propio de  $\mathbb{R}^n$ . Si esto no ocurriera podríamos expandir la bola en la dirección ortogonal, para nuevamente obtener un elipsoide de volumen mayor en  $K$ . Como puede verse en la Figura 1.4.

Es momento de demostrar el Teorema 1.1.12.

*Demostración del Teorema 1.1.12.* Haremos la demostración para el caso en que  $K$  es simétrico. Para este caso, si  $B_2^n$  es el elipsoide de volumen maximal,

Figura 1.4: Puntos de contacto cerca de un subespacio propio de  $R^n$ 

la condición (1.1) se obtiene de (1.2). Supongamos que existen constantes  $c_1, \dots, c_m$  y puntos de contacto  $x_1, \dots, x_m$  con  $Id_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j \otimes x_j$ , por ser  $K$  simétrico entonces  $-x_1, \dots, -x_m$  son puntos de contacto y se verifica que

$$Id_n = \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{2} x_j \otimes x_j + \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{2} (-x_j) \otimes (-x_j),$$

con  $\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{2} x_j + \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{2} (-x_j) = 0$  como queríamos.

La observación previa muestra que si existe tal representación, tenemos que  $\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{n} = 1$ . Nuestro objetivo será entonces, mostrar que  $\frac{Id_n}{n}$  es una combinación convexa de matrices de la forma  $x \otimes x$ , donde  $x$  es un punto de contacto de  $K$  y  $B_2^n$ . Para esto, definimos

$$\mathcal{C} = \{x \otimes x : |x| = \|x\|_K = 1\} = \{x \otimes x : x \text{ es punto de contacto}\}.$$

Luego basta ver que  $\frac{Id_n}{n}$  pertenece a la cápsula convexa de  $\mathcal{C}$ . Supongamos que no, dado que  $\text{Conv}(\mathcal{C})$  es un subconjunto compacto convexo no vacío de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , por Hahn-Banach geométrico tenemos que existe  $\phi_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $r \in \mathbb{R}$  tal que

$$\left\langle \phi_1, \frac{Id_n}{n} \right\rangle < r \leq \langle \phi_1, x \otimes x \rangle \quad \forall x \in S^{n-1} \cap \partial K.$$

Donde el producto interno está definido como  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB^*)$ .

Definiendo  $\phi_2 = \frac{\phi_1 + \phi_1^*}{2}$  tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \phi_2, A \rangle &= \text{Tr}(\phi_2 A^*) = \frac{\text{Tr}(\phi_1 A^*)}{2} + \frac{\text{Tr}(\phi_1^* A^*)}{2} \\ &= \frac{\text{Tr}(\phi_1 A^*)}{2} + \frac{\text{Tr}(A^* \phi_1^*)}{2} = \frac{\text{Tr}(\phi_1 A^*)}{2} + \frac{\text{Tr}(A \phi_1^*)}{2} \\ &= \frac{\text{Tr}(\phi_1 A^*)}{2} + \frac{\text{Tr}(\phi_1 A^*)}{2} = \text{Tr}(\phi_1 A^*) = \langle \phi_1, A \rangle, \end{aligned}$$

para toda  $A \in M_n(\mathbb{R})$  simétrica. Luego como  $\frac{Id_n}{n}$  y  $x \otimes x$  son matrices simétricas tenemos que  $\langle \phi_2, \frac{Id_n}{n} \rangle < r \leq \langle \phi_2, x \otimes x \rangle \forall x \in S^{n-1} \cap \partial K$ .

Sea  $B = \phi_2 - \frac{Tr(\phi_2)}{n} Id_n$ , tenemos que  $Tr(B) = Tr(\phi_2) - \frac{Tr(\phi_2)}{n} n = 0$ . Además  $B$  es simétrica y se verifican las siguientes igualdades

$$\left\langle B, \frac{Id_n}{n} \right\rangle = \left\langle \phi_2, \frac{Id_n}{n} \right\rangle - \frac{Tr(\phi_2)}{n} \frac{\langle Id_n, Id_n \rangle}{n} = \frac{Tr(\phi_2)}{n} - \frac{Tr(\phi_2)}{n} = 0,$$

$$\begin{aligned} \langle B, x \otimes x \rangle &= \langle \phi_2, x \otimes x \rangle - \frac{Tr(\phi_2)}{n} \langle Id_n, x \otimes x \rangle \\ &= \langle \phi_2, x \otimes x \rangle - \frac{Tr(\phi_2)}{n} |x|^2 = \langle \phi_2, x \otimes x \rangle - \frac{Tr(\phi_2)}{n}. \end{aligned}$$

Tomando  $s = r - \frac{Tr(\phi_2)}{n}$  tenemos que  $\langle B, \frac{Id_n}{n} \rangle = 0 < s \leq \langle B, x \otimes x \rangle$ .

Sea  $\delta > 0$  y sea  $\mathcal{E}_\delta = \{x : \langle (Id_n + \delta B)x, x \rangle \leq 1\}$ . Si  $\delta < \frac{1}{\|B\|}$ , entonces  $Id_n + \delta B$  es inversible y positiva. Luego existe  $S_\delta = (Id_n + \delta B)^{\frac{1}{2}}$  y satisface que

$$\begin{aligned} x \in S_\delta^{-1}(B_2^n) &\Leftrightarrow \|S_\delta(x)\| \leq 1 \Leftrightarrow \langle S_\delta(x), S_\delta(x) \rangle \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \left\langle (Id_n + \delta B)^{\frac{1}{2}}(x), (Id_n + \delta B)^{\frac{1}{2}}(x) \right\rangle \leq 1 \Leftrightarrow x \in \mathcal{E}_\delta, \end{aligned}$$

es decir que  $\mathcal{E}_\delta = S_\delta^{-1}(B_2^n)$  ( $\mathcal{E}_\delta$  es un elipsoide).

Veamos que  $\mathcal{E}_\delta \subset K$ , para esto si vemos que  $\forall x \neq 0, \frac{x}{\|x\|_K} \notin \mathcal{E}_\delta$ , entonces si  $z \neq 0, z \in \mathcal{E}_\delta$  debe ser  $\|z\|_K < 1$  ya que si  $\|z\|_K \geq 1$  como  $\mathcal{E}_\delta$  es convexo y  $0 \in \mathcal{E}_\delta$  entonces  $\frac{z}{\|z\|_K} = \frac{\|z\|_K^{-1} z}{\|z\|_K} = \frac{1}{\|z\|_K} z \in \mathcal{E}_\delta$ , luego  $\|z\|_K < 1$  es decir que  $z \in K$ . Luego basta con ver que  $\forall x \in S^{n-1}, \frac{x}{\|x\|_K} \notin \mathcal{E}_\delta$ .

Sea  $U = S^{n-1} \cap \partial K$  los puntos de contacto, y

$$V = \left\{ v \in S^{n-1} : d(v, U) \geq \frac{s}{2\|B\|} \right\}.$$

Si  $v \in V$ , veamos que  $\frac{v}{\|v\|_K} \notin \mathcal{E}_\delta$ . En efecto, sea  $\lambda = \min_{v \in V} \langle Bv, v \rangle$ , como  $Tr(B) = 0$  y  $B \neq 0$ ,  $B$  es una matriz simétrica y de traza cero, luego no puede ser positiva, es decir que existe  $w \in S^{n-1}$  tal que  $\langle Bw, w \rangle < 0$ . Por otro lado si  $u \in U$  entonces  $\langle Bu, u \rangle = Tr(B(u \otimes u)^*) = \langle B, u \otimes u \rangle \geq s > 0$ .

Si  $d(z, U) < \frac{s}{2\|B\|}$ , con  $z \in S^{n-1}$  entonces si  $u \in U$  es tal que su distancia a  $z$  es menor que  $\frac{s}{2\|B\|}$  tenemos entonces la desigualdad

$$\langle Bz, z \rangle = \langle Bu, u \rangle + \langle Bu, z - u \rangle + \langle B(z - u), z \rangle \geq s - 2\|B\||z - u| > 0$$

(pues  $|\langle Bu, z - u \rangle| \leq \|B\||z - u|$  y  $|\langle B(z - u), z \rangle| \leq \|B\||z - u|$ ). Luego  $w \in V$  y  $\lambda \leq \langle Bw, w \rangle < 0$ .

Dado que  $V$  es compacto y todo elemento de  $V$  esta a distancia, por lo menos,  $\frac{s}{2\|B\|}$  de  $U$  que son los puntos de contacto entre  $S^{n-1}$  y  $K$  con  $S^{n-1} \subset K$  entonces  $\max_{v \in V} \|v\|_K = \alpha < 1$ . Si  $\delta < \frac{1-\alpha^2}{|\lambda|}$  tenemos que

$$\left\langle (Id_n + \delta B) \frac{v}{\|v\|_K}, \frac{v}{\|v\|_K} \right\rangle = \frac{(|v|^2 + \delta \langle Bv, v \rangle)}{\|v\|_K^2} \geq \frac{1 + \delta \lambda}{\|v\|_K^2} \geq \frac{1 - \delta |\lambda|}{\alpha^2} > 1.$$

Luego  $\frac{v}{\|v\|_K} \notin \mathcal{E}_\delta$ . Si  $u \in U$ ,  $\|u\|_K = 1$ , tenemos

$$\langle (Id_n + \delta B)u, u \rangle = 1 + \delta \langle Bu, u \rangle \geq 1 + \delta s > 1$$

y por ende  $u \notin \mathcal{E}_\delta$ .

Si  $w \in S^{n-1} - V$  y sea  $u \in U$  tal que  $d(w, u) < \frac{s}{2\|B\|}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} & |\langle (Id_n + \delta B)w, w \rangle - \langle (Id_n + \delta B)u, u \rangle| = |1 + \delta \langle Bw, w \rangle - (1 + \delta \langle Bu, u \rangle)| \\ & = \delta |\langle Bw, w \rangle - \langle Bu, u \rangle| \leq \delta |\langle Bw, w - u \rangle| + \delta |\langle B(w - u), u \rangle| \\ & \leq 2\delta \|B\| \|w - u\| < \delta s. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\langle (Id_n + \delta B)w, w \rangle > -\delta s + \langle (Id_n + \delta B)u, u \rangle > 1$ . Es decir que  $w \notin \mathcal{E}_\delta$  por un argumento análogo al utilizado anteriormente, ya que  $|w| = 1$  y  $S^{n-1} \subset K$ , entonces  $\|w\|_K \leq 1$  y luego si  $\frac{w}{\|w\|_K} \in \mathcal{E}_\delta$ , por ser  $\mathcal{E}_\delta$  convexo entonces  $w = 0(1 - \|w\|_K) + \frac{w}{\|w\|_K} \|w\|_K \in \mathcal{E}_\delta$ , contradicción. Es decir que hemos probado que si  $w \in S^{n-1} - V$  entonces  $\frac{w}{\|w\|_K} \notin \mathcal{E}_\delta$ . Por lo antes dicho  $\mathcal{E}_\delta \subset K$ .

Veamos que  $\text{Vol}(\mathcal{E}_\delta) > \text{Vol}(B_2^n)$  si no,

$$\omega_n \geq \text{Vol}(\mathcal{E}_\delta) = \omega_n |\det(S_\delta^{-1})| = \frac{\omega_n}{|\det(Id_n + \delta B)|^{\frac{1}{2}}}.$$

Pero entonces, dado que  $Id_n + \delta B$  es positiva, tenemos  $\det(Id_n + \delta B) \geq 1$ . Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los autovalores de  $Id_n + \delta B$ , podemos concluir que

$$\begin{aligned} 1 & \leq \det(Id_n + \delta B)^{\frac{1}{n}} = \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n} \\ & = \frac{\text{Tr}(Id_n + \delta B)}{n} = \frac{\text{Tr}(Id_n) + \delta \text{Tr}(B)}{n} = \frac{n}{n} = 1 \end{aligned}$$

Es decir que  $\det(Id_n + \delta B) = 1$ . Entonces  $\text{Vol}(\mathcal{E}_\delta) = \text{Vol}(B_2^n)$ , por unicidad del elipsoide maximal tenemos que  $\mathcal{E}_\delta = B_2^n$ , luego  $B = 0$  lo que resulta un absurdo. Este provino de suponer que  $\frac{Id_n}{n}$  no pertenece a la cápsula convexa de  $\mathcal{C}$ .

Veremos ahora que si  $B_2^n \subseteq K$  y existen puntos de contacto  $x_1, \dots, x_m$  y constantes positivas  $c_1, \dots, c_m$  que cumplen las condiciones (1.1) y (1.2), entonces  $B_2^n$  es el elipsoide de volumen maximal en  $K$ . Sea

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \frac{\langle x, e_j \rangle^2}{\alpha_j^2} \leq 1 \right\}$$



un elipsoide contenido en  $K$ , con  $(e_j)_1^n$  una base ortonormal y  $(\alpha_j)_1^n$  escalares positivos. Queremos mostrar que  $\text{Vol}(\mathcal{E}) = \omega_n \prod_{j=1}^n \alpha_j \leq \omega_n$  y es 1 si y sólo si  $\alpha_j = 1 \forall j$ .

Dado que  $\mathcal{E} \subseteq K$  entonces  $\langle y, x_i \rangle \leq 1$  para cada  $i = 1, \dots, m$  y para todo  $y \in \mathcal{E}$ , es decir que cada  $x_i$  se encuentra en el polar de  $\mathcal{E}$ . Ya que

$$\mathcal{E}^\circ = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \langle y, e_j \rangle^2 \leq 1 \right\},$$

pues  $\mathcal{E} = A(B_2^n)$  con  $A$  la matriz diagonal en la base  $(e_j)$ , donde en la diagonal tiene al vector  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , luego  $\mathcal{E}^\circ = (A^*)^{-1}(B_2^n)$ , con  $(A^*)^{-1}$  la matriz diagonal en la base  $(e_j)$  dada por el vector  $(\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n})$ . Luego para cada  $i$  tenemos que

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \langle x_i, e_j \rangle^2 \leq 1.$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \langle x_i, e_j \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^m c_i = n.$$

Pero por la observación que vimos previamente, el lado izquierdo de la desigualdad es  $\sum_{j=1}^n \alpha_j^2$ , pues

$$\sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \langle x_i, e_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \sum_{i=1}^m c_i \langle x_i, e_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 |e_j|^2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j^2.$$

Finalmente por la desigualdad aritmética-geométrica, tenemos que

$$\left( \prod_{j=1}^n \alpha_j^2 \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \leq 1,$$

y la igualdad vale si y sólo si  $\alpha_j = 1 \forall j$ . Así tenemos que

$$\text{Vol}(\mathcal{E}) = \omega_n \prod_{j=1}^n \alpha_j \leq \omega_n = \text{Vol}(B_2^n),$$

y la igualdad vale si y sólo si  $\alpha_j = 1 \forall j$ , es decir si  $\mathcal{E} = B_2^n$ .  $\square$

El Teorema de John es equivalente a pensar el cuerpo convexo en posición de Löwner. Esto se debe a que  $K$  está en posición de Löwner si y sólo si  $K^\circ$  está en posición de John, valiendo el teorema para este último, y siendo los mismos puntos de contacto, tenemos el resultado equivalente. Podemos enunciarlo entonces como

**Teorema 1.1.14.** *La bola  $B_2^n$  es el elipsoide de volumen minimal de un cuerpo convexo  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  si y sólo si  $K \subseteq B_2^n$  y existen puntos de contacto  $x_1, \dots, x_m$  de  $K$  y  $B_2^n$ , y números reales positivos  $c_1, \dots, c_m$  con  $\sum_{j=1}^m c_j = n$  tal que*

$$\sum_{j=1}^m c_j x_j = 0 \quad (1.4)$$

$$x = \sum_{j=1}^m c_j \langle x, x_j \rangle x_j, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

Definiremos ahora la distancia Banach-Mazur entre espacios normados, o cuerpos convexos centralmente simétricos:

**Definición 1.1.15.** Sean  $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$  e  $Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_L)$ . La distancia Banach-Mazur entre  $X$  e  $Y$ , que notaremos por  $d_{BM}(X, Y)$  o simplemente por  $d(X, Y)$  cuando no genere confusión, se define como

$$d(X, Y) := \inf\{\|A\| \|A^{-1}\| : A : X \rightarrow Y \text{ es un isomorfismo}\},$$

donde  $\|A\|$  y  $\|A^{-1}\|$  es la inducida por las normas  $\|\cdot\|_K$  y  $\|\cdot\|_L$ . Esto es equivalente a definir sobre los cuerpos convexos la distancia dada por el ínfimo de las constantes  $C > 0$  tal que existe un operador lineal  $A : X \rightarrow Y$  satisfaciendo

$$\|x\|_K \leq \|Ax\|_L \leq C\|x\|_K$$

para todo  $x \in K$ . Equivalentemente tenemos que  $C^{-1}A(K) \subseteq L \subseteq A(K)$ .

Dados dos cuerpos convexos centralmente simétricos  $K$  y  $L$  en  $\mathbb{R}^n$ , la distancia Banach-Mazur entre  $K$  y  $L$  es

$$d(K, L) = \min\{t > 0 : A(K) \subseteq L \subseteq tA(K) \text{ para algún } A \in GL_n(\mathbb{R})\}.$$

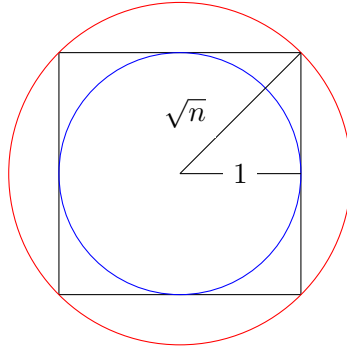
Podemos extender la definición de distancia de Banach-Mazur al conjunto de cuerpos convexos no necesariamente centralmente simétricos como

$$d(K, L) = \min\{t > 0 : A(K) + y \subseteq L + x \subseteq t(A(K) + y)\}$$

donde el mínimo lo tomamos sobre todos los  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y sobre toda transformación  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ .

El siguiente resultado clásico del análisis geométrico asintótico nos dice que todo cuerpo convexo centralmente simétrico dista de su elipsoide de volumen maximal en menos de  $\sqrt{n}$ .

**Teorema 1.1.16.** *Sea  $K$  un cuerpo convexo centralmente simétrico y  $\mathcal{E}$  es su elipsoide de volumen maximal. Entonces  $K \subseteq \sqrt{n}\mathcal{E}$ .*

Figura 1.5: Distancia entre los espacios  $\ell_2^n$  y  $\ell_\infty^n$ 

*Demostración.* Podemos suponer que  $\mathcal{E} = B_2^n$  (dado que si  $A(K) \subseteq \sqrt{n}B_2^n$  entonces  $K \subseteq \sqrt{n}A^{-1}(B_2^n) = \sqrt{n}\mathcal{E}$ , para alguna  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ).

Consideremos la representación de la identidad dada por el teorema previo

$$x = \sum_{j=1}^m c_j \langle x, x_j \rangle x_j$$

Usando el hecho de que  $|\langle y, x_j \rangle| \leq 1$  para cada  $j = 1, \dots, m$  y para todo  $y \in K$ , dado  $x \in K$  tenemos que

$$|x|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^m c_j \langle x, x_j \rangle^2 \leq \sum_{j=1}^m c_j = n,$$

Esto muestra que  $|x| \leq \sqrt{n}$ . Luego,  $B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n}B_2^n$ . □

*Observación 1.1.17.* El Teorema 1.1.16 nos da una cota superior a la distancia entre el espacio Euclídeo  $\ell_2^n$  y cualquier espacio normado de dimensión  $n$ . Esta cota es óptima ya que se realiza para el espacio  $\ell_\infty^n$ , con la norma dada por  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ , y que tiene como bola unitaria al cubo de lado dos centrado en el origen. Como vemos en la Figura 1.5.

Concluiremos esta sección demostrando el Lema de Dvoretzky-Rogers. Para esto, necesitamos una serie de resultados técnicos.

**Lema 1.1.18.** *Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo centralmente simétrico en posición de John y sea  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Entonces existe un punto de contacto  $u$  de  $K$  y  $B_2^n$  tal que*

$$u^* Au \geq \frac{\text{Tr}(A)}{n}.$$

*Demostración.* Sea  $\{(c_i, x_i)\}_{i=1}^m$  una descomposición de la identidad asociada a  $K$ . Mediante el producto interno para matrices, que definimos en la demostración del Teorema de John, tenemos que

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(AId_n^t) = \langle A, Id_n \rangle = \sum_{i=1}^m c_i \langle A, x_i \otimes x_i \rangle.$$

Por lo tanto, si para cada  $x_i$  tenemos que  $x_i^t A x_i < \frac{\text{Tr}(A)}{n}$ , y dado que

$$\begin{aligned} \langle A, x_i \otimes x_i \rangle &= \text{Tr}(A(x_i \otimes x_i)^t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n A_{kj} (x_i \otimes x_i)_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n (x_i)_k \sum_{j=1}^n A_{kj} (x_i)_j = x_i^t A x_i, \end{aligned}$$

podemos concluir que

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^m c_i x_i^t A x_i < \frac{\text{Tr}(A)}{n} \sum_{i=1}^m c_i = \text{Tr}(A)$$

lo que resulta un absurdo. Luego existe un punto de contacto  $u$  tal que  $u^t A u \geq \frac{\text{Tr}(A)}{n}$ .  $\square$

De lo observado al definir los puntos de contacto, se desprende que el vector  $u$  pertenece al polar de  $K$  y es unitario.

Obtenemos el siguiente corolario, que establece una cota superior a las trazas de las matrices de la forma  $AA^t$ , para aquellas matrices  $A$  que tienen norma menor o igual que 1 en el espacio normado  $\mathbb{R}_K$ .

**Corolario 1.1.19.** *Sea  $K \in \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo centralmente simétrico en posición de John, y sea  $A \in M_n(\mathbb{R})$  tal que  $A(B_2^n) \subseteq K$ . Entonces*

$$\frac{\text{Tr}(AA^t)}{n} \leq 1.$$

*Demostración.* Sea  $u$  un punto de contacto entre  $K$  y  $B_2^n$  tal que

$$\frac{\text{Tr}(AA^t)}{n} \leq u^t AA^t u = |u^t A|^2.$$

Tenemos que  $|u^t A| = \max_{x \in B_2^n} u^t A x = \max_{y \in A(B_2^n)} u^t y \leq 1$ , donde la última desigualdad se verifica por estar  $y \in K$  y  $u \in K^o$ .  $\square$

**Lema 1.1.20.** *Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo centralmente simétrico en posición de John, sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un subespacio de dimensión  $d$ . Entonces existe  $x \in S \cap B_2^n$  tal que  $\|x\|_K \geq \sqrt{\frac{d}{n}}$ .*

*Demostración.* Sea  $c = \max_{x \in S \cap B_2^n} \|x\|_K$ , donde el máximo se alcanza por ser  $S \cap B_2^n$  compacto. Por otro lado si  $x_0$  es donde el máximo se realiza, tenemos que si  $y \in S \cap B_2^n$ , entonces  $\|y\|_K \leq \|x_0\|_K$ , entonces  $\left\| \frac{y}{\|x_0\|_K} \right\|_K \leq 1$  y luego  $\frac{y}{\|x_0\|_K} \in K$ , es decir que  $S \cap B_2^n \subseteq \|x_0\|_K K$ . Si  $\lambda > 0$  es tal que  $S \cap B_2^n \subseteq \lambda K$ , entonces

$$x_0 \in \lambda K \Rightarrow \frac{x_0}{\lambda} \in K \Rightarrow \left\| \frac{x_0}{\lambda} \right\|_K \leq 1 \Rightarrow \|x_0\|_K \leq \lambda.$$

Concluimos entonces que  $c = \min\{\lambda \geq 0 : \lambda K \supseteq S \cap B_2^n\}$ .

Queremos probar que  $c \geq \sqrt{\frac{d}{n}}$ . Sabemos que  $S \cap B_2^n \subseteq cK$ , o equivalentemente que el elipsoide  $\frac{1}{c}(S \cap B_2^n) \subseteq K$ .

Podemos asumir sin pérdida de generalidad, aplicando una rotación en caso de ser necesario, que  $S = \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Considerando  $E = A(B_2^n)$  con  $A$  la matriz diagonal, que tiene en su diagonal al vector

$$a = \left( \underbrace{\frac{1}{c}, \dots, \frac{1}{c}}_d, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-d} \right),$$

se cumple que  $E \subseteq \frac{1}{c}(S \cap B_2^n) \subseteq K$ . Luego por el corolario anterior tenemos que  $1 \geq \frac{\text{Tr}(AA^t)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^d \frac{1}{c^2}}{n} = \frac{d}{c^2 n}$ . Por lo tanto  $c \geq \sqrt{\frac{d}{n}}$ , como queríamos probar.  $\square$

Se desprende de este lema, el Lema de Dvoretzky-Rogers, un resultado sobre la distribución de los puntos de contacto sobre  $S^{n-1}$ , que nos será de mucha utilidad más adelante.

**Lema 1.1.21** (Dvoretzky-Rogers). *Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo centralmente simétrico en posición de John. Entonces existe una base ortonormal  $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\|v_i\|_K \geq \sqrt{\frac{n-i+1}{n}}$ , para cada  $1 \leq i \leq n$ .*

*Más aún, existen  $u_1, \dots, u_n$  puntos de contacto de  $K$  con  $B_2^n$  tales que*

$$d(u_k, \text{Span}\{u_1, \dots, u_{k-1}\}) \geq \sqrt{\frac{n-k+1}{n}}$$

*para todo  $k = 2, \dots, n$ .*

*Demostración.* Por el lema previo, es suficiente elegir recursivamente, para cada  $1 \leq i \leq n$ , un vector  $v_i \in B_2^n \cap (\text{span}\{v_j\}_{j < i})^\perp$  de norma máxima.

Es decir elegimos  $v_1$  en  $B_2^n$  punto de contacto, esto es  $\|v_1\|_K = 1$ . Elegidos  $v_1, \dots, v_{d-1}$  consideramos el subespacio  $S = (\text{span}\{v_j\}_{j < d})^\perp$  de dimensión  $n-d+1$ , luego existe  $v_d \in B_2^n \cap S$  tal que  $\|v_d\|_K \geq \sqrt{\frac{n-d+1}{n}}$  como queríamos.

Para la segunda parte del teorema, tomamos  $u_1$  un punto de contacto cualquiera, supongamos definidos  $u_1, \dots, u_k$  cumpliendo con el enunciado

del teorema. Definimos  $F_k = \text{Span}\{u_1, \dots, u_k\}$ , y  $P_{F_k^\perp}$  la proyección sobre  $F_k^\perp$ , dado que  $\text{Tr}(P_{F_k^\perp}) = n - k$  por el Lema 1.1.18 existe un punto de contacto  $u_{k+1}$  tal que  $\langle P_{F_k^\perp}(u_{k+1}), u_{k+1} \rangle \geq \frac{n-k}{n}$ . Dado que  $u_{k+1}$  puede escribirse como  $P_{F_k^\perp}(u_{k+1}) + P_{F_k}(u_{k+1})$ , se tiene

$$\frac{n-k}{n} \leq \langle P_{F_k^\perp}(u_{k+1}), P_{F_k^\perp}(u_{k+1}) \rangle = |P_{F_k^\perp}(u_{k+1})|^2.$$

Por otro lado, como  $u_{k+1}$  es un punto de contacto, obtenemos la siguiente igualdad  $1 = |u_{k+1}|^2 = |P_{F_k^\perp}(u_{k+1})|^2 + |P_{F_k}(u_{k+1})|^2$ , y por lo tanto  $|P_{F_k}(u_{k+1})|^2 \leq \frac{k}{n}$ . Concluimos que la distancia entre  $u_{k+1}$  y  $F_k$  está acotada inferiormente por

$$\begin{aligned} d(u_{k+1}, F_k)^2 &= |u_{k+1} - P_{F_k}(u_{k+1})|^2 \\ &= |u_{k+1}|^2 + |P_{F_k}(u_{k+1})|^2 - 2\langle u_{k+1}, P_{F_k}(u_{k+1}) \rangle^2 \\ &= 1 - |P_{F_k}(u_{k+1})|^2 \geq \frac{n-k}{n}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

## 1.2. Desigualdad de Brascamp-Lieb

Veremos ahora la Desigualdad de Brascamp-Lieb utilizada por Ball en [Bal97] para probar la desigualdad isoperimétrica inversa. Esta última desigualdad afirma que módulo transformaciones afines, sobre todos los cuerpos convexos de un volumen dado en  $\mathbb{R}^n$ , el simplex regular de dimensión  $n$  tiene la mayor área de superficie, mientras que sobre los cuerpos convexos centralmente simétricos es el cubo quien tiene la mayor área de superficie.

Enunciamos entonces el siguiente resultado

**Teorema 1.2.1** (Desigualdad de Brascamp-Lieb). *Sean  $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1}$  y  $c_1, \dots, c_m > 0$  tal que*

$$Id_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j.$$

*Si  $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  son funciones medibles, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx \leq \prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{c_j}.$$

Para demostrar este teorema necesitaremos algunos resultados previos. En estos usaremos con frecuencia el hecho de que si tenemos constantes

positivas,  $c_1, \dots, c_m > 0$ , y vectores  $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1}$  de modo que

$$Id_n = \sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i,$$

para  $x \in \mathbb{R}^n$  no nulo, tenemos que  $0 < |x|^2 = \sum_{i=1}^m c_i \langle x, u_i \rangle^2$ . Por lo tanto, existe algún  $i$  tal que  $\langle x, u_i \rangle^2 \neq 0$ . Luego para constantes positivas  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  tenemos que la matriz  $A = \sum_{i=1}^m c_i \lambda_i u_i \otimes u_i$  verifica que

$$x^t A x = \sum_{i=1}^m c_i \lambda_i \langle x, u_i \rangle^2 > 0,$$

siendo entonces simétrica y definida positiva.

**Proposición 1.2.2.** Sean  $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1}$  y  $c_1, \dots, c_m > 0$  satisfaciendo  $Id_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$ . Entonces,

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j^{c_j} (\langle x, u_j \rangle) dx}{\prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}} g_j^{c_j} \right)} : g_j(t) = e^{-\lambda_j t^2}, \lambda_j > 0 \right\} \\ & = \inf \left\{ \frac{\det \left( \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}} : \lambda_j > 0 \right\} = 1. \end{aligned}$$

Antes de comenzar la demostración de la proposición, recordaremos la Fórmula de Cauchy-Binet, que nos será útil en la misma. La fórmula dice que dadas  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , entonces el determinante de la matriz  $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se calcula como

$$\det(AB) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, m\} : |I|=n} \det(A_I) \det(B_I),$$

donde  $A_I$  es la submatriz de  $A$  que se obtiene de considerar las columnas  $i$  –ésimas con  $i \in I$  mientras que  $B_I$  es la submatriz que se obtiene de considerar las filas  $i$  –ésimas con  $i \in I$ .

*Demostración.* Recordemos que  $(u \otimes u)(x) = \langle x, u \rangle u$ . Sea  $g_j(t) = e^{(-\lambda_j t^2)}$

para cada  $j = 1, \dots, m$ , donde  $\lambda_j$  son reales positivos. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j \langle x, u_j \rangle^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle \left( \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right) (x), x \rangle} dx \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det \left( \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}} g_j \right)^{c_j} &= \prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_j t^2} dt \right)^{c_j} = \prod_{j=1}^m \left( \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_j}} \right)^{c_j} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}} \end{aligned}$$

ya que  $c_1 + \dots + c_m = n$ . Se sigue que

$$\begin{aligned} &\inf \left\{ \left( \frac{\prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}} g_j \right)^{c_j}}{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx} \right)^2 : g_j(t) = e^{-\lambda_j t^2}, \lambda_j > 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\det \left( \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}} : \lambda_j > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Debemos mostrar que esto es constantemente 1.

Sea  $\lambda_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Para todo  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  de cardinal  $|I| = n$  definimos

$$\lambda_I = \prod_{j \in I} \lambda_j \text{ y } U_I = \det \left( \sum_{j \in I} c_j u_j \otimes u_j \right).$$

Considerando las matrices  $A, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , donde  $A$  tiene como columnas a los vectores  $(\sqrt{c_j} \lambda_j u_j)_1^m$ ,  $C$  tiene como columnas a los vectores



$(\sqrt{c_j}u_j)_1^m$  y  $B$  tiene como filas a los vectores  $(\sqrt{c_j}u_j)_1^m$ . Tenemos que

$$\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j = AB.$$

Luego, por la fórmula de Cauchy-Binet tenemos que

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det\left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j\right) = \det\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j (\sqrt{c_j}u_j) \otimes (\sqrt{c_j}u_j)\right) \\ &= \sum_{|I|=n} \det(A_I) \det(B_I) \\ &= \sum_{|I|=n} \lambda_I \det(C_I) \det(B_I) \\ &= \sum_{|I|=n} \lambda_I \det(C_I B_I) \\ &= \sum_{|I|=n} \lambda_I \det\left(\sum_{j \in I} c_j u_j \otimes u_j\right) \\ &= \sum_{|I|=n} \lambda_I U_I. \end{aligned}$$

Tomando  $\lambda_j = 1$  tenemos que

$$\sum_{|I|=n} U_I = \sum_{|I|=n} \lambda_I U_I = \det(Id_n) = 1.$$

Por la desigualdad Aritmética-Geométrica,

$$\sum_{|I|=n} \lambda_I U_I \geq \prod_{|I|=n} \lambda_I^{U_I} = \prod_{j=1}^m \lambda_j^{\sum_{I: j \in I} U_I}.$$

Aplicando nuevamente la fórmula de Cauchy-Binet, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\{I: j \in I\}} U_I &= \sum_{|I|=n} U_I - \sum_{\{I: j \notin I\}} U_I \\ &= 1 - \det(Id_n - (\sqrt{c_j}u_j) \otimes (\sqrt{c_j}u_j)) \\ &= 1 - (1 - c_j |u_j|^2) = c_j. \end{aligned}$$

Donde usamos que  $\det(I - A) = \prod_{i=1}^n (1 - a_i)$  y que los autovalores de la matriz  $(\sqrt{c_j}u_j) \otimes (\sqrt{c_j}u_j)$  son 0 y  $c_j |u_j|^2$ . Tenemos entonces que

$$\det\left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j\right) \geq \prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}, \quad (1.6)$$

y luego

$$\inf \left\{ \frac{\det \left( \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}} : \lambda_j > 0 \right\} \geq 1.$$

La elección de  $\lambda_j = 1$  da la igualdad en la Ecuación (1.6), lo que completa la demostración.  $\square$

Si definimos a  $I(f_1, \dots, f_m) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx$ , considerando las funciones Gaussianas, hemos demostrado que

$$\sup \left\{ I(f_1, \dots, f_m) : \int_{\mathbb{R}} f_j = 1, j = 1, \dots, m \right\} \geq 1.$$

**Proposición 1.2.3.** Sean  $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1}$  y  $c_1, \dots, c_m > 0$  tal que

$$Id_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j.$$

Si  $h_1, \dots, h_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  son funciones medibles. Sea

$$K(h_1, \dots, h_m) = \int_{\mathbb{R}^n} \sup \left\{ \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(\theta_j) : \theta_j \in \mathbb{R}, x = \sum_{j=1}^m \theta_j c_j u_j \right\}.$$

Entonces

$$\inf \left\{ K(h_1, \dots, h_m) : \int_{\mathbb{R}} h_j = 1, j = 1, \dots, m \right\} \leq 1.$$

*Demostración.* Sea  $\lambda_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, m$  y consideremos a las funciones  $h_j$  dadas por  $h_j(t) = e^{\frac{-t^2}{\lambda_j}}$ .

Entonces, la función

$$m(x) := \sup \left\{ \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(\theta_j) : \theta_j \in \mathbb{R}, x = \sum_{j=1}^m \theta_j c_j u_j \right\}$$

esta dada por

$$m(x) = e^{-\inf \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda_j} \theta_j^2 : x = \sum_{j=1}^m \theta_j c_j u_j \right\}}.$$

Definimos

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j \langle x, u_j \rangle^2 = \langle Ax, x \rangle$$

donde  $A$  es la matriz simétrica definida positiva dada por  $A := \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j$ .

Podemos ver que la norma dual es exactamente

$$\|y\|_*^2 = \langle By, y \rangle = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda_j} \theta_j^2 : y = \sum_{j=1}^m \theta_j c_j u_j \right\},$$

donde  $B = A^{-1}$ . La primer igualdad se desprende de la definición de la norma dual de la siguiente forma

$$\|y\|_* = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle A^{\frac{1}{2}} x, A^{-\frac{1}{2}} y \rangle}{\sqrt{\langle A^{\frac{1}{2}} x, A^{\frac{1}{2}} x \rangle}} \leq \sqrt{\langle A^{-\frac{1}{2}} y, A^{-\frac{1}{2}} y \rangle} = \sqrt{\langle A^{-1} y, y \rangle},$$

utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y que la igualdad vale si tomamos  $x = A^{-1} y$ . Para la segunda igualdad, sea  $y \in \mathbb{R}^n$ , dado que  $\{u_j\}$  genera  $\mathbb{R}^n$ , existe  $\{\theta_j\}$  tal que  $y = \sum_{j=1}^m c_j \theta_j u_j$ . Entonces, para cualquier  $x \in \mathbb{R}^n$ , tenemos

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^m c_j \theta_j \langle x, u_j \rangle = \sum_{j=1}^m \sqrt{\frac{c_j}{\lambda_j}} \theta_j \sqrt{c_j \lambda_j} \langle x, u_j \rangle \leq \left( \sum_{j=1}^m \frac{c_j \theta_j^2}{\lambda_j} \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|,$$

nuevamente usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y por lo tanto

$$\|y\|_*^2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|x\|^2} \leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda_j} \theta_j^2 : y = \sum_{j=1}^m \theta_j c_j u_j \right\}.$$

Por otro lado, tomando  $x = A^{-1} y$  y  $\theta_j = \lambda_j \langle x, u_j \rangle$ , tenemos que

$$\sum_{j=1}^m c_j \theta_j u_j = \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j \langle x, u_j \rangle u_j = Ax = y,$$

por lo que los  $\theta_j$  nos dan una de las representaciones consideradas, y además

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^m \frac{c_j \theta_j^2}{\lambda_j} \right)^{\frac{1}{2}} \|x\| &= \left( \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j \langle x, u_j \rangle \langle x, u_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \langle x, Ax \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\langle x, \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j \langle x, u_j \rangle u_j \right\rangle^{\frac{1}{2}} \langle x, y \rangle^{\frac{1}{2}} = \langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

valiendo la igualdad que queríamos. Dadas estas igualdades, se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} m(x) dx = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(B)}} = \pi^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(A)}.$$

Por otro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-t^2}{\lambda_j}} dt = \sqrt{\pi \lambda_j}.$$

Luego tenemos que, para  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  positivas,

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ K(f_1, \dots, f_m) : \int_{\mathbb{R}} f_j = 1 \right\} \leq K \left( \frac{h_1}{\sqrt{\pi \lambda_1}}, \dots, \frac{h_m}{\sqrt{\pi \lambda_m}} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sup \left\{ \prod_{i=1}^m \frac{h_j^{c_j}(\theta_j)}{(\pi \lambda_j)^{\frac{c_j}{2}}} : \theta_j \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^m \theta_j c_j u_j \right\} \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}} \prod \lambda_j^{\frac{c_j}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \sup \left\{ \prod_{i=1}^m h_j^{c_j}(\theta_j) : \theta_j \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^m \theta_j c_j u_j \right\} \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}} \prod \lambda_j^{\frac{c_j}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} m(x) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(A)}}{\pi^{\frac{n}{2}} \prod \lambda_j^{\frac{c_j}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{\det(\sum c_j \lambda_j u_j \otimes u_j)}}{\prod \lambda_j^{\frac{c_j}{2}}}. \end{aligned}$$

Al valer estas desigualdades para cualesquiera  $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ , y utilizando la Proposición 1.2.2 tenemos que

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ K(f_1, \dots, f_m) : \int_{\mathbb{R}} f_j = 1 \right\} \\ & \leq \inf \left\{ \frac{\sqrt{\det(\sum c_j \lambda_j u_j \otimes u_j)}}{\prod \lambda_j^{\frac{c_j}{2}}} : \lambda_j > 0 \right\} = 1. \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.2.4.** Sean  $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  y  $h_1, \dots, h_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  funciones integrables con

$$\int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt = \int_{\mathbb{R}} h_j(t) dt = 1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Entonces,

$$I(f_1, \dots, f_m) \leq K(h_1, \dots, h_m).$$

*Demostración.* Para esta demostración vamos a suponer que  $f_j, h_j$  son funciones continuas y estrictamente positivas. Usaremos el siguiente resultado de transporte de medida que puede encontrarse en [Vil03]: para cada  $j = 1, \dots, m$  definimos  $T_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por la ecuación

$$\int_{-\infty}^{T_j(t)} h_j(s) ds = \int_{-\infty}^t f_j(s) ds.$$

Entonces, cada  $T_j$  es estrictamente creciente, biyectiva, y

$$T_j'(t)h_j(T_j(t)) = f_j(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Definiremos ahora  $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$W(y) = \sum_{j=1}^m c_j T_j(\langle y, u_j \rangle) u_j.$$

Un simple cálculo muestra que el Jacobiano de  $W$  en un vector  $y$  resulta

$$J(W)(y) = \sum_{j=1}^m c_j T_j'(\langle y, u_j \rangle) u_j \otimes u_j.$$

Esto implica que

$$\langle [J(W)(y)](v), v \rangle > 0 \text{ si } v \neq 0$$

y entonces  $W$  es inyectiva. Considerando la función

$$m(x) = \sup \left\{ \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(\theta_j) : \theta_j \in \mathbb{R}, x = \sum_{j=1}^m \theta_j c_j u_j \right\}.$$

Tenemos que

$$m(W(y)) \geq \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(T_j(\langle y, u_j \rangle))$$

para todo  $y \in \mathbb{R}^n$ . Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} m(x) dx &\geq \int_{W(\mathbb{R}^n)} m(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} m(W(y)) |\det(J(W)(y))| dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(T_j(\langle y, u_j \rangle)) \left| \det \left( \sum_{j=1}^m c_j T_j'(\langle y, u_j \rangle) u_j \otimes u_j \right) \right| dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(T_j(\langle y, u_j \rangle)) \prod_{j=1}^m (T_j'(\langle y, u_j \rangle))^{c_j} dy, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos lo hecho en la demostración de la Proposición 1.2.2. Por lo tanto, teniendo en cuenta la Ecuación (1.7) concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} m(x) dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle y, u_j \rangle) dy = I(f_1, \dots, f_m).$$

En otras palabras  $I(f_1, \dots, f_m) \leq K(h_1, \dots, h_m)$   $\square$

Con las proposiciones ya probadas, pasamos ahora a demostrar el Teorema de Brascamp-Lieb.

*Demostración.* Sean  $f_1, \dots, f_m$  y  $h_1, \dots, h_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  funciones integrables con

$$\int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt = \int_{\mathbb{R}} h_j(t) dt = 1 \quad j = 1, \dots, m.$$

Entonces,

$$I(f_1, \dots, f_m) \leq K(h_1, \dots, h_m).$$

Tomando el supremo sobre todas las funciones  $f_j$  y el ínfimo sobre todas las funciones  $h_j$  que intran 1, tenemos que

$$1 \leq \sup \{I(f_1, \dots, f_m)\} \leq \inf \{K(h_1, \dots, h_m)\} \leq 1$$

por lo que vale la igualdad. Luego, para cualesquiera  $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  medibles, tenemos que

$$1 \geq I \left( \frac{f_1}{\int_{\mathbb{R}} f_1(t) dt}, \dots, \frac{f_m}{\int_{\mathbb{R}} f_m(t) dt} \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \frac{f_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle)}{\left( \int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{c_j}} dx,$$

es decir,  $\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx \leq \prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{c_j}$  como queríamos.  $\square$

Veamos como aplica Ball en [Bal97] el Teorema 1.2.1 para probar la desigualdad isoperimétrica inversa. Esta desigualdad, como mencionamos anteriormente, es natural pensarla en clases de equivalencia de cuerpos convexos por transformaciones inversibles, es decir por las distintas posiciones. Esto se debe a que, para un volumen dado, no existe una cota superior en el área de superficie de los cuerpos convexos con dicho volumen. La pregunta será entonces: dado un cuerpo convexo, ¿qué tan chica puede hacerse el área de superficie, aplicando transformaciones lineales inversibles, que no modifiquen el volumen?. Enunciamos entonces el teorema para el caso simétrico:

**Teorema 1.2.5** (Ball). *Sea  $K$  un cuerpo convexo centralmente simétrico y sea  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  el cubo centrado en cero cuyos lados miden dos. Entonces existe una imagen afín de  $K$  que tienen el mismo volumen que  $Q$  y tal que su área de superficie no es mayor que la de  $Q$ .*

Para demostrar el Teorema 1.2.5 necesitaremos la relación de volumen entre los cuerpos convexos y su elipsoide de volumen maximal. A esta relación la llamaremos *volume ratio* y la notaremos por  $vr$ . Formalmente tenemos:

**Definición 1.2.6.** El volume ratio de un cuerpo convexo  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  esta definido por

$$vr(K) = \inf_{\mathcal{E} \subseteq K} \left( \frac{\text{Vol}(K)}{\text{Vol}(\mathcal{E})} \right)^{\frac{1}{n}}$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los elipsoides contenidos en  $K$ .

Por el Teorema 1.1.6 es claro que

$$vr(K) = \left( \frac{\text{Vol}(K)}{\text{Vol}(\mathcal{E})} \right)^{\frac{1}{n}},$$

con  $\mathcal{E}$  el elipsoide de volumen maximal en  $K$ . El Teorema de Ball nos dice que es el cubo el cuerpo convexo centralmente simétrico de mayor volume ratio. Será para probar el siguiente teorema donde usaremos Brascamp-Lieb.

**Teorema 1.2.7.** *Sobre todos los cuerpos convexos centralmente simétricos de  $\mathbb{R}^n$ , el cubo tiene el mayor volume ratio.*

*Demostración.* Queremos probar que si un cuerpo convexo centralmente simétrico está en posición de John entonces  $\text{Vol}(K) \leq 2^n$ . Si  $K$  esta en posición de John, por el Teorema 1.1.12 sabemos que existen puntos de contacto  $u_1, \dots, u_m \in K \cap B_2^n$  y  $c_1, \dots, c_m > 0$  tal que

$$Id_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j.$$

Dado que  $K$  es simétrico, tenemos que

$$K \subseteq C = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, u_j \rangle| \leq 1 \ j = 1, \dots, m\}.$$

Luego se tiene la desigualdad

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K) \leq \text{Vol}(C) &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m (\chi_{[-1,1]}(\langle x, u_j \rangle))^{c_j} dx \\ &\leq \prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(t) dt \right)^{c_j} = 2^n \end{aligned}$$

donde en la desigualdad usamos Brascamp-Lieb, y en la última igualdad que  $\sum_{j=1}^m c_j = n$ .  $\square$

Otra herramienta que utilizaremos en la demostración del Teorema 1.2.5 es el concepto del área de superficie de un cuerpo convexo  $K$ , entre todas las posibles definiciones utilizaremos la dada por

$$\partial(K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Vol}(K + \epsilon B_2^n) - \text{Vol}(K)}{\epsilon}.$$

Siendo que el área de superficie es una medida de conjuntos de dimensión  $n - 1$ , podemos ver que si  $\lambda > 0$  entonces  $\partial(\lambda K) = \lambda^{n-1} \partial(K)$ , esto se debe a que

$$\begin{aligned} \partial(\lambda K) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Vol}(\lambda K + \epsilon B_2^n) - \text{Vol}(\lambda K)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda^{n-1} (\text{Vol}(K + \frac{\epsilon}{\lambda} B_2^n) - \text{Vol}(K))}{\frac{\epsilon}{\lambda}} \\ &= \lambda^{n-1} \partial(K). \end{aligned}$$

Demostraremos ahora el Teorema 1.2.5.

*Demostración del Teorema de Ball.* Sea  $K' = A(K)$  con  $A$  transformación afín y  $K'$  en posición de John. Por el Teorema 1.2.7 tenemos que

$$\left( \frac{\text{Vol}(K')}{\text{Vol}(B_2^n)} \right)^{\frac{1}{n}} = vr(K') \leq vr(Q) = \left( \frac{\text{Vol}(Q)}{\text{Vol}(B_2^n)} \right)^{\frac{1}{n}},$$

es decir que

$$\text{Vol}(K') \leq \text{Vol}(Q) = 2^n.$$

Por otro lado, y dado que  $B_2^n \subseteq K'$ , el área de superficie de  $K'$  verifica la desigualdad

$$\begin{aligned} \partial(K') &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Vol}(K' + \epsilon K') - \text{Vol}(K')}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Vol}(K'(1 + \epsilon)) - \text{Vol}(K')}{\epsilon} \\ &= \text{Vol}(K') \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(1 + \epsilon)^n - 1}{\epsilon} \\ &= n \text{Vol}(K') = n \text{Vol}(K')^{\frac{1}{n}} \text{Vol}(K')^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq 2n \text{Vol}(K')^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$



Se tiene además que el área de superficie del cubo tiene la siguiente relación con el volumen

$$\partial(Q) = 2n \text{Vol}(Q)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Luego, si definimos

$$\tilde{K} = \left( \frac{\text{Vol}(Q)}{\text{Vol}(K')} \right)^{\frac{1}{n}} K',$$

entonces  $\tilde{K}$  es una imagen afín de  $K$ ,

$$\text{Vol}(\tilde{K}) = \frac{\text{Vol}(Q)}{\text{Vol}(K')} \text{Vol}(K') = \text{Vol}(Q),$$

y su área de superficie está dada por

$$\begin{aligned} \partial(\tilde{K}) &= \left( \frac{\text{Vol}(Q)}{\text{Vol}(K')} \right)^{\frac{n-1}{n}} \partial(K') \\ &= \frac{(\text{Vol}(Q))^{\frac{n-1}{n}}}{(\text{Vol}(K'))^{\frac{n-1}{n}}} \partial(K') \\ &\leq \frac{(\text{Vol}(Q))^{\frac{n-1}{n}}}{\partial(K')} 2n \partial(K') \\ &= 2n (\text{Vol}(Q))^{\frac{n-1}{n}} = \partial(Q). \end{aligned}$$

Que era lo que queríamos probar.  $\square$

Para el caso de cuerpos convexos no simétricos tenemos, como habíamos mencionado, el siguiente teorema que no demostraremos

**Teorema 1.2.8.** *Sea  $K$  un cuerpo convexo y  $T$  el simplex regular en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces existe una imagen afín de  $K$  cuyo volumen es el mismo que el de  $T$  y cuya área de superficie no es mayor que la de  $T$ .*

Veremos ahora una versión más general del Teorema 1.2.1. Esta versión, que fue demostrada por H.J.Brascamp y E.H.Lieb en el artículo [BL76] y que les permite probar una cota óptima en la desigualdad de Young, afirma lo siguiente

**Teorema 1.2.9** (Brascamp-Lieb). *Sean  $n$  y  $k$  enteros tal que  $1 \leq n \leq k$ .*

*Sean  $p_j$ ,  $1 \leq j \leq k$  números reales tal que  $1 \leq p_j \leq \infty$ ,  $\sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j} = n$ .*

*Sean  $f_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , funciones complejas sobre  $\mathbb{R}$ , con  $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R})$ . Sean  $a^j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , vectores en  $\mathbb{R}^n$ , y sea*

$$I(\{f_j\}) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^k f_j(\langle a^j, x \rangle) dx.$$

Entonces

$$|I(\{f_j\})| \leq D \prod_{j=1}^k \|f_j\|_{p_j},$$

donde

$$D = \sup\{I(\{\phi_j\}) : \phi_j \in G, \|\phi_j\|_{p_j} = 1, j = 1, \dots, k\},$$

el supremo se toma sobre la clases de funciones Gaussianas que alcanzan su máximo en el origen y que notamos por  $G$ .

Donde por funciones Gaussianas nos referimos a las funciones dadas por  $f(x) = e^{x^t A x}$ , con  $A$  una matriz definida positiva.

Podemos ver como en el Teorema 1.2.1 suponemos que los vectores son unitarios y que junto a las constantes  $c_j = \frac{1}{p_j}$  forman una descomposición de la identidad, así obtenemos que la constante  $D$  es exactamente 1. En cambio en la versión 1.2.9, estimar la constante es difícil.

Brascamp y Lieb demuestran el siguiente resultado

**Teorema 1.2.10.** *Asumiendo el Teorema 1.2.9, para  $z_1, \dots, z_k$  reales positivos sean, para cada  $S = \{j_1, \dots, j_n\} \subseteq \{1, \dots, k\}$ ,*

$$z_S = \prod_{j \in S} z_j \quad \text{y} \quad J_S = [\det(a^{j_1}, \dots, a^{j_n})]^2.$$

Si la ecuación

$$\frac{1}{p_j} = \frac{\sum_{S: j \in S} J_S z_S}{\sum_{|S|=n} J_S z_S} \quad (1.8)$$

tiene solución para cada  $j$ , para ciertos  $0 < z_j < \infty$ . Entonces la constante es

$$D^2 = \frac{\prod_{j=1}^k (z_j p_j)^{\frac{1}{p_j}}}{\sum_{|S|=n} J_S z_S}$$

y la igualdad se cumple para  $f_j(x) = e^{-z_j x^2}$ .

Este teorema les permite, como mencionamos anteriormente, encontrar una cota óptima en la desigualdad de Young, en el caso de  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 1.2.11** (Young). *Sean  $1 < p, q, r < \infty$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$  y sean  $f \in L^p(\mathbb{R})$  y  $g \in L^q(\mathbb{R})$ . Entonces*

$$\|f * g\|_r \leq D \|f\|_p \|g\|_q,$$

para

$$D = \sqrt{\left( \frac{p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}} r^{\frac{1}{r}}}{p'^{\frac{1}{p'}} q'^{\frac{1}{q'}} r^{\frac{1}{r}}} \right)},$$

con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ .

La igualdad se alcanza en  $f(x) = e^{-p'x^2}$ ,  $g(x) = e^{-q'x^2}$ .

*Demostración.* Observamos primero que la desigualdad que queremos probar es equivalente a probar que para toda  $h \in L^{r'}(\mathbb{R})$  se verifica

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x-y)h(y)dx dy \right| \leq D \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_{r'}.$$

Por lo tanto la demostración consiste únicamente en aplicar el Teorema 1.2.10, observando que en este caso uno puede escribir a la integral como

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x-y)h(y)dx dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(\langle(1,0), (x,y)\rangle) g(\langle(1,-1), (x,y)\rangle) h(\langle(0,1), (x,y)\rangle) dx dy \right|. \end{aligned}$$

Luego basta tomar  $n = 2$ ,  $k = 3$ ,  $a^1 = (1,0)$ ,  $a^2 = (1,-1)$ ,  $a^3 = (0,1)$ , tenemos que  $J_S = 1$  para todo conjunto  $S$  de cardinal dos, contenido en  $\{1,2,3\}$ . Además se verifica que  $z_1 = p'$ ,  $z_2 = q'$ ,  $z_3 = r$  son solución de la Ecuación (1.8), que era lo que buscábamos, y la igualdad se alcanza en  $f(x) = e^{-p'x^2}$ ,  $g(x) = e^{-q'x^2}$  y  $h(x) = e^{-rx^2}$ .  $\square$



## Capítulo 2

# Descomposición Aproximada de la identidad y cuerpos convexos con pocos puntos de contacto

Dentro del conjunto de cuerpos convexos, hemos visto que aquellos que están en posición de John admiten una descomposición de la identidad. Prueba Gruber en [Gru88] que, en el espacio  $\mathcal{K}$  de cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^n$  con la topología dada por la distancia de Banach-Mazur, el conjunto de los cuerpos convexos, cuya cantidad de puntos de contacto con su elipsoide de volumen minimal difiere de  $N = \frac{n(n+3)}{2}$ , es de primera categoría de Baire. Es decir, que puede escribirse como unión numerable de conjuntos nunca densos. De la demostración de este hecho, se sigue también, que el conjunto de los cuerpos convexos que tienen menos de  $N$  puntos de contacto con su elipsoide de volumen minimal es nunca denso. Dedicaremos la Sección 2.1 a probar que a pesar de esto, dado un cuerpo convexo  $K$  y  $\varepsilon > 0$ , podemos construir otro cuerpo convexo  $H$ , cuya distancia Banach-Mazur a  $K$  sea menor que  $\varepsilon$  y que tenga a lo sumo con  $O_\varepsilon(n)$  puntos de contacto con su elipsoide de volumen minimal, notando por  $O_\varepsilon(n) = C(\varepsilon)n$ , es decir  $n$  por una constante que depende de  $\varepsilon$ . Llegaremos a este resultado suponiendo al cuerpo convexo en posición de John, ya que aplicar una transformación afín no modifica las distancias.

Una herramienta fundamental tanto para la construcción del cuerpo convexo  $H$  como para los capítulos que siguen es lo que llamaremos *descomposición aproximada de la identidad* o *aproximación de John*. Una aproximación de John, al igual que la descomposición de la identidad es un conjunto de vectores y escalares  $\{(c_j, x_j)\}_{1 \leq j \leq m}$  cuya suma es cero, es decir  $\sum_{j=1}^m c_j x_j = 0$ , pero al que le vamos a pedir en este caso que la suma de las matrices  $c_j x_j \otimes x_j$

no sea necesariamente la identidad, sino que la aproxime en norma. De esta manera, al conjunto de vectores y escalares los llamaremos una *descomposición*  $(1 + \alpha)$ -*aproximada de la identidad*, si además de cumplir que sumen cero, verifican que

$$\left\| Id_n - \sum_{j=1}^m c_j x_j \otimes x_j \right\| \leq \alpha.$$

A lo largo del capítulo, utilizaremos que si tenemos una descomposición aproximada de la identidad dada por  $\{(c_i, x_i)\}_{1 \leq i \leq m}$ , y escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  positivos, entonces, con una cuenta análoga a la realizada para la descomposición de la identidad en el Capítulo 1, la matriz  $A = \sum_{i=1}^m c_i \lambda_i x_i \otimes x_i$  resulta ser simétrica y definida positiva, si es que  $\alpha < 1$ . Por otro lado, utilizaremos también que si  $v \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\|v \otimes v\| = \sup_{x \in B_2^n} |\langle x, v \rangle v| = |v|^2.$$

Hablaremos de *aproximación de la identidad* para referirnos a un conjunto  $\{(c_j, x_j)\}_{1 \leq j \leq m}$  que aproxime en norma a la matriz identidad, pero que no cumpla necesariamente la condición de que los vectores  $c_j x_j$  sumen cero. Dedicaremos las secciones 2.2 y 2.3 a la construcción de la descomposición aproximada de la identidad a partir de una descomposición de John. En este sentido, en la Sección 2.2 estudiaremos el trabajo realizado por Srivastava en [Sri12]. Veremos cómo mejora el resultado alcanzado por Rudelson, en el sentido de que encuentra para un cuerpo convexo  $K$  otro cuerpo convexo  $H$  cercano en la distancia de Banach-Mazur, con menos puntos de contacto de los pedidos por Rudelson, pero a costa de que la distancia no sea arbitrariamente chica, en caso de que  $K$  no sea simétrico. La descomposición aproximada de la identidad la construiremos usando el método de “barreas” del artículo [BSS12] de Batson, Spielman y Srivastava, donde podremos extraer un conjunto pequeño de vectores, con propiedades que nos serán útiles, de cualquier descomposición de la identidad. Mientras que para el caso del cuerpo convexo simétrico veremos como obtiene una mejora en los puntos de contacto sin perder el hecho de poder obtener un cuerpo convexo arbitrariamente cercano. En la Sección 2.3 veremos lo hecho por Friedland y Youssef en la publicación [FY16] donde completan el problema dejado por Srivastava, obteniendo una descomposición aproximada de la identidad arbitrariamente cerca sin perder puntos de contacto, mejorando así lo hecho por Rudelson. Para finalizar el capítulo, haremos un breve estudio del problema de Kadison-Singer, sus equivalencias en otras áreas de la matemática, y veremos cómo el resultado alcanzado por Marcus, Spielman y Srivastava resuelve el problema por la positiva.

## 2.1. Construcción del cuerpo convexo

Dado el importante rol que juegan los puntos de contacto para comprender la geometría de los cuerpos convexos, se han suscitado diversos problemas en base a su estudio. Uno de ellos es el control del número de puntos de contacto. Se han obtenido resultados óptimos en este sentido en el caso de que el cuerpo convexo en cuestión sea centralmente simétrico. Nicole Tomczak-Jaegermann demostró en [TJ89] que, dado un cuerpo convexo  $K$ , la cantidad de puntos de contacto que se requiere para obtener una descomposición de la identidad, estará acotada por  $n \leq m \leq \frac{n(n+1)}{2}$ , siendo óptimo ya que había demostrado junto a Pelczynski en [PTJ88] que para cada valor de  $m$  entre  $n$  y  $\frac{n(n+1)}{2}$  existe un cuerpo convexo del cual se obtiene una descomposición de la identidad con exactamente  $m$  puntos de contacto.

Como mencionamos en la introducción del capítulo, esta sección la dedicaremos a, dado un cuerpo convexo  $K$  no necesariamente centralmente simétrico, la construcción de un cuerpo convexo  $H$  con pocos puntos de contacto, y que esté cercano a  $K$ . Siendo que si  $K$  no es centralmente simétrico, la estimación de puntos de contacto necesarios para generar una descomposición de la identidad podría ser de  $\frac{n(n+3)}{2}$ , este número nos da una cota inferior a la cantidad de puntos de contacto que tiene el cuerpo convexo en general, y lo que conseguimos es aproximar al cuerpo convexo por otro con una cantidad de puntos de contacto que sea menor a esta estimación. La construcción del cuerpo convexo  $H$  la haremos basándonos en el siguiente teorema de Rudelson del trabajo [Rud97].

**Teorema 2.1.1** (Rudelson). *Sea  $K$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Entonces existe un cuerpo convexo  $H$  tal que  $H \subseteq K \subseteq (1 + \varepsilon)H$  y  $H$  tiene a lo sumo  $m \leq \frac{Cn \log(n)}{\varepsilon^2}$  puntos de contacto, donde  $C$  es una constante universal.*

Las mejoras dadas en el paper [FY16] nos permitirán tomar una menor cantidad de puntos de contacto. La construcción consistirá en dos pasos, el primero es obtener una descomposición aproximada de la identidad del orden de  $O_\varepsilon(n)$  puntos, a partir de una descomposición de la identidad. Es decir, si  $\{(c_i, x_i)\}_{i \leq m}$  es una descomposición de la identidad de cierto cuerpo convexo  $K$ , buscaremos constantes  $b_i$  con a lo sumo  $s = O_\varepsilon(n)$  no nulas y un vector “chico”  $u$  tal que  $\{(b_i, x_i + u)\}_{1 \leq i \leq s}$  sea una descomposición  $(1 + \varepsilon)$  – aproximada de la identidad. Utilizando la notación  $A \preceq B$  para decir que  $B - A$  es una matriz semidefinida positiva, el hecho de aproximar a la matriz identidad en menos de  $\varepsilon$  es equivalente a que

$$(1 - \varepsilon)Id_n \preceq \sum_i b_i(x_i + u) \otimes (x_i + u) \preceq (1 + \varepsilon)Id_n.$$

El segundo paso, que es el que desarrollaremos en esta sección, consistirá en construir a partir de la aproximación de John obtenida en el primer paso,

una descomposición de la identidad y ver que a partir de esta podemos definir un cuerpo convexo  $H$  cercano a  $K$ .

Llamaremos *multiset* a un conjunto que admite la repetición de sus elementos, por ejemplo, los multiset de índices del conjunto  $\{1, 2\}$  dados por  $\{1, 1, 2\}$ ,  $\{1, 2\}$  y  $\{1, 2, 2\}$  son todos distintos. Enunciamos el siguiente teorema, que por ahora asumiremos como válido y que demostraremos en la Sección 2.3.

**Teorema 2.1.2.** *Existe una constante universal  $c$  tal que vale lo siguiente: sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $\{x_i, c_i\}_{i \leq m}$  una descomposición de la identidad. Entonces existe un multiset  $\sigma$  de índices de  $\{1, \dots, m\}$  de tamaño a lo sumo  $\frac{n}{c\varepsilon^2}$  tal que*

$$(1 - \varepsilon)Id_n \preceq \frac{n}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} (x_i - u) \otimes (x_i - u) \preceq (1 + \varepsilon)Id_n$$

donde  $u = \frac{1}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} x_i$  satisface  $|u| \leq \frac{2\varepsilon}{3\sqrt{n}}$ .

Basándonos en la demostración que realiza Rudelson del Teorema 2.1.1, pero utilizando el Teorema 2.1.2, obtenemos un mejor resultado ya que se consigue mejorar la aproximación de John utilizada por Rudelson. Más precisamente el teorema que demostraremos es

**Teorema 2.1.3.** *Existe una constante universal  $C$  tal que vale lo que sigue. Sea  $K$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Existe un cuerpo convexo  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que  $d(K, H) \leq 1 + \varepsilon$  y  $H$  tiene a lo sumo  $m \leq \frac{Cn}{\varepsilon^2}$  puntos de contacto con su elipsoide de Löwner.*

Antes de comenzar la demostración del teorema, vale la aclaración, de que a pesar de que está enunciado para  $\varepsilon > 0$ , el objetivo del teorema es encontrar un cuerpo convexo cercado, pero cuyos puntos de contacto no superen los  $n^2$ . En este sentido, vamos a ver que en la demostración tenemos ciertas restricciones acerca de  $\varepsilon$ , necesitando que sea pequeño, esto no perjudica el hecho de querer que se encuentre cercano, aunque si podríamos pasarnos en la cantidad de puntos de contacto. Sin embargo, esto no ocurre ya que las condiciones necesarias para  $\varepsilon$  no están en dependencia de  $n$  como veremos.

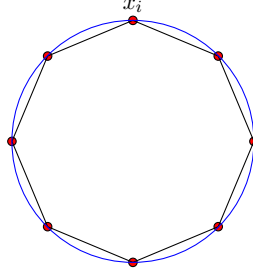
*Demostración del Teorema 2.1.3.* Supondremos al cuerpo convexo  $K$  en posición de Löwner. Dado  $\varepsilon > 0$ , y utilizando la descomposición aproximada de la identidad dada por el Teorema 2.1.2 para  $\frac{\varepsilon}{8}$ , denotaremos por  $\tilde{K} = K - u$ ,  $y_i = x_i - u$  y

$$T = \frac{n}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} y_i \otimes y_i,$$

donde  $S = Id_n - T$  verifica que  $-\frac{\varepsilon}{8}Id_n \preceq S \preceq \frac{\varepsilon}{8}Id_n$ , es decir que  $S$  tiene norma menor o igual a  $\frac{\varepsilon}{8}$ . Dada la definición de  $u$  y de los  $y_i$  tenemos que

$$\sum_{i \in \sigma} y_i = \sum_{i \in \sigma} x_i - |\sigma|u = 0 \quad (2.1)$$



Figura 2.1: Cuerpo convexo  $K$  en posición de Löwner

Sea  $v \in \mathbb{R}^n$  un vector de norma  $|v| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$  que definiremos más adelante. Notamos por

$$T_v := \frac{n}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} (y_i + v) \otimes (y_i + v),$$

$R_v := \sqrt{T_v}$  y  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_v = R_v(B_2^n)$ . Por (2.1), para  $\varepsilon$  suficientemente chico (sin dependencia de  $n$ ) tenemos que

$$\|T_v - Id_n\| \leq \|T_v - T\| + \|S\| \leq n\|v \otimes v\| + \|S\| \leq \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{8} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (2.2)$$

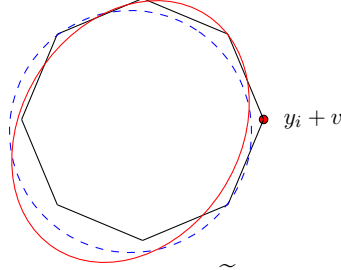
donde usamos que

$$\begin{aligned} T_v - T &= \frac{n}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} (y_i + v) \otimes (y_i + v) - \sum_{i \in \sigma} \frac{n}{|\sigma|} y_i \otimes y_i \\ &= \frac{n}{|\sigma|} \left( \sum_{i \in \sigma} y_i \otimes y_i + \underbrace{\left( \sum_{i \in \sigma} y_i \right)}_0 \otimes v + v \otimes \underbrace{\left( \sum_{i \in \sigma} y_i \right)}_0 \right) \\ &\quad + \frac{n}{|\sigma|} \left( \sum_{i \in \sigma} v \otimes v - \sum_{i \in \sigma} y_i \otimes y_i \right) \\ &= \frac{n}{|\sigma|} |\sigma| v \otimes v = nv \otimes v. \end{aligned}$$

Luego

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \mathcal{E} \subseteq B_2^n \subseteq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) \mathcal{E}.$$

Ya que si  $x \in B_2^n$ , y achicando nuevamente  $\varepsilon$ , en caso de ser necesario, pero

Figura 2.2: Construcción  $\mathcal{E}$ Figura 2.3: Cuerpo convexo  $\tilde{K} + v$  y el elipsoide  $\mathcal{E}$ 

nuevamente sin dependencia de  $n$  como veremos, entonces

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) R_v(x) \right|^2 &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \langle R_v(x), R_v(x) \rangle \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \langle x, T_v(x) \rangle \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) |x|^2 \\ &\leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) \leq 1, \end{aligned}$$

por un lado, mientras que por el otro, con cuentas similares, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) R_v(x) \right|^2 &= \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \langle R_v(x), R_v(x) \rangle \\ &= \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \langle x, T_v(x) \rangle \geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) |x|^2 \\ &\geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \geq 1. \end{aligned}$$

Denotaremos por

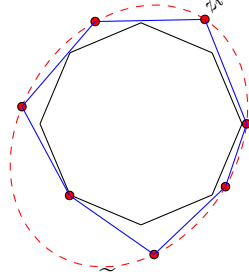
$$z_i = \frac{y_i + v}{\|y_i + v\|_{\mathcal{E}}},$$

donde  $\|y\|_{\mathcal{E}} = |R_v^{-1}(y)|$ , y por

$$\tilde{H} = \text{Conv} \left( \frac{1}{1 + \varepsilon} (\tilde{K} + v), z_1, \dots, z_{|\sigma|} \right).$$

Ya que  $K \subseteq B_2^n$  y  $|v| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$  no es difícil ver, a partir de la doble contención que probamos recién, la definición de la norma y tomando nuevamente  $\varepsilon$  pequeño (pero sin depender de  $n$ ), que los únicos puntos de contacto de  $\tilde{H}$  con  $\mathcal{E}$  son los  $z_1, \dots, z_{|\sigma|}$ . Probaremos ahora que

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} (\tilde{K} + v) \subseteq \tilde{H} \subseteq (1 + 2\varepsilon) (\tilde{K} + v).$$

Figura 2.4: Construcción de  $\tilde{H}$ Figura 2.5: Cuerpo convexo  $\tilde{H}$  conteniendo a  $\frac{1}{1+\varepsilon}(\tilde{K} + v)$  en  $\mathcal{E}$ 

La primera inclusión es obvia por la definición de  $\tilde{H}$ . Para probar la segunda, sea  $x \in \tilde{H}$  y consideremos la descomposición de  $x$

$$x = \frac{\alpha_0}{1+\varepsilon}b + \sum_{i \in \sigma} \alpha_i z_i,$$

donde  $b \in \tilde{K} + v$ ,  $\alpha_i \geq 0$  y  $\alpha_0 + \sum_{i \in \sigma} \alpha_i = 1$ . Dado que  $x_i \in \partial K$ , entonces  $y_i + v \in \partial(\tilde{K} + v)$ , luego  $\|y_i + v\|_{\tilde{K}+v} = 1$ . Ya que  $|u| \leq \frac{\varepsilon}{12\sqrt{n}}$  y  $|v| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|y_i + v\|_{\mathcal{E}} &\geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) |x_i - u + v| \\ &\geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) (|x_i| - |u| - |v|) \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{12\sqrt{n}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \\ &\geq 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

para  $\varepsilon$  suficientemente chico, si  $n$  es mayor o igual que tres. Entonces por la desigualdad triangular se sigue que

$$\begin{aligned} \|x\|_{\tilde{K}+v} &\leq \frac{\alpha_0}{1+\varepsilon} + \sum_{i \in \sigma} \alpha_i \frac{1}{\|y_i + v\|_{\mathcal{E}}} \|y_i + v\|_{\tilde{K}+v} \\ &\leq \frac{\alpha_0}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{i \in \sigma} \alpha_i \leq 1 + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Definimos ahora la siguiente descomposición de la identidad

$$Id_n = R_v^{-1} \circ T_v \circ R_v^{-1} = \sum_{i \in \sigma} \frac{n}{|\sigma|} \|y_i + v\|_{\mathcal{E}}^2 (R_v^{-1} z_i) \otimes (R_v^{-1} z_i) = \sum_{i \in \sigma} a_i u_i \otimes u_i,$$

donde  $a_i = \frac{n}{|\sigma|} \|y_i + v\|_{\mathcal{E}}^2$  y  $u_i = R_v^{-1} z_i$ . Finalmente, definimos el cuerpo convexo  $H := R_v^{-1}(\tilde{H})$ . Entonces, dado que  $\tilde{H} \subseteq \mathcal{E} = R_v(B_2^n)$ , tenemos

que  $H \subseteq B_2^n$  y los únicos puntos de contacto de  $H$  y  $B_2^n$  son los vectores  $u_1, \dots, u_{|\sigma|}$ . Si elegimos el vector  $v$  de modo que

$$\sum_{i \in \sigma} a_i u_i = 0 \quad (2.3)$$

entonces tendremos una descomposición de la identidad dada por puntos de contactos de  $H$  y  $B_2^n$  y por el Teorema 1.1.14,  $B_2^n$  será el elipsoide de Löwner y con puntos de contacto del orden  $|\sigma| = \frac{Cn}{\varepsilon^2}$ . Para finalizar la prueba, debemos encontrar un vector  $v$  para que (2.3) se cumpla. Notemos que por la definición de  $\|\cdot\|_\varepsilon$  y de los  $z_i$  tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \sigma} a_i u_i &= \frac{n}{|\sigma|} R_v^{-1} \left( \sum_{i \in \sigma} |R_v^{-1}(y_i + v)|^2 \frac{y_i + v}{|R_v^{-1}(y_i + v)|} \right) \\ &= \frac{n}{|\sigma|} R_v^{-1} \left( \sum_{i \in \sigma} \langle R_v^{-1}(y_i + v), R_v^{-1}(y_i + v) \rangle^{\frac{1}{2}} (y_i + v) \right) \\ &= \frac{n}{|\sigma|} R_v^{-1} \left( \sum_{i \in \sigma} \langle y_i + v, R_v^{-1} \circ R_v^{-1}(y_i + v) \rangle^{\frac{1}{2}} (y_i + v) \right) \\ &= \frac{n}{|\sigma|} R_v^{-1} \left( \sum_{i \in \sigma} \langle y_i + v, T_v^{-1}(y_i + v) \rangle^{\frac{1}{2}} (y_i + v) \right). \end{aligned}$$

Veremos la existencia del vector  $v$  en el siguiente lema, con lo que quedará demostrado el teorema. Esto es porque

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} (K - u + v) \subseteq R_v(H) \subseteq (1 + 2\varepsilon)(K - u + v),$$

valiendo lo que queríamos con  $K - u + v \subseteq R_v(H) \subseteq (1 + \varepsilon')(K - u + v)$ , con  $1 + \varepsilon' = (1 + 2\varepsilon)(1 + \varepsilon)$ , que es justamente la definición de la distancia de Banach-Mazur.  $\square$

**Lema 2.1.4.** *Sea  $\varepsilon > 0$  y  $y_i = x_i - u$ , con  $i = 1, \dots, |\sigma|$ , como los definidos en la demostración del Teorema 2.1.3. Existe un vector  $v$ , satisfaciendo las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} |v| &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \\ \sum_{i \in \sigma} \langle y_i + v, T_v^{-1}(y_i + v) \rangle^{\frac{1}{2}} (y_i + v) &= 0, \end{aligned}$$

donde

$$T_v = \frac{n}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} (y_i + v) \otimes (y_i + v).$$

*Demostración.* Dado que  $\sum_{i \in \sigma} y_i = 0$ , la segunda condición puede reescribirse como

$$\sum_{i \in \sigma} \left( \langle y_i + v, T_v^{-1}(y_i + v) \rangle^{\frac{1}{2}} - 1 \right) y_i + \sum_{i \in \sigma} \langle y_i + v, T_v^{-1}(y_i + v) \rangle^{\frac{1}{2}} v = 0.$$

Definimos la función  $F : \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} B_2^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $F(v)$  dada por

$$- \left( \sum_{i \in \sigma} \langle y_i + v, T_v^{-1}(y_i + v) \rangle^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \left( \sum_{i \in \sigma} \left( \langle y_i + v, T_v^{-1}(y_i + v) \rangle^{\frac{1}{2}} - 1 \right) y_i \right)$$

Recordemos que el Teorema de Punto Fijo de Brower afirma que toda función continua  $F : K \rightarrow K$ , con  $K$  un subconjunto convexo y compacto de un espacio Euclídeo, tiene un punto fijo. Luego, alcanza con probar que la imagen de  $F$  está incluida en  $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} B_2^n$ . Sea  $|v| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ , recordemos que

$$\langle y_i + v, T_v^{-1}(y_i + v) \rangle^{\frac{1}{2}} = |R_v^{-1}(y_i + v)| \geq 1 - \varepsilon. \quad (2.4)$$

Para cualquier vector  $w \in B_2^n$  y cualesquiera  $\alpha_1, \dots, \alpha_{|\sigma|}$ ,

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \sum_{i \in \sigma} \alpha_i y_i, w \right\rangle \right| &= \left| \sum_{i \in \sigma} \alpha_i \langle y_i, w \rangle \right| \\ &\leq \left( \sum_{i \in \sigma} \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i \in \sigma} \langle y_i, w \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{|\sigma|} \max_{i \in \sigma} |\alpha_i| \left( \sum_{i \in \sigma} \langle y_i, w \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{|\sigma|}{\sqrt{n}} \max_{i \in \sigma} |\alpha_i| \left( \langle T_0(w), w \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{|\sigma|}{\sqrt{n}} \|T_0\| \max_{i \in \sigma} |\alpha_i|, \end{aligned}$$

donde  $T_0 = \frac{n}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} y_i \otimes y_i$ , y  $\|T_0\| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{4}$ . Para  $n$  suficientemente grande tenemos que

$$\begin{aligned} \langle y_i + v, T_v^{-1}(y_i + v) \rangle^{\frac{1}{2}} - 1 &= \|x_i - u + v\|_{\varepsilon} - 1 \\ &\geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{12\sqrt{n}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) - 1 \\ &\geq 1 - \frac{2\varepsilon}{3} - 1 = \frac{2\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

para  $\varepsilon$  chico. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle y_i + v, T_v^{-1}(y_i + v) \rangle^{\frac{1}{2}} - 1 &= \|x_i - u + v\|_\varepsilon - 1 \\ &\leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) |x_i - u + v| - 1 \\ &\leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{12\sqrt{n}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) - 1 \leq \frac{2\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

para  $\varepsilon$  cercano al cero. Es decir que hemos probado que

$$\left| \langle y_i + v, T_v^{-1}(y_i + v) \rangle^{\frac{1}{2}} - 1 \right| \leq \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Luego

$$\left\| \sum_{i \in \sigma} \left( \langle y_i - v, T_v^{-1}(y_i - v) \rangle^{\frac{1}{2}} - 1 \right) y_i \right\| \leq \frac{|\sigma|}{\sqrt{n}} (1 + \varepsilon) \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Finalmente por la ecuación (2.4), tenemos que

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq \left( \sum_{i \in \sigma} \langle y_i - v, T_v^{-1}(y_i - v) \rangle^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \frac{|\sigma|}{\sqrt{n}} (1 + \varepsilon) \frac{2\varepsilon}{3} \\ &\leq \left( \sum_{i \in \sigma} 1 - \varepsilon \right)^{-1} \frac{|\sigma|}{\sqrt{n}} (1 + \varepsilon) \frac{2\varepsilon}{3} \\ &= \frac{1}{|\sigma|(1 - \varepsilon)} \frac{|\sigma|}{\sqrt{n}} (1 + \varepsilon) \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{2(1 + \varepsilon)}{3(1 - \varepsilon)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

si  $\varepsilon$  es suficientemente chico, como queríamos.  $\square$

En caso de que el cuerpo convexo  $K$  sea simétrico, dada una descomposición de la identidad  $\{(c_i, x_i)\}$ , podemos considerar una nueva descomposición dada por  $\{(\frac{c_i}{2}, x_i)\} \cup \{(\frac{c_i}{2}, -x_i)\}$  con lo cual el vector  $u$  resulta ser el cero. Además podemos tomar  $v = 0$  en la demostración del Lema 2.1.4.

## 2.2. Descomposición $(4+\varepsilon)$ -aproximada de la identidad

Supongamos que tenemos una  $(1 + \varepsilon)$ -aproximación de la identidad dada por  $\{(c_i, x_i)\}$ , esto es  $(1 - \varepsilon)Id_n \preceq \sum c_i x_i \otimes x_i \preceq (1 + \varepsilon)Id_n$ , donde los puntos  $x_i$  son puntos de contacto entre un cuerpo convexo  $K$  en posición de John y  $B_2^n$ . Si queremos obtener una aproximación de John necesitamos que la suma de los vectores  $c_i x_i$  sea cero. Como mencionamos en la Sección 2.1, en caso de que el cuerpo convexo  $K$  sea simétrico basta con considerar

los puntos  $\{(\frac{c_i}{2}, x_i)\} \cup \{(\frac{c_i}{2}, -x_i)\}$ , donde  $-x_i \in K$  por ser simétrico y donde además se verifican las igualdades

$$\begin{aligned} \sum c_i x_i \otimes x_i &= \sum \frac{c_i}{2} x_i \otimes x_i + \sum \frac{c_i}{2} (-x_i) \otimes (-x_i) \text{ y} \\ \sum \frac{c_i}{2} x_i + \sum \frac{c_i}{2} (-x_i) &= 0, \end{aligned}$$

es decir que es una descomposición  $(1 + \varepsilon)$ -aproximada de la identidad. Cuando el cuerpo convexo  $K$  no es simétrico, en cambio, no hay una manera inmediata de garantizar la condición del promedio cero. Si simplemente trasladamos los vectores para que tenga promedio cero, agregando el vector  $u = -\frac{\sum c_i x_i}{\sum c_i}$ , conseguimos que  $\sum c_i(x_i + u) = 0$ . Sin embargo, la matriz dada por los vectores

$$\begin{aligned} \sum c_i(x_i + u) \otimes (x_i + u) &= \sum c_i x_i \otimes x_i + \left(\sum c_i x_i\right) \otimes u \\ &\quad + u \otimes \left(\sum c_i x_i\right) + \left(\sum c_i\right) u \otimes u \\ &= \sum c_i x_i \otimes x_i - \left(\sum c_i\right) u \otimes u, \end{aligned}$$

no aproximara a la identidad si la norma de la matriz  $(\sum c_i) u \otimes u$  es “grande”. El método que veremos, desarrollado por Srivastava, nos permitirá tener un buen control sobre el promedio  $u$ , pero a costo de tener una peor aproximación de la identidad, lo que será mejorado en la Sección 2.3.

Nos concentraremos entonces en probar el siguiente teorema, que nos dará una descomposición aproximada de la identidad.

**Teorema 2.2.1.** *Supongamos que tenemos una descomposición de la identidad, esto es, vectores unitarios  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$  con constantes no negativas  $c_i$  tal que*

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i = 0 \tag{2.5}$$

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i \otimes x_i = Id_n. \tag{2.6}$$

Entonces para todo  $\varepsilon > 0$  existen escalares  $b_i$ , a lo sumo  $O_\varepsilon(n)$  no nulos, y un vector  $u$  tal que

$$Id_n \preceq \sum_{i=1}^m b_i(x_i + u) \otimes (x_i + u) \preceq (4 + \varepsilon)Id_n \tag{2.7}$$

$$\sum_{i=1}^m b_i(x_i + u) = 0 \tag{2.8}$$

$$\left(\sum_{i=1}^m b_i\right) |u|^2 \leq \varepsilon. \tag{2.9}$$

El método para obtener la descomposición aproximada de la identidad  $(b_i, x_i + u)$  consistirá en un proceso iterativo en el que iremos agregando uno o dos vectores en cada paso. En cada paso del proceso, tendremos una matriz

$$A = \sum_j b_j x_j \otimes x_j,$$

de vectores que hemos agregado, con los escalares  $b_j$  no nulos, y un vector

$$z = \sum_j b_j x_j.$$

Inicialmente tomaremos  $A = 0$  y  $z = 0$ . Realizaremos  $s = O_\varepsilon(n)$  pasos, agregando en cada uno  $b_j v_j \otimes v_j$ , manteniendo a la matriz  $A$  cercana a la identidad y al vector  $z$  cercano a 0. Nos aseguraremos que hayan a los sumo  $O_\varepsilon(n)$  constantes  $b_i$  no nulas.

La elección de los vectores que agregaremos en cada paso estará guiada por dos funciones “barreras” potenciales, las cuales utilizaremos para mantener un control sobre los autovalores de la matriz  $A$  en cada paso. Para números reales  $u, l \in \mathbb{R}$ , los cuales llamaremos barreras superior e inferior respectivamente, definimos:

$$\begin{aligned} \phi^u(A) &:= \text{Tr}((uId_n - A)^{-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u - \lambda_i} \\ \phi_l(A) &:= \text{Tr}((A - lId_n)^{-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i - l}, \end{aligned}$$

donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los autovalores de  $A$ , y a la funciones  $\phi^u$  y  $\phi_l$  las llamaremos potencial superior e inferior respectivamente. Buscaremos en cada paso que  $A \prec uId_n$  y  $A \succ lId_n$ , luego las funciones van a medir que tan cerca o lejos están los autovalores de  $A$  de las barreras simultáneamente. Por ejemplo, si  $\phi^u(A) \leq 1$  entonces no hay autovalores de  $A$  a distancia uno o menos de  $u$ , o dos autovalores a distancia dos o menos  $u$ , o  $k$  autovalores a distancia  $k$  o menos  $u$ . Luego, acotando apropiadamente las funciones, podemos asegurar que los autovalores de  $A$  no se acumulan cerca de las barreras.

Reordenando, durante el proceso, variarán paso a paso  $l$ ,  $u$ ,  $A$ , y  $z$ , mientras que mantendremos fijas a las cotas de las funciones barreras  $P_U$ ,  $P_L$ , y a  $\varepsilon$  de modo que

- Los autovalores de  $A$  se encuentran estrictamente entre  $u$  y  $l$ :

$$lId_n \prec A \prec uId_n \tag{2.10}$$

- Tanto el potencial superior como el inferior se encuentran acotados por valores fijos  $P_L$  y  $P_U$ :

$$\phi_l(A) \leq P_L \quad \phi^u(A) \leq P_U, \tag{2.11}$$



- El vector  $z$  es apropiadamente chico:

$$|z|^2 \leq \varepsilon \text{Tr}(A) \quad (2.12)$$

Tomamos inicialmente  $A = 0$ ,  $z = 0$ , y las barreras iniciales  $l = l_0 = -1$  y  $u = u_0 = 1$ . Luego se verifican las condiciones (2.10), (2.11) y (2.12) considerando  $P_U = P_L = n$ . Como mencionamos anteriormente, en cada paso agregaremos un vector principal  $tv$  y un vector corrector,  $rw$  con los escalares  $t$  y  $r$  no negativos y  $v, w \in \{x_i\}_{i \leq m}$ .

El vector principal nos permitirá desplazar las barreras superior e inferior en cantidades fijadas  $\delta_L > 0$  y  $\delta_U > 0$  manteniendo invariantes las condiciones (2.10) y (2.11). En particular, elegiremos el vector principal de manera que se satisfaga:

$$\begin{aligned} \phi_{l+\delta_L}(A + tv \otimes v) \leq \phi_l(A) \quad \phi^{u+\delta_U}(A + tv \otimes v) \leq \phi^u(A) \\ (l + \delta_L)Id_n \prec A + t \otimes v \prec (u + \delta_U)Id_n. \end{aligned} \quad (2.13)$$

El vector corrector solucionará los cambios que produzca el principal sobre la suma de los vectores, es decir si  $z$  es la suma de los vectores agregados en los pasos previos, elegiremos  $rw$  de manera de garantizar que

$$\langle z, tv + rw \rangle \leq 0. \quad (2.14)$$

Luego la suma en cada paso será

$$\begin{aligned} |z + tv + rw|^2 &= |z|^2 + 2\langle z, tv + rw \rangle + |tv + rw|^2 \\ &\leq |z|^2 + (t|v|^2 + r|w|^2) = |z|^2 + (t + r)^2, \end{aligned}$$

ya que  $v$  y  $w$  son vectores unitarios. El incremento en la traza de la matriz  $A$  es simplemente  $t + r$ , y luego si garantizamos además que

$$t + r \leq \varepsilon, \quad (2.15)$$

se mantendrá (2.12) por una simple inducción:

$$\begin{aligned} \frac{|z + tv + rw|^2}{\text{Tr}(A + tv \otimes v + rw \otimes w)} &\leq \frac{|z|^2 + (t + r)^2}{\text{Tr}(A) + (t + r)} \\ &\leq \max \left\{ \frac{|z|^2}{\text{Tr}(A)}, \frac{(t + r)^2}{t + r} \right\} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Por otro lado, debemos ver que la suma del vector corrector no modifique las condiciones (2.10) y (2.11) que conseguimos con el vector principal. Para esto, agregaremos, aparte de  $rw$  un nuevo desplazamiento en la barrera

superior de una cantidad fija  $\delta_U' > 0$ . Elegiremos  $rw$  para que además de satisfacer (2.14) satisfaga las condiciones:

$$\begin{aligned} \phi^{u+\delta_U+\delta_U'}(A + tv \otimes v + rw \otimes w) &\leq \phi^{u+\delta_U}(A + tv \otimes v) \\ \text{y } A + tv \otimes v + rw \otimes w &\prec (u + \delta_U + \delta_U')Id_n. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ya que  $A + tv \otimes v + rw \otimes w \succ A + tv \otimes v$ , la cota inferior resulta inmediata sin ser necesario desplazar la barrera:

$$\begin{aligned} \phi_{l+\delta_L+0}(A + tv \otimes v + rw \otimes w) &\leq \phi_{l+\delta_L}(A + tv \otimes v) \\ \text{con } A + tv \otimes v + rw \otimes w &\succ (l + \delta_L)Id_n. \end{aligned}$$

Esto junto con (2.13), garantiza que

$$\phi_{l+\delta_L}(A + tv \otimes v + rw \otimes w) \leq \phi_l(A) \leq P_L$$

y

$$\phi^{u+\delta_U+\delta_U'}(A + tv \otimes v + rw \otimes w) \leq \phi^u(A) \leq P_U$$

manteniendo las condiciones (2.10) y (2.11) como queríamos. Luego de  $s$  pasos, tendremos

$$(-1 + s\delta_l)Id_n \prec A \prec (1 + s(\delta_U + \delta_U'))Id_n.$$

Si tomamos  $s$  suficientemente grande, podemos conseguir que el cociente entre el autovalor más grande y el autovalor más chico de  $A$  sea arbitrariamente cercano a  $\frac{\delta_U+\delta_U'}{\delta_L}$ . Veremos que podemos realizar el proceso en  $s = O_\varepsilon(n)$  pasos de modo que  $\frac{\delta_U+\delta_U'}{\delta_L}$  sea arbitrariamente cercano a cuatro. Para el promedio, tomaremos  $u = -\frac{\sum_i b_i x_i}{\sum_i b_i} = -\frac{z}{Tr(A)}$  al final del proceso, obteniendo inmediatamente por (2.12) que

$$\left( \sum_i b_i \right) |u|^2 = \frac{|z|^2}{Tr(A)} \leq \varepsilon,$$

como queríamos.

Para completar la demostración, veremos una serie de lemas técnicos, que confirmarán la existencia de los vectores  $tv$  y  $rw$  que agregamos en cada paso. Estos lemas, que obtenemos del artículo [BSS12], nos proveen condiciones sobre los valores  $\delta_L$ ,  $\delta_U$ ,  $\delta_U'$ ,  $P_U$  y  $P_L$  de manera que existan los vectores para que las funciones potenciales estén acotadas como queremos. Antes de ver estos lemas, veremos un par de fórmulas para calcular la traza y el determinante de una matriz no singular al sumarle una matriz de rango uno.

**Lema 2.2.2** (Fórmula de Sherman-Morrison). *Si  $A$  es una matriz no singular en  $M_n(\mathbb{R})$  y  $v$  es un vector, entonces*

$$(A + v \otimes v)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}v v^t A^{-1}}{1 + v^t A^{-1}v}.$$

**Lema 2.2.3.** *Si  $A$  es una matriz no singular en  $M_n(\mathbb{R})$  y  $v$  un vector, entonces*

$$\det(A + v \otimes v) = \det(A) (1 + v^t A^{-1}v).$$

El primer lema se refiere al cambio de la barrera superior. Si cambiamos  $u$  por  $u + \delta_U$  sin cambiar la matriz  $A$ , entonces  $\phi^{u+\delta_U}(A) \leq \phi^u(A)$  dado que los autovalores de  $A$  no varían y  $u + \delta_U$  se aleja de ellos. Esto nos permite sumarle a la matriz  $A$  una matriz de la forma  $tv \otimes v$ , alejando los autovalores de  $l$  incrementando el potencial. El lema cuantifica qué tanto podemos agregar sin incrementar el potencial más de lo que teníamos antes de modificar la barrera superior.

**Lema 2.2.4** (Variación de la barrera superior). *Supongamos que  $A \prec uId_n$  y  $\delta_U > 0$ . Entonces existe una matriz definida positiva*

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}(A, u, \delta_U) := \frac{((u + \delta_U)Id_n - A)^{-2}}{\phi^u(A) - \phi^{u+\delta_U}(A)} + ((u + \delta_U)Id_n - A)^{-1},$$

tal que si  $v \in \mathbb{R}^n$  satisface

$$\frac{1}{t} \geq v^t \mathbb{U} v,$$

entonces

$$\phi^{u+\delta_U}(A + tv \otimes v) \leq \phi^u(A) \quad y \quad A + tv \otimes v \prec (u + \delta_U)Id_n.$$

Este lema nos dice que si agregamos  $t$  veces  $v \otimes v$  y corremos la barrera de  $u$  a  $u + \delta_U$ , entonces no incrementamos el potencial superior. Utilizaremos la notación  $\mathbb{U}(v)$  para la aplicación  $v^t \mathbb{U} v$ .

*Demostración.* Sea  $u' = u + \delta_U$ . Por el Lema 2.2.2, podemos escribir el

potencial superior como:

$$\begin{aligned}
\phi^{u'}(A + tv \otimes v) &= \text{Tr} \left( (u'Id_n - A - tv \otimes v)^{-1} \right) \\
&= \text{Tr} \left( (u'Id_n - A)^{-1} \right) \\
&\quad + \text{Tr} \left( \frac{t(u'Id_n - A)^{-1}v \otimes v(u'Id_n - A)^{-1}}{1 - tv^t(u'Id_n - A)^{-1}v} \right)
\end{aligned}$$

dado que la traza es lineal y que dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$  entonces  $\text{Tr}(xy^t) = y^t x$

$$\begin{aligned}
&= \text{Tr} \left( (u'Id_n - A)^{-1} \right) \\
&\quad + \frac{t \text{Tr} \left( v^t(u'Id_n - A)^{-1}(u'Id_n - A)^{-1}v \right)}{1 - tv^t(u'Id_n - A)^{-1}v} \\
&= \phi^{u'}(A) + \frac{tv^t(u'Id_n - A)^{-2}v}{1 - tv^t(u'Id_n - A)^{-1}v} \\
&= \phi^u(A) - (\phi^u(A) - \phi^{u'}(A)) + \frac{v^t(u'Id_n - A)^{-2}v}{\frac{1}{t} - v^t(u'Id_n - A)^{-1}v}.
\end{aligned}$$

Dado que  $A \prec uId_n \prec u'Id_n$ , entonces  $u'Id_n - A$  es una matriz definida positiva, luego  $(u'Id_n - A)^{-2}$  es definida positiva, con lo cual obtenemos  $v^t(u'Id_n - A)^{-2}v > 0$ . Además, como  $\phi^{u'}(A) < \phi^u(A)$ , tenemos que  $\frac{v^t((u+\delta_U)Id_n - A)^{-2}v}{\phi^u(A) - \phi^{u+\delta_U}(A)} > 0$  y luego  $\mathbb{U}(v) > v^t((u + \delta_U)Id_n - A)^{-1}v$ . Esto nos dice que la última igualdad es finita para los  $v$  tal que  $\frac{1}{t} \geq \mathbb{U}(v)$ , Sustituyendo  $\frac{1}{t}$  por  $\mathbb{U}(v)$  obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{v^t(u'Id_n - A)^{-2}v}{\frac{1}{t} - v^t(u'Id_n - A)^{-1}v} &\leq \frac{v^t(u'Id_n - A)^{-2}v}{\mathbb{U}(v) - v^t(u'Id_n - A)^{-1}v} \\
&= v^t(u'Id_n - A)^{-2}v \frac{\phi^u(A) - \phi^{u'}(A)}{v^t(u'Id_n - A)^{-2}v} \\
&= \phi^u(A) - \phi^{u'}(A).
\end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned}
\phi^{u'}(A + tv \otimes v) &= \phi^u(A) - (\phi^u(A) - \phi^{u'}(A)) + \frac{v^t(u'Id_n - A)^{-2}v}{\frac{1}{t} - v^t(u'Id_n - A)^{-1}v} \\
&\leq \phi^u(A) - (\phi^u(A) - \phi^{u'}(A)) + \phi^u(A) - \phi^{u'}(A) \\
&= \phi^u(A).
\end{aligned}$$

Esto también nos dice que

$$\lambda_{max}(A + tv \otimes v) < u + \delta_U,$$

donde  $\lambda_{max}(A + tv \otimes v)$  es el autovalor más grande de la matriz  $A + tv \otimes v$ , ya que si esto no ocurre como  $A \prec u'Id_n \preceq A + tv \otimes v$  entonces existe un

$t' \leq t$  para el cual  $\lambda_{\max}(A + t'v \otimes v) = u + \delta_U$ . Pero para tal  $t'$  tendríamos que  $\phi^{u'}(A + t'v \otimes v)$  es infinito, que contradice lo que habíamos probado ya que para el vector  $v$  tenemos  $\mathbb{U}(v) \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{t'}$ .  $\square$

El segundo lema trata sobre la variación de la barrera inferior. En este caso, a diferencia de la barrera superior, al correr la barrera  $l$  a  $l + \delta_L$ , si mantenemos fija a la matriz  $A$ , tenemos que el potencial aumenta ya que la barrera se acerca a los autovalores. Agregando el vector  $tv \otimes v$  tenemos que los autovalores se alejan de la barrera, disminuyendo el potencial. El lema cuantifica cuánto de  $v \otimes v$  necesitamos agregar para compensar el desplazamiento de la barrera, retornando el potencial a su valor original antes del desplazamiento.

**Lema 2.2.5** (Variación de la barrera inferior). *Supongamos que  $A \succ lId_n$ ,  $\delta_L > 0$  y  $\phi_l(A) < \frac{1}{\delta_L}$ . Entonces existe una matriz*

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}(A, l, \delta_L) := \frac{(A - (l + \delta_L)Id_n)^{-2}}{\phi_{l+\delta_L}(A) - \phi_l(A)} - (A - (l + \delta_L)Id_n)^{-1},$$

tal que si  $v \in \mathbb{R}^n$  satisface

$$0 < \frac{1}{t} \leq v^t \mathbb{L} v,$$

entonces

$$\phi_{l+\delta_L}(A) \leq \phi_l(A) \quad \text{y} \quad A + tv \otimes v \succ (l + \delta_L)Id_n.$$

Es decir, que si agregamos  $t$  veces  $v \otimes v$  a la matriz  $A$  y desplazamos la barrera inferior  $\delta_L$ , entonces no incrementamos el potencial.

*Demostración.* Observamos primero que el autovalor más chico de  $A$  es mayor que  $l$ , luego como  $\frac{1}{\delta_L} \geq \phi_l(A) > \frac{1}{\lambda_{\min}(A) - l}$ , donde  $\lambda_{\min}(A)$  es justamente el autovalor más chico de  $A$ , entonces  $\lambda_{\min}(A) > l + \delta_L$ . Luego, para  $t > 0$ ,  $\lambda_{\min}(A + tv \otimes v) \geq \lambda_{\min}(A) > l + \delta_L$ . Es decir que  $A + tv \otimes v \succ (l + \delta_L)Id_n$ .

Seguiremos ahora como en la demostración del potencial superior. Sea  $l' = l + \delta_L$ . Por el Lema 2.2.2, tenemos que :

$$\begin{aligned} \phi_{l'}(A + tv \otimes v) &= Tr \left( (A + tv \otimes v - l'Id_n)^{-1} \right) \\ &= Tr \left( (A - l'Id_n)^{-1} + \frac{t(A - l'Id_n)^{-1}v \otimes v(A - l'Id_n)^{-1}}{1 + tv^t(A - l'Id_n)^{-1}v} \right) \\ &= Tr \left( (A - l'Id_n)^{-1} \right) - \frac{tTr \left( v^t(A - l'Id_n)^{-1}(A - l'Id_n)^{-1}v \right)}{1 + tv^t(A - l'Id_n)^{-1}v} \\ &= \phi_{l'}(A) - \frac{tv^t(A - l'Id_n)^{-2}v}{1 + tv^t(A - l'Id_n)^{-1}v} \\ &= \phi_l(A) + (\phi_{l'}(A) - \phi_l(A)) - \frac{v^t(A - l'Id_n)^{-2}v}{\frac{1}{t} + v^t(A - l'Id_n)^{-1}v}. \end{aligned}$$

Nuevamente si  $v^t L v \geq \frac{1}{t}$  entonces  $\frac{1}{t} + v^t(A - l'Id_n)^{-1}v \leq \frac{v^t(A - l'Id_n)^{-2}v}{\phi_{l'}(A) - \phi_l(A)}$  y luego tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_{l'}(A + tv \otimes v) &= \phi_l(A) + (\phi_{l'}(A) - \phi_l(A)) - \frac{v^t(A - l'Id_n)^{-2}v}{\frac{1}{t} + v^t(A - l'Id_n)^{-1}v} \\ &\leq \phi_l(A) + (\phi_{l'}(A) - \phi_l(A)) \\ &\quad - v^t(A - l'Id_n)^{-2}v \frac{\phi_{l'}(A) - \phi_l(A)}{v^t(A - l'Id_n)^{-2}v} \\ &= \phi_l(A) + (\phi_{l'}(A) - \phi_l(A)) - (\phi_{l'}(A) - \phi_l(A)) \\ &= \phi_l(A). \end{aligned}$$

como queríamos. □

En el tercer lema veremos cotas para las trazas de las matrices obtenidas en los Lemas 2.2.5 y 2.2.4. Anteriormente dimos la notación  $A(v) = v^t A v$ , para  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Esto induce una operación de la matriz  $A$  sobre las matrices simétricas definidas positivas, dada por  $A \bullet B = \sum_{i=1}^m A(v_i)$  si  $B = \sum_{i=1}^m v_i \otimes v_i$ . Esta operación está bien definida pues si  $B = \sum_{i=1}^m v_i \otimes v_i = \sum_{j=1}^l w_j \otimes w_j$ , entonces tenemos que  $\sum_{i=1}^m v_{is} v_{ih} = \sum_{j=1}^l w_{js} w_{jh}$  para cada  $1 \leq s, h \leq n$ , luego tenemos que

$$\sum_{i=1}^m v_i^t A v_i = \sum_{s,h=1}^n A_{sh} \left( \sum_{i=1}^m v_{is} v_{ih} \right) = \sum_{s,h=1}^n A_{sh} \left( \sum_{j=1}^l w_{js} w_{jh} \right) = \sum_{j=1}^l w_j^t A w_j,$$

y es además lineal sobre estas matrices. Luego para esta operación tenemos que  $A \bullet Id_n = A \bullet \left( \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i \right) = \sum_{i=1}^n e_i^t A e_i = Tr(A)$ .

**Lema 2.2.6** (Trazas de  $\mathbb{L}$  y  $\mathbb{U}$ ). *Si  $lId_n \prec A \prec uId_n$  con  $\phi_l(A) \leq P_L$  y  $\phi^u(A) \leq P_U$  entonces  $Tr(\mathbb{U}) \leq \frac{1}{\delta_U} + P_U$  y  $Tr(\mathbb{L}) \geq \frac{1}{\delta_L} - P_L$ .*

*Donde  $\mathbb{U}$  y  $\mathbb{L}$  son las matrices dadas en los Lemas 2.2.4 y 2.2.5 respectivamente.*

*Demostración.* Sea  $\sum_i v_i \otimes v_i = Id_n$  una descomposición de la identidad.

Por lo dicho anteriormente tenemos que las trazas se  $\mathbb{U}$  y  $\mathbb{L}$  verifican

$$\begin{aligned}
Tr(\mathbb{U}) &= \sum_i v_i^t \mathbb{U} v_i \\
&= \frac{\sum_i v_i^t ((u + \delta_U) Id_n - A)^{-2} v_i}{\phi^u(A) - \phi^{u+\delta_U}(A)} + \sum_i v_i^t ((u + \delta_U) Id_n - A)^{-1} v_i \\
&= \frac{Tr(((u + \delta_U) Id_n - A)^{-2})}{\phi^u(A) - \phi^{u+\delta_U}(A)} + Tr(((u + \delta_U) Id_n - A)^{-1}) \\
&= \frac{\sum_j (u + \delta_U - \lambda_j)^{-2}}{\sum_j (u - \lambda_j)^{-1} - \sum_j (u\delta_u - \lambda_j)^{-1}} + \phi^{u+\delta_U}(A) \\
&= \frac{\sum_j (u + \delta_U - \lambda_j)^{-2}}{\delta_U \sum_j (u - \lambda_j)^{-1} (u\delta_u - \lambda_j)^{-1}} + \phi^{u+\delta_U}(A)
\end{aligned}$$

dado que  $\sum_j (u - \lambda_j)^{-1} (u\delta_u - \lambda_j)^{-1} \geq \sum_j (u + \delta_U - \lambda_j)^{-2}$  entonces

$$\begin{aligned}
Tr(\mathbb{U}) &\leq \frac{1}{\delta_U} + \phi^{u+\delta_U}(A) \\
&\leq \frac{1}{\delta_U} + \phi^u(A) \leq \frac{1}{\delta_U} + P_U.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr(\mathbb{L}) &= \sum_i v_i^t \mathbb{L} v_i \\
&= \frac{\sum_i v_i^t (A - (l + \delta_L) Id_n)^{-2} v_i}{\phi_{l+\delta_L}(A) - \phi_l(A)} - \sum_i v_i^t (A - (l + \delta_L) Id_n)^{-1} v_i \\
&= \frac{Tr((A - (l + \delta_L) Id_n)^{-2})}{\phi_{l+\delta_L}(A) - \phi_l(A)} - Tr((A - (l + \delta_L) Id_n)^{-1}) \\
&= \frac{\sum_j (\lambda_j - l - \delta_L)^{-2}}{\sum_j (\lambda_j - l - \delta_L)^{-1} - \sum_j (\lambda_j - l)^{-1}} - \sum_j (\lambda_j - l - \delta_L)^{-1} \\
&\geq \frac{1}{\delta_L} - \sum_j (\lambda_j - l)^{-1} = \frac{1}{\delta_L} - \phi_l(A) \geq \frac{1}{\delta_L} - P_L.
\end{aligned}$$

Donde la anteúltima desigualdad proviene del lema que veremos a continuación.  $\square$

**Lema 2.2.7.** Si  $\lambda_j > l$  para todo  $j$ ,  $0 \leq \sum_j (\lambda_j - l)^{-1} \leq P_L$ , y  $\frac{1}{\delta_L} - P_L \geq 0$ ,

entonces

$$\frac{\sum_j (\lambda_j - l - \delta_L)^{-2}}{\sum_j (\lambda_j - l - \delta_L)^{-1} - \sum_j (\lambda_j - l)^{-1}} - \sum_j (\lambda_j - l - \delta_L)^{-1} \geq \frac{1}{\delta_L} - \sum_j \frac{1}{\lambda_j - l}.$$

*Demostración.* Tenemos que

$$\delta_L \leq \frac{1}{P_L} \leq \lambda_i - l,$$

para todo  $i$ . Luego  $\frac{1}{\lambda_j - l - \delta_L} > \frac{1}{\lambda_j - l}$  lo que implica que

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_j - l - \delta_L} - \sum_j \frac{1}{\lambda_j - l} > 0.$$

Es decir que la desigualdad que queremos probar es equivalente a ver que la suma  $\sum_j (\lambda_j - l - \delta_L)^{-2}$  es al menos

$$\begin{aligned} & \left( \sum_j \frac{1}{\lambda_j - l - \delta_L} - \sum_j \frac{1}{\lambda_j - l} \right) \left( \frac{1}{\delta_L} + \sum_j \frac{1}{\lambda_j - l - \delta_L} - \sum_j \frac{1}{\lambda_j - l} \right) \\ &= \left( \delta_L \sum_i \frac{1}{(\lambda_i - l - \delta_L)(\lambda_i - l)} \right) \left( \frac{1}{\delta_L} + \delta_L \sum_i \frac{1}{(\lambda_i - l - \delta_L)(\lambda_i - l)} \right) \\ &= \sum_i \frac{1}{(\lambda_i - l - \delta_L)(\lambda_i - l)} + \left( \delta_L \sum_i \frac{1}{(\lambda_i - l - \delta_L)(\lambda_i - l)} \right)^2, \end{aligned}$$

la cual, moviendo el primer término del lado derecho de la desigualdad al lado izquierdo, es justamente

$$\left( \delta_L \sum_i \frac{1}{(\lambda_i - l - \delta_L)(\lambda_i - l)} \right)^2 \leq \delta_L \sum_i \frac{1}{(\lambda_j - l - \delta_L)^2 (\lambda_i - l)}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz,  $\left( \delta_L \sum_i \frac{1}{(\lambda_i - l - \delta_L)(\lambda_i - l)} \right)^2$  resulta acotado por

$$\begin{aligned} & \left( \delta_L \sum_i \frac{1}{\lambda_i - l} \right) \left( \delta_L \sum_i \frac{1}{(\lambda_j - l - \delta_L)^2 (\lambda_i - l)} \right) \\ & \leq (\delta_L P_L) \left( \delta_L \sum_i \frac{1}{(\lambda_j - l - \delta_L)^2 (\lambda_i - l)} \right) \\ & \leq \left( \delta_L \sum_i \frac{1}{(\lambda_j - l - \delta_L)^2 (\lambda_i - l)} \right), \text{ ya que } \frac{1}{\delta_L} - P_L \geq 0, \end{aligned}$$

lo que prueba la desigualdad.  $\square$



Veremos ahora las condiciones sobre las cuales podemos encontrar un  $tv \otimes v$  para que al agregarlo mantengamos ambos potenciales desplazando las barreras. Utilizaremos un argumento de promedios, relacionando el vector actual con el esperado. En esta prueba la variable  $t$ , de los que surgen eventualmente los pesos  $s_i$ , es crucial.

**Lema 2.2.8** (Un paso). *Supongamos que  $\{(c_i, x_i)\}_{i \leq m}$  es una descomposición de la identidad y  $z$  un vector cualquiera. Sea  $A \succeq 0$  una matriz satisfaciendo las condiciones (2.10) y (2.11). Si*

$$\frac{1}{\delta_U} + \frac{1}{\delta_{U'}} + 2P_U + P_L + \frac{4n}{\varepsilon} \leq \frac{1}{\delta_L}. \quad (2.17)$$

Entonces existen escalares  $t, r \geq 0$  y vectores  $v, w \in \{x_i\}_{i \leq m}$  que satisfacen las condiciones (2.13), (2.14), (2.15) y (2.16).

*Demostración.* Sean  $\mathbb{L} = \mathbb{L}(A, l, \delta_L)$ ,  $\mathbb{U} = \mathbb{U}(A, u, \delta_U)$  y  $\mathbb{U}' = \mathbb{U}(A, u + \delta_U, \delta_{U'})$  las matrices dadas en los Lemas 2.2.4 y 2.2.5.

Nos enfocaremos primero en ver que existe el vector que llamamos principal. Por los Lemas 2.2.4 y 2.2.5, podemos agregar un  $tv$  sin incrementar los potenciales si

$$v^t \mathbb{U} v \leq \frac{1}{t} \leq v^t \mathbb{L} v.$$

De hecho, pediremos  $v$  para el cual

$$v^t \mathbb{U} v + \frac{2}{\varepsilon} \leq \frac{1}{t} \leq v^t \mathbb{L} v,$$

de esta manera nos aseguraremos de tomar  $t \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Sea  $D(v) := v^t \mathbb{L} v - v^t \mathbb{U} v - \frac{2}{\varepsilon}$  y llamaremos  $\mathcal{F} := \{x_i : D(x_i) \geq 0\}$  el conjunto de los vectores para los cuales es posible la desigualdad. Sea  $\mathcal{P} = \{x_i : \langle x_i, z \rangle > 0\}$  el conjunto de los vectores cuyo producto interno con  $z$  es positivo, y sea  $\mathcal{N} = \{x_i : \langle x_i, z \rangle \leq 0\}$  el conjunto de vectores en el semiespacio complementario. El conjunto  $\mathcal{F}$  es no vacío. En efecto, supongamos que no, luego para todo  $x_i$  tenemos que  $x_i^t \mathbb{U} x_i + \frac{2}{\varepsilon} > x_i^t \mathbb{L} x_i$  multiplicando por  $c_i$  y sumando en  $i$  tenemos

$$\sum_i c_i x_i^t \mathbb{U} x_i + \sum_i c_i \frac{2}{\varepsilon} > \sum_i c_i x_i^t \mathbb{L} x_i,$$

pero el término de la izquierda es justamente  $Tr(\mathbb{U}) + \frac{2n}{\varepsilon}$  mientras que el de la derecha es  $Tr(\mathbb{L})$ . Luego por el Lema 2.2.6 tenemos que

$$\frac{1}{\delta_u} + P_U + \frac{2n}{\varepsilon} \geq Tr(\mathbb{U}) + \frac{2n}{\varepsilon} > Tr(\mathbb{L}) \geq \frac{1}{\delta_L} - P_L,$$

lo que contradice la desigualdad que verifican las constantes ya que por hipótesis  $\frac{1}{\delta_u} + P_U + \frac{2n}{\varepsilon} < \frac{1}{\delta_U} + \frac{1}{\delta_{U'}} + 2P_U + \frac{4n}{\varepsilon} \leq \frac{1}{\delta_L} - P_L$ .

Dado que siempre intentaremos agregar  $tv \otimes v$  con  $t$  lo más chico posible, siempre que  $v \in \mathcal{F}$  podemos suponer que  $\frac{1}{t} = v^t \mathbb{L}v$ . El procedimiento para elegir el vector  $v$  a agregar es el siguiente: elegiremos el vector  $v$  que verifica la desigualdad previa que minimice  $t\langle v, z \rangle$ . Si esta cantidad es negativa o nula entonces no hay necesidad de un vector corrector, y tomando  $w = 0$  terminamos el paso. De otra manera sea  $\alpha := \min\{t\langle v, z \rangle : v \in \mathcal{F}\} > 0$ , tenemos que  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$  y para  $v \in \mathcal{F}$  se verifica que  $\frac{\langle v, z \rangle}{\alpha} \geq \frac{1}{t} = v^t \mathbb{L}v$ . Luego, multiplicando por los  $c_i$  y sumando obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{P}} c_i \frac{\langle x_i, z \rangle}{\alpha} &\geq \sum_{\mathcal{F}} c_i \frac{\langle x_i, z \rangle}{\alpha} \text{ ya que } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P} \\ &\geq \sum_{\mathcal{F}} x_i^t \mathbb{L}x_i \\ &\geq \sum_{\mathcal{F}} c_i D(x_i) \text{ ya que } \mathbb{U} \succeq 0 \text{ implica que } D(x_i) \leq x_i^t \mathbb{L}x_i \\ &\geq \sum_i c_i D(x_i) \text{ pues } D < 0 \text{ fuera de } \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Dado que  $\sum_i c_i x_i = 0$ , tenemos que  $\sum_i c_i \frac{\langle x_i, z \rangle}{\alpha} = 0$  y luego

$$\sum_{\mathcal{N}} c_i \frac{\langle x_i, -z \rangle}{\alpha} = \sum_{\mathcal{P}} c_i \frac{\langle x_i, z \rangle}{\alpha} \geq \sum_i c_i D(x_i). \quad (2.18)$$

Usaremos la ecuación (2.18) para probar que el vector corrector  $w$  existe. Buscaremos un  $w \in \{x_i\}_{i \leq m}$  y  $r \geq 0$  que verifiquen las siguientes desigualdades. Por un lado que  $r\langle w, -z \rangle \geq \alpha$ , de esta forma si  $\alpha = t\langle v, z \rangle$  entonces  $0 \geq \alpha\langle rw, z \rangle = \langle tv + rw, z \rangle$  obteniendo así la condición (2.14). Por otro lado buscaremos que  $w^t \mathbb{U}' w + \frac{2}{\varepsilon} \leq \frac{1}{r}$ , de este modo podemos utilizar el Lema 2.2.4 con una variación  $\delta_{U'}$  y  $r \leq \frac{\varepsilon}{2}$  obteniendo así las condiciones (2.15) y (2.16). Luego, es suficiente encontrar un  $w$  para el cual

$$w^t \mathbb{U}' w + \frac{2}{\varepsilon} \leq \frac{\langle w, -z \rangle}{\alpha},$$

y así tomar  $r$  entre ambos. Para ver esto, es suficiente mostrar que

$$\sum_{\mathcal{N}} c_i x_i^t \mathbb{U}' x_i + \frac{2c_i}{\varepsilon} \leq \sum_{\mathcal{N}} \frac{c_i \langle x_i, -z \rangle}{\alpha}.$$

Ahora, por el lado izquierdo de la desigualdad tenemos la cota

$$\sum_{\mathcal{N}} c_i x_i^t \mathbb{U}' x_i + \frac{2c_i}{\varepsilon} \leq \sum_{\mathcal{N} \cup \mathcal{P}} c_i x_i^t \mathbb{U}' x_i + \frac{2c_i}{\varepsilon} = \text{Tr}(\mathbb{U}') + \frac{2n}{\varepsilon},$$

mientras que el lado derecho podemos acotarlo como

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{N}} \frac{c_i \langle x_i, -z \rangle}{\alpha} &\geq \sum_i c_i D(x_i) \\ &= \sum_i c_i x_i^t \mathbb{L} x_i - c_i x_i^t \mathbb{U} x_i - \frac{2c_i}{\varepsilon} \\ &= \text{Tr}(\mathbb{L}) - \text{Tr}(\mathbb{U}) - \frac{2n}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Es decir, que alcanzará con ver que  $\text{Tr}(\mathbb{U}') + \frac{2n}{\varepsilon} \leq \text{Tr}(\mathbb{L}) - \text{Tr}(\mathbb{U}) - \frac{2n}{\varepsilon}$ , o sea  $\text{Tr}(\mathbb{U}') + \text{Tr}(\mathbb{U}) + \frac{4n}{\varepsilon} \leq \text{Tr}(\mathbb{L})$ . Por el Lema 2.2.6 tenemos que

$$\text{Tr}(\mathbb{U}') + \text{Tr}(\mathbb{U}) \leq \frac{1}{\delta_{U'}} + P_U + \frac{1}{\delta_U} + P_U \quad \text{y} \quad \text{Tr}(\mathbb{L}) \geq \frac{1}{\delta_L} - P_L.$$

Nuevamente, basta con ver que

$$\frac{1}{\delta_{U'}} + \frac{1}{\delta_U} + 2P_U + \frac{4n}{\varepsilon} \leq \frac{1}{\delta_L} - P_L,$$

pero esta es justamente la hipótesis sobre las constantes que tenemos.  $\square$

Estamos ahora en condiciones de realizar la demostración del Teorema 2.2.1.

*Demostración del Teorema 2.2.1.* Si comenzamos con  $l_0 = -1$  y  $u_0 = 1$ , como habíamos mencionado anteriormente, podemos tomar  $P_L = P_U = n$ . Tomando  $\delta_U = \delta_{U'} = (2 + \varepsilon)\delta_L$ , la condición (2.17) se reduce a

$$\frac{2}{(2 + \varepsilon)\delta_L} + 3n + \frac{4n}{\varepsilon} \leq \frac{1}{\delta_L},$$

lo cual se satisface para  $\delta_L \leq \frac{\varepsilon^2}{(2+\varepsilon)(3\varepsilon+4)n}$  y en particular para  $\delta_L = \frac{\varepsilon^2}{10n}$ .

Al final de  $s$  pasos tomamos

$$u = -\frac{\sum_i b_i x_i}{\sum_i b_i} = -\frac{z}{\text{Tr}(A)},$$

satisfaciendo de forma inmediata las condiciones (2.8) y (2.9). Para finalizar la demostración, notemos que como

$$\text{Tr}(A)u \otimes u \preceq \text{Tr}(A)|u|^2 Id_n = \frac{|z|^2}{\text{Tr}(A)} Id_n$$

y

$$(1 + s\delta_L)Id_n \preceq A \preceq (1 + s(\delta_U + \delta_{U'}))Id_n = (1 + s2(2 + \varepsilon)\delta_L)Id_n.$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \left(-1 + s\delta_L - \frac{|z|^2}{Tr(A)}\right) Id_n &\preceq \sum_i b_i(x_i + u) \otimes (x_i + u) = A - Tr(A)u \otimes u \\ &\preceq (1 + s2(2 + \varepsilon)\delta_L)Id_n \end{aligned}$$

Tomando  $s = \frac{100n}{\varepsilon^3}$  y reemplazando  $\varepsilon$  por  $\frac{\varepsilon}{3}$  tenemos (2.7), como queríamos.  $\square$

### 2.3. Descomposición $(1+\varepsilon)$ -aproximada de la identidad

En esta Sección presentaremos el trabajo realizado por Friedland y Youssef en [FY16] en los cuales se mejoran los resultados sobre la descomposición aproximada de la identidad presentados en la Sección 2.2. En este paper utilizan los resultados dados por Marcus, Spielman y Srivastava en [MSS13] para la resolución del problema de Kadison-Singer que veremos en la Sección 2.4. Dados  $n, m \in \mathbb{R}^n$  y  $A$  una matriz de tamaño  $n \times m$ , recordemos que los *valores singulares* de  $A$  son los  $s_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^t A)}$  para  $i = 1 \cdots, m$ , donde los  $\lambda_i(A^t A)$  son los autovalores de la matriz  $A^t A$  reordenados en forma decreciente. Definiendo la *norma de Hilbert-Schmidt* para matrices no cuadradas como

$$\|A\|_{HS} = \sqrt{Tr(A^t A)} = \sqrt{\sum_{i \leq m} s_i(A)^2},$$

podemos definir a partir de esta el *rango estable* de una matriz  $A$  como

$$srnk(A) := \frac{\|A\|_{HS}^2}{\|A\|^2},$$

donde  $\|A\|$  es la norma de matrices inducida por la norma Euclídea fijada en el primer capítulo. Veremos que cualquier matriz puede ser aproximada en norma de operadores por una submatriz con un número de columnas del orden del rango estable de  $A$ . Como consecuencia de las técnicas aplicadas, veremos que de cualquier descomposición de la identidad puede extraerse una  $(1+\varepsilon)$ -descomposición aproximada de la identidad con a lo sumo  $O_\varepsilon(n)$  puntos, lo que mejora los resultados de la Sección 2.2.

Dada una matriz  $A$  con coeficientes reales de tamaño  $n \times m$ , los valores singulares dan una idea de que tan cerca está de ser un isomorfismo. Esto se debe a que  $s_1(A) = \sup_{x \in S^{m-1}} |Ax| = \|A\|$ , la norma de  $A$  como operador. Mientras que  $s_m(A) = \inf_{x \in S^{m-1}} |Ax|$ . Luego tenemos que

$$s_{min}(A)|x| \leq |Ax| \leq s_{max}(A)|x|.$$

Esto nos dice que si el menor valor singular es no nulo, entonces el operador es inyectivo y luego  $A$  es un isomorfismo con su imagen, con una distorsión que tendrá que ver con la relación entre el valor singular más grande y el más chico. Del mismo modo, utilizando la fórmula de Courant-Fisher que afirma que  $s_k(A) = \min_{|x|=1, x \in S_{k-1}^\perp} |Ax|$ , donde  $S_{k-1}$  denota al subespacio generado por los autovectores  $v_0, \dots, v_{k-1}$  asociados a los autovalores ya calculados, podemos caracterizar todos los valores singulares de  $A$ . De esta manera, los valores singulares determinan la acción de la matriz.

El primer problema que veremos será el de encontrar un subespacio de coordenadas de  $\mathbb{R}^n$  tal que la restricción de  $A$  a dicho subespacio aproxime la acción del operador. Para esto, buscaremos  $\sigma \subseteq \{1, \dots, m\}$  tal que  $AP_\sigma$ , donde  $P_\sigma$  denota la proyección sobre el subespacio de coordenadas dado por los índices en  $\sigma$ , verifique que  $|(AP_\sigma)(AP_\sigma)^t - AA^t|$  sea chico. Esto nos asegura que el espectro de  $(AP_\sigma)(AP_\sigma)^t$  es cercano al de  $AA^t$  implicando lo mismo para los valores singulares. Si miramos sobre cualquier subespacio, no siendo necesariamente uno de coordenadas, elegiremos uno generado por los vectores asociados a los valores singulares más grandes, ya que los más chicos se aproximan por cero. Esto nos sugiere que la dimensión del subespacio de menor tamaño al que podemos restringirnos está dada por la cantidad de valores singulares de gran tamaño. El rango estable justamente nos indica esto. Es claro que el  $srnk(A)$  de  $A$  es a lo sumo el rango de  $A$ , por otro lado ya que el rango estable es la división entre la suma de todos los valores singulares al cuadrado sobre el cuadrado del más grande, el valor final no tiene en cuenta a los valores singulares chicos. Es por esto que es natural extraer un número de columnas del orden del rango estable para aproximarnos a la matriz.

En el primer resultado referido a este problema, se encuentra un multiset  $\sigma \subseteq \{1, \dots, m\}$  para el cual la matriz  $A_\sigma$  que contiene a las columnas indexadas por  $\sigma$  aproxima a la matriz  $A$ . En la matriz  $A$  se repetirán las columnas cuyos índices se repitan en  $\sigma$  lo que marcará el peso de dichas columnas.

**Teorema 2.3.1.** *Existe una constante universal  $c$  tal que vale lo siguiente. Sean  $n, m \in \mathbb{N}$  y  $A$  una matriz de tamaño  $n \times m$ . Denotamos  $\tilde{A}$  a la matriz que se obtiene normalizando las columnas de  $A$ . Para cualquier  $\varepsilon \in (0, 1)$ , existe un multiset  $\sigma \subseteq \{1, \dots, m\}$  de tamaño a lo sumo  $\lceil \frac{srnk(A)}{c\varepsilon^2} \rceil$  tal que*

$$\left\| c\varepsilon^2 \|A\|^2 \tilde{A}_\sigma \tilde{A}_\sigma^t - AA^t \right\| \leq \varepsilon \|A\|^2.$$

*Más aún si  $A = k\tilde{A}$  para algún  $k > 0$ , entonces el resultado vale con  $\sigma$  siendo un conjunto.*

El resultado de este teorema es sólo existencial y no nos da un algoritmo para extraer las columnas. Esto se debe esencialmente a que la prueba se

basa en la solución al problema de Kadison-Singer antes mencionada, la cuál no es constructiva. Usando el método de entrelazar polinomios, Marcus, Spielman y Srivastava prueban el siguiente teorema y muestran que implica el problema de Kadison-Singer.

**Teorema 2.3.2.** *Sea  $\varepsilon > 0$  y sean  $v_1, \dots, v_m$  vectores aleatorios independientes en  $\mathbb{R}^n$  con soporte finito, tal que  $\mathbb{E} \left( \sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i \right) = Id_n$  y  $\mathbb{E} (|v_i|^2) \leq \varepsilon$  para todo  $i$ . Entonces*

$$\mathbb{P} \left( \left\| \sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i \right\| \leq (1 + \sqrt{\varepsilon})^2 \right) > 0.$$

Antes de ver el Teorema 2.3.1 demostraremos algunos resultado que nos permitirán realizar la prueba.

**Proposición 2.3.3.** *Sea  $\delta > 0$  y sean  $v_1, \dots, v_m$  vectores aleatorios independientes en  $\mathbb{R}^n$  con soporte finito, tal que  $B := \mathbb{E} \left( \sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i \right)$  es una matriz simétrica semidefinida positiva de tamaño  $n \times n$  y  $\mathbb{E} (|v_i|^2) \leq \delta$  para todo  $i$ . Entonces*

$$\mathbb{P} \left( \sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i \preceq B + \gamma Id_n \right) > 0$$

donde  $\gamma := \gamma(\delta, B) = \|B\| \left[ \left(1 + \sqrt{\frac{\delta}{\|B\|}}\right)^2 - 1 \right]$ .

*Demostración.* Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $B \preceq Id_n$ , ya que tomando  $\tilde{B} := \frac{B}{\|B\|}$ ,  $\tilde{v}_i := \frac{v_i}{\sqrt{\|B\|}}$  y  $\tilde{\delta} := \frac{\delta}{\|B\|}$  tenemos que la matriz  $\tilde{B}$  puede escribirse como  $\mathbb{E} \left( \sum_{i \leq m} \tilde{v}_i \otimes \tilde{v}_i \right)$  siendo simétrica semidefinida positiva y  $\mathbb{E} (|\tilde{v}_i|^2) \leq \tilde{\delta}$ . Luego si probamos el teorema para  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{v}_i$ , y  $\tilde{\delta}$  y teniendo a

$$\tilde{\gamma} := \|\tilde{B}\| \left[ \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{\delta}}{\|\tilde{B}\|}}\right)^2 - 1 \right] = \frac{\|B\|}{\|B\|} \left[ \left(1 + \sqrt{\frac{\delta}{\|B\|}}\right)^2 - 1 \right],$$

es decir que  $\|B\|\tilde{\gamma} = \gamma$ , obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &< \mathbb{P} \left( \sum_{i \leq m} \tilde{v}_i \otimes \tilde{v}_i \preceq \tilde{B} + \tilde{\gamma} Id_n \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \frac{1}{\|B\|} \sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i \preceq \frac{1}{\|B\|} (B + \gamma Id_n) \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i \preceq B + \gamma Id_n \right), \end{aligned}$$

como queríamos. Luego para  $B \preceq Id_n$ , notamos  $C := Id_n - B$  que es una matriz simétrica semidefinida positiva y puede escribirse como  $\sum_{i \leq n} \lambda_i u_i \otimes u_i$  con  $\lambda_i$  los autovalores de  $C$  y  $u_i$  el autovector de norma uno asociado a  $\lambda_i$  para cada  $i$  (que son los mismos que los de la matriz  $B$ ). Para cada  $i$ , si  $\lambda_i \leq \delta$  entonces definimos  $\tilde{u}_i = \sqrt{\lambda_i} u_i$ , luego  $|\tilde{u}_i|^2 = \lambda_i |u_i|^2 = \lambda_i \leq \delta$ . Si  $\lambda_i > \delta$ , entonces

$$\begin{aligned} \lambda_i u_i \otimes u_i &= \underbrace{\delta u_i \otimes u_i + \cdots + \delta u_i \otimes u_i}_{\left[\frac{\lambda_i}{\delta}\right] \text{ veces}} + \left( \lambda_i - \delta \left[ \frac{\lambda_i}{\delta} \right] \right) u_i \otimes u_i \\ &= (\sqrt{\delta} u_i) \otimes (\sqrt{\delta} u_i) + \cdots + (\sqrt{\delta} u_i) \otimes (\sqrt{\delta} u_i) \\ &\quad + \left( \sqrt{\left( \lambda_i - \delta \left[ \frac{\lambda_i}{\delta} \right] \right)} u_i \right) \otimes \left( \sqrt{\left( \lambda_i - \delta \left[ \frac{\lambda_i}{\delta} \right] \right)} u_i \right), \end{aligned}$$

luego renombrando cada uno de los vectores en la suma, concluimos que podemos escribir  $C = \sum_{i \leq k} \tilde{u}_i \otimes \tilde{u}_i$  tal que para todo  $i \leq k$  se verifica que  $|\tilde{u}_i|^2 \leq \delta$ .

Definimos la secuencia de vectores aleatorios independientes en  $\mathbb{R}^n$

$$\tilde{v}_i := \begin{cases} v_i & i \leq m \\ \tilde{u}_{i-m} & m+1 \leq i \leq m+k \end{cases}$$

Los  $\tilde{v}_i$  satisfacen que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{i \leq m+k} \tilde{v}_i \otimes \tilde{v}_i \right) &= \mathbb{E} \left( \sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i \right) + \mathbb{E} \left( \sum_{i \leq k} \tilde{u}_i \otimes \tilde{u}_i \right) \\ &= B + \mathbb{E}(C) = B + Id_n - B \\ &= Id_n, \end{aligned}$$

y

$$\mathbb{E}(|\tilde{v}_i|^2) = \begin{cases} \mathbb{E}(|v_i|^2) \leq \delta & \text{si } i \leq m \\ \mathbb{E}(|\tilde{u}_{i-m}|^2) \leq \mathbb{E}(\delta) = \delta & \text{si } m+1 \leq i \leq m+k \end{cases}$$

Aplicando el Teorema 2.3.2 tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\left\|\sum_{i \leq m+k} \tilde{v}_i \otimes \tilde{v}_i\right\| \leq (1 + \sqrt{\delta})^2\right) > 0,$$

lo que implica que  $\mathbb{P}\left(\sum_{i \leq m+k} \tilde{v}_i \otimes \tilde{v}_i \preceq (1 + \sqrt{\delta})^2 Id_n\right) > 0$ . Luego como  $\sum_{i \leq m+k} \tilde{v}_i \otimes \tilde{v}_i = \sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i + Id_n - B$  y del hecho de que  $\|B\| = 1$  implica que  $\gamma = (1 + \sqrt{\delta})^2 - 1$ , entonces tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i \preceq B + Id_n \left((1 + \sqrt{\delta})^2 - 1\right)\right) > 0$$

como queríamos.  $\square$

Deducimos el siguiente resultado

**Corolario 2.3.4.** *Sea  $\delta > 0$  y sea  $A = \sum_{i \leq m} u_i \otimes u_i$  una matriz de tamaño  $n \times n$  donde  $u_i \in \mathbb{R}^n$  y  $|u_i|^2 \leq \delta$ . Entonces existe  $\sigma \subseteq \{1, \dots, m\}$  con  $|\sigma| \leq \frac{m}{2}$  tal que*

$$\left\|2 \sum_{i \in \sigma} u_i \otimes u_i - A\right\| \leq \gamma,$$

donde  $\gamma = \gamma(2\delta, A)$  es la constante de la Proposición 2.3.3.

*Demostración.* Para cada  $i \leq m$ , definimos los vectores  $2n$  – dimensional dados por

$$w_{i,1} := \begin{pmatrix} u_i \\ 0_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad w_{i,2} := \begin{pmatrix} 0_n \\ u_i \end{pmatrix},$$

donde  $0_n$  es el vector nulo en  $\mathbb{R}^n$ . Sean  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^{2n}$  vectores aleatorios independientes tal que  $v_i = \sqrt{2}w_{i,j}$  con probabilidad  $\frac{1}{2}$  para  $j \in \{1, 2\}$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i\right) &= \frac{1}{2} \sum_{i \leq m} (\sqrt{2}w_{i,1}) \otimes (\sqrt{2}w_{i,1}) + \frac{1}{2} \sum_{i \leq m} (\sqrt{2}w_{i,2}) \otimes (\sqrt{2}w_{i,2}) \\ &= \sum_{i \leq m} \begin{pmatrix} u_i \otimes u_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i \leq m} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u_i \otimes u_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} := B, \end{aligned}$$



y  $\mathbb{E}(|v_i|^2) = |\sqrt{2}w_{i,1}|^2 \frac{1}{2} + |\sqrt{2}w_{i,2}|^2 \frac{1}{2} = 2|u_i|^2 \leq 2\delta$ . Más aún, se verifica  $\|B\| = \|A\|$ . Aplicando la Proposición 2.3.3 encontramos  $v_i$  tal que

$$\sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i \preceq B + \gamma Id_{2n},$$

con  $\gamma = \gamma(2\delta, A)$ . Dado que  $v_i \otimes v_i = 2w_{i,1} \otimes w_{i,1} = \begin{pmatrix} 2u_i \otimes u_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  o bien

$v_i \otimes v_i = 2w_{i,1} \otimes w_{i,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2u_i \otimes u_i \end{pmatrix}$ , tomando  $C_1 := 2 \sum_{i: v_i=w_{i,1}} u_i \otimes u_i$  y  $C_2 := 2 \sum_{i: v_i=w_{i,2}} u_i \otimes u_i$  obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} &= \sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i \\ &\preceq B + \gamma Id_{2n} \\ &= \begin{pmatrix} A + \gamma Id_n & 0 \\ 0 & A + \gamma Id_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Supongamos que existe un  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\langle C_1 x, x \rangle > \langle (A + \gamma Id_n)x, x \rangle$  luego

$$\left\langle \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle > \left\langle \begin{pmatrix} A + \gamma Id_n & 0 \\ 0 & A + \gamma Id_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

contradiendo la desigualdad, es decir que tenemos  $C_1 \preceq A + \gamma Id_n$  y del mismo modo  $C_2 \preceq A + \gamma Id_n$ . Además, o bien  $|\{i : v_i = w_{i,1}\}| \leq \frac{m}{2}$  o bien  $|\{i : v_i = w_{i,2}\}| \leq \frac{m}{2}$ . Luego, existe  $\sigma \subseteq \{1, \dots, m\}$ , con  $|\sigma| \leq \frac{m}{2}$  tal que  $2 \sum_{i \in \sigma} u_i \otimes u_i \preceq A + \gamma Id_n$  y  $2 \sum_{i \in \sigma^c} u_i \otimes u_i \preceq A + \gamma Id_n$ . Dado que la matriz  $A = \sum_{i \in \sigma} u_i \otimes u_i + \sum_{i \in \sigma^c} u_i \otimes u_i$ , tenemos entonces que

$$2 \sum_{i \in \sigma^c} u_i \otimes u_i \preceq \sum_{i \in \sigma} u_i \otimes u_i + \sum_{i \in \sigma^c} u_i \otimes u_i + \gamma Id_n$$

luego  $\sum_{i \in \sigma^c} u_i \otimes u_i \preceq \sum_{i \in \sigma} u_i \otimes u_i + \gamma Id_n$  obteniendo  $A \preceq 2 \sum_{i \in \sigma} u_i \otimes u_i + \gamma Id_n$ .

Ahora, juntando las desigualdades llegamos a que

$$A - \gamma Id_n \preceq 2 \sum_{i \in \sigma} u_i \otimes u_i \preceq A + \gamma Id_n,$$

es decir que

$$\left\| 2 \sum_{i \in \sigma^c} u_i \otimes u_i - A \right\| \leq \|\gamma Id_n\| = \gamma.$$

□

Estamos en condiciones de demostrar ahora el Teorema 2.3.1.

*Demostración del Teorema 2.3.1.* Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la matriz  $A$  es una matriz con coeficientes racionales. En efecto, supongamos que existe una constante absoluta  $c'$  tal que para todo  $\varepsilon'$  y matriz  $C$  de coeficientes racionales existe un multiset  $\sigma \subseteq \{1, \dots, m\}$ , de cardinal a lo sumo  $\left\lceil \frac{\text{srank}(C)}{c'\varepsilon'^2} \right\rceil$  tal que  $\left\| c'\varepsilon'^2 \|C\|^2 \tilde{C}_\sigma \tilde{C}_\sigma^t - CC^t \right\| \leq \varepsilon' \|C\|^2$ . Sea  $A$  una matriz con coeficientes reales,  $\varepsilon > 0$ , y tomemos  $c = \frac{\varepsilon}{6}$ , y  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{6}$ , entonces si  $\frac{\text{srank}(A)}{c\varepsilon^2}$  no es entero, tomando  $C$  una matriz de coeficientes racionales lo suficientemente cerca de  $A$ , podemos asegurar que existe  $\sigma = \sigma_C$  multiset de índices en  $\{1, \dots, m\}$  cuyo cardinal es a lo sumo  $|\sigma| \leq \left\lceil \frac{\text{srank}(C)}{c'\varepsilon'^2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\text{srank}(A)}{c\varepsilon^2} \right\rceil$ , habiendo finitos multiset de cardinal a lo sumo  $\left\lceil \frac{\text{srank}(A)}{c\varepsilon^2} \right\rceil$ , y que verifica que  $\left\| c'\varepsilon'^2 \|C\|^2 \tilde{C}_\sigma \tilde{C}_\sigma^t - CC^t \right\| \leq \varepsilon' \|C\|^2$ . Luego tenemos que  $\left\| c\varepsilon^2 \|A\|^2 \tilde{A}_\sigma \tilde{A}_\sigma^t - AA^t \right\|$  puede acotarse por la suma

$$c\varepsilon^2 \left\| \|A\|^2 \tilde{A}_\sigma \tilde{A}_\sigma^t - \|C\|^2 \tilde{C}_\sigma \tilde{C}_\sigma^t \right\| + \varepsilon' \|C\|^2 + \|CC^t - AA^t\|.$$

El primer término resulta ser a lo sumo

$$c\varepsilon^2 \max_{|\sigma| \leq \left\lceil \frac{\text{srank}(A)}{c\varepsilon^2} \right\rceil} \left\| \|A\|^2 \tilde{A}_\sigma \tilde{A}_\sigma^t - \|C\|^2 \tilde{C}_\sigma \tilde{C}_\sigma^t \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \|A\|^2,$$

para una matriz  $C$  lo suficientemente cerca. Por último, resulta ser también, para  $C$  cercana,  $\varepsilon' \|C\|^2 = \frac{\varepsilon}{6} \|C\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{3} \|A\|^2$  y  $\|CC^t - AA^t\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \|A\|^2$ .

Supongamos entonces  $A$  una matriz racional. Notaremos por  $(a_i)_{i \leq m}$  las columnas de  $A$ ,  $(x_i)_{i \leq m}$  las columnas normalizadas, y por  $c_i = |a_i|^2 \in \mathbb{Q}$ . Definimos a

$$B := AA^t = \sum_{i \leq m} a_i \otimes a_i = \sum_{i \leq m} c_i x_i \otimes x_i.$$

Tenemos entonces que  $\text{Tr}(B) = \sum_{i \leq m} c_i \text{Tr}(x_i \otimes x_i) = \sum_{i \leq m} c_i |x_i|^2 = \sum_{i \leq m} c_i$ .

Dado que cada  $c_i = \frac{p_i}{q_i}$  con  $p_i, q_i \in \mathbb{N}$  entonces  $\text{Tr}(B) = \frac{\sum_{i \leq m} p_i \prod_{j \neq i} q_j}{\prod_j q_j}$ , tomando

$M \in \mathbb{N}$  un múltiplo de  $\sum_{i \leq m} p_i \prod_{j \neq i} q_j$  y  $\kappa = \frac{\text{Tr}(B)}{M}$  con

$$M \geq \frac{72 \text{Tr}(B)}{\varepsilon^2 \|B\|}, \text{ es decir } \sqrt{\frac{2\kappa}{\|B\|}} \leq \frac{\varepsilon}{6}, \quad (2.19)$$

cada  $c_i$  es un múltiplo de  $\kappa$  y luego podemos reescribir a  $B$  como la suma de matrices de rango uno, pero ahora todas con el mismo peso. Esto es

$$B = \sum_{i=1}^M y_j \otimes y_j$$

donde  $y_j \in \{x_1, \dots, x_m\}$ . Definimos  $k \in \mathbb{N}$  como el mayor de los enteros que satisfacen

$$\frac{M}{2^k} \geq \frac{144 \text{Tr}(B)}{(\sqrt{2}-1)^2 \varepsilon^2 \|B\|} = \frac{144}{\varepsilon^2 (\sqrt{2}-1)^2} \text{srank}(A). \quad (2.20)$$

Sea  $\sigma_0 := \{1, \dots, M\}$  y  $u_i = \sqrt{\kappa} y_i$ , luego  $B_0 := B = \sum_{i \in \sigma_0} u_i \otimes u_i$  y  $|u_i|^2 = \kappa$  para todo  $i \in \sigma_0$ . Aplicando el Corolario 2.3.4 encontramos  $\sigma_1 \subseteq \sigma_0$  de tamaño a lo sumo  $|\sigma_1| \leq \frac{M}{2}$  tal que

$$\left\| 2 \sum_{i \in \sigma_1} u_i \otimes u_i - B_0 \right\| \leq \|B_0\| \left( \left( 1 + \sqrt{\frac{2\kappa}{\|B_0\|}} \right)^2 - 1 \right). \quad (2.21)$$

Denotamos  $B_1 = \sum_{i \in \sigma_1} u_i \otimes u_i$  y  $\alpha_1 = \left( 1 + \sqrt{\frac{2\kappa}{\|B_0\|}} \right)^2$ . Por la desigualdad (2.21) tenemos que  $|2\|B_1\| - \|B_0\|| \leq \|2B_1 - B_0\| \leq \|B_0\|(\alpha_1 - 1)$ . Luego tenemos que

$$(1 - \alpha_1)\|B_0\| \leq \|2B_1\| - \|B_0\| \leq \|B_0\|(\alpha_1 - 1)$$

o lo que es lo mismo

$$(2 - \alpha_1)\|B_0\| \leq \|2B_1\| \leq \|B_0\|\alpha_1.$$

Nuevamente por el Corolario 2.3.4, podemos encontrar  $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$  de tamaño a lo sumo  $|\sigma_2| \leq \frac{|\sigma_1|}{2} \leq \frac{M}{4}$  tal que

$$\left\| 2 \sum_{i \in \sigma_2} u_i \otimes u_i - B_1 \right\| \leq \|B_1\| \left( \left( 1 + \sqrt{\frac{2\kappa}{\|B_1\|}} \right)^2 - 1 \right). \quad (2.22)$$

Nombrando nuevamente  $B_2 = \sum_{i \in \sigma_2} u_i \otimes u_i$  y  $\alpha_2 = \left( 1 + \sqrt{\frac{2\kappa}{\|B_1\|}} \right)^2$ , obtenemos la misma desigualdad que antes  $(2 - \alpha_2)\|B_1\| \leq \|2B_2\| \leq \|B_1\|\alpha_2$ , pero entonces combinando las desigualdades (2.21) y (2.22) tenemos por un lado que

$$\|2^2 B_2\| \leq \|2B_1\|\alpha_2 \leq \|B_0\|\alpha_1\alpha_2.$$

Mientras que por el otro lado

$$\begin{aligned} \|2^2 B_2 - B_0\| &\leq \|2^2 B_2 - 2B_1\| + \|2B_1 - B_0\| \\ &\leq 2\|B_1\|(\alpha_2 - 1) + \|B_0\|(\alpha_1 - 1) \\ &\leq \|B_0\|(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) + \|B_0\|(\alpha_1 - 1) = \|B_0\|(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2) \\ &\leq \|B_0\|(\alpha_1\alpha_2 - 1). \end{aligned}$$

Luego  $(1 - \alpha_1 \alpha_2) \|B_0\| \leq \|2^2 B_2\| - \|B_0\|$ . Obtenemos entonces la desigualdad

$$(2 - \alpha_1 \alpha_2) \leq \|2^2 B_2\| \leq \alpha_1 \alpha_2 \|B_0\|.$$

Por lo tanto, construimos por inducción  $\sigma_k \subseteq \sigma_{k-1} \subseteq \dots \subseteq \sigma_0$  satisfaciendo  $|\sigma_l| \leq \frac{|\sigma_{l-1}|}{2}$  para cualquier  $l \leq k$  y

$$\|2^l B_l - B\| \leq \|B\| \left( \prod_{i=1}^l \alpha_i - 1 \right),$$

donde  $B_l = \sum_{i \in \sigma_l} u_i \otimes u_i$  y  $\alpha_i = \left(1 + \sqrt{\frac{2\kappa}{\|B_{l-1}\|}}\right)^2$  para todo  $1 \leq i \leq l$ . Más aún

$$\left(2 - \prod_{i=1}^l \alpha_i\right) \|B\| \leq \|2^l B_l\| \leq \|B\| \prod_{i=1}^l \alpha_i. \quad (2.23)$$

Vamos a mostrar por inducción que  $\beta_l := \prod_{i=1}^l \alpha_i \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $l \leq k$ .

Por la ecuación (2.19) tenemos que  $\alpha_1 = \left(1 + \sqrt{\frac{2\kappa}{\|B\|}}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{6}\right)^2 \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $\varepsilon \leq 6$ . Sea  $l < k$  y supongamos que  $\beta_i \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $i \leq l$ , debemos ver que  $\beta_{l+1} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ . Por la ecuación (2.23) y la hipótesis inductiva tenemos que

$$\|B_i\| \geq 2^{-i} \left(2 - \prod_{j=1}^i \alpha_j\right) \|B\| \geq 2^{-i} \left(2 - \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \|B\| = 2^{-i} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|B\|$$

para todo  $i \leq l$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \ln \beta_{l+1} &= 2 \sum_{i=1}^{l+1} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{2\kappa}{\|B_{i-1}\|}}\right) \leq 2 \sum_{i=1}^{l+1} \sqrt{\frac{2\kappa}{\|B_{i-1}\|}} \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^{l+1} \sqrt{\frac{2^i \kappa}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|B\|}} = 2 \sqrt{\frac{\kappa}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|B\|}} \sum_{i=1}^{l+1} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^i \\ &= 2 \sqrt{\frac{\kappa}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|B\|}} \left(\frac{(\sqrt{2})^{l+2} - 1}{\sqrt{2} - 1} - 1\right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \sqrt{\frac{\kappa}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|B\|}} \left(\left(2^{l+1}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \\ &\leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \sqrt{\frac{2^{l+1} \kappa}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|B\|}}. \end{aligned}$$

Ya que  $l < k$  entonces usando la condición (2.20) se tiene la desigualdad  $\frac{M}{2^{l+1}} \geq \frac{144 \text{rank}(A)}{\varepsilon^2 (\sqrt{2}-1)^2}$ . Dado que  $\frac{\varepsilon}{3} \leq \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ , si  $\varepsilon \leq 3 \ln \frac{3}{2}$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \sqrt{\frac{2^{l+1}\kappa}{(1-\frac{\varepsilon}{2})\|B\|}} &\leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \left( \frac{M(\sqrt{2}-1)^2 \varepsilon^2 \|B\| \kappa}{144 \text{Tr}(B) (1-\frac{\varepsilon}{2}) \|B\|} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} (\sqrt{2}-1) \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{144(1-\frac{\varepsilon}{2})}} \\ &= 2\sqrt{2} \frac{\varepsilon}{12\sqrt{(1-\frac{\varepsilon}{2})}} \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \end{aligned}$$

si  $\varepsilon \leq 1$ . Luego  $\ln \beta_{l+1} \leq \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$  es decir que  $\beta_{l+1} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  completando la inducción. Luego, encontramos  $\sigma_k$  de tamaño a lo sumo  $\lceil \frac{M}{2^k} \rceil$  tal que

$$\left\| 2^k \sum_{i \in \sigma_k} u_i \otimes u_i - B \right\| \leq \|B\| (\beta_k - 1) \leq \|B\| \frac{\varepsilon}{2}.$$

Recordando que los  $u_i = \sqrt{\kappa} y_i$  y que  $B = AA^t$ , podemos reescribir la desigualdad anterior como

$$\left\| 2^k \kappa \sum_{i \in \sigma_k} y_i \otimes y_i - AA^t \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|A\|^2,$$

a su vez, esta podemos reescribirla como

$$\left\| 2^k \frac{\text{Tr}(B)}{M} \tilde{A}_{\sigma_k} \tilde{A}_{\sigma_k}^t - AA^t \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|A\|^2.$$

Concluyendo la demostración al aplicar la desigualdad (2.20).  $\square$

Una consecuencia del Teorema 2.3.1 es el siguiente corolario, el cual ya mencionamos en la Sección 2.2.

**Corolario 2.3.5.** *Existe una constante universal  $c$  tal que vale lo siguiente. Sea  $\varepsilon > 0$  y sean  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$  con  $\sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i = Id_n$ . Entonces existe un multiset  $\sigma$  de índices  $\{1, \dots, m\}$  de tamaño a lo sumo  $\frac{n}{c\varepsilon^2}$  tal que*

$$(1 - \varepsilon) Id_n \preceq \frac{n}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} \frac{v_i}{|v_i|} \otimes \frac{v_i}{|v_i|} \preceq (1 + \varepsilon) Id_n.$$

*Más aún, si todos los  $v_i$  tienen la misma norma Euclídea, entonces  $\sigma$  es un conjunto.*

*Demostración.* Tomamos como  $A$  a la matriz en  $n \times m$  que tiene por columna  $i$ -ésima al vector  $v_i$ . Siguiendo la demostración del Teorema 2.3.1 con la matriz  $B = AA^t = \sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i = Id_n$ , podemos encontrar  $\sigma_k$  de tamaño a lo sumo  $\lceil \frac{M}{2^k} \rceil$  tal que

$$\left\| 2^k \sum_{i \in \sigma_k} u_i \otimes u_i - Id_n \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

o lo que es lo mismo

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) Id_n \preceq 2^k \sum_{i \in \sigma_k} u_i \otimes u_i \preceq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) Id_n. \quad (2.24)$$

Tomando la traza, y usando que  $\|u_i\|^2 = \kappa \|y_i\|^2 = \frac{Tr(B)}{M} = \frac{n}{M}$  deducimos que

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq 2^k \frac{|\sigma_k|}{M} \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Por lo tanto, y dado que  $|\sigma_k| \leq \lceil \frac{M}{2^k} \rceil \leq \frac{M}{2^k}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} 2^k \sum_{i \in \sigma_k} u_i \otimes u_i &= 2^k \frac{n}{M} \sum_{i \in \sigma_k} y_i \otimes y_i \preceq \frac{n}{|\sigma_k|} \sum_{i \in \sigma_k} y_i \otimes y_i \\ &= \frac{M}{|\sigma_k|} \sum_{i \in \sigma_k} u_i \otimes u_i \preceq \frac{2^k}{1 - \frac{\varepsilon}{2}} \sum_{i \in \sigma_k} u_i \otimes u_i. \end{aligned}$$

Esto junto con la ecuación (2.24), nos dice que

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) Id_n \preceq \frac{n}{|\sigma_k|} \sum_{i \in \sigma_k} y_i \otimes y_i \preceq \frac{2^k}{|\sigma_k|} \sum_{i \in \sigma_k} u_i \otimes u_i \preceq \frac{1 + \frac{\varepsilon}{2}}{1 - \frac{\varepsilon}{2}} Id_n$$

Luego para  $\varepsilon > 0$  tomando  $\varepsilon \leq \varepsilon' = \frac{2\varepsilon}{2-\varepsilon} \leq 2\varepsilon$  si  $\varepsilon \leq 1$ . Obtenemos

$$(1 - \varepsilon) Id_n \preceq \frac{n}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} \frac{v_i}{|v_i|} \otimes \frac{v_i}{|v_i|} \preceq \frac{1 + \frac{\varepsilon'}{2}}{1 - \frac{\varepsilon'}{2}} Id_n = (1 + \varepsilon) Id_n$$

con  $|\sigma_k| \leq \frac{M}{2^k} \leq \frac{288 Tr(B)}{\varepsilon'^2 (\sqrt{2}-1) \|B\|} = \frac{n}{c\varepsilon'^2} \leq \frac{n}{c\varepsilon^2}$  □

En la segunda parte del paper, Friedland y Youssef demuestran un resultado que nos permite aproximar las matrices manteniendo ciertas propiedades de estas que nos interesan. Por ejemplo, dada una matriz  $A$  y un vector en su *núcleo*, que notaremos por  $\ker A$ , aproximar la matriz de modo que el vector se mantenga cercano al núcleo de la nueva matriz. Este caso puede pensarse al vector como un baricentro ponderado de las columnas de la matriz y lo que buscamos es que se mantenga cercano a un baricentro de

las columnas seleccionadas, recordando como en el Teorema 2.3.1 la aproximación la obtenemos a partir de quedarnos con algunas de las columnas. Podremos también pedir que si  $|Av| \leq \alpha|v|$  para cierta constante  $\alpha$  entonces se cumpla la misma condición para la matriz que la aproxime. El estudio de estos problemas les permiten demostrar que todo cuerpo convexo  $K$  esta arbitrariamente cerca de otro cuerpo convexo  $H$  con a lo sumo  $\frac{Cn}{\varepsilon^2}$  puntos de contacto, lo que representa una mejora al paper de Srivastava. Veremos también que de toda descomposición de la identidad puede extraerse una  $(1 + \varepsilon)$ -descomposición aproximada de la identidad como consecuencia de los teoremas de aproximación de las matrices.

Antes de continuar, necesitaremos la siguiente definición acerca de la aproximación de una matriz por otra diagonal. Sea  $A$  una matriz de tamaño  $n \times m$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $D$  una matriz diagonal de  $m \times m$  con coeficientes no negativos. Diremos que  $A$  es una *matriz*  $(\alpha, \beta, D)$ -*aproximable* si

$$\alpha AA^t \preceq ADA^t \preceq \beta AA^t.$$

Denotaremos esta propiedad por  $A \in \text{Aprox}_{\alpha, \beta} D$ . En caso de que  $\alpha = 1 - \varepsilon$  y  $\beta = 1 + \varepsilon$ , simplemente diremos que  $A \in \text{Aprox}_\varepsilon D$ . Siempre tenemos que  $A \in \text{Aprox}_\varepsilon Id_m$ .

El resultado principal de esta segunda parte y que nos permitirá llegar a una descomposición aproximada de la identidad del orden de  $\varepsilon$  es el siguiente.

**Teorema 2.3.6.** *Sea  $A$  una matriz de  $n \times m$  y sea  $v \in \ker A$ . Consideremos la matriz  $B$  de  $(n + 1) \times m$  dada por  $B^t := (A^t \mid v)$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $D$  una matriz diagonal de  $m \times m$  tal que  $B \in \text{Aprox}_\varepsilon D$ . Entonces  $A, v \in \text{Aprox}_\varepsilon D$  y*

$$\left| \sqrt{(AA^t)^{-1}} ADv \right| \leq 2\varepsilon|v|.$$

Más aún, si  $C = A\sqrt{D} - \frac{1}{|\sqrt{D}v|^2} ADv \otimes \sqrt{D}v$ , entonces  $\sqrt{D}v \in \ker C$  y

$$\left( 1 - \varepsilon - \frac{4\varepsilon^2}{1 - \varepsilon} \right) AA^t \preceq CC^t \preceq (1 + \varepsilon) AA^t.$$

Comenzaremos dando un resultado más general que el Teorema 2.3.6. Este permite tener varias restricciones, así como una clase más amplia de estas, lo que en oposición al primer resultado.

**Teorema 2.3.7.** *Sea  $A$  una matriz de  $n \times m$  y sea  $V = (v_i)_{1 \leq i \leq k}$  una matriz de  $m \times k$ . Consideremos la matriz  $B$  de  $(n + k) \times m$  dada por  $B^t := (A^t \mid V)$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $D$  una matriz diagonal de  $m \times m$  tal que  $B \in \text{Aprox}_\varepsilon D$ . Entonces  $A, V^t \in \text{Aprox}_\varepsilon D$ , y para todo  $1 \leq i \leq m$*

$$\left| \sqrt{(AA^t)^{-1}} A (D - (1 + \varepsilon) Id_m) v_i \right| \leq 2\varepsilon|v_i|. \quad (2.25)$$

*Demostración.* La primer afirmación es directa, ya que componiendo con las proyecciones de las primeras  $n$  filas y  $n$  columnas obtenemos las igualdades  $P_n B B^t P_n = A A^t$  y  $P_n B D B^t P_n = A D A^t$ . Luego como  $B \in \text{Aprox}_\varepsilon D$  tenemos que

$$(1 - \varepsilon) P_n B B^t P_n \preceq P_n B D B^t P_n \preceq (1 + \varepsilon) P_n B B^t P_n$$

es decir que

$$(1 - \varepsilon) A A^t \preceq A D A^t \preceq (1 + \varepsilon) A A^t.$$

Considerando las proyecciones sobre las últimas  $k$  filas y columnas obtenemos la misma desigualdad pero para la matriz  $V^t$ . Dado que  $A \in \text{Aprox}_\varepsilon D$ , tenemos que  $(1 + \varepsilon) A A^t - A D A^t \preceq (1 + \varepsilon) A A^t - (1 - \varepsilon) A A^t = 2\varepsilon A A^t$ , y de la misma forma tenemos que  $(1 + \varepsilon) V^t V - V^t D V \preceq 2\varepsilon V^t V$ . Por otro lado, tenemos que la matriz  $B B^t$  es la matriz dada por los bloques  $\begin{pmatrix} A A^t & A V \\ V^t A^t & V^t V \end{pmatrix}$  y  $B D B^t = \begin{pmatrix} A D A^t & A D V \\ V^t D A^t & V^t D V \end{pmatrix}$ , y por estar  $B \in \text{Aprox}_\varepsilon D$  tenemos que  $\begin{pmatrix} (1 + \varepsilon) A A^t - A D A^t & (1 + \varepsilon) A V - A D V \\ (1 + \varepsilon) V^t A^t - V^t D A^t & (1 + \varepsilon) V^t V - V^t D V \end{pmatrix} \succeq 0$ . Supongamos ahora que tenemos una matriz dada por bloques  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  con  $A \preceq A'$  y  $C \preceq C'$ , entonces tenemos que  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} A' & B \\ C & D' \end{pmatrix}$ . Luego vale que

$$K := \begin{pmatrix} 2\varepsilon A A^t & (1 + \varepsilon) A V - A D V \\ (1 + \varepsilon) V^t A^t - V^t D A^t & 2\varepsilon V^t V \end{pmatrix} \succeq 0. \quad (2.26)$$

Sea  $w \in S^{n-1}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Para cada  $1 \leq i \leq k$  definimos el vector de dimensión  $n + k$   $w_i(\lambda)$  dado por

$$w_i(\lambda)^t := \left( \left( \sqrt{(A A^t)^{-1}} w \right)^t \mid (\lambda e_i)^t \right), \quad e_i \in \mathbb{R}^k.$$

Por la desigualdad (2.26), el producto interno  $\langle K w_i(\lambda), w_i(\lambda) \rangle$  resulta no negativo para todo  $1 \leq i \leq k$  y para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Luego para cada  $1 \leq i \leq k$  tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle \begin{pmatrix} 2\varepsilon \sqrt{A A^t} w + ((1 + \varepsilon) A V - A D V) \lambda e_i \\ ((1 + \varepsilon) V^t A^t - V^t D A^t) \sqrt{(A A^t)^{-1}} w + 2\varepsilon V^t V \lambda e_i \end{pmatrix}, w_i(\lambda) \right\rangle \\ &= 2\varepsilon \langle w, w \rangle + \lambda \left\langle ((1 + \varepsilon) A V - A D V) e_i, \sqrt{(A A^t)^{-1}} w \right\rangle \\ &\quad + \lambda \left\langle ((1 + \varepsilon) V^t A^t - V^t D A^t) \sqrt{(A A^t)^{-1}} w, e_i \right\rangle + 2\lambda^2 \varepsilon \langle V^t V e_i, e_i \rangle \\ &= 2\varepsilon + 2\lambda \left( (1 + \varepsilon) \left\langle \sqrt{(A A^t)^{-1}} A v_i, w \right\rangle - \left\langle \sqrt{(A A^t)^{-1}} A D v_i, w \right\rangle \right) \\ &\quad + 2\varepsilon \lambda^2 |v_i|^2. \end{aligned}$$



Es decir que

$$0 \leq \lambda^2 \varepsilon |v_i|^2 + \lambda \left( (1 + \varepsilon) \left\langle \sqrt{(AA^t)^{-1}} Av_i, w \right\rangle - \left\langle \sqrt{(AA^t)^{-1}} ADv_i, w \right\rangle \right) + \varepsilon,$$

y dado que vale para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  entonces tenemos que

$$\left( (1 + \varepsilon) \left\langle \sqrt{(AA^t)^{-1}} Av_i, w \right\rangle - \left\langle \sqrt{(AA^t)^{-1}} ADv_i, w \right\rangle \right)^2 - 4\varepsilon^2 |v_i|^2 \leq 0.$$

Concluimos entonces que

$$\left| \left\langle \sqrt{(AA^t)^{-1}} ADv_i, w \right\rangle - (1 + \varepsilon) \left\langle \sqrt{(AA^t)^{-1}} Av_i, w \right\rangle \right| \leq 2\varepsilon |v_i|.$$

Dado que esto se verifica para todo  $w \in S^{n-1}$  tenemos entonces que

$$\left\| \sqrt{(AA^t)^{-1}} A (D - (1 + \varepsilon) Id_n) v_i \right\| \leq 2\varepsilon |v_i|.$$

□

Realizamos ahora la demostración del Teorema 2.3.6.

*Demostración del Teorema 2.3.6.* Con Teorema 2.3.7 tenemos probado que  $A, v \in \text{Aprox}_\varepsilon D$ . Por otro lado, dada la definición de la matriz  $C$  se verifica la igualdad  $C(\sqrt{D}v) = ADv - \frac{1}{|\sqrt{D}v|^2} \left\langle \sqrt{D}v, \sqrt{D}v \right\rangle ADv = 0$ , es decir que  $\sqrt{D}v \in \ker C$ . Además se tiene que  $CC^t$  resulta ser

$$\begin{aligned} & \left( A\sqrt{D} - \frac{1}{|\sqrt{D}v|^2} ADv \otimes \sqrt{D}v \right) \left( (A\sqrt{D})^t - \frac{1}{|\sqrt{D}v|^2} (ADv \otimes \sqrt{D}v)^t \right) \\ &= ADA^t - \frac{2}{|\sqrt{D}v|^2} (ADv \otimes ADv) + \frac{1}{|\sqrt{D}v|^4} |\sqrt{D}v|^2 (ADv \otimes ADv) \\ &= ADA^t - \frac{1}{|\sqrt{D}v|^2} (ADv \otimes ADv). \end{aligned}$$

Esto implica que  $CC^t \preceq ADA^t \preceq (1 + \varepsilon)AA^t$ . Ya que  $v \in \ker A$  entonces, por la ecuación (2.25) obtenemos la desigualdad

$$2\varepsilon |v| \geq \left| \sqrt{(AA^t)^{-1}} ADv - (1 + \varepsilon) \sqrt{(AA^t)^{-1}} Av \right| = \left| \sqrt{(AA^t)^{-1}} ADv \right|.$$

Esto implica que si  $w \in \mathbb{R}^n$  entonces

$$\left\langle \sqrt{(AA^t)^{-1}} (ADv \otimes ADv) \sqrt{(AA^t)^{-1}} w, w \right\rangle$$

puede escribirse como

$$\begin{aligned} \left\langle \sqrt{(AA^t)^{-1}} \left\langle ADv, \sqrt{(AA^t)^{-1}} w \right\rangle ADv, w \right\rangle &= \left\langle \sqrt{(AA^t)^{-1}} ADv, w \right\rangle^2 \\ &\leq \left| \sqrt{(AA^t)^{-1}} ADv \right|^2 |w|^2 \\ &\leq 4\varepsilon^2 |v|^2 |w|^2 \\ &= \langle 4\varepsilon^2 |v|^2 Id_n(w), w \rangle. \end{aligned}$$

Es decir que  $\sqrt{(AA^t)^{-1}} (ADv \otimes ADv) \sqrt{(AA^t)^{-1}} \preceq 4\varepsilon^2 |v|^2 Id_n$ , lo que nos dice que

$$ADv \otimes ADv \preceq 4\varepsilon^2 |v|^2 AA^t. \quad (2.27)$$

Ya que  $v \in \text{Aprox}_\varepsilon D$  entonces  $(1 - \varepsilon)|v|^2 = (1 - \varepsilon)vv^t \leq vDv^t = \left| \sqrt{D}v \right|^2$ . Esto junto con (2.27) nos da que

$$\frac{1}{\left| \sqrt{D}v \right|^2} ADv \otimes ADv \preceq \frac{4\varepsilon^2 |v|^2}{(1 - \varepsilon)|v|^2} AA^t = \frac{4\varepsilon^2}{1 - \varepsilon} AA^t.$$

Además como  $ADA^t \succeq (1 - \varepsilon)AA^t$  entonces concluimos que

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)AA^t &\succeq CC^t = ADA^t - \frac{1}{\left| \sqrt{D}v \right|^2} ADv \otimes ADv \\ &\succeq ADA^t - \frac{4\varepsilon^2}{1 - \varepsilon} AA^t \succeq (1 - \varepsilon)AA^t - \frac{4\varepsilon^2}{1 - \varepsilon} AA^t \\ &= \left( 1 - \varepsilon - \frac{4\varepsilon^2}{1 - \varepsilon} \right) AA^t. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces como queríamos

$$\left( 1 - \varepsilon - \frac{4\varepsilon^2}{1 - \varepsilon} \right) AA^t \preceq CC^t \preceq (1 + \varepsilon) AA^t.$$

□

Utilizaremos ahora el Corolario 2.3.5 y el Teorema 2.3.6 para obtener una descomposición aproximada de la identidad óptima, dada por

**Teorema 2.3.8.** *Existe una constante universal  $c$  tal que vale lo siguiente: sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $\{x_i, c_i\}_{i \leq m}$  una descomposición de la identidad. Entonces existe un multiset  $\sigma$  de índices de  $\{1, \dots, m\}$  de tamaño a lo sumo  $\frac{n}{c\varepsilon^2}$  tal que*

$$(1 - \varepsilon)Id_n \preceq \frac{n}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} (x_i - u) \otimes (x_i - u) \preceq (1 + \varepsilon)Id_n$$

donde  $u = \frac{1}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} x_i$  satisface  $|u| \leq \frac{2\varepsilon}{3\sqrt{n}}$ .

Este resultado mejora el Teorema 2.2.1 de tres formas. La primera es que la descomposición que obtenemos tiene una relación del tipo  $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$  que podemos hacerla arbitrariamente cercana a uno, mientras que en el teorema antes mencionado sólo se obtiene una relación del tipo  $4 + \varepsilon$ . En segundo lugar se mejora la dependencia sobre  $\varepsilon$  del vector  $u$  ya que Srivastava obtiene una dependencia similar pero con  $\sqrt{\varepsilon}$  en lugar de  $\varepsilon$ . La tercer mejora es que el último teorema nos dice explícitamente quienes son los pesos que aparecen en la descomposición aproximada. Veamos entonces la demostración del teorema.

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Sea  $A$  la matriz de  $n \times m$  dada por  $A = (\sqrt{c_i}x_i)$  y sea  $v \in \mathbb{R}^m$  con coordenadas  $\sqrt{\frac{c_i}{n}}$ . Tenemos que

$$AA^t = \sum_{i \leq m} (\sqrt{c_i}x_i) \otimes (\sqrt{c_i}x_i) = Id_n,$$

además  $Av = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leq m} c_i x_i = 0$ , es decir que  $v \in \ker A$ . Consideremos la matriz  $B = (b_1, \dots, b_m)$  de  $(n+1) \times m$  dada por  $B^t = (A^t \mid v)$ , y notemos que

$$BB^t = \begin{pmatrix} AA^t & Av \\ (Av)^t & \sum_{i \leq m} \frac{c_i}{n} \end{pmatrix} = Id_{n+1}.$$

Aplicando el Corolario 2.3.5 con  $b_i^t = (\sqrt{c_i}x_i \mid \sqrt{\frac{c_i}{n}})$  para todo  $i \leq m$  y  $\frac{\varepsilon}{3}$  en lugar de  $\varepsilon$ , encontramos un multiset de índices de  $\{1, \dots, m\}$  de tamaño a lo sumo  $\frac{n}{c\varepsilon^2}$  tal que

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) Id_{n+1} &\preceq \frac{n+1}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} \frac{n}{(n+1)c_i} b_i \otimes b_i \\ &= \frac{n}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} b_i \otimes b_i \preceq \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right) Id_{n+1}. \end{aligned}$$

Esto nos dice que  $B \in \text{Aprox}_{\frac{\varepsilon}{3}} D$ , donde  $D$  es la matriz diagonal, tal que los elementos de la diagonal son

$$d_{ii} = \frac{k_i n}{c_i |\sigma|},$$

con  $k_i$  el número de veces que aparece el índice  $i$  en  $\sigma$ . Dado que los índices que aparecen en  $\sigma$  están en  $\{1, \dots, m\}$  tenemos que  $\sum_{i \leq m} k_i = |\sigma|$ . Notemos que

$$\begin{aligned} ADv &= A \left( \frac{k_i n}{c_i |\sigma|} \sqrt{\frac{c_i}{n}} \right) = \sum_{i \leq m} \sqrt{c_i} x_i \frac{k_i n}{c_i |\sigma|} \sqrt{\frac{c_i}{n}} = \frac{\sqrt{n}}{|\sigma|} \sum_{i \leq m} k_i x_i \\ &= \frac{\sqrt{n}}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} k_i x_i = \sqrt{n} u. \end{aligned}$$

Notando por  $\sqrt{D}$  a la raíz de la matriz  $D$ , esto es a la matriz diagonal cuyos elementos son los  $\delta_{ii} = \sqrt{d_{ii}} = \frac{\sqrt{k_i n}}{\sqrt{c_i |\sigma|}}$ , tenemos que

$$\sqrt{D}v = \left( \delta_{ii} \sqrt{\frac{c_i}{n}} \right) = \left( \frac{\sqrt{k_i}}{\sqrt{n}} \right), \quad A\sqrt{D} = (\sqrt{c_i} x_i \delta_{ii}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{|\sigma|}} \left( \sqrt{k_i} x_i \right),$$

y luego la matriz  $C := A\sqrt{D} - \frac{1}{|\sqrt{D}v|^2} \sqrt{D}v \otimes ADv$  tiene en su columna  $j$ -ésima al vector

$$\begin{aligned} Ce_j &= A\sqrt{D}e_j - \frac{1}{\sum_{i \leq m} \frac{k_i}{|\sigma|}} \langle \sqrt{D}v, e_j \rangle ADv = \frac{\sqrt{nk_j}}{\sqrt{|\sigma|}} x_j - \frac{\sqrt{nk_j}}{\sqrt{|\sigma|}} u \\ &= \frac{\sqrt{nk_j}}{\sqrt{|\sigma|}} (x_j - u). \end{aligned}$$

Luego, aplicando el Teorema 2.3.6 tenemos que

$$\left( 1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{4\varepsilon^2}{3(3-\varepsilon)} \right) AA^t \preceq CC^t \preceq \left( 1 + \frac{\varepsilon}{3} \right) AA^t,$$

con

$$\begin{aligned} CC^t &= \sum_{i \leq m} (Ce_i) \otimes (Ce_i) = \frac{n}{|\sigma|} \sum_{i \leq m} k_i (x_i - u) \otimes (x_i - u) \\ &= \frac{n}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} (x_i - u) \otimes (x_i - u) \end{aligned}$$

y  $AA^t = Id_n$ . Notando que  $\left( 1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{4\varepsilon^2}{3(3-\varepsilon)} \right) \geq (1 - \varepsilon)$  si  $\varepsilon \leq 1$ , tenemos entonces que

$$(1 - \varepsilon)Id_n \preceq \frac{n}{|\sigma|} \sum_{i \in \sigma} (x_i - u) \otimes (x_i - u) \preceq (1 + \varepsilon)Id_n.$$

Además de la demostración del Teorema 2.3.6 obtenemos la siguiente desigualdad  $0 \preceq ADv \otimes ADv \preceq 4 \left( \frac{\varepsilon}{3} \right)^2 |v|^2 AA^t = 4 \frac{\varepsilon^2}{3^2} Id_n$ , luego concluimos que

$$|u| = \frac{1}{\sqrt{n}} |ADv| = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\|ADv \otimes ADv\|} \leq \frac{2\varepsilon}{3\sqrt{n}}.$$

□

## 2.4. Problema de Kadison-Singer

Para introducir el problema de Kadison-Singer debemos dar previamente algunas definiciones que no hemos mencionado aún. Comenzaremos diciendo

que un álgebra de Banach es un espacio de Banach que es además un álgebra sobre un cuerpo. A su vez, una  $C^*$ -álgebra es un álgebra de Banach  $A$  sobre el cuerpo de los números complejos, junto con una función  $*$  :  $A \rightarrow A$  que verifica, notando por  $x^*$  a la imagen de un elemento  $x$  por  $*$ , que

- $(x + y)^* = x^* + y^*$  para todo  $x, y \in A$
- $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$  para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  y todo  $x \in A$
- $(xy)^* = y^*x^*$  para todo  $x, y \in A$
- $(x^*)^* = x$  para todo  $x \in A$
- $|xx^*| = |x|^2$  para todo  $x \in A$

El problema de Kadison-Singer se basa en dos  $C^*$ -álgebras específicas, la primera es el espacio de los operadores lineales acotados sobre  $\ell^2(\mathbb{N})$  que notamos por  $B(\ell^2(\mathbb{N}))$ , lo que es equivalente a matrices infinitas con la norma operador acotada. La segunda  $C^*$ -álgebra que se considera es el subespacio  $A \subseteq B(\ell^2(\mathbb{N}))$  de las matrices diagonales.

Un estado  $\phi : B(\ell^2(\mathbb{N})) \rightarrow \mathbb{C}$  sobre  $B(\ell^2(\mathbb{N}))$  es un funcional lineal acotado sobre  $B(\ell^2(\mathbb{N}))$  con  $\phi(I) = 1$ , y tal que  $\phi(Q) \geq 0$  para toda matriz semidefinida positiva  $Q \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ . Un estado se dice puro si no puede escribirse como combinación convexa de otros dos estados. De la misma forma se define un estado y un estado puro  $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ .

El problema que Kadison y Singer formularon en 1959 dice lo siguiente

**Teorema 2.4.1** (Problema de Kadison-Singer). *Sea  $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$  un estado puro. Entonces existe un único estado  $\psi : B(\ell^2(\mathbb{N})) \rightarrow \mathbb{C}$  que extiende a  $\phi$ . En particular, este estado es puro.*

Como bien puede verse en la publicación [CFTW06], el problema de Kadison-Singer es equivalente a una numerosa cantidad de problemas fundamentales en diversas áreas de investigación, ya sea en matemática pura, matemática aplicada, o incluso en ingeniería, de los cuales haremos un breve repaso de algunos de ellos a continuación.

## El problema de Kadison-Singer en la Teoría de Operadores

En el año 1979 Anderson realizó un importante avance en el problema de Kadison-Singer al reformularlo en la llamada *Conjetura Paving* que dice lo siguiente

**Conjetura 2.4.2** (Conjetura Paving). *Para todo  $\varepsilon > 0$  existe un número natural  $r$  tal que para todo número natural  $n$  y todo operador lineal  $T$  sobre  $\ell_2^n$  cuya matriz tiene diagonal nula, existe una partición  $\{A_j\}_{j=1}^r$  de  $\{1, \dots, n\}$ , tal que*

$$\|Q_{A_j} T Q_{A_j}\| \leq \varepsilon \|T\| \text{ para todo } j = 1 \dots, r.$$

Donde  $Q_{A_j}$  son las proyecciones diagonales cuyas entradas son 0 excepto para los  $(i, i)$  tal que  $i \in A_j$ .

Es importante remarcar que en la conjetura,  $r$  no depende de  $n$ . Además se dice que un operador arbitrario  $T$  satisface PC si  $T - D(T)$  satisface PC, donde  $D(T)$  es la diagonal de  $T$ . Puede verse en [CFTW06] que las conjeturas que iremos viendo pueden convertirse de resultados en espacios de dimensión finita a espacios de dimensión infinita.

En el año 1991 Akermann y Anderson demostraron que la siguiente conjetura implica el problema de Kadison-Singer

**Conjetura 2.4.3.** *Existen  $0 < \varepsilon, \delta < 1$  con la siguiente propiedad: para cualquier proyección ortogonal  $P$  sobre  $\ell_2^n$  con  $\delta(P) \leq \delta$ , existe una proyección ortogonal  $Q$  tal que  $\|QPQ\| \leq 1 - \varepsilon$  y  $\|(I - Q)P(I - Q)\| \leq 1 - \varepsilon$ .*

Nuevamente es importante que  $\varepsilon$  y  $\delta$  no dependen de  $n$ . No se sabía, al momento de su formulación, si el problema de Kadison-Singer implicaba esta conjetura, pero Weaver probó en su publicación *A counterexample to a conjecture of Akermann and Anderson* la falsedad de esta. Fue el mismo Weaver en [Wea04] quien demostró que un pequeño debilitamiento en la conjetura de Akermann y Anderson producía una conjetura equivalente a la de Kadison-Singer, la cual dice

**Conjetura 2.4.4** (Principio Fundamental I: Weaver). *Existen constantes universales  $0 < \varepsilon, \delta < 1$  y  $r \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n$  y toda proyección ortogonal  $P$  sobre  $\ell_2^n$  con  $\delta(P) \leq \delta$ , existe una partición  $\{A_j\}_{j=1}^r$  de  $\{1, \dots, n\}$  tal que  $\|Q_{A_j}PQ_{A_j}\| \leq 1 - \varepsilon$ , para todo  $j = 1, \dots, r$ .*

Weaver no enuncia esta conjetura formalmente, pero en su publicación antes mencionada, puede verse que en la demostración de que la conjetura que llama  $KS_r$ , que enunciaremos más adelante, es equivalente al problema de Kadison-Singer se encuentra implicada esta conjetura.

## El problema de Kadison-Singer y la Teoría de Marcos

Una familia de vectores  $\{f_i\}_{i \in I}$  en un espacio de Hilbert  $\mathbb{H}$  es una secuencia básica de Riesz si existen constantes  $A, B > 0$  tal que para todo conjunto de escalares  $\{a_i\}_{i \in I}$  tenemos:

$$A \sum_{i \in I} |a_i|^2 \leq \left\| \sum_{i \in I} a_i f_i \right\|^2 \leq B \sum_{i \in I} |a_i|^2.$$

A una familia  $\{f_i\}_{i \in I}$  de elementos de un espacio de Hilbert  $\mathbb{H}$  la llamamos *marco* para  $\mathbb{H}$  si existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tal que para todo  $f \in \mathbb{H}$  se verifica

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Si tenemos solo el lado derecho de la desigualdad, la familia  $\{f_i\}_{i \in I}$  se dice una secuencia de Bessel con cota  $B$ . Si  $A = B$ , diremos que es un marco  $A$  –ajustado y si  $A = B = 1$  decimos que es un marco de Parseval. Si todos los elementos  $f_i$  del marco tienen la misma norma decimos que el marco es equinormado, y si tienen norma 1 decimos que es un marco de norma unitaria

En su publicación [Wea04] Weaver establece una importante relación entre marcos y el problema de Kadison-Singer, mostrando que son equivalentes

**Conjetura 2.4.5.** *Existe una constante universal  $B \geq 4$  y  $\varepsilon > \sqrt{B}$  y un natural  $r$  tal que lo siguiente vale: cuando  $\{f_i\}_{i=1}^M$  es un marco de norma unitaria  $B$  –ajustado para  $\ell_2^n$ , existe una partición  $\{A_j\}_{j=1}^r$  de  $\{1, \dots, M\}$  tal que para todo  $j = 1, \dots, r$  y para toda  $f \in \ell_2^n$  tenemos que*

$$\sum_{i \in A_j} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq (B - \varepsilon) \|f\|^2.$$

Hay dos conjeturas más que realizó Weaver en su trabajo [Wea04] que resultan ser equivalentes al problema de Kadison-Singer siendo sus dos conjeturas más conocidas

**Conjetura 2.4.6** ( $KS_r$ ). *Existe un número natural  $r$  y una constante universal  $B$  y  $\varepsilon > 0$  tal que vale lo siguiente. Sean  $\{f_i\}_{i=1}^M$  elementos de  $\ell_2^n$  con  $\|f_i\| \leq 1$  para  $i = 1, \dots, M$  y supongamos que para todo  $f \in \ell_2^n$ ,*

$$\sum_{i=1}^M |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \quad (2.28)$$

*Entonces, existe una partición  $\{A_j\}_{j=1}^r$  de  $\{1, \dots, n\}$  tal que para todo elemento  $f \in \ell_2^n$  y todo  $j = 1, \dots, r$ ,*

$$\sum_{i \in A_j} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq (B - \varepsilon) \|f\|^2.$$

Siendo que si se considera  $\sum_{i=1}^M |\langle f, f_i \rangle|^2 = B \|f\|^2$ , resulta la misma conjetura.

Por otro lado, si se toman a los  $f_i$  de norma 1 en la Conjetura (2.28), teniendo un costo en  $\varepsilon > 0$ , se obtiene la siguiente equivalencia a  $KS_r$ .

**Conjetura 2.4.7** ( $KS'_r$ ). *Existe un número natural  $r$  y una constante universal  $B \geq 4$  y  $\varepsilon > \sqrt{B}$  tal que vale lo siguiente. Sean  $\{f_i\}_{i=1}^M$  elementos de  $\ell_2^n$  con  $\|f_i\| = 1$  para  $i = 1, \dots, M$  y supongamos que para todo  $f \in \ell_2^n$ ,*

$$\sum_{i=1}^M |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B \|f\|^2.$$

Entonces, existe una partición  $\{A_j\}_{j=1}^r$  de  $\{1, \dots, n\}$  tal que para todo elemento  $f \in \ell_2^n$  y todo  $j = 1, \dots, r$ ,

$$\sum_{i \in A_j} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq (B - \varepsilon) \|f\|^2.$$

### El problema de Kadison-Singer en la Teoría de Espacios de Hilbert

Sea  $\{f_i\}_{i \in I}$  una secuencia básica de Riesz, si las constantes  $A$  y  $B$  en la desigualdad

$$A \sum_{i \in I} |a_i|^2 \leq \left\| \sum_{i \in I} a_i f_i \right\|^2 \leq B \sum_{i \in I} |a_i|^2$$

resultan ser  $A = 1 - \varepsilon$  y  $B = 1 + \varepsilon$ , entonces diremos que la familia  $\{f_i\}_{i \in I}$  es una secuencia básica  $\varepsilon$ -Riesz. Si  $\|f_i\| = 1$  para todo  $i \in I$ , diremos que es una secuencia básica de norma unitaria Riesz. Con estas definiciones tenemos la siguiente conjetura equivalente al problema de Kadison-Singer establecida por primera vez en la publicación [CV05].

**Conjetura 2.4.8** ( $R_\varepsilon$ -Conjetura). *Para todo  $\varepsilon > 0$ , toda secuencia básica de norma unitaria Riesz es una unión finita de secuencias básicas  $\varepsilon$ -Riesz.*

A partir de la conjetura 2.4.5 puede obtenerse la siguiente equivalencia

**Conjetura 2.4.9.** *Existe una constante universal  $1 \leq D$  tal que para todo  $T \in B(\ell_2^n)$  con  $\|Te_i\| = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , existe un  $r = r(\|T\|)$  y una partición  $\{A_j\}_{j=1}^r$  tal que para todo  $j = 1, \dots, r$  y toda familia de escalares  $\{a_i\}_{i \in A_j}$*

$$\left\| \sum_{i \in A_j} a_i Te_i \right\|^2 \leq D \sum_{i \in A_j} |a_i|^2.$$

### El problema de Kadison-Singer en la Teoría de los Espacios de Banach

En 1987 Bourgain y Tzafriri probaron el siguiente resultado fundamental en la Teoría de los Espacios de Banach conocido como principio de invertibilidad restringida

**Teorema 2.4.10.** *Existen constantes universales  $A, c > 0$ , tal que cuando  $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2^n$  es un operador lineal para el cual  $\|Te_i\| = 1$  se cumple para todo  $i = 1, \dots, n$ , entonces existe un subconjunto  $\sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$  de cardinal  $|\sigma| \geq \frac{cn}{\|T\|^2}$  tal que para todo  $j = 1, \dots, n$  y para toda elección de escalares  $\{a_j\}_{j \in \sigma}$ ,*

$$\left\| \sum_{j \in \sigma} a_j Te_j \right\|^2 \geq A \sum_{j \in \sigma} |a_j|^2.$$



Este teorema los condujo a la siguiente conjetura

**Conjetura 2.4.11** (Conjetura de Bourgain-Tzafriri). *Existe una constante universal  $A > 0$  tal que para todo  $B > 1$  existe  $r = r(B) \in \mathbb{N}$  satisfaciendo: Para cualquier número natural  $n$ , si  $T : \ell_2^n \rightarrow \ell_2^n$  es un operador lineal con  $\|T\| \leq B$  y  $\|Te_i\| = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$  entonces existe una partición  $\{A_j\}_{j=1}^r$  de  $\{1, \dots, n\}$  tal que para todo  $j = 1, \dots, r$  y toda elección de escalares  $\{a_i\}_{i \in A_j}$  tenemos que*

$$\left\| \sum_{i \in A_j} a_i T e_i \right\|^2 \geq A \sum_{i \in A_j} |a_i|^2.$$

La equivalencia de la conjetura de Bourgain-Tzafriri con el problema de Kadison-singer fue demostrado por Casazza y Treiman, comprobando la equivalencia con la siguiente conjetura

**Conjetura 2.4.12.** *Existe una constante universal  $A > 0$  y un número natural  $r$  tal que para todo  $n$ , si  $T : \ell_2^n \rightarrow \ell_2^n$  es un operador lineal con  $\|T\| \leq 2$  y  $\|Te_i\| = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$  entonces existe una partición  $\{A_j\}_{j=1}^r$  de  $\{1, \dots, n\}$  tal que para todo  $j = 1, \dots, r$  y toda elección de escalares  $\{a_i\}_{i \in A_j}$  tenemos que*

$$\left\| \sum_{i \in A_j} a_i T e_i \right\|^2 \geq A \sum_{i \in A_j} |a_i|^2.$$

### El problema de Kadison-Singer en el Análisis Armónico

La Conjetura Paving puede pensarse para *operadores Toeplitz*, reduciéndola a un antiguo problema fundamental del Análisis Armónico. Se define al operador Toeplitz asociado a  $\phi \in L^\infty([0, 1])$ , como el operador  $T_\phi : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$  dado por  $T_\phi(f) = f\phi$ . En la década del 80 se realizaron numerosos esfuerzos para demostrar que los operadores Toeplitz satisfacían la Conjetura Paving, obteniéndose un resultado afirmativo para el caso en que  $\phi$  resulta ser Riemann integrable.

Para enunciar la nueva conjetura necesitaremos algunas definiciones previas. Dado un conjunto  $I \subseteq \mathbb{Z}$ , a la  $L^2([0, 1])$  – clausura del subespacio generado por las funciones exponenciales  $\{e^{2\pi n t}\}_{n \in I}$  lo notaremos por  $S(I)$ . Definiremos para un conjunto medible  $E \subseteq [0, 1]$ , notaremos por  $P_E$  a la proyección ortogonal de  $L^2([0, 1])$  en  $L^2(E)$ , es decir  $P_E(f) = f\chi_E$ .

Una cuestión fundamental en el Análisis Armónico es entender la distribución de la norma de una función  $f \in S(I)$ . Se demostró que si  $[a, b] \subseteq [0, 1]$  y  $\varepsilon > 0$ , entonces existe una partición de  $\mathbb{Z}$  dada por  $A_j = \{nr + j\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , con  $0 \leq j \leq r - 1$  tal que para toda  $f \in S(A_j)$  se tiene

$$(1 - \varepsilon)(b - a)\|f\|^2 \leq \|f\chi_{[a,b]}\|^2 \leq (1 + \varepsilon)(b - a)\|f\|^2.$$

Esto nos dice que las funciones en  $S(A_j)$  tienen sus normas casi uniformemente distribuidas a través de  $[a, b]$  y  $[0, 1] - [a, b]$ . La cuestión central es si este resultado es cierto para cualquier subconjunto medible del  $[0, 1]$ . La Conjetura Paving para los operadores Toeplitz dice lo siguiente

**Conjetura 2.4.13.** *Si  $E \subseteq [0, 1]$  es medible y dado  $\varepsilon > 0$ , existe una partición  $\{A_j\}_{j=1}^r$  de  $\mathbb{Z}$  tal que para todo  $j = 1, \dots, r$  y toda  $f \in S(A_j)$*

$$(1 - \varepsilon)|E|\|f\|^2 \leq \|P_E(f)\|^2 \leq (1 + \varepsilon)|E|\|f\|^2.$$

En [CFTW06] podemos ver una versión más debil de esta conjetura, que resulta ser equivalente.

**Conjetura 2.4.14.** *Existe una constante universal  $0 < K$  tal que para cualquier conjunto medible  $E \subseteq [0, 1]$  existe una partición  $\{A_j\}_{j=1}^r$  de  $\mathbb{Z}$  tal que para toda  $f \in S(A_j)$  tenemos que  $\|P_E(f)\|^2 \leq K|E|\|f\|^2$ .*

## Resolución del Problema de Kadison-Singer

Al enunciar el problema, Kadison y Singer decían “Nos inclinamos a la idea de que tal extensión no es única”, es decir que creían que el problema se resolvía por la negativa. Sin embargo el problema fue resuelto por la positiva por Marcus, Spielman y Srivastava en [MSS13] a través de un método probabilístico.

El método probabilístico consiste en probar la existencia de la solución a un problema dado a partir de la construcción de un candidato aleatorio a solución, mostrando que este cumple con las condiciones del problema con probabilidad positiva. Una herramienta útil para controlar el valor de una variable aleatoria real es el hecho de que si su primer momento (esto es  $\mathbb{E}(X)$ ) es finito, entonces la variable será con probabilidad positiva mayor o igual que su primer momento, es decir  $X \geq \mathbb{E}(X)$ , y menor o igual que su primer momento con probabilidad positiva, es decir  $X \leq \mathbb{E}(X)$ .

Marcus, Spielman y Srivastava introducen una variante al método del primer momento para controlar la norma operador  $\|A\|$  de una matriz  $A$  Hermitiana semidefinida positiva. Estas matrices tienen autovalores reales no negativos y luego  $\|A\|$  es el autovalor más grande de  $A$ . Como vimos en la Sección 2.2, los autovalores de las matrices pueden controlarse con las funciones barreras, sin embargo ellos se basan en la interpretación de los autovalores como las raíces del polinomio característico de la matriz  $A$ , siendo entonces  $\|A\|$  la raíz no nula de mayor valor absoluto, o lo que es lo mismo, dado que  $A$  es semidefinida positiva, su raíz más grande.

A pesar de la no linealidad de las funciones que mandan una matriz  $A$  en su polinomio característico y a un polinomio en su raíz más grande, para cierto tipo de matrices aleatorias sus polinomios característicos gozan de una estructura muy útil. Por ejemplo, Marcus, Spielman y Srivastava

prueban en [MSS13] una variante no lineal para la comparación con el primer momento. En esta afirman que dada una matriz aleatoria  $A = \sum_{i=1}^m A_i$ , con  $A_i$  matrices aleatorias Hermitianas independientes de rango 1 y dimensión  $d \times d$ , cada una tomando finitos valores, se tiene que la raíz máxima del polinomio característico  $p_A$  es mayor o igual que la raíz máxima del primer momento de  $p_A$  (esto es  $\mathbb{E}(p_A)$ ) con probabilidad positiva y menor o igual con probabilidad positiva.

A partir de este último resultado uno puede tener un control de la norma operador  $\|A\|$  de cierto tipo de matrices aleatorias, primero controlando el promedio  $\mathbb{E}(p_A)$  del polinomio característico  $p_A$ . Con esta idea Marcus, Spielman y Srivastava establecen el siguiente resultado.

**Teorema 2.4.15.** *Sea  $m, d \geq 1$ . Sean  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{C}^d$  vectores aleatorios independientes, donde cada  $v_i$  toma un número finito de valores. Supongamos que tenemos la normalización*

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^m v_i v_i^* \right) = I_d.$$

*Supongamos también que tenemos la cota*

$$\mathbb{E}(|v_i|^2) \leq \varepsilon$$

*para cierto  $\varepsilon > 0$  y todo  $i = 1, \dots, m$ . Entonces se tiene que*

$$\left\| \sum_{i=1}^m v_i v_i^* \right\| \leq (1 + \sqrt{\varepsilon})^2$$

*con probabilidad positiva.*

Este resultado es demostrado usando la fórmula de multilinealización aleatoria, que indica que para una matriz  $A = \sum_{i=1}^m A_i$  con  $A_i$  matrices aleatorias independientes de rango uno, entonces

$$\mathbb{E}(p_A(z)) = \mu[\mathbb{E}(A_1), \dots, \mathbb{E}(A_m)](z)$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ , con

$$\mu[A_1, \dots, A_m](z) = \left( \prod_{i=1}^m \left( 1 - \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \right) \det \left( z + \sum_{i=1}^m z_i A_i \right) \Big|_{z_1 = \dots = z_m = 0}.$$

Además utiliza algunas propiedades de convexidad de los polinomios reales estables que son aquellos polinomios  $p : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$  que no tienen ceros en la región dada por  $\{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : \operatorname{Im}(z_1), \dots, \operatorname{Im}(z_m) > 0\}$  y todos sus coeficientes son reales.

El Teorema 2.4.15 implica el siguiente resultado.

**Corolario 2.4.16.** Sean  $v_1, \dots, v_m$  vectores columna en  $\mathbb{C}^d$  con  $|v_i|^2 \leq \alpha$  para todo  $i$  y

$$\sum_{i=1}^m v_i v_i^* = I_d,$$

esto es  $(v_i)$  es un marco de Parseval. Entonces existe una partición de  $\{1, \dots, m\}$  en conjuntos  $S_1, S_2$  tal que para  $j = 1, 2$  tenemos que

$$\left\| \sum_{i \in S_j} v_i v_i^* \right\| \leq \frac{(1 + \sqrt{2\alpha})^2}{2}.$$

*Demostración.* Dados  $(v_i)_{i=1}^m$ , sean  $(u_i)_{i=1}^m$  vectores aleatorios independientes con

$$\mathbb{P} \left( u_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}v_i \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \text{ y } \mathbb{P} \left( u_i = \begin{pmatrix} \sqrt{2}v_i \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}.$$

Entonces,

$$\mathbb{E}(u_i u_i^*) = \begin{pmatrix} v_i v_i^* & 0 \\ 0 & v_i v_i^* \end{pmatrix} \text{ y } |u_i|^2 = 2|v_i|^2 \leq 2\alpha.$$

Entonces,  $\sum_{i=1}^m \mathbb{E}(u_i u_i^*) = I_{2d}$ . Aplicando el Teorema 2.4.15 para  $\varepsilon = 2\alpha$ , podemos encontrar una partición  $S_1, S_2$  de  $\{1, \dots, m\}$  tal que

$$\left\| \sum_{i \in S_1} \begin{pmatrix} \sqrt{2}v_i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}v_i \\ 0 \end{pmatrix}^* + \sum_{i \in S_2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}v_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}v_i \end{pmatrix}^* \right\| \leq (1 + \sqrt{\varepsilon})^2.$$

Entonces para  $j = 1, 2$ ,

$$\left\| \sum_{i \in S_j} u_i u_i^* \right\| = \left\| \sum_{i \in S_j} \begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix}^* \right\| \leq \frac{(1 + \sqrt{\varepsilon})^2}{2}.$$

□

Este corolario implica la Conjetura de Weaver  $KS_2$ .

*Conjetura de Weaver  $KS_2$ .* Basta tomar  $B = 18$ ,  $\varepsilon = 2$  en el enunciado de la conjetura y  $\alpha = \frac{1}{18}$  en el corolario. Luego si  $\{f_i\}_{i=1}^m$  son elementos de  $\ell_2^n$ , con  $\|f_i\| \leq 1$  y  $\sum_{i=1}^m |\langle f, f_i \rangle|^2 = B$  para toda  $f \in \ell_2^n$  de norma uno. Sean  $v_i = \frac{f_i}{\sqrt{B}}$  para cada  $i = 1, \dots, m$ . Entonces  $|v_i|^2 \leq \alpha$  y  $\sum_{i=1}^m v_i v_i^* = Id$ . Por el

corolario existe una partición  $S_1, S_2$  de  $\{1, \dots, m\}$  tal que para  $j = 1, 2$  y para todo  $f \in \ell_2^n$  de norma uno, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S_j} |\langle f, f_i \rangle|^2 &= \sum_{i \in S_j} \langle f_i f_i^* f, f \rangle = B \left\langle \left( \sum_{i \in S_j} v_i v_i^* \right) f, f \right\rangle \\ &\leq B \left\| \sum_{i \in S_j} v_i v_i^* \right\| \leq 18 \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{2}{18}}\right)^2}{2} \\ &= 18 - 2 = B - \varepsilon, \end{aligned}$$

como queríamos. □



## Capítulo 3

# Versión cuantitativa del Teorema de Helly

En este capítulo veremos lo realizado por Silouanos Brazitikos en [Bra17], donde aporta una serie de versiones cuantitativas del Teorema de Helly. Este teorema, que es un resultado básico sobre geometría discreta sobre la intersección de conjuntos convexos, fue descubierto por Eduard Helly en 1913 y publicado en 1923. El Teorema de Helly afirma lo siguiente

**Teorema 3.0.1** (Teorema de Helly). *Sean  $P_1, \dots, P_d$  una familia finita de subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$ , con  $d > n$ . Si la intersección de cualesquiera  $n + 1$  de estos conjuntos tiene intersección no vacía, entonces*

$$\bigcap_{i=1}^d P_i \neq \emptyset.$$

Podemos observar que este resultado no es cuantitativo, ya que no aporta información respecto al tamaño del conjunto  $\bigcap_{i=1}^d P_i$ . En respuesta a este problema, en 1982, Bárány, Katchalski y Pach prueban en [BKP82] una versión cuantitativa acerca del volumen. Al dar una versión cuantitativa uno buscaría ver que si la intersección de  $n + 1$  miembros de la familia tiene intersección “grande” en cuanto a su volumen, entonces también es “grande” la intersección de todos ellos, en cuanto a su volumen. Sin embargo, esto no es posible ya que si consideramos una familia de  $2n$  semiespacios cuya intersección resulta un cubo, tenemos que el volumen de la intersección es acotado mientras que el de cualesquiera  $2n - 1$  de ellos no lo es. Por esto, para encontrar una versión cuantitativa al Teorema de Helly, reemplazan el número  $n + 1$  en el teorema por el de  $2n$ . Con esta modificación obtienen una versión que nos dice que si  $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$  es una familia finita de conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^n$ , tal que la intersección de  $2n$  o menos de cualesquiera miembros de  $\mathcal{P}$  tiene volumen mayor o igual que uno, entonces  $|\bigcap_{i \in I} P_i| \geq c_n$  donde  $c_n > 0$  es una constante que depende sólo de  $n$ .

Bárány, Katchalski y Pach, en la misma publicación, prueban además que dada una familia finita  $\mathcal{H}$  de semi-espacios  $P_i$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que la intersección de todos ellos es un politopo de volumen uno, entonces existe una subfamilia  $\mathcal{H}'$  de a lo sumo  $2n$  semi-espacios, tal que  $|\cap_{i \in \mathcal{H}'} P_i| \leq \frac{1}{c^n}$ . Luego dado que todo conjunto convexo cerrado es la intersección de una familia de semi-espacios cerrados, podemos tomar a  $\mathcal{P}$  ya no como una familia finita de conjuntos cerrados sino como una familia de semi-espacios cerrados, por lo que se obtiene el siguiente teorema equivalente:

Sea  $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$  una familia de semi-espacios cerrados en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $|\cap_{i \in I} P_i| > 0$ . Entonces existe  $s \leq 2n$  e  $i_1, \dots, i_s \in I$  tal que

$$|P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_s}| \leq C_n |\cap_{i \in I} P_i|,$$

donde  $C_n$  es una constante que sólo depende de  $n$ .

Nuevamente, no es posible reemplazar  $2n$  por  $2n-1$  en el resultado anterior, ya que si consideramos el cubo  $[-1, 1]^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , podemos escribirlo como la intersección de los  $2n$  semi-espacios  $H_j^\pm := \{x : \langle x, \pm e_j \rangle \leq 1\}$ , mientras que la intersección de cualesquiera  $2n-1$  de estos semi-espacios tiene volumen infinito. La constante  $C_n$  es acotada en [BKP82] por  $n^{2n^2}$  conjeturando una cota del tipo  $n^{cn}$  con  $c > 0$ . Naszódi verificó esta conjetura en [Nas16] dando una cota del tipo  $(Cn)^{2n}$  con  $C > 0$  una constante absoluta.

El objetivo del trabajo que desarrolla Brazitikos es el de estimar la cantidad  $C_{n,N}$ , con  $N > 2n$ , dada por

$$C_{n,N} = \sup \frac{|P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_N}|}{|\cap_{i \in I} P_i|},$$

donde el supremo se toma sobre todas las familias  $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$  de semi-espacios cerrados definidos por  $P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_i \rangle \leq 1\}$ , con  $|\cap_{i \in I} P_i| > 0$ , así como estudiar el mismo problema para el caso de familias de tiras en  $\mathbb{R}^n$ , es decir, en el caso simétrico conjuntos definidos de la forma  $P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_i \rangle| \leq 1\}$ , complementando los resultados antes mencionados. Para resolver este problema, se combina la aproximación de la identidad vista en el Capítulo 2, una nueva estimación sobre la constante en la desigualdad de Brascamp-Lieb, y una variante a la demostración de Ball a la desigualdad isoperimétrica inversa, vistos en el Capítulo 1.

Antes de avanzar, veamos algunas definiciones y resultados que nos serán de utilidad. Diremos un cuerpo convexo  $K$  está centrado si su baricentro es el origen, es decir si

$$\text{bar}(K) = \frac{1}{|K|} \int_K x \, dx = 0.$$

La desigualdad de Blaschke-Santaló nos dice que para todo cuerpo convexo centrado  $K$  en  $\mathbb{R}^n$  tenemos  $|K| |K^\circ| \leq w_n^2$ , siendo una igualdad si y sólo si



$K$  es un elipsoide. Recordemos que  $w_n$  es el volumen de  $B_2^n$ . La desigualdad de Santaló reversa dada en [BM87] por Bourgain y Milman nos dice que existe una constante absoluta  $c > 0$  tal que  $(|K| |K^o|)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{c}{n}$ , para todo cuerpo convexo  $K$  que contenga al cero en su interior.

### 3.1. Refinamiento del argumento de Naszódi

Veremos en esta sección un refinamiento del argumento que utiliza Naszódi en [Nas16] que nos permitirá llevar la cota de la constante  $C_{n,N}$  a  $(Cn)^{\frac{3n}{2}}$ . El principal factor para la mejora es una consecuencia del Lema de Milman-Pajor en [AAGM15] que nos dice

**Lema 3.1.1.** *Sea  $K$  un cuerpo convexo con baricentro en el origen, entonces existe un cuerpo convexo centralmente simétrico  $K_1$  de volumen*

$$|K_1| \geq 2^{-n} |K|.$$

Incorporando este lema en la demostración original de Naszódi, Brazitikos obtiene el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.2.** *Sea  $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$  una familia de semi-espacios cerrados tal que  $|\cap_{i \in I} P_i| > 0$ . Entonces podemos encontrar  $s \leq 2n$  e  $i_1, \dots, i_s$  tal que*

$$|P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_s}| \leq (Cn)^{\frac{3n}{2}} |\cap_{i \in I} P_i|, \quad (3.1)$$

donde  $C$  es una constante absoluta.

Tanto para la demostración de este teorema como para las que siguen, nos será de utilidad la fórmula de Stirling, esta nos dice que la función gamma puede aproximarse como  $\Gamma(x) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{x}{e}\right)^x$ .

Otra observación que nos será de utilidad es que dada una descomposición de la identidad de la forma

$$Id_n = \sum_{j \in J} c_j u_j \otimes u_j, \quad \text{con} \quad \sum_{j \in J} c_j u_j = 0$$

para ciertos vectores unitarios  $u_j$  y constantes no negativas  $c_j$  entonces se verifica que  $\frac{1}{n} B_2^n \subseteq \text{Conv}\{u_j, j \in J\}$ . Esto se debe a que como las constantes  $c_j$  son no negativos y suman  $n$  entonces  $0 = \sum_{j \in J} \frac{c_j}{n} u_j$  como combinación convexa y si  $z \in B_2^n$  entonces

$$\frac{z}{n} = \frac{z}{n} + 0 = \sum_{j \in J} \frac{c_j}{n} \langle u_j, z \rangle u_j + \sum_{j \in J} \frac{c_j}{n} u_j = \sum_{j \in J} \frac{c_j}{n} (\langle u_j, z \rangle + 1) u_j,$$

con  $\sum_{j \in J} \frac{c_j}{n} (\langle u_j, z \rangle + 1) = \sum_{j \in J} \frac{c_j}{n} + \sum_{j \in J} \frac{c_j}{n} \langle u_j, z \rangle = 1 + \left\langle \sum_{j \in J} \frac{c_j}{n} u_j, z \right\rangle = 1$  y dado que  $|\langle u_j, z \rangle| \leq 1$  entonces  $1 + \langle u_j, z \rangle \geq 0$ .

El último resultado que necesitamos recordar es el Teorema de Carathéodory que nos dice lo siguiente

**Lema 3.1.3** (Teorema de Carathéodory). *Para todo  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $q \in \text{Conv}(P)$  existe  $k \leq n + 1$  puntos  $x_1, \dots, x_k \in P$  tal que  $q \in \text{Conv}(x_1, \dots, x_k)$ .*

Demostremos ahora el mejoramiento de la cota de Naszódi, que realiza Brazitikos.

*Demostración.* Comenzaremos con una familia  $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$  de semi-espacios cerrados  $P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq 1\}$  tal que  $|\cap_{i \in I} P_i| < \infty$ . Por la invariancia afín podemos suponer que  $P = \cap_{i \in I} P_i$  está en posición de John. Dado que  $B_2^n \subseteq P$  entonces  $B_2^n \subseteq P_i$  para todo  $i \in I$ , siendo entonces  $1 \geq \left\langle \frac{u_i}{|u_i|}, u_i \right\rangle = |u_i|$  y más aún si  $\partial P_i \cap S^{n-1} \neq \emptyset$  entonces  $|u_i| = 1$ , ya que si  $|u_i| < 1$  entonces existe  $v \in S^{n-1}$  tal que  $1 = \langle u_i, v \rangle \leq |u_i| |v| < 1$ . Luego los únicos posibles puntos de contacto entre  $P$  y  $B_2^n$  son los  $u_i$ . Por el Teorema de John 1.1.12 tenemos que existe  $J \subseteq I$ , tal que  $u_j, j \in J$  son puntos de contacto de  $P$  y  $B_2^n$ , y  $a_j > 0, j \in J$  tal que

$$Id_n = \sum_{j \in J} a_j u_j \otimes u_j \quad \text{y} \quad \sum_{j \in J} a_j u_j = 0.$$

Por el Lema de Dvoretzky-Rogers, existen  $n$  puntos de contacto, que llamaremos  $v_1, \dots, v_n$  tales que

$$d(v_k, \text{Span}\{v_1, \dots, v_{k-1}\}) \geq \sqrt{\frac{n-k+1}{n}}$$

para todo  $k = 2, \dots, n$ . Se sigue entonces que el simplex

$$S = \text{Conv}\{v_0 = 0, v_1, \dots, v_n\} \subseteq P$$

tiene volumen

$$\begin{aligned} |S| &= \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n d(v_k, \text{Span}\{v_1, \dots, v_{k-1}\}) \\ &\geq \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{n-k+1}{n}} = \frac{\sqrt{n!}}{n! n^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!}}. \end{aligned}$$

Ahora por el Lema 3.1.1 tenemos que si  $w$  es el baricentro de  $S$ , entonces  $S - w$  contiene un cuerpo convexo simétrico  $T_1$  cuyo volumen verifica la desigualdad  $|T_1| \geq 2^{-n} |S - w| = 2^{-n} |S|$ , y luego el cuerpo convexo definido por  $T = T_1 + w$  tiene su centro de simetría en  $w$  y satisface  $|T| \geq 2^{-n} |S|$ . Consideremos la semirecta desde el origen en la dirección  $-w$ . Por el Teorema de Carathéodory esta semirecta interseca el borde del conjunto

$$\text{Conv}\{u_j, u_j \text{ está en la descomposición de la identidad}\}$$

en un punto  $z \in \text{Conv}\{v_{k+1}, \dots, v_{k+n}\}$ , para ciertos  $v_{n+i} \in \{u_j, j \in J\}$  y  $k \leq n$ , siendo  $n$  los puntos ya que  $z$  está en una de las caras que es equivalente a pensarlo como un subconjunto de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Además, ya que

$$\frac{1}{n}B_2^n \subseteq \text{Conv}\{u_j, u_j \text{ está en la descomposición de la identidad}\}$$

entonces tenemos que  $|z| \geq \frac{1}{n}$ . Dado que el vector  $z$  está en la dirección  $-w$ , entonces tenemos que  $|z - w| = |z| + |w|$ , definimos entonces

$$\lambda = \frac{|z|}{|z - w|} = \frac{|z|}{|z| + |w|} \geq \frac{|z|}{|z| + 1} \geq \frac{1}{n + 1}.$$

Aplicando a  $T$  una contracción con centro  $z$  y radio  $\lambda$ , es decir una función del tipo  $\phi(x) = \lambda(x - z) + z$ , obtenemos un cuerpo convexo simétrico en el origen  $Q$ . Además, si  $x \in T \subseteq \text{Conv}\{v_1, \dots, v_n\}$  entonces tenemos que  $\phi(x) = \lambda x + z(1 - \lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i v_i + z(1 - \lambda)$ , con  $\sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i + 1 - \lambda = \lambda + 1 - \lambda = 1$ ,  $1 - \lambda \geq 0$ , y  $\lambda \alpha_i \geq 0$ , luego

$$Q \subseteq \text{Conv}\{v_1, \dots, v_n, z\} \subseteq \text{Conv}\{v_1, \dots, v_{n+k}\},$$

y su volumen está acotado por

$$|Q| = |\lambda(T - z) + z| = \lambda^n |T| \geq \frac{|S|}{2^n(1+n)^n} \geq \frac{1}{2^n(n+1)^n n^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!}}. \quad (3.2)$$

Consideramos la intersección de los  $n + k \leq 2n$  semi-espacios

$$R = \cap_{1 \leq i \leq n+k} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_i \rangle \leq 1\}.$$

Éste conjunto verifica que  $R \subseteq Q^o$  y dado que  $B_2^n \subseteq P$ , por la desigualdad de Blaschke-Santaló tenemos que

$$\frac{|R|}{|P|} \leq \frac{|Q^o|}{|B_2^n|} \leq \frac{|B_2^n|^2}{|Q||B_2^n|} = \frac{|B_2^n|}{|Q|} \leq 2^n(n+1)^n n^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!} |B_2^n|.$$

Luego por la fórmula de Stirling tenemos que

$$|R| \leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^n (n+1)^n n^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} |P| \leq (Cn)^{\frac{3n}{2}} |P|.$$

Donde la formula la usamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^n (n+1)^n n^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^n (n+1)^n n^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!}}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\
&\leq C_1 \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^n (n+1)^n n^{\frac{n}{2}} \sqrt[4]{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{4\pi}{n} \frac{n}{2}}} \\
&= C_1 \left(\sqrt[3]{\pi} 2\right)^{\frac{3n}{2}} \frac{(n+1)^n n^{\frac{n}{2}} \sqrt[4]{2\pi n}}{\frac{n}{2} \sqrt{\frac{4\pi}{n}}} \\
&\leq C_2 \left(\sqrt[3]{\pi} 2\right)^{\frac{3n}{2}} n^{\frac{3n}{2}} \frac{e \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{\pi n}} \\
&\leq (Cn)^{\frac{3n}{2}},
\end{aligned}$$

con  $C = \sqrt[3]{\pi} 2$ , para  $n$  suficientemente grande.  $\square$

### 3.2. Aproximación de volumen por cuerpos convexos con pocas caras

Veremos en esta sección, como habíamos mencionado, que la intersección de cualquier familia de semi-espacios cerrados está contenido en la intersección de un subconjunto de la familia de cardinal  $N \simeq n$  cuyo volumen es razonablemente chico.

Necesitaremos para ver estos resultados una variante de la desigualdad de Brascamp-Lieb que vimos en el Capítulo 1. Esto se debe a que la demostración que hemos realizado es para vectores y escalares que conforman una descomposición de la identidad, mientras que en este caso lo que tendremos es una descomposición aproximada de la identidad. La demostración de esta versión de la desigualdad de Brascamp-Lieb, que enunciaremos a continuación, es similar a la ya realizada y por este motivo la haremos en la Sección 3.3.

**Teorema 3.2.1.** *Sea  $\gamma > 1$ . Sean  $u_1, \dots, u_s \in S^{n-1}$  y  $c_1, \dots, c_s > 0$  satisfaciendo*

$$Id_n \preceq A := \sum_{j=1}^s c_j u_j \otimes u_j \preceq \gamma Id_n$$

y sea  $k_j = c_j \langle A^{-1} u_j, u_j \rangle > 0$ ,  $1 \leq j \leq s$ . Si  $f_1, \dots, f_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  son funciones integrables entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^s f_j^{k_j}(\langle x, u_j \rangle) dx \leq \gamma^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^s \left( \int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{k_j}.$$

Comenzaremos viendo el trabajo realizado por Brazitikos para el caso donde los  $P_i$  son bandas simétricas.

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $\{P_i : i \in I\}$  una familia de bandas simétricas dadas por  $P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_i \rangle| \leq 1\}$  en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $P = \bigcap_{i \in I} P_i$ . Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $s \leq \frac{n}{c\varepsilon^2}$  y  $i_1, \dots, i_s \in I$  tal que*

$$|P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_s}| \leq \left( \frac{2(1+\varepsilon)}{\sqrt{\pi}(1-\varepsilon)} \right)^n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) |P|.$$

*Demostración.* asumiremos que  $P$  está en posición de John. Por el Teorema de John y por lo ya dicho en la demostración del Teorema 3.1.2 existe  $J \subseteq I$  tal que los vectores  $v_j$ ,  $j \in J$  son puntos de contacto de  $P$  y  $S^{n-1}$  y existen  $a_j > 0$ ,  $j \in J$ , tal que  $Id_n = \sum_{j \in J} a_j v_j \otimes v_j$ . Por el Corolario 2.3.5 tenemos que existe un multiset  $\sigma \subseteq J$  con  $|\sigma| = s \leq \frac{n}{c\varepsilon^2}$  tal que

$$Id_n \preceq A = \frac{n}{|\sigma|(1-\varepsilon)} \sum_{j \in \sigma} v_j \otimes v_j \preceq \gamma_\varepsilon Id_n,$$

donde  $\gamma_\varepsilon = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ . Reescribimos los vectores  $v_j$ ,  $j \in \sigma$  como  $w_1, \dots, w_s$ . Ahora, aplicando el Teorema 3.2.1, para  $1 \leq j \leq s$ , encontramos constantes  $k_j = \frac{n}{|\sigma|(1-\varepsilon)} \langle A^{-1} w_j, w_j \rangle > 0$ , tal que  $\sum_{j \in \sigma} k_j = n$  y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^s f_j^{k_j}(\langle x, u_j \rangle) dx \leq \gamma_\varepsilon^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^s \left( \int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{k_j}$$

para cualquier elección de funciones integrables no negativas  $f_1, \dots, f_s$  sobre  $\mathbb{R}$ . Notemos que  $|P_1 \cap \dots \cap P_s| = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^s \chi_{[-1,1]}(\langle x, w_j \rangle)^{k_j} dx$ , y ya que

$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(t) dt = 2$ , del Teorema 3.2.1 tenemos que  $|P_1 \cap \dots \cap P_s| \leq 2^n \gamma_\varepsilon^{\frac{n}{2}}$ .

Además, dado que  $B_2^n \subseteq P$ , tenemos también que  $|P| \geq |B_2^n| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ .

Concluimos entonces que

$$|P_1 \cap \dots \cap P_s| \leq 2^n \gamma_\varepsilon^{\frac{n}{2}} \leq 2^n \gamma_\varepsilon^{\frac{n}{2}} \frac{|P|}{|B_2^n|} = \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) |P|.$$

□

Pasaremos ahora a estudiar el caso no necesariamente simétrico, considerando una familia de semi-espacios cerrados  $\{P_i : i \in I\}$ , buscaremos  $c_{n,s}$  para que  $|P_1 \cap \dots \cap P_s| \leq c_{n,s} |\bigcap_{i \in I} P_i|$  para ciertos  $s$  semi-espacios de la familia.

En su publicación [Bra17] Brazitikos da dos resultados para el caso no simétrico. En el primero utiliza un argumento que es similar al de la demostración del Teorema 3.2.2, consiguiendo el siguiente resultado.

**Teorema 3.2.3.** *Sea  $\{P_i : i \in I\}$  una familia de semi-espacios cerrados, con  $P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq 1\}$  en  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $P = \bigcap_{i \in I} P_i$  tiene volumen positivo. Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $s \leq \frac{n+1}{c\varepsilon^2} + n + 1$  e  $i_1, \dots, i_s \in I$  tal que*

$$|P_1 \cap \dots \cap P_s| \leq \gamma_\varepsilon \frac{n+1}{\varepsilon^2} \frac{n^{\frac{n}{2}} (n+1)^{\frac{3(n+1)}{2}}}{\pi^{\frac{n}{2}} n!} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) |P| \leq \gamma_\varepsilon \frac{n+1}{\varepsilon^2} (Cn)^{\frac{3n}{2}} |P|,$$

donde  $\gamma_\varepsilon = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$  y  $C$  es una constante absoluta.

Este teorema nos da una cota del tipo  $(Cn)^{\frac{3n}{2}}$  con  $s \leq \frac{n+1}{c\varepsilon^2} + n + 1$  semiespacios, lo que resulta ser similar a la mejora obtenida en el Teorema de Naszódi. Posteriormente y utilizando la descomposición aproximada de la identidad de Srivastava obtiene un mejor resultado en la cota, llegando a una del tipo  $n^n$ , aunque con un poco mas de semiespacios ya que es del orden de  $\frac{n}{\varepsilon^3}$ . El resultado que obtiene Brazitikos es el siguiente.

**Teorema 3.2.4** (Teorema de Brazitikos). *Existe una constante absoluta  $\alpha > 1$  con la siguiente propiedad: para toda familia  $\{P_i : i \in I\}$  de semiespacios cerrados*

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq 1\}$$

en  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $P = \bigcap_{i \in I} P_i$  tiene volumen positivo, existe  $s \leq \alpha n$  e  $i_1, \dots, i_s \in I$  tal que

$$|P_1 \cap \dots \cap P_s| \leq (Cn)^n |P|,$$

donde  $C > 0$ , es una constante absoluta.

Utilizando la demostración de este teorema, pero aplicando la mejora dada en el Capítulo 2 de la descomposición aproximada de la identidad a la realizada por Srivastava, obtenemos una mejora en este resultado. Ésta consiste en poder tomar menos semiespacios, del orden  $\frac{n}{c\varepsilon^2} + n$  manteniendo una cota del tipo  $(Cn)^n$ , pero donde ahora la constante depende de  $\varepsilon$  y  $n$ , siendo del orden  $n^{\frac{3}{2n}}$ . Dada la similitud de las demostraciones haremos sólo esta última.

**Teorema 3.2.5.** *Existe  $\varepsilon > 0$  con la siguiente propiedad: para toda familia  $\{P_i : i \in I\}$  de semiespacios cerrados*

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq 1\}$$

en  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $P = \bigcap_{i \in I} P_i$  tiene volumen positivo, existe  $s \leq \frac{n}{c\varepsilon^2} + n + 1$  y un multiset  $\theta \subseteq I$  de cardinal a lo sumo  $|\theta| \leq s$  tal que

$$|\bigcap_{i \in \theta} P_i| \leq \left( C_{(n,\varepsilon)}^{\frac{1}{n}} n \right)^n |P|,$$

donde  $C_{(n,\varepsilon)} > 0$  es del orden de  $n^{\frac{3}{2}}$

*Demostración.* Asumiremos que  $P$  está en posición de John. Por el Teorema de John 1.1.12 y lo hecho en la demostración del Teorema 3.1.2, tenemos que existe  $J \subseteq I$  tal que los vectores  $u_j$ ,  $j \in J$  son puntos de contacto de  $P$  y  $S^{n-1}$  y existen  $a_j > 0$ ,  $j \in J$ , tal que

$$Id_n = \sum_{j \in J} a_j u_j \otimes u_j \quad \text{y} \quad \sum_{j \in J} a_j u_j = 0.$$

Aplicando el Teorema 2.3.8 podemos encontrar un multiset  $\sigma \subseteq J$ , con cardinal a lo sumo  $\frac{n}{c\varepsilon^2}$  y un vector  $u = \frac{-1}{|\sigma|} \sum_{j \in \sigma} x_j$  tal que

$$(1 - \varepsilon)Id_n \preceq \frac{n}{|\sigma|} \sum_{j \in \sigma} (u_j + u) \otimes (u_j + u) \preceq (1 + \varepsilon)Id_n,$$

y satisfaciendo además que  $\frac{n}{|\sigma|} \sum_{j \in \sigma} u_j + u = 0$  y  $|u| \leq \frac{2\varepsilon}{3\sqrt{n}}$ . Recordemos que  $\frac{1}{n}B_2^n \subseteq \text{Conv}\{u_j, j \in J\}$ , luego para el vector  $w = \frac{3u}{2\sqrt{n\varepsilon}}$  tenemos que  $|w| \leq \frac{1}{n}$  y por ende  $w \in \text{Conv}\{u_j, j \in J\}$ . Por el Teorema de Carathéodory, sabemos que existe  $\tau \subseteq J$ , con  $|\tau| \leq n + 1$  y  $\rho_i > 0$ ,  $i \in \tau$  tal que

$$w = \sum_{i \in \tau} \rho_i u_i \quad \text{y} \quad \sum_{i \in \tau} \rho_i = 1.$$

Notemos además que como  $u = \frac{-1}{|\sigma|} \sum_{j \in \sigma} u_j$  y dado que  $\sum_{j \in \sigma} \frac{1}{|\sigma|} = 1$ , entonces  $-u \in \text{Conv}\{u_j, j \in \sigma\}$ . Luego tenemos que el segmento  $\left[-u, \frac{3u}{2\sqrt{n\varepsilon}}\right]$  está contenido en  $\text{Conv}\{u_j, j \in \sigma \cup \tau\}$ . Para  $j \in \sigma$  definimos:

$$v_j = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \left(-u_j, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{y} \quad b_j = \frac{n+1}{|\sigma|}.$$

Definimos también  $-v = \sqrt{\frac{n}{n+1}}(u, 0)$ . Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \sigma} b_j (v_j + v) \otimes (v_j + v) &= \sum_{j \in \sigma} \frac{n}{|\sigma|} \left(-u_j + u, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \otimes \left(-u_j + u, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j \in \sigma} \frac{n}{|\sigma|} (u_j + u) \otimes (u_j + u) & \frac{\sqrt{n}}{|\sigma|} \sum_{j \in \sigma} (u_j + u) \\ \frac{\sqrt{n}}{|\sigma|} \sum_{j \in \sigma} (u_j + u)^t & \frac{n}{|\sigma|} \sum_{j \in \sigma} \frac{1}{n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j \in \sigma} \frac{n}{|\sigma|} (u_j + u) \otimes (u_j + u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

lo que implica que

$$(1 - \varepsilon)Id_{n+1} \preceq \sum_{j \in \sigma} b_j (v_j + v) \otimes (v_j + v) \preceq (1 + \varepsilon)Id_{n+1}. \quad (3.3)$$

Reescribimos a  $\sum_{j \in \sigma} b_j (v_j + v) \otimes (v_j + v)$  como

$$\sum_{j \in \sigma} b_j v_j \otimes v_j + v \otimes \left( \sum_{j \in \sigma} b_j v_j \right) + \left( \sum_{j \in \sigma} b_j v_j \right) \otimes v + (n+1)v \otimes v,$$

y notemos que al ser

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \sigma} b_j v_j &= \sum_{j \in \sigma} \frac{n+1}{|\sigma|} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \left( -u_j, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left( -\sum_{j \in \sigma} \frac{n}{|\sigma|} u_j, \frac{1}{|\sigma|} \sum_{j \in \sigma} \sqrt{n} \right) \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{n}} (nu, \sqrt{n}), \end{aligned}$$

entonces tenemos que

$$\left( \sum_{j \in \sigma} b_j v_j \right) \otimes v = \sqrt{\frac{n+1}{n}} (nu, \sqrt{n}) \otimes \sqrt{\frac{n}{n+1}} (-u, 0) = \begin{pmatrix} -nu \otimes u & 0 \\ -\sqrt{nu^t} & 0 \end{pmatrix},$$

$$v \otimes \left( \sum_{j \in \sigma} b_j v_j \right) = \begin{pmatrix} -nu \otimes u & -\sqrt{nu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y  $(n+1)v \otimes v = \begin{pmatrix} nu \otimes u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Luego podemos reescribir la desigualdad (3.3) como

$$(1 - \varepsilon) Id_{n+1} \preceq \sum_{j \in \sigma} b_j v_j \otimes v_j + T \preceq (1 + \varepsilon) Id_{n+1},$$

donde  $T = v \otimes \left( \sum_{j \in \sigma} b_j v_j \right) + \left( \sum_{j \in \sigma} b_j v_j \right) \otimes v + (n+1)v \otimes v = \begin{pmatrix} V & z \\ z & 0 \end{pmatrix}$ , con  $V = -nu \otimes u$  y  $z = -\sqrt{nu}$ . Ahora, para  $(x, t) \in S^n$  tenemos que

$$\begin{aligned} |\langle T(x, t), (x, t) \rangle| &= |\langle (Vx + zt, \langle z, x \rangle), (x, t) \rangle| \\ &\leq |\langle (Vx, 0), (x, t) \rangle| + |\langle (zt, \langle z, x \rangle), (x, t) \rangle| \\ &\leq |\langle Vx, x \rangle| + |\langle zt, \langle z, x \rangle \rangle| |(t, x)| = \langle Vx, x \rangle + (|zt|^2 + \langle z, x \rangle^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|V\| |x|^2 + (|z|^2 t^2 + |z|^2 |x|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|V\| + |z| (t^2 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|V\| + |z| |(x, t)| = \|V\| + |z| = n|u|^2 + \sqrt{n}|u| \\ &\leq n \frac{4\varepsilon^2}{9n} + \sqrt{n} \frac{2\varepsilon}{3\sqrt{n}} = \frac{4\varepsilon^2}{9} + \frac{2\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$



si  $\varepsilon \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Luego tenemos que  $\|T\| \leq \varepsilon$ , y por lo tanto la desigualdad (3.3) implica que

$$(1 - 2\varepsilon)Id_{n+1} \preceq A := \sum_{j \in \sigma} b_j v_j \otimes v_j \preceq (1 + 2\varepsilon)Id_{n+1},$$

o lo que es equivalente

$$Id_{n+1} \preceq \sum_{j \in \sigma} \frac{b_j}{1 - 2\varepsilon} v_j \otimes v_j \preceq \gamma Id_{n+1},$$

con  $\gamma = \frac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}$ . Aplicando el Teorema 3.2.1, sabemos que existen  $k_j > 0$ ,  $j \in \sigma$  tales que si  $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  son funciones medibles, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{j \in \sigma} f_j^{k_j} (\langle x, v_j \rangle) dx \leq \gamma^{\frac{n+1}{2}} \prod_{j \in \sigma} \left( \int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{k_j}.$$

Recordemos que los escalares  $k_j$  estaban definidos como

$$k_j = \frac{b_j}{1 - 2\varepsilon} \left\langle \left( \frac{1}{1 - 2\varepsilon} A \right)^{-1} v_j, v_j \right\rangle = b_j \langle A^{-1} v_j, v_j \rangle,$$

y dado que  $A^{-1} \preceq \frac{1}{1-2\varepsilon} Id_{n+1}$ , tenemos que  $\frac{k_j}{b_j} \leq \frac{1}{1-2\varepsilon}$ . Para  $j \in \sigma$  definimos  $f_j(t) = e^{\frac{-b_j t}{k_j}} \chi_{[0, \infty)}(t)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{j \in \sigma} f_j^{k_j} (\langle x, v_j \rangle) dx &\leq \gamma^{\frac{n+1}{2}} \prod_{j \in \sigma} \left( \int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{k_j} \\ &= \gamma^{\frac{n+1}{2}} \prod_{j \in \sigma} \frac{k_j^{k_j}}{b_j} \\ &\leq \gamma^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{(1 - 2\varepsilon)^{\sum_{j \in \sigma} k_j}} = \gamma^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{(1 - 2\varepsilon)^{n+1}} \\ &= \left( \frac{1 + 2\varepsilon}{(1 - 2\varepsilon)^3} \right)^{\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

Sea

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_j \rangle < 1, j \in \sigma \cup \tau\}.$$

Sea  $y = (x, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$  y asumamos que  $r > 0$  y  $x \in \frac{r}{\sqrt{n}} Q$ . Entonces tenemos que  $\langle x, u_j \rangle < \frac{r}{\sqrt{n}}$  para todo  $j \in \sigma$ , lo que implica que  $\langle y, v_j \rangle > 0$  para todo

$j \in \sigma$ , y luego  $\prod_{j \in \sigma} f_j^{k_j}(\langle y, v_j \rangle) > 0$ . Tenemos también que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{|\sigma|} \sum_{j \in \sigma} u_j, x \right\rangle &= \langle -u, x \rangle = \frac{2\sqrt{n}\varepsilon}{3} \langle -w, x \rangle \\ &= \frac{2\sqrt{n}\varepsilon}{3} \left\langle -\sum_{i \in \tau} \rho_i u_i, x \right\rangle \geq \frac{-2\sqrt{n}\varepsilon}{3} \left( \sum_{i \in \tau} \rho_i \right) \frac{r}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{-2\varepsilon r}{3}. \end{aligned}$$

Usando lo anterior tenemos que si  $y = (x, r) \in \frac{r}{\sqrt{n}}Q \times (0, \infty)$ , entonces

$$\begin{aligned} \prod_{j \in \sigma} f_j^{k_j}(\langle y, v_j \rangle) &= \exp \left( -\sum_{j \in \sigma} b_j \left( \frac{r}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{\frac{n}{n+1}} \langle x, u_j \rangle \right) \right) \\ &= \exp \left( \frac{-r}{\sqrt{n+1}} \sum_{j \in \sigma} b_j \right) \exp \left( \sqrt{n}\sqrt{n+1} \left\langle x, \frac{1}{|\sigma|} \sum_{j \in \sigma} u_j \right\rangle \right) \\ &\geq e^{-r\sqrt{n+1}} e^{-\sqrt{n}\sqrt{n+1} \frac{2\varepsilon}{3} r} = e^{-r\sqrt{n+1}(1+\frac{2}{3}\varepsilon\sqrt{n})}. \end{aligned}$$

Ahora por el Teorema 3.2.1 tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{|Q|}{n^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty r^n e^{-r\sqrt{n+1}(1+\frac{2}{3}\varepsilon\sqrt{n})} dr &= \int_0^\infty \int_{\frac{r}{\sqrt{n}}Q} e^{-r\sqrt{n+1}(1+\frac{2}{3}\varepsilon\sqrt{n})} dx dr \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{j \in \sigma} f_j^{k_j}(\langle y, v_j \rangle) dy \\ &\leq \left( \frac{1+2\varepsilon}{(1-2\varepsilon)^3} \right)^{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

Dado que  $B_2^n \subseteq P$ , y que

$$\int_0^\infty r^n e^{-r\sqrt{n+1}(1+\frac{2}{3}\varepsilon\sqrt{n})} dr = \frac{n!}{(n+1)^{\frac{n+1}{2}} (1+\frac{2}{3}\varepsilon\sqrt{n})^{n+1}},$$

tenemos entonces, tomando  $1 + \varepsilon' = \frac{1+2\varepsilon}{(1-2\varepsilon)^3}$ , que

$$\begin{aligned} |\cap_{i \in \sigma \cup \tau} P_i| &= |Q| \leq \frac{(1+\varepsilon')^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{n}{2}} (n+1)^{\frac{n+1}{2}} (1+\frac{2}{3}\varepsilon\sqrt{n})^{n+1}}{n!} \frac{|P|}{|B_2^n|} \\ &= \frac{(1+\varepsilon')^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{n}{2}} (n+1)^{\frac{n+1}{2}} (1+\frac{2}{3}\varepsilon\sqrt{n})^{n+1}}{n!} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1) |P|}{\pi^{\frac{n}{2}}}. \end{aligned}$$

Nuevamente, usando la fórmula de Stirling obtenemos la desigualdad, para una constante  $C > 0$

$$\begin{aligned} |\cap_{i \in \sigma \cup \tau} P_i| &\leq C \frac{(1 + \varepsilon')^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{n}{2}} (n+1)^{\frac{n+1}{2}} (1 + \frac{2}{3}\varepsilon\sqrt{n})^{n+1}}{\pi^{\frac{n}{2}} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \frac{n}{2} \sqrt{\frac{4\pi}{n}} \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}} |P| \\ &= C(1 + \varepsilon')^{\frac{n+1}{2}} \frac{(1 + \frac{2}{3}\varepsilon\sqrt{n})^{n+1} n^n n (n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^n n} \left(\frac{e}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} |P| \\ &= C(1 + \varepsilon')^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{2}{3}\varepsilon\sqrt{n}\right)^{n+1} (n+1)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{e}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} |P|. \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon < \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{3}{2}$  entonces para  $n$  suficientemente grande tenemos que  $1 \leq (1 - \frac{2}{3}\varepsilon)\sqrt{n}$  o lo que es equivalente  $1 + \frac{2}{3}\varepsilon\sqrt{n} \leq \sqrt{n}$ . Además si  $\varepsilon < \frac{1}{2}$  tenemos que  $1 + \varepsilon' < \frac{2\pi}{e} \Leftrightarrow 1 + 2\varepsilon < \frac{2\pi}{e}(1 - 2\varepsilon)^3$  y esto vale para  $\varepsilon$  suficientemente chico ya que vale si  $\varepsilon = 0$  y en ambos lados de la desigualdad tenemos funciones continuas respecto a  $\varepsilon$ . Por lo tanto, dado que  $(1 + \frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}$  converge a  $\sqrt{e}$  cuando  $n$  tiende a infinito, si  $\varepsilon$  es chico, y para  $n$  suficientemente grande la podemos llevar la desigualdad a

$$\begin{aligned} |\cap_{i \in \sigma \cup \tau} P_i| &\leq C (\sqrt{n})^{n+2} \left(\frac{1 + \varepsilon'}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{1 + \varepsilon' n^{\frac{n}{2}}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{n+1} \frac{1}{\sqrt{2}} |P| \\ &\leq C_1 n \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon')e(n+1)}{2}} n^n |P|. \end{aligned}$$

Luego concluimos que

$$|\cap_{i \in \sigma \cup \tau} P_i| \leq \left(C_n^{\frac{1}{n}} n\right)^n |P|,$$

con  $C_n > 0$  del orden de  $n^{\frac{3}{2}}$  y la intersección tomándola sobre a lo sumo  $|\sigma \cup \tau| \leq \frac{n}{c\varepsilon^2} + n + 1$  semi-espacios.  $\square$

De la última demostración que realizamos podemos observar que si tomamos  $\varepsilon = \frac{1}{n^\alpha}$  con  $\alpha < \frac{1}{2}$ , tenemos que

$$(1 + \varepsilon') \left(1 + \frac{2}{3}\varepsilon\sqrt{n}\right)^2 \frac{e}{2\pi} = (1 + \varepsilon') \left(1 + \frac{2}{3}n^{\frac{1}{2}-\alpha}\right)^2 \frac{e}{2\pi} < n^{1-2\alpha}$$

donde  $\varepsilon'$  queda ahora en términos de  $\frac{1}{n^\alpha}$ , y donde la última desigualdad vale si y sólo si  $\left(1 + \frac{2}{3}n^{\frac{1}{2}-\alpha}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n^\alpha}\right) < \frac{2\pi}{e} n^{1-2\alpha} (1 - \frac{2}{n^\alpha})^3$ , lo que ocurre para

$n$  suficientemente grande. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} |\cap_{i \in \sigma \cup \tau} P_i| &\leq Cn^{\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{n+1} n^{\frac{1}{2}-\alpha} n^{\frac{n}{2}-\alpha n} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2e}} |P| \\ &\leq C_1 \sqrt{\frac{e(n+1)\pi}{e}} n^{\frac{n}{2}} n^{\frac{1}{2}-\alpha} n^{\frac{n}{2}-\alpha n} |P| \\ &= \left( \underbrace{C_1 \sqrt{n+1} n^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\pi}}_{C_n} \right) n^{n(1-\alpha)} |P|. \end{aligned}$$

Luego concluimos que

$$|\cap_{i \in \sigma \cup \tau} P_i| \leq C_n n^{n(1-\alpha)} |P|,$$

con  $C_n > 0$  del orden de  $n^{1-\alpha}$  y la intersección tomándola sobre a lo sumo  $|\sigma \cup \tau| \leq \frac{n}{c\epsilon^2} + n + 1 = \frac{n^{1+2\alpha}}{c} + n + 1$  semi-espacios, siendo la cantidad de semi-espacios a tomar del orden de  $n^{1+2\alpha} < n^2$ . Es decir que obtenemos una cota condicionada a la cantidad de semiespacios que consideramos. Podemos expresar este resultado de la siguiente forma.

**Corolario 3.2.6.** *Para toda familia  $\{P_i : i \in I\}$  de semiespacios cerrados*

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq 1\}$$

en  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $P = \cap_{i \in I} P_i$  tiene volumen positivo, para cada  $\alpha < \frac{1}{2}$  existe  $s_\alpha$  del orden de  $n^{1+2\alpha}$  y un multiset  $\theta \subseteq I$  de cardinal a lo sumo  $|\theta| \leq s_\alpha$  tal que

$$|\cap_{i \in \theta} P_i| \leq C_n n^{n(1-\alpha)} |P|,$$

donde  $C_n > 0$  es del orden de  $n^{1-\alpha}$ .

### 3.3. Desigualdad de Brascamp-Lieb y descomposición aproximada de la identidad

En el Capítulo 1 enunciamos la desigualdad de Brascamp-Lieb para el caso general y la demostramos para el caso en el que los vectores involucrados forman una descomposición de la identidad, donde además la constante de la desigualdad es uno. La siguiente proposición nos servirá para mostrar que la desigualdad de Brascamp-Lieb sigue valiendo con una constante razonable, cuando tenemos una descomposición aproximada de la identidad.

**Proposición 3.3.1.** *Sea  $\gamma > 1$ . Si  $u_1, \dots, u_s \in S^{n-1}$  y  $c_1, \dots, c_s > 0$  satisfaciendo*

$$Id_n \preceq A := \sum_{i=1}^s c_i u_i \otimes u_i \preceq \gamma Id_n$$

entonces

$$\gamma^n \det \left( \sum_{i=1}^s k_i \lambda_i u_i \otimes u_i \right) \geq \prod_{j=1}^s \lambda_j^{k_j}$$

para todo  $\lambda_1, \dots, \lambda_s > 0$ , donde  $k_j = c_j \langle A^{-1} u_j, u_j \rangle > 0$ ,  $1 \leq j \leq s$ .

*Demostración.* Para todo  $M \subseteq \{1, \dots, s\}$  con cardinal  $|M| = n$  definimos

$$\lambda_M = \prod_{j \in M} \lambda_j, \text{ y } U_M = \det \left( \sum_{j \in M} c_j u_j \otimes u_j \right).$$

Por la fórmula de Cauchy-Binet tenemos que

$$\det \left( \sum_{j=1}^s c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right) = \sum_{|M|=n} \lambda_M U_M.$$

Eligiendo  $\lambda_j = 1$ , obtenemos que  $\sum_{|M|=n} U_M = \det(A)$ . Por la desigualdad aritmética-geométrica tenemos que

$$\sum_{|M|=n} \lambda_M \frac{U_M}{\sum_{|M|=n} U_M} \geq \prod_{|M|=n} \lambda_M^{\frac{U_M}{\sum_{|M|=n} U_M}} = \prod_{j=1}^s \lambda_j^{\frac{\sum_{\{M: j \in M\}} U_M}{\sum_{|M|=n} U_M}}.$$

Aplicando nuevamente la fórmula de Cauchy-Binet, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{\{M: j \in M\}} U_M}{\sum_{|M|=n} U_M} &= \frac{\sum_{|M|=n} U_M - \sum_{\{M: j \notin M\}} U_M}{\sum_{|M|=n} U_M} = 1 - \frac{\det(A - c_j u_j \otimes u_j)}{\det(A)} \\ &= 1 - (1 - c_j \langle A^{-1} u_j, u_j \rangle) = c_j \langle A^{-1} u_j, u_j \rangle \end{aligned}$$

para todo  $j = 1, \dots, s$ , donde en la anteúltima igualdad usamos el Lema 2.2.3. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\det \left( \sum_{j=1}^s c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}{\det(A)} &= \frac{\sum_{|M|=n} \lambda_M U_M}{\sum_{|M|=n} U_M} \\ &\geq \prod_{j=1}^s \lambda_j^{\frac{\sum_{\{M: j \in M\}} U_M}{\sum_{|M|=n} U_M}} = \prod_{j=1}^s \lambda_j^{c_j \langle A^{-1} u_j, u_j \rangle} = \prod_{j=1}^s \lambda_j^{k_j}. \end{aligned}$$

Ya que  $Id_n \preceq A \preceq \gamma Id_n$ , tenemos que  $\det(A) \geq 1$  y

$$\gamma k_j = c_j \gamma \langle A^{-1} u_j, u_j \rangle \geq c_j \gamma \left\langle \frac{1}{\gamma} Id_n u_j, u_j \right\rangle = c_j$$

para todo  $j = 1, \dots, s$ . Esto implica que para todo  $\lambda_1, \dots, \lambda_s > 0$  se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \sum_{j=1}^s c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right) v, v \right\rangle &= \sum_{j=1}^s c_j \lambda_j \langle u_j, v \rangle^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^s \gamma k_j \lambda_j \langle u_j, v \rangle^2 \\ &= \left\langle \left( \gamma \sum_{j=1}^s \lambda_j k_j u_j \otimes u_j \right) v, v \right\rangle \end{aligned}$$

para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ , es decir que  $\sum_{j=1}^s c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \preceq \gamma \left( \sum_{j=1}^s k_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)$ . Luego podemos concluir que

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^s \lambda_j^{k_j} &\leq \frac{\det \left( \sum_{j=1}^s c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}{\det(A)} \leq \det \left( \sum_{j=1}^s c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right) \\ &\leq \det \left( \gamma \left( \sum_{j=1}^s k_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right) \right) = \gamma^n \det \left( \sum_{j=1}^s k_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right). \end{aligned}$$

□

De la Proposición 3.3.1 obtenemos, si  $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = \lambda > 0$ , que

$$\gamma^n \det \left( \sum_{j=1}^s k_j u_j \otimes u_j \right) \geq \lambda^{\sum_{j=1}^s k_j - n},$$

y dado que esto vale para todo  $\lambda > 0$ , entonces  $\sum_{j=1}^s k_j = n$ .

Ahora sí podemos realizar la demostración de Brascamp-Lieb para descomposiciones aproximadas de la identidad.

*Demostración del Teorema 3.2.1.* Al ser una descomposición aproximada de la identidad, tenemos que  $s \geq n$ , que  $k_1 + \dots + k_s = n$ , y por lo tanto,

por el teorema de Brascamp-Lieb 1.2.9 se verifica la siguiente desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^s f_j^{k_j} (\langle x, u_j \rangle) dx \leq D \prod_{j=1}^s \left( \int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{k_j}, \text{ con } D = \frac{1}{\sqrt{F}} \text{ y}$$

$$F = \inf \left\{ \frac{\det \left( \sum_{j=1}^s k_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}{\prod_{j=1}^s \lambda_j^{k_j}} : \lambda_j > 0 \right\}.$$

Por lo hecho en la proposición anterior, tenemos que  $\gamma^n \frac{\det \left( \sum_{j=1}^s k_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}{\prod_{j=1}^s \lambda_j^{k_j}} \geq 1$

para todo  $\lambda_1, \dots, \lambda_s > 0$ , luego  $\gamma^n F \geq 1$ , es decir que  $\gamma^{\frac{n}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{F}} = D$ . Concluimos entonces que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^s f_j^{k_j} (\langle x, u_j \rangle) dx \leq D \prod_{j=1}^s \left( \int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{k_j} \leq \gamma^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^s \left( \int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{k_j}.$$

□





## Capítulo 4

# Aplicación a grafos de la aproximación de la identidad

El objetivo de este capítulo será estudiar una nueva aplicación de la aproximación de la identidad, realizada por Batson, Spielman y Srivastava en [BSS12], que tiene por finalidad demostrar que todo grafo puede ser aproximado por un grafo con un número de aristas que será lineal respecto a la cantidad de vértices. Para poder ver esto, deberemos antes dar una serie de definiciones que no están relacionadas con lo hecho hasta aquí, nos basaremos en la publicación de Batson, Spielman, Srivastava y Teng [BSST13].

Nos referiremos por grafo ponderado a una 3 – upla  $G = (V, E, w)$ , donde  $V$  es el conjunto de los vértices del grafo,  $E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V\}$  es el conjunto de aristas y  $w_{(u,v)} > 0$  para cada  $(u, v) \in E$  representan los pesos. Asumiremos al grafo no dirigido, y siempre notaremos por  $n$  al número de vértices y por  $m$  al número de aristas. Algunas veces podemos expresar un grafo ponderado como  $G = (V, w)$ , donde  $E$  resulta implícito si nos permitimos tomar  $w_{(u,v)} = 0$  si  $(u, v) \notin E$ .

Entenderemos por *grafo escaso* a aquellos cuyo número de aristas es razonablemente proporcional al número de vértices, mientras que diremos que es un *grafo denso* si su número de aristas es alrededor de  $\frac{n^2}{2}$ . Los pesos pueden representar capacidades, similaridad o simplemente coeficientes en un sistema lineal. En un grafo escaso, todas las aristas pueden ser importantes para la estructura del grafo, por ejemplo en un árbol cada arista proporcióna el único camino entre puntos finales. En cambio, en un grafo denso, algunas aristas pueden desempeñar funciones similares. Por ejemplo, un conjunto de aristas de bajo peso que conectan dos subgrafos completos, podría aproximarse por una única arista de peso elevado que conecte vértices representativos de ambos subgrafos. La *dispersión* de un grafo puede ser vista como el procedimiento de encontrar aristas representativas y ponderarlas apropiadamente.

Para tener una noción más clara de que es un grafo escaso, definiremos el *grado ponderado* de un vértice por

$$d(u) = \sum_{v \in V} w_{u,v}.$$

Consideraremos como escasas aquella familia de grafos cuyos grados ponderados promedio estén acotados por alguna constante o por algún polinomio en el logaritmo de su número de vértices.

Muchos algoritmos implican la construcción de grafos densos, incluso cuando se resuelven problemas que parten de grafos escasos. Los grafos densos pueden ser difíciles de manejar o almacenar. Las mejoras en la dispersión puede facilitar esta tarea.

## 4.1. Similitud de corte

La noción de similitud de corte de un grafo fue considerada por primera vez por Benczúr y Karger en [BK96] en su intento por desarrollar algoritmos más rápidos para el corte mínimo y problemas del flujo máximo. En este problema estaban interesados en la suma de los pesos de las aristas que eran cortadas cuando se dividen los vértices del grafo en dos conjuntos. Dos grafos ponderados tienen un corte similar si la suma de los pesos de las aristas cortadas es aproximadamente la misma en cada división.

Para un grafo ponderado  $G = (V, w)$ , y  $S \subseteq V$  un subconjunto de vértices, podemos definir la suma del corte en  $S$  como

$$cut_G(S) := \sum_{w \in S, v \notin V} w_{(u,v)}.$$

Los tamaños de los cortes de un grafo nos dan información acerca de la estructura del mismo. Por ejemplo, los grados ponderados están dados por los cortes de tamaños  $|S| = 1$

Diremos que los grafos ponderados  $G = (V, w)$  y  $\tilde{G} = (V, \tilde{w})$  son corte  $\sigma$ -similares si

$$\frac{cut_{\tilde{G}}(S)}{\sigma} \leq cut_G(S) \leq \sigma cut_{\tilde{G}}(S)$$

para todo  $S \subseteq V$ . Benczúr y Karger demuestran que todo grafo es de corte similar a un grafo de grado ponderado promedio  $O(\log(n))$ , y dicho grafo puede construirse en un tiempo polilogarítmico.

**Teorema 4.1.1** (Benczúr-Karger). *Para todo  $\varepsilon > 0$ , todo grafo ponderado  $G = (V, E, w)$  tiene un grafo  $\tilde{G} = (V, \tilde{E}, \tilde{w})$  de corte  $(1 + \varepsilon)$  similar con  $\tilde{E} \subseteq E$  y  $|\tilde{E}| = O(\frac{n \log(n)}{\varepsilon^2})$ . Más aún  $\tilde{G}$  puede construirse en  $O(m \log^3(n) + \frac{m \log(n)}{\varepsilon^2})$  pasos.*

## 4.2. Similitud espectral

Motivados por problemas de álgebra lineal numérica y teoría espectral de grafos, Spielman y Teng introdujeron en [ST11] la noción de similitud espectral, que puede ser vista como una generalización de similitud de corte.

Dado un grafo ponderado  $G = (V, w)$ , definimos la forma *cuadrática Laplaciana* para el grafo  $G$  como la función  $Q_G$  que va de  $\mathbb{R}^V$  en  $\mathbb{R}$  dada por

$$Q_G(x) = \sum_{(u,v) \in E} w_{(u,v)}(x_u - x_v)^2.$$

Si  $S$  es un subconjunto de vértices y  $x$  es el vector característico de  $S$  tenemos entonces que  $Q_G(x) = \text{cut}_G(S)$ .

Diremos que dos grafos ponderados  $G = (V, w)$  y  $\tilde{G} = (V, \tilde{w})$  son *espectralmente  $\sigma$  - similares* si

$$\frac{Q_{\tilde{G}}(x)}{\sigma} \leq Q_G(x) \leq \sigma Q_{\tilde{G}}(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^V.$$

Luego la similitud de corte puede ser vista como un caso especial de similitud espectral, considerando  $x$  el vector que toma valores en  $\{0, 1\}$ . A pesar de que la similitud de corte es estrictamente más fuerte que la similitud espectral, es más simple chequear si dos grafos son espectralmente similares. Esto es, en menos pasos uno puede obtener una mejor precisión de la similitud espectral.

Los grafos que son espectralmente similares comparten propiedades algebraicas. Por ejemplo, la distancia de resistencia efectiva entre todos los pares de vértices, definida por

$$R_{(u,v)} = \left( \min_{x: x(u)=1, x(v)=0} Q_G(x) \right)^{-1},$$

identidad relacionada con la propiedad de minimización de energía de fluidos eléctricos, resulta similar en grafos espectralmente similares.

Otro problema que puede ser resuelto con la similitud espectral es el de los problemas de regresión en grafos. En estos problemas se conoce el valor del vector  $x$  en cierto conjunto de vértices  $S$  y se quiere inferir el valor en los vértices restantes. Este problema puede verse como que los valores de  $x$  son voltajes que se han fijado, mientras que los restantes son los voltajes inducidos. En este sentido, se busca el vector  $x$  que minimice  $Q_G(x)$  respetando los valores ya fijados. Se puede demostrar que si dos grafos son espectralmente similares entonces la solución a el problema de regresión será similar.

Los problemas de distancia de resistencia efectiva y de regresión son casos especiales de los problemas que han motivado la definición de similitud espectral, estos son la solución de ecuaciones lineales en matrices Laplacianas. La forma cuadrática Laplaciana puede ser escrita como

$$Q_G(x) = x^t L_G x,$$

Figura 4.1: Matriz Laplaciana de un grafo



donde  $L_G$  es la matriz Laplaciana del grafo  $G$  dada por

$$L_G(u, v) := \begin{cases} -w_{u,v} & \text{si } u \neq v \\ \sum_s w_{(u,s)} & \text{si } u = v. \end{cases}$$

Como puede verse en la Figura 4.2. La resolución de sistemas de ecuaciones lineales con matrices Laplacianas surge en muchas áreas de optimización y computación. Así por ejemplo, la medida de similitud espectral puede relacionarse con el concepto del número de condición en álgebra lineal. En este sentido, si dos grafos son espectralmente similares, utilizando la técnica de preconditionamiento, se pueden utilizar soluciones de ecuaciones lineales en la matriz Laplaciana de un grafo para resolver sistemas de ecuaciones lineales en el Laplaciano del otro.

Definiendo la similitud espectral para matrices como  $A$  y  $B$  son espectralmente  $\sigma$  – similares si

$$A\sigma^{-1} \preceq B \preceq \sigma A,$$

tenemos que dos grafos son espectralmente similares si sus matrices Laplacianas lo son.

Una  $(\sigma, d)$ –dispersión espectral de un grafo  $G$  es un grafo  $\tilde{G}$  satisfaciendo

- $\tilde{G}$  es espectralmente  $\sigma$  – similar a  $G$
- las aristas de  $\tilde{G}$  son las aristas de  $G$ , pero con nuevos pesos
- $\tilde{G}$  tiene a lo sumo  $d|V|$  aristas.

Ya que la similitud espectral implica que el total de las aristas ponderadas sea preservado, la dispersión espectral puede tener menos aristas que  $G$  si sus pesos son más grandes. Nuestro objetivo será demostrar el resultado obtenido por Batson, Spielman y Srivastava en [BSS12] en el que concluyen que todo grafo  $G$  tiene una  $(1 + 2\varepsilon, \frac{4}{\varepsilon^2})$  – dispersión espectral para todo  $\varepsilon \in (0, 1)$ . El teorema al que hacemos referencia nos dice que

**Teorema 4.2.1.** *Para  $d > 1$ , todo grafo ponderado no dirigido  $G = (V, E, w)$  de  $n$  vértices contiene un subgrafo ponderado  $H = (V, F, \tilde{w})$  con  $[d(n-1)]$  aristas tal que satisfice*

$$x^t L_G x \preceq x^t L_H x \preceq \left( \frac{d+1+2\sqrt{d}}{d+1-2\sqrt{d}} \right) x^t L_G x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^V.$$

La demostración de este teorema, que se realiza a través de los métodos de barreras visto en el Capítulo 2, provee un algoritmo para calcular el grafo  $H$  en  $O(dn^3m)$  pasos, con  $m$  la cantidad de aristas y  $n$  la cantidad de vértices. Hay que observar que mientras las aristas del grafo  $H$  es un subconjunto de las aristas del grafo  $G$ , los pesos en  $H$  son diferentes a los de  $G$ .

Para demostrar el teorema, necesitamos un resultado similar al Teorema 2.3.5. El siguiente teorema, a pesar de que no nos permite conocer las constantes que acompañan a los vectores, nos da un método determinístico que nos permite saber que el método se obtiene a través de  $O(dn^3m)$  pasos y que es importante para la aplicación de este algoritmo.

**Teorema 4.2.2.** *Supongamos  $d > 1$  y  $v_1, \dots, v_m$  son vectores en  $\mathbb{R}^n$  con*

$$\sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i = Id_n.$$

*Entonces existe escalares  $s_i \geq 0$  con  $|\{i : s_i \neq 0\}| \leq dn$  tal que*

$$Id_n \preceq \sum_{i \leq m} s_i v_i \otimes v_i \preceq \left( \frac{1+\sqrt{d}}{1-\sqrt{d}} \right)^2 Id_n.$$

*Demostración.* La demostración consistirá en la aplicación de los lemas del Capítulo 2 acerca de las funciones barreras. Todo lo que necesitamos es definir  $\varepsilon_U$ ,  $\varepsilon_L$ ,  $\delta_U$  y  $\delta_L$  de manera de satisfacer los lemas. Tomaremos entonces  $A^{(0)} = 0$  y construiremos  $A^{(q+1)}$  a partir de  $A^{(q)}$  eligiendo cualquier vector  $v_i$  que cumpla

$$v_i^t L_{A^{(q)}} v_i \geq v_i^t U_{A^{(q)}} v_i,$$

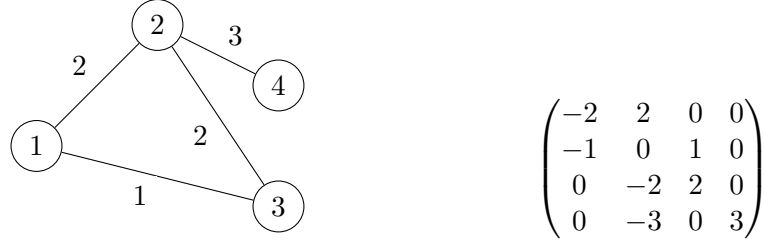
con  $L_{A^{(q)}}$  y  $U_{A^{(q)}}$  las matrices también definidas en la Sección 2.2, y definiremos  $A^{(q+1)} = A^{(q)} + t v_i^t \otimes v_i$  para  $t \geq 0$  satisfaciendo

$$v_i^t L_{A^{(q)}} v_i \geq \frac{1}{t} \geq v_i^t U_{A^{(q)}} v_i.$$

Luego es suficiente con tomar  $\delta_L = 1$ ,  $\varepsilon_L = \frac{1}{\sqrt{d}}$ ,  $l_0 = \frac{-n}{\varepsilon_L}$ ,  $\delta_U = \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$ ,  $\varepsilon_U = \frac{\sqrt{d}-1}{d+\sqrt{d}}$  y  $u_0 = \frac{n}{\varepsilon_U}$ . Podemos chequear que

$$\frac{1}{\delta_U} + \varepsilon_U = \frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}+1} + \frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}(\sqrt{d}+1)} = 1 - \frac{1}{\sqrt{d}} = \frac{1}{\delta_L} - \varepsilon_L$$

Figura 4.2: Definición de la Matriz de signos aristas-vértices



(a) Posible asignación de direcciones a las aristas  
 $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$

tal que se satisface el Lema 2.2.6. Los potenciales iniciales son  $\phi_{\varepsilon_U}^{\frac{n}{\varepsilon_U}}(0) = \varepsilon_U$  y  $\phi_{\varepsilon_L}^{\frac{n}{\varepsilon_L}}(0) = \varepsilon_L$ . Luego de  $dn$  pasos, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{\max}(A^{(dn)})}{\lambda_{\min}(A^{(dn)})} &\leq \frac{\frac{n}{\varepsilon_U} + dn\delta_U}{\frac{-n}{\varepsilon_L} + dn\delta_L} \\ &= \frac{\frac{d+\sqrt{d}}{\sqrt{d-1}} + d\frac{\sqrt{d+1}}{\sqrt{d-1}}}{d - \sqrt{d}} \\ &= \left(\frac{1 + \sqrt{d}}{1 - \sqrt{d}}\right)^2, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Con esta aproximación de la identidad estamos en condiciones de demostrar el Teorema 4.2.1.

*Demostración.* Comenzaremos esta demostración descomponiendo la matriz del grafo  $G$  como producto de matrices, de la forma  $L_G = B^t W B$ , donde la matriz  $B$  es la matriz de signos aristas-vértices, de tamaño  $m \times n$ , donde para cada arista  $e$  y vértice  $v$  tenemos

$$B_{e,v} := \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ está en la punta del arista } e \\ -1 & \text{si } v \text{ está en la base del arista } e \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Por ejemplo, si tenemos un grafo como en la Figura , lo que hacemos es asignarle a cada arista una dirección cualquiera, que resulta indistinto en nuestro objetivo que es el producto de  $B^t W B$ , y construimos la matriz como indicamos en la figura antes mencionada.

Mientras que  $W$  es la matriz diagonal de tamaño  $m \times m$  cuyos elementos en la diagonal, para cada arista  $e$ , son los pesos  $w_e$ .  $L_G$  es semidefinida

positiva y se tiene que  $G$  es conectado si y sólo si  $\ker(L_G) = \ker(\sqrt{W}B) = \text{Span}(1)$ , con  $1 = (1, \dots, 1)$ . Ya que  $L_G$  es simétrica podemos diagonalizarla y escribirla como

$$L_G = \sum_1^{n-1} \lambda_i u_i \otimes u_i,$$

donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  son los autovalores no nulos de  $L_G$  y  $u_1, \dots, u_{n-1}$  los autovectores ortonormales. La pseudo inversa Moore-Penrose de  $L_G$  está definida como

$$L_G^+ = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} u_i \otimes u_i.$$

Tenemos que  $\ker(L_G) = \ker(L_G^+)$  y que

$$L_G L_G^+ = L_G^+ L_G = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \otimes u_i,$$

lo cual es simplemente la proyección sobre el subespacio generado por los autovectores de  $L_G$ . Luego  $L_G L_G^+ = L_G^+ L_G$  es la identidad sobre la imagen  $\text{Im}(L_G) = \ker(L_G)^\perp$ .

Podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $G$  es un grafo conectado y fijemos  $d > 1$ . Restrigiéndonos a la  $\text{Im}(L_G) \cong \mathbb{R}^{n-1}$  y aplicamos el Teorema 4.2.2 a las columnas  $\{v_i\}_{i \leq m}$  de  $V = V_{n \times m} = \sqrt{L_G^+} B^t \sqrt{W}$ , indexadas por las aristas de  $G$ , y podemos aplicar el teorema dado que

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq m} v_i \otimes v_i &= V V^t = \sqrt{L_G^+} B^t W B \sqrt{L_G^+} \\ &= \sqrt{L_G^+} L_G^+ \sqrt{L_G^+} = \text{Id}_{\text{Im}(L_G)}. \end{aligned}$$

Definimos la matriz diagonal  $S$  de tamaño  $m \times m$  en cuya diagonal tiene los escalares  $s_i \geq 0$  garantizados por el Teorema 4.2.2, esto es  $S_{i,i} = s_i$  y sea  $L_H = B^t \sqrt{W} S \sqrt{W} B$ . Entonces  $L_H$  es la matriz Laplaciana del subgrafo  $H$  de  $G$  con aristas ponderadas  $\{\tilde{w}_i = w_i s_i\}_{i \in E}$ , y  $H$  tiene a lo sumo  $d(n-1)$  aristas ya que justamente hay a lo sumo  $d(n-1)$  escalares  $s_i$  no nulos. Tenemos también que

$$\text{Id}_{\text{Im}(L_G)} \preceq \sum_{i \leq m} s_i v_i \otimes v_i = V S V^t \preceq \kappa \text{Id}_{\text{Im}(L_G)},$$

con  $\kappa = \left( \frac{1+\sqrt{d}}{1-\sqrt{d}} \right)^2$ . Por la Fórmula de Courant-Fischer, que mencionamos en

la Sección 2.3, la última desigualdad es equivalente a

$$\begin{aligned}
1 &\leq \frac{y^t V S V^t y}{y^t y} \leq \kappa \quad \text{para todo } y \in \text{Im}(\sqrt{L_G}) = \text{Im}(L_G) \\
&\iff 1 \leq \frac{y^t \sqrt{L_G^+} L_H \sqrt{L_G^+} y}{y^t y} \leq \kappa \quad \text{para todo } y \in \text{Im}(\sqrt{L_G}) \\
&\iff 1 \leq \frac{x^t \sqrt{L_G} \sqrt{L_G^+} L_H \sqrt{L_G^+} \sqrt{L_G} x}{x^t \sqrt{L_G} \sqrt{L_G} x} \leq \kappa \quad \text{para todo } x \perp 1 \\
&\iff 1 \leq \frac{x^t L_H x}{x^t L_G x} \kappa \quad \text{para todo } x \perp 1.
\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad usamos que

$$\text{Im}(\sqrt{L_G}) = \text{Im}(L_G) = \ker(L)^\perp = \text{Span}(1),$$

por ser  $G$  un grafo conectado. Luego tenemos la desigualdad que queríamos para todo  $x \perp 1$ , y dado que  $(1, \dots, 1)$  pertenece al núcleo tanto de  $L_G$  como de  $L_H$ , la desigualdad se verifica para todo  $x \in \mathbb{R}^V$ .  $\square$

Tomando  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{d}}$  podemos encontrar la dispersión espectral buscada.

Para realizar esta demostración en un algoritmo, primero debemos encontrar los vectores  $v_i$ , lo que puede encontrarse en  $O(n^2 m)$  pasos. Para cada iteración debemos calcular  $((u + \delta_U)Id - A)^{-1}$ ,  $((u + \delta_U)Id - A)^{-2}$ , y las mismas matrices para el potencial inferior. Puede hacerse en  $O(n^3)$ . Finalmente podemos decidir que arista hay que agregar mediante el cálculo de  $v_i^t U v_i$  y  $v_i^t L v_i$  para cada arista, lo que se puede terminar en  $O(n^2 m)$  pasos. Luego, a medida que ejecutamos todas las iteraciones, el total de pasos es del orden de  $O(dn^3 m)$ . Esto nos permite, dado que  $G$  y  $H$  tiene autovalores similares, poder llevar a través de este algoritmo, un problema lineal con una matriz densa a una matriz  $H$  con muchos ceros en  $O(dn^3 m)$  pasos.



# Índice alfabético

- $(\sigma, d)$  – dispersión espectral, 104
- $(\alpha, \beta, D)$ -aproximable, 67
- Corte  $\sigma$  – similares, 102
- Aproximación
  - de John, 33
  - de la identidad, 34
- Cápsula convexa, 5
- Cauchy-Binet, 21
- Cuepo convexo, 1
- Descomposición
  - $(1 + \alpha)$ -aproximada de la identidad, 34
  - aproximada de la identidad, 33
- Descomposición de la identidad, 8
- Desigualdad isoperimétrica inversa, 18
- Dual, 6
- Dvoretzky-Rogers, 17
- Elipsoide, 2
- Elipsoide
  - de John, 5
  - de Löwner, 6
  - de volumen maximal, 3, 5
  - de volumen minimal, 6
- Espectralmente  $\sigma$  – similares, 103
- Grado ponderado, 102
- Grafo, 101
- Grafo
  - denso, 101
  - escaso, 101
  - ponderado, 101
- Hölder, 5
- Hahn-Banach, 6
- Matriz diagonal, 5
- Minkowski, 4
- Multiset, 36
- Norma de Hilbert-Schmidt, 56
- Operador identidad, 8
- Polar, 6
- Posición de John, 6
- Posición de Löwner, 6
- Puntos de contacto, 7
- Rango estable, 56
- Simplex, 18
- Teorema de Carathéodory, 86
- Teorema de John, 8
- Valores singulares, 56
- Volume ratio, 27
- Volumen del elipsoide, 3



# Bibliografía

- [AAGM15] Shiri Artstein-Avidan, Apostolos Giannopoulos, and Vitali D Milman. Asymptotic Geometric Analysis, Part I. *Mathematical Surveys and Monographs*, 202, 2015.
- [Bal92] Keith Ball. Ellipsoids of maximal volume in convex bodies. *Geometriae Dedicata*, 41(2):241–250, 1992.
- [Bal97] Keith Ball. An elementary introduction to modern convex geometry. *Flavors of geometry*, 31:1–58, 1997.
- [BK96] András A Benczúr and David R Karger. Approximating st minimum cuts in  $O(n^2)$  time. In *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 47–55. ACM, 1996.
- [BKP82] Imre Barany, Meir Katchalski, and Janos Pach. Quantitative Helly-type theorems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 86(1):109–114, 1982.
- [BL76] Herm Jan Brascamp and Elliott H Lieb. Best constants in Young’s inequality, its converse, and its generalization to more than three functions. *Advances in Mathematics*, 20(2):151–173, 1976.
- [BM87] Jean Bourgain and Vitaly D Milman. New volume ratio properties for convex symmetric bodies in  $\mathbb{R}^n$ . *Inventiones Mathematicae*, 88(2):319–340, 1987.
- [Bra17] Silouanos Brazitikos. Brascamp–Lieb inequality and quantitative versions of Helly’s theorem. *Mathematika*, 63(1):272–291, 2017.
- [BSS12] Joshua Batson, Daniel A Spielman, and Nikhil Srivastava. Twice-ramanujan sparsifiers. *SIAM Journal on Computing*, 41(6):1704–1721, 2012.

- [BSST13] Joshua Batson, Daniel A Spielman, Nikhil Srivastava, and Shang-Hua Teng. Spectral sparsification of graphs: theory and algorithms. *Communications of the ACM*, 56(8):87–94, 2013.
- [CFTW06] Peter G Casazza, Matthew Fickus, Janet C Tremain, and Eric Weber. The Kadison-Singer problem in mathematics and engineering: a detailed account. *Contemporary Mathematics*, 414:299, 2006.
- [CV05] Peter G Casazza and Roman Vershynin. Kadison-Singer meets Bourgain-Tzafriri. *preprint*, 2(003), 2005.
- [FY16] Omer Friedland and Pierre Youssef. Approximating matrices and convex bodies through Kadison-Singer. *arXiv preprint arXiv:1605.03861*, 2016.
- [Gru88] Peter M Gruber. Minimal ellipsoids and their duals. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 37(1):35–64, 1988.
- [MSS13] Adam Marcus, Daniel A Spielman, and Nikhil Srivastava. Interlacing families II: Mixed characteristic polynomials and the Kadison-Singer problem. *Ann. of Math. (2)* 182, 2013.
- [Nas16] Márton Naszódi. Proof of a conjecture of Bárány, Katchalski and Pach. *Discrete & Computational Geometry*, 55(1):243–248, 2016.
- [PTJ88] A Pełczynski and Nicole Tomczak-Jaegermann. On the length of faithful nuclear representations of finite rank operators. *Mathematika*, 35(1):126–143, 1988.
- [Rud97] Mark Rudelson. Contact points of convex bodies. *Israel Journal of Mathematics*, 101(1):93–124, 1997.
- [Sri12] Nikhil Srivastava. On contact points of convex bodies. In *Geometric Aspects of Functional Analysis*, pages 393–412. Springer, 2012.
- [ST11] Daniel A Spielman and Shang-Hua Teng. Spectral sparsification of graphs. *SIAM Journal on Computing*, 40(4):981–1025, 2011.
- [TJ89] Nicole Tomczak-Jaegermann. *Banach-Mazur distances and finite-dimensional operator ideals*, volume 38. Longman Sc & Tech, 1989.
- [Vil03] Cédric Villani. *Topics in optimal transportation*. Number 58. American Mathematical Soc., 2003.

- [Wea04] Nik Weaver. The Kadison-Singer problem in discrepancy theory. *Discrete mathematics*, 278(1):227–239, 2004.