



**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Matemática**

**Tesis de Licenciatura**

**Teoría de Auslander-Reiten y teorema de Gabriel**

**Werner Germán Busch**

**Director: Marco Farinati**

Fecha de Presentación:  
23/11/17



# Agradecimientos

Quiero agradecer ante todo a mi madre, que me bancó en este largo trayecto. Por su cariño, su amor y sus fuerzas, cualquier agradecimiento no alcanzaría a hacer justicia a la verdad.

A mi director de tesis Marco, que sabe casi  $\infty$  sobre álgebra, soportó mis preguntontas, siempre tuvo humor y buena onda y me ayudó a que esta tesis sea lo que es.

Al jurado de esta tesis, por su tiempo en leer esta tesis.

Mi familia, que me bancó en este largo trayecto. A mi hermana, que quiero muchísimo, aunque nos peleemos. A mi abuela, que siempre pregunta cuándo me voy a recibir. A Jorge, mi cuñado y amigo. A mis amigos de tecnópolis y de la facu, Luis, Mauro y Yamenk.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>3</b>
<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Representaciones de carcajes</b>	<b>7</b>
1.1. Definiciones, ejemplos, resultados . . . . .	7
1.2. Suma directa e indescomponibles . . . . .	10
1.3. Subrepresentaciones, funtor Hom, pull back y push out . . . . .	12
1.4. Representaciones indescomponibles de un diagrama de tipo $\mathbb{A}_3$ . . . . .	19
<b>2. Resoluciones proyectivas</b>	<b>25</b>
2.1. Proyectivos e inyectivos . . . . .	25
2.2. Resoluciones . . . . .	31
2.3. La categoría de representaciones es hereditaria . . . . .	35
2.4. Resoluciones minimales . . . . .	38
<b>3. Quivers con relaciones y el álgebra de caminos</b>	<b>43</b>
3.1. El álgebra de caminos . . . . .	44
3.2. Equivalencia con $\text{mod}_k Q/I$ . . . . .	52
3.3. Extensiones, Ext y dimensión homológica . . . . .	56
<b>4. Traslación de Auslander-Reiten</b>	<b>62</b>
4.1. Dualidad . . . . .	62
4.2. $\text{Hom}(-, A)$ . . . . .	65
4.3. Funtor de Nakayama . . . . .	66
4.4. Traslación de Auslander-Reiten . . . . .	68
4.5. Categoría estable . . . . .	73
<b>5. Teoría de Auslander-Reiten</b>	<b>83</b>
5.1. Morfismos casi partidos . . . . .	83
5.2. Morfismos irreducibles . . . . .	86
5.3. Carcaj de Auslander Reiten . . . . .	95
5.4. Fórmulas de Auslander-Reiten . . . . .	104
<b>6. Teorema de Gabriel</b>	<b>111</b>
6.1. Forma cuadrática de un carcaj . . . . .	115
6.2. Raíces de una forma cuadrática . . . . .	123
6.3. Teorema de Gabriel . . . . .	126

# Introducción

El objetivo principal de esta tesis es dar una introducción, desarrollada y con ejemplos, de las bases de la teoría de representaciones de carcajes finitos. Para eso utilizaremos las herramientas potentísimas desarrolladas conjuntamente por Maurice Auslander e Idun Reiten, cuyo concepto central es el de sucesión exacta que casi se parte (*almost split*). Seguimos principalmente el libro de Ralf Schiffler, *Quiver representations* (Springer, 2014), consultando el excelente libro de referencia de álgebras asociativas de Skowronński y Yamagata, *Frobenius Algebras I*.

En la tesis se puso énfasis en proveer ejemplos de la teoría, utilizando resultados conocidos en casos concretos, como el estudio del diagrama  $\tilde{A}_3$  o el cálculo de algunos carcajes AR o de la dimensión homológica de su álgebra de caminos. Son ejemplos de resultados conocidos pero que no se suelen dar en la literatura y en este trabajo se los describe explícitamente. Por otra parte también se da la demostración de algunos pequeños resultados como el teorema 2.4. o 4.2. En otros casos se dan demostraciones simplificadas de las encontradas en los libros consultados, como en el lema 4.26 o 5.13; y en otros casos se amplían, aclaran y completan los detalles de algunos resultados como el teorema 6.17, 5.31 o 4.37.

Un carcaj (*quiver* en inglés) es simplemente un diagrama hecho de vértices y flechas que conectan esos vértices. En principio, parece un objeto perteneciente a la teoría de grafos, pero las preguntas que la teoría de carcajes y la teoría de grafos se hacen son completamente distintas.

¿Por qué nos puede interesar estudiar esta clase de objetos? Empecemos por decir que a un carcaj se le puede asociar una estructura algebraica natural, que es la de  $k$ -álgebra, con base los caminos del carcaj, la suma formal, y la concatenación de caminos como producto. Una posible respuesta a la pregunta es que el estudio de las  $k$ -álgebras (asociativas, unitarias, de dimensión finita) está íntimamente relacionada con esta estructura algebraica asociada al carcaj. Más aún: estudiar la categoría de módulos finitamente generados sobre una  $k$ -álgebra es esencialmente lo mismo que estudiar el comportamiento algebraico de ese carcaj. Así, podemos convertir un problema de algo que puede ser extremadamente abstracto en estudiar un diagrama de vértices y flechas.

El elemento principal para estudiar los carcajes son sus *representaciones*, que no es más que substituir los vértices por espacios vectoriales, y las aristas por transformaciones lineales. Es decir, ahora pensamos al carcaj como un diagrama de transformaciones lineales; y entonces podemos hacer álgebra. En la Parte 1 del trabajo damos las definiciones básicas de la teoría, y las operaciones que podemos hacer con las representaciones: suma directa, pull back, push out, aplicarles el funtor Hom, etc. También damos una primera introducción al llamado carcaj de Auslander Reiten, conformado por las representaciones de tipo indescomponible como vértices, y morfismos *indescomponibles* como aristas.

En la Parte 2 continuamos el estudio de la categoría de representaciones, investigando sus representaciones proyectivas, cuya definición es calcada a la definición usual para  $R$ -módulos. También probamos que la categoría de representaciones indescomponibles tiene una propiedad muy especial, que es ser *hereditaria*: toda subrepresentación de una representación proyectiva,

es proyectiva también. Veremos también ciertas resoluciones proyectivas minimales, que son las resoluciones proyectivas “más chicas” en un sentido preciso.

La parte 3 establece el puente entre la teoría de representaciones y el álgebra de módulos, demostrando que la primera es (categóricamente) exactamente lo mismo que una categoría de módulos sobre el álgebra de caminos. También hacemos un poco de álgebra homológica, definiendo el funtor *Ext* y la dimensión homológica de un módulo. Adyacente al álgebra homológica, y utilizando algunas de sus técnicas, la parte 4 estudia una serie de funtores, especialmente el *functor traslación* de Auslander Reiten y el funtor de Nakayama, que sirve para calcularlo. La traslación es un ingrediente fundamental dentro de la teoría. La traslación en principio es tan sólo una asignación, pero para definirlo como funtor es necesario pasar a un cociente de la categoría, mirando a los módulos salvo proyectivos. Este objeto es la *categoría estable* de representaciones.

En la quinta parte desarrollamos la base de la teoría de Auslander-Reiten (A-R), introduciendo el concepto de morfismo que casi se parte e irreducible. La importancia de estos conceptos viene de que junto con la traslación, forman los ingredientes principales del carcaj AR, que se forma a partir de un carcaj con sus representaciones indescomponibles. Este carcaj es una herramienta muy poderosa a la hora de estudiar las representaciones de un carcaj  $Q$  y, por lo tanto, la categoría de módulos sobre una  $k$ -álgebra.

Finalmente para terminar el trabajo demostramos un resultado de Pierre Gabriel, introductorio pero muy importante, que clasifica completamente los tipos de carcaj que tienen finitas representaciones indescomponibles. Es tal vez el primer teorema de clasificación de carcajes que se puede dar dentro de la teoría, y sirve como excelente punto de partida para estudios adicionales en la clasificación de estos objetos.

# Parte 1

## Representaciones de carcajes

### 1.1. Definiciones, ejemplos, resultados

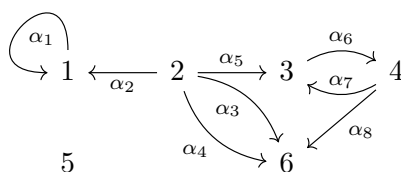
#### Introducción

El objeto de estudio subyacente en este trabajo son las representaciones de carcajes. Recordamos someramente las definiciones básicas, ejemplos y resultados. La mayoría de los resultados (excepto tal vez el teorema de Krull-Schmidt) son inmediatos y por eso se omite su demostración, el lector interesado puede encontrarlos por ejemplo en [Sch14].

**Definición 1.1.** Un **carcaj**, o **quiver** en inglés, es el conjunto de cuatro datos  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  donde  $Q_0$  y  $Q_1$  son conjuntos y  $s$  y  $t$  son funciones, con dominio  $Q_1$  y codominio  $Q_0$ . El conjunto  $Q_0$  es el conjunto de “vértices”,  $Q_1$  el conjunto de “flechas”, y  $s$  y  $t$  son el “origen” y el “final” de la flecha respectivamente. (*source* y *target* en inglés).

Si bien podemos decir simplemente que  $(\{1, 2\}, \{\alpha\}, s, t)$  con  $s(\alpha) = 1, t(\alpha) = 2$  es un carcaj, estos objetos se representan en general, gráficamente, quedando toda la información de vértices, flechas, orígenes y finales expresada en su grafo, que en este caso sería  $1 \xrightarrow{\alpha} 2$ .

#### Ejemplo 1.2.



El carcaj no es **conexo** pues el grafo subyacente (el que se obtiene si nos olvidamos la dirección de las flechas) no lo es. Además notemos que de 6 no sale ninguna flecha; un vértice del que no sale ninguna flecha se llama “sumidero” (**sink** en inglés). En cambio al 2 no llega ninguna flecha; un vértice de este estilo se denomina “fuente” (o **source**). El ejemplo muestra que un carcaj admite en principio mucha libertad: puede tener lazos (o *loops* en inglés, flechas que empiezan y terminan en el mismo vértice), dos ó más flechas con el mismo origen, dos ó más flechas con el mismo final o una secuencia de flechas que empiece y termine en el mismo vértice. La única restricción general en todo el trabajo es que la cantidad de flechas y vértices será finita.

**Ejemplo 1.3.** Una clase muy importante de carcajes son los de tipo Dynkin. Estos tienen como grafo subyacente un diagrama de Dynkin. Esta clase de grafos es notable porque aparecen en la





**Definición 1.6.** Dadas dos representaciones  $M = (M_i, \varphi_\alpha)$  y  $N = (N_i, \tilde{\varphi}_\alpha)$ , un **morfismo de representaciones**  $f: M \rightarrow N$  es una colección de transformaciones lineales  $\{f_i\}_{i \in Q_0}: M_i \rightarrow N_i$  tal que para toda flecha  $\alpha: i \rightarrow j$ , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{f_i} & N_i \\ \varphi_\alpha \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi}_\alpha \\ M_j & \xrightarrow{f_j} & N_j \end{array}$$

Se denota como  $\text{Hom}_Q(M, N)$  al conjunto de morfismos entre  $M$  y  $N$ . Usualmente nos olvidaremos de escribir el  $Q$  si el carcaj está fijo.

**Observación 1.7.** Dadas dos representaciones  $M$  y  $N$ ,  $\text{Hom}_Q(M, N)$  es un  $k$  espacio vectorial con el producto por escalares y la suma coordenada a coordenada.

**Ejemplo 1.8.** Veamos algún ejemplo de un morfismo entre representaciones. Sea  $Q$  el carcaj del ejemplo 1.5 y las representaciones

$$\begin{array}{l} M = \begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{1} & k \\ & & \uparrow 1 & & \\ & & k & & \end{array} \\ M' = \begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{1} & k \\ & & \uparrow 0 & & \\ & & 0 & & \end{array} \\ M'' = \begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & k^2 \\ & & \uparrow 0 & & \\ & & 0 & & \end{array} \end{array}$$

**Calculemos**  $\text{Hom}(M, M')$ : Un morfismo  $f: M \rightarrow M'$  tiene la forma  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$  con  $f_i: M_i \rightarrow M'_i$  y debe cumplir que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{1} & k & & \\ & \searrow 0 & \uparrow & \searrow f_2 & & \searrow f_3 & \\ & & 0 & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{1} & k \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & k & & \\ & & & & \searrow 0 & & \\ & & & & & \uparrow 0 & \\ & & & & & 0 & \end{array}$$

Notemos que el morfismo  $f$  queda determinada por las transformaciones lineales multiplicar por  $f_2$  y por  $f_3$ . Se sigue por la conmutatividad para la flecha  $\alpha_3: 2 \rightarrow 3$  que  $f_2 = 1 \cdot f_2 = f_3 \cdot 1 = f_3$ .

Además, usando la conmutatividad para la flecha  $\alpha_2: 4 \rightarrow 2$ , se sigue que  $f_2 \cdot 1 = 0$ . De lo anterior concluimos que  $f_2 = f_3 = 0$ . Por lo tanto  $\text{Hom}(M, M') = 0$ .

$\text{Hom}(M', M'')$ : Sea  $f: M' \rightarrow M''$  un morfismo de representaciones como antes, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \xrightarrow{\quad} & k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} (f_3)_1 \\ (f_3)_2 \end{bmatrix}} & k^2 \\
 & \searrow & \uparrow & \searrow f_2 & & & \\
 & & 0 & \xrightarrow{\quad} & k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & k^2 \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 
 \end{array}$$

luego  $\begin{bmatrix} f_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f_3)_1 \\ (f_3)_2 \end{bmatrix}$ . De lo anterior se sigue que  $\text{Hom}(M', M'')$  es un conjunto de morfismos de transformaciones lineales, cada una de ellas dada por tres flechas,  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ . Cada  $f_i$  es una transformación entre espacios vectoriales de dimensión 1. Del hecho que los diagramas conmutan se obtiene que  $f_1 = f_2$  y que  $f_3 = 0$ . De esto se concluye que  $\text{Hom}(M', M'') \cong k$ .

Un morfismo  $f: M \rightarrow N$  es un **monomorfismo** si  $f_i$  es una transformación lineal inyectiva para todo  $i$ , **epimorfismo** si cada  $f_i$  es sobreyectiva y un **isomorfismo** si cada  $f_i$  es un isomorfismo.

## 1.2. Suma directa e indescomponibles

Una operación muy importante para estudiar representaciones es la suma directa.

**Definición 1.9.** Dadas dos representaciones  $M$  y  $M'$  de  $Q$  se define la **suma directa** como la representación

$$M \oplus M' = (M_i \oplus M'_i, \varphi_\alpha \oplus \psi_\alpha)$$

Notemos que matricialmente, el morfismo se escribe como  $\begin{bmatrix} \varphi_\alpha & 0 \\ 0 & \psi_\alpha \end{bmatrix}$ .

**Ejemplo 1.10.** Si  $Q$  es  $1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$  y

$$M = k \xrightarrow{1} k \longleftarrow 0$$

$$M' = k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} k^2 \longleftarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} k$$

entonces

$$M \oplus M' = k \oplus k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} k \oplus k^2 \longleftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0 \oplus k$$

que es lo mismo que

$$M'' = k^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} k^3 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} k$$

Por lo tanto  $M''$  se puede escribir como (i.e., es isomorfa a) la suma de dos representaciones. Esto nos da la idea de definir cuando una representación *no* es la suma de dos representaciones no triviales. Las representaciones indescomponibles hacen honor a su nombre y funcionarán como los “números primos” de la categoría, a partir de las cuales podemos construir todas las otras representaciones.

**Definición 1.11.** Una representación  $M$  es **indescomponible** si cada vez que  $M \cong M \oplus M'$  entonces  $M = 0$  o  $M' = 0$ .

**Ejemplo 1.12.** Si  $Q = \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \alpha_1 \\ 2 \\ \nearrow \alpha_4 \\ 4 \end{array} \xleftarrow{\alpha_3} 3$ , entonces

$$M = \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & k^2 \\ & \nearrow & \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} k \\ k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & \end{array}$$

es indescomponible. En efecto, supongamos que  $f: M \xrightarrow{\sim} S \oplus L$  es un isomorfismo, con  $S = (S_i, \mathfrak{s}_\alpha)$  y  $L = (L_i, \mathfrak{l}_\alpha)$ . Vamos a demostrar que  $S = 0$  o  $L = 0$ . Para hacerlo, procedemos por casos:

**Caso 1:** Veamos que si una de las representaciones  $S$  o  $L$  tiene sus coordenadas 1 y 4 igual a cero, entonces debe ser la representación nula. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $S_1 = S_4 = 0$ . En efecto, como  $S_1 = S_4 = 0$ , entonces  $L_1 = L_4 = k$ . Las transformaciones lineales de  $M$  y  $S \oplus L$  correspondientes a la flecha  $\alpha_1$  son  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} \mathfrak{s}_{\alpha_1} & 0 \\ 0 & \mathfrak{l}_{\alpha_1} \end{bmatrix}$  respectivamente. Además  $\mathfrak{s}_{\alpha_1} = 0$  porque  $S_1 = 0$ , entonces la transformación lineal asociada a  $\alpha_1$  de  $S \oplus L$  es:  $0 \oplus L_1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{l}_{\alpha_1} \end{bmatrix}} S_2 \oplus L_2$ , que es lo mismo que  $L_1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathfrak{l}_{\alpha_1} \end{bmatrix}} S_2 \oplus L_2$ . Como  $f$  es un morfismo, por la definición de morfismo aplicada a la flecha  $\alpha_1$ , el siguiente diagrama debe conmutar:

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & k^2 \\ f_1 \downarrow \cong & & \cong \downarrow f_2 \\ k = L_1 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathfrak{l}_{\alpha_1} \end{bmatrix}} & S_2 \oplus L_2 \end{array}$$

Que es lo mismo que decir que  $f_2(e_1) = 0 + \mathfrak{l}_{\alpha_1} \circ f_1(1)$ . De esta igualdad se sigue que  $f_2(e_1) \in L_2$ . Análogamente, por la definición para la flecha  $\alpha_4$ , el diagrama a continuación debe conmutar:

$$\begin{array}{ccc}
k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & k^2 \\
f_4 \downarrow \cong & & \cong \downarrow f_2 \\
k = L_4 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ \iota_{\alpha_4} \end{bmatrix}} & S_2 \oplus L_2
\end{array}$$

entonces  $f_2(e_2) \in L_2$ . Luego  $\text{Im}(f_2) \subseteq L_2$  y como es un isomorfismo eso significa  $S_2 = 0$  y en consecuencia  $\mathfrak{s}_{\alpha_3} = 0$ . Para terminar, como lo siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
k^2 & \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} & k \\
f_2 \downarrow \cong & & \cong \downarrow f_3 \\
k^2 = 0 \oplus L_2 & \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \iota_{\alpha_3} \end{bmatrix}} & S_3 \oplus L_3
\end{array}$$

en el caso que  $S_3 \neq 0$  entonces  $L_3 = 0$  y  $\text{Im}(f_3) \subseteq S_3$  y la composición del lado derecho daría cero, lo que significaría que  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Ker}(f_2)$  absurdo pues es un isomorfismo.

**Caso 2:** Supongamos que  $S_1 = 0$  y  $S_4 = k$ . Luego  $L_1 = k$  y  $L_4 = 0$ . Entonces tendría que, por ser morfismo de representaciones,  $f_2(e_1) \in L_2$  y  $f_2(e_2) \in S_2$ . Y por lo tanto  $f_2(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$  no pertenece a  $S_2$ , (si lo hiciera,  $f_2(e_1)$  pertenecería también a  $S_2$ ), y tampoco pertenece a  $L_2$  (si lo hiciera,  $f_2(e_2)$  pertenecería a  $L_2$ ). Pero como  $S_3 \oplus L_3 = k$  entonces  $S_3 = 0$  o  $L_3 = 0$  lo que implica que  $f_2(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) \in L_2$  o  $\in S_2$ , absurdo. Entonces  $S = 0$  o  $L = 0$ .

Los indescomponibles permiten reducir el problema de estudiar todas las representaciones de un carcaj a estudiar solamente sus representaciones indescomponibles. La razón de esto es exactamente el teorema de Krull-Schmidt-Remak:

**Teorema 1.13.** (Krull-Schmidt): Sea  $Q$  un carcaj y  $M$  una representación de  $Q$ . Entonces

$$M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

con  $M_i$  representaciones indescomponibles. Además la descomposición es única, es decir, si  $M \cong M'_1 \oplus M'_2 \oplus \cdots \oplus M'_t$  entonces  $t = n$  y la nueva descomposición es un reordenamiento.

*Demostración.* Ver por ejemplo [SY12], teorema 4,6. □

### 1.3. Subrepresentaciones, funtor Hom, pull back y push out

Dado un carcaj  $Q$  la categoría  $\text{Rep}_Q$  tiene como objetos las representaciones de  $Q$  y como flechas a los morfismos entre representaciones.

Todas las definiciones usuales de subobjetos, cocientes y sucesiones exactas existen en esta categoría, y valen los teoremas usuales. Esto no es coincidencia pues veremos más adelante que la categoría de representaciones efectivamente es equivalente a la categoría de módulos finitamente generados sobre una cierta  $k$ -álgebra.

**Definición 1.14.** Dada una representación  $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ , una **subrepresentación** de  $M$  es una representación  $(N_i, \psi_\alpha)$  donde cada  $N_i$  es un subespacio de  $M_i$  y las flechas  $\psi_\alpha$  son las restricciones a  $N_i$  de  $\varphi_\alpha$ . Puede verse también que una definición equivalente a la dada es que una subrepresentación es una representación tal que la inclusión es un morfismo de representaciones inyectivo.

Notaremos que  $H$  es una subrepresentación de  $M$  con el símbolo  $H \ll M$ .

**Observación 1.15.**

- Si  $N \ll M$ ,  $Q \ll M$  y  $Q \leq N$  entonces  $Q \ll N$
- Si  $N \ll M$  y  $Q \ll M$ ,  $N \cap Q \ll M$

**Definición 1.16.** Dado un morfismo de representaciones  $f: M \rightarrow N$ , con  $M = (M_i, \varphi_\alpha)$  se define el **núcleo** de  $f$  como la representación

$$\text{Ker}(f) := (\{\text{Ker}(f_i)\}_i, \varphi_\alpha|_{\text{Ker}(f_i)})$$

**Observación 1.17.** El núcleo de  $f: M \rightarrow N$  es una subrepresentación de  $M$ .

**Definición 1.18.** Dada una subrepresentación  $N$  de  $M$ , con  $M = (M_i, \varphi_\alpha)$  y  $N = (N_i, \varphi_\alpha|_{N_i})$  se define el cociente  $M/N$  como la representación

$$M/N := (\{M_i/N_i\}_i, \tilde{\varphi}_\alpha)$$

donde  $\tilde{\varphi}_\alpha$  es el morfismo inducido por  $\varphi_\alpha$  en el cociente. El morfismo  $\varphi_\alpha$  induce una flecha en el cociente pues  $\varphi_\alpha(N_{s(\alpha)}) = \varphi_\alpha|_{N_{s(\alpha)}}(N_{s(\alpha)}) \subseteq N_{t(\alpha)}$ .

**Observación 1.19.**  $M/N$  es una representación de  $Q$  y  $\pi: M \rightarrow M/N$  la proyección al cociente es un morfismo suryectivo.

**Definición 1.20.** Dado un morfismo  $f: M \rightarrow N$ ,  $N = (N_i, \psi_\alpha)$  la **imagen** de  $f$  es una representación que notamos  $\text{Im}(f)$ :

$$\text{Im}(f) := (\text{Im}(f_i)_i, \psi_\alpha|_{\text{Im}(f_i)})$$

Como antes,  $\text{Im}(f)$  es una representación.

**Teorema 1.21.** *Primer teorema de isomorfismo: Si  $f: M \rightarrow N$  es un morfismo, entonces*

$$\text{Im}(f) \cong M/\text{Ker}(f)$$

**Observación 1.22.** La categoría  $\text{Rep}_Q$  con la suma, nucleos y cocientes ya definidos es una categoría abeliana.

## Funtor Hom y sucesiones exactas

**Definición 1.23.** Una sucesión de morfismos de representaciones

$$\dots \rightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} \dots$$

es **exacta** si  $\text{Ker}(f_i) = \text{Im}(f_{i-1})$  para todo  $i$ .

Una **sucesión exacta corta** es una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

Es decir  $f$  es inyectiva,  $g$  es sobreyectiva y  $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$ .

**Ejemplo 1.24.** Sea  $Q = 1 \rightarrow 2$  y

$$S(1) := k \rightarrow 0 \quad P(1) := k \xrightarrow{1} k \quad S(2) := 0 \rightarrow k$$

entonces

$$0 \rightarrow S(2) \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} S(1) \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta, donde  $f$  es el morfismo  $f = (0, 1)$  y  $g = (1, 0)$  (podemos comprobar que  $f$  y  $g$  son morfismos de representaciones).

**Definición 1.25.** ■ Un morfismo  $s: M \rightarrow N$  es una **sección** si existe un morfismo  $f: N \rightarrow M$  tal que  $f \circ s = Id_M$ .

- Un morfismo  $r: M \rightarrow N$  es una **retracción** si existe un morfismo  $g: N \rightarrow M$  tal que  $r \circ g = Id_N$ .
- Una sucesión exacta corta  $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$  **se parte** si  $f$  es una sección.

**Teorema 1.26.** Dada una sucesión exacta de representaciones

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1.  $f$  es una sección.
2.  $g$  es una restricción.
3. existe un isomorfismo  $\psi: M \rightarrow L \oplus N$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \cong \downarrow \psi & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{i} & L \oplus N & \xrightarrow{P_N} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde  $i$  es una inclusión y  $P_N$  es la proyección canónica.

*Demostración.* Reutilizar las demostraciones para módulos. □

**Ejemplo 1.27.** En el ejemplo 1.24 la sucesión exacta no se parte, pues  $f: S(2) \rightarrow M$  no es una sección. En efecto, si  $g: M \rightarrow S(2)$  es un morfismo de representaciones que es una inversa a izquierda para  $f$ ,

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{1} & k \\ g_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ 0 & \longrightarrow & k \end{array}$$

es un diagrama que debe conmutar. Luego  $g = (g_1, 0)$ , pero entonces  $g \circ f = g_2 \circ f_2 = 0 \neq Id_{S(2)_2} = Id_k$ .

## Funtor Hom

Como vimos, dadas dos representaciones  $M$  y  $N$ ,  $\text{Hom}(M, N)$  es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalares coordenada a coordenada. Esto se puede completar de la siguiente forma a un functor covariante  $\text{Hom}(M, -)$ :

$$\begin{aligned} \text{Hom}(M, -): \text{Rep}_Q &\longrightarrow \text{Vect}_k \\ N &\longrightarrow \text{Hom}(M, N) \\ (f: N \longrightarrow S) &\longrightarrow (f_*: \text{Hom}(M, N) \longrightarrow \text{Hom}(M, S)) \end{aligned}$$

con  $f_*(g) = f \circ g$ , y un functor contravariante  $\text{Hom}(-, N)$

$$\begin{aligned} \text{Hom}(-, N): \text{Rep}_Q &\longrightarrow \text{Vect}_k \\ M &\longrightarrow \text{Hom}(M, N) \\ (f: M \longrightarrow S) &\longrightarrow (f^*: \text{Hom}(S, N) \longrightarrow \text{Hom}(M, N)) \end{aligned}$$

con  $f^*(g) = g \circ f$ .

**Teorema 1.28.** *Sea*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

una sucesión exacta en  $\text{Rep}_Q$ . Entonces la sucesión es exacta si y sólo si la siguiente sucesión es exacta para todo  $X \in \text{Rep}_Q$ :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(X, L) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(X, M) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(X, N)$$

Esto nos dice que el functor  $\text{Hom}(X, -)$  es exacto a izquierda, y efectivamente no siempre manda sobreyectivos en sobreyectivos.

**Ejemplo 1.29.** Recordemos que

$$0 \rightarrow S(2) \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} S(1) \rightarrow 0$$

es exacta. Si tomamos  $\text{Hom}(S(1), -)$  obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}(S(1), S(2)) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(S(1), P(1)) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(S(1), S(1))$$

Sea  $Id \in \text{End}(S(1))$ . Si  $g_*$  fuera sobreyectiva existiría una  $f: S(1) \rightarrow P(1)$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & & P(1) \\ & \nearrow \exists f & \downarrow g = (1;0) \\ S(1) & \xlongequal{\quad} & S(1) \end{array}$$

Pero si  $f: S(1) \rightarrow P(1)$  es morfismo, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} k & \longrightarrow & 0 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ k & \xrightarrow{1} & k \end{array}$$

conmuta. Entonces  $f_1 = 0$ , pero  $g_1 \circ f_1 = 0 \neq Id_{S(1)_1}$ .

**Teorema 1.30.** *Sea*

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

una sucesión en  $\text{Rep}_Q$ . Entonces la sucesión es exacta si y sólo si la siguiente sucesión es exacta para todo  $X \in \text{Rep}_Q$ :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(N, X) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(M, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(N, X)$$

**Teorema 1.31.** *Dada una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. La sucesión es exacta y se parte.
2.  $0 \longrightarrow \text{Hom}(X, L) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(X, M) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(X, N) \longrightarrow 0$  es exacta y se parte para todo  $X \in \text{Rep}_Q$ .
3.  $0 \longrightarrow \text{Hom}(N, X) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(M, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(N, X) \longrightarrow 0$  es exacta y se parte para todo  $X \in \text{Rep}_Q$ .

### Pull back y push out

Las construcciones del push out y el pull back existen en la categoría  $\text{Rep}_Q$ . Las presentamos porque nos serán útiles más adelante en la demostración de ciertos resultados.

**Definición 1.32.** Sean  $M = (M_i, \varphi_\alpha), M' = (M'_i, \tilde{\varphi}_\alpha), N = (N_i, \psi_\alpha)$  representaciones de  $Q$  y  $f: M \rightarrow N, g: M' \rightarrow N$  morfismos. Se define **el pull back (o producto fibrado) de  $f$  y  $g$**  como la representación

$$X_i := \{(a, b) \in M_i \oplus M'_i : f_i(a) = g_i(b)\}$$

con flechas  $(\varphi_\alpha \oplus \tilde{\varphi}_\alpha)|_X$ , junto con las proyecciones canónicas  $\pi_1: X \rightarrow M$ , y  $\pi_2: X \rightarrow M'$ .

En un sentido preciso (dado por el teorema 1.33), el pull back es la construcción minimal que se puede obtener del diagrama

$$\begin{array}{ccc} & M' & \\ & \downarrow & \\ M & \longrightarrow & N \end{array}$$

Las propiedades más importantes que usaremos las sintetizaremos en el siguiente teorema:

**Teorema 1.33.** *Sean  $M, M'$  y  $N$  como en 1.32. Entonces:*

1. El pull back es una subrepresentación de  $M \oplus M'$ .
2. El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_2} & M' \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow g \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$



Y para toda representación  $\tilde{X}$  con morfismos  $\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{\pi}_2} M'$ ,  $\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{\pi}_1} M$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\pi}_2} & M' \\ \tilde{\pi}_1 \downarrow & & \downarrow g \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

conmuta, entonces existe un único morfismo  $\psi: \tilde{X} \rightarrow X$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\pi}_2} & M' \\ \exists! \psi \swarrow & & \downarrow \pi_2 \\ X & \xrightarrow{\pi_2} & M' \\ \tilde{\pi}_1 \searrow & & \downarrow \pi_1 \\ & & M \end{array}$$

conmuta.

3. Si  $f$  es inyectiva, entonces  $\pi_2$  es inyectiva.
4. Si  $f$  es sobreyectiva, entonces  $\pi_2$  es sobreyectiva.
5. Si

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta, entonces el siguiente diagrama es conmutativo y las filas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{l \rightarrow (h(l); 0)} & X & \xrightarrow{\pi_2} & M' & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{h} & M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

6. Recíprocamente, si tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$$

y un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{j} & W & \xrightarrow{\alpha} & M' & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{h} & M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

entonces existe un isomorfismo  $\Omega: W \rightarrow X$  tal que  $\pi_2 \Omega = \alpha$  y  $\pi_1 \Omega = \beta$ .

*Demostración.* Todas las afirmaciones se siguen directamente de la definición.  $\square$

Terminamos esta sección con la definición del push out, que es la solución que se obtiene dando vuelta las flechas del diagrama incluido en la definición 1.32.

**Definición 1.34.** Dados  $f: L \rightarrow M$  y  $g: L \rightarrow M'$  dos morfismos de representaciones, definimos el **push out de  $f$  y  $g$**  como la representación

$$X := M \oplus M' / \langle (f(l); -g(l)) : l \in L \rangle$$

junto con los morfismos

$$\begin{aligned} \mu_1: M &\rightarrow X & \mu_2: M' &\rightarrow X \\ m &\mapsto \overline{(m; 0)} & m' &\mapsto \overline{(0; m')} \end{aligned}$$

**Teorema 1.35.** Sean  $L, M$  y  $M'$  como en la definición previa.

1. El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{g} & M' \\ f \downarrow & & \downarrow \mu_2 \\ M & \xrightarrow{\mu_1} & X \end{array}$$

Y para toda otra representación  $\tilde{X}$  con morfismos  $M \xrightarrow{\tilde{\mu}_1} \tilde{X}$  y  $M' \xrightarrow{\tilde{\mu}_2} \tilde{X}$  tal que

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{g} & M' \\ f \downarrow & & \downarrow \tilde{\mu}_2 \\ M & \xrightarrow{\tilde{\mu}_1} & \tilde{X} \end{array}$$

es un diagrama que conmuta, entonces existe un único morfismo  $\psi: X \rightarrow \tilde{X}$  tal que

$$\begin{array}{ccc} & M' & \\ & \downarrow \mu_2 & \\ M & \xrightarrow{\mu_1} X & \\ & \searrow \exists! \psi & \\ & & \tilde{X} \end{array}$$

$\tilde{\mu}_1$  (curved arrow from  $M$  to  $\tilde{X}$ ) and  $\tilde{\mu}_2$  (curved arrow from  $M'$  to  $\tilde{X}$ )

conmuta.

2. Para toda sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{h} N \rightarrow 0$$

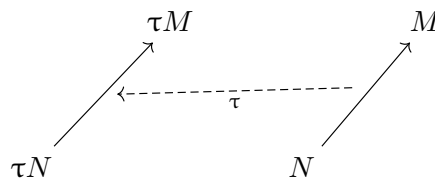
existe  $h': X \rightarrow N$ ,  $h'(\overline{(m, m')}) = h(m)$ , un morfismo tal que el siguiente diagrama con filas exactas conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{h} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & g \downarrow & & \downarrow \mu_1 & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\mu_2} & X & \xrightarrow{h'} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

## 1.4. Representaciones indescomponibles de un diagrama de tipo

$\mathbb{A}_3$

Una de las herramientas más potentes para estudiar la categoría de representaciones de un carcaj es la teoría de Auslander-Reiten. La teoría permite bajo ciertas condiciones no sólo encontrar todos los indescomponibles de un carcaj, sino también clasificar los espacios  $Hom$  entre ellas. El **carcaj de Auslander-Reiten** tiene como vértices las isoclasas de representaciones indescomponibles, y como flechas a ciertos morfismos *irreducibles* entre aquellas. Si bien este se puede hallar “a mano”, después de ver la teoría podemos automatizar nuestro proceso para hallarlo. Además, el carcaj A-R tiene una estructura adicional muy importante que es la dada por la **traslación de Auslander-Reiten**, un funtor  $\tau: \text{Rep}_Q \rightarrow \text{Rep}_Q$  que preserva indescomponibles y es de gran utilidad para calcular el carcaj A-R. Gráficamente veremos que  $\tau$  traslada las flechas de la siguiente forma, teniendo en cuenta que  $\tau M$  o  $\tau N$  pueden ser cero y no aparecer:



Para estudiar las representaciones de un carcaj  $Q$  es conveniente presentar una notación para ellas. Escribiremos a una representación  $M$  como un ordenamiento vertical de los números  $\{1, 2, \dots, n\}$  donde  $n$  es la cantidad de vértices, de forma que  $i$  esté arriba de  $j$  si existe una serie de composición de abajo hacia arriba. En el caso que la representación sea indescomponible se suele decir que  $i$  está arriba de  $j$  si hay un morfismo no nulo de  $M_i$  en  $M_j$  y la cantidad de veces que aparece un número  $1 \leq k \leq n$  es igual a la dimension de  $M_k$ .

La notación suele entenderse mediante ejemplos: por caso, si  $Q = \begin{matrix} 1 \rightarrow 2 \leftarrow 4 \\ \downarrow \\ 3 \end{matrix}$ , la representación

$$\begin{matrix}
 k \rightarrow k \leftarrow k \\
 \downarrow \\
 k
 \end{matrix}$$

donde todas las flechas son morfismos no nulos, se escribe  $\begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & \\ 3 & \end{matrix}$ . Notemos que si

$$M = \begin{matrix}
 k \rightarrow k \leftarrow k \\
 \downarrow \\
 k
 \end{matrix}$$

entonces  $M$  se notaría  $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \oplus 4$ .

Otro ejemplo: sea  $Q = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ . La representación

$$\begin{matrix}
 k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} k^2 \\
 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}
 \end{matrix}$$

se notaría  $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$ .

Hay casos en los que la notación es ambigua: si  $Q = 1 \rightrightarrows 2$ , la representación  $\frac{1}{2}$  puede significar tanto  $k \xrightarrow[1]{0} k$  como  $k \xrightarrow[0]{1} k$  o cualquier representación del tipo  $k \xrightarrow[\beta]{\alpha} k$  con  $\alpha$  y  $\beta$  distintos de cero. En esos casos, se suele modificar ligeramente la notación para aclarar ambigüedades.

La notación tiene sus limitaciones pero es muy útil y cuando el carcaj esté fijo su significado será claro.

**Ejemplo 1.36.** Consideremos uno de los carcaj de tipo  $\mathbb{A}_3$ ,  $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$  (el otro es  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ). No es difícil ver que las siguientes representaciones son indescomponibles:

$$\begin{aligned} S(1) &= k \rightarrow 0 \leftarrow 0 & P(1) &= k \xrightarrow{1} k \leftarrow 0 \\ S(2) &= 0 \rightarrow k \leftarrow 0 & P(3) &= 0 \rightarrow k \xleftarrow{1} k \\ S(3) &= 0 \rightarrow 0 \leftarrow k & I(2) &= k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{1} k \end{aligned}$$

que en la nueva notación se escriben  $S(1) = 1$ ,  $S(2) = 2$ ,  $S(3) = 3$ ,  $P(1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(3) = \frac{3}{2}$ ,  $I(2) = \frac{3}{2} \frac{1}{2}$ .

Veamos que son todas: sea  $V \xrightarrow{f} W \xleftarrow{g} U$  una representación cualquiera. Luego si  $K$  es el kernel de  $f$ , podemos completar  $K$  a una base del espacio vectorial  $V$ . Si llamamos  $K^c$  a ese subespacio, podemos escribir  $V = K \oplus K^c$ . Lo mismo podemos hacer con  $U$ , y escribirlo como la suma directa del kernel de  $g$  y otro subespacio. Si llamamos  $\tilde{K}$  al kernel de  $g$  y  $\tilde{K}^c$  al subespacio complementario, tenemos que  $U = \tilde{K} \oplus \tilde{K}^c$ . Entonces  $f$  restringida a  $K^c$  es inyectiva y  $g$  restringida a  $\tilde{K}^c$  es inyectiva. Denotaremos  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  a las restricciones a dichos subespacios complementarios.

$$\begin{aligned} V \xrightarrow{f} W \xleftarrow{g} U &= K \oplus K^c \xrightarrow{0 \oplus \tilde{f}} 0 \oplus W \xleftarrow{g} U \\ &\cong (K \longrightarrow 0 \longleftarrow 0) \oplus (K^c \xrightarrow{\tilde{f}} W \xleftarrow{g} U) \\ &\cong S(1)^{\dim_k K} \oplus (K^c \xrightarrow{\tilde{f}} W \xleftarrow{g} U) \\ &\cong S(1)^{\dim_k K} \oplus (K^c \xrightarrow{\tilde{f}} 0 \oplus W \xleftarrow[0 \oplus \tilde{g]}{\tilde{g}} \tilde{K} \oplus \tilde{K}^c) \\ &\cong S(1)^{\dim_k K} \oplus (K^c \xrightarrow{\tilde{f}} W \xleftarrow{\tilde{g}} \tilde{K}^c) \oplus S(3)^{\dim_k \tilde{K}} \end{aligned}$$

Si completamos  $\text{Im}(\tilde{f}) + \text{Im}(\tilde{g})$  a una base de  $W$  y llamamos  $L$  a ese subespacio complementario, tenemos que  $W = L \oplus (\text{Im}(\tilde{f}) + \text{Im}(\tilde{g}))$ . Si miramos la representación del medio, tenemos un isomorfismo de representaciones:

$$\begin{aligned} K^c \xrightarrow{\tilde{f}} W \xleftarrow{\tilde{g}} \tilde{K}^c &= 0 \oplus K^c \xrightarrow{(0, \tilde{f})} L \oplus (\text{Im}(\tilde{f}) + \text{Im}(\tilde{g})) \xleftarrow{(0, \tilde{g})} 0 \oplus \tilde{K}^c \\ &\cong (0 \longrightarrow L \longleftarrow 0) \oplus (K^c \xrightarrow{\tilde{f}} \text{Im}(\tilde{f}) + \text{Im}(\tilde{g}) \xleftarrow{\tilde{g}} \tilde{K}^c) \\ &\cong S(2)^{\dim_k L} \oplus (K^c \xrightarrow{\tilde{f}} \text{Im}(\tilde{f}) + \text{Im}(\tilde{g}) \xleftarrow{\tilde{g}} \tilde{K}^c) \end{aligned}$$

Podemos reducirnos entonces a estudiar el caso en que  $f$  y  $g$  son morfismos inyectivos y que la suma de las imágenes es igual al espacio vectorial  $W$ .

Sean  $a = \dim_k V$ ,  $b = \dim_k W$ ,  $c = \dim_k U$ . Tomemos  $\{w_1, \dots, w_d\}$  base de  $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)$ . Podemos completarla a una base  $\{w_1, \dots, w_d, w_{d+1}, \dots, w_{d+d'}\}$  (donde  $d + d'$  es  $a$ ) de  $\text{Im}(f)$ . Definimos  $v_i = f^{-1}(w_i)$ , con  $1 \leq i \leq a$ . Como  $f$  es isomorfa con la imagen,  $\{v_1, \dots, v_d, \dots, v_a\}$  es

una base de  $V$ . Completamos ahora  $\{w_1, \dots, w_d\}$  a una base  $\{w_1, \dots, w_d, w_{d+d'+1}, \dots, w_{d+d'+d''}\}$  de  $\text{Im}(g)$  (donde  $d+d''=c$ ). Como  $g$  isomorfa con la imagen, si tomamos la preimagen por  $g$  de la base de  $\text{Im}(g)$ , eso constituye una base de  $U$ . Usando que  $f$  y  $g$  son inyectivas y la suma de sus imágenes es igual a  $W$ , podemos ver que  $\{w_1, \dots, w_d, w_{d+1}, \dots, w_{d+d'}, w_{d+d'+1}, \dots, w_{d+d'+d''}\}$  es una base de  $W$ .

Entonces, en esas bases, las matrices de  $f$  y  $g$  son

$$f = \left[ \begin{array}{c|c} I_d & 0 \\ \hline 0 & I_{d'} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad g = \left[ \begin{array}{c|c} I_d & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{d''} \end{array} \right]$$

Luego tenemos isomorfismos de representaciones:

$$\begin{aligned} k^a \xrightarrow{\left[ \begin{array}{c|c} I_d & 0 \\ \hline 0 & I_{d'} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]} k^b \xleftarrow{\left[ \begin{array}{c|c} I_d & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{d''} \end{array} \right]} k^c &\cong \\ (k^d \xrightarrow{\left[ \begin{array}{c} I_d \end{array} \right]} k^d \xleftarrow{\left[ \begin{array}{c} I_d \end{array} \right]} k^d) \oplus (k^{d'} \xrightarrow{\left[ \begin{array}{c} I_{d'} \\ 0 \end{array} \right]} k^{b-d} \xleftarrow{\left[ \begin{array}{c} 0 \\ I_{d''} \end{array} \right]} k^{d''}) &\cong \\ I(2)^d \oplus (k^{d'} \xrightarrow{\left[ \begin{array}{c} I_{d'} \end{array} \right]} k^{d'} \longleftarrow 0) \oplus (0 \longrightarrow k^{b-d-d'} \xleftarrow{\left[ \begin{array}{c} I_{d''} \end{array} \right]} k^{d''}) &\cong \\ I(2)^d \oplus P(1)^{d'} \oplus (0 \longrightarrow k^{d''} \xleftarrow{\left[ \begin{array}{c} I_{d''} \end{array} \right]} k^{d''}) &\cong I(2)^d \oplus P(1)^{d'} \oplus P(3)^{d''}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, toda representación se escribe como suma directa de las representaciones listadas en el comienzo del ejemplo. En particular son las únicas indescomponibles.

El trabajo anterior nos permitió hallar todas las representaciones indescomponibles del carcaj  $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$ . Sin embargo, si deseamos entender la categoría de representaciones de este carcaj, necesitamos hallar también los conjuntos de morfismos entre sus representaciones. Como antes, podemos restringirnos a hallar los morfismos entre las representaciones indescomponibles. Podemos asumir también que el morfismo es no nulo y tiene dominio diferente al codominio. Usaremos la notación  $(f_1, f_2, f_3)$  para representar a todo morfismo entre representaciones, en donde cada  $f_i$  es una transformación lineal entre los espacios vectoriales correspondientes al vértice  $i$ . Si ambos espacios vectoriales tienen dimensión uno, podemos suponer que la transformación lineal es multiplicar por un escalar.

- $\text{Hom}(S(1), \bullet)$ : Como  $S(2), S(3)$  y  $P(3)$  tienen el espacio vectorial cero en el vértice 1, no hay ningún morfismo no nulo de  $S(1)$  a esas representaciones. Por otra parte, tampoco puede existir un morfismo no nulo de  $S(1)$  a  $P(1)$  ni a  $I(2)$ . Supongamos que  $f: S(1) \rightarrow P(1)$  es un morfismo no nulo. Por ser morfismo, el siguiente diagrama debe conmutar:

$$\begin{array}{ccccc} k & \longrightarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow & & \downarrow \\ k & \xrightarrow{1} & k & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Como el diagrama conmuta,  $f_1 = 0$ . Por lo tanto  $f = 0$ . Por la misma razón,  $\text{Hom}(S(1), I(2)) = 0$ .

Entonces  $S(1)$  no tiene flechas no triviales a ningún otro indescomponible.

- $\text{Hom}(S(2), \bullet)$ : Como  $S(1)$  y  $S(3)$  tienen el espacio vectorial cero en el vértice 2, no hay ningún morfismo no nulo de  $S(2)$  a esas representaciones. Por otra parte, el espacio vectorial  $\text{Hom}(S(2), P(1))$  tiene dimensión uno. En efecto, si  $f_2 \in k$ , todo morfismo de la forma  $(0, f_2, 0)$  hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & k & \longleftarrow & 0 \\ \downarrow 0 & & \downarrow f_2 & & \downarrow 0 \\ k & \xrightarrow{1} & k & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Una base del espacio vectorial  $\text{Hom}(S(2), P(1))$  es por ejemplo el morfismo dado por  $(0, 1, 0)$ .

Análogamente, los espacios  $\text{Hom}(S(2), P(3))$  y  $\text{Hom}(S(2), I(2))$  tienen dimensión uno y están generados por el morfismo  $(0, 1, 0)$ .

Luego  $S(2)$  tiene flechas no triviales  $S(2) \rightarrow P(1)$ ,  $S(2) \rightarrow P(3)$  y  $S(2) \rightarrow I(2)$ .

- $\text{Hom}(S(3), \bullet)$ : Por simetría con  $S(1)$ , no hay ningún morfismo no nulo de  $S(3)$  a otra representación indescomponible.
- $\text{Hom}(P(1), \bullet)$ : Como  $P(1)$  tiene el espacio vectorial cero en el vértice 3, no hay ningún morfismo distinto a cero de  $P(1)$  a  $S(3)$ .

Estudio ahora  $\text{Hom}(P(1), S(1))$ . Sea un morfismo  $f: P(1) \rightarrow S(1)$ . Al ser morfismo, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} k & \xrightarrow{1} & k & \longleftarrow & 0 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\ k & \xrightarrow{1} & 0 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Del diagrama se concluye que  $f_1$  es libre de ser cualquier escalar. Luego, el espacio vectorial  $\text{Hom}(P(1), S(1))$  tiene dimensión uno y está generado por el morfismo  $(1, 0, 0)$ .

$\text{Hom}(P(1), I(2))$  también tiene dimensión uno y está generado por  $(1, 1, 0)$ .

Finalmente, no hay ningún morfismo  $f$  distinto a cero de  $P(1)$  a  $P(3)$  o a  $S(2)$ , ya que el siguiente cuadrado debería conmutar:

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{1} & k \\ \downarrow 0 & & \downarrow f_2 \\ 0 & \xrightarrow{0} & k \end{array}$$

En conclusión, tenemos flechas no triviales  $P(1) \rightarrow S(1)$  y  $P(1) \rightarrow I(2)$

- $\text{Hom}(P(3), \bullet)$ : Por simetría con  $P(1)$ , podemos ver que  $\text{Hom}(P(3), S(1)) = \text{Hom}(P(3), S(2)) = \text{Hom}(P(3), P(1)) = 0$ . Análogamente se ve que  $\text{Hom}(P(3), I(2))$  y  $\text{Hom}(P(3), I(3))$  tienen dimensión uno y están generados por  $(0, 1, 1)$  y  $(0, 0, 1)$  respectivamente.

Tenemos flechas no triviales  $P(3) \rightarrow I(2)$  y  $P(3) \rightarrow S(3)$ .

- $\text{Hom}(I(2), \bullet)$ : Para empezar,  $\text{Hom}(I(2), P(1)) = \text{Hom}(I(2), S(2)) = 0$  pues si  $f$  es un morfismo a alguno de esas dos representaciones, el siguiente cuadrado debería conmutar:

$$\begin{array}{ccc} k & \xleftarrow{1} & k \\ \downarrow f_2 & & \downarrow 0 \\ k & \xleftarrow{0} & 0 \end{array}$$

Tampoco existe un morfismo no nulo de  $I(2)$  a  $P(3)$ , pues el siguiente cuadrado debería conmutar:

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{1} & k \\ \downarrow 0 & & \downarrow f_2 \\ 0 & \xrightarrow{0} & k \end{array}$$

Finalmente,  $\text{Hom}(I(2), S(1))$  y  $\text{Hom}(I(2), S(3))$  tienen dimensión uno y están generados por  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  respectivamente.

Tenemos flechas no triviales  $I(2) \rightarrow S(1)$  y  $I(2) \rightarrow S(3)$ .

En conclusión, tenemos este diagrama de morfismos no nulos:

$$\begin{array}{ccccc} & & P(1) & \overset{(1,0,0)}{\dashrightarrow} & S(1) \\ & (0,1,0) \nearrow & & \searrow (1,1,0) & \nearrow (1,0,0) \\ S(2) & \overset{(0,1,0)}{\dashrightarrow} & I(2) & & \\ & (0,1,0) \searrow & & \nearrow (0,0,1) & \searrow (0,0,1) \\ & & P(3) & \overset{(0,0,1)}{\dashrightarrow} & S(3) \end{array}$$

Sin embargo, los morfismos punteados se factorizan, es decir, los triángulos del diagrama son conmutativos. Por ejemplo, para el morfismo  $(1, 0, 0): P(1) \rightarrow S(1)$ ,

$$\begin{aligned} (1, 0, 0)(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, 0, 0) \\ (1, 0, 0) \circ (1, 1, 0)(x_1, x_2, x_3) &= (1, 0, 0)(x_1, x_2, 0) = (x_1, 0, 0) \end{aligned}$$

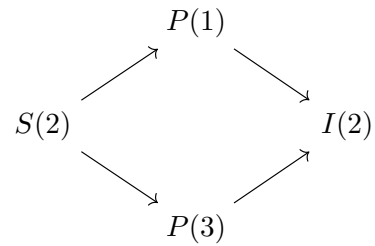
Análogamente, todos los triángulos conmutan. Por lo tanto, al ser composición de otros morfismos no triviales, podemos ver a los morfismos punteados como *reducibles* y borrarlos del diagrama.

Por otra parte, podemos convencernos mirando el diagrama que los morfismos no punteados son *irreducibles*, es decir, no se factorizan de forma no trivial.

El diagrama obtenido que codifica la información de los morfismos de la categoría (al menos en el caso de las representaciones irreducibles) sería entonces:

$$\begin{array}{ccccc} & & P(1) & & S(1) \\ & (0,1,0) \nearrow & & \searrow (1,1,0) & \nearrow (1,0,0) \\ S(2) & & I(2) & & \\ & (0,1,0) \searrow & & \nearrow (0,0,1) & \searrow (0,0,1) \\ & & P(3) & & S(3) \end{array}$$

Más adelante (en el capítulo cinco) veremos que este es exactamente el llamado **carcaj de Auslander-Reiten**. Lo sorprendente que descubrieron Auslander y Reiten fue, entre otras cosas, que el rombo



no es inocente, sino que representa una sucesión exacta corta  $0 \longrightarrow S(2) \longrightarrow P(1) \oplus P(3) \longrightarrow I(2) \longrightarrow 0$  de un tipo especial, llamada **casi partida**. Definir formalmente y sistematizar la construcción del carcaj de Auslander Reiten es lo que haremos en los últimos capítulos, pero ya vimos que codifica buena parte de la información sobre los morfismos entre las representaciones indescomponibles de un carcaj.



## Parte 2

# Resoluciones proyectivas

En esta parte continuamos el estudio de la categoría  $\text{Rep}_Q$ , definiendo sus objetos proyectivos e inyectivos y demostrando una propiedad extremadamente importante: cuando el carcaj no tiene ciclos orientados se trata de una *categoría hereditaria* (es decir, subrepresentaciones de proyectivas son proyectivas también). Definimos después la traslación de Auslander-Reiten  $\tau$  que nos permite hallar todos los indescomponibles. Se incluye algunos resultados sabidos pero no incluidos generalmente en la literatura: los teoremas 2.4, 2.11 y los lemas 2.20, 2.29 y 2.32, en donde se dan demostraciones propias.

### 2.1. Proyectivos e inyectivos

Daremos una terminología muy útil: dado un carcaj  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  e  $i$  y  $j$  dos vértices en él, un **camino**  $c$  de  $i$  en  $j$  es una secuencia finita de flechas de  $Q_1$ , que empieza en  $i$  y termina en  $j$ . Notamos

$$c = (i|\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n|j) \quad c: i \longrightarrow j$$

con  $i, j \in Q_0$  y  $s(\alpha_1) = i$ ,  $s(\alpha_k) = t(\alpha_{k-1})$  y  $t(\alpha_n) = j$ .

La **longitud** de un camino es su cantidad de flechas. Un **ciclo dirigido** es un camino que empieza y termina en el mismo vértice, i.e.  $c = (i|\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n|i)$ . Un lazo es un ciclo dirigido de longitud 1, i.e. una flecha que empieza y termina en el mismo vértice. El **camino trivial**  $e_i$  es el camino “vacío” que nunca sale de  $i$ . Por definición tiene longitud cero.

Para cada vértice del carcaj podemos definir tres representaciones completamente naturales. Sus nombres no son casualidad pues serán los objetos simples, proyectivos e inyectivos de la categoría. Más adelante su cálculo tan sencillo nos permitirán explicitar resoluciones proyectivas para una representación en concreto.

En toda esta sección asumiremos  $Q$  fijo y sin ciclos dirigidos.

**Definición 2.1.** La **presentación simple**  $S(i)$  tiene cero en todos los vértices excepto en el  $i$ :

$$S(i)_j := \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ k & \text{si } i = j \end{cases}$$

y todas las flechas son nulas.

La **presentación proyectiva indescomponible**  $P(i)$  tiene en el vértice  $j$  el espacio vectorial la base de caminos de  $i$  en  $j$ :

$$P(i)_j := \langle c: i \longrightarrow j, \text{ caminos de } i \text{ en } j \rangle$$

y si  $t \xrightarrow{\alpha} s$  es una flecha de  $Q$ , definimos a  $\varphi_\alpha$  sobre la base como

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha: P(i)_t &\longrightarrow P(i)_s \\ c &\longmapsto c\alpha = (t|\alpha_1 \cdots \alpha_n \alpha|s) \end{aligned}$$

y extendiendo por linealidad. Es decir,

$$\begin{array}{ccc} & & i \\ & \swarrow \varphi_\alpha(c) & \downarrow c \\ s & \xleftarrow{\alpha} & t \end{array}$$

La **presentación inyectiva indescomponible**  $I(i)$  tiene en el vértice  $j$  el espacio vectorial con base los caminos de  $j$  en  $i$ :

$$I(i)_j := \langle c: j \longrightarrow i, \text{caminos de } j \text{ en } i \rangle$$

Para la definición de  $\varphi_\alpha$  con  $j \xrightarrow{\alpha} k$  lo hago sobre una base: si  $c \in I(i)_j$ ,  $c: j \longrightarrow i$ . Luego, si  $c_1 \neq \alpha$ ,  $\varphi_\alpha(c) = 0$  y si  $c_1 = \alpha$ ,  $\varphi_\alpha(c) = (k|c_2 \cdots c_n|i)$ . Es decir, si  $c_1 = \alpha$ ,  $c = \alpha\varphi_\alpha(c)$  y lo notamos como una división por  $\alpha$ : " $\varphi_\alpha(c) = \frac{1}{\alpha} \cdot c$ ".

**Ejemplo 2.2.** Sea  $Q = 1 \xleftarrow[\beta]{\alpha} 2 \xrightarrow[\gamma]{\delta} 3 \xrightarrow[\epsilon]{\epsilon} 4$ , entonces:

$$\begin{aligned} P(2) &= \langle \{\alpha, \beta\} \rangle \xleftarrow[\beta]{\alpha} \langle e_2 \rangle \xrightarrow[\gamma]{\delta} \langle \delta \rangle \xrightarrow[\epsilon]{\epsilon} \langle \{\delta\epsilon, \gamma\} \rangle \\ I(4) &= 0 \xleftarrow{\quad} \langle \{\delta\epsilon, \gamma\} \rangle \xrightarrow[\gamma]{\delta} \langle \epsilon \rangle \xrightarrow[\epsilon]{\epsilon} \langle e_4 \rangle \end{aligned}$$

O, tomando bases,

$$\begin{aligned} P(2) &= k^2 \xleftarrow[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}]{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} k \xrightarrow[1]{\quad} k \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}]{\quad} k^2 \\ I(4) &= 0 \xleftarrow{\quad} k^2 \xrightarrow[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}]{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} k \xrightarrow[1]{\quad} k \end{aligned}$$

La necesidad de que  $Q$  no tenga ciclos dirigidos es para que los espacios vectoriales tengan dimensión finita en cada vértice. Por ejemplo, si  $\mathbb{L} = 1 \curvearrowright \alpha$  entonces

$$P(1) = \langle \{\alpha^n : n \in \mathbb{N}_0\} \rangle$$

que es un espacio vectorial con base numerable.

**Observacion 2.3.** Notemos que los morfismos de la representación  $P(i)$  son inyectivos: si  $\alpha: j \rightarrow k$  es una flecha,  $\varphi_\alpha: P(i)_j \rightarrow P(i)_k$  manda una base de  $P(i)_j$  en algunos elementos de la base de  $P(i)_k$ . Análogamente en  $I(i)$  los morfismos son sobreyectivos, pues si  $c = (k|c_1 \cdots c_n|i) \in I(i)_k$ ,  $\varphi_\alpha(\alpha c) = c$ ,  $\alpha c \in I(i)_j$ .

Siguiendo con la notación del comienzo de la sección, dada una representación  $(M_i, \varphi_\alpha)$  y un camino  $c = (j|\alpha_1 \cdots \alpha_n|k)$  podemos definir la composición de los morfismos  $\varphi$  a lo largo del camino  $c$ :

$$\begin{aligned}\varphi_c &:= \varphi_{\alpha_n} \circ \cdots \circ \varphi_{\alpha_1}, \quad \varphi_c: M_j \longrightarrow M_k \\ \varphi_{e_i} &:= Id_{M_i} \text{ para todo } i \in Q_0\end{aligned}$$

**Teorema 2.4.** *Sea  $Q$  un carcaj acíclico con más de un vértice y conexo. Entonces  $I(i) \not\cong P(i)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $I(i) \cong P(i)$ . Como  $Q$  es conexo y tiene más de un vértice, existe un vértice  $j$  y una flecha  $\alpha$  de  $i$  en  $j$ . Eso significa que  $P(i)$  es distinto a cero. Como  $I(i)$  es isomorfo a  $P(i)$ , entonces  $I(i)_j$  también debe ser no nulo. Entonces debe existir una flecha  $\beta: j \longrightarrow i$ . Por lo tanto habría un ciclo  $\alpha\beta: i \longrightarrow i$ , absurdo.  $\square$

Esto no significa que no pueda haber representaciones que son proyectivas e inyectivas al mismo tiempo. Por ejemplo si  $Q = 1 \rightarrow 2$ ,  $P(1) = I(2)$ .

De ahora en más todos los teoremas supondrán  $Q$  sin ciclos dirigidos. Veamos que las representaciones  $P(i)$  hacen honor a su nombre y son efectivamente objetos proyectivos:

**Teorema 2.5.** *Sea  $g: N \longrightarrow M$  sobreyectiva y  $f: P(i) \longrightarrow M$  un morfismo. Entonces existe  $h: P(i) \longrightarrow N$  tal que  $g \circ h = f$ . Gráficamente:*

$$\begin{array}{ccc} & P(i) & \\ \swarrow \exists h & \downarrow f & \\ N & \xrightarrow{g} & M \longrightarrow 0\end{array}$$

es un diagrama que conmuta. En otras palabras si  $g: N \longrightarrow M$  es sobreyectiva,

$$g_*: \text{Hom}(P(i), N) \longrightarrow \text{Hom}(P(i), M)$$

también lo es.

*Demostración.* Sean  $M = (M_i, m_\alpha)$  y  $N = (N_i, n_\alpha)$ . Como  $g_i$  es sobreyectivo, existe  $x \in g_i^{-1}(f_i(e_i))$ . Definimos  $h_i(e_i) := x \in M_i$ , como  $Q$  no tiene ciclos dirigidos,  $\langle e_i \rangle = P(i)_i$  entonces  $h_i$  está bien definido. Dado  $c \in P(i)_j$  definimos  $h_j(c) = m_c(x) \in M_j$ . Podemos comprobar que  $h_j$  es morfismo y veamos que  $g \circ h = f$ .

$$g_j \circ h_j(c) = g_j \circ m_c(x) \stackrel{1}{=} n_c \circ g_i(x) = n_c \circ f_i(e_i) \stackrel{2}{=} f_j(e_i \cdot c) = f_j(c)$$

donde en 1 y 2 uso que  $g$  y  $f$  son morfismos, respectivamente.  $\square$

Análogamente  $I(i)$  es una representación inyectiva:

**Teorema 2.6.** *Sea  $g: N \longrightarrow M$  inyectiva y  $f: N \longrightarrow I(i)$  un morfismo. Entonces existe  $h: M \longrightarrow I(i)$  tal que  $h \circ g = f$ . Gráficamente:*

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & N \xrightarrow{g} M \\ & & \downarrow f \swarrow \exists h \\ & & I(i)\end{array}$$

es un diagrama que conmuta. En otras palabras si  $g: N \rightarrow M$  es inyectiva,

$$g^*: \text{Hom}(M, I(i)) \rightarrow \text{Hom}(N, I(i))$$

es sobreyectiva.

Justifiquemos ahora que son indescomponibles:

**Teorema 2.7.** *Las representaciones  $S(i)$ ,  $P(i)$  e  $I(i)$  son indescomponibles.*

*Demostración.* Que  $S(i)$  es indescomponible es obvio. Veamos que  $P(i)$  es indescomponible. Supongamos que  $P(i) = M \oplus N$ ,  $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)$ ,  $M = (M_i, m_\alpha)$ ,  $N = (N_i, n_\alpha)$ . Como  $P(i)_i \cong k$  podemos suponer  $M_i = k$  y  $N_i = 0$ . Afirimo que  $M = P(i)$ .

Sea  $a \in P(i)_j$ . Por la definición de  $P(i)_j$ ,  $a$  se escribe como  $a = \sum \lambda_k c_k$  con  $\lambda \in k$  y  $c_k$  caminos de  $i$  a  $j$ . Luego, por definición de los morfismos de  $P(i)$ ,

$$c_k = \varphi_{c_k}(e_i) = (m_{c_k} \oplus n_{c_k})(e_i^M \oplus e_i^N) = m_{c_k}(e_i^M) \oplus n_{c_k}(e_i^N)$$

Pero  $e_i^N = 0$ , entonces  $n_c(e_i^N) = 0$ , y por lo tanto  $c_k = m_c(e_i^M) \in M_j$ . Luego  $P(i) \subseteq M$  y en consecuencia  $M = P(i)$ .  $\square$

Análogamente a la definición usual, una representación  $M$  es **simple** si es no nula y sus únicas subrepresentaciones son la nula y  $M$ . Claramente además de ser indescomponibles, las  $S(i)$  son simples. Lo interesante es que son las únicas.

**Teorema 2.8.** *Una representación de  $Q$  es simple si y sólo si es isomorfa a algún  $S(i)$  con  $i \in Q_0$ .*

*Demostración.* Sea  $M$  simple. Entonces existe  $M_i \neq 0$ . Podemos suponer  $M_i = k^d$ . En principio podríamos tomar  $N$  la “subrepresentación” con  $N_i = k$  (donde incluyo  $k$  en  $k^d$  de cualquier forma),  $N_j = 0$  si  $i \neq j$ . Entonces como  $M$  es simple,  $M = N$ . El problema es que no necesariamente la inclusión de  $N$  en  $M$  es un morfismo, pues podría existir  $\alpha: i \rightarrow l$  con  $M_l \neq 0$  y el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{m_\alpha} & M_l \\ \uparrow & & \uparrow \\ i & & k \\ k & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

podría no conmutar. Por otra parte, observemos que si  $\alpha: l \rightarrow i$ ,

$$\begin{array}{ccc} M_l & \xrightarrow{m_\alpha} & M_i \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & k \end{array}$$

es un diagrama que siempre conmuta.

Necesito un  $i$  tal que 1)  $M_i$  sea no nulo 2) todo  $m_\alpha$  que sale de  $i$  es cero. Sea  $i_1$  el vértice del comienzo. Si  $i_1$  satisface 1 y 2 listo. Sino, existe  $i_2$  y  $\alpha_2: i_1 \rightarrow i_2$  con  $m_{\alpha_2} \neq 0$ . Luego  $M_{i_2} \neq 0$ . Si  $i_2$  satisface 1 y 2 listo. Sino existe  $i_3$  y  $m_{\alpha_3}: M_{i_2} \rightarrow M_{i_3}$ . Como  $Q$  no tiene ciclos dirigidos el camino  $\alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_n$  no puede volver a ningún vértice anterior. Como  $Q$  es finito eventualmente existe  $M_{i_0} \neq 0$  tal que o bien no salen flechas de  $i_0$  o bien las  $m_\alpha$  son todas nulas. Entonces  $S(i_0)$  es una subrepresentación de  $M$  no nula. Luego  $M = S(i_0)$ .  $\square$

Notemos que un morfismo de  $P(i)$  en  $M$  queda determinado por elegir un elemento  $x$  de  $M_i$  a donde enviar  $e_i \in P(i)_i$ . Dado tal  $x$ , el morfismo se extiende a todo  $P(i)$  por la definición de las transformaciones lineales de  $P(i)$ . En efecto, tenemos una biyección entre los dos objetos:

**Teorema 2.9.** Sea  $M$  una representación de  $Q$ . Entonces para todo vértice  $i$  en  $Q$  hay un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\text{Hom}(P(i), M) \cong M_i$$

*Demostración.* Sea  $f \in \text{Hom}(P(i), M)$  luego  $f_i(e_i) \in M_i$ . Definimos

$$\begin{aligned} \text{Hom}(P(i), M) &\xrightarrow{\Phi} M_i \\ f &\longmapsto f_i(e_i) \end{aligned}$$

$\Phi$  es inyectiva: si  $f'_i(e_i) = f_i(e_i)$  entonces si  $c \in P(i)_j$ ,

$$f_j(c) = f_j(e_i \cdot c) = m_c(f_i(e_i)) = m_c(f'_i(e_i)) = f'_j(e_i \cdot c) = f'_j(c)$$

$\Phi$  es sobreyectivo: si  $x \in M_i$ , definimos  $g_i(e_i) = m$  y  $g_j(c) = m_c(x)$ . Se comprueba que es un morfismo.  $\square$

**Corolario 2.10.** Sean  $i, j \in Q_0$ .

1. Hay un isomorfismo de espacios vectoriales entre  $\text{Hom}(P(i), P(j))$  y  $P(j)_i$ .
2. El espacio  $\text{Hom}(P(i), P(i))$  es isomorfo a  $k$  como  $k$ -espacio vectorial.
3. Si  $A_Q$  es la representación  $\bigoplus_{i \in Q_0} P(i)$ , entonces  $\text{End}(A_Q)$  es un  $k$ -espacio vectorial con una base que se puede identificar con los caminos en  $Q$ .
4. La representación  $P(j)$  es simple si y sólo si  $\text{Hom}(P(i), P(j)) = 0$  para todo  $i \neq j$ .

El teorema análogo para  $I(i)$  vale:

**Teorema 2.11.** Sea  $M$  una representación de un carcaj conexo  $Q$ . Hay un isomorfismo natural de espacios vectoriales

$$\text{Hom}(M, I(i)) \cong M_i^*$$

*Demostración.* Defino el morfismo

$$\begin{aligned} \Phi: \text{Hom}(M, I(i)) &\longrightarrow M_i^* \\ (f: M \rightarrow I(i)) &\longrightarrow (\tilde{f}: M_i \rightarrow k) \end{aligned}$$

donde  $\tilde{f}(m)$  se define como la coordenada de  $f_i(m)$  en la base de  $I(i)_i$  dada por  $\{e_i\}$ .

$\Phi$  es un morfismo de espacios vectoriales y es sobreyectivo e inyectivo. Probemos primero la sobreyectividad. Sea  $g: M_i \rightarrow k$  un morfismo no nulo. Definimos  $f_i(m) = g(m) \cdot e_i$  para todo  $m \in M_i$ .

Extendamos  $f$  a todo  $M$ . Dado  $M_j$ , tenemos dos posibilidades: o existe un camino de  $i$  en  $j$  o existe un camino de  $j$  en  $i$  y ambas no pueden ocurrir al mismo tiempo. Si existe un camino de  $i$  en  $j$ , definimos  $f_j$  como el morfismo nulo sobre  $M_j$ . Y si existe un camino de  $j$  en  $i$ , definimos

$$f_j(m) = \sum_{c: j \rightarrow i} c \cdot g(m_c(m))$$

Veamos que  $f$  así definida es un morfismo de representaciones, para luego ver que  $\Phi(f) = g$ .

Sea  $\alpha_0: k \rightarrow j$  una flecha con  $i \neq k, j$ . Deseamos probar que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
M_k & \xrightarrow{m_{\alpha_0}} & M_j \\
f_k \downarrow & & \downarrow f_j \\
I(i)_k & \xrightarrow{1/\alpha_0} & I(i)_j
\end{array}$$

Notemos que como  $Q$  no tiene ciclos dirigidos y  $Q$  es conexo, hay tres casos disjuntos: 1) para ambos vértices ( $k$  y  $j$ ) existe un camino de ellos en  $i$ , 2) para ambos caminos existe un camino de  $i$  en ellos 3) existe un camino de  $k$  en  $i$  y de  $i$  en  $j$ . En el caso 3),  $1/\alpha_0 = 0$  pues ningún camino de  $k$  en  $i$  se factoriza por  $\alpha_0$ . Si alguno lo hiciera existir a  $d: j \rightarrow i$ . Pero por hipótesis también existe un camino de  $i$  en  $j$ , que contradice que no tenga ciclos dirigidos. Absurdo. Entonces  $\frac{1}{\alpha_0} = 0$  y  $f_j = 0$ . Luego el diagrama conmuta. Si vale el caso 2),  $f_k$  y  $f_j$  son cero y listo. Supongamos que estamos en el caso 1).

Sea  $x \in M_k$ ,

$$1/\alpha_0 \circ f_k(x) = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{c: k \rightarrow i} c \cdot g(m_c(x)) = \sum_{c: k \rightarrow i} \frac{c}{\alpha_0} \cdot g(m_{c/\alpha_0}(m_{\alpha_0}(x)))$$

Notemos que todo camino  $d: j \rightarrow i$  se escribe de forma única como  $c/\alpha_0$  con  $c: k \rightarrow i$  que se factoriza vía  $\alpha_0$  y que si  $c: k \rightarrow i$  es un camino que no se factoriza por  $\alpha_0$ , entonces  $c/\alpha_0 = 0$ . Luego,

$$1/\alpha_0 \circ f_k(x) = \sum_{d: j \rightarrow i} d \cdot g(m_d(m_{\alpha_0}(x))) = f_j(m_{\alpha_0}(x))$$

Por lo tanto el diagrama conmuta. Los casos en que la flecha  $\alpha_0$  empieza o termina en  $i$ , ver que el diagrama conmuta es inmediato. Completados todos los casos, concluimos que  $f$  es un morfismo de representaciones. Además,  $\Phi(f)(m) = g(m)$ , por definición. Luego  $\Phi$  es sobreyectiva.

Para ver que es inyectiva, supongamos que  $\tilde{f} = \tilde{g}$ . Queremos ver que  $f_j = g_j$  para todo  $j \in Q_0$ . Si no existe ningún camino de  $j$  en  $i$ ,  $f_j = g_j$  pues  $I(i)_j = 0$ . Supongamos ahora que existe un camino de  $j$  en  $i$  y sea  $x \in M_j$ . Sean además  $1/c: I(i)_j \rightarrow I(i)_i$   $\varphi$  los morfismos de la representación  $I(i)$ , donde  $c$  es un camino de  $j$  en  $i$ . Por ser morfismos de representaciones tenemos las siguientes igualdades:

$$1/c \circ f_j(x) = f_i \circ m_c(x) = \tilde{f} \circ m_c(x) = \tilde{g} \circ m_c(x) = g_i \circ m_c(x) = 1/c \circ g_j(x)$$

que valen para todo camino de  $j$  en  $i$ . Entonces  $1/c \circ f_j(x) = 1/c \circ g_j(x)$  para todo camino de  $j$  en  $i$ . Como estos forman una base de  $I(i)_j$ , tenemos que  $f_j(x) = g_j(x)$ , lo cual termina de demostrar que  $f = g$ . Por lo tanto  $\Phi$  es inyectiva y entonces es un isomorfismo.  $\square$

Como en la categoría de módulos, la suma de proyectivos es proyectivo y la suma de inyectivos es inyectivo, y la inversa también es cierta:

**Teorema 2.12.** *Las siguientes proposiciones son verdaderas:*

1. Si  $P$  y  $P'$  son representaciones proyectivas  $\Rightarrow P \oplus P'$  es proyectiva.
2. Si  $P$  es proyectiva y  $P'$  es un sumando directo de  $P \Rightarrow P'$  es proyectiva.
3. 1 y 2 son ciertas cambiando proyectiva/s por inyectiva/s y  $P$  por  $I$ .

## 2.2. Resoluciones

Para calcular la traslación de Auslander-Reiten de un  $M$  necesitaremos hallar una resolución proyectiva o inyectiva de éste.

**Definición 2.13.** Una **resolución proyectiva** de  $M$  es una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde  $P_i$  es proyectiva para todo  $i$ .

Una **resolución inyectiva** de  $M$  es una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots$$

donde  $I_i$  es inyectiva para todo  $i$ .

Empezar a construir una resolución proyectiva para una representación cualquiera  $M$  es sencillo: como  $\text{Hom}(P(i), M) \cong M_i$  para cada elemento de una base de  $M_i$ ,  $v_1^i, \dots, v_{n_i}^i$  existe un morfismo  $f^{i,j}: P(i) \longrightarrow M$  tal que  $f^{i,j}(e_i) = v_j^i$  entonces tenemos un morfismo  $P(i)^{n_i} \xrightarrow{(f^{i,1}, \dots, f^{i,n_i})} M$  que sobreyecta a  $M_i$ . Repitiendo esto con cada coordenada obtenemos un morfismo de un proyectivo a  $M$ . Sin embargo, en principio, no hay ninguna razón para suponer que su núcleo es proyectivo, sobre todo si no tenemos una descripción completa de los proyectivos de la categoría. Pero la estructura extra del carcaj y el hecho de que no tenga ciclos orientados hacen que pueda describir el núcleo como suma de los proyectivos indescomponibles. Antes de definir la resolución proyectiva estándar de  $M$  justifiquemos su construcción. Escribamos  $M = (k^{d_i}, \varphi_\alpha)$  y  $e_k^i$  con  $1 \leq k \leq d_i$  una base de  $k^{d_i}$ . Además introduzcamos una nueva construcción: el producto tensorial de un espacio vectorial y una representación.

Dado  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial y  $M = (M_i, m_\alpha)$  una representación de un carcaj  $Q$ , definiremos la representación  $\mathbb{V} \otimes M$ . En cada vértice el espacio vectorial es  $(\mathbb{V} \otimes M)_i = \mathbb{V} \otimes M_i$ . Además, dada  $\alpha: i \longrightarrow j$  una flecha de  $Q$ , el morfismo de  $(\mathbb{V} \otimes M)_i$  en  $(\mathbb{V} \otimes M)_j$  será:

$$Id \otimes m_\alpha: \mathbb{V} \otimes M_i \longrightarrow \mathbb{V} \otimes M_j$$

Con esas definiciones, justifiquemos informalmente la construcción de la resolución proyectiva estándar:

Existe un morfismo de representaciones  $v$

$$\bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}(P(i), M) \otimes P(i) \longrightarrow M$$

$$\{f_i \otimes m_i\}_{i \in Q_0} \longmapsto \{f_i(m_i)\}$$

Por el teorema 2.9,  $\text{Hom}(P(i), M) \cong M_i = k^{d_i}$ , entonces

$$\bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}(P(i), M) \otimes P(i) \cong \bigoplus_{i \in Q_0} k^{d_i} \otimes P(i) \cong \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i}$$

y vía los isomorfismos el morfismo de representaciones  $v$  es:

$$v: \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} \longrightarrow M$$

$$(0, \dots, \overset{\text{lugar } k_0}{c}, \dots, 0) \in P(i)^{d_i} \longmapsto \varphi_c(e_{k_0}^i), \quad 1 \leq k_0 \leq d_i$$

Para simplificar la notación a un camino  $(0, \dots, \overset{\text{lugar } k_0}{c}, \dots, 0)$  lo denotaremos  $c_{k_0}$ . Por otra parte tenemos otro morfismo natural

$$\bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}(P(s(\alpha)), M) \otimes P(t(\alpha)) \longrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}(P(i), M) \otimes P(i)$$

$$(f \otimes c)_\alpha \longmapsto \overbrace{f \otimes \alpha c}^a - \overbrace{f(\alpha \cdot -) \otimes c}^b$$

donde  $a \in \text{Hom}(P(s(\alpha)), M) \otimes P(s(\alpha))$  y  $b \in \text{Hom}(P(t(\alpha)), M) \otimes P(t(\alpha))$ . Esta flecha claramente va a parar a cero vía  $v$ . Vía el isomorfismo tenemos una flecha

$$u: \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}} \longrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i}$$

$$c_{k_0} \in P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}} \longmapsto (\alpha c)_{k_0} - c_\alpha^M$$

donde  $c_\alpha^M = \sum_{l=1}^{d_t(\alpha)} \theta_l c_l$  con  $\theta_l$  son los coeficientes de  $\varphi_\alpha(\mathbf{e}_{k_0}^{s(\alpha)})$  en la base  $\{\mathbf{e}_l^{t(\alpha)}\}$ :

$$\varphi_\alpha(\mathbf{e}_{k_0}^{s(\alpha)}) = \sum_{l=1}^{d_t(\alpha)} \theta_l \mathbf{e}_l^{t(\alpha)}$$

**Teorema 2.14.** *La sucesión*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}} \xrightarrow{u} \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} \xrightarrow{v} M \rightarrow 0$$

con  $u$  y  $v$  definidos como arriba es una sucesión exacta corta. Esta resolución se llama la resolución estándar de  $M$ .

*Demostración.* Podemos comprobar que  $u$  y  $v$  son morfismos de representaciones y que eso es independiente de que  $Q$  tenga ciclos dirigidos.

$v$  es sobreyectivo: Sea  $x \in M_j$ . Entonces  $x = \sum_{1 \leq l \leq d_j} \lambda_l \mathbf{e}_l^j$ . Sea  $\sum_l \lambda_l (e_j)_l \in P(j)^{d_j}$  con  $e_j \in P(j)_j$  el camino trivial,  $1 \leq l \leq d_j$ . Luego

$$v\left(\sum_l \lambda_l (e_j)_l\right) = \sum_l \lambda_l \varphi_{e_j}(\mathbf{e}_l^j) = \sum_l \lambda_l \text{Id}(\mathbf{e}_l^j) = x$$

$\text{Ker}(v) \supseteq \text{Im}(u)$ : Sea  $c_{k_0} \in P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}}$ . Luego

$$v(u(c_{k_0})) = v((\alpha c)_{k_0} - c_\alpha^M) = \varphi_{\alpha c}(\mathbf{e}_{k_0}^{s(\alpha)}) - \sum_{l=1}^{d_t(\alpha)} \theta_l v(c_l) = \varphi_c \circ \varphi_\alpha(\mathbf{e}_{k_0}^{s(\alpha)}) - \sum_{l=1}^{d_t(\alpha)} \theta_l \varphi_c(\mathbf{e}_l^{t(\alpha)}) =$$

$$= \varphi_c(\varphi_\alpha(\mathbf{e}_{k_0}^{s(\alpha)})) - \varphi_c\left(\sum_{l=1}^{d_t(\alpha)} \theta_l \mathbf{e}_l^{t(\alpha)}\right) = \varphi_c(\varphi_\alpha(\mathbf{e}_{k_0}^{s(\alpha)})) - \varphi_c(\varphi_\alpha(\mathbf{e}_{k_0}^{s(\alpha)})) = 0$$

$\text{Ker}(v) \subseteq \text{Im}(u)$ : Sea  $x \in \text{Ker}(v)$ . Podemos escribir a  $x$  como una suma en la base de todos los caminos de  $Q$ :  $x = \sum_{c,l} \lambda_{c,l} \cdot c_l$ . Definimos  $\text{long}(x) :=$  longitud del camino más largo con coeficiente no nulo que aparece en la escritura de  $x$ .

$$x = x_0 + \sum_{l, c \neq e_i} \lambda_{c,l} \cdot c_l$$



donde  $x_0$  es la suma sobre todos los caminos triviales. Como los caminos de la segunda suma no son triviales, cada camino  $c$  se puede escribir como  $\alpha \cdot d$ , donde  $\alpha$  es una flecha, y ambos dependen de  $c$ . Entonces

$$x = x_0 + \sum_{l, \alpha \cdot d} \lambda_{\alpha \cdot d, l} \cdot (\alpha \cdot d)_l = x_0 + \sum_{\alpha} \sum_{d, l} \lambda_{\alpha, d, l} \cdot u(d) + \lambda_{\alpha, d, l} \cdot d_{\alpha}^M$$

donde la composición  $\alpha d = 0$  si  $t(\alpha) \neq s(d)$ . Luego

$$x = x_0 + u(z) + \overbrace{\sum_{\substack{\alpha, d, l: \\ \alpha \cdot d = c}} \tilde{\theta}_{d, l} d_l}^{:= z'}$$

donde  $long(z') < long(x)$  porque todos los caminos de  $z'$  son estrictamente más cortos que los caminos de  $x$ . Sea  $x_1 := x_0 + z'$ . Entonces  $x = x_1 + u(z)$ . Luego  $long(x_1) = long(z')$  pues todos los caminos de  $x_0$  tienen longitud cero, y aplicando  $v$  en ambos lados obtenemos que  $0 = v(x_0) + 0 + v(z') = v(x_1)$  así que  $x_1 \in \text{Ker}(v)$ . Repitiendo el argumento tenemos que  $x_1 = u(z_1) + x_2$  con  $x_2 \in \text{Ker}(v)$  y  $long(x_2) < long(x_1)$ . Por finitud y como  $0 \leq long(x_j)$  para todo  $j$ , eventualmente existe  $x_j$  tal que  $x_j$  es una suma de caminos triviales  $x_j = \sum_{i, l} \lambda_{i, l} (e_i)_l \in \text{Ker}(v)$ . Luego  $v(x_j) = \sum_{i, l} \lambda_{i, l} \cdot \mathbf{e}_l^i = 0$ . Entonces  $\lambda_{i, l} = 0$  luego  $x_j = 0$ . Entonces  $x_{j-1} = u(\bar{z})$ . Volviendo para atrás tenemos que  $x_1 = u(\bar{z})$  entonces  $x = u(\bar{z} + z) \in \text{Im}(u)$ .

Ker(u) = 0 : Sea  $x \in \text{Ker}(u)$ ,  $x = \sum_{\alpha, c, l} \lambda_{\alpha, c, l} \cdot c_l$ . Luego

$$u(x) = \sum_{\alpha, c, l} \lambda_{\alpha, c, l} ((\alpha \cdot c)_l - c_{\alpha}^M) = 0$$

Entonces

$$\sum_{\alpha, c, l} \lambda_{\alpha, c, l} (\alpha \cdot c)_l = \sum_{\alpha, c, l} \lambda_{\alpha, c, l} c_{\alpha}^M = \sum_{\alpha, c, l} \sum_k \lambda_{\alpha, c, l} \theta_k c_k$$

Sea  $i$  un vértice fuente de  $Q$ . Notemos que existe pues  $Q$  no tiene ciclos orientados. Luego ninguna flecha llega a  $i$ . Como cada  $c$  empieza en algún  $t(\alpha)$  y ninguna flecha termina en  $i$ , mirando las coordenadas de los caminos que empiezan en  $i$ , el lado derecho es cero. Luego  $\lambda_{\alpha, c, l} = 0$  para todo  $\alpha$  tal que  $s(\alpha) = i$ . Sea ahora  $i_1$  una *fuentes* en  $Q - \{i\}$ , que la hay pues  $Q$  no tiene ciclos orientados. Luego o bien  $i_1$  es una fuente en  $Q$  o bien las únicas flechas que llegan a  $i_1$  provienen de  $i$ . Entonces mirando el lado derecho a los caminos que empiezan en  $i_1$ , pertenecen a un  $P(t(\alpha))$  donde  $\alpha$  es una flecha que llega a  $i_1$ . Entonces necesariamente esa flecha empieza en  $i$  y luego su coordenada  $\lambda_{\alpha, c, l} = 0$ . Entonces en el lado derecho mirando las coordenadas de los caminos que empiezan en  $i_1$ , son todas cero. Entonces en el lado izquierdo todos los  $\lambda_{\alpha, c, l}$  que empiezan en  $i_1$  son cero. Así siguiendo, eliminando los vértices, por finitud, todos los  $\lambda$  son cero.  $\square$

El teorema análogo para resoluciones inyectivas también es cierto:

**Teorema 2.15.** *Dada una representación  $M$  existe una resolución inyectiva*

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} I_0 \xrightarrow{g} I_1 \rightarrow 0$$

donde  $I_0$  y  $I_1$  son inyectivas.

El teorema será obvio una vez que veamos el funtor dualidad.

**Ejemplo 2.16.** Sea  $Q = 1 \xrightarrow{\beta} 2$  y  $M = k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} k = {}_2^1 1$ . Luego  $d_1 = 2$  y  $d_2 = 1$ . Los proyectivos son:

$$P(1) = {}_2^1 2 \quad P(2) = 2$$

donde la notación de  $P(1)$  significa  $k \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} k^2$ .

Entonces el comienzo de la resolución es

$${}_2^1 2 \oplus {}_2^1 2 \oplus 2 \twoheadrightarrow {}_2^1 1 \rightarrow 0$$

Escribamos bien cuál es el morfismo sobreyectivo:

$$\begin{array}{ccc} k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} k^5 & & \\ \downarrow Id & & \downarrow [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \\ k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} k & & \\ & & \downarrow \\ & & k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} k \end{array}$$

y por lo tanto la sucesión continúa de la siguiente forma:

$$0 \rightarrow 2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2 \hookrightarrow {}_2^1 2 \oplus {}_2^1 2 \oplus 2 \twoheadrightarrow {}_2^1 1 \rightarrow 0$$

Notar que la resolución no es óptima, pues se puede eliminar una copia de la representación  $P(2)$ :

$$\begin{array}{ccc} k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} k^4 & & \\ \downarrow Id & & \downarrow [1 \ 0 \ 0 \ 1] \\ k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} k & & \\ & & \downarrow \\ & & k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} k \end{array}$$

y obtener otro morfismo de representaciones sobreyectivo.

Recordemos la definición de  $A_Q = \bigoplus_i P(i)$ . Decimos que una representación  $M$  es **libre** si  $M \cong A_Q^n$ . Notemos que una representación libre es proyectiva por ser suma de proyectivos. Como corolario de la resolución estándar tenemos que toda representación proyectiva es sumando directo de una representación libre:

**Teorema 2.17.** *Una representación  $P$  es proyectiva si y solamente si existe una representación libre  $F$  tal que  $P$  es un sumando directo de  $F$*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) : Sea  $P$  proyectiva. Entonces existe la resolución estándar:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha))^{d_s(\alpha)} \xrightarrow{u} \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} \xrightarrow{v} P \rightarrow 0$$

Como  $v$  es sobreyectivo, la sucesión se parte. Entonces  $P$  es un sumando directo del término medio, digamos  $\bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} = P \oplus Q$ . Pero si  $N = \max\{d_i\}$ ,

$$A_Q^N = \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{N-d_i} = P \oplus Q \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{N-d_i}$$

luego  $P$  es un sumando directo de  $A^N$ .

$\Leftarrow$ ) Es obvio pues si  $F$  es libre en particular es proyectivo, y un sumando directo de un proyectivo es proyectivo.  $\square$

Como corolario tenemos una clasificación completa de todos los proyectivos de la categoría:

**Corolario 2.18.** *Sea  $Q$  un carcaj sin ciclos dirigidos y  $P$  una representación de  $Q$ . Entonces  $P$  es proyectiva si y solamente si existen  $i_1, \dots, i_n$  vértices posiblemente repetidos tal que*

$$P \cong P(i_1) \oplus P(i_2) \oplus \dots \oplus P(i_n)$$

*Demostración.* La vuelta es obvia. Supongamos que  $P$  es proyectiva. Entonces es un sumando directo de un libre  $A_Q^k$ . Sea  $P = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_k$  una descomposición de  $P$  en indescomponibles y sea  $N$  tal que  $P \oplus N = A_Q^k$ . Análogamente podemos descomponer a  $N$  como  $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_t$ . Pero podemos distribuir la potencia en  $A_Q^k$  y obtener una descomposición en indescomponibles (posiblemente repetidos):

$$A_Q^k = (P(1) \oplus \dots \oplus P(n))^k = P(1)^k \oplus \dots \oplus P(n)^k$$

Luego

$$(P(1) \oplus \dots \oplus P(1)) \oplus \dots \oplus (P(n) \oplus \dots \oplus P(n)) = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_k \oplus N_1 \oplus \dots \oplus N_t$$

Por la unicidad de Krull-Schmidt, cada  $Q_l \cong P(i_l)$ .  $\square$

### 2.3. La categoría de representaciones es hereditaria

**Definición 2.19.** Dada una representación  $M$ , el radical de  $M$ ,  $\text{Rad}(M)$ , es la intersección de todas las subrepresentaciones propias maximales.

**Lema 2.20.** *Sea  $M = (M_i, \varphi_\alpha)$  una representación y  $N$  la representación dada por:*

$$N_i := \sum_{\alpha: t(\alpha)=i} \text{Im}(\varphi_\alpha) \text{ y } \psi_\alpha = \varphi|_{N_i}$$

*Entonces  $\text{Rad}(M) = N$ .*

*Demostración.* Que  $N$  es una subrepresentación de  $M$  es inmediato. Sea  $H = (H_i, \mu_\alpha)$  una subrepresentación propia maximal de  $M$  cualquiera. Veamos que  $N \ll H$ . Queremos ver que  $\text{Im}(\varphi_\alpha) \subseteq H_i$  para todo  $\alpha$ . Supongamos que no. Entonces existe  $\alpha_0: j \rightarrow i$  y  $x \in M_j$  tal que  $\varphi_{\alpha_0}(x) \notin H_i$ . Sea  $\tilde{H}$  la subrepresentación dada por  $\tilde{H}_k = H_k$  para todo  $k$  distinto de  $i$  y por  $\tilde{H}_i = H_i \oplus \langle \varphi_{\alpha_0}(x) \rangle$  en el vértice  $i$ . Además, los morfismos están dados por: si  $\alpha: j \rightarrow k$  y  $j, k \neq i$  el morfismo es simplemente  $\varphi_\alpha|_{H_j} (= \mu_\alpha)$ , si  $\alpha: i \rightarrow j$  el morfismo es  $\varphi_\alpha|_{\tilde{H}_i}$  y si  $\alpha: j \rightarrow i$  la transformación lineal es  $[\varphi_\alpha|_{H_j}, 0]$ . Podemos verificar que  $H \ll \tilde{H} \ll M$ . Como  $H$  es maximal,

$\tilde{H} = M$ . Pero entonces  $x \in H_j$  y como  $H$  es una representación  $\varphi_\alpha(x) \in H_i$ , absurdo. Entonces  $N_i \subseteq H_i$  para todo  $i$ .

Finalmente, veamos que  $\text{Rad}(M)$  está contenida en  $N$ . Si suponemos que no, existen  $i_0$  y  $x \in (\text{Rad } M)_{i_0} - N_{i_0}$ . Completamos  $\{x\}$  a una base de  $M_{i_0}$ ,  $\{x, v_1, \dots, v_n\}$ . Sea  $H$  la representación dada por  $H_k = M_k$  para todo  $k$  distinto de  $i_0$  y  $H_{i_0} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ , con los morfismos que sean las restricciones.  $H$  es una representación porque  $x$  no pertenece a la imagen de ningún  $\varphi_\alpha$  que llega a  $M_{i_0}$  y claramente es maximal y una subrepresentación de  $M$ . Pero  $x \notin H$ , contradicción. Luego  $N = \text{Rad}(M)$ .  $\square$

Se deduce del lema que si  $P(i)$  es un proyectivo indescomponible,

$$(\text{Rad } P(i))_j = \begin{cases} P(i)_j, & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

**Lema 2.21.** *Toda subrepresentación propia de  $P(i)$  es una subrepresentación de  $\text{Rad}(P(i))$*

*Demostración.* Sea  $S = (S_j, \varphi_\alpha|_{S_j})$  una subrepresentación propia de  $P(i)$ , donde los  $\varphi$  son los morfismos de  $P(i)$ . Afirmamos que  $S_i = 0$ . En efecto, como  $\dim_k P(i)_i = 1$ , si fuera no nulo,  $S_i = P(i)_i$ . Entonces  $e_i \in S_i$ . Pero entonces  $S = P(i)$ : en efecto, sea  $x$  cualquier elemento de  $P(i)_j$ . Entonces  $x$  se escribe como una combinación lineal de caminos de  $i$  a  $j$ . Pero si  $c$  es un tal camino, se puede escribir como

$$c = \varphi_c(e_i) = \varphi_c|_{S_i}(e_i)$$

Lo que implica en particular que  $c \in S_j$ . Por lo tanto  $x$  pertenece a  $S_j$  y entonces  $S$  no es una propia. Luego  $S_i = 0$  y por lo tanto  $S \subseteq \text{Rad } P(i)$ . Como además  $S \ll P(i)$  y  $\text{Rad } P(i) \ll P(i)$ , entonces  $S \ll \text{Rad } P(i)$ .  $\square$

Notemos que el radical de  $P(i)$  es una subrepresentación con vector dimensión estrictamente menor al de  $P(i)$ . Si probamos que es proyectiva, esto nos permitirá usar inducción para demostrar que toda subrepresentación de una representación proyectiva es también proyectiva. Por otra parte si esto es cierto, necesariamente  $\text{Rad } P(i)$  debe ser proyectiva.

**Lema 2.22.** *Sea  $P(i)$  una representación proyectiva indescomponible. Si  $P(i)$  es una representación simple,  $\text{Rad } P(i) = 0$ . Sino,  $\text{Rad } P(i)$  es proyectiva.*

*Demostración.* Si  $i$  es un sumidero (es decir,  $P(i)$  es simple), entonces  $P(i) = S(i)$  y por lo tanto  $\text{Rad}(P(i)) = 0$ . Supongamos que existe una flecha que sale de  $i$ . Sean  $i_1, \dots, i_m$  todos los vértices tales que existe una flecha de  $i$  en  $i_k$  y sea  $d_k$  la cantidad de flechas de  $i$  en  $i_k$ , digamos  $\alpha_1^k, \dots, \alpha_{d_k}^k$ . Afirmamos que  $\text{Rad}(P(i)) = \bigoplus_{k=1}^m P(i_k)^{d_k}$ . Primero notemos que  $P(i_k)_i = 0$ , pues  $Q$  no tiene ciclos orientados. Entonces, por la observación inmediatamente posterior al lema 2.20,  $\bigoplus_{k=1}^m P(i_k)^{d_k} \subseteq \text{Rad}(P(i))$ . Finalmente, definamos un isomorfismo para demostrar que

$\text{Rad}(P(i)) = \bigoplus_{k=1}^m P(i_k)^{d_k}$ . Sea  $c \in \text{Rad}(P(i))_j = P(i)_j$ ,  $j \neq i$ . Luego  $c$  es un camino de  $i$  en  $j$ ,  $c = (i|c_1 c_2 \dots c_l|j)$  con  $c_1$  una flecha de  $i$  hacia algún vértice  $i_k$ ,  $c_1 = \alpha_{j_0}^k$ . Definimos  $\psi$  sobre una base:

$$\psi: \text{Rad}(P(i)) \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^m P(i_k)^{d_k}$$

$$\psi_j(c) := (0, \dots, (t(c_1)|c_2 \dots c_l|j), \dots, 0) \in P(i_k)_j^{d_k}$$

y extendemos por linealidad. Luego  $\psi$  es un isomorfismo.

Demostremos primero la inyectividad. Supongo  $\psi_j(x) = 0$ . Como  $(\text{Rad } P(i))_i = 0$ , podemos suponer  $i \neq j$ . Por la observación posterior al lema 2.20,  $(\text{Rad } P(i))_j = P(i)_j$ . Luego  $x$  se escribe como

$$x = \sum \lambda_c c$$

donde los caminos  $c$  van de  $i$  en  $j$ . Luego tenemos que

$$\psi_j(x) = \sum \lambda_c \psi_j(c) = 0$$

Alcanza con mostrar que todos los caminos  $\psi_j(c)$  son distintos. En efecto, al ser linealmente independientes en  $\bigoplus_{k=1}^m P(i_k)^{d_k}$ , eso implicaría que los coeficientes  $\lambda_c = 0$ . Por lo tanto, alcanza con mostrar que si  $c$  y  $d$  son dos caminos distintos de la base canónica de  $P(i)_j$ ,  $\psi_j(c)$  y  $\psi_j(d)$  también son distintos. Supongo que son iguales, y escribo  $c = (i|c_1 c_2 \dots c_l|j)$  y  $d = (i|d_1 d_2 \dots d_l|j)$ . Si  $t(c_1) \neq t(d_1)$  listo,  $\psi_j(c)$  y  $\psi_j(d)$  son distintos pues el primero es un camino que sale de  $t(c_1)$  y el segundo de  $t(d_1)$ . Si en cambio  $t(c_1) = t(d_1)$ , entonces  $c_1$  y  $d_1$  son dos flechas paralelas de  $i$  en un  $i_{k_0}$ . Entonces, siguiendo con la notación de antes,  $c_1 = \alpha_{j_0}^{k_0}$  para un  $j_0 \leq d_{k_0}$  y  $d_1 = \alpha_{j_1}^{k_0}$  para un  $j_1 \leq d_{k_0}$ . Pero notar que  $\psi_j(c)$  es no nulo solamente en la coordenada  $j_0$  del producto  $P(i_{k_0})_j^{d_{k_0}}$ , y  $\psi_j(d)$  es no nulo solamente en la coordenada  $j_1$ . Como son iguales,  $j_0 = j_1$ . Pero en ese caso  $c_1 = d_1$  y por lo tanto  $c = d$ , contradicción.

En conclusión los caminos  $\psi_j(c)$  son linealmente independientes y por lo tanto

$$\sum \lambda_c \psi_j(c) = 0$$

implica que  $\lambda_c = 0$  para todo  $c$ , y entonces  $x = 0$ . La sobreyectividad es más clara: si  $(0, \dots, d, \dots, 0) \in P(i_k)_j^{d_k}$ , donde  $d$  pertenece a la coordenada  $j_0$ , entonces  $\alpha_{j_0}^k d \in P(i_k)_j$  y  $\psi_j(\alpha_{j_0}^k d) = (0, \dots, d, \dots, 0)$ . Por lo tanto, es sobreyectiva.  $\square$

**Teorema 2.23.** *Sea  $Q$  un carcaj sin ciclos dirigidos,  $P$  una representación proyectiva y  $N$  una subrepresentación propia de  $P$ . Entonces  $N$  es proyectiva.*

*Demostración.* Por inducción en la norma del vector dimensión. Sea  $N$  una subrepresentación de un proyectivo  $P$  y supongamos que el teorema vale para todo proyectivo  $Q$  con  $\underline{\dim} Q < \underline{\dim} P$ . Supongamos que  $P = P(i) \oplus Q$  y sea  $\rho: P \rightarrow P(i)$  la proyección. Tenemos dos posibilidades:

1)  $\rho(N) = P(i)$ : Luego tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Q \cap N \longrightarrow N \xrightarrow{\rho} P(i) \longrightarrow 0$$

y como  $P(i)$  es proyectivo, la sucesión se parte:  $N = P(i) \oplus Q \cap N$ . Como  $Q \cap N \ll Q$  y  $\underline{\dim} Q < \underline{\dim} P$ ,  $Q \cap N$  es proyectivo. Entonces  $N$  es proyectivo.

2)  $\rho(N) \subsetneq P(i)$ : Entonces  $\rho(N) \subseteq \text{Rad} P(i)$ . Luego  $N \subseteq \text{Rad} P(i) \oplus Q$  y como  $\text{Rad} P(i)$  es proyectivo y  $\underline{\dim} (\text{Rad} P(i) \oplus Q) < \underline{\dim} P$ , por inducción  $N$  es proyectivo.  $\square$

**Ejemplo 2.24.** Sea  $Q = \begin{array}{ccccccc} 1 & \rightrightarrows & 2 & \rightarrow & 3 & \leftarrow & 4 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 5 & & \end{array}$ . Luego  $P(1) = \begin{smallmatrix} 1 \\ 22 \\ 33 \\ 55 \end{smallmatrix}$  y entonces  $\text{Rad}P(1) = \begin{smallmatrix} 22 \\ 33 \\ 55 \end{smallmatrix} = P(2) \oplus P(2)$ .

Un corolario muy útil nos restringe la clase de representaciones de las que puede salir un morfismo hacia un proyectivo. Este corolario tendrá consecuencias más adelante cuando veamos el funtor de Nakayama, ya que me permitirá calcularlo fácilmente sobre los no inyectivos.

**Corolario 2.25.** Sea  $Q$  un carcaj sin ciclos dirigidos y sea  $f: M \rightarrow P$  un morfismo no nulo con  $M$  indescomponible y  $P$  proyectivo. Entonces  $M$  es proyectivo y  $f$  es inyectiva.

*Demostración.* Tenemos la secuencia

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(f) \longrightarrow M \longrightarrow \text{Im}(f) \longrightarrow 0$$

Como  $\text{Im}(f)$  es proyectivo pues  $\text{Rep}_Q$  es hereditaria, la sucesión se parte. Entonces  $M \cong \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ . Como  $M$  es indescomponible y  $\text{Im}(f) \neq 0$  entonces  $\text{Ker}(f) = 0$ . Luego  $f$  es inyectiva y  $M \cong \text{Im}(f)$  es proyectivo.  $\square$

## 2.4. Resoluciones minimales

Recordemos el ejemplo de  $Q = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\alpha} \end{array} 2$  :

$$0 \rightarrow 2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2 \hookrightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus 2 \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \rightarrow 0$$

es una resolución exacta de  $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ . Pero podemos quitar un factor  $P(2)$  y que siga siendo exacta:

$$0 \rightarrow 2 \oplus 2 \oplus 2 \hookrightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \rightarrow 0$$

Una resolución es minimal si, intuitivamente, no tenemos factores superfluos en los proyectivos. Para definir una resolución minimal necesitamos definir una cubierta proyectiva:

**Definición 2.26.** Sea  $M$  una representación de un  $Q$ . Una **cubierta proyectiva** es una representación proyectiva  $P$  junto con un morfismo sobreyectivo  $g: P \rightarrow M$  tal que, cada vez que tenemos un morfismo sobreyectivo  $g': Q \rightarrow M$  con  $Q'$  proyectivo, existe un morfismo sobreyectivo  $h: Q \rightarrow P$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & Q \\ & \swarrow \exists h & \downarrow g' \\ P & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

**Definición 2.27.** Sea  $M$  una representación de un  $Q$ . Una **cápsula inyectiva** es una representación inyectiva  $I$  junto con un morfismo inyectivo  $g: M \hookrightarrow I$  tal que, para todo morfismo inyectivo  $g': M \hookrightarrow I'$  con  $I'$  una representación inyectiva, existe un morfismo inyectivo  $h: I \rightarrow I'$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & I' \\ & \nearrow g' & \uparrow \exists h \\ M & \hookrightarrow g & I \end{array}$$

La existencia de cubrimientos proyectivo no es muy difícil de establecer pero una vez que tengamos la equivalencia de  $\text{Rep}_Q$  con la categoría de  $\text{mod}_k Q$  será inmediato por la existencia de cubrimientos proyectivos para módulos sobre una  $k$ -álgebra de dimensión finita. La existencia y unicidad también valen si el carcaj tiene relaciones. Para ver la existencia de cubrimientos proyectivos en el caso general de una álgebra de dimensión finita ver por ejemplo [ASS06], teorema 5,8.

**Teorema 2.28.** *Sea  $Q$  un carcaj sin ciclos dirigidos y  $M$  una representación. Entonces existe  $P \xrightarrow{g} M$  una cubierta proyectiva. Además es único: si  $P' \xrightarrow{g'} M$  es otro proyectivo que cumple la definición, existe un isomorfismo  $h: P \rightarrow P'$  tal que  $g' \circ h = g$ .*

Remarcamos que el teorema análogo para representaciones inyectivas también es cierto.

Un lema que utilizaremos más adelante es que la suma de cubiertas proyectivas es una cubierta proyectiva:

**Lema 2.29.** *Sea  $p: P \rightarrow X$  y  $q: Q \rightarrow Y$  cubrimientos proyectivos. Entonces  $p \oplus q: P \oplus Q \rightarrow X \oplus Y$  es una cubierta proyectiva.*

*Demostración.* La demostración sale con una definición equivalente de cubierta proyectiva:  $p: P \rightarrow X$  es una cubierta proyectiva si  $P$  es proyectivo,  $p$  es sobreyectiva y  $\text{Ker}(p)$  es superfluo en  $P$ , es decir, si  $P = \text{Ker}(p) + N$  implica que  $N = P$ . Supongamos que  $V_1 := \text{Ker}(p)$  y  $V_2 := \text{Ker}(q)$  son superfluos en  $P$  y  $Q$  resp. Demostremos que  $V_1 \oplus V_2 \subseteq P \oplus Q$  es superfluo. Supongamos que  $V_1 \oplus V_2 + N = P \oplus Q = V_1 \oplus 0 + \tilde{N}$  con  $\tilde{N} = 0 \oplus V_2 + N$ .

Demostremos primero que  $P = P \cap \tilde{N}$ : si  $p \in P$ ,  $(p, 0) = (v_1, 0) + \tilde{n} = (v_1 + \tilde{n}_1, \tilde{n}_2)$ . Entonces  $\tilde{n}_2 = 0$  luego  $\tilde{n} = (\tilde{n}_1, 0) = \tilde{n}_1 \in \tilde{N} \cap P$ . Por lo tanto  $P = V_1 + \tilde{N} \cap P$  y como  $V_1$  es superfluo  $P = \tilde{N} \cap P$ .

Demostremos ahora que  $Q = Q \cap \tilde{N}$ : Sea  $q \in Q$ ,  $q = (0, q) = (p_0, 0) + \tilde{n} = (p_0 + \tilde{n}_1, 0) + (0, \tilde{n}_2) = (0, \tilde{n}_2)$ . Si  $\tilde{n} = (\tilde{n}_1, \tilde{n}_2)$ ,  $\tilde{n}_2 = \tilde{n} - (\tilde{n}_1, 0) \in \tilde{N} \cap Q$  pues  $\tilde{n}_1 \in P = \tilde{N} \cap P$ . Entonces  $(0, \tilde{n}_2) \in \tilde{N}$ . Luego  $Q = \tilde{N} \cap Q$ . Luego  $P \oplus Q = \tilde{N} = 0 \oplus V_2 + N$ .

Para concluir demostremos que  $P \oplus Q = N$ : Sea  $q \in Q$ . Luego  $q = (0, q) = (n_1, v_2 + n_2)$ . Entonces  $n_1 = 0$  y entonces  $n = (0, n_2) = n_2 \in Q \cap N$ . Luego  $Q = V_2 + Q \cap N$  y como  $V_2$  es superfluo,  $Q = Q \cap N$ . Entonces si  $p \in P$ ,  $p = (n_1, 0) = n - (0, n_2) \in N$ . Entonces  $P = P \cap N$  y en conclusión  $P \oplus Q = N$ .  $\square$

Ya estamos en condiciones de definir una resolución minimal:

**Definición 2.30.** Una resolución proyectiva

$$\cdots P_2 \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0$$

es **minimal** si  $f_0: P_0 \rightarrow M$  es una cubierta proyectiva y  $f_i: P_i \rightarrow \text{Im}(f_i) \subseteq P_{i-1}$  es un cubrimiento proyectivo para todo  $i \geq 1$ .

**Definición 2.31.** Una resolución inyectiva

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \xrightarrow{f_2} I_2 \rightarrow \cdots$$

es **minimal** si  $f_0: M \rightarrow I_0$  es una cápsula inyectiva y  $\tilde{f}_i: P_{i-1}/\text{Ker}(f_i) \rightarrow I_i$  es una cápsula inyectiva para todo  $i \geq 1$ .

Si se admite la existencia de cubrimientos proyectivos se puede construir una resolución proyectiva inductivamente: Si  $P_0 \xrightarrow{f_0} M$  es una cubierta proyectiva, tomemos  $P_1 \xrightarrow{f_1} \text{Ker}(f_0)$  una cubierta proyectiva del núcleo de  $f_0$ . Definimos  $f_1 = i \circ f_1$  y continuamos inductivamente. Finalmente, la unicidad salvo isomorfismo de la cubierta proyectiva implica la unicidad (salvo isomorfismo de resoluciones) de las resoluciones proyectivas minimales.

Vimos que  $\text{Rep}_Q$  es hereditaria, y esto implica que dada una representación  $M$ , existen proyectivos  $P_0, P_1$ , etcetera, y una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

Por otra parte, existe una resolución proyectiva minimal

$$\cdots \rightarrow U_2 \rightarrow U_1 \rightarrow U_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

En principio, no sabemos si esa resolución proyectiva minimal se termina en  $U_1$ , es decir, si  $U_i = 0$  para todo  $i \geq 2$ , solamente sabemos que *una* resolución proyectiva (no necesariamente minimal) se termina después de dos términos. Pero si es minimal, debería efectivamente ser más chica y por lo tanto terminarse después de dos términos. Veamos que efectivamente este es el caso. Para eso usaremos un lema que nos será más útil más tarde al hacer álgebra homológica con el funtor translación:

**Lema 2.32.** Sean

$$E_1 \xrightarrow{a} E_0 \xrightarrow{b} M \rightarrow 0$$

una presentación proyectiva de  $M$  (i.e., simplemente una resolución proyectiva truncada) y

$$U_1 \xrightarrow{u} U_0 \xrightarrow{w} M \rightarrow 0$$

una presentación proyectiva minimal de  $M$ . Entonces existen isomorfismos y representaciones  $V_0$  y  $V_1$  (posiblemente nulas) y un morfismo  $v: V_1 \rightarrow V_0$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 & \xrightarrow{a} & E_0 & \xrightarrow{b} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \parallel & & \\ U_1 \oplus V_1 & \xrightarrow{u \oplus v} & U_0 \oplus V_0 & \xrightarrow{(w;0)} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

*Demostración.* Como  $U_0 \xrightarrow{w} M$  es una cubierta proyectiva de  $M$  y  $E_0 \xrightarrow{b} M$  es sobre, existe  $h: E_0 \rightarrow U_0$  sobreyectivo tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & E_0 & \\ \exists h \swarrow & \downarrow b & \\ U_0 & \xrightarrow{w} & M \end{array}$$

conmuta. Como  $h$  es sobre y  $U_0$  es proyectivo, existe una retracción  $r: U_0 \rightarrow E_0$  tal que  $h \circ r = \text{Id}_{U_0}$ . Luego  $E_0 = \text{Im}(r) \oplus \text{Ker}(h)$ . Para el primer isomorfismo (desde la derecha) del teorema definimos  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \psi: \text{Im}(r) \oplus \text{Ker}(h) &\longrightarrow U_0 \oplus \text{Ker}(h) \\ \psi &:= h|_{\text{Im}(r)} \oplus \text{Id} \end{aligned}$$

y tomamos  $V_0 := \text{Ker}(h)$ . Claramente es un isomorfismo pues cada uno de sus componentes es un isomorfismo. Además es claro que el diagrama conmuta:



$$\begin{array}{ccc}
\text{Im}(r) \oplus \text{Ker}(h) & & \\
h|_{\oplus Id} \downarrow \cong & \searrow b & \\
U_0 \oplus V_0 & \xrightarrow{(w;0)} & M
\end{array}$$

Luego tenemos completado el primer cuadrado del diagrama. Notemos que  $V_0$  es proyectivo por ser sumando directo de un proyectivo. En la presentación original podemos reemplazar  $a$  por  $a' = \psi \circ a$ ,  $E_0$  por  $U_0 \oplus V_0$  y  $b$  por  $(w, 0)$  y sigue siendo una presentación proyectiva:

$$E_1 \xrightarrow{a'} U_0 \oplus V_0 \xrightarrow{(w,0)} M \longrightarrow 0$$

Definamos el segundo isomorfismo del diagrama. Para eso, primero necesitamos notar que  $V_0 \xrightarrow{Id} V_0$  es una cubierta proyectiva trivialmente, y  $U_1 \xrightarrow{u} \text{Im}(u)$  también, y entonces  $U_1 \oplus V_0 \xrightarrow{u \oplus Id} \text{Im}(u) \oplus V_0$  es una cubierta proyectiva por el lema 2.29. Además,  $\text{Im}(a') = \text{Ker}((w, 0)) = \text{Ker}(w) \oplus V_0 = \text{Im}(u) \oplus V_0$ . Luego, por definición de cubierta proyectiva existe un  $h': E_1 \rightarrow U_1 \oplus V_0$  sobreyectivo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
E_1 & & \\
\exists h' \downarrow & \searrow a' & \\
U_1 \oplus V_0 & \xrightarrow{u \oplus Id} & \text{Im}(u) \oplus V_0
\end{array}$$

Notemos que  $\text{Ker}(h') \subseteq \text{Ker}(a')$ . Como  $U_1 \oplus V_0$  es proyectivo, existe una retracción  $r': U_1 \oplus V_0 \rightarrow E_1$  tal que  $h' \circ r' = Id_{U_1 \oplus V_0}$ . Entonces  $E_1$  se escribe como  $E_1 = \text{Im}(r') \oplus \text{Ker}(h')$ . Por lo tanto restringiendo  $h'$ , obtenemos un isomorfismo

$$h'|_{\text{Im}(r')} \oplus Id: \text{Im}(r') \oplus \text{Ker}(h') \xrightarrow{\cong} (U_1 \oplus V_0) \oplus \text{Ker}(h')$$

Finalmente, definamos

$$\begin{array}{ccc}
U_1 \oplus V_0 \oplus \text{Ker}(h') & \xrightarrow{u \oplus P_{V_0}} & U_0 \oplus V_0 \\
(a, b, c) & \mapsto & (u(a), b)
\end{array}$$

Claramente  $v := P_{V_0}$  es sobreyectiva. Veamos para concluir que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
E_1 = \text{Im}(r') \oplus \text{Ker}(h') & \xrightarrow{a'} & U_0 \oplus V_0 \\
h'|_{\oplus Id} \downarrow \cong & & \parallel \\
(U_1 \oplus V_0) \oplus \text{Ker}(h') & \xrightarrow{u \oplus P_{V_0}} & U_0 \oplus V_0 \\
\\
x \oplus y & \xrightarrow{a'} & a'(x)_{U_0} \oplus a'(x)_{V_0} \\
h'|_{\oplus Id} \downarrow \cong & & \parallel \\
(h'(x)_{U_1} \oplus h'(x)_{V_0}) \oplus y & \xrightarrow{u \oplus P_{V_0}} & u(h'(x)_{U_1}) \oplus h'(x)_{V_0}
\end{array}$$

Y el cuadrado conmuta pues

$$u(h'(x)_{U_1}) \oplus h'(x)_{V_0} = (u \oplus Id)(h'(x)) = a'(x) = a'(x)_{U_0} \oplus a'(x)_{V_0}$$

Tomando  $V_1 = (V_0 \oplus \text{Ker}(h'))$  y  $v = P_{V_0}$  obtenemos el teorema.  $\square$

**Corolario 2.33.** Si  $Q$  es un carcaj sin ciclos dirigidos y  $M \in \text{Rep}_Q$ , existe una resolución proyectiva minimal

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

*Demostración.* Sea  $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  una presentación proyectiva de  $M$  y  $U_1 \xrightarrow{u} U_0 \xrightarrow{w} M \rightarrow 0$  una presentación proyectiva minimal de  $M$ . Por el lema existe un rectángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \parallel & & \\ & & U_1 \oplus V_1 & \xrightarrow{u \oplus v} & U_0 \oplus V_0 & \xrightarrow{(w;0)} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Entonces  $u$  es inyectiva. □

## Parte 3

# Quivers con relaciones y el álgebra de caminos

Buena parte de la teoría que vimos podría repetirse si los morfismos de una representación cumplieran relaciones entre ellos, por ejemplo, que la composición de dos flechas sea cero. Y además esto permite una mayor riqueza en sus representaciones. Por ejemplo, si consideramos  $\mathbb{L} = 1 \rightrightarrows^{\alpha} 2$ , los caminos de este carcaj tienen todos la forma  $\langle \alpha^n : n \in \mathbb{N}_0 \rangle$  y si notamos a la concatenación de dos caminos con un punto, " $\alpha^n \cdot \alpha^m = \alpha^{n+m}$ ". Entonces el conjunto de caminos es un álgebra  $k\mathbb{L}$  isomorfa a los polinomios,  $k\mathbb{L} \cong k[x]$ . ¿Cómo modelamos entonces  $k[x]/\langle x^2 \rangle$ ? Habría que agregar la relación  $\alpha^2 = 0$ . Otra razón para agregar relaciones es que queremos considerar carcajes que puedan tener ciclos dirigidos. Recordemos que su problema era que sus "representaciones" proyectivas e inyectivas podían no ser representaciones, porque podían no tenían dimensión finita. Imponiendo que  $\alpha^2 = 0$  en  $\mathbb{L}$ , vale que  $P(1) = (\langle \{e, \alpha\} \rangle, \varphi_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$  es una representación proyectiva e indescomponible. En este capítulo se da algunas demostraciones propias de hechos conocidos como la proposición 3.54, y se hacen algunos cálculos explícitos de dimensión global de un álgebra en el ejemplo 3.61.

**Definición 3.1.** Dado un carcaj  $Q$ , dos caminos  $c$  y  $d$  son **paralelos** si tienen el mismo vértice de llegada y el mismo vértice de salida. Es decir, si  $s(c) = s(d)$  y  $t(c) = t(d)$ . Una **relación** es una combinación lineal  $\sum \lambda_i c_i$  donde los  $c_i$  son caminos en  $Q$  paralelos y de longitud  $\geq 2$ . Un **carcaj con relaciones** es un carcaj  $Q$  con un conjunto  $R$  de relaciones. Lo denotamos  $(Q, R)$ . Finalmente, una representación  $M$  de un carcaj con relaciones es una representación de  $Q$ ,  $(M_i, \varphi_\alpha)$  donde  $\varphi_\rho = 0$  para toda relación  $\rho \in R$ , donde por definición  $\varphi_\rho := \sum \lambda_c \varphi_c$  si  $\rho = \sum \lambda_c c$ .

**Ejemplo 3.2.** Sea  $Q = \begin{array}{ccc} & 2 & \\ \alpha \nearrow & & \searrow \beta \\ 1 & \xleftarrow{\gamma} & 3 \end{array}$  con  $R = \langle \beta\gamma, \gamma\alpha \rangle$ . Luego, por ejemplo

$$\begin{array}{ccc} & k^2 & \\ Id \nearrow & & \searrow 0 \\ k^2 & \xleftarrow{Id} & k^2 \end{array}$$

no es una representación pues  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\gamma \neq 0$  pero

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \nearrow & k^2 & \searrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ k^2 & \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} & k^2 \end{array}$$

sí lo es.

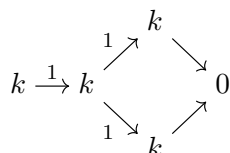
Copiando las definiciones de la primera sección podemos definir morfismo de representaciones, suma directa, subrepresentación, cocientes, pull backs, push outs, resoluciones proyectivas y todos los conceptos anteriores.

La mayoría de los teoremas de la primera y segunda sección son ciertos para carcajes con relaciones. La mayor diferencia es que la categoría  $\text{Rep}_{(Q,I)}$  no necesariamente es hereditaria. Pero sí es cierto que los  $P(i)$  van a ser una colección completa de todos los proyectivos indescomponibles. Por ejemplo el teorema de Krull-Schmidt sigue valiendo, la categoría  $\text{Rep}_{(Q,I)}$  es abeliana, la existencia de resoluciones proyectivas e inyectivas minimales, etcétera.

Naturalmente, los proyectivos e inyectivos indescomponibles de  $(Q, R)$  van a ser los de  $Q$

pero teniendo en cuenta las relaciones. Por ejemplo si  $Q = 5 \xrightarrow{\eta} 4 \begin{matrix} \nearrow^{\beta} 2 \\ \searrow^{\sigma} 3 \end{matrix} \begin{matrix} \searrow^{\alpha} 1 \\ \nearrow^{\gamma} 1 \end{matrix}$  y  $R = \langle \beta\alpha, \sigma\gamma \rangle$ ,

entonces  $P(5)$  debería ser



pues no hay ningún camino no nulo de 5 a 1. Pero para formalizar esta definición (y por muchas razones más) es útil presentar el álgebra de caminos.

### 3.1. El álgebra de caminos

El álgebra de caminos es la conexión de la teoría de carcaj con la teoría de módulos y permite a ver a todas las representaciones como módulos sobre esta  $k$ -álgebra. A lo largo de la sección supondremos  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado y los módulos sobre un álgebra serán salvo mención explícita, a derecha.

**Definición 3.3.** Dado un carcaj  $Q$  el **álgebra de caminos**  $kQ$  es el  $k$  espacio vectorial con base todos los caminos de  $Q$  y multiplicación dada por la concatenación: si  $c$  y  $d$  son caminos,  $c \cdot d = cd$  si  $t(c) = s(d)$  y cero sino. En general usaremos simplemente la letra  $A$  para denotar al álgebra de caminos.

**Ejemplo 3.4.** ■ Ya vimos que si  $\mathbb{L}$  es el carcaj con un vértice y un lazo,  $k\mathbb{L} \cong K[X]$ .

- Sea  $Q = \begin{matrix} 2 \xrightarrow{\alpha} 1 \xleftarrow{\gamma} 4 \\ \beta \uparrow \\ 3 \end{matrix}$ . Entonces  $kQ$  es una  $K$  álgebra de dimensión 7. No es difícil probar que  $kQ$  es isomorfa a la siguiente álgebra:

$$kQ \cong \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ k & k & 0 & 0 \\ k & 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

con las siguientes identificaciones:

$$\alpha \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \beta \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e_i \longleftrightarrow E_{i,i}$$

- Sea  $Q = \alpha \curvearrowright 1 \xleftarrow{\beta} 2 \curvearrowleft \gamma$ . Notemos que si tan sólo tuvieramos  $Q' = 1 \xleftarrow{\beta} 2$  entonces es fácil demostrar que  $kQ' \cong \begin{bmatrix} K & 0 \\ K & K \end{bmatrix}$ . Como tiene dos lazos distintos, entonces

$$kQ \cong \begin{bmatrix} K[x] & 0 \\ K[x, y] & K[y] \end{bmatrix}, \quad \alpha \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \beta \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

Notemos que  $kQ$  es una álgebra unitaria, pues tiene a  $1_A = \sum_{i \in Q_0} e_i$  como uno. Si  $Q$  no tiene ciclos orientados, la cantidad de caminos posibles es finita. Entonces  $kQ$  es un álgebra de dimensión finita.

Una observación es que  $e_i kQ \subseteq kQ$  es un módulo a derecha sobre  $kQ$  con el producto  $(e_i x) \cdot c = e_i x c$  y que como conjunto  $e_i kQ = \{e_i x : x \in kQ\} = \langle \{c : s(c) = i\} \rangle \cong P(i)$ . Dado que los  $P(i)$  son las únicas representaciones proyectivas indescomponibles de  $Q$  (salvo isomorfismo), eso nos da la idea de que los  $e_i kQ$  van a ser los únicos proyectivos indescomponibles de la categoría (salvo isomorfismo).

El equivalente algebraico de un carcaj con relaciones  $(Q, I)$  es un cociente  $kQ/I$ , con  $I$  un ideal *admisibile*. Como queremos que nuestra álgebra tenga dimensión finita, queremos que todos los ciclos dirigidos sean cero si dan una suficiente cantidad de vueltas. Así que tenemos que dividir por un ideal que no incluya flechas (para no eliminar flechas o quedarnos con un carcaj desconexo) pero que sea lo suficientemente grande para que todos los caminos a partir de una longitud estén.

**Definición 3.5.** El ideal de flechas  $R_Q$  es el ideal bilátero generado por las flechas de  $Q$ . Así  $R_Q$  tiene todos los caminos de  $Q$  excepto los caminos triviales  $e_i$ . Además denotamos como  $kQ_s$  al espacio vectorial con base los caminos de longitud  $s$ . Entonces como espacio vectorial se puede escribir  $R_Q = kQ_1 \oplus \cdots \oplus kQ_n \oplus \cdots$ .

Sea  $I$  un ideal bilatéro de  $kQ$ . Decimos que  $I$  es un **ideal admisibile** si existe  $m \geq 2$  tal que

$$\bigoplus_{i \geq m} kQ_i \subseteq I \subseteq \bigoplus_{i \geq 2} kQ_i$$

La definición implica que no quito flechas del carcaj al dividir, pues  $I \cap (kQ_0 \oplus kQ_1) = 0$  y que además es el cociente es de dimensión finita sobre  $k$  pues  $kQ_l \subseteq I$  para todo  $l$  a partir de un número natural.

**Ejemplo 3.6.** Sea  $Q = \begin{array}{ccc} & 2 & \\ \alpha \nearrow & & \searrow \beta \\ 1 & \xleftarrow{\gamma} & 3 \end{array}$ . Entonces el ideal bilátero generado por  $\beta\gamma, \langle \beta\gamma \rangle$ , es un

ideal que contiene a todos los caminos de longitud mayor o igual a 3, y el único camino de longitud 2 que contiene es  $\beta\gamma$ .

**Observacion 3.7.** Sea  $I$  un ideal admisibile generado por  $x_1, \dots, x_m$ . Entonces  $e_i x_k e_j \in I$ ,  $e_i x_k e_j = \sum \lambda_j c_j$  donde todos los  $c$  empiezan en  $i$  y terminan en  $j$ . Es decir,  $e_i x_k e_j$  es una relación de  $Q$ , y como  $x_k = \sum_{i, j \in Q_0} e_i x_k e_j$  todo generador se escribe como una suma finita de relaciones. Luego  $I$  está generado por finitas relaciones.

**Definición 3.8.** Un álgebra de caminos acotada (*bound quiver algebra*) es un cociente  $kQ/I$  donde  $I$  es un ideal admisibile.

**Observacion 3.9.** Como  $I$  es un ideal admisibile,  $kQ/I$  es de dimensión finita. Además es unitaria.

**Ejemplo 3.10.** Ideales distintos pueden dar lugar a álgebras de cocientes isomorfas: Si  $Q = 1 \xleftarrow{\frac{\alpha}{\beta}} 2 \xleftarrow{\gamma} 3$  entonces para todo  $\lambda \in k$  se define el ideal  $I_\lambda = \langle \gamma\alpha + \lambda\gamma\beta \rangle$  entonces

$$kQ/I_\lambda \cong kQ/I_{\lambda'}, \text{ para todo } \lambda, \lambda' \neq 0$$

No es difícil probar que para todo  $\lambda, \lambda' \neq 0$  el morfismo que manda

$$e_i \rightarrow e_i, \quad \gamma \rightarrow \gamma, \quad \beta \rightarrow \frac{\lambda'}{\lambda}\beta$$

induce un isomorfismo de álgebras en el cociente.

**Observacion 3.11.** A lo largo de este trabajo  $A$  significará una  $k$ -álgebra asociativa con unidad y de dimensión finita, dado que el ejemplo que estudiamos ( $kQ/I$  un álgebra de caminos acotada) lo es.

Recordemos unos lemas esenciales sobre la estructura de las  $k$  álgebras de dimensión finita:

**Lema 3.12.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra de dimensión finita y sea  $e$  un elemento idempotente de  $A$  no nulo. Entonces  $e$  y  $1 - e$  son ortogonales idempotentes y  $A$  como  $A$  módulo a derecha se escribe como

$$A = eA \oplus (1 - e)A$$

En particular, si  $e$  es idempotente,  $eA$  es proyectivo, pues es un sumando directo de  $A$ .

**Lema 3.13.** Si  $A = M_1 \oplus M_2$  es una suma directa como  $A$  módulos a derecha, entonces:

1. existen idempotentes ortogonales  $e_1 \in M_1$  y  $e_2 \in M_2$  tal que  $1 = e_1 + e_2$ .
2.  $M_i$  es indescomponible si y sólo si  $e_i$  es primitivo.

**Teorema 3.14.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra de dimensión finita y  $a_1, a_2, \dots, a_n$  elementos primitivos idempotentes y ortogonales tal que  $1 = a_1 + \dots + a_n$ . Entonces

$$A \cong a_1A \oplus \dots \oplus a_nA$$

donde la descomposición de arriba es como  $A$  módulos a derecha y cada  $e_iA$  es un  $A$  módulo a derecha indescomponible.

Notemos que los caminos triviales son elementos idempotentes y ortogonales del álgebra  $e_i e_j = e_j e_i = 0$  si  $i \neq j$  y  $(e_i)^2 = e_i$ . Si los caminos triviales son *primitivos* (es decir si  $e_i$  no se puede escribir como  $a + b$  con  $a$  y  $b$  elementos ortogonales e idempotentes no nulos) entonces podemos usar ese teorema.

**Lema 3.15.** Sea  $Q$  un carcaj e  $I$  un ideal admisible. Entonces  $\bar{e}_i$  es un elemento primitivo de  $kQ/I$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\bar{e}_i = \bar{a} + \bar{b}$ , y escribo a los elementos  $\bar{a}$  y  $\bar{b}$  como combinación lineal de elementos no nulos de  $kQ/I$ :

$$\bar{a} = \sum_c \lambda_c \bar{c} \quad \bar{b} = \sum_c \mu_c \bar{c}$$

Donde ambas sumas son finitas pues  $kQ/I$  es de dimensión finita.

Como  $\bar{a}$  es idempotente

$$\bar{a}^2 = \bar{a} = \overline{\left(\sum_c \lambda_c c\right)\left(\sum_c \lambda_c c\right)} = \overline{\sum_{c,c'} \lambda_c \lambda_{c'} c c'} = \overline{\sum_c \left(\sum_{c'.c''=c} \lambda_{c'} \lambda_{c''}\right) c} = \bar{a}$$

Luego, existe un elemento  $y \in I$  tal que

$$a^2 - a = \sum_c \left(\sum_{c'.c''=c} \lambda_{c'} \lambda_{c''} - \lambda_c\right) c = y \in I$$

Como  $I$  es un ideal admisible, todo elemento es combinación lineal de caminos de longitud dos o más. Luego, mirando el coeficiente de cualquier camino trivial  $e_j$  en la igualdad

$$\sum_c \left(\sum_{c'.c''=c} \lambda_{c'} \lambda_{c''} - \lambda_c\right) c = y$$

tenemos que el coeficiente del lado de la derecha es cero, pues  $I \subseteq \bigoplus_{i \geq 2} kQ_i$ . Por otra parte, el coeficiente de  $e_j$  en el lado de la izquierda es

$$\sum_{c'.c''=e_j} \lambda_{c'} \lambda_{c''} - \lambda_{e_j} = \lambda_{e_j}^2 - \lambda_{e_j}$$

En conclusión,  $\lambda_{e_j}^2 - \lambda_{e_j} = 0$ . Luego  $\lambda_{e_j} = 1$  o  $0$  para todo  $j$ . Lo mismo vale para  $\bar{b}$ :

$$\sum_c \left(\sum_{c'.c''=c} \mu_{c'} \mu_{c''} - \mu_c\right) c \in I \quad (3.1)$$

lo cual implica que  $\mu_{e_j} = 1$  o  $0$  para todo  $j$ . Además

$$a.b = \sum_c \left(\sum_{c'.c''=c} \lambda_{c'} \mu_{c''}\right) c = y' \in I$$

Mirando la coordenada  $e_j$ , como todo elemento de  $I$  es combinación lineal de caminos de longitud dos o más, se sigue que  $\lambda_{e_j} \mu_{e_j} = 0$ . Luego si  $\lambda_{e_j} \neq 0$ , entonces  $\mu_{e_j} = 0$ .

Por otra parte  $e_i - a - b = y'' \in I$  porque lo supuse al comienzo. Mirando la coordenada  $e_i$ , tenemos que  $1 - \lambda_{e_i} - \mu_{e_i} = 0$ , lo que es equivalente a  $1 = \lambda_{e_i} + \mu_{e_i}$ . Luego alguno de los dos coeficientes es no nulo. Supongamos que  $\lambda_{e_i} \neq 0$ . Entonces por la observación de arriba debe ser  $1$ . Entonces  $0 = \mu_{e_i}$ . Y mirando la coordenada  $e_j$  (con  $j \neq i$ ) en  $e_i - a - b = y''$  tenemos que  $0 - \lambda_{e_j} - \mu_{e_j} = 0$  lo que es equivalente a  $\lambda_{e_j} = -\mu_{e_j}$  y por la observación del párrafo anterior  $\lambda_{e_j} = \mu_{e_j} = 0$ . Luego  $\bar{b}$  tiene ceros en las coordenadas  $e_k$  para todo  $k$ .

Si ahora  $\alpha$  es una flecha cualquiera, mirando la coordenada  $\alpha$  en 3.1, y usando que  $I$  es un ideal admisible y por lo tanto es combinación lineal de caminos de longitud mayor o igual a dos,

$$\sum_{c.c'=\alpha} \mu_c \mu_{c'} - \mu_\alpha = 0$$

Y como solamente hay dos formas de descomponer  $\alpha$ , tenemos que

$$-\mu_{e_{s(\alpha)}} \mu_\alpha + \mu_\alpha \mu_{e_{t(\alpha)}} - \mu_\alpha = 0$$

Pero por lo visto en el párrafo anterior tenemos que

$$\mu_{e_{s(\alpha)}} = \mu_{e_{t(\alpha)}} = 0$$

Luego

$$-\mu_\alpha = 0$$

Entonces todas los coeficientes de los caminos de longitud 1 y 0 son nulos. Si ahora miro cualquier camino  $d \notin I$  de longitud 2, tenemos que

$$\sum_{c:c'=d} \mu_c \mu_{c'} - \mu_d = 0$$

Por lo anterior,  $\sum_{c:c'=d} \mu_c \mu_{c'} = 0$ , lo que implica que  $\mu_d = 0$ .

Usando que  $I$  es un ideal, si repetimos esto para todo camino  $c$  que no esté en  $I$ , obtenemos que  $\mu_c = 0$  para todo  $c \notin I$ . El proceso es finito pues solamente hay finitos caminos que no pertenecen a  $I$ . Luego  $b \in I$  y por lo tanto  $\bar{b} = 0$ .  $\square$

**Corolario 3.16.** *Sea  $Q$  un carcaj y  $\bar{e}_i$  los caminos triviales vistos en el cociente  $A = kQ/I$ . Luego los  $\bar{e}_i$  son elementos idempotentes primitivos y ortogonales, y  $1_A = \bar{e}_1 + \dots + \bar{e}_n$ . Entonces  $A$  admite una descomposición*

$$A \cong \bar{e}_1 A \oplus \dots \oplus \bar{e}_n A$$

como  $A$  módulo a derecha, donde los  $\bar{e}_i A$  son módulos a derecha proyectivos e indescomponibles.

*Demostración.* Por el teorema 3.14 tenemos la descomposición de arriba, y que son proyectivos es obvio pues son sumandos directos de un libre.  $\square$

Como corolario, por el teorema de Krull Schmidt para la categoría de  $A$  módulos a derecha (con  $A$  una  $k$  álgebra de dimensión finita), tenemos que los  $e_k A$  son los únicos (salvo isomorfismo) módulos proyectivos indescomponibles:

**Teorema 3.17. (Clasificación de proyectivos)** *Sea  $P$  un  $A$  módulo a derecha proyectivo e indescomponible. Entonces existe  $i \in Q_0$  tal que  $P \cong e_i A$ .*

*Demostración.* Como  $P$  es proyectivo,  $P$  es sumando directo de un libre  $A^n$ ,  $A^n = P \oplus Q$ . Por Krull Schmidt, como  $P$  es indescomponible,  $P \cong e_i A$  para algún  $i$ .  $\square$

**Observación 3.18.** Notemos que la descomposición no captura la estructura de álgebra de  $A$ , sólo la de  $A$ -módulo a derecha. En efecto, si  $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$ ,  $kQ$  es un  $K$  espacio vectorial de dimensión tres y se descompone como  $\langle \{e_1, \alpha\} \rangle_k \oplus \langle e_2 \rangle_k$  como módulo a derecha. Entonces  $\alpha \cdot e_2 = \alpha \neq 0 \in \langle \{e_1, \alpha\} \rangle_k$ .

Pero en la estructura de álgebra de  $\langle \{e_1, \alpha\} \rangle_k \oplus \langle e_2 \rangle_k$ , la multiplicación resultaría en

$$(\alpha, 0) \cdot (0, e_2) = (\alpha \cdot 0, 0 \cdot e_2) = 0$$

Antes de probar el teorema central de esta sección expliquemos el interés por estudiar álgebras de caminos. Si bien no es cierto que toda  $k$  álgebra es isomorfa a un álgebra de caminos, sí es cierto que *toda  $k$  álgebra básica de dimensión finita es isomorfa a un álgebra de caminos dividida por un ideal admisible*. Una  $k$  álgebra  $A$  de dimensión finita se dice **básica** si dado  $\{a_1, \dots, a_n\}$  un conjunto de elementos ortogonales, primitivos e idempotentes tal que  $a_1 + \dots + a_n = 1_A$ , tenemos que

$$a_i A \cong a_j A \text{ (como } A\text{-módulos) si y solamente si } i = j$$

Si  $A$  no es básica, podemos definir  $e_A = e_{s_1} + \dots + e_{s_t}$  donde  $\{e_{s_1}, \dots, e_{s_t}\}$  es un conjunto maximal de elementos primitivos, ortogonales e idempotentes tal que  $e_{s_i} \cong e_{s_j}$  si y sólo si  $i = j$ . Entonces  $e_A A e_A$  es básica y la categoría  $\text{mod}_{e_A A e_A}$  es equivalente a  $\text{mod}_A$ . Entonces, estudiar



la categoría de módulos sobre cualquier álgebra finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es equivalente a estudiar la categoría de las representaciones de un carcaj, donde los objetos son las representaciones y las flechas los morfismos de representaciones.

**Observación 3.19.** Si  $Q$  es un carcaj sin ciclos dirigidos, el álgebra  $A = kQ$  es básica. Más aún, si  $I$  es un ideal admisible y  $Q$  un carcaj finito,  $kQ/I$  es básica.

*Demostración.* Solamente probaremos el caso sencillo de un carcaj acíclico. En efecto, suponemos que  $e_i A \cong e_j A$  y sea  $\psi: e_i A \rightarrow e_j A$  el isomorfismo. Sea  $x$  en  $A$  tal que  $\psi(e_i) = e_j x$ , con  $x = \sum_c \lambda_c c$ . Luego

$$e_j x = \sum_{\substack{c: s(c)=j \\ t(c)=i}} \lambda_c c + \sum_{\substack{c: s(c)=j \\ t(c) \neq i}} \lambda_c c$$

Como  $\psi$  es  $A$ -lineal, si  $k \neq i$ ,

$$\psi(e_i e_k) = \psi(0) = 0 = \psi(e_i) e_k = \sum_{\substack{c: s(c)=j \\ t(c)=k}} \lambda_c c \quad \text{para todo } k \neq i$$

Luego  $e_j x = \sum_{\substack{c: s(c)=j \\ t(c)=i}} \lambda_c c$ . Entonces si no existe ningún camino de  $j$  en  $i$ ,  $\psi(e_i) = 0$ , absurdo.

Por lo tanto debe existir al menos un camino  $c_0: j \rightarrow i$ . Pero entonces  $\dim_k e_j A > \dim_k e_i A$  y no pueden ser isomorfos.  $\square$

## Radical y zócalo

Recordemos rápidamente la definición de radical y zócalo (*socle*):

**Definición 3.20.** Dada una  $k$  álgebra  $A$ , el *radical* de  $A$ , notado  $\text{Rad } A$ , es el conjunto que cumple alguna de las siguientes definiciones equivalentes:

1.  $\text{Rad } A$  es la intersección de todos los ideales maximales a derecha.
2.  $\text{Rad } A$  es la intersección de todos los ideales maximales a izquierda.
3.  $\text{Rad } A = \{a : 1 - ab \text{ tiene una inversa a derecha para todo } b \in A\}$ .
4.  $\text{Rad } A = \{a : 1 - ab \text{ tiene una inversa a ambos lados para todo } b \in A\}$ .
5.  $\text{Rad } A = \{a : 1 - ba \text{ tiene una inversa a derecha para todo } b \in A\}$ .
6.  $\text{Rad } A = \{a : 1 - ba \text{ tiene una inversa a ambos lados para todo } b \in A\}$ .

**Corolario 3.21.**

1.  $\text{Rad } A$  es un ideal bilátero.
2.  $\text{Rad}\left(\frac{A}{\text{Rad}(A)}\right) = 0$ .
3. Si  $I$  es un ideal nilpotente bilátero, entonces  $I \subseteq \text{Rad } A$ .

**Teorema 3.22.** Si  $A$  es una  $k$  álgebra de dimensión finita,  $\text{Rad } A$  es nilpotente.

Dado ahora un módulo, también podemos definir su radical:

**Definición 3.23.** Si  $M$  es un  $A$  módulo a derecha, definimos  $\text{Rad } M$  como la intersección de todos los submódulos maximales de  $M$ . Notemos que si  $M$  es un módulo de dimensión finita, entonces admite un submódulo maximal (en particular, propio).

Algunas propiedades del radical de un módulo en general:

**Proposición 3.24.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra de dimensión finita y  $M, N \in \text{mod}_A$ . Entonces:

1.  $\text{Rad } M = \{m \in M : f(m) = 0 \text{ para toda } f \in \text{Hom}_A(M, S) \text{ con } S \text{ simple}\}.$
2.  $\text{Rad } (M \oplus N) = \text{Rad } M \oplus \text{Rad } N.$
3. Si  $f \in \text{Hom}_A(M, N)$  entonces  $f(\text{Rad } M) \subseteq \text{Rad } N.$
4.  $\text{Rad } M = M\text{Rad } A.$
5. Si  $L + \text{Rad } M = M$  con  $L \leq M$  entonces  $L = M$ . Es decir, el radical es un submódulo superfluo.
6. Si consideramos a  $A$  como  $A$  módulo a derecha, la definición de radical como anillo y de radical como  $A$  módulo coinciden.

En particular 5 nos dice que  $\text{Rad } M$  es un submódulo superfluo de  $M$  y por lo tanto Si  $P$  es proyectivo,  $P \rightarrow P/\text{Rad } P$  es una cubierta proyectiva.

**Corolario 3.25.** En las mismas condiciones que antes:

1.  $M/\text{Rad } M$  es semisimple y un módulo a derecha sobre la  $k$  álgebra  $A/\text{Rad } A$ .
2. Si  $L$  es un submódulo tal que  $M/L$  es semisimple, entonces  $\text{Rad } M \subseteq L.$
3.  $M$  es semisimple si y sólo si  $\text{Rad } M = 0.$

**Definición 3.26.** El cociente  $M/\text{Rad } M$  se nota  $\text{top } M$  y por la observación anterior siempre es semisimple.

**Proposición 3.27.** Sea  $A = kQ$  el álgebra de caminos con  $Q$  sin ciclos dirigidos. Afirmamos que el radical de  $e_i A$  es el submódulo generado por los caminos no triviales que empiezan en  $i$  y en consecuencia

$$\text{Rad } kQ = \langle \text{caminos no triviales} \rangle_k$$

*Demostración.* Como  $A = e_1 A \oplus \cdots \oplus e_n A$ , entonces  $\text{Rad } A = \text{Rad } e_1 A \oplus \cdots \oplus \text{Rad } e_n A$ , por la parte 2 y 6 del teorema 3.24. Basta ver, entonces, que el radical de  $e_i A$  es el submódulo generado por los caminos no triviales que empiezan en  $i$ .

Sea  $c$  un camino no trivial que empieza en  $i$ . En particular, lo podemos escribir como  $c = e_i c$  y por lo tanto,  $c \in e_i A$ . Además, para ver que está en el radical, podemos comprobar que  $e_i - c.b$  tiene inversa a derecha para todo  $b \in kQ$ . El elemento  $b$  es una combinación lineal de caminos en  $Q$ . Si ninguno de tales caminos empieza en  $t(c)$ , entonces  $c.b = 0$  y listo, pues  $e_i$  es la unidad de  $e_i A$ . Podemos suponer que al menos uno empieza en  $t(c)$  y olvidarnos de los que no, pues su multiplicación por  $c$  da cero. Podemos escribir entonces a  $b$  como  $b = \sum \lambda_{d_j} d_j$  donde  $s(d_j) = t(c)$  para todo  $j$ . Como  $Q$  no tiene ciclos dirigidos,  $t(d_j) \neq i$  para todo  $j$ . Luego  $(e_i - cb).e_i = e_i^2 = e_i$ . Por lo tanto  $c \in \text{Rad}(e_i A)$ .

Finalmente para ver la otra inclusión, tomemos  $e_i c \in \text{Rad } e_i A$ . Luego,  $e_i c$  o es cero o es un camino que empieza en  $i$ , y no es trivial pues  $e_i \notin \text{Rad } e_i A$ . Eso termina de demostrar la igualdad. Por lo tanto  $\text{Rad } kQ = \langle \text{caminos no triviales} \rangle_k$ .  $\square$

**Proposición 3.28.** Sea  ${}^kQ/I$  un álgebra de caminos acotada. Similarmente a la proposición anterior,

$$\text{Rad } {}^kQ/I = \langle \bar{c} : c \text{ camino no trivial} \rangle_k$$

*Demostración.* Si ahora  $A = {}^kQ/I$  con  $I$  un ideal admisible, afirmamos que también  $\text{Rad } e_i A = \langle \bar{c} : c : i \rightarrow j, c \neq e_i \rangle$ . Sea  $c$  en el conjunto de la derecha y  $e_i - cb$ . Queremos ver que ese elemento tiene inversa a derecha en el cociente. Por el mismo argumento podemos suponer que  $b$  es una combinación lineal de caminos que empiezan en  $t(c)$ , digamos  $b = \sum_j \lambda_{d_j} d_j$ .

Si  $t(d_j) \neq i$  para todo  $j$ , entonces  $cbe_i = 0$  y entonces  $(e_i - cb).e_i = e_i$ , que es la unidad de  $\bar{e}_i A$ . Supongo que algún  $d_j$  no termina en  $i$ , y considero  $(e_i - cb)e_i$ . Distribuyendo, obtengo  $e_i - cbe_i = e_i - \bar{c}b$ , donde  $b' = be_i$  es una combinación lineal de caminos que empiezan en  $t(c)$  y terminan todos en  $i$ . Por lo tanto,  $cb'$  es una combinación lineal de ciclos dirigidos que pasan por  $i$ , entonces para algún  $m$ ,  $(cb')^m$  pertenece a  $I$ . Luego si multiplicamos  $e_i - cb'$  a la derecha por su conjugado obtenemos:  $(e_i - cb')(e_i + cb') = e_i - (cb')^2$ . Si de nuevo multiplicamos a la derecha por el conjugado tenemos:  $(e_i - (cb')^2)(e_i + (cb')^2) = e_i - (cb')^4$ . Así siguiendo multiplicando a la derecha por el conjugado, existe  $x$  tal que  $(e_i - cb')x = e_i + y$  con  $y \in I$ . Como  $e_i - cb' = (e_i - cb)e_i$ , entonces existe  $x'$  tal que  $(e_i - cb)x' = e_i$  en el cociente, es decir,  $e_i - cb$  tiene una inversa a derecha en  ${}^kQ/I$ .

Finalmente, para ver la otra inclusión, si tomamos  $e_i c$  perteneciente al radical y queremos ver que está en  $\langle \bar{c} : c : i \rightarrow j, c \neq e_i \rangle$ , el mismo argumento de antes sirve.

Por lo tanto, el radical de  $A$  es simplemente el ideal generado por las flechas de  $A$ .  $\square$

Otra construcción útil es la del zócalo:

**Definición 3.29.** Sea  $M$  un  $A$  módulo. Se define el **zócalo** o *socle* como la suma de todos sus submódulos simples:

$$\text{Soc } M = \sum_{S \text{ simple}} S$$

Como suma de simples es semisimple, el zócalo de  $M$  es un submódulo semisimple.

Antes de finalizar la sección recordemos algunos teoremas muy útiles sobre  $k$ -álgebras: la demostración de todos ellos está por ejemplo, en [SY12], lema 3.8, capítulo 1.

**Teorema 3.30.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1.  $A$  es local (i.e., tiene un único ideal maximal a derecha).
2.  $A$  tiene un único ideal maximal a izquierda.
3. El conjunto de los elementos no inversibles de  $A$  es un ideal bilátero.
4. Para todo  $a \in A$ ,  $a$  o  $1 - a$  es inversible.
5. La  $k$ -álgebra  $A/\text{rad } A$  es un cuerpo.

**Corolario 3.31.** Si  $A$  es una  $k$  álgebra local y básica de dimensión finita entonces  $A/\text{rad } A$  es isomorfo al cuerpo  $k$ .

**Teorema 3.32.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra y  $M$  un  $A$  módulo a derecha de dimensión finita. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $M$  es indescomponible.

2. Cada endomorfismo  $f \in \text{End } M$  tiene la forma  $f = \lambda \text{Id}_M + g$  con  $g \in \text{End } M$  nilpotente y  $\lambda \in k$ .
3.  $\text{End } M$  es local.

**Lema 3.33.** Sea  $A$  una  $k$  álgebra de dimensión finita,  $B = A/I$  con  $I$  un ideal nilpotente y  $\pi: A \rightarrow B$  la proyección canónica. Entonces:

1. Para todo conjunto de idempotentes ortogonales dos a dos  $f_1, \dots, f_n$  en  $B$ , existe elementos ortogonales idempotentes  $e_1, \dots, e_n$  tal que  $\pi(e_i) = f_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ .
2. Sea  $e$  idempotente en  $A$  tal que  $\pi(e) = f_1 + \dots + f_n$  con  $f_i$  ortogonales idempotentes en  $B$ . Entonces existen ortogonales idempotentes  $e_i \in A$  tal que  $e = e_1 + \dots + e_n$  y  $\pi(e_i) = f_i$ .

*Demostración.* La demostración se encuentra en [SY12], capítulo 1, lema 3.12. □

**Proposición 3.34.** Sea  $A$  una  $k$  álgebra de dimensión finita. y  $B := A/\text{Rad } A$  Entonces vale:

1. Todo ideal a derecha no nulo de  $B$  es una suma directa de ideales a derecha, simples como  $B$  módulos a derecha, y de la forma  $\bar{e}B$  con  $e$  primitivo idempotente. En particular,  $B$  como  $B$ -módulo a derecha es semisimple.
2. Sea  $M$  un  $B$  módulo a derecha no nulo. Entonces  $M \cong e_{i_1}B \oplus \dots \oplus e_{i_n}B$  con  $e_{i_j}$  primitivos idempotentes.

*Demostración.* La demostración se encuentra en [SY12], capítulo 1, lema 5.12. □

**Proposición 3.35.**  $A$  una  $k$ -álgebra de dimensión finita,  $B = A/\text{Rad } A$ ,  $e \neq 0$  idempotente y  $\bar{e}$  la imagen de  $e$  en  $B$  a través de la proyección canónica. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1.  $eA$  es indescomponible como  $A$  módulo a derecha.
2.  $\text{Rad}(eA) = e\text{Rad } A$  es el único submódulo maximal de  $eA$ .
3.  $\bar{e}B$  es simple como  $B$  módulo a derecha.

*Demostración.* La demostración se encuentra en [SY12], capítulo 1, lema 5.16. □

## 3.2. Equivalencia con $\text{mod}_{kQ/I}$

Notemos que en muchas de las demostraciones que hicimos o que dejamos de ejercicio, casi no se usa que  $M$  es una representación de un carcaj y que en muchas construcciones ya hechas sirven las mismas definiciones que se usan para módulos. Esto no es casualidad, como veremos.

**Definición 3.36.** Empezamos por definir una categoría central y un par de subcategorías importantes:

- Dada una  $k$  álgebra  $A$ ,  $\text{mod}_A$  es la categoría de módulos a derecha sobre  $A$  finitamente generados.  $A\text{mod}$  es la categoría de módulos a izquierda sobre  $A$  finitamente generados.
- $\text{Proy}_A$  es la subcategoría de módulos proyectivos e  $\text{Iny}_A$  la de inyectivos. Análogamente se definen a izquierda y se notan  ${}_A\text{Proy}$  y  ${}_A\text{Iny}$ .

- $mod_P A$  es la subcategoría de módulos sin sumandos directos proyectivos (no nulos) y  $mod_I A$  es lo mismo pero sin sumandos directos inyectivos (no nulos).

**Teorema 3.37.** *Sea  $Q$  un carcaj finito y conexo y  $A = kQ/I$  con  $I$  un ideal admisible. Entonces hay una equivalencia entre la categoría  $mod_A$  de módulos finitamente generados y la categoría  $Rep_{(Q,I)}$  de representaciones finitas acotadas del carcaj  $Q$ .*

*Demostración.* Aclaremos primero quién es el  $I$  en  $Rep_{(Q,I)}$ . Recordar que si  $I$  es un ideal de  $A$  finitamente generado, por la observación 3.7 existe una cantidad finita de relaciones  $\rho_1, \dots, \rho_n$  que también generan el ideal. Entonces el conjunto de relaciones del carcaj será  $I = \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$ .

Definiremos dos funtores covariantes  $F$  y  $G$ :

$$F: mod_A \longrightarrow Rep_{(Q,I)}$$

$$G: Rep_{(Q,I)} \longrightarrow mod_A$$

Definamos  $F$ : Sea  $M$  un  $A$  módulo a derecha finitamente generado. Definimos  $F(M) := (M_i, \{\varphi_\alpha\})$  con  $M_i := M.e_i$  (es un  $k$ -espacio vectorial pues  $M$  lo es) y si  $\alpha: i \rightarrow j$  es una flecha, definimos

$$\varphi_\alpha: M_i \longrightarrow M_j$$

$$\varphi_\alpha(m.e_i) := (m.e_i.\alpha).e_j = (m.\alpha).e_j$$

Omitimos la verificación que  $\varphi$  es lineal. Ahora queremos definir  $F$  sobre los morfismos: sea  $f: M \longrightarrow M'$  un morfismo de  $A$  módulos a derecha. Definimos  $F(f): F(M) \longrightarrow F(M')$  como

$$F(f)_i: M_i \longrightarrow M'_i$$

$$F(f)_i(m.e_i) := f(m.e_i) \stackrel{1}{=} f(m).e_i$$

donde 1 vale pues  $f$  es  $A$  lineal. Es inmediato comprobar que  $F(f)$  es un morfismo de representaciones.

Veamos que  $F(M)$  es efectivamente una representación de  $(Q, I)$ : Sea  $\rho = \sum_c \lambda_c c: i \rightarrow j \in I$  una de las relaciones que genera  $I$ , entonces

$$\varphi_\rho(m.e_i) = \sum_c \lambda_c \varphi_c(m.e_i) = \sum_c \lambda_c m.c.e_j = m.(\sum_c \lambda_c c) = m.\rho = 0$$

pues  $M$  es un  $A$  módulo y  $\rho$  es cero en  $A$ . Luego  $F(M) \in Rep_{(Q,I)}$  y podemos verificar que  $F$  es un functor.

Definamos  $G$ : Sea ahora una representación  $(M_i, \varphi_\alpha)$  de  $(Q, I)$  y queremos definir  $G((M_i, \varphi_\alpha))$ . Tomamos  $M = \bigoplus_{i \in Q_0} M_i$  como espacio vectorial. Le damos la siguiente estructura de  $kQ$  módulo a derecha: si  $m \in M$  y  $a \in kQ$ ,

$$m.a = m.(\sum_c \lambda_c c) := \sum_c \lambda_c \varphi_c(m)$$

donde  $\varphi_c(m)$  significa lo siguiente: Si  $m = m_1 \oplus \dots \oplus m_k$  con  $m_j \in M_{i_j}$  definimos  $\varphi_c(m) := \varphi_c(m_1) + \dots + \varphi_c(m_k)$  con  $\varphi_c(x) = 0$  si  $x \notin M_{s(c)}$ . Podemos verificar que la operación así definida efectivamente genera una estructura de  $kQ$  módulo. Veamos que pasa al cociente: Sea  $\rho \in I$  una relación,  $\rho = \sum_c \lambda_c c$  donde todos los  $c$  van de  $i$  en  $j$ . Entonces:

$$m.\rho = \sum_c \lambda_c \varphi_c(m) = \sum_c \lambda_c (\varphi_c(m_1) + \dots + \varphi_c(m_k)) = \sum_c \lambda_c \varphi_c(m_1) + \dots + \sum_c \lambda_c \varphi_c(m_k)$$

Notar que todos los caminos  $c$  son paralelos. En el caso en el caso en que  $m_t \notin M_{s(c)}$  definimos  $\varphi_c(m_t) = 0$ . Y si  $m_t \in M_{s(c)}$ , tenemos que  $\sum \lambda_c \varphi_c(m_t) = \varphi_\rho(m_t) = 0$  pues es una representación de  $(Q, I)$ . Luego  $m_t \cdot \rho = 0$  y entonces  $M$  es un  $A$ -módulo. Finalmente dado  $f: (M_i, \varphi_\alpha) \rightarrow (N_i, \psi_\alpha)$  definimos

$$\begin{aligned} G(f): M &\longrightarrow N \\ G(f)|_{M_i} &= f_i \end{aligned}$$

Se puede ver que es un morfismo de  $A$  módulos y que  $G$  así definida es un funtor.

Para terminar, demostremos que  $F \circ G \approx Id$  y  $G \circ F \approx Id$ . Empecemos con  $F \circ G$ . Se puede comprobar que los espacios vectoriales de  $F(G(M))$  en cada coordenada son iguales a los de  $M$  y que las transformaciones lineales son iguales también.

Para  $G(F(M))$ , verificar que el morfismo

$$\begin{aligned} \Phi: M &\longrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} M \cdot e_i \\ \Phi(m) &= \{m \cdot e_i\}_{i \in Q_0} \end{aligned}$$

es un isomorfismo de módulos natural. □

**Observacion 3.38.** Tanto  $F$  como  $G$  preservan inclusiones: si  $N$  es un submódulo de  $M$ , entonces  $F(N) \leq F(M)$  y si  $N$  es una subrepresentación de  $M$ ,  $G(N) \leq G(M)$ . Por lo tanto, mandan subrepresentaciones/submódulos maximales en submódulos/subrepresentaciones maximales. Y además son funtores aditivos.

**Ejemplo 3.39.** Sea  $(Q, R)$  un carcaj con relaciones. Definamos el **radical de una representación**  $M$  como  $\text{Rad } M := F(\text{Rad } G(M))$ . Usando la observación anterior es inmediato ver que así definido, cumple la definición usual de radical como la intersección de todas las subrepresentaciones maximales. Veamos quién es:

$$\begin{aligned} (\text{Rad } M)_k &= (\text{Rad } G(M)) \cdot e_k = (\text{Rad } \bigoplus_{i \in Q_0} M_i) \cdot e_k = (\bigoplus_{i \in Q_0} M_i \cdot \text{Rad } A) \cdot e_k = \\ &= \bigoplus_{i \in Q_0} M_i \cdot \langle c: i \rightarrow k, c \neq e_k \rangle = \sum_{\substack{c: i \rightarrow k \\ c \neq e_k}} \varphi_c(M_{s(c)}) = \sum_{\alpha: i \rightarrow k} \varphi_\alpha(M_{s(\alpha)}) \end{aligned}$$

Y por definición de  $F$  y  $G$ , las flechas de la subrepresentación son las flechas de  $M$  restringidas. Luego la definición coincide para el caso de un carcaj  $Q$ .

La equivalencia nos permite identificar libremente a las representaciones de un carcaj con los módulos sobre su álgebra de caminos. Cada extremo de la identificación tiene sus ventajas, así, a veces es más fácil fabricar ejemplos con representaciones (que son más visuales) y a la hora de hacer cuentas en general tal vez conviene trabajar con módulos y de paso usar toda la maquinaria conocida para ellos.

Inmediatamente podemos definir los proyectivos e inyectivos indescomponibles de  $\text{Rep}_{(Q,R)}$ .

**Definición 3.40.** Sea  $(Q, R)$  con  $Q$  finito. Se define el **proyectivo indescomponible**  $P(i)$  como  $P(i) = F(\bar{e}_i \cdot A)$ , es decir

$$P(i)_j := \bar{e}_i A \bar{e}_j = \langle \bar{c} / c: i \rightarrow j \rangle$$

y como flechas  $\varphi_\alpha(\bar{c}) = \bar{c}\alpha$ . Análogamente definimos el **inyectivo indescomponible**  $I(i)$  como  $I(i) = F(A\bar{e}_i)$  donde  $A\bar{e}_i$  es un  $A$  módulo a derecha con la multiplicación definida contra un camino como

$$x e_i \cdot c := (1/c \cdot x) e_i$$

y extendida por linealidad. Recordar la definición de la notación dada en 2.1: si  $d$  es un camino  $d = (d_1 d_2 \cdots d_m)$ ,

$$1/\alpha \cdot d := \begin{cases} (d_2 \cdots d_m) & \text{si } d_1 = \alpha \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Y para un  $x = \sum \lambda_d d$  cualquiera en  $A$ , definimos

$$1/\alpha \cdot x := \sum \lambda_d (1/\alpha \cdot d)$$

Extendemos la definición a un camino como  $1/c = 1/c_n \cdots 1/c_1$ . Efectivamente es un  $A$  módulo a derecha pues:

$$((xe_i) \cdot c) \cdot d = (1/c \cdot xe_i) \cdot d = 1/d \cdot 1/c \cdot xe_i = 1/cd \cdot xe_i = (xe_i) \cdot cd$$

Entonces

$$I(i)_j = \langle \{\bar{c}/c: j \rightarrow i\} \rangle$$

y definimos como morfismos:  $\psi_\alpha(\bar{c}) := (c_2 \cdots c_m)$  si  $c_1 = \alpha$  y 0 sino. Es decir, la misma definición que para un carcaj.

Las representaciones así definidas son proyectivas (resp. inyectivas) e indescomponibles, pues  $G(P(i))$  y  $G(I(i))$  lo son y las equivalencias son aditivas.

**Corolario 3.41.** *Toda representación proyectiva/inyectiva de  $(Q, R)$  se escribe como suma directa de representaciones indescomponibles  $P(i)/I(i)$ .*

*Demostración.* Por Krull Schmidt, la equivalencia entre  $\text{Rep}_{(Q,R)}$  y  $\text{mod}_A$  y el corolario 3.16.  $\square$

En general para un carcaj con relaciones nos olvidaremos de escribir las barras de los elementos del álgebra  ${}^k Q/I$  y simplemente recordaremos que en el álgebra tenemos relaciones (combinaciones lineales de caminos paralelos) que son cero.

**Ejemplo 3.42.**

- Sea  $Q = \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & \beta \nearrow & & \searrow \gamma & \\ 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 & \xleftarrow{\delta} & 4 \end{array}$  con  $\delta\beta\gamma = 0$ . Entonces

$$P(1) = \begin{array}{ccccc} & & & \langle \alpha\beta, \alpha\beta\gamma\delta\beta \rangle_k & \\ & & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \nearrow & & \searrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \langle e_1 \rangle_k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & \langle \alpha, \alpha\beta\gamma\delta \rangle_k & \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & \langle \alpha\beta\gamma \rangle_k \end{array}$$

Y su radical, tomando bases, es

$$\text{Rad } P(1) = \begin{array}{ccccc} & & & k^2 & \\ & & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \nearrow & & \searrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & k^2 & \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & k \end{array}$$

- Sea  $Q' = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xleftarrow{\gamma} 4$  con  $\alpha\beta = 0$ . Entonces:

$$\begin{array}{cccc} P(1) = \frac{1}{2} & P(2) = \frac{2}{3} & P(3) = 3 & P(4) = \frac{4}{3} \\ \text{Rad } P(1) = 2 & \text{Rad } P(2) = 3 & \text{Rad } P(3) = 0 & \text{Rad } P(4) = 3 \end{array}$$

Notemos que este ejemplo en particular nos demuestra que la categoría  $\text{Rep}_{(Q,I)}$  no es hereditaria en general, incluso en el caso que  $Q$  tiene relaciones pero no ciclos dirigidos. Más aún, que el complejo de 2.14 no necesariamente es exacto. Por ejemplo, para  $S(1)$  la resolución estándar me daría:

$$0 \longrightarrow P(2)^1 \xrightarrow{u} P(1) \xrightarrow{v} S(1) \longrightarrow 0$$

que claramente no es exacta pues  $u$  no es inyectiva.

### 3.3. Extensiones, Ext y dimensión homológica

Al igual que la situación en módulos, podemos definir el espacio de extensiones de una representación  $M$  por  $N$ , y demostrar que es isomorfo al primer grupo de cohomología de un complejo. Lo interesante es la relación del Ext con la forma del carcaj.

**Definición 3.43.** Sea  $M \in \text{Rep}_{(Q,I)}$  y una resolución proyectiva

$$\dots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

Dado  $N \in \text{Rep}_Q$  aplicamos el funtor  $\text{Hom}(-, N)$  en esa secuencia:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{f_0^*} \text{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{f_1^*} \text{Hom}(P_1, N) \longrightarrow \dots$$

que es exacta en  $\text{Hom}(M, N)$  y  $\text{Hom}(P_0, N)$ . Definimos

$$\text{Ext}^1(M, N) := \text{Ker}(f_2^*) / \text{Im}(f_1^*)$$

En general, definimos

$$\text{Ext}^i(M, N) := \text{Ker}(f_{i+1}^*) / \text{Im}(f_i^*)$$

Notemos que si  $Q$  es un carcaj acíclico,  $\text{Ext}^1(M, N)$  es simplemente el cokernel de  $f_1^*$  pues puedo elegir una resolución donde  $P_n = 0$  para todo  $n \geq 2$ . Y que  $\text{Ext}^0(M, N) = 0$  pues la sucesión es exacta en  $\text{Hom}(P_0, N)$ .

**Proposición 3.44.**  $\text{Ext}^1(M, N)$  es independiente, salvo isomorfismo natural, de la resolución proyectiva.

**Proposición 3.45.**  $\text{Ext}^1(M, N)$  también se puede calcular con resoluciones inyectivas, pero de  $N$ . En efecto, si

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \xrightarrow{f_2} \dots$$

es una resolución inyectiva, y aplicamos el funtor  $\text{Hom}(M, -)$  a esta secuencia obtenemos un complejo de cadenas

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{(f_0)_*} \text{Hom}(M, I_0) \xrightarrow{(f_1)_*} \text{Hom}(M, I_1) \xrightarrow{(f_2)_*} \dots$$

Si definimos

$$\overline{\text{Ext}}^1(M, N) := \text{Ker}((f_2)_*) / \text{Im}((f_1)_*)$$

entonces  $\overline{\text{Ext}}^1$  es un funtor y es naturalmente isomorfo a  $\text{Ext}^1$ .



**Definición 3.46.** Una **extensión**  $\varepsilon$  de  $M$  por  $N$  es una sucesión exacta corta  $0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ . Dos extensiones son equivalentes si existe  $h: E \rightarrow E'$  un isomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \cong \downarrow h & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

**Ejemplo 3.47.**  $Q = 1 \rightrightarrows 2$  y

$$E = k \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{1} \end{array} k \quad E' = k \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{0} \end{array} k$$

Entonces

$$\varepsilon: 0 \rightarrow S(2) \rightarrow E \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

$$\varepsilon': 0 \rightarrow S(2) \rightarrow E' \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

son dos extensiones de  $S(1)$  por  $S(2)$  no equivalentes pues  $E \not\cong E'$ .

**Definición 3.48.** Podemos definir una estructura de grupo en el conjunto de extensiones:

- Dadas dos extensiones

$$\varepsilon: 0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$$

$$\varepsilon': 0 \rightarrow N \rightarrow E' \rightarrow M \rightarrow 0$$

definimos  $\varepsilon + \varepsilon'$  como

$$\varepsilon + \varepsilon' := 0 \rightarrow N \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$$

donde

$$F := E'' / \langle \{(f(n), -f(n)) \in E \oplus E'\} \rangle$$

con  $E''$  el pull back de  $E \rightarrow M$  y  $E' \rightarrow M$ .

- Definimos la **extensión trivial** (y la denotamos  $\mathbf{0}$ ) como:

$$\mathbf{0} := 0 \rightarrow N \xrightarrow{\iota_N} N \oplus M \xrightarrow{P_M} M \rightarrow 0$$

**Teorema 3.49.** *El conjunto*

$$\mathcal{E}(M, N) := \{ \text{extensiones} \} / \text{equivalentes}$$

*con la suma y el  $\mathbf{0}$  definidos así, es un grupo abeliano.*

**Teorema 3.50.** *Existe un isomorfismo de grupos abelianos*

$$\mathcal{E}(M, N) \cong \text{Ext}^1(M, N)$$

*Demostración.* La demostración es estándar pero tediosa y larga y escapa al objetivo de la tesis. El lector interesado la puede encontrar en [SY12], teorema 3,5.  $\square$

Veamos más en detalle la relación entre el grupo  $\text{Ext}^1$  y la forma del carcaj  $Q$ . Empecemos por demostrar una fórmula que relaciona las flechas y vértices con este grupo.

Si  $Q$  es un carcaj, recordemos que tenemos una resolución proyectiva

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}} \xrightarrow{u} \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} \xrightarrow{v} M \rightarrow 0$$

Tomando  $\text{Hom}(-, N)$  en la sucesión obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(M, N) &\longrightarrow \text{Hom}\left(\bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i}, N\right) \longrightarrow \text{Hom}\left(\bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}}, N\right) \\ &\longrightarrow \text{Ext}^1(M, N) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Separando la suma adentro de los  $\text{Hom}$  y usando el teorema 2.9

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M, N) \longrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} N_i^{d_i} \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} N_{t(\alpha)}^{d_{s(\alpha)}} \longrightarrow \text{Ext}^1(M, N) \longrightarrow 0$$

Usando que  $N_\bullet \cong \text{Hom}(k, N_\bullet)$  como  $k$  espacios vectoriales y entonces  $N_\bullet^d \cong \text{Hom}(k^d, N_\bullet)$  tenemos

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(M, N) &\longrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}(k^{d_i}, N_i) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}(k^{d_{s(\alpha)}}, N_{t(\alpha)}) \\ &\longrightarrow \text{Ext}^1(M, N) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Finalmente, recordando que  $M_t = k^{d_t}$  tenemos la siguiente sucesión exacta corta de espacios vectoriales:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(M, N) &\longrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}(M_i, N_i) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}(M_{s(\alpha)}, N_{t(\alpha)}) \\ &\longrightarrow \text{Ext}^1(M, N) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Si llamo  $m_i = \dim_k M_i$  y  $n_i = \dim N_i$ , tomando dimensión en la sucesión y reordenando tenemos:

**Proposición 3.51.** *Si  $m_i = \dim_k M_i$  y  $n_i = \dim_k N_i$ , entonces*

$$\dim_k \text{Hom}(M, N) - \dim_k \text{Ext}^1(M, N) = \sum_{i \in Q_0} m_i n_i - \sum_{\alpha \in Q_1} m_{s(\alpha)} n_{t(\alpha)}$$

**Observación 3.52.** Notemos que en la demostración del teorema 2.14, si  $Q$  tiene un conjunto de relaciones admisible, la única parte de la demostración que no se puede repetir es que  $u$  sea inyectiva, pues la parte de que  $\text{Ker}(v) \subseteq \text{Im}(u)$  sigue valiendo ya que la longitud de una combinación lineal de caminos sigue siendo finita (pues todos los caminos de una longitud suficientemente grande son cero). El único cambio necesario es definir la longitud de un camino  $\bar{c}$  como la del mayor camino que pertenezca a su clase de equivalencia. Como la cantidad de caminos es finita, su clase de equivalencia tiene una longitud máxima. Entonces

$$\bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}} \xrightarrow{u} \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} \xrightarrow{v} M \rightarrow 0$$

es una presentación proyectiva de  $M$ .

**Corolario 3.53.** *Si  $i \neq j$ ,*

$$\#\{\alpha: i \rightarrow j: \alpha \in Q_1\} = \dim_k \text{Ext}^1(S(i), S(j))$$

*Demostración.* Uso la proposición anterior con  $M = S(i)$  y  $N = S(j)$ . □

Si  $Q$  tiene relaciones pero no ciclos dirigidos algo ligeramente más débil es cierto:

**Proposición 3.54.** *Sea  $(Q, I)$  un carcaj con relaciones pero sin ciclos dirigidos e  $i \neq j$  dos vértices distintos. Son equivalentes:*

1.  $\#\{\alpha: i \rightarrow j: \alpha \in Q_1\} = 0$
2.  $\dim_k \text{Ext}^1(S(i), S(j)) = 0$

*Demostración.* Supongamos que  $\#\{\alpha: i \rightarrow j: \alpha \in Q_1\} = 0$ . Completando la presentación proyectiva de la observación 3.52 para  $M = S(i)$  y aplicando  $\text{Hom}(-, S(j))$  obtenemos, como antes

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(S(i), S(j)) &\longrightarrow \bigoplus_{k \in Q_0} \text{Hom}(S(i)_k, S(j)_k) \\ &\longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}(S(i)_{s(\alpha)}, S(j)_{t(\alpha)}) \xrightarrow{f_2^*} \dots \end{aligned}$$

Como no existe ninguna flecha de  $i$  en  $j$ ,  $\text{Hom}(S(i)_{s(\alpha)}, S(j)_{t(\alpha)}) = 0$  para toda  $\alpha$  y entonces  $\text{Ker}(f_2^*) = 0$  y luego  $\text{Ext}^1(S(i), S(j)) = 0$ .

Supongamos que existe  $\beta: i \rightarrow j$ . Demostraremos que existe una extensión de  $S(i)$  por  $S(j)$  que no se parte. Definimos  $M$  una representación de la siguiente forma:

$$M_l = \begin{cases} k & \text{si } l = i, j \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

y las transformaciones lineales:

$$m_\alpha = \begin{cases} Id & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Cualesquiera que sea el conjunto de relaciones de  $Q$ ,  $M$  es una representación, y como  $Q$  no tiene ciclos dirigidos  $\iota: S(j) \hookrightarrow M$  y  $P: M \rightarrow S(i)$  son morfismos de representaciones. Luego tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow S(j) \hookrightarrow M \rightarrow S(i) \rightarrow 0$$

que no se parte pues  $M \not\cong S(i) \oplus S(j)$ . □

Por otra parte, con el  $\text{Ext}^2$  podemos identificar relaciones en el carcaj:

**Teorema 3.55.** *Sea  $(Q, R)$  un carcaj con relaciones. Son equivalentes:*

1.  $\text{Ext}^2(S(i), S(j)) \neq 0$ .
2. Existe una relación de  $i$  en  $j$ .

## Dimensiones homológicas

**Definición 3.56.** Dado  $M \in \text{mod}_A$ , la **dimensión proyectiva**,  $pd M$ , es el menor número natural (o cero) tal que existe una resolución proyectiva de la forma

$$0 \rightarrow P_d \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

Si no existe tal entero, decimos que la dimensión es infinita.

**Definición 3.57.** La **dimensión global** de una álgebra  $A$ ,  $gldim A$ , es el supremo de todas las dimensiones proyectivas:

$$gldim A := \text{Sup}\{pd M : M \in \text{mod}_A\}$$

Análogamente se define la **dimensión inyectiva** de  $M$ ,  $id M$ , como el  $d$  más chico tal que existe una resolución inyectiva de la forma

$$0 \rightarrow M \rightarrow I_0 \rightarrow \cdots \rightarrow I_d \rightarrow 0$$

Si tal  $d$  no existe, la dimensión inyectiva es infinita. Además, la dimensión global definida como el supremo de todas las dimensiones inyectivas resulta coincidir con la definición usual como supremo de todas las dimensiones proyectivas (ver por ejemplo [MCR87], capítulo 7, resultado 1.8)

**Observación 3.58.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra de dimensión finita y  $M$  una representación finitamente generada. Tenemos las siguientes equivalencias:

- $M$  es proyectivo si y sólo si  $pd M = 0$ .
- $A$  es hereditaria si y sólo si  $gldim A \leq 1$ .

**Ejemplo 3.59.**  $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4 \xrightarrow{\delta} 5$  con  $\alpha\beta = \gamma\delta = 0$ . Entonces  $pd S(1) = 2$ : Es a lo sumo 2 pues

$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \xrightarrow{u} P(1) \xrightarrow{w} S(1) \rightarrow 0$$

es una presentación proyectiva minimal de  $S(1)$ . Y es igual a 2: Si

$$0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{a} P_0 \xrightarrow{b} S(1) \rightarrow 0$$

es una resolución proyectiva, por el lema 2.32 tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{a} & P_0 & \xrightarrow{b} & S(1) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \parallel & & \\ P(2) \oplus V_1 & \xrightarrow{u \oplus v} & P(1) \oplus V_0 & \xrightarrow{(w;0)} & S(1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Donde  $V_1$  y  $V_0$  son sumandos directos de  $P_1$  y  $P_0$  respectivamente y  $v$  un morfismo de  $V_1$  a  $V_0$ . Como el morfismo  $a$  es inyectivo, el morfismo  $u \oplus v: P(2) \oplus V_1 \rightarrow P(1) \oplus V_0$  también. Calculo el kernel:  $\text{Ker}(u \oplus v) = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(v) = P(3) \oplus \text{Ker}(v)$ . Entonces  $P(3) \oplus \text{Ker}(v) = 0$ , absurdo pues  $P(3) \neq 0$ .

La definición de dimensión global puede parecer intratable. Pero un teorema nos dice que para calcular la dimensión global alcanza con los módulos simples.

**Teorema 3.60.** Sea  $A$  una  $k$  álgebra asociativa y unitaria de dimensión finita. Entonces

$$gldim A = Sup \{pd S : S \text{ es simple}\}$$

*Demostración.* Ver [MCR87], teoremas 7.1.8 y 7.1.14. □

**Ejemplo 3.61.**  $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4 \xrightarrow{\delta} 5$  con  $\alpha\beta\gamma = \beta\gamma\delta = 0$ . Calculemos la dimensión global de  $A = kQ/I$ . Por el teorema, alcanza con calcular las dimensiones proyectivas de sus cinco simples.

$$P(1) = \frac{1}{3} \quad P(2) = \frac{2}{3} \quad P(3) = \frac{3}{4} \quad P(4) = \frac{4}{5} \quad P(5) = 5$$

Calculamos una resolución proyectiva minimal de  $S(1)$ :

$$0 \rightarrow P(5) \rightarrow P(4) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

Notemos que ahora el lema 2.32 no nos sirve así como está para probar que no existe una resolución de longitud 2. Podríamos intentar extender el lema para resoluciones minimales de cualquier longitud, lo cual está bien. Pero utilicemos una técnica diferente que es empleando el Ext: si logramos demostrar que existe un módulo tal que  $\text{Ext}^3(S(1), M) \neq 0$ , entonces no puede haber ninguna resolución proyectiva de longitud dos. En efecto, pues el Ext es independiente de la resolución, y si tuviera una de longitud dos, el  $\text{Ext}^3$  debería ser cero con esa resolución y por lo tanto con todas. Con ensayo y error probando primero con los módulos simples, vemos que  $\text{Ext}^3(S(1), S(5))$  funciona para este argumento. Si aplicamos  $\text{Hom}(-, S(5))$  en la ecuación 3.2, tenemos:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(S(1), S(5)) \rightarrow \text{Hom}\left(\frac{1}{3}, S(5)\right) \rightarrow \text{Hom}\left(\frac{2}{3}, S(5)\right) \rightarrow \text{Hom}\left(\frac{4}{5}, S(5)\right) \\ \xrightarrow{t^*} \text{Hom}(S(5), S(5)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Rápidamente sabemos que  $\text{Hom}(S(1), S(5)) = \text{Hom}\left(\frac{1}{3}, S(5)\right) = \text{Hom}\left(\frac{4}{5}, S(5)\right) = 0$ , pues las representaciones de la izquierda tienen el espacio vectorial nulo en el vértice 5. Luego

$$\text{Ext}^3(S(1), S(5)) = \text{Hom}(S(5), S(5)) / \text{Im}(t^*)$$

Dada las condiciones de conmutatividad que impone ser un morfismos de representaciones, el único homomorfismo entre  $\frac{4}{5}$  y  $S(5)$  es el nulo. Entonces

$$\text{Ext}^3(S(1), S(5)) = \text{Hom}(S(5), S(5)) \cong k \neq 0$$

Luego  $pd S(1) = 3$ . Por lo tanto  $gldim A \geq 3$ . Podemos comprobar, simplemente hallando una resolución proyectiva de longitud menor o igual a 3, que para todos los otros simples,  $pd S(i) \leq 3$  y por lo tanto,  $gldim A = 3$ .

## Parte 4

# Traslación de Auslander-Reiten

En las siguientes secciones vamos a definir la asignación  $\tau$  de traslación de Auslander-Reiten. Como dijimos, este funtor es central para el estudio de las representaciones indescomponibles de un carcaj, ya que en muchos casos, nos permitirá calcular todas sus representaciones indescomponibles e incluso calcular los espacios de morfismos entre ellas. Más adelante veremos que la asignación  $\tau: \text{Rep}_Q \rightarrow \text{Rep}_Q$  en realidad es un funtor módulo representaciones proyectivas, así que deberemos definir una categoría cociente sobre las cuales  $\tau$  es un funtor.

Para empezar a definir la traslación  $A-R$  estudiemos primero dos funtores, el funtor dualidad  $D$  y el funtor transpuesta  $Tr$ . Estos dos objetos son algebraicos pero con la equivalencia también podemos calcularlos en la categoría de representaciones. Su utilidad es que nos permite definir la traslación  $A-R$ . En la sección final del capítulo, presentamos la categoría estable, que es el domino natural del funtor  $Tr$  y el teorema principal de la sección, el 4.37, demuestra que al igual que  $D$ ,  $Tr$  es una equivalencia de categorías y entonces la traslación, en un domino adecuado, también va a serlo.

En el capítulo se dan demostraciones propias de la parte 10 del teorema de dualidad 4.2, una versión simplificada del lema 4.26 y un desarrollo más completo del teorema 4.37.

### 4.1. Dualidad

**Definición 4.1.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra de dimensión finita (por ejemplo,  $kQ/I$ ). Se define el funtor (contravariante) **dualidad**

$$\begin{aligned} D: \text{mod}_A &\longrightarrow {}_A\text{mod} \\ M &\longmapsto \text{Hom}_k(M, k) = M^* \\ f &\longmapsto f^*, \quad f^*: (M')^* \rightarrow M^* \end{aligned}$$

Notemos que  $D(M)$  es un  $A$  módulo a izquierda vía  $(a \cdot f)(m) = f(ma) : (a \cdot (b \cdot f))(m) = (b \cdot f)(ma) = f(mab) = (ab \cdot f)(m)$ . Además  $(a \cdot f)$  así definida es un morfismo  $k$  lineal.

Así  $D$  es un funtor contravariante de  $A$  módulos a derecha en  $A$  módulos a izquierda. Además hay un funtor contravariante que también notamos  $D: {}_A\text{mod} \rightarrow \text{mod}_A$ , definido de la misma forma: si  $M$  es un  $A$  módulo a izquierda,  $D(M) = \text{Hom}_k(M, k)$ . Notemos que  $D(M)$  es un módulo a derecha con la definición  $(f \cdot a)(m) = f(am)$ . Luego  $((f \cdot a) \cdot b)(m) = (f \cdot a)(bm) = f(abm) = (f \cdot (ab))(m)$ , lo que prueba que efectivamente es un  $A$  módulo a derecha. Además,  $D \circ D \cong Id$ , es decir, la composición a ambos lados es naturalmente isomorfa al funtor identidad.

Las propiedades más importantes del funtor dualidad están listadas en esta proposición:

**Teorema 4.2.** *Sea  $D: \text{mod}_A \rightarrow {}_A\text{mod}$  el funtor dualidad. Entonces:*

1.  $D(X \oplus Y) = D(X) \oplus D(Y)$ .
2. Es una dualidad de categorías abelianas con  $D \circ D = Id_{\text{mod}_A}$ .
3. Es un funtor exacto (preserva sucesiones exactas cortas).
4. Manda proyectivos en inyectivos y viceversa.
5. Indescomponibles en indescomponibles.
6. Simples en simples.
7. Manda cubrimientos proyectivos en cápsulas inyectivas y viceversa.
8. Induce una equivalencia de categorías entre  $\text{Proy}_A$  y  ${}_A\text{Iny}$ .
9. Induce una equivalencia de categorías entre  $\text{mod}_P A$  y  $A - \text{mod}_I$ .
10.  $\text{Soc } DM \cong D \text{ Top } M$  y  $\text{Top } DM \cong D \text{ Soc } M$ .

*Demostración.* Todas las demostraciones son estándar usando 1 y 2, demostremos por ejemplo 6 y 10:

6)  $D$  manda simples en simples pues si  $N \leq D(M)$  y  $M$  es simple, existe un morfismo sobreyectivo  $M \xrightarrow{\xi} D(N)$ . Luego  $\text{Ker}(\xi) = M$  o  $\text{Ker}(\xi) = 0$  pues  $M$  es simple. Si  $\xi = 0$  entonces  $D(N) = 0$ , lo que implica que  $N = 0$ . Si  $\xi$  es un isomorfismo, entonces  $N \cong D(M)$  y por dimensión,  $N = D(M)$ .

10)  $\underline{D\text{Top}(M)} \subseteq \text{Soc}(DM)$ : Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \text{Rad}(M) \rightarrow M \rightarrow \text{Top}(M) \rightarrow 0$$

Aplicando el funtor dualidad obtenemos

$$0 \rightarrow D\text{Top}(M) \rightarrow DM \rightarrow D\text{Rad}(M) \rightarrow 0$$

Como  $D\text{Top}(M)$  es semisimple (porque  $\text{Top}(M)$  lo es),  $D\text{Top}(M) \subseteq \text{Soc}(DM)$  por definición de  $\text{Soc}(DM)$  como la suma de todos los simples.

$\underline{\text{Soc}(DM)} = D\text{Top}(M)$ : Como  $M$  es un espacio vectorial de dimensión finita, alcanza con mostrar que  $\dim_k(\text{Soc}(DM)) \leq \dim_k(D\text{Top}M)$ . Por la dualidad,  $\text{Soc}(DM) = DL$  con  $L$  un módulo a derecha semisimple. Entonces  $DL \leq DM$  y aplicando la dualidad a ambos lados tenemos que existe un morfismo sobreyectivo  $\xi: M \rightarrow L$ . Eso significa que  $M/\text{Ker}(\xi) \simeq L$  es semisimple. Como  $\text{Rad } M$  es el submódulo  $L$  más pequeño tal que  $M/L$  es semisimple, eso implica que  $\text{Rad } M \subseteq \text{Ker}(\xi)$  y por lo tanto hay un morfismo sobreyectivo  $\text{Top}M \rightarrow L$  y luego hay una flecha inyectiva  $DL = \text{Soc}(DM) \hookrightarrow D\text{Top}M$ .  $\square$

El funtor  $D$  me permite fácilmente demostrar teoremas sobre inyectivos usando los teoremas ya demostrados para proyectivos:

**Teorema 4.3. (Clasificación de inyectivos)** Sea  $I$  un  $A$  módulo a derecha inyectivo e indescomponible. Entonces  $I \cong D(A.e_i)$  con  $A.e_i \in {}_A\text{mod}$  módulo a izquierda proyectivo e indescomponible.

*Demostración.*  $D(I)$  es un módulo a izquierda proyectivo e indescomponible. Luego  $D(I) \cong A.e_i$ . Aplicando la dualidad a ambos lados  $I \cong D(A.e_i)$ .  $\square$

**Proposición 4.4.** Dada una representación  $M$  de un carcaj  $Q$ , existe una resolución inyectiva

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} I_0 \xrightarrow{g} I_1 \rightarrow 0$$

donde  $I_0$  y  $I_1$  son inyectivos.

*Demostración.* Usemos el teorema 2.14 con  $DM$ : existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow DM \rightarrow 0$$

con  $P_1$  y  $P_0$  proyectivos. Aplicando  $D$  a la sucesión exacta tenemos la secuencia deseada.  $\square$

**Proposición 4.5.** Sea  $Q$  un carcaj sin ciclos dirigidos y  $f: I \rightarrow M$  un morfismo no nulo con  $M$  indescomponible e  $I$  inyectivo. Entonces  $M$  es inyectivo y  $f$  es sobreyectiva.

*Demostración.* Utilizamos el corolario 2.18 con  $DM$  y volvemos a aplicar el funtor dualidad para obtener el teorema.  $\square$

**Observación 4.6.** Notemos que el inyectivo indescomponible con esta definición ( $D(A.e_i)$ ) y el inyectivo indescomponible de la definición 3.40 ( $A.e_i$  con la multiplicación  $x e_i \cdot c := (\frac{1}{c} x) e_i$ ) coinciden. Definimos un morfismo  $\Omega$  como: si  $c$  es un camino que termina en  $i$  (i.e.,  $c \in A.e_i$ )

$$\Omega: A.e_i \rightarrow D(A.e_i), \quad \Omega(c) = \begin{cases} 0 & \text{si } c = 0 \\ f_c & \text{si } c \neq 0 \end{cases}$$

con  $f_c$  definido sobre la base de caminos como, si  $x: k \rightarrow i$ ,  $f_c(x) = \delta_{c,x}$ .

$\Omega$  es un isomorfismo de  $A$  módulos a derecha. Primero, demostramos que  $\Omega$  es un morfismo de módulos: si  $c = (d|*)$ ,

$$(\Omega(c) \cdot d)(x) = \Omega(c)(dx) = \delta_{c,dx} = \delta_{\frac{1}{d} \cdot c, x} = \Omega(\overbrace{\frac{1}{d} \cdot c}^{\neq 0})(x) = \Omega(c \cdot d)(x)$$

Y si  $c \neq (d|*)$ ,

$$\Omega(c) \cdot d = \delta_{c,dx} = 0 = \Omega(0) = \Omega(\overbrace{\frac{1}{d} \cdot c}^{=0}) = \Omega(c \cdot d)$$

Luego  $\Omega(c) \cdot d = \Omega(c \cdot d)$ . Claramente es inyectiva y por dimensión sobre  $k$  es un isomorfismo.

**Observación 4.7.** Miremos a  $D$  en la categoría  $\text{Rep}_Q$ :  $D$  le asigna a una representación  $M$  de  $Q$ , un objeto de  $\text{Rep}_{Q^{op}}$ , donde  $Q^{op}$  es el carcaj opuesto obtenido dando vuelta todas las flechas en  $Q_1$ :  $Q^{op} = (Q_0, Q_1^{op}, s, t)$  es decir  $t(\alpha^{op}) = s(\alpha)$  y  $s(\alpha^{op}) = t(\alpha)$ . Entonces  $D$  es la representación con espacios vectoriales  $M_i^*$  (el dual de  $M_i$ ):

$$D(M) = (M_i^*, \varphi_{\alpha^{op}}^*)$$

donde los morfismos  $\varphi_{\alpha^{op}}^*: D(M)_{t(\alpha)} \rightarrow D(M)_{s(\alpha)}$  están definidos de la sig. forma: si  $f: M_{t(\alpha)} \rightarrow k$ , se define  $\varphi_{\alpha^{op}}^*(f) := f \circ \varphi_\alpha$ . Luego  $D$  es una equivalencia  $D: \text{Rep}_Q \rightarrow \text{Rep}_{Q^{op}}$ , y por el teorema 4.2 parte 4,  $D(P_Q(i)) = I_{Q^{op}}(i)$  y  $D(I_Q(i)) = P_{Q^{op}}(i)$ .



## 4.2. $\text{Hom}(-, A)$

Más interesante es el funtor transposición. De nuevo  $A$  es una  $k$  álgebra de dimensión finita.

**Definición 4.8.** Se define  $\text{Hom}_A(-, A)$  (también notado  $(-)^t$ ) como el funtor contravariante

$$\begin{aligned} (-)^t: \text{mod}_A &\longrightarrow {}_A\text{mod} \\ M &\longmapsto (M)^t := \text{Hom}_A(M, A) \\ f &\longmapsto (f)^t(\rho) := \rho \circ f, \quad (f)^t: (M')^t \rightarrow M^t \end{aligned}$$

Notemos que si  $M \in \text{mod}_A$ ,  $M^t \in {}_A\text{mod}$  es un módulo a izquierda con la multiplicación  $(a \cdot f)(m) = af(m)$ .

Análogamente se define  $\text{Hom}(M, A): {}_A\text{mod} \longrightarrow \text{mod}_A$  con la estructura a derecha:  $(f.a)(m) = f(m).a$ .

A diferencia de  $D$  no podemos esperar que  $(-)^t$  sea una dualidad. Si  $A$  es un  $kQ$  con  $Q$  sin ciclos dirigidos, por el corolario 2.25 (que vale en  $\text{mod}_A$  por la equivalencia),  $(-)^t$  debe ser cero sobre los no proyectivos: si  $M$  es un indescomponible no proyectivo,

$$\text{Hom}_A(M, A) = \text{Hom}_A(M, e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA) = \bigoplus_i \text{Hom}_A(M, e_iA) = 0$$

Sin embargo, se restringe a una equivalencia entre las categorías de módulos proyectivos (y también entre las de inyectivos):

**Teorema 4.9.** *Sea  $A$  una  $k$  álgebra de dimensión finita y  $\text{Hom}(-, A): \text{mod}_A \longrightarrow {}_A\text{mod}$  el funtor transposición. Entonces:*

1.  $(X \oplus Y)^t = X^t \oplus Y^t$ .
2. Manda proyectivos indescomponibles en proyectivos indescomponibles, y por lo tanto manda proyectivos en proyectivos.
3. Es exacto a izquierda, es decir, si  $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0$  es exacta,

$$0 \rightarrow D^t \rightarrow C^t \rightarrow B^t$$

es exacta.

4. Restringido a  $\text{Proy}_A$  es una dualidad de categorías:

$$(-)^t: \text{Proy}_A \rightarrow {}_A\text{Proy}$$

con inversa dada por  $\text{Hom}(-, A)$  con la estructura vista arriba.

*Demostración.* 2) Sea  $e_iA$  un proyectivo indescomponible (que sabemos por el teorema 3.17 son los únicos proyectivos indescomponibles salvo isomorfismo). Veamos que  $\text{Hom}(e_iA, A) \cong Ae_i$  como  $A$  módulos. En efecto, definimos

$$\begin{aligned} \Phi: \text{Hom}_A(e_iA, A) &\longrightarrow Ae_i \\ \varphi &\longmapsto \varphi(e_i).e_i \end{aligned}$$

$\Phi$  es  $A$ -lineal:

$$\Phi(a \cdot \varphi) = (a \cdot \varphi)(e_i).e_i = (a.\varphi(e_i)).e_i = a(\varphi(e_i).e_i) = a.\Phi(\varphi)$$

Es inyectiva: supongamos que  $\Phi(\varphi) = \Phi(\psi)$ , i.e.,  $\varphi(e_i).e_i = \psi(e_i).e_i$ . Luego

$$\begin{aligned}\varphi(e_i a) &= \varphi(e_i) a = \varphi(e_i).1_A.a = \varphi(e_i).(e_i + \sum_{j \neq i} e_j).a = (\varphi(e_i).e_i + \sum_{j \neq i} \varphi(e_i)e_j)a = \\ &(\psi(e_i).e_i + \sum_{j \neq i} \varphi(e_i.e_j))a = (\psi(e_i^2) + 0).a = \psi(e_i).a = \psi(e_i a)\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\varphi = \psi$ .

Y es sobreyectiva: Dado  $ae_i$ , definimos  $\varphi: e_i A \rightarrow A$  como  $\varphi(e_i x) = a.e_i.x$ . Está bien definida: si  $e_i x = e_i x'$  entonces  $a.e_i.x = a.e_i.x'$ . Además, es un morfismo de  $A$  módulos a derecha. Su imagen a través de  $\Phi$  es  $ae_i$ :

$$\Phi(\varphi) = \varphi(e_i).e_i = a.e_i.e_i = a.e_i$$

1 y 3) Estándar.

4) Queremos ver que  $\text{Hom}_A(\text{Hom}_A(P, A), A) \cong P$ . Como el funtor es aditivo basta verlo para un proyectivo indescomponible. Por 4), si  $P = e_i A$ ,  $\text{Hom}_A(e_i A, A) \cong Ae_i$ . Luego

$$\text{Hom}_A(\text{Hom}_A(e_i A, A), A) \cong \text{Hom}_A(Ae_i, A) \cong e_i A$$

y el último isomorfismo es el simétrico de la demostración de 1). □

Miremos ahora  $\text{Hom}(-, A)$  en  $\text{Rep}_{(Q, I)}$ . Si  $M$  es una representación de  $(Q, I)$  entonces  $\text{Hom}(M, A_Q)$  tiene una estructura de representación de  $(Q^{op}, I)$  con

$$\text{Hom}(M, A_Q)_j := \text{Hom}(M, P(j))$$

con la estructura usual de espacio vectorial y dada  $\alpha: i \rightarrow j$  una flecha, la transformación lineal

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha^{op}}: \text{Hom}(M, P(j)) &\longrightarrow \text{Hom}(M, P(i)) \\ h &\longmapsto (\alpha.h)\end{aligned}$$

con  $\alpha.h$  definida sobre un  $x$  como:  $(\alpha.h)(x) := \alpha.h(x)$ , donde si  $h(x) = \sum \lambda c$ ,  $\alpha.h(x) = \sum \lambda \alpha c$ .

Definido así el funtor  $\text{Hom}(-, A_Q): \text{Rep}_{(Q, I)} \rightarrow \text{Rep}_{(Q^{op}, I)}$  sobre los objetos, sobre las flechas manda  $g$  en  $g^*$ .

Por el teorema visto para módulos el Hom manda proyectivos indescomponibles en proyectivos indescomponibles:  $\text{Hom}(P_{Q^{op}}(i), A_{Q^{op}}) \cong P_Q(i)$ .

### 4.3. Funtor de Nakayama

Introducidos el funtor dualidad y el  $\text{Hom}(-, A)$ , podemos presentar el funtor de Nakayama, que nos permitirá calcular la traslación de Auslander-Reiten y construir el carcaj  $A - R$ .

**Definición 4.10.** Se define el **funtor de Nakayama**  $\nu: \text{mod}_A \rightarrow \text{mod}_A$  como la composición  $D \circ \text{Hom}(-, A)$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{mod}_A & \xrightarrow{\text{Hom}(-, A)} & {}_A \text{mod} & \xrightarrow{D} & \text{mod}_A \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \nu & & \end{array}$$

Notemos que  $\nu$  es un funtor covariante que es exacto a derecha.

**Teorema 4.11.**  $\nu = D \circ \text{Hom}(-, A) : \text{mod}_A \rightarrow \text{mod}_A$  es un funtor covariante tal que:

1. Es exacto a derecha y aditivo.
2. Restringido a  $\text{Proy}_A$  define una equivalencia de categorías

$$\nu : \text{Proy}_A \longrightarrow \text{Iny}_A$$

con  $\nu(e_i A) = D(Ae_i)$  y sobre las flechas  $f_c$  (multiplicar por  $c$ ),  $\nu f_c(ae_j) = a \cdot (\frac{1}{c})e_i$ .

3. La inversa de la restricción es  $\text{Hom}(DA, -)$ .

*Demostración.* 1. Es inmediato de los teoremas 4.2 y 4.9.

2.

La primera parte del teorema es inmediata de la definición y el teorema 4.9:

$$\nu(e_i A) = D \circ \text{Hom}_A(e_i A, A) \cong D(Ae_i)$$

Sea ahora  $c : i \rightarrow j$  y  $f_c$  el morfismo multiplicar a izquierda por  $c$ , es decir,  $f_c(e_i a) = e_j c a$ . Veamos cuál es el morfismo  $\nu f_c$ . Aplicando  $(-)^t$ , tenemos:

$$\begin{aligned} (f_c)^t : \text{Hom}(e_i A, A) &\longrightarrow \text{Hom}(e_j A, A) \\ \rho &\longmapsto \rho \circ f_c \end{aligned}$$

Vía el isomorfismo  $\Phi : Ae_i \cong \text{Hom}(e_i A, A)$  definido como en 4.9,  $(f_c)^t : Ae_i \rightarrow Ae_j$  es:

$$\begin{aligned} \Phi \circ (f_c)^t \circ \Phi^{-1}(ae_i) &= \Phi \circ (f_c)^t \circ (\varphi_{ae_i}) = \Phi(\varphi_{ae_i} \circ (f_c)) = \\ &= \varphi_{ae_i} \circ (f_c(e_i))e_i = \varphi_{ae_i}(e_i c)e_i = ae_i c e_i = ace_i \end{aligned}$$

Es decir vía el isomorfismo,  $(f_c)^t(ae_i) = ace_j$ . Luego al aplicar  $D$  tenemos una composición de morfismos:

$$\begin{array}{ccccc} \delta_{x,h} & D(Ae_j) & \xrightarrow{Df_c^t} & D(Ae_i) & \delta_{h,x} \circ (f_c)^t \\ \uparrow \text{---} & \uparrow \cong & & \cong \downarrow \Omega^{-1} & \downarrow \\ h \in & Ae_j & & Ae_i & \nu f_c(h) \end{array}$$

Sea  $h \in Ae_j$ . Queremos ver su imagen vía  $\nu f_c$ . Tenemos dos posibilidades:  $h = (h'|c)$  para algún  $h'$ , o no. Supongamos primero  $h = (h'|c)$ . Veamos quién es  $Df_c^t(\Omega(h))$ : Sea  $d \in Ae_i$ , como

$$\delta_{h,x} \circ f_c^t(d) = \delta_{h,x}(dc) = \delta_{h,dc} = \delta_{h,(\frac{1}{c})x}(d)$$

luego  $\delta_{h,x} \circ f_c^t = \delta_{h,(\frac{1}{c})x}$ . Entonces  $\nu f_c(h) = h \cdot (\frac{1}{c})$ . Finalmente si  $h \neq (h'|c)$ ,  $\delta_{h,x} \circ f_c^t(d) = \delta_{h,dc} = 0$ . Luego  $\Omega^{-1}(Df_c^t(\Omega(h))) = \Omega^{-1}(0) = 0$ , que es igual a  $h \cdot (\frac{1}{c})$ . Por lo tanto en todo caso  $\nu f_c(h) = h \cdot (\frac{1}{c})$ .

3. Calculemos la inversa utilizando la definición de  $\nu$ :

$$\nu^{-1} = \text{Hom}(-, A)^{-1} \circ D^{-1} = \text{Hom}(D(-), A) = \text{Hom}(D(-), DDA) \cong \text{Hom}(DA, -)$$

□

**Ejemplo 4.12.** Veamos algunos ejemplos de cálculo de  $\nu$ :

- Por el punto 2. del teorema anterior,  $\nu P(i) = I(i)$  para todo  $i \in Q_0$ .
- Sabemos que si  $M$  es un indescomponible no proyectivo de  $Q$ ,  $\nu M = 0$  por el corolario 2.25. Pero si  $Q$  tiene relaciones, entonces no necesariamente es cierto eso. Calculemos el funtor de Nakayama en un caso así: Sea  $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$  con  $\alpha\beta = 0$ . Entonces:

$$P(1) = \frac{1}{2} \quad P(2) = \frac{2}{3} \quad P(3) = 3$$

Calculemos  $\nu S(2)$ . Recordemos que  $Hom(M, A)$  es una representación definida en cada coordenada como  $Hom(M, A)_j = Hom(M, P(j))$ . Entonces:

$$\begin{aligned} Hom(S(2), A) &= \left( Hom(S(2), P(1)) \rightarrow Hom(S(2), P(2)) \rightarrow Hom(S(2), P(3)) \right) \\ &\cong (k \rightarrow 0 \rightarrow 0) = S(1) \end{aligned}$$

Luego  $\nu S(2) \cong S(1) = I(1)$ . En particular, si  $i: S(2) \hookrightarrow P(1)$  es la inclusión,  $\nu i: I(1) \rightarrow \nu S(2) = I(1)$  es la identidad.

- $\nu^{-1}I(i) = P(i)$  y  $\nu^{-1}M = 0$  para todo  $M$  indescomponible no inyectivo (por proposición 4.5 y el teorema 4.11 parte 3).

#### 4.4. Traslación de Auslander-Reiten

Estamos listos para definir la traslación de Auslander-Reiten:

**Definición 4.13.** Sea

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

una presentación proyectiva minimal (ppm) de  $M$ . Aplicando el funtor de Nakayama a la secuencia obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\nu f) \hookrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu f} \nu P_0 \xrightarrow{\nu g} \nu M \longrightarrow 0$$

Se define  $\tau M := \text{Ker}(\nu f)$ .

**Definición 4.14.** Análogamente se define  $\tau^{-1}$ : si

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} I_0 \xrightarrow{g} I_1$$

es una presentación inyectiva minimal (pim) de  $M$ , aplicando el funtor inverso de Nakayama a la secuencia obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \nu^{-1}M \xrightarrow{\nu^{-1}f} \nu^{-1}I_0 \xrightarrow{\nu^{-1}g} \nu^{-1}I_1 \twoheadrightarrow \text{Coker}(\nu^{-1}g) \longrightarrow 0$$

Entonces  $\tau^{-1}M := \text{Coker}(\nu^{-1}g)$ .

**Ejemplo 4.15.** Calculemos algunos ejemplos de  $\tau^{-1}$  y  $\tau$ :

- Si  $P$  es proyectivo entonces  $\tau P = 0$ , pues una ppm de  $P$  es

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{Id} P \longrightarrow 0$$

Por la razón dual  $\tau^{-1}I = 0$  para cualquier inyectivo  $I$ .

- Consideremos  $Q = 1 \rightarrow 2 \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 4 \end{matrix}$ . Luego

$$P(1) = \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{matrix} \quad P(2) = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \quad P(3) = 3 \quad P(4) = 4 \\ I(1) = 1 \quad I(2) = \frac{1}{2} \quad I(3) = \frac{1}{3} \quad I(4) = \frac{1}{4}$$

Calculemos  $\tau^{-1}P(1)$ : una pim de  $P(1)$  es

$$0 \longrightarrow P(1) \longrightarrow I(3) \oplus I(4) \longrightarrow I(2) \longrightarrow 0$$

Aplicando  $\nu^{-1}$  obtenemos

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P(3) \oplus P(4) \longrightarrow P(2) \longrightarrow \tau^{-1}P(1) \longrightarrow 0$$

Y calculando las dimensiones obtenemos que el vector dimensión de  $\tau^{-1}P(1)$  es  $(0, 1, 0, 0)$ , lo que implica que  $\tau^{-1}P(1) = S(2)$ , que no es inyectivo. Calculemos una vez más el funtor de Nakayama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S(2) & \longrightarrow & I(2) & \longrightarrow & I(1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \nu^{-1} & & \downarrow \nu^{-1} & & \downarrow \nu^{-1} & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P(2) & \longrightarrow & P(1) & \longrightarrow & \tau^{-1}2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Luego  $\tau^{-1}S(2) = S(1) = I(1)$ .

Terminamos la sección con una proposición que relaciona la dimensión proyectiva/inyectiva con el funtor AR:

**Proposición 4.16.** *Sea  $M$  un  $A$  módulo a derecha. Tenemos las siguientes equivalencias:*

- $pd M \leq 1$  si y sólo si  $\text{Hom}(DA, \tau M) = 0$
- $id M \leq 1$  si y sólo si  $\text{Hom}(\tau^{-1}M, A) = 0$

*Demostración.* Demostraremos 1, la segunda parte es análoga o sale aplicando dualidad.

Sea

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$$

una ppm de  $M$ . Aplicando el funtor de Nakayama obtenemos una sucesión exacta en  $A\text{mod}$ :

$$0 \rightarrow \tau M \hookrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \rightarrow 0$$

Aplicando ahora  $\nu^{-1}$  y usando que  $\nu^{-1} \circ \nu|_{P_{\text{roy}_A}} \cong Id_{P_{\text{roy}_A}}$ , tenemos un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \nu^{-1}\tau M & \longrightarrow & \nu^{-1}\nu P_1 & \longrightarrow & \nu^{-1}\nu P_0 & & \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(p_1) & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Por el lema de los cinco,

$$\text{Ker}(p_1) \cong \nu^{-1}\tau M = \text{Hom}(DA, \tau M)$$

Luego:  $\text{Hom}(DA, \tau M) = 0$  si y sólo si  $p_1$  es inyectiva, lo cual es equivalente a que  $M$  admite una resolución de longitud 1 que a su vez es equivalente a que  $pd M \leq 1$ .  $\square$

## Transpuesta

Una forma alternativa de construir la traslación de Auslander-Reiten, más funtorial, es a través de la transpuesta. Esta asignación no es un funtor sobre  $mod_A$  pero sí sobre un cociente de la categoría.

**Definición 4.17.** Sea  $M \in mod_A$  y

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$$

una presentación proyectiva minimal de  $M$ . Aplicando  $(-)^t$  obtenemos una secuencia exacta en  ${}^t mod_A$ :

$$0 \rightarrow M^t \xrightarrow{p_0^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \rightarrow Coker(p_1^t) \rightarrow 0$$

Definimos  $TrM := Coker(p_1^t)$ .

Las propiedades más importantes de la transpuesta están indicadas en este teorema:

**Teorema 4.18.** Sean  $M$  y  $N$  pertenecientes a  $mod_A$ . Entonces:

1.  $Tr(M \oplus N) = Tr(X) \oplus Tr(Y)$ .
2.  $TrM = 0$  si y sólo si  $M$  es proyectivo.
3.  $TrM$  no tiene sumandos directos proyectivos no nulos.
4. Si  $M \in mod_P A$  entonces

$$P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \longrightarrow TrM \longrightarrow 0$$

es una ppm de  $TrM$ .

5. Si  $M$  es indescomponible no proyectivo,  $TrM$  es indescomponible y  $Tr TrM \cong M$ .
6. Recordar que por la definición 3.36,  $mod_P A$  es la categoría de  $A$  módulos a derecha finitamente generados sin sumandos directos proyectivos. Entonces  $M \in mod_P A$  entonces  $Tr TrM \cong M$
7. Si  $M$  y  $N \in mod_P A$ , son equivalentes  $M \cong N$  y  $TrM \cong TrN$ .
8. Hay una biyección

$$Tr: mod_P A /_{iso.} \longrightarrow A-mod_P /_{iso.}$$

donde  $mod_P A /_{iso.}$  es el conjunto de clases de isomorfismos.

*Demostración.* 1. Sea

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$$

una ppm de  $M$  y

$$Q_1 \xrightarrow{q_1} Q_0 \xrightarrow{q_0} N \rightarrow 0$$

una ppm de  $N$ . Luego

$$P_1 \oplus Q_1 \xrightarrow{p_1 \oplus q_1} P_0 \oplus Q_0 \xrightarrow{p_0 \oplus q_0} M \oplus N \rightarrow 0$$

es una presentación proyectiva de  $M \oplus N$ . Y por el lema 2.29, es una ppm de  $M \oplus N$ . Luego el teorema se sigue aplicando  $(-)^t$ .

2. Si  $P$  es proyectivo,  $TrP = 0$  porque una ppm de  $P$  es

$$0 \rightarrow P \xrightarrow{Id} P \rightarrow 0$$

Si ahora  $TrM = 0$ , tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow M^t \rightarrow P_0^t \rightarrow P_1^t \rightarrow 0$$

Entonces se parte pues  $P_1^t$  es proyectivo. Luego  $M^t$  es un sumando directo de  $P_0^t$  y por lo tanto proyectivo. Entonces por 4.9 parte 2,  $M$  es proyectivo.

3. Como antes, sea una presentación proyectiva minimal de  $M$

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

y calculemos  $TrM$  tomando  $(-)^t$ . Supongamos que  $TrM = Q \oplus N$  con  $Q$  proyectivo y sea  $P : TrM \rightarrow Q$  la proyección. Entonces tenemos una composición sobreyectiva

$$P_1^t \xrightarrow{\pi} TrM \xrightarrow{P} Q \rightarrow 0$$

y como  $Q$  es proyectivo, es una retracción. Luego  $P_1^t = Q \oplus Q'$ . Como  $P\pi \circ i_Q = Id_Q$ , aplicando  $(-)^t$  tenemos  $i_Q^t \circ (P\pi)^t = Id_{Q^t}$  con  $(P_1^t)^t = P_1 = Q^t \oplus Q'^t$ . Y como  $P\pi$  es sobreyectiva,  $(P\pi)^t : Q^t \rightarrow P_1$  es inyectiva. Identificando  $Q^t$  con su imagen  $((P_1^t)^t = \text{Im}((P\pi)^t) \oplus \text{Im}((P'\pi)^t))$ , podemos suponer que  $(P\pi)^t$  es la inclusión.

Sea  $p_1 : P_1 \rightarrow P_0$  el morfismo de la presentación 4.1. Afirmamos que  $p_1|_{Q^t} = 0$ . En efecto:  $(p_1|_{Q^t})^t = (p_1 \circ (p\pi)^t)^t = p\pi p_1^t = 0$  pues  $\pi p_1^t = 0$ . Entonces  $(p_1|_{Q^t})^t : P_0^t \rightarrow Q$  es el morfismo nulo, luego  $p_1|_{Q^t} = 0$ . Entonces  $Q^t \subseteq \text{Ker}(p_1)$  y en consecuencia  $p_1|_{(Q')^t} : (Q')^t \rightarrow \text{Im}(p_1)$  es sobreyectiva. Por la minimalidad de  $P_1$ ,  $\dim_k P_1 \leq \dim_k (Q')^t \leq \dim_k P_1$ . Entonces  $Q = 0$ .

4. Supongamos  $M$  sin sumandos directos proyectivos. Por el teorema 4.9 parte 2,

$$P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \rightarrow TrM \rightarrow 0$$

es una presentación proyectiva de  $TrM$ , veamos que es minimal. Por el lema 2.32, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} P_0^t & \xrightarrow{p_1^t} & P_1^t & \xrightarrow{\pi_M} & TrM & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \parallel & & \\ U_0 \oplus V_0 & \xrightarrow{u \oplus v} & U_1 \oplus V_1 & \xrightarrow{(w;0)} & TrM & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con  $v$  sobreyectivo y

$$U_0 \xrightarrow{u} U_1 \xrightarrow{w} TrM \rightarrow 0$$

una ppm.

Tomando  $(-)^t$  en el diagrama, y usando el isomorfismo  $(P^t)^t \cong P$  si  $P$  es proyectivo, obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ (P_1^t)^t & \xrightarrow{p_1^{tt}} & (P_0^t)^t & \xrightarrow{\pi'_M} & \text{Coker}(p_1^{tt}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ U_1^t \oplus V_1^t & \xrightarrow{u^t \oplus v^t} & U_0^t \oplus V_0^t & \xrightarrow{\pi'_1 \oplus \pi'_2} & N_1 \oplus N_2 & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (4.2)$$

donde  $N_1 = \text{Coker } u^t$  y  $N_2 = \text{Coker } v^t$ . Notemos que  $V_1$  es proyectivo, pues es un sumando directo de un proyectivo. Entonces  $v$  es una retracción (pues es sobreyectivo a un proyectivo). Luego existe  $r: V_1 \rightarrow V_0$  tal que  $vr = \text{Id}_{V_1}$  y por lo tanto aplicando  $(-)^t$ ,  $r^t \circ v^t = \text{Id}_{V_1^t}$ , es decir  $v^t$  es una sección. Por lo tanto

$$0 \rightarrow V_1^t \xrightarrow{v^t} V_0^t \xrightarrow{\pi_2^t} N_2 \rightarrow 0$$

se parte. Luego  $V_0^t = N_2 \oplus V_1^t$ . Por lo tanto, como  $V_0^t$  es proyectivo, pues  $V_0$  es un sumando directo de  $P_0^t$ ,  $N_2$  es proyectivo. Luego  $N_2$  sería un sumando directo proyectivo de  $M$ . Entonces  $N_2 = 0$ . Luego  $v^t$  es un isomorfismo, y entonces  $v$  también. Entonces vía los isomorfismos,

$$U_1^t \oplus V_1^t \xrightarrow{u^t \oplus v^t} U_0^t \oplus V_0^t \rightarrow M \rightarrow 0$$

es una presentación proyectiva de  $M$ , y como  $v^t$  es un isomorfismo,

$$U_1^t \xrightarrow{u^t} U_0^t \rightarrow M \rightarrow 0$$

también es una presentación proyectiva de  $M$ . Entonces, como

$$P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

es una ppm de  $M$ , de nuevo por el lema 2.32,  $\dim_k P_1 \leq \dim_k U_1^t$  y por el diagrama 4.2,  $\dim_k U_1^t \leq \dim_k P_1$ . Luego  $U_1^t = P_1$  y por lo tanto  $0 = V_1^t \cong V_0^t$ . Además, como  $V_0$  y  $V_1$  son proyectivos, aplicando  $(-)^t$ , obtenemos que  $V_0 = V_1 = 0$ .

5. Sea  $M$  indescomponible no proyectivo. Por el punto 4 aplicado a  $M$ ,

$$P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \rightarrow \text{Tr} M \rightarrow 0$$

es una ppm de  $\text{Tr} M$ . Entonces por definición, aplicando  $(-)^t$  tenemos una sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} P_1^{tt} & \longrightarrow & P_0^{tt} & \longrightarrow & \text{Tr } \text{Tr} M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \\ P_1 & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Y entonces  $\text{Tr } \text{Tr} M \cong M$  por el lema de los cinco.

En particular, si  $M$  es indescomponible y

$$\text{Tr} M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$$

es la descomposición en indescomponibles de  $\text{Tr} M$ , ningún  $N_i$  es proyectivo, por el punto 3. Entonces

$$\text{Tr } \text{Tr} M = \text{Tr} N_1 \oplus \cdots \oplus \text{Tr} N_k \cong M$$

donde cada  $\text{Tr} N_i \neq 0$ . Luego  $k = 1$  pues  $M$  es indescomponible, y entonces  $\text{Tr} M$  es indescomponible.

6. Consecuencia inmediata de 5 y 1.

7. Si  $M$  y  $N$  son isomorfos,  $\text{Tr } M$  y  $\text{Tr } N$  lo son por la unicidad de la presentación proyectiva minimal.

Supongamos  $\text{Tr} M \cong \text{Tr} N$ . Luego  $\text{Tr } \text{Tr} M \cong \text{Tr } \text{Tr} N$  por unicidad de la ppm. Y como  $M$  y  $N$  pertenecen a  $\text{mod } P A$ ,

$$M \cong \text{Tr } \text{Tr} M \cong \text{Tr } \text{Tr} N \cong N$$

□



Usando  $Tr$  podemos construir una definición equivalente de  $\tau$  y  $\tau^{-1}$ . Recordar cómo se construía  $\tau^{-1}M$ : si

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} I_0 \xrightarrow{g} I_1$$

es una pim de  $M$ , primero tomábamos el dual  $D$ :

$$DI_1 \xrightarrow{Dg} DI_0 \xrightarrow{Df} DM \rightarrow 0$$

Esto es una ppm de  $DM$  por 4.2. Entonces al tomar  $(-)^t$  tenemos

$$0 \rightarrow \nu M \xrightarrow{\nu f} \nu I_0 \xrightarrow{\nu g} \nu I_1 \rightarrow Coker((Dg)^t) \rightarrow 0$$

Luego  $\tau^{-1}M = Tr DM$ .

Similarmente, para construir  $\tau M$  empezábamos con una ppm de  $M$ :

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$$

Luego tomamos  $(-)^t$  y obtenemos

$$0 \rightarrow M^t \xrightarrow{g^t} P_0^t \xrightarrow{f^t} P_1^t \rightarrow TrM \rightarrow 0$$

Aplicando  $D$  tenemos

$$0 \rightarrow D TrM \rightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu f} \nu P_0 \xrightarrow{\nu g} \nu M \rightarrow 0$$

Luego  $D TrM \cong Ker(\nu f) = \tau M$ .

Escrito como esta composición, podemos probar algunas propiedades muy importantes de  $\tau$  y  $\tau^{-1}$ :

**Teorema 4.19.** Sean  $\tau, \tau^{-1}: mod_A \rightarrow mod_A$ ,  $\tau = D Tr$  y  $\tau^{-1} = Tr D$ . Entonces:

1.  $\tau(X \oplus Y) = \tau X \oplus \tau Y$
2.  $\tau P = 0$  si y sólo si  $P$  es proyectivo. Análogamente,  $\tau^{-1}I = 0$  si y sólo si  $I$  es inyectivo.
3.  $\tau M$  no tiene sumandos directos inyectivos no nulos y  $\tau^{-1}N$  no tiene sumandos directos proyectivos no nulos.
4. Si  $M \in mod_P A$ ,  $\tau^{-1} \tau M \cong M$  y si  $M \in mod_I A$ ,  $\tau \tau^{-1} M \cong M$ .
5. Si  $M$  es indescomponible no proyectivo,  $\tau M$  es indescomponible; y si no es inyectivo,  $\tau^{-1} M$  es indescomponible.
6. Si  $M$  y  $N$  en  $mod_P A$ ,  $M \cong N$  si y sólo si  $\tau M \cong \tau N$ . Análogamente, si  $M$  y  $N$  pertenecen a  $mod_I A$ , son equivalentes que  $M \cong N$  y que  $\tau^{-1} M \cong \tau^{-1} N$ .
7.  $\tau: mod_P A \rightarrow mod_I A$  es una asignación biyectiva con inversa  $\tau^{-1}$ .

## 4.5. Categoría estable

En la sección anterior definimos  $\tau$  sobre los objetos, como la composición de una asignación  $Tr$  y un funtor  $D$ . Para definir a  $\tau$  sobre las flechas y darle una condición de funtor es necesario poder definir  $Tr$  sobre las flechas. Si  $f: M \rightarrow N$  es un morfismo, y armamos unas presentaciones proyectivas minimales  $P_\bullet, Q_\bullet$  de  $M$  y  $N$ , podemos construir una flecha bien definida de  $TrN$  en  $TrM$ . El problema es entender cómo se relaciona esa flecha con la que surge de tomar otras presentaciones proyectivas minimales  $P'_\bullet$  y  $Q'_\bullet$ , que por supuesto son isomorfas a las anteriores. Vamos a ver que  $Tr(f)$  está bien definida salvo flechas “que se factorizan por proyectivos”.

## Radical de una categoría

**Definición 4.20.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría  $k$  aditiva. Un ideal  $I$  en  $\mathcal{C}$  es una clase de morfismos  $I$  tal que para todos objetos  $X, Y, Z$  y morfismos  $f, f': X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ , tenemos que:

1.  $0: X \rightarrow X$  el morfismo cero, pertenece a  $I$ .
2. Si  $f$  y  $f' \in I$ , entonces  $\lambda f + \mu f' \in I$ .
3. Si  $f \in I$  entonces  $g \circ f \in I$ .
4. Si  $g \in I$ , entonces  $g \circ f \in I$ .

**Definición 4.21.** Dado  $I$  un ideal de  $\mathcal{C}$ , definimos  $I(X, Y) := I \cap \text{Hom}(X, Y)$ .

**Observación 4.22.** Notemos que si existe una sección  $f \in I(X, Y)$ , entonces  $Id_X \in I(X, X)$ . Se sigue, por ser ideal, que  $I(X, Y) = \text{Hom}(X, Y)$  y  $I(Z, X) = \text{Hom}(Z, X)$  para todo  $I, Z$ . Lo mismo es cierto si existe  $f \in I(Y, X)$  una retracción.

Un ejemplo importante de ideal de una categoría es el radical de Jacobson:

**Definición 4.23.** El radical de Jacobson de una categoría  $\mathcal{C}$  es la clase de morfismos  $\text{Rad}_{\mathcal{C}}$  definida como

$$\text{Rad}_{\mathcal{C}}(X, Y) := \{f: X \rightarrow Y : Id_X - h \circ f \text{ es un isomorfismo para todo } h: Y \rightarrow X\}$$

Notemos que si  $f \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $f$  no es un isomorfismo salvo que  $X = Y = 0$ . En efecto, en ese caso  $Id_X - f^{-1} \circ f = 0$  sería un isomorfismo y entonces  $X = 0$ .

**Lema 4.24.**  $\text{Rad}_{\mathcal{C}}$  es un ideal de  $\mathcal{C}$ .

*Demostración.* Vamos a probar las propiedades que definen a un ideal:

1) El cero pertenece pues  $Id_X - h \circ 0 = 1_X$  es un isomorfismo.

2) La combinación lineal de elementos pertenece al ideal: sean  $f$  y  $f' \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $\lambda \in k^{\times}$  y  $h: Y \rightarrow X$ . Queremos ver que  $\lambda f \in \text{Rad}$  y que  $f + f' \in \text{Rad}$ . Lo primero es sencillo:  $Id_X - h \circ (\lambda f) = Id_X - (\lambda h) \circ f$  que es un isomorfismo por hipótesis. Entonces  $\lambda f \in \text{Rad}$ .

Queremos ver ahora que  $Id_X - h \circ (f + f')$  es un isomorfismo. Sea  $g$  un isomorfismo tal que  $g \circ (Id_X - h \circ f) = Id_X$ . Entonces

$$g \circ (Id_X - hf - hf') = g \circ (Id_X - hf) - ghf' = Id_X - (gh)f'$$

que es inversible pues  $f' \in \text{Rad}$ . Como  $g$  también es inversible,  $Id_X - h \circ (f + f')$  lo es.

3) Supongamos  $f: X \rightarrow Y \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}$  y sea  $g: Y \rightarrow Z$ . Queremos ver que  $gf \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ . Esto es claro pues  $Id_Z - h(gf) = Id_Z - (hg)f$ .

Supongamos ahora  $f: X \rightarrow Y \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  y sea  $g: Z \rightarrow X$ . Queremos ver  $f \circ g \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$ , i.e.  $Id_Z - hfg$  es inversible. Por hipótesis,  $Id_X - ghf$  es inversible con inversa  $c$ . Luego

$$\begin{aligned} Id_Z &= Id_Z - hfg + hfg = Id_Z - hfg + hf(Id_X - ghf)cg = \\ &= Id_Z - hfg + hf c g - hfghf c g = (Id_Z - hfg)(Id_Z + hf c g) \end{aligned}$$

Luego  $Id_Z - hfg$  tiene una inversa a derecha. Análogamente,

$$\begin{aligned} Id_Z &= Id_Z - hfg + hf c (Id_X - ghf)g = Id_Z - hfg + hf c g - hf c ghf g = \\ &= (Id_Z + hf c g)(Id_Z - hfg) \end{aligned}$$

Entonces tiene una inversa a izquierda. Luego  $Id_Z - hfg$  es un isomorfismo.  $\square$

Además por una demostración similar a que  $\text{Rad}_{\mathcal{C}}$  es un ideal, se puede demostrar que una definición equivalente es

$$\text{Rad}_{\mathcal{C}}(X, Y) := \{f: X \rightarrow Y : \text{Id}_Y - f \circ h \text{ es un isomorfismo para toda } h: Y \rightarrow X\}$$

**Lema 4.25.** *Sea  $X \in \text{mod}_A$ . Entonces  $\text{Rad}_{\mathcal{C}}(X, X) = \text{Rad}(\text{End}(X))$*

*Demostración.* Por definición,  $\text{Rad}_{\mathcal{C}}(X, X) = \{f \in \text{End}(X) : 1 - hf \text{ es inversible para toda } h \in \text{End}(X)\}$ , que es la misma definición para  $\text{Rad}(\text{End}(X))$  que la vista en 3.20 para una  $k$ -álgebra.  $\square$

**Lema 4.26.** *Si  $X$  e  $Y$  son indescomponibles no nulos,*

$$\begin{aligned} \text{Rad}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\stackrel{1}{=} \{f: X \rightarrow Y : f \text{ no es un isomorfismo}\} \\ &\stackrel{2}{=} \{f: X \rightarrow Y : f \text{ no es una sección}\} \\ &\stackrel{3}{=} \{f: X \rightarrow Y : f \text{ no es una retracción}\} \\ &\stackrel{4}{=} \{f: X \rightarrow Y : f \text{ no es una sección ni una retracción}\} \end{aligned}$$

donde 2 vale también si únicamente  $X$  es indescomponible y para 3 alcanza con que únicamente  $Y$  sea indescomponible.

*Demostración.* Demostremos uno y dos:

1)  $\subseteq$ ) Sea  $f \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ . Si  $f$  fuera un isomorfismo, existe  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ . Luego

$$\text{Id}_X - f^{-1}f = \text{Id}_X - \text{Id}_X = 0$$

sería un isomorfismo, entonces  $X = 0$ , absurdo.

$\supseteq$ ) Sea  $f \neq 0$  no isomorfismo y sea  $h: Y \rightarrow X$ , queremos ver que  $\text{Id}_Z - hf$  es inversible. Como  $X$  es indescomponible,  $\text{End}(X)$  es local, entonces  $hf$  es inversible o  $\text{Id}_X - hf$  lo es. Supongamos que  $hf$  lo es. Entonces existe  $g: X \rightarrow X$  tal que  $ghf = hfg = \text{Id}_X$ . Entonces  $f$  es una sección. Luego  $Y = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(gh)$ . Como  $f \neq 0$ ,  $\text{Ker}(gh) = 0$  pues  $Y$  indescomponible. Luego  $gh$  es inyectiva y como era sobreyectiva, es un isomorfismo. Se sigue  $f$  es un isomorfismo, contradicción.

2)  $\supseteq$ ) Si  $f$  no es una sección, por el mismo argumento de antes, como  $X$  es indescomponible, si  $\text{Id}_X - hf$  no es inversible,  $hf$  lo es y entonces  $f$  sería una sección, absurdo.

$\subseteq$ ) Supongamos que existe  $s$  tal que  $sf = \text{Id}_X$ . Luego  $0 = \text{Id}_X - sf$ . Luego  $\text{Id}_X - sf$  no es un isomorfismo pues  $X \neq 0$ , lo que contradice que  $f \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}$ . Luego  $f$  no es una sección.  $\square$

**Lema 4.27.** *Sea  $M \in \text{mod}_A$  un  $A$ -módulo, y supongamos que se descompone como  $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$ . Dada  $f \in \text{End}(M)$ , son equivalentes:*

1.  $f \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(M, M)$
2.  $f_{i,j} \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(M_i, M_j)$  para todo  $i, j$

*Demostración.* Si  $f \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(M, M)$ , el punto 2 es inmediato pues  $f_{i,j} = P_j \circ f \circ i_{M_i}$  y  $\text{Rad}(M, M)$  es un ideal.

Supongamos ahora que  $f_{i,j} \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(M_i, M_j)$  para todo  $i, j$ . Veamos que el morfismo  $f$  está en el radical. Lo escribimos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_j i_{M_j} \circ P_j(x)\right) = \sum_j f i_{M_j}(P_j(x)) = \sum_j \sum_k i_{M_k} \circ P_k f i_{M_j}(P_j(x)) = \\ &\& = \sum_{j,k} i_{M_k} f_{j,k} \circ P_j(x) \end{aligned}$$

Como cada  $f_{j,k}$  está en el radical, que es un ideal, concluimos que  $f \in \text{Rad}_C(M, M)$ . □

## Ideal de proyectivos

**Definición 4.28.** Se define  $\mathcal{P}(X, Y) \subseteq \text{Hom}(X, Y)$  el ideal

$$\mathcal{P}(X, Y) := \{f: X \rightarrow Y : \text{existe } P \in \text{Proy}_A, h: X \rightarrow P \text{ y } g: P \rightarrow Y \text{ tal que } f = gh\}$$

llamado **ideal de proyectivos**. Análogamente se define  $\mathcal{I}(X, Y) \subseteq \text{Hom}(X, Y)$  el **ideal de inyectivos**

$$\mathcal{I}(X, Y) := \{f: X \rightarrow Y : \text{existe } I \in \text{Iny}_A, h: X \rightarrow I \text{ y } g: I \rightarrow Y \text{ tal que } f = gh\}$$

**Observación 4.29.** Demostremos que  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{I}$  son ideales en  $\text{mod}_A$ . Lo haremos solamente para  $\mathcal{P}$ :

1.  $0 \in \mathcal{P}$  pues 0 es proyectivo.
2. Sean  $f, g \in \mathcal{P}(X, Y)$  Entonces existen  $P_1, P_2, f_1, f_2, g_1, g_2$  tal que

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow f_1 & \nearrow f_2 \\ & P_1 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ & \searrow g_1 & \nearrow g_2 \\ & P_2 & \end{array}$$

conmutan. Entonces usando  $P_1 \oplus P_2$ , el siguiente diagrama es conmutativo, y por lo tanto  $f + \lambda g \in \mathcal{P}$ :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f+\lambda g} & Y \\ & \searrow (f_1, g_1) & \nearrow f_2 + \lambda g_2 \\ & P_1 \oplus P_2 & \end{array}$$

3. Sea  $f \in \mathcal{P}(X, Y)$ . Queremos ver que  $gf \in \mathcal{P}$ . Como  $f$  está en el ideal de proyectivos,  $f = f_2 \circ f_1$  con  $f_1: X \rightarrow P$  y  $f_2: P \rightarrow Y$ . Si suponemos que  $g: Y \rightarrow Z$ ,  $gf = g(f_2 \circ f_1) = (gf_2) \circ f_1$ . Entonces  $gf \in \mathcal{P}(X, Z)$  por definición. Análogamente para ver que  $fg \in \mathcal{P}$ .

En particular,  $\mathcal{I}(X, Y)$  y  $\mathcal{P}(X, Y)$  son subespacios vectoriales de  $\text{Hom}(X, Y)$  y entonces  $\text{Hom}(X, Y)/\mathcal{P}(X, Y)$  y  $\text{Hom}(X, Y)/\mathcal{I}(X, Y)$  son espacios vectoriales.

**Ejemplo 4.30.** Sea  $Q$  un carcaj acíclico y  $A = kQ$ . Entonces si  $X \in \text{mod}_P A$  (no tiene sumandos directos proyectivos), cualquier morfismo que se factoriza a través de un proyectivo debe ser nulo, por el corolario 2.25. Por lo tanto, si  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo y  $\bar{f}$  es la clase de  $f$  en el cociente, entonces  $\bar{f} = f$ .

**Definición 4.31.** Definimos la categoría **proyectivamente estable**  $\text{mod}_A$  como la categoría con objetos los mismos que  $\text{mod}_A$  y flechas  $\underline{\text{Hom}}(M, N) := \text{Hom}(M, N)/\mathcal{P}(M, N)$ ; con la composición la inducida por la relación de equivalencia:  $\bar{f} \circ \bar{g} = \overline{fg}$ . Notemos que la identidad con esta composición es  $\bar{Id}$ .

Análogamente definimos la categoría **inyectivamente estable**  $\overline{\text{mod}}_A$  con los mismos objetos y flechas  $\overline{\text{Hom}}(M, N) := \text{Hom}(M, N)/\mathcal{I}(M, N)$ .

**Observacion 4.32.** Todo proyectivo es isomorfo al objeto cero en  $\overline{\text{mod}}_A$ , pues si  $f: P \rightarrow 0$  y  $g: 0 \rightarrow P$  son los morfismos nulos,  $\overline{g \circ f} = \overline{Id_P}$  y  $\overline{f \circ g} = \overline{Id_0}$ .

Esto me dice que en realidad, la categoría proyectivamente estable tiene menos objetos que  $\text{mod}_A$ , ya que me identifica todos los proyectivos entre sí. La pregunta es si me identifica objetos sin sumandos directos proyectivos, y la respuesta es que no.

**Lema 4.33.** La relación entre isomorfismo en módulos e isomorfismo en módulos cocientados por el ideal de proyectivos/inyectivos está dada por el siguiente lema:

1. Sean  $M, N \in \text{mod}_P A$ . Son equivalentes:  $M \cong N$  en  $\text{mod}_A$  si y sólo si  $M \cong N$  en  $\overline{\text{mod}}_A$ .
2. Sean  $M, N \in \text{mod}_I A$ . Análogamente,  $M \cong N$  en  $\text{mod}_A$  si y sólo si  $M \cong N$  en  $\overline{\text{mod}}_A$ .

*Demostración.* Demostraremos solamente el primer punto.

Si existe  $g$  tal que  $f \circ g = Id$  y  $g \circ f = Id$ , tomando clase a ambos lados obtenemos que  $\overline{f}$  es un isomorfismo en  $\overline{\text{mod}}_A$  con inversa  $\overline{g}$ .

Supongamos que  $\overline{M} \cong \overline{N}$  en  $\overline{\text{mod}}_A$ . Luego existen  $f: N \rightarrow M$  y  $g: M \rightarrow N$  tal que  $\overline{f \circ g} = \overline{Id_M}$  y  $\overline{g \circ f} = \overline{Id_N}$ . Por lo tanto existen  $\alpha, \beta, \alpha'$  y  $\beta'$  tal que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{Id_M - fg} & M \\
 & \searrow \beta & \nearrow \alpha \\
 & P & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 N & \xrightarrow{Id_N - gf} & N \\
 & \searrow \beta' & \nearrow \alpha' \\
 & Q & 
 \end{array}$$

1. Caso  $M$  y  $N$  indescomponibles: Entonces  $\text{End}(M)$  y  $\text{End}(N)$  son anillos locales. Luego  $Id_M - fg$  es inversible o  $fg$  lo es y análogo para  $Id_N - gf$ . Como  $M$  es indescomponible, por lema 4.26,

$$\text{Rad}(M, P) = \{w: M \rightarrow P : w \text{ no es una sección}\}$$

Entonces  $\beta \in \text{Rad}(M, P)$ , pues si fuera una sección  $M$  sería un sumando directo de  $P$  y entonces proyectivo.

Luego  $\alpha\beta = Id_M - fg \in \text{Rad}(M)$ , en particular no es un isomorfismo y en consecuencia  $fg$  lo es. Análogamente  $gf$  es un isomorfismo. Se sigue que  $f$  es un isomorfismo.

2. Caso general: escribamos  $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_l$  y que  $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$  con los  $M_i$  y  $N_j$  indescomponibles. Veamos primero que  $fg$  es un isomorfismo.

Definimos

$$\begin{array}{ll}
 g_i: M_i \longrightarrow N & f_j: N \longrightarrow M_j \\
 g_i := g_i|_{M_i} & f_j := P_j f
 \end{array}$$

Como  $Id_M - fg = \alpha\beta$ , componiendo a derecha a ambos lados con la restricción de  $M_i$  y a izquierda con la proyección a  $M_j$  obtenemos que

$$(Id_M - fg)_{i,j} = \alpha^j \beta_i$$

con  $\beta_i: M_i \rightarrow P$  la proyección, y  $\alpha^j: P \rightarrow M_j$  la inclusión, donde  $(Id_M - fg)_{i,j}$  es la coordenada  $(i, j)$  de la matriz del morfismo. Como  $\beta_i \in \text{Rad}(M_i, P)$  pues  $M_i$  es indescomponible y  $M$  no tiene sumandos directos proyectivos,

$$(Id_M - fg)_{i,j} \in \text{Rad}(M_i, M_j) \text{ para todos los } i, j$$

Luego por el lema 4.27,  $Id_M - fg \in \text{Rad}(M)$ . Como

$$Id_M = (Id_M - fg) + fg \text{ y } Id_M \notin \text{Rad}(M)$$

entonces  $fg \notin \text{Rad}(M)$ . Luego  $fg$  es un isomorfismo.

Análogamente, usando la descomposición de  $N$  en indescomponibles, podemos ver que  $gf$  es un isomorfismo. Por lo tanto  $f$  es un isomorfismo.  $\square$

**Observacion 4.34.** Sea  $D: \text{mod}_A \rightarrow {}_A\text{mod}$  el funtor que a un  $A$  módulo  $M$  le asigna  $\text{Hom}_k(M, k)$ . Luego el funtor  $D$  induce una dualidad  $D: \underline{\text{mod}}_A \rightarrow \underline{{}_A\text{mod}}$ .

Nuestro objetivo en esta sección es demostrar que  $Tr$  induce un funtor

$$Tr: \underline{\text{mod}}_A \longrightarrow \underline{{}_A\text{mod}}$$

que además es una dualidad. Para eso hay que definir  $Tr$  sobre las flechas y demostrar que está bien definida en el cociente:

Sea  $f: M \rightarrow N$  morfismo y  $P_\bullet, Q_\bullet$  presentaciones proyectivas minimales de  $M$  y  $N$  respectivamente. Luego existen  $f_1, f_0$  (no necesariamente únicos) tal que

$$\begin{array}{ccccccc} P_0 & \xrightarrow{p_0} & P_1 & \xrightarrow{p_1} & M & \longrightarrow & 0 \\ \exists f_0 \downarrow & & \exists f_1 \downarrow & & \downarrow f & & \\ Q_0 & \xrightarrow{q_0} & Q_1 & \xrightarrow{q_1} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

conmuta, y aplicando  $(-)^t$  tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M^t & \xrightarrow{p_1^t} & P_1^t & \xrightarrow{p_0^t} & P_0^t \xrightarrow{\pi_M} TrM \longrightarrow 0 \\ & & f^t \uparrow & & f_1^t \uparrow & & f_0^t \uparrow & \uparrow Tr(f, f_0, f_1) \\ 0 & \longrightarrow & N^t & \xrightarrow{q_1^t} & Q_1^t & \xrightarrow{q_0^t} & Q_0^t \xrightarrow{\pi_N} TrN \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde  $Tr(f, f_0, f_1)(\pi_N(x)) := \pi_M \circ f_0^t(x)$  está bien definido y es morfismo. El problema es que si bien la resolución, salvo isomorfismo, es única, la forma de completar el diagrama no lo es. Supongamos que

$$\begin{array}{ccccccc} P_0 & \xrightarrow{p_0} & P_1 & \xrightarrow{p_1} & M & \longrightarrow & 0 \\ f'_0 \downarrow & & f'_1 \downarrow & & \downarrow f & & \\ Q_0 & \xrightarrow{q_0} & Q_1 & \xrightarrow{q_1} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es otra forma de completar el diagrama. Notemos que  $f_1 - f'_1 \subseteq \text{Ker}(q_1)$ . Luego existe  $w: P_1 \rightarrow Q_0$  tal que  $q_0 \circ w = f_1 - f'_1$ . Entonces  $f_0 - f'_0 - wp_0: P_0 \rightarrow Q_0$  está contenido en el núcleo de  $q_0$ . En efecto:

$$q_0(f_0 - f'_0 - wp_0) = (f_1 - f'_1)p_0 - q_0wp_0 = (f_1 - f'_1)p_0 - (f_1 - f'_1)p_0 = 0$$

Luego existe  $s_0: P_0 \rightarrow \text{Ker}(q_0)$  tal que

$$f_0 - f'_0 = is_0 + wp_0$$

con  $i$  la inclusión:  $i: \text{Ker}(q_0) \hookrightarrow Q_0$ . Aplicando la transposición tenemos

$$(f_0)^t - (f'_0)^t = s_0^t \circ i^t + p_0^t \circ w^t$$

Y por lo tanto

$$(Tr(f) - Tr'(f)) \circ \pi_N = \pi_M((f_0)^t - (f'_0)^t) = \pi_M \circ s_0^t \circ i^t + \pi_M \circ p_0^t \circ w^t$$

Recordar que  $\pi_M \circ p_0^t = 0$ , entonces

$$(Tr(f) - Tr'(f)) \circ \pi_N = \pi_M \circ s_0^t \circ i^t$$

Nuestro objetivo es demostrar que  $Tr(f) - Tr'(f) \in \mathcal{P}(TrN, TrM)$ . De la forma que tenemos escrita a esa función, bastaría probar que  $i^t$  se factoriza con  $\pi_N$ . Tratemos de ver eso: como  $i^t q_0^t = (q_0 i)^t = 0$ , entonces  $\text{Im}((q_0)^t) \subseteq \text{Ker}(i^t)$  y como  $TrN = Q_0^t / \text{Im}((q_0)^t)$ , entonces existe  $\tilde{i}: TrN \rightarrow \text{Ker}(q_0)^t$  tal que  $i^t = \tilde{i} \pi_N$ . Luego

$$(Tr(f) - Tr'(f))(\pi_N x) = \pi_M \circ s_0^t \circ \tilde{i}(\pi_N x)$$

y por lo tanto

$$(Tr(f) - Tr'(f)) = \pi_M \circ (s_0^t \tilde{i})$$

donde la composición

$$TrN \xrightarrow{s_0^t \tilde{i}} P_0^t \xrightarrow{\pi_M} TrM$$

pertenece a  $\mathcal{P}(TrN, TrM)$ .

Luego  $\overline{Tr(f)} = \overline{Tr'(f)}$  y por lo tanto  $Tr: \text{mod}_A \rightarrow \underline{A\text{mod}}$  está bien definida sobre las flechas.

**Proposición 4.35.** *Sea  $Tr: \text{mod}_A \rightarrow \underline{A\text{mod}}$  definida sobre las flechas como arriba. Entonces:*

1.  $Tr(f) = 0$  para toda  $f \in \mathcal{P}(M, N)$ .
2.  $Tr(f + \lambda g) = Tr(f) + \lambda Tr(g)$ .
3.  $Tr(f \circ g) = Tr(g) \circ Tr(f)$ .
4.  $Tr(Id) = Id$ .

*Esto implica que  $Tr: \text{mod}_A \rightarrow \underline{A\text{mod}}$  es un funtor aditivo.*

*Demostración.* Veamos 1, los demás son consecuencias de la buena definición.

Sea  $f \in \mathcal{P}(M, N)$ ,  $f = \alpha\beta$ ,  $f: M \xrightarrow{\beta} P \xrightarrow{\alpha} N$  con  $P$  proyectivo.

Sean

$$\begin{array}{ccccccc} P_0 & \xrightarrow{p_0} & P_1 & \xrightarrow{p_1} & M & \longrightarrow & 0 \\ \vdots & & \downarrow \beta p_1 & & \downarrow \beta & & y \\ 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{Id} & P & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{Id} & P & \longrightarrow & 0 \\ \vdots & & \downarrow \tilde{\alpha} & & \downarrow \alpha & & \\ 0 & \xrightarrow{q_0} & Q_1 & \xrightarrow{q_1} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

completaciones de los diagramas. Luego como el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} P_0 & \xrightarrow{p_0} & P_1 & \xrightarrow{p_1} & M & \longrightarrow & 0 \\ \vdots & & \downarrow \tilde{\alpha} \beta p_1 & & \downarrow \alpha \beta & & \\ 0 & \xrightarrow{q_0} & Q_1 & \xrightarrow{q_1} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

tomando transposición, el siguiente también:

$$\begin{array}{ccccccc} P_1^t & \xrightarrow{p_0^t} & P_0^t & \xrightarrow{\pi_M} & TrM & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow (\tilde{\alpha} \beta p_1)^t & & \uparrow 0 & & \uparrow Tr(f) & & \\ Q_1^t & \xrightarrow{q_0^t} & Q_0^t & \xrightarrow{\pi_N} & TrN & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

y por lo tanto  $Tr(f) = 0$ . □

**Corolario 4.36.** *La asignación inducida  $Tr: \underline{mod}_A \rightarrow \underline{Amod}$  es un funtor.*

Veamos ahora que es una equivalencia, es decir, que  $Tr TrM \cong M$  en  $\underline{Amod}$  si  $M \in \underline{mod}_A$ .

**Teorema 4.37.** *El funtor  $Tr: \underline{mod}_A \rightarrow \underline{Amod}$  es una equivalencia de categorías.*

*Demostración.* Vamos a hacerlo en partes, primero vamos a ver que

$$Tr Tr|_{\underline{mod}_PA} : \underline{mod}_PA \rightarrow \underline{mod}_PA$$

es equivalente a la identidad, y entonces vamos a escribir

$$\begin{array}{ccc} \underline{mod}_A & \xrightarrow{Tr Tr} & \underline{mod}_A \\ \mathcal{P} \downarrow & & \uparrow j \\ \underline{mod}_PA & \xrightarrow{Tr Tr|_{\underline{mod}_PA}} & \underline{mod}_PA \end{array}$$

y demostrar que  $j \circ \mathcal{P} \cong Id$ .

1) Sea  $M \in \underline{mod}_PA$ ,  $M \neq 0$ . Luego si

$$P_0 \xrightarrow{p_0} P_1 \xrightarrow{p_1} M \rightarrow 0$$

es una ppm de  $M$ , entonces por el teorema 4.9

$$P_1^t \xrightarrow{p_1^t} P_0^t \xrightarrow{\pi} TrM \rightarrow 0$$

es una ppm de  $TrM$ , y por lo tanto,

$$P_0^{tt} \xrightarrow{p_0^{tt}} P_1^{tt} \xrightarrow{\pi_{TrM}} Tr TrM \rightarrow 0$$

es una ppm de  $Tr TrM$ . Recordar que tenemos un isomorfismo natural  $\epsilon_P: P^{tt} \xrightarrow{\cong} P$ , lo que me da un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} P_0^{tt} & \xrightarrow{p_0^{tt}} & P_1^{tt} & \xrightarrow{\pi_{TrM}} & Tr TrM & \longrightarrow & 0 \\ \cong \downarrow \epsilon_{P_0} & & \cong \downarrow \epsilon_{P_1} & & \cong \downarrow \mu_M & & \parallel \\ P_0 & \xrightarrow{p_0} & P_1 & \xrightarrow{p_1} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde el isomorfismo  $\mu_M: Tr TrM \rightarrow M$  es también un isomorfismo en  $\underline{mod}_PA$  pues ni  $M$  ni  $Tr TrM$  tienen componentes proyectivos. Veamos que es natural: para eso tomemos  $f: M \rightarrow N$  un morfismo de módulos. Tomando  $Q_\bullet$  una ppm de  $N$ , para  $N$  también tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} Q_0^{tt} & \xrightarrow{q_0^{tt}} & Q_1^{tt} & \xrightarrow{\pi_{TrN}} & Tr TrN & \longrightarrow & 0 \\ \cong \downarrow \epsilon_{Q_0} & & \cong \downarrow \epsilon_{Q_1} & & \cong \downarrow \mu_N & & \parallel \\ Q_0 & \xrightarrow{q_0} & Q_1 & \xrightarrow{q_1} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$



Entonces para  $f$  podemos completar el diagrama con algunos  $f_1$  y  $f_0$ :

$$\begin{array}{ccccccc} P_0 & \xrightarrow{p_0} & P_1 & \xrightarrow{p_1} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f & & \\ Q_0 & \xrightarrow{q_0} & Q_1 & \xrightarrow{q_1} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

y luego aplicar  $(-)^{tt}$  para obtener  $Tr Tr(f)$ :

$$\begin{array}{ccccccc} P_0^{tt} & \xrightarrow{p_0^{tt}} & P_1^{tt} & \xrightarrow{\pi_{TrM}} & Tr TrM & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f_0^{tt} & & \downarrow f_1^{tt} & & \downarrow Tr Tr(f) & & \\ Q_0^{tt} & \xrightarrow{q_0^{tt}} & Q_1^{tt} & \xrightarrow{\pi_{TrN}} & Tr TrN & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Para verificar que  $Tr Tr(f)$  es natural, necesitamos ver que

$$\begin{array}{ccc} Tr TrM & \xrightarrow{Tr Tr(f)} & Tr TrN \\ \downarrow \mu_M & & \downarrow \mu_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

conmuta. En efecto:

- $\mu_N \circ Tr Tr(f)(\bar{x}) = \mu_N(\overline{f_1^{tt}(x)}) = q_1 \circ \epsilon_{Q_1} \circ f_1^{tt}(x)$ .
- $f \circ \mu_M(\bar{x}) = f \circ p_1 \circ \epsilon_{P_1}(x) = q_1 \circ f_1 \circ \epsilon_{P_1}(x)$ .

Finalmente  $\epsilon_{Q_1} \circ f_1^{tt} = f_1 \circ \epsilon_{P_1}$  por la naturalidad del isomorfismo  $P^{tt} \cong P$ :

$$\begin{array}{ccc} P_1^{tt} & \xrightarrow{f_1^{tt}} & Q_1^{tt} \\ \downarrow \epsilon_{P_1} & & \downarrow \epsilon_{Q_1} \\ P_1 & \xrightarrow{f_1} & Q_1 \end{array}$$

Luego  $Tr Tr|_{\underline{mod}_PA} \cong Id_{\underline{mod}_PA}$ .

2. Vamos a definir el functor  $\mathcal{P}: \underline{mod}_A \rightarrow \underline{mod}_PA$ : Si  $M \in \underline{mod}_A$ ,  $M$  se escribe de forma única, salvo isomorfismos, como  $M = P \oplus M_p$  donde  $M_p$  no tiene sumandos directos proyectivos y  $P$  proyectivo. Definimos  $\mathcal{P}(M) = M_p$  y dado  $\bar{f}: M \rightarrow N$  definimos  $\mathcal{P}(\bar{f}): M_p \rightarrow N_p$  como  $\mathcal{P}(\bar{f}) = \overline{P_{N_p} \circ f|_{M_p}}$ . Se puede ver que  $\mathcal{P}(\bar{f})$  está bien definida, y además que

$$\overline{i_{N_p} \circ \mathcal{P}(\bar{f})} = \overline{i_{N_p} \circ P_{N_p} \circ f|_{M_p}} = \overline{f|_{M_p}}$$

Finalmente es un functor pues  $\mathcal{P}(f \circ g) = \mathcal{P}(f) \circ \mathcal{P}(g)$ .

Además  $j: \underline{mod}_PA \rightarrow \underline{mod}_A$  es simplemente el functor inclusión. Luego alcanza con demostrar que  $j \circ \mathcal{P} \cong Id_{\underline{mod}_A}$ :

a) Supongamos que  $M = P \oplus M_p$  con  $M_p \in \underline{mod}_PA$ . Entonces  $M \cong M_p = \mathcal{P}(M)$  en  $\underline{mod}_A$ ; de hecho  $P_{M_p}: M \rightarrow M_p$  es un isomorfismo con inversa  $i_{M_p}$ : en efecto,  $Id_M - iP_{M_p} \in \mathcal{P}(M, M)$  y  $Id_{M_p} - P_{M_p}i \in \mathcal{P}(M_p, M_p)$  pues los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
M_p & \xrightarrow{Id_{M_p} - P_{M_p} i} & M_p \\
& \searrow 0 & \nearrow 0 \\
& & P
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{Id_M - iP_{M_p}} & M \\
& \searrow Pr & \nearrow i \\
& & P
\end{array}$$

b) Finalmente es natural pues el siguiente diagrama conmuta en  $\underline{mod}_A$ :

$$\begin{array}{ccc}
M_p & \xrightarrow{\overline{P_{N_p} f|_{M_p}}} & N_p \\
\overline{i_{M_p}} \downarrow & & \downarrow \overline{i_{N_p}} \\
M & \xrightarrow{\overline{f}} & N
\end{array}$$

3. Luego  $Tr Tr = j \circ Tr Tr|_{\underline{mod}_{PA}} \circ \mathcal{P} \approx j \circ \mathcal{P} \approx Id_{\underline{mod}_{PA}}$ . □

## Parte 5

# Teoría de Auslander-Reiten

El carcaj de *Auslander–Reiten* es una construcción muy poderosa para estudiar la categoría de módulos sobre un álgebra de caminos. Por ejemplo nos permite, en el caso de quivers de tipo de representación finita, calcular algorítmicamente (mediante el algoritmo de tejido *-knitting algorithm*) los vectores dimensión de las representaciones indescomponibles, y los espacios de morfismos entre dos representaciones indescomponibles.

El tenor de la primera parte de este capítulo se basa en la exposición de [SY12] y la segunda en [Sch14]. El lema 5.13 está simplificado, el lema 5.25 es un resultado básico sobre la forma del carcaj AR cuya demostración no pudimos hallar en la literatura y del cual incluimos una demostración propia. Además se incluyen los ejemplos 5.28 y 5.29 con cálculos propios.

Para formalizar cuáles y cuántas son las flechas en el carcaj AR debemos definir las sucesiones exactas cortas casi partidas. A lo largo de este capítulo como en todo el trabajo  $A$  es una  $k$ -álgebra de dimensión finita y  $M, N$   $A$ -módulos finitamente generados, usualmente a derecha. Tendremos en mente  $A = kQ$  con  $Q$  sin ciclos dirigidos o un carcaj con relaciones acotado.

### 5.1. Morfismos casi partidos

#### Definición 5.1.

- Un morfismo  $f: L \rightarrow M$  es **casi partido** (*almost split* en inglés) **a izquierda** si:

1. El morfismo  $f$  no es una sección.
2. Para todo  $u: L \rightarrow U$  que no es una sección, existe  $u': M \rightarrow U$  tal que  $u' \circ f = u$ .

y es **minimal a izquierda** si para todo  $h: M \rightarrow M$  tal que  $hf = f$  entonces  $h$  es un isomorfismo de  $M$ .  $f$  es **casi partido minimal a izquierda** si es casi partido a izquierda y minimal.

- Análogamente, un morfismo  $g: M \rightarrow N$  es **casi partido a derecha** si:

1. El morfismo  $g$  no es una retracción.
2. Para todo morfismo  $v: V \rightarrow N$  que no es una retracción, existe  $v': V \rightarrow M$  tal que  $gv' = v$ .

Y es **minimal a derecha** si para todo  $h: M \rightarrow M$  tal que  $gh = g$  entonces  $h$  es un isomorfismo de  $M$ . Se dice que  $g$  es **casi partido minimal a derecha** si es casi partido y minimal a derecha.

Por su misma definición, es inmediato probar que los morfismos casi partidos minimales a derecha son únicos salvo isomorfismo, es decir:

**Proposición 5.2.** 1. Sean  $f: L \rightarrow M$  y  $f': L \rightarrow M'$  morfismos casi partidos minimales a izquierda. Entonces existe un isomorfismo  $h: M \rightarrow M'$  tal que  $hf = f'$ .

2. Sean  $g: M \rightarrow N$  y  $g': M' \rightarrow N$  morfismos casi partidos minimales a derecha. Entonces existe un isomorfismo  $h: M \rightarrow M'$  tal que  $g'h = g$ .

Además de ser casi únicos, los morfismos casi partidos minimales tienen otra rigidez: sólo pueden salir o llegar (depende de si a izquierda o a derecha) de módulos indescomponibles.

**Proposición 5.3.** Sean  $L, M$  y  $N$  representaciones de un carcaj.

1. Si un morfismo  $f: L \rightarrow M$  es casi partido minimal a izquierda, entonces  $L$  es indescomponible.

2. Si un morfismo  $g: M \rightarrow N$  es casi partido minimal a derecha, entonces  $N$  es indescomponible.

*Demostración.*

1) Supongamos que  $L = L_1 \oplus L_2$  con  $L_1 \neq 0$  y sea  $p_1: L \rightarrow L_1$  la proyección. Afirmo que  $p_1$  no es una sección. Si lo fuera, existiría  $s: L_1 \rightarrow L$  tal que  $s \circ p_1 = Id_{L_1}$ . Se deduce que  $p_1$  sería un monomorfismo, y como  $p_1$  es la proyección a  $L_1$ , entonces  $L_2$  sería cero. Luego  $L$  es indescomponible.

La parte 2 es análoga. □

En los siguientes puntos daremos ejemplos en concreto de morfismos casi partidos:

**Proposición 5.4.** El morfismo  $0: X \rightarrow Y$  es:

1. almost split minimal a izquierda si y solamente si  $X$  es simple, inyectivo e  $Y = 0$ .

2. almost split minimal a derecha si y solamente si  $Y$  es simple, proyectivo y  $X = 0$ .

*Demostración.* Hacemos solamente 1:

Supongamos que el morfismo  $0$  es almost split minimal a izquierda. Afirmamos que  $X$  es simple:  $X$  es no nulo pues  $0$  no es una sección. Sea  $H \leq X$  no nulo. Queremos ver que  $H = X$ . Consideremos  $\pi: X \rightarrow X/H$  el morfismo al cociente. Afirmamos que no es una sección: si lo fuera, sería inyectiva, y por lo tanto un isomorfismo lo que implica  $H = 0$ , contradicción. Luego no es una sección y por lo tanto como  $0$  es almost split existe  $u: Y \rightarrow X/H$  tal que  $u \circ 0 = \pi$ . Luego  $\pi = 0$  y por lo tanto  $X = H$ .

$X$  es inyectivo: Sea  $i: X \hookrightarrow I$  la cápsula inyectiva de  $X$ . Si  $i$  es una sección,  $X$  es un sumando directo de  $I$  y por lo tanto es inyectivo. Si no es una sección, existe  $u: Y \rightarrow I$  tal que  $u \circ 0 = i$ . Luego  $i = 0$ , pero  $i$  es inyectivo, entonces  $X = 0$ , absurdo pues  $0$  no es sección.

Finalmente, como  $0_Y \circ 0 = 0$  entonces  $0_Y: Y \rightarrow Y$  es un isomorfismo, lo que implica que  $Y = 0$ .

Supongamos que  $Y = 0$  y  $X$  es simple e inyectivo. Entonces  $0$  no es una sección pues un simple no es nulo.

Además si  $u: X \rightarrow Z$  es un morfismo que no es sección, como  $X$  es simple,  $u = 0$  o  $u$  es inyectiva. Afirmamos que  $u = 0$ . En efecto, si  $u$  fuera un monomorfismo, como  $X$  es inyectivo, tendría un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{u} & Z \\
\parallel & \swarrow \exists h & \\
X & & 
\end{array}$$

es decir  $u$  sería una sección, contradicción. Luego  $u = 0$ . Entonces para el segundo punto de la definición 5.1, definimos  $u': Y \rightarrow Z$  como  $u' = 0$ . Finalmente 0 es minimal trivialmente.  $\square$

Otro ejemplo de morfismos almost split son los que vienen junto con el radical de un proyectivo o el zócalo de un inyectivo:

**Teorema 5.5.** 1. Sea  $P$  proyectivo indescomponible e  $i: \text{Rad } P \hookrightarrow P$  la inclusión. Entonces  $i$  es almost split minimal a derecha.

2. Sea  $I$  inyectivo indescomponible y  $\pi: I \rightarrow I/\text{Soc } I$  la proyección. Entonces  $\pi$  es almost split minimal a izquierda.

*Demostración.*

1) Sea  $P$  proyectivo indescomponible e  $i: \text{Rad } P \hookrightarrow P$  la inclusión.

a)  $i$  no es una retracción pues si lo fuera sería sobreyectiva, pero  $\text{Rad } P \subsetneq P$  (porque  $A$  es una álgebra finitamente generada y entonces  $P$  tiene algún submódulo maximal, que en particular es propio).

b) Supongamos que  $v: V \rightarrow P$  no es una retracción. Quisieramos completar el diagrama con un  $v'$  tal que el triangulo sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{v} & P \\
& \searrow v' & \uparrow i \\
& & \text{Rad } P
\end{array}$$

Notemos que  $v$  no es sobreyectiva, pues como  $P$  es proyectivo, si lo fuera sería una retracción. Por otra parte,  $P$  es un proyectivo indescomponible, entonces es de la forma  $e_i A$ . Luego por la proposición 3.35 (podemos usarla porque  $P = e_i A$ ),  $\text{Rad } P$  es el único submódulo maximal. De ello se sigue que  $\text{Im}(v) \subseteq \text{Rad } P$ . Luego efectivamente podemos elegir  $v'$  como  $v$  corestringida a  $\text{Rad } P$ .

c) Supongamos que  $i = hi$ , con  $h: P \rightarrow P$  un morfismo. Se deduce que  $h|_{\text{Rad } P} = i$ . Pero  $\text{Ker}(h) \subseteq \text{Rad } P$  de nuevo por la proposición 3.35. Entonces  $\text{Ker}(h) = 0$ . Entonces  $h: P \rightarrow P$  es un monomorfismo y entonces un isomorfismo por dimensión.

2. Sea  $\pi: I \rightarrow I/\text{Soc } I$  la proyección. El segundo punto de la proposición sale recordando la parte 10 de la proposición 4.2 y la proposición a continuación.  $\square$

**Proposición 5.6.** Sea  $D: \text{mod}_A \rightarrow {}_A \text{mod}$  el funtor dualidad.

- Si  $f: L \rightarrow M$  es almost split minimal a izquierda, entonces  $D(f): DM \rightarrow DL$  es almost split minimal a derecha.
- Si  $f: M \rightarrow N$  es almost split minimal a derecha, entonces  $D(f): DN \rightarrow DM$  es almost split minimal a izquierda.

**Definición 5.7.** Una sucesión exacta corta en  $\text{mod}_A$

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

es **almost split** o **AR** si  $f$  es un morfismo almost split minimal a izquierda y  $g$  es almost split minimal a derecha.

La existencia de sucesiones almost split no es evidente. Maurice Auslander e Idun Reiten las introdujeron y demostraron su existencia en 1975 para estudiar la teoría de representaciones de álgebras artinianas [AR75].

**Teorema 5.8.** (Auslander y Reiten) *Sea  $A$  una  $k$  álgebra de dimensión finita. Entonces vale:*

1. *Para todo módulo indescomponible no proyectivo finitamente generado  $M$ , existe una sucesión exacta almost split*

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

2. *Para todo módulo indescomponible no inyectivo finitamente generado  $N$ , existe una sucesión exacta almost split*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow 0$$

*Demostración.* Ver [SY12], teorema 8,4. □

## 5.2. Morfismos irreducibles

Daremos una definición equivalente de sucesión almost split basada en morfismos *irreducibles*. Tiene la ventaja que ahora la cantidad o existencia de morfismos irreducibles entre dos módulos es más sencilla de encontrar utilizando el radical de la categoría con la definición dada en 4.23. Además, el concepto no depende de ser a izquierda o derecha.

**Definición 5.9.**  $f: X \rightarrow Y$  es **irreducible** si:

1.  $f$  no es una sección.
2.  $f$  no es una retracción.
3. Si  $f = f_2 \circ f_1$ , entonces  $f_2$  es una retracción o  $f_1$  es una sección.

Notemos que 1 en particular implica que  $X \neq 0$  y 2 que  $Y \neq 0$ .

El siguiente lema establece que los morfismos almost split e irreducibles son estables por isomorfismos:

**Lema 5.10.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo y  $\tilde{X} \xrightarrow{u} X$ ,  $Y \xrightarrow{v} \tilde{Y}$  isomorfismos. Tenemos las siguientes equivalencias:*

1. *La función  $f$  es una sección si y sólo si  $vf_u$  es una sección.*
2. *La función  $f$  es una retracción si y sólo si  $vf_u$  es una retracción.*
3. *La función  $f$  es irreducible si y sólo si  $vf_u$  es irreducible.*
4. *La función  $f$  es almost split minimal a izquierda si y sólo si  $vf_u$  es almost split minimal a izquierda.*
5. *La función  $f$  es almost split minimal a derecha si y sólo si  $vf_u$  es almost split minimal a derecha.*

*Demostración.*

1) Demostremos 1 solamente ya que 2 es similar. Si  $f$  es una sección y  $sf = Id_X$ ,

$$(u^{-1}sv^{-1})(vfu) = Id_{\tilde{X}}$$

lo que implica que es una sección. Análogamente si  $vfu$  es una sección y  $\tilde{s}: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$  es su inversa a izquierda, entonces

$$\tilde{s}vfu = Id_{\tilde{X}}$$

Aplicando  $u^{-1}$  a la derecha en ambos lados, obtenemos

$$\tilde{s}vf = u^{-1}$$

y entonces aplicando  $u$  a la izquierda:

$$u\tilde{s}vf = (u\tilde{s}v)f = Id_X$$

lo que significa que  $f$  es una sección.

3) Supongamos que  $f$  es irreducible. Luego  $vfu$  no es ni sección ni retracción por los dos puntos anteriores. Y si  $vfu = \tilde{f}_2\tilde{f}_1$ ,

$$f = (v^{-1}\tilde{f}_2)(\tilde{f}_1u^{-1})$$

donde o bien  $v^{-1}\tilde{f}_2$  es una retracción por o bien  $\tilde{f}_1u^{-1}$  es una sección. Luego o bien  $\tilde{f}_2$  es una retracción o bien  $\tilde{f}_1$  es una sección. La vuelta es inmediata utilizando la ida con  $v^{-1}$  y  $u^{-1}$ .

4) Supongamos que  $f$  es almost split minimal a izquierda.  $vfu: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  no es una sección por 1. Para el segundo punto de la definición, sea  $g: \tilde{X} \rightarrow U$  que no es una sección. Entonces  $gu^{-1}: X \rightarrow U$  tampoco es una sección. Luego como  $f$  es almost split existe  $a: Y \rightarrow U$  tal que  $af = gu^{-1}$ . Luego

$$afu = g$$

Escribiendo a  $Id$  como  $v^{-1} \circ v$ , tenemos que

$$(av^{-1})vfu = g$$

tomando  $g' = (av^{-1})$ , eso demuestra la parte 2 de la definición 5.1. Finalmente, falta ver que es minimal. Supongamos que  $hvf = vfu$ . Luego  $(v^{-1}hv)f = f$ . Entonces  $v^{-1}hv$  es un isomorfismo y como  $v$  es un isomorfismo,  $h$  también. La vuelta es inmediata usando la ida, y el punto 5 es completamente análogo.  $\square$

**Lema 5.11.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo irreducible. Entonces  $f$  es un monomorfismo o un epimorfismo pero no ambos.*

*Demostración.* Que no puede ser ambos al mismo tiempo es claro: en ese caso sería un isomorfismo, y en particular una sección. Veamos que alguno tiene que ser: supongamos que  $f$  no es sobreyectivo. Entonces  $f = i_{\text{Im}(f)} \circ \tilde{f}$ , con  $\tilde{f}$  la corestricción de  $f$  e  $i$  la inclusión. Luego o  $i$  es una retracción o  $\tilde{f}$  es una sección.  $i$  no es una retracción pues entonces sería sobreyectiva y entonces  $\text{Im}(f) = Y$ . Entonces  $\tilde{f}$  es una sección y por lo tanto  $f$  es inyectiva.  $\square$

**Proposición 5.12.** *1. Sea  $P$  proyectivo, indescomponible y no simple. Entonces  $i: \text{Rad } P \hookrightarrow P$  es irreducible.*

2. Sea  $I$  inyectivo, indescomponible y no simple. Entonces  $\pi: I \rightarrow I/\text{Soc } I$  es irreducible.

*Demostración.*

1) Supongamos que  $P$  no es simple. Entonces  $\text{Rad } P \neq 0$  pues si lo fuera,  $P$  sería semisimple e indescomponible, i.e., simple.  $i$  no es sección pues  $P$  es indescomponible y  $\text{Rad } P \neq 0$ . Tampoco es retracción pues no es sobreyectiva. Supongamos que existen  $i_1$  y  $i_2$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Rad } P & \xrightarrow{i} & P \\ & \searrow i_1 & \nearrow i_2 \\ & Z & \end{array}$$

conmuta. Si  $i_2$  es sobreyectivo entonces es una retracción pues  $P$  es proyectivo. Si  $i_2$  no es sobreyectivo,  $\text{Im}(i_2) \subseteq \text{Rad } P$ . Entonces  $i_2$  se factoriza vía  $\tilde{i}_2$ , la corestricción de  $i_2$  a su imagen:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Rad } P & \xrightarrow{Id} & \text{Rad } P & \xrightarrow{i} & P \\ & \searrow i_1 & \nearrow \tilde{i}_2 & \nearrow i & \\ & & Z & \xrightarrow{i_2} & \end{array}$$

Entonces  $\tilde{i}_2 i_1 = id_{\text{Rad } P}$ . Luego  $i_1$  es una sección. □

Damos una definición equivalente de morfismo irreducible:

**Lema 5.13.** Sean  $X$  e  $Y$  A módulos indescomponibles y  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo. Son equivalentes que  $f$  sea irreducible y que  $f$  pertenezca a  $\text{Rad}(X, Y) - \text{Rad}^2(X, Y)$ .

*Demostración.*

Supongamos  $f$  irreducible. Como  $X$  e  $Y$  son indescomponibles, por el lema 4.26,

$$\text{Rad}(X, Y) = \{g: X \rightarrow Y : g \text{ no es una sección ni una retracción}\}$$

Como  $f$  es irreducible,  $f \in \text{Rad}(X, Y)$ .

Por otra parte, supongamos que  $f \in \text{Rad}^2(X, Y)$ , i.e.  $f = gh$  con  $g \in \text{Rad}(Z, Y)$  y  $h \in \text{Rad}(X, Z)$ . Entonces, como  $f$  es irreducible,  $g$  es retracción o  $h$  es sección. Si  $g$  es retracción, existe  $r$  tal que  $gr = Id_Y$ . Como  $g \in \text{Rad}(Z, Y)$  y  $\text{Rad}$  es un ideal,  $Id_Y \in \text{Rad}(Y, Y)$ , entonces  $Y = 0$ , absurdo. Luego  $g$  no es retracción. Por lo tanto  $h$  es sección. Pero análogamente existe  $s$  tal que  $sh = Id_X$ . Como  $h \in \text{Rad}$ ,  $Id_X \in \text{Rad}(X, X)$ . Luego  $X = 0$ , absurdo. Por lo tanto  $f \notin \text{Rad}^2$ .

Veamos la vuelta. Como  $f \in \text{Rad}(X, Y)$  y  $X$  e  $Y$  son indescomponibles,  $f$  no es ni sección ni retracción. Y si  $f = gh$ , con  $h: X \rightarrow Z$ ,  $g: Z \rightarrow Y$ , no podemos utilizar inmediatamente la caracterización del  $\text{Rad}$  del lema 4.26 pues  $Z$  puede no ser indescomponible.

Supongamos que ni  $g$  es una retracción ni  $h$  una sección. Escribamos  $Z = \bigoplus_k Z_k$ , con  $Z_k$  indescomponibles, y a  $g = \sum g_k P_k$  con  $g_k: Z_k \rightarrow Y$  las restricciones de  $g$  a los sumandos directos y  $P_k$  las proyecciones. Afirmamos que  $g_k \in \text{Rad}(Z_k, Y)$  para todo  $k$ . En efecto, como  $Z_k$  e  $Y$  son indescomponibles podemos usar la equivalencia de 4.26. Si alguno fuera una retracción existiría  $r: Y \rightarrow Z_{k_0}$  tal que  $g_{k_0} r = Id_Y$ . Sea  $\tilde{r} = i_{k_0} r: Y \rightarrow Z$ . Entonces

$$g\tilde{r} = \left( \sum g_k P_k \right) i_{k_0} r = \sum g_k P_k i_{k_0} r = g_{k_0} P_{k_0} i_{k_0} r = g_{k_0} r = Id_Y$$

lo que contradice que  $g$  no es una retracción. Por lo tanto  $g_k \in \text{Rad}(Z_k, Y)$  para todo  $k$ . Se sigue por la definición de ideal que  $g_k P_k \in \text{Rad}(Z, Y)$  para todo  $k$ , y entonces  $g \in \text{Rad}(Z, Y)$ . Análogamente, como  $h$  no es sección,  $h \in \text{Rad}(X, Z)$ . Luego  $f \in \text{Rad}^2(X, Y)$ , contradiciendo la hipótesis. Luego  $g$  es una retracción o  $h$  es una sección. □



Queremos demostrar que una sucesión exacta corta casi partida es lo mismo que una con morfismos irreducibles y extremos indescomponibles. Para eso necesitamos algunos lemas:

**Lema 5.14.** *Sea*

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

una sucesión exacta corta que no se parte.

1.  $f$  es irreducible si y sólo si para todo morfismo  $v: V \rightarrow N$  ocurre alguna de las dos situaciones:

- a) existe  $v_1: V \rightarrow M$  tal que  $v = g \circ v_1$ .
- b) existe  $v_2: M \rightarrow V$  tal que  $g = v \circ v_2$ .

2.  $g$  es irreducible si y sólo si para todo  $u: L \rightarrow U$  ocurre alguna de las dos situaciones:

- a) existe  $u_1: M \rightarrow U$  tal que  $u = g_1 \circ f$ .
- b) existe  $u_2: U \rightarrow M$  tal que  $f = u_2 \circ u$ .

*Demostración.* Sólo demostraremos 1. Supongamos que  $f$  es irreducible. Sea  $v: V \rightarrow N$ . Como hay dos flechas que llegan a  $N$ , tiene sentido usar el pull back de  $M$  y  $V$ : recordar que por el teorema 1.33 tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f'} & X & \xrightarrow{\pi_2} & V & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \pi_1 \downarrow & & \downarrow v & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por lo tanto  $f = \pi_1 f'$  y como  $f$  es irreducible,  $\pi_1$  es retracción o  $f'$  es sección. Si  $f'$  es sección, eso es equivalente a que  $\pi_2$  sea retracción. Luego existe  $r: V \rightarrow X$  tal que  $\pi_2 r = Id_V$ . Por lo tanto si tomamos  $v_1 := \pi_1 r$ ,  $g(\pi_1 r) = (g\pi_1)r = (v\pi_2)r = v$ . Y si  $\pi_1$  es retracción, existe  $r: M \rightarrow X$  tal que  $\pi_1 r = Id_M$ . Luego podemos elegir  $v_2 := \pi_2 r$ . Así definida,  $v_2$  satisface lo pedido:

$$v \circ v_2 = v\pi_2 r = g\pi_1 r = g$$

Supongamos ahora que vale la vuelta. El morfismo  $f$  no es una sección pues la secuencia no se parte, tampoco es una retracción, pues no es sobreyectiva (si lo fuera  $N = 0$  y  $g$  sería una retracción). Para ver que es irreducible, falta ver qué sucede si  $f$  se factorizara. Escribamos a  $f$  como  $f = \beta\alpha$ . Es decir, hay un triangulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ & \searrow \alpha & \nearrow \beta \\ & \tilde{N} & \end{array}$$

Entonces  $\alpha$  es inyectiva pues  $f$  lo es, luego podemos construir un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{N} & \xrightarrow{\pi} & Coker(\alpha) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow \exists h & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por la caracterización del pull back del teorema 1.33,  $\tilde{N}$  con  $\pi$  y  $\beta$  es el pull back de  $Coker(\alpha) \xrightarrow{h} N$  y  $M \xrightarrow{g} N$ .

Por hipótesis existe  $v_1: Coker(\alpha) \rightarrow M$  tal que  $gv_1 = h$  o  $v_2: M \rightarrow Coker(\alpha)$  tal que  $hv_2 = g$ . En el primer caso, si existe tal  $v_1$ , el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Coker}(\alpha) & \xrightarrow{Id} & \text{Coker}(\alpha) \\ v_1 \downarrow & & \downarrow h \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

por definición de  $v_1$  y por la universalidad del pull back existe un morfismo  $\psi: \text{Coker}(\alpha) \rightarrow \tilde{N}$  tal que  $\pi\psi = Id$  y  $\beta\psi = v_1$ . Luego

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{\alpha} \tilde{N} \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(\alpha) \rightarrow 0$$

se parte, por lo tanto  $\alpha$  es una sección.

En el segundo caso, si existe  $v_2$  tal que  $hv_2 = g$ , el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{v_2} & \text{Coker}(\alpha) \\ Id \downarrow & & \downarrow h \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

Luego existe  $\psi: M \rightarrow \tilde{N}$  tal que  $\pi\psi = v_2$  y  $\beta\psi = Id$ . Por lo tanto  $\beta$  es una retracción.  $\square$

**Lema 5.15.** 1. Si  $f: M \rightarrow N$  es irreducible inyectivo entonces  $f$  no es sobreyectivo y  $\text{Coker}(f)$  es indescomponible.

2. Si  $g: M \rightarrow N$  es irreducible sobreyectivo, entonces  $g$  no es inyectivo y  $\text{Ker}(g)$  es indescomponible.

*Demostración.* Demostraremos 1. Que  $f$  no puede ser sobreyectivo ya lo vimos en el lema 5.11. Supongamos que  $\text{Coker}(f) = L_1 \oplus L_2$  con  $L_k \neq 0$ ,  $k = 1, 2$ .

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(f) \rightarrow 0$$

no se parte pues  $f$  no es sección. Entonces para  $k = 1, 2$ , hay el morfismo inclusión  $L_k \xrightarrow{\text{inc}_k} \text{Coker}(f)$ . Luego por el teorema anterior, para cada  $k$ , existe  $v_k: N \rightarrow L_k$  tal que  $\text{inc}_k \circ v_k = \pi$ , o existe  $v_k: L_k \rightarrow N$  tal que  $\pi \circ v_k = \text{inc}_k$ . Si estamos en el primer caso y  $v_k: N \rightarrow L_k$ , entonces el otro sumando directo  $L_{k'}$  es cero. En efecto, si  $\bar{a} \in L_{k'}$ , con  $a \in N$ ,  $\text{inc}_k v_k(a) = \bar{a} \in L_{k'}$ . Pero  $\text{inc}_k(v_k(a)) \in L_k$  entonces  $\bar{a} = 0$ , luego  $L_{k'} = 0$ . Podemos asumir entonces que  $v_k$  va de  $L_k$  en  $N$  y  $\pi v_k = \text{inc}_k$ . Entonces  $\pi$  es una retracción con inversa a derecha  $v_1 + v_2$ :

$$\begin{array}{ccc} v_1 + v_2: L_1 \oplus L_2 & \longrightarrow & N \\ (l, l') & \longrightarrow & v_1(l) + v_2(l') \end{array}$$

En efecto,  $\pi \circ (v_1 + v_2)(l + l') = \pi v_1(l) + \pi v_2(l') = \text{inc}_1(l) + \text{inc}_2(l') = l + l' = \text{Id}_{\text{Coker}(f)}(l + l')$  y por lo tanto la sucesión se parte, contradicción.  $\square$

Veamos ahora la relación entre morfismos almost split y morfismos irreducibles:

**Proposición 5.16.** Sea  $g: M \rightarrow N$  un morfismo no nulo almost split a derecha minimal. Son validas las siguientes afirmaciones:

1.  $g$  es irreducible.

2. Un morfismo  $g': M' \rightarrow N$  es irreducible si y solamente si se satisface que  $M' \neq 0$  y existe  $M'' \in \text{mod}_A$ , un isomorfismo  $\psi: M \rightarrow M' \oplus M''$  y un morfismo  $g'': M'' \rightarrow N$  tal que

$$(g', g''): M' \oplus M'' \rightarrow N$$

es un morfismo minimal almost split a derecha y  $(g', g'') \circ \psi = g$ .

*Demostración.* 1)  $g$  es irreducible:  $g$  no es retracción por hipótesis. Tampoco es sección pues entonces  $N$  se descompondría como  $\text{Im}(g) \oplus \text{Ker}(s)$  (donde  $s$  es la inversa a izquierda de  $g$ ) con  $\text{Im}(g) \neq 0$ . Pero también  $\text{Ker}(s) \neq 0$  pues si fuera cero,  $s$  sería un isomorfismo, y por lo tanto  $g$  también lo que implicaría que sería una retracción. Luego  $\text{Ker}(s) \neq 0$  y entonces  $N$  no sería indescomponible, lo que contradice la proposición 5.3.

Finalmente, supongamos  $g = g_2 g_1$ , donde  $g_1$  es un morfismo  $g_1: M \rightarrow Z$ , y  $g_2$  es un morfismo  $g_2: Z \rightarrow N$ . Supongamos que  $g_2$  no es una retracción. Entonces por hipótesis existe  $g': Z \rightarrow M$  tal que  $g g' = g_2$  Precomponiendo con  $g_1$ ,  $g g' g_1 = g_2 g_1 = g$ , y como  $g$  es minimal  $g' g_1$  es un isomorfismo. Luego existe un  $\varphi$  tal que  $\varphi g' g_1 = \text{Id}_M$ , por lo tanto  $g_1$  es una sección.

2) Supongamos ahora que  $g': M' \rightarrow N$  es irreducible. Ya sabemos que  $M' \neq 0$ . Luego como  $g$  es almost split a derecha existe  $v: M' \rightarrow M$  tal que  $g v = g'$ . Como  $g'$  es irreducible,  $v$  es sección ( $g$  no es retracción por hipótesis). Luego existe  $s: M \rightarrow M'$  tal que  $s v = \text{Id}_{M'}$ . Por lo tanto  $M = \text{Im}(v) \oplus \text{Ker}(s)$ . Luego si definimos  $M'' := \text{Ker}(s)$  tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Im}(v) \oplus \text{Ker}(s) & \xrightarrow{g} & N \\ v \oplus \text{Id} \uparrow \cong & & \nearrow \\ M' \oplus M'' & \xrightarrow{(g', g|_{\text{Ker}(s)})} & \end{array}$$

Como  $v \oplus \text{Id}$  es un isomorfismo y  $g$  es almost split minimal a derecha,  $(g', g|_{\text{Ker}(s)})$  es almost split minimal a derecha por el lema 5.10.

Supongamos ahora que  $(g', g'')$  es almost split minimal a derecha. Veamos que  $g'$  es irreducible.  $g'$  no es retracción: Si lo fuera existe  $r: N \rightarrow M'$  con  $g' r = \text{Id}_N$ . Definimos  $\tilde{r}: N \rightarrow M' \oplus M''$ , como  $\tilde{r} = (r, 0)$ . Entonces

$$(g', g'') \circ \tilde{r} = (g', g'') \circ (r, 0) = g' \circ r + g'' \circ 0 = g' r = \text{Id}_N$$

Luego  $\tilde{r}$  es una retracción para  $(g', g'')$ , lo que contradice que sea almost split.

Además  $g': M' \rightarrow N$  no es sección, si lo fuera  $N$  no sería indescomponible, pues  $N \cong M' \oplus \text{Im}(g')$ , lo que contradice que  $(g', g'')$  es almost split minimal a derecha (proposición 5.3).

Finalmente, supongamos que  $g' = \beta \alpha$ , con  $\alpha: M' \rightarrow Z$ ,  $\beta: Z \rightarrow N$  y que  $\beta$  no es una retracción. Queremos ver que  $\alpha$  es una sección. La idea de la demostración es usar la parte del teorema que ya demostramos: que almost split minimal a derecha implica irreducible. La usaremos para la única función que sabemos que lo es:  $(g', g'')$ . Para eso, primero debemos escribir a  $(g', g'')$  como una composición. Eso no es muy difícil: si definimos dos morfismos

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \text{Id}_{M''} \end{bmatrix} : M' \oplus M'' \longrightarrow Z \oplus M'' & & (\beta, g'') : Z \oplus M'' \longrightarrow N \\ (a, b) \longrightarrow (\alpha(a), b) & & (z, m) \longrightarrow \beta(z) + g''(m) \end{array}$$

entonces

$$(\beta, g'') \circ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \text{Id}_{M''} \end{bmatrix} = (\beta \alpha, g'' \text{Id}_{M''}) = (g', g'')$$

Luego como  $(g', g'')$  es almost split minimal a derecha, es irreducible, y por lo tanto o  $(\beta, g'')$  debe ser retracción, o la matriz debe ser sección. Si vale la última posibilidad ya estamos, porque una sección de la matriz va a implicar una sección de  $\alpha$ . Veamos entonces que  $(\beta, g'')$  no es una retracción. Sabemos que individualmente  $\beta$  no es una retracción por hipótesis y  $g''$  tampoco puede ser una retracción: si lo fuera existiría  $r$  tal que  $g'' r = \text{Id}_N$ . Entonces

$$(g', g'') \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} = 0 + g'' r = \text{Id}_N$$

y luego  $(g', g'')$  sería una retracción.

Por lo tanto ni  $\beta$  ni  $g''$  son retracciones. Pero recordando el lema 4.26, como  $N$  es indescomponible, eso es equivalente a que  $\beta \in \text{Rad}(Z, N)$  y  $g'' \in \text{Rad}(M'', N)$ . Luego  $\beta P_1 \in \text{Rad}(Z \oplus M'', N)$  y  $g'' P_2 \in \text{Rad}(Z \oplus M'', N)$ . Entonces  $\beta P_1 + g'' P_2 = (\beta, g'') \in \text{Rad}(Z \oplus M'', N)$  y por lo tanto no es una retracción. Luego la matriz es una sección, es decir existe  $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$  tal que

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & Id_{M''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}\alpha & g_{22} \\ g_{21}\alpha & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{M'} & 0 \\ 0 & Id_{M''} \end{bmatrix}$$

Entonces  $g_{11}\alpha = Id_{M'}$  y por lo tanto  $\alpha$  es una sección. □

Análogamente para morfismos almost split a derecha:

**Proposición 5.17.** *Sea  $f: L \rightarrow M$  un morfismo no nulo, almost split minimal a izquierda. Son validas las siguientes afirmaciones:*

1.  $f$  es irreducible.
2. Un morfismo  $f': L \rightarrow M'$  es irreducible si y solamente si  $M' \neq 0$  y existe  $M'' \in \text{mod}_A$ , un isomorfismo  $\psi: M \rightarrow M' \oplus M''$  y un morfismo  $f'': L \rightarrow M''$  tal que

$$\begin{bmatrix} f' \\ f'' \end{bmatrix}: L \rightarrow M' \oplus M''$$

es un morfismo minimal almost split a izquierda y  $\psi \circ f = \begin{bmatrix} f' \\ f'' \end{bmatrix}$

**Lema 5.18.** *Sea*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagrama conmutativo con las filas exactas y que no se parten. Entonces:

1. Si  $L$  es indescomponible y  $w$  es un isomorfismo, entonces  $u$  y  $v$  son isomorfismos.
2. Si  $N$  es indescomponible y  $u$  es un isomorfismo, entonces  $v$  y  $w$  son un isomorfismo.

*Demostración.* 1) Veamos que  $u$  es un isomorfismo. Supongamos que no lo es, entonces como  $L$  es indescomponible, por el lema 4.26,  $u \in \text{Rad}(L, L)$ . Como  $\text{Rad}(L, L)$  es nilpotente, existe  $m$  tal que  $u^m = 0$ . Luego

$$v^m f = v^{m-1} v f = v^{m-1} f u = \dots = f u^m = 0$$

Entonces  $v^m|_{\text{Ker}(g)} = 0$  y por lo tanto existe un morfismo  $\widetilde{v}^m: M/\text{Ker}(g) \rightarrow M$ . Componiendo con el isomorfismo  $\widetilde{g}^{-1}: N \rightarrow M/\text{Ker}(g)$ , tenemos una flecha  $\widetilde{v}^m \circ \widetilde{g}^{-1}: N \rightarrow M$ . Luego  $\widetilde{v}^m \widetilde{g}^{-1} g = \widetilde{v}^m \pi = v^m$ . Sea  $h := \widetilde{v}^m \widetilde{g}^{-1}: N \rightarrow M$ . Entonces  $hg = v^m$  y componiendo a la izquierda con  $g$  obtenemos  $ghg = gv^m = w^m g$ , y como  $g$  es sobreyectiva,  $gh = w^m$ . Como  $w$  es isomorfismo,  $w^m$  también. Luego existe  $\psi$  tal que  $w^m \psi = Id_N$ . Luego  $gh\psi = w^m \psi = Id_N$ . Por lo tanto  $g$  es una retracción, contradicción. Luego  $u$  es un isomorfismo y por lo tanto  $v$  también.

- 2) Esta parte es análoga a la anterior. □

Veamos finalmente la unicidad de las sucesiones exactas almost split:

**Teorema 5.19.** *Sean*

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0 \quad 0 \rightarrow L' \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{g'} N' \rightarrow 0$$

dos sucesiones exactas almost split. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Las sucesiones exactas son isomorfas.
2.  $L$  y  $L'$  son isomorfas.
3.  $N$  y  $N'$  son isomorfas.

*Demostración.* Vamos a demostrar 1 si y sólo si 2. Que 1 implica 2 es obvio. Supongamos que  $L \cong L'$ . Podemos suponer que  $L = L'$ . Como  $f$  y  $f'$  no son secciones y  $f$  es casi partido a izquierda, existe  $u$  tal que  $uf = f'$ . Y podemos definir un morfismo  $v$  tal que  $vg = g'u$ . Luego hay un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow Id & & \downarrow \exists u & & \downarrow \exists v & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como  $f': L \rightarrow M'$  es almost split a izquierda y  $f$  no es sección, existe  $u': M' \rightarrow M$  tal que  $u'f' = f$ . Luego  $uu'f' = uf = f'$ . Entonces como  $f'$  es minimal,  $uu'$  es un isomorfismo. Análogamente como  $uf = f'$ ,  $u'uf = u'f' = f$ . Entonces  $u'u$  es un isomorfismo. Por lo tanto  $u$  es un isomorfismo. Luego (por el lema de los cinco)  $v$  también lo es. Por lo tanto 2 implica 1. Análogamente  $1 \Leftrightarrow 3$ .  $\square$

Con la teoría sobre morfismos irreducibles desarrollada, podemos demostrar que varias definiciones alternativas de sucesiones exactas cortas almost split son equivalentes:

**Teorema 5.20.** *Sea*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La sucesión  $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$  es almost split.
2.  $L$  es indescomponible y  $g$  es almost split a derecha.
3.  $N$  es indescomponible y  $f$  es almost split a izquierda.
4.  $f$  es almost split minimal a izquierda.
5.  $g$  es almost split minimal a derecha.
6.  $L$  y  $N$  son indescomponibles y  $f$  y  $g$  son irreducibles.

*Demostración.* Demostremos  $1 \Leftrightarrow 2$ . Si vale 1, por la proposición 5.3 y definición de sucesión almost split, vale 2. Supongamos que vale 2. Veamos primero que  $g$  es minimal: asumamos que existe  $h: M \rightarrow M$  tal que  $gh = g$ . Entonces  $hf \subseteq \text{Im}(f)$  pues  $ghf = gf = 0$ . Luego existe  $u: L \rightarrow L$  tal que  $fu = hf$ . Por lo tanto el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow u & & \downarrow h & & \downarrow Id & & \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Por el lema 5.18, como  $L$  es indescomponible,  $h$  es un isomorfismo. Entonces  $g$  es almost split minimal. En particular es irreducible.

Demostremos ahora que  $f$  es almost split minimal a izquierda. El morfismo  $f$  no es una sección pues la sucesión no se parte. Sea ahora  $u: L \rightarrow U$  que no es una sección. Podemos usar el lema 5.14 parte 2 pues  $g$  es irreducible y la sucesión no se parte. Entonces existe  $u_1$  tal que  $u_1 f = u$  o  $u_2$  tal que  $f = u_2 u$ . Si existe  $u_1$  listo,  $f$  es almost split. Si existe  $u_2: U \rightarrow M$ , consideramos la sucesión exacta corta que no se parte

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{u} U \xrightarrow{\pi} Coker(u) \rightarrow 0$$

Entonces podemos completar el siguiente diagrama con un morfismo  $h$ :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\
& & \uparrow Id & & \uparrow u_2 & & \uparrow \exists h & & \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & U & \xrightarrow{\pi} & Coker(u) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

con la formula  $h(\pi(x)) = g(u_2(x))$ . Entonces como  $g$  es almost split existe  $v': Coker(u) \rightarrow M$  tal que  $gv' = h$ . Entonces  $gv'\pi = h\pi = gu_2$ . Luego  $g(u_2 - v'\pi) = 0$  Por lo tanto  $u_2 - v'\pi \subseteq \text{Im}(f)$ . Entonces existe  $\xi: U \rightarrow L$  tal que  $f\xi = u_2 - v'\pi$ , y por lo tanto componiendo con  $u$  a la derecha,

$$f\xi u = u_2 u - v'\pi u = u_2 u = f$$

y como  $f$  es inyectiva,  $\xi u = Id_L$ . Por lo tanto  $u$  es una sección, contradicción. Luego estamos en el primer caso, existe  $u_1$  tal que  $u_1 f = u$  y por lo tanto  $f$  es almost split.

Finalmente,  $f$  es minimal: supongamos que existe  $h: M \rightarrow M$  tal que  $hf = f$ . Además  $N$  es indescomponible por proposición 5.3. Podemos completar el siguiente diagrama con un morfismo  $T: N \rightarrow N$  tal que el rectángulo conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow Id & & \downarrow h & & \downarrow \exists T & & \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Como  $N$  es indescomponible, por el lema 5.18  $h$  es un isomorfismo.

Luego  $1 \Leftrightarrow 2$ . Análogamente  $1 \Leftrightarrow 3$ . Luego  $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$ . Veamos  $3 \Leftrightarrow 4$ . La implicación  $3 \rightarrow 4$  es obvia. Supongamos que vale 4. Entonces  $f$  es almost split a izquierda y sólo resta ver que  $N$  es indescomponible. Pero por la proposición 5.17,  $f$  es irreducible. Entonces su  $Coker(f)$  es indescomponible por lema 5.15. Pero  $Coker(f) \cong L$ . Entonces  $N$  es indescomponible. Luego  $3 \Leftrightarrow 4$  y análogamente  $2 \Leftrightarrow 5$ . Por lo tanto  $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$ .

Finalmente, veamos  $\{1, 2, 3, 4, 5\} \Leftrightarrow 6$ . Claramente 1 implica 6 por las proposiciones 5.15, 5.16 y 5.17. Supongamos que vale el punto 6 y probemos que 6 implica 3. Para eso debemos ver la segunda condición de ser almost split a izquierda para  $f$ . Sea  $u: L \rightarrow U$  que no es sección. Si  $U$  no es indescomponible, se escribe como  $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ . Tenemos, además, morfismos  $u_i: L \rightarrow U_i$  definidos como componer  $u$  con la proyección a  $U_i$  tal que  $u$  se escribe  $u = \sum u_i$ , y

además  $u_i$  no es sección para ningún  $i$ : si alguno lo fuera, existiría  $s_i: U_i \rightarrow L$  tal que  $s_i u_i = Id_L$ , lo cual implicaría que  $0 + \dots + s_i + \dots + 0: U \rightarrow L$  es una sección de  $u$ :

$$(0 + \dots + s_i + \dots + 0) \circ u = s_i \circ u_i = Id_L$$

Entonces por el lema 5.14 parte 2, para cada  $i$  existe  $u_1^i: M \rightarrow U_i$  tal que  $u_1^i f = u_i$  o existe  $u_2^i: U_i \rightarrow M$  tal que  $u_2^i u_i = f$ . Si para todo  $i$  existe ese tal  $u_1^i$  listo, pues el morfismo  $(u_1^1, \dots, u_1^n): M \rightarrow U_1 \oplus \dots \oplus U_n$  me sirve para demostrar que  $f$  es almost split a izquierda. En efecto:

$$(u_1^1, \dots, u_1^n) \circ f = \sum u_1^i f = \sum u_i = u$$

Supongamos ahora que para un  $i_0$  existe  $u_2^{i_0}$  tal que  $f = u_2^{i_0} u_{i_0}$ , con  $u_{i_0}: L \rightarrow U_{i_0}$  y  $u_2^{i_0}: U_{i_0} \rightarrow M$ . Entonces como  $f$  es irreducible, o bien  $u_{i_0}$  es sección, o  $u_2^{i_0}$  es retracción. Como vimos antes,  $u_{i_0}$  no es sección, por lo tanto  $u_2^{i_0}: U_{i_0} \rightarrow M$  es retracción. Pero entonces  $U_{i_0} = \text{Ker}(u_2^{i_0}) \oplus M$ . Como  $U_{i_0}$  es indescomponible,  $\text{Ker}(u_2^{i_0}) = 0$ , luego  $u_2^{i_0}$  es inyectiva y entonces es un isomorfismo. Entonces existe  $\xi_{i_0}: M \rightarrow U_{i_0}$  tal que  $\xi_{i_0} f = u_{i_0}$ .

Por lo tanto, en todos los casos existe  $u_1^i$  tal que  $u_1^i f = u_i$ . Luego podemos construir un  $u': M \rightarrow U$  tal que  $u' \circ f = u$ . Por lo tanto  $f$  es almost split a izquierda. Luego  $6 \Rightarrow 3$ .  $\square$

### 5.3. Carcaj de Auslander Reiten

Con la teoría desarrollada podemos finalmente definir el carcaj de Auslander Reiten para el caso en que  $k$  es un cuerpo algebraicamente cerrado:

**Definición 5.21.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra de dimensión finita. El **carcaj de Auslander Reiten** tiene como vértices a las clases de isomorfismos de  $A$  módulos indescomponibles (en particular no nulos),  $Q_0 = \{\bar{X} : X \text{ es indescomponible}\}$  y entre dos módulos indescomponibles  $X$  e  $Y$  no isomorfos, la cantidad de flechas es igual a la dimensión sobre  $k$  de  $\text{Rad}(X, Y) / \text{Rad}^2(X, Y)$ .

**Observación 5.22.** La definición se puede extender al caso de  $k$  no algebraicamente cerrado. La principal diferencia es que si  $k$  es algebraicamente cerrado, entonces  $\text{End}(X) / \text{Rad}(X)$  es  $k$  si  $X$  es indescomponible. Si  $k$  no es algebraicamente cerrado,  $F_X := \text{End}(X) / \text{Rad}(X)$  es una álgebra de división (de dimensión finita) sobre  $k$ . Entonces si definimos  $\text{Irr}(X, Y) := \text{Rad}(X, Y) / \text{Rad}^2(X, Y)$ ,  $\text{Irr}(X, Y)$  es un  $k$ -espacio vectorial, pero más aún, es un  $F_Y - F_X$  bimódulo con la estructura

$$\bar{h}.[f].\bar{g} := [hfg]$$

donde  $[-]$  representa la clase de una función en  $\text{Irr}(X, Y)$  (es decir, módulo  $\text{Rad}^2(X, Y)$ ) y  $\bar{*}$  representa la clase de una función en  $F_X$  o  $F_Y$  (dependiendo si a izquierda o derecha).

Esta estructura está bien definida, y le da a  $\text{Irr}(X, Y)$  una estructura de “espacio vectorial” a izquierda sobre el álgebra de división  $F_Y$  y a derecha sobre el álgebra de división  $F_X$ . La mayor parte del álgebra lineal (como el concepto de dimensión, existencia de bases, etcétera) vale para “espacios vectoriales” sobre álgebras de división de dimensión finita.

**Observación 5.23.** En la definición no se menciona a los morfismos irreducibles. Sin embargo, veamos que la dimensión es exactamente la cantidad de morfismos irreducibles de  $X$  a  $Y$  con multiplicidad. Si recordamos que los morfismos irreducibles eran exactamente los que se obtenían como restringir un morfismo almost split a derecha a un sumando directo, y la unicidad de las sucesiones exactas casi partidas, junto el siguiente teorema tendremos la conexión:

**Teorema 5.24.** Sean  $X$  e  $Y \in \text{mod}_A$  indescomponibles.

1. Supongamos que existe un morfismo irreducible  $f: X \rightarrow Y$ . Por los teoremas 5.5 y 5.8, existe  $g: E \rightarrow Y$  casi partido minimal a derecha. Sea  $n$  la cantidad de veces que aparece  $X$  en la descomposición en indescomponibles de  $E$ , i.e.,  $E = X^n \oplus E'$  donde  $X$  no es un sumando directo de  $E'$ . Entonces  $n = \dim_k \left( \text{Rad}(X, Y) / \text{Rad}^2(X, Y) \right)$ . En particular el número de la izquierda no depende ni de  $g$  ni de  $E$ .
2. Si no existe ningún morfismo irreducible de  $X$  en  $Y$  y  $g: E \rightarrow Y$  es algún morfismo casi partido minimal a derecha para algún  $E$ ,  $X$  no aparece en la descomposición en indescomponibles de  $E$ . Además,  $\dim_k \left( \text{Rad}(X, Y) / \text{Rad}^2(X, Y) \right) = 0$ .

*Demostración.* 1) Sea  $g_i = g|_X$  la restricción de  $g$  a la  $i$ -ésima copia de  $X$ ,  $E = X \oplus \cdots \oplus X \oplus E'$ . Como  $X$  e  $Y$  son indescomponibles y  $g_i$  es irreducible,  $g_i \in \text{Rad}(X, Y)$ . Sean  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n$  los morfismos en el cociente  $\text{Rad}(X, Y) / \text{Rad}^2(X, Y)$ . Afirmamos que generan y son linealmente independientes.

**Generan:** Sea  $\bar{h}: X \rightarrow Y \in \text{Rad}(X, Y) / \text{Rad}^2(X, Y)$  no nula. En particular podemos elegir  $h \in \text{Rad}(X, Y) - \text{Rad}^2(X, Y)$  representante de la clase de  $\bar{h}$ . Por el lema 5.13,  $h$  es irreducible. Luego por el teorema 5.16, existen  $X'$ ,  $h': X' \rightarrow Y$  morfismo y  $\xi$  isomorfismo tal que  $(h, h'): X \oplus X' \rightarrow Y$  es un morfismo casi partido minimal a derecha y  $g \circ \xi = (h, h')$ .

Denotamos  $g = (g', g'')$  a las restricciones de  $g$  a las componentes  $X^n$  y  $E'$  respectivamente. Luego si restringo a  $X$ ,  $h = g' \circ \xi|_X + g'' \circ \xi|_X$ , donde cada  $\xi$  se corestrinje adecuadamente. Afirmamos que  $g'' \circ \xi|_X \in \text{Rad}^2(X, Y)$ : en efecto,  $g'' \in \text{Rad}(E', Y)$  pues  $g''$  es irreducible de nuevo por el teorema 5.16; y  $\xi|_X \in \text{Rad}(X, E')$  porque no es sección (ya que  $E'$  no contiene a  $X$  como sumando directo) y usando las diferentes definiciones de radical del lema 4.26.

Luego en el cociente,  $\bar{h} = g' \circ \xi|_X$ . Finalmente, afirmamos que existen  $\lambda_i$  tal que  $g' \circ \xi|_X = \sum \lambda_i g_i$ . En efecto, si denotamos  $\xi^i|_X$  a la co-restricción a la copia  $i$ -ésima de  $X$ ,  $\xi^i|_X \in \text{End}(X)$ , que es local pues  $X$  es indescomponible. Entonces existe  $\lambda_i$  tal que  $\xi^i|_X = \lambda_i Id + f_i$  con  $f_i$  nilpotente. Entonces  $g' \circ \xi^i|_X = \sum g_i \circ \xi^i|_X = \sum \lambda_i g_i + g_i f_i$ . Pero  $f_i \in \text{Rad}(X)$  pues no es un isomorfismo, y ya sabemos que  $g_i \in \text{Rad}(X, Y)$ . Luego efectivamente  $\bar{h} = \sum \lambda_i g_i$ .

**Linealmente independientes:** Veamoslo por inducción:

Caso  $n = 2$ : Sea  $g: X^2 \oplus E' \rightarrow Y$  casi partido minimal a derecha. Entonces por el teorema 5.16 sabemos que los  $g_i$  son irreducibles y entonces pertenecen a  $\text{Rad}(X, Y) - \text{Rad}^2(X, Y)$ .

Supongamos que  $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 = 0$ , es decir que  $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \in \text{Rad}^2(X, Y)$ . Asumamos primero que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son no nulos y lleguemos a un absurdo. Al ser ambos no nulos,

$$\begin{aligned} \varphi: X^2 \oplus E' &\rightarrow X^2 \oplus E' \\ (x_1, x_2) \oplus e &\rightarrow (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) \oplus e \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Luego  $\bar{g} = g \circ \varphi$  es casi partido minimal a derecha, y  $\bar{g}|_{X^2} = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \in \text{Rad}^2(X, Y)$ , lo que contradice que es irreducible. Entonces algún  $\lambda_i = 0$ , que podemos suponer es  $\lambda_1$  y entonces  $\lambda_2 g_2 \in \text{Rad}^2(X, Y)$ , lo que implica  $\lambda_2 = 0$ . Notemos que la demostración es independiente de que  $E'$  contenga o no una copia de  $X$  como sumando directo.

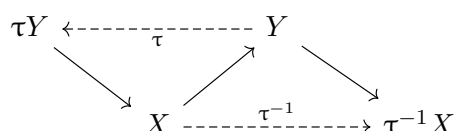
Caso general: Supongamos que  $\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n \in \text{Rad}^2(X, Y)$ . Entonces si todos los  $\lambda_i$  son no nulos,  $\varphi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \oplus Id: X^n \oplus E' \rightarrow X^n \oplus E'$  es un isomorfismo. Luego  $\bar{g} = g \circ \varphi$  es casi partido minimal a derecha y  $\bar{g}|_{X^n} = \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n$  es irreducible, lo que contradice que pertenece a  $\text{Rad}^2$ . Por lo tanto podemos asumir que  $\lambda_1 = 0$ . Luego  $\lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n \in \text{Rad}^2$  y



$g: X^{n-1} \oplus E'' \rightarrow Y$  es casi partido minimal a derecha, donde muevo el primer  $X$  al sumando  $E'$ . Sigo por inducción.

2) Si  $X$  apareciera en la descomposición en indescomponibles de  $E$ ,  $g|_X: X \rightarrow Y$  sería un morfismo irreducible de  $X$  a  $Y$ . La segunda afirmación se sigue de que un morfismo es irreducible si y sólo si pertenece a  $\text{Rad}(X, Y) - \text{Rad}^2(X, Y)$ .  $\square$

Además de su definición, el carcaj  $AR$  tiene una estructura adicional que es la traslación  $\tau$ . En general, si podemos, escribimos a los morfismos irreducibles entre representaciones diagonalmente en columnas distintas, y a las irreducibles trasladadas por  $\tau$  en la misma fila, de la siguiente forma:



Estudiamos la estructura del carcaj  $AR$  en el lado de los proyectivos. Sabemos que los proyectivos son trasladados a la izquierda a cero por  $\tau$  pues  $\tau P = 0$ . Pero eso no significa que no reciba flechas irreducibles.

**Lema 5.25.** *Sea  $P$  proyectivo indescomponible no simple,  $X$  indescomponible. Entonces existe un morfismo  $f: X \rightarrow P$  irreducible si y sólo si  $X$  es un sumando directo de  $\text{Rad } P$*

*Demostración.* Si  $f: X \rightarrow P$  es irreducible no nulo, por 5.16 existe  $X'$  y  $f'$  tal que  $(f, f'): X \oplus X' \rightarrow P$  es almost split minimal a derecha. Pero por 5.5,  $i: \text{Rad } P \hookrightarrow P$  es casi partido minimal a derecha. Por la unicidad de los morfismos casi partidos minimales,  $X \oplus X' \cong \text{Rad } P$ , que era lo que queríamos demostrar.

Notar que si  $P$  es simple,  $\text{Rad } P = 0$ . Por lo tanto  $X = 0$ , y entonces no existe ningún morfismo irreducible no nulo que llegue a  $P$ .

Por otra parte, si  $X$  es un sumando directo de  $\text{Rad } P$ , existe  $X'$  tal que  $\text{Rad } P = X \oplus X'$ . Por la proposición 5.5, la inclusión  $i: X \oplus X' \rightarrow P$  es casi partida minimal a derecha. Luego por el teorema 5.16, la inclusión restringida a  $X$  es irreducible.  $\square$

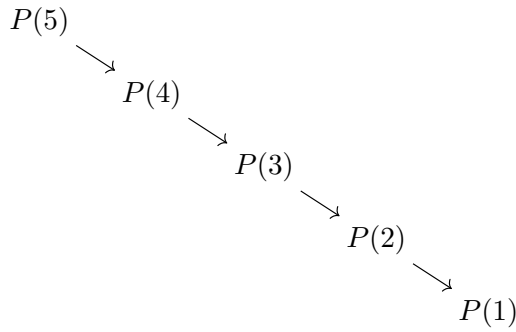
El lema nos dice que para construir el carcaj  $AR$ , hay un tipo de vértices (los proyectivos indescomponibles) de los cuales sabemos todas las flechas que reciben y de dónde salen.

Antes de dar ejemplos, enunciemos sin demostración un teorema sobre la cantidad de flechas en el carcaj  $AR$ :

**Teorema 5.26.** *Sea  $A$  un álgebra de dimensión finita que además tiene tipo de representación finita (es decir, existen finitos módulos indescomponibles no isomorfos, que es equivalente a que el carcaj  $AR$  tenga finitos vértices) con  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado y  $X$  e  $Y$  indescomponibles. Entonces si existe  $f: X \rightarrow Y$  irreducible,  $\dim_k \left( \text{Rad}(X, Y) / \text{Rad}^2(X, Y) \right) = 1$ .*

Esto me dice que en el caso de que  $A$  sea de representación finita (por ejemplo, si  $A$  es el álgebra de caminos de un carcaj de tipo  $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n$  o  $\mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$ ), el carcaj  $AR$  no tiene múltiples flechas entre dos vértices.

**Ejemplo 5.27.** Sea  $Q = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ . Entonces  $\text{Rad } P(i) = P(i+1)$  para todo  $i \leq 4$  y  $P(5) = 5$  es simple. Luego tenemos



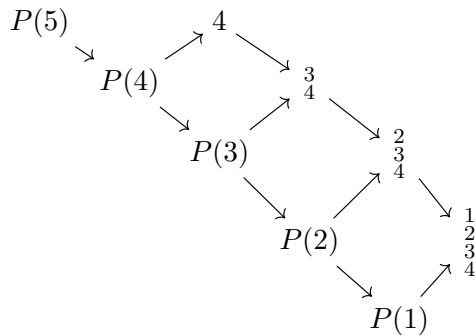
Para seguir, tenemos dos opciones: una es calcular a mano  $\tau^{-1}P(5)$  usando por ejemplo el funtor inverso de Nakayama. Una resolución inyectiva de  $P(5)$  es

$$0 \rightarrow P(5) \rightarrow I(5) \rightarrow I(4) \rightarrow 0$$

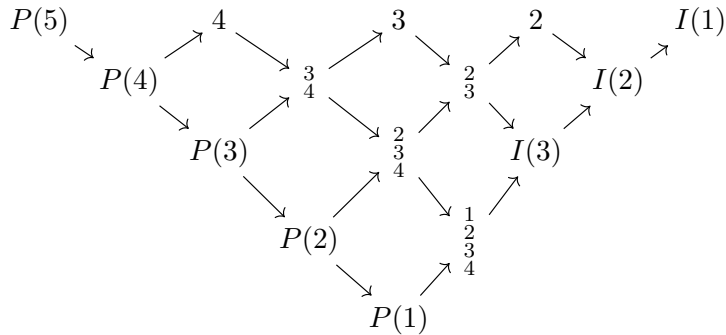
y aplicando el funtor de Nakayama  $\nu^{-1}$  tenemos

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \nu^{-1}I(5) = P(5) \rightarrow \nu^{-1}I(4) = P(4) \rightarrow \tau^{-1}P(5) \rightarrow 0$$

Luego calculando dimensiones,  $\tau^{-1}P(5) = 4$ . Análogamente,  $\tau^{-1}P(4) = \frac{3}{4}$ ,  $\tau^{-1}P(3) = \frac{2}{4}$  y así con todos los proyectivos indecomponibles:



Continuando con la construcción llegamos a los inyectivos:



Otra forma es usar el algoritmo de tejido (*knitting algorithm*) que me permite calcular  $\tau^{-1}M$  conociendo  $M$  y todos los módulos intermedios en la grilla del carcaj  $AR$ . Para calcular  $\tau^{-1}M$  simplemente sumo los vectores dimensión de los módulos intermedios (que son los que reciben un morfismo irreducible de  $M$ ) y le resto el vector dimensión de  $M$ . Así por ejemplo  $\underline{\dim} \tau^{-1}P(5) = \underline{\dim} P(4) - \underline{\dim} P(5) = (0, 0, 0, 1, 0)$ , y una vez que tenemos ese vector dimensión, procedemos diagonalmente hacia abajo a la derecha y calculamos  $\underline{\dim} \tau^{-1}P(4) = \underline{\dim} P(3) + (0, 0, 0, 1, 0) - \underline{\dim} P(4) = (0, 0, 1, 1, 1) + (0, 0, 0, 1, 0) - (0, 0, 0, 1, 1) = (0, 0, 1, 1, 0)$ .

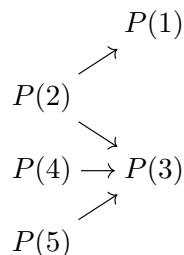
Notemos que este método sólo me calcula el vector dimensión de la representación, pero en el caso de carcajes del tipo Dynkin, una representación queda unívocamente determinada por su vector dimensión, como ya veremos con el teorema de Gabriel.

Una pregunta que podríamos hacernos es si esas son efectivamente todas las representaciones. En el caso de un álgebra de representación finita la respuesta es positiva. En efecto, veamos que para toda representación indescomponible no proyectiva  $M$ , existe  $j \in \mathbb{N}$  y  $P$  proyectivo indescomponible tal que  $M = \tau^{-j}P$ . La razón es que como  $Q$  es de representación finita y  $\tau$  manda indescomponibles en indescomponibles, eventualmente para algún  $n$  debe suceder que  $\tau^n M = \tau^{n+1}M$  (sino tendría infinitos módulos indescomponibles no isomorfos). Tomemos  $n_0$  el primer natural tal que sucede eso. Luego  $\tau\tau^{n_0-1}M = \tau^{n_0}M = \tau^{n_0+1}M = \tau\tau^{n_0}M$ . Si  $\tau^{n_0-1}M$  y  $\tau^{n_0}M$  no son proyectivos, por el teorema 4.19,  $\tau^{n_0-1}M = \tau^{n_0}M$ , lo que contradice la minimalidad de  $n_0$ . Entonces alguno es proyectivo y por lo tanto existe  $i$  tal que  $\tau^i M$  es proyectivo. Entonces efectivamente, todo módulo indescomponible no proyectivo se consigue como  $\tau^{-i}(\tau^i M) \cong M$  (es decir, moviéndome a la derecha  $j$  veces con la traslación) de un proyectivo.

**Ejemplo 5.28.** Consideremos ahora un carcaj de tipo  $\mathbb{D}_n$ ,  $Q = 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow 5 \end{matrix}$ . Calculemos sus representaciones proyectivas:

$$P(1) = \frac{1}{2} \quad P(2) = 2 \quad P(3) = \begin{matrix} 3 \\ 2 \ 4 \ 5 \end{matrix} \quad P(4) = 4 \quad P(5) = 5$$

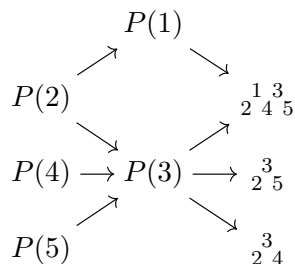
Entonces tenemos flechas:



Usando el algoritmo de tejido  $\underline{\dim}\tau^{-1}P(2) = (0, 1, 1, 1, 1) + (1, 1, 0, 0, 0) - (0, 1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1, 1, 1)$ , que corresponde a la representación  $\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \ 5 \end{matrix}$  (calculándolo a mano con el funtor de Nakayama da lo mismo).

Para calcular  $\tau^{-1}P(4)$  sólo tenemos una representación intermedia,  $P(3)$ , entonces  $\underline{\dim}\tau^{-1}P(4) = (0, 1, 1, 1, 1) - (0, 0, 0, 1, 0) = (0, 1, 1, 0, 1)$ , que corresponde a  $\begin{matrix} 3 \\ 2 \ 5 \end{matrix}$ . Finalmente  $\tau^{-1}P(5) = (0, 1, 1, 1, 0)$ , que corresponde a  $\begin{matrix} 3 \\ 2 \ 4 \end{matrix}$ .

Entonces:



Completando el algoritmo de tejido tenemos...



donde identificamos las representaciones indescomponibles con el mismo vector dimensión.

¿Cómo sabemos que  $P(1)$  no tiene otros indescomponibles distintos a  $\tau^{-1}P(2)$  y  $\tau^{-1}P(4)$  tal que existe  $P(1) \rightarrow X$  irreducible? Para empezar,  $X$  no es proyectivo pues si lo fuera,  $P(1)$  sería un sumando directo de su radical, y ningún radical de un proyectivo tiene a  $P(1)$  como sumando directo. Entonces existe una sucesión exacta almost split

$$0 \rightarrow \tau X \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0$$

Y como  $P(1) \rightarrow X$  es irreducible, existe  $K$  y una flecha tal que  $P(1) \oplus K \rightarrow X$  es almost split minimal a derecha por la proposición 5.16. Luego por la unicidad de los morfismos almost split,  $E = P(1) \oplus K$ . Luego tenemos una flecha almost split minimal a izquierda  $\tau X \rightarrow P(1) \oplus K$ . Entonces tenemos una flecha  $\tau X \rightarrow P(1)$  irreducible por la proposición 5.17. Pero entonces  $\tau X$  es un sumando directo del radical de  $P(1)$ ,  $\text{Rad } P(1) = P(2) \oplus P(4)$ . Luego como  $X$  no es proyectivo,  $X = \tau^{-1}\tau X = \tau^{-1}P(2)$  o  $X = \tau^{-1}P(4)$ .

El carcaj sigue hacia la derecha, y por los vectores dimensión vemos que es de tipo de representación infinita: existen infinitas representaciones indescomponibles no isomorfas.

Calculemos localmente la forma del carcaj alrededor del vértice  $S(3)$ . Tomando

$$0 \rightarrow S(3) \rightarrow I(3) \rightarrow I(2) \rightarrow 0$$

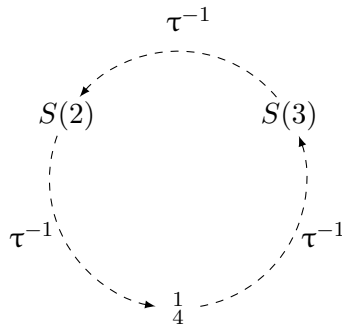
una resolución inyectiva minimal y luego aplicando  $\nu^{-1}$ :

$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow \tau^{-1}S(3) \rightarrow 0$$

vemos que  $\tau^{-1}S(3) = 2$ . Análogamente  $\tau^{-2}S(3) = \tau^{-1}S(2) = \frac{1}{4}$  y  $\tau^{-3}S(3) = S(3)$ . Luego tenemos la situación que el carcaj de Auslander Reiten localmente alrededor de  $S(3)$  se ve como un tubo:

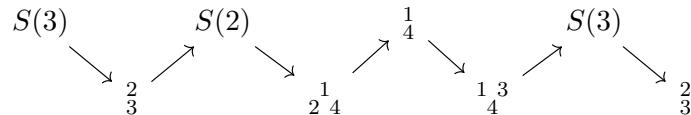
$$S(3) \text{ -----} \rightarrow S(2) \text{ -----} \rightarrow \frac{1}{4} \text{ -----} \rightarrow S(3)$$

donde identificamos los dos extremos, y queremos hallar qué hay en el medio. Pegando los extremos iguales, localmente el dibujo quedaría como un círculo:

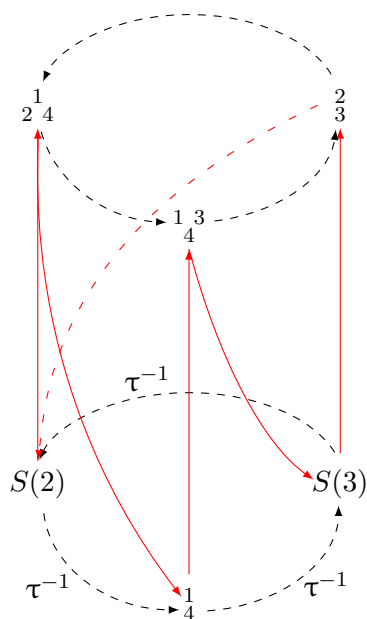


Sabemos que como  $S(3)$  no es inyectivo, existe una sucesión exacta almost split  $0 \rightarrow S(3) \rightarrow E \rightarrow S(2) \rightarrow 0$ . Por dimensión, la única posibilidad es  $E = \frac{2}{3}$ . Calculando con el funtor (inverso) de Nakayama tenemos  $\tau^{-1} \frac{2}{3} = \frac{2}{4}$ ,  $\tau^{-1} \frac{2}{4} = \frac{1}{3}$  y  $\tau^{-1} \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ .

Usando esa información tenemos:



Identificando los extremos:



donde las flechas discontinuas negras representan la traslación de Auslander Reiten y las flechas rojas morfismos irreducibles.

Ahora queremos ver si existe otra representación entre  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$  además de  $S(2)$ . Comparando las dimensiones de los extremos en la sucesión exacta almost split

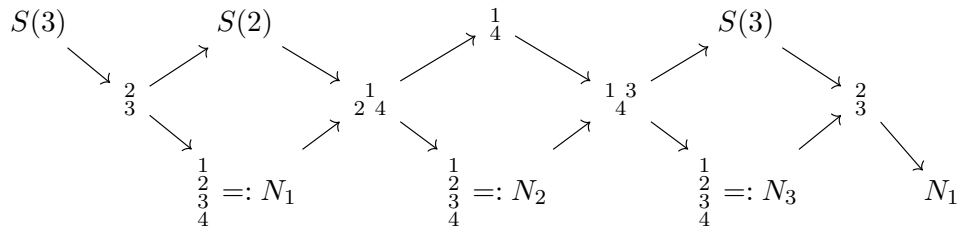
$$0 \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow E \rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{4} \rightarrow 0$$

concluimos que  $E = S(2) \oplus N$  donde el vector dimensión de  $N$  es  $(1, 1, 1, 1)$ . ¿Puede ser que  $N$  sea la suma de dos (o tres) indescomponibles?  $N$  no puede tener un sumando directo proyectivo, pues todas las flechas que llegan a un proyectivo ya vimos que salen de un sumando directo del radical de ese proyectivo, pero  $\frac{2}{3}$  no es el sumando directo de ningún proyectivo. Como  $N$  tiene un  $k$  en la coordenada 4, y la representación  $P(4)$  no puede estar, necesito tener un  $\frac{2}{4}$ , un  $\frac{3}{4}$ , un  $\frac{1}{4}$  o un  $\frac{1}{3} \frac{1}{4}$  como sumando directo de  $N$ . Pero  $\frac{4}{4}$  y  $\frac{2}{3} \frac{1}{4}$  son proyectivos, entonces las únicas opciones son  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{3} \frac{1}{4}$ . Si fuera  $\frac{1}{4}$ , las representaciones  $\frac{2}{3}$  o  $2 \oplus 3$  deben ser el otro sumando directo de  $N$ .  $\frac{2}{3}$  no puede ser, pues entonces el morfismo irreducible e inyectivo  $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{4} \oplus \frac{2}{3}$  sería una sección. Entonces  $N$  sería  $\frac{1}{4} \oplus 2 \oplus 3$ . Pero no hay un morfismo inyectivo pues este diagrama debería conmutar:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & k & \xrightarrow{1} & k & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \lambda \neq 0 & & \downarrow \\
 k & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{0} & k \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & 1 & & 
 \end{array}$$

pero el cuadrado del medio no lo hace. Entonces la única opción es  $N = \frac{1}{3} \frac{1}{4}$ . Con el functor de Nakayama se prueba que  $\tau^{-1} \frac{1}{3} \frac{1}{4}$  tiene vector dimensión  $(1, 1, 1, 1)$ , y como es indescomponible,

$\tau^{-1} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ . Así podemos completar el carcaj hasta el momento de la forma:



donde identificamos los extremos derechos e izquierdos. Afirmamos que las representaciones  $N_1$ ,  $N_2$  y  $N_3$  son indescomponibles y no isomorfas. En efecto, recordemos que el zócalo, Soc, es un funtor exacto a izquierda, y por lo tanto lo podemos aplicar a las sucesiones exactas almost split

$$0 \longrightarrow \frac{2}{3} \longrightarrow S(2) \oplus N_1 \longrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{4} \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{4} \oplus N_2 \longrightarrow \frac{1}{4} \frac{3}{4} \longrightarrow 0$$

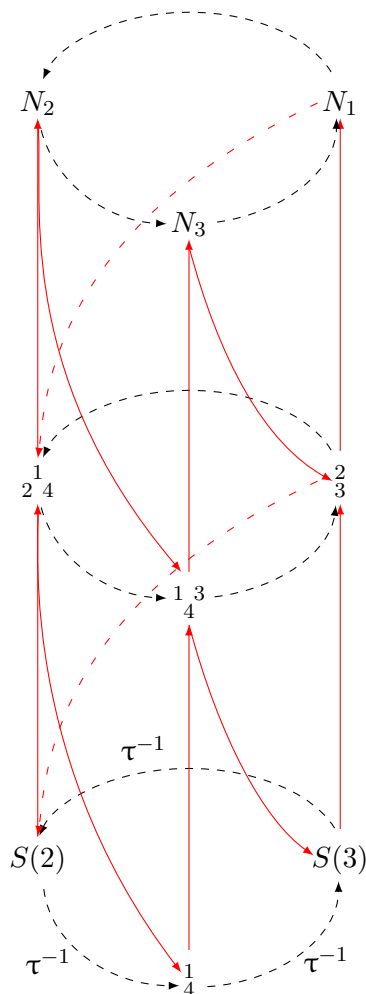
No es difícil calcular los sócalos de las representaciones:  $\text{Soc} \left( \frac{2}{3} \right) = 3$ ,  $\text{Soc} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{4} \right) = 2 \oplus 4$ ,  $\text{Soc} \left( \frac{1}{4} \frac{3}{4} \right) = 4$  y  $\text{Soc} \left( \frac{1}{4} \right) = 4$ . Entonces tenemos las siguientes sucesiones exactas a izquierda:

$$0 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \oplus \text{Soc} (N_1) \longrightarrow 2 \oplus 4$$

$$0 \longrightarrow 2 \oplus 4 \longrightarrow 4 \oplus \text{Soc} (N_2) \longrightarrow 4$$

La primera sucesión me dice que  $S(3) \leq \text{Soc} (N_1)$  y la segunda me dice que  $S(3) \not\leq \text{Soc} (N_2)$ . Por lo tanto no pueden ser isomorfos. Análogamente para ver que  $N_2$  y  $N_3$  no son isomorfos.

Por lo tanto, la forma local del carcaj de Auslander Reiten es:



## 5.4. Fórmulas de Auslander-Reiten

Presentamos dos fórmulas muy útiles a la hora de hacer cálculos con representaciones de carcajes: las fórmulas de Auslander-Reiten. Estas fórmulas me permiten hallar el funtor  $\text{Ext}^1$  conociendo el Hom y el funtor traslación  $\tau$ . La fórmula involucra el producto tensorial (sobre  $A$ ). Recordemos algunas de sus propiedades más importantes:

**Proposición 5.30.** *Sea  $A$  una  $k$  álgebra de dimensión finita y sean  $M$  un  $A$  módulo a derecha y  $N$  un  $A$  módulo a izquierda. Entonces:*

1.  $M \otimes_A A \cong M$  y  $A \otimes_A N \cong N$ .
2.  $M \otimes_A (N \oplus N') \cong (M \otimes_A N) \oplus (M \otimes_A N')$  y  $(M \oplus M') \otimes_A N \cong (M \otimes_A N) \oplus (M' \otimes_A N)$ .
3. (Adjunción) Si  $A$  y  $B$  son anillos,  $L$  un  $A$  módulo a derecha,  $M$  un  $A - B$  bimódulo y  $N$  un  $B$  módulo a derecha, existe un isomorfismo natural  $k$ -espacios vectoriales

$$\text{Hom}_B(L \otimes_A M, N) \cong \text{Hom}_A(L, \text{Hom}_B(M, N))$$

**Lema 5.31.** *Recordar el funtor de Nakayama  $\nu L = DL^t = \text{Hom}_k(\text{Hom}_A(L, A), k)$ . Sea*

$$\omega_M^L: D\text{Hom}_A(L, M) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, \nu L)$$



el funtor definido de la siguiente forma: dados  $\varphi: \text{Hom}_A(L, M) \rightarrow k$ ,  $m \in M$ , y  $f \in \text{Hom}_A(L, A)$ :

$$\begin{aligned}\omega_M^L: D\text{Hom}_A(L, M) &\longrightarrow \text{Hom}_A(M, \nu L) \\ (\varphi: \text{Hom}_A(L, M) \rightarrow k) &\longmapsto \omega_M^L(\varphi)(m)(f) := \varphi(m \cdot f)\end{aligned}$$

donde  $m \cdot f: L \rightarrow M$  es el morfismo  $(m \cdot f)(l) = mf(l)$ .

Entonces:

1. Si  $P$  es proyectivo entonces  $\omega_M^P$  es un isomorfismo.
2.  $\text{Ker}(\omega_M^L) \cong D\underline{\text{Hom}}_A(L, M)$ .
3.  $\omega_M^L$  es natural en  $M$  y  $L$ .

*Demostración.*

1) Sobreyectividad: Empecemos por probar que  $\omega_M^P$  es sobreyectivo: si  $P$  es proyectivo,  $P = e_1A \oplus \cdots \oplus e_kA$ , con  $A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$ . Entonces existe  $p: A \rightarrow P$  la proyección y  $\iota: eA \rightarrow A$  la inclusión, morfismos de  $A$  módulos tal que  $p \circ \iota = \text{Id}_P$ .

Ahora, para probar que  $\omega$  es sobreyectiva, tomemos  $\varrho \in \text{Hom}_A(M, DP^t)$  y definamos  $\xi \in D\underline{\text{Hom}}_A(P, M)$  de la siguiente forma: dado  $f: P \rightarrow M$  y  $\iota: P \rightarrow A$

$$\xi(f) := \varrho(f(e))(\iota), \text{ donde } e \text{ es el elemento } e := e_1 \cdot 1_A + \cdots + e_k \cdot 1_A$$

Sea  $h: P \rightarrow A$ . Afirmamos que  $\omega_M^P(\xi)(m)(h) = \varrho(m)(h)$ :

$$\omega_M^P(\xi)(m)(h) = \xi(m \cdot h) = \varrho(mh(e))(\iota) = (\varrho(m) \cdot h(e))(\iota) = \varrho(m)(h(e)\iota)$$

Y además  $h(e)\iota = h$ : En efecto,

$$h(e)\iota(ex) = h(e\iota(ex)) = h(eex) = h(ex)$$

Luego  $h(e)\iota = h$ . Y por lo tanto:

$$\omega_M^P(\xi)(m)(h) = \varrho(m)(h) \text{ para toda } h \text{ y para todo } m$$

Entonces  $\omega_M^P(\xi) = \varrho$ . Luego  $\omega_M^P$  es sobreyectivo.

Inyectividad: Tomemos  $\varphi \in D\underline{\text{Hom}}_A(P, M)$  y supongamos que  $\varphi(m \cdot f) = 0$  para todos los  $m$  y  $f$ . Se sigue que  $\varphi(\xi) = 0$  para cualquier  $\xi: P \rightarrow M$ . En efecto, si  $P = e_1A \oplus \cdots \oplus e_kA$ , entonces  $\xi = \sum m_j \cdot f_j$  donde  $m_j = \xi(e_j)$  y  $f_j = \text{inc}_j \circ P_j$ , con  $P_j: P \rightarrow e_jA$  la proyección e  $\text{inc}_j: e_jA \rightarrow A$  la inclusión.

Por lo tanto  $\varphi(\xi) = \sum \varphi(m_j \cdot f_j) = 0$ . Luego  $\varphi \equiv 0$ .

2) Queremos ver que  $\text{Ker}(\omega_m^L) = D\underline{\text{Hom}}_A(L, M)$ , lo cual es equivalente a demostrar que  $D\underline{\text{Ker}}(\omega_m^L) = \underline{\text{Hom}}_A(L, M)$ .

Definiremos un isomorfismo entre ambos. Sea  $c \in \text{Ker}(\omega_m^L)$ ,  $c: \text{Hom}(L, M) \rightarrow k$ , entonces:

$$\begin{aligned}\text{Hom}_A(L, M) &\xrightarrow{\Psi} D\underline{\text{Ker}}(\omega_m^L) \\ f &\longmapsto \Psi(f)(c) := c(f)\end{aligned}$$

a) Afirmamos que  $\text{Ker}(\Psi) = \mathcal{P}(L, M)$ . Sea  $\beta\alpha \in \mathcal{P}$  con  $\alpha: L \rightarrow P$  y  $\beta: P \rightarrow M$  un elemento de  $\mathcal{P}$ . Queremos ver que  $\beta\alpha \in \text{Ker}(\Psi)$ . Por definición, si  $c \in \text{Ker}(\omega)$ ,  $\Psi(\beta\alpha)(c) = c(\beta\alpha)$ . Como  $P$  es proyectivo podemos suponer  $P = e_1A \oplus \cdots \oplus e_kA$  y entonces a  $\alpha$  la podemos escribir

como  $\alpha(l) = \sum_{1 \leq j \leq k} e_j \alpha(l)$ . Evaluaremos  $\Psi$  en  $\alpha\beta$  y veremos que es cero. Para eso tomemos  $c \in \text{Ker}(\omega_M^L)$ . Evaluando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha\beta)(c) &= c(\beta\alpha) = c\left(\beta\left(\sum_{1 \leq j \leq k} e_j \cdot \alpha\right)\right) = \sum c(\beta(e_j \cdot \alpha)) = \\ &= \sum c(e_j \cdot \beta\alpha) = \sum \omega_M^L(c)(e_j)(\beta\alpha) = \sum 0 = 0 \end{aligned}$$

pues  $c \in \text{Ker}(\omega)$ .

Sea ahora  $f: L \rightarrow M$  tal que  $\Psi(f) = 0$ . Por definición de  $\Psi$ , esto significa que  $c(f) = 0$  para todo  $c \in \text{Ker}(\omega_M^L)$ . Queremos ver que  $f$  pertenece a  $\mathcal{P}$ . Si  $f = 0$  es obvio, así que supongamos que  $f \neq 0$ . Completamos  $\{f\}$  a una base de  $\text{Hom}_A(L, M)$  y definamos  $\tilde{c} \in D\text{Hom}(L, M)$

$$\tilde{c}(g) := \begin{cases} 1 & \text{si } g = f \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Como  $\tilde{c}(f) = 1$  entonces  $\tilde{c} \neq 0$  y además  $\tilde{c} \notin \text{Ker}(\omega_M^L)$ . Es decir que existe  $m_0 \in M$  tal que  $\omega_M^L(\tilde{c})(m_0) \neq 0$  y por lo tanto existe  $g_0: L \rightarrow A$  tal que

$$\omega_M^L(\tilde{c})(m_0)(g_0) = \tilde{c}(m_0 \cdot g_0) \neq 0$$

Luego por definición de  $\tilde{c}$ , existe  $\lambda \neq 0$  tal que  $f = \lambda m_0 \cdot g_0$ . Pero  $\lambda m_0 \cdot g_0 \in \mathcal{P}(L, M)$  pues  $f$  se factoriza de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ & \searrow^{g_0} & \nearrow^{\lambda m_0 \cdot \smile} \\ & A & \end{array}$$

donde  $\lambda m_0 \cdot \smile$  es el morfismo multiplicar a izquierda por  $\lambda m_0$ .

b) Finalmente, queda demostrar que  $\Psi$  es sobreyectiva. Sea  $d \in D\text{Ker}(\omega_M^L)$ . Deseamos ver que existe  $f_0 \in \text{Hom}_A(L, M)$  tal que

$$d(c) = c(f_0) \text{ para todo camino } c \in \text{Ker}(\omega_M^L)$$

Si  $d \neq 0$ , existe  $c_0 \in \text{Ker}(\omega_M^L)$  tal que  $d(c_0) = 1$ . En particular  $c_0 \neq 0$ . Completamos  $c_0$  a una base de  $\text{Ker}(\omega_M^L)$ . Luego todo  $c$  se escribe como

$$c = \lambda_c c_0 \oplus \Sigma_c$$

donde  $\Sigma_c$  pertenece al complemento de  $\langle c_0 \rangle$  como subespacio vectorial. En general, si  $S$  es un subespacio de  $\mathbb{V}$ , notaremos  $S^\perp$  a cualquier subespacio vectorial tal que  $S \oplus S^\perp = \mathbb{V}$ .

Como  $\text{Ker}(d)^\perp$  tiene dimensión uno como espacio vectorial,  $\text{Ker}(d)^\perp = \langle c_0 \rangle$ , lo que es equivalente a  $\text{Ker}(d) = \langle c_0 \rangle^\perp$ . Luego  $d(c) = \lambda_c d(c_0) = \lambda_c$ .

Por otra parte como  $c_0 \neq 0$ , existe  $f_0: L \rightarrow M$ ,  $A$ -lineal tal que  $c_0(f_0) = 1$ . Entonces  $f_0 \notin \text{Ker}(c_0)$ . Afirmamos que

$$f_0 \in \text{Ker}(\Sigma) \text{ para todo } \Sigma \in \langle c_0 \rangle^\perp$$

En efecto, fijemos  $\Sigma \notin \langle c_0 \rangle$  y supongamos que  $f_0 \notin \text{Ker}(\Sigma)$ . Entonces

$$f_0 \in \text{Ker}(\Sigma)^\perp \cap \text{Ker}(c_0)^\perp$$

Como

$$\dim_k \text{Ker}(\Sigma)^\perp = \dim_k \text{Ker}(c_0)^\perp = 1$$

eso significa que

$$\text{Ker}(\Sigma)^\perp = \text{Ker}(c_0)^\perp = \langle f_0 \rangle$$

Pero entonces  $\Sigma = \mu c_0$ ,  $\mu \neq 0$ , entonces  $\Sigma$  y  $c_0$  son LD, contradicción. Luego  $f_0 \in \text{Ker}(\Sigma)$ . Entonces para todo  $c$ ,

$$c(f_0) = \lambda_c c_0(f_0) + \Sigma_c(f_0) = \lambda_c c_0(f_0) = \lambda_c$$

Por lo tanto

$$d(c) = \lambda_c = c(f_0) \text{ para todo } c \in \text{Ker}(\omega_M^L)$$

Luego  $d = \Psi(f_0)$ . Entonces  $\Psi$  es sobreyectivo y por lo tanto  $\underline{\text{Hom}}_A(L, M) \cong D\text{Ker}(\omega_M^L)$ .

3) De las definiciones se sigue que  $\omega$  es natural. □

Enunciemos y demostremos ahora las fórmulas:

**Teorema 5.32.** Sean  $M$  y  $N$   $A$  módulos. Entonces existen isomorfismos naturales

$$\text{Ext}^1(M, N) \cong D\underline{\text{Hom}}(\tau^{-1}N, M) \cong D\overline{\text{Hom}}(N, \tau M)$$

*Demostración.* Vamos a demostrar  $\text{Ext}^1(M, N) \cong D\underline{\text{Hom}}(\tau^{-1}N, M)$ , el otro isomorfismo es análogo.

Podemos suponer  $N$  sin sumandos directos inyectivos. En efecto,  $\text{Ext}^1(M, N) \cong \text{Ext}^1(M, N_i)$  con  $N = N_i \oplus I$  con  $N_i$  sin sumandos directos inyectivos pues

$$\text{Ext}^1(M, N) = \text{Ext}^1(M, N_i \oplus I) \cong \text{Ext}^1(M, N_i) \oplus \text{Ext}^1(M, I) = \text{Ext}^1(M, N_i)$$

donde  $\text{Ext}^1(M, I) = 0$  por la proposición 3.45. Además, como  $\tau^{-1}$  es cero sobre los inyectivos,

$$D\underline{\text{Hom}}(\tau^{-1}N, M) = D\underline{\text{Hom}}(\tau^{-1}(N_i \oplus I), M) = D\underline{\text{Hom}}(\tau^{-1}N_i \oplus \tau^{-1}I, M) = D\underline{\text{Hom}}(\tau^{-1}N_i, M)$$

y en conclusión un isomorfismo entre  $D\underline{\text{Hom}}(\tau^{-1}N_i, M)$  y  $\text{Ext}^1(M, N_i)$  me implica un isomorfismo entre  $D\underline{\text{Hom}}(\tau^{-1}N, M)$  y  $\text{Ext}^1(M, N)$ . Entonces efectivamente podemos suponer  $N$  sin sumandos directos inyectivos. Entonces por el teorema 4.19  $N = \tau L$  para un  $L$ . Sea

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} L \rightarrow 0$$

una ppm de  $L$ . Luego aplicando  $\text{Hom}(-, M)$  tenemos otra sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}(L, M) \rightarrow \text{Hom}(P_0, M) \rightarrow \text{Hom}(P_1, M)$$

y aplicando  $D$ , obtenemos una sucesión exacta

$$D\underline{\text{Hom}}(P_1, M) \rightarrow D\underline{\text{Hom}}(P_0, M) \rightarrow D\underline{\text{Hom}}(L, M) \rightarrow 0$$

Por otra parte, si volvemos a la ppm de  $L$  y aplicamos  $\nu$  en ella, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \tau L \xrightarrow{i} \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu L \rightarrow 0$$

y como  $\tau L = N$ ,

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{i} \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0$$

es una secuencia exacta, y luego aplicando  $\text{Hom}(M, -)$  obtenemos una secuencia exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, \tau L) \rightarrow \text{Hom}(M, \nu P_1) \xrightarrow{(\nu p_1)^*} \text{Hom}(M, \nu P_0)$$

Por la naturalidad, y recordando que  $L = \tau^{-1}N$ , hay un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
D\text{Hom}(P_1, M) & \xrightarrow{Dp_1^*} & D\text{Hom}(P_0, M) & \xrightarrow{Dp_0^*} & D\text{Hom}(\tau^{-1}N, M) & \longrightarrow & 0 \\
\cong \downarrow \omega_M^{P_1} & & \cong \downarrow \omega_M^{P_0} & & \downarrow \omega_M^L & & \\
\text{Hom}(M, \nu P_1) & \xrightarrow{(\nu p_1)_*} & \text{Hom}(M, \nu P_0) & \xrightarrow{(\nu p_0)_*} & \text{Hom}(M, \nu L) & & 
\end{array}$$

Volvamos a la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \tau L \xrightarrow{i} \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu L \rightarrow 0$$

Consideremos la presentación inyectiva

$$0 \rightarrow \tau L \xrightarrow{i} \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0$$

y la completamos a una resolución inyectiva de  $\tau L$ :

$$0 \rightarrow \tau L \xrightarrow{i} \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{f} I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow \dots$$

Entonces  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(\nu p_0)$ . Por lo tanto  $\text{Ker}(f_*) = \text{Ker}((\nu p_0)_*)$ . Entonces

$$\text{Ext}^1(M, N) = \text{Ker}(f_*) / \text{Im}((\nu p_1)_*) = \text{Ker}((\nu p_0)_*) / \text{Im}((\nu p_1)_*)$$

Definiremos un morfismo:

$$\begin{aligned}
\Psi: \text{Ker}((\nu p_0)_*) &\longrightarrow D\text{Hom}(\tau^{-1}N, M) \\
\Psi &:= Dp_0^* \circ (\omega_M^{P_0})^{-1} \Big|_{\text{Ker}((\nu p_0)_*)}
\end{aligned}$$

Si recordamos que  $\text{Ker}(\omega_M^L) = D\underline{\text{Hom}}_A(L, M)$ , alcanza con demostrar que  $\text{Im}(\Psi) = \text{Ker}(\omega_M^L)$  y que  $\text{Ker}(\Psi) = \text{Im}((\nu p_1)_*)$ .

a)  $\text{Ker}(\Psi) = \text{Im}((\nu p_1)_*)$ :

$\subseteq$ ) Sea  $\eta$  tal que  $\Psi(\eta) = 0$ , i.e.,  $Dp_0^* \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\eta) = 0$ . Entonces  $(\omega_M^{P_0})^{-1}(\eta) \in \text{Ker}(Dp_0^*)$ , que es igual a  $\text{Im}(Dp_1^*)$ . Luego  $(\omega_M^{P_0})^{-1}(\eta) = Dp_1^*(\Sigma)$  y por lo tanto

$$\eta = \omega_M^{P_0} Dp_1^*(\Sigma) = (\nu p_1)_* \circ \omega_M^{P_1}(\Sigma) \in \text{Im}((\nu p_1)_*)$$

$\supseteq$ ) Sea  $(\nu p_1)_*(\Sigma) \in \text{Im}((\nu p_1)_*)$ . Veamos que está en el núcleo:

$$\Psi((\nu p_1)_*(\Sigma)) = Dp_0^* \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\nu p_1)_*(\Sigma) = Dp_0^* Dp_1^*(\omega_M^{P_1})^{-1}(\Sigma) = 0$$

Luego  $(\nu p_1)_*(\Sigma) \in \text{Ker}(\Psi)$ .

b)  $\text{Im}(\Psi) = \text{Ker}(\omega_M^L)$ :

$\subseteq$ ) Sea  $\Psi(\eta) = Dp_0^* \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\eta) \in \text{Im}(\Psi)$ . Queremos ver que pertenece al núcleo de  $\omega$ . En efecto:

$$\omega_M^L(Dp_0^* \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\eta)) = (\nu p_0)_* \circ \omega_M^{P_0} \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\eta) = (\nu p_0)_*(\eta) = 0$$

pues  $\eta \in \text{Ker}((\nu p_0)_*)$ .

$\supseteq$ ) Sea  $\varphi \in \text{Ker}(\omega_M^L)$ . Por sobreyectividad existe  $\xi$  tal que  $\varphi = Dp_0^* \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\xi)$ . Hay que ver que  $\xi \in \text{Ker}((\nu p_0)_*)$ . En efecto:

$$(\nu p_0)_*(\xi) = (\nu p_0)_* \circ (\omega_M^{P_0}) \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\xi) = \omega_M^L \circ Dp_0^* \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\xi) = \omega_M^L(\varphi) = 0$$

Luego  $\xi \in \text{Ker}((\nu p_0)_*)$  y por lo tanto  $\varphi = \Psi(\xi)$ .

Entonces  $\Psi$  induce un isomorfismo entre

$$\text{Ker}((\nu p_0)_*) / \text{Im}((\nu p_1)_*) = \text{Ext}^1(M, N) \cong \text{Im}(\Psi) = \text{Ker}(\omega_M^L) \cong D\underline{\text{Hom}}_A(L, M)$$

□

**Corolario 5.33.** Sean  $M$  y  $N$   $A$ -módulos. Entonces:

- Si  $pd\ M \leq 1$ , entonces  $\text{Ext}^1(M, N) \cong \text{DHom}(N, \tau M)$ .
- Si  $id\ N \leq 1$ , entonces  $\text{Ext}^1(M, N) \cong \text{DHom}(\tau^{-1}N, M)$ .

*Demostración.* Al ser ambas muy similares, demostraremos 1 solamente.

Sabemos por las fórmulas que  $\text{Ext}^1(M, N) \cong \text{D}\overline{\text{Hom}}_A(N, \tau M)$ . Entonces únicamente hay que demostrar que  $I(N, \tau M) = 0$ . Recordemos que por la proposición 4.16, si  $pd\ M \leq 1$  entonces  $\text{Hom}(DA, \tau M) = 0$ .

Sea entonces un  $f \in I(N, \tau M)$ . Luego existen  $\beta$  y  $\alpha$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & \tau M \\ & \searrow \alpha & \nearrow \beta \\ & I & \end{array}$$

conmuta. Luego, aplicando el funtor  $D$ , este diagrama también es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tau M & \xrightarrow{Df} & N \\ & \searrow D\beta & \nearrow D\alpha \\ & DI & \end{array}$$

Como  $DI$  es proyectivo, entonces  $A^n = DI \oplus P$  para algún  $n$ . Notemos que podemos extender  $D\alpha$  a un  $\widetilde{D\alpha}$  definido sobre todo  $A^n$ , definiéndolo como 0 sobre  $P$ . Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} DI & \xrightarrow{i} & A^n \\ & \searrow D\alpha & \downarrow \widetilde{D\alpha} \\ & & N \end{array}$$

y aplicando  $D$  de nuevo obtenemos que

$$\begin{array}{ccc} I & \xleftarrow{\alpha_2} & (DA)^n \\ & \searrow \alpha & \uparrow \alpha_1 \\ & & N \end{array}$$

conmuta. Es decir,  $\alpha = \alpha_2\alpha_1$ .

Por lo tanto,

$$f = \beta\alpha = \beta\alpha_2\alpha_1 = (\beta\alpha_2)\alpha_1$$

con  $\beta\alpha_2: (DA)^n \rightarrow \tau M$ . Entonces

$$\beta\alpha_2 \in \text{Hom}((DA)^n, \tau M) = \bigoplus_n \text{Hom}(DA, \tau M) = 0$$

Luego  $\beta\alpha_2 = 0$  y por lo tanto  $f = 0$ . En conclusión  $I(N, \tau M) = 0$ . □

Un corolario inmediato es:

**Corolario 5.34.** Sea  $N$  sin sumandos directos proyectivos tal que  $pd\ M \leq 1$  y  $id\ \tau N \leq 1$ . Entonces

$$\text{Hom}(\tau N, \tau M) \cong \text{Hom}(N, M)$$

*Demostración.* Como  $pd\ M \leq 1$ ,

$$\text{Hom}(\tau N, \tau M) \cong \text{DExt}^1(M, \tau N)$$

por el corolario 5.33 parte 1. Como  $id\ \tau N \leq 1$ ,

$$\text{DExt}^1(M, \tau N) \cong \text{DHom}(\tau^{-1}\tau N, M)$$

por el corolario 5.33 parte 2. Finalmente  $\tau^{-1}\tau N \cong N$  pues  $N$  no tiene sumandos directos proyectivos. Luego

$$\text{Hom}(\tau N, \tau M) \cong \text{Hom}(N, M)$$

□

Estos dos corolarios son válidos, por ejemplo, para cualquier carcaj, ya que en ese caso ya vimos que la categoría es hereditaria.

## Parte 6

# Teorema de Gabriel

En 1972 ([**Gab72**]) el matemático francés Pierre Gabriel clasificó a los carcajes de **tipo finito**, es decir, aquellos que tienen una cantidad finita de representaciones indescomponibles. El resultado establece que los carcajes de tipo finito son exactamente aquellos cuyo grafo es un diagrama de Dynkin como los vistos en el ejemplo 1.3. Lo curioso es que estos diagramas aparecen en la clasificación de otros objetos algebraicos y geométricos como las álgebras de Lie semisimples.

La demostración que daremos, proveniente de [**Sch14**] y [**Bri00**], tiene un componente de geometría algebraica y grupos algebraicos. El *background* necesario para los detalles técnicos escapan a esta tesina.

Los teoremas 6.8 y 6.16 se desarrollan más en profundidad con respecto a las fuentes citadas.

Sea  $Q$  un carcaj sin ciclos orientados, con sus vértices ordenados  $\{1, \dots, n\}$  y  $d = (d_i) \in (\mathbb{N}_0)^n$  un vector dimensión (es decir, un vector cuyas coordenadas son todos enteros mayores o iguales que cero).

**Definición 6.1.** Sea  $E_d$  el conjunto de todas las representaciones con vector dimensión  $d$ .

Todas las representaciones de  $E_d$  están completamente determinadas en sus espacios vectoriales y lo único que elijo de una representación son los morfismos entre sus vértices. Luego

$$E_d \cong \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}_k(k^{d_{s(\alpha)}}, k^{d_{t(\alpha)}})$$

donde la flecha es una biyección, pero el objeto de la derecha tiene una estructura algebraica y geométrica natural. Como  $\text{Hom}_k(k^{d_{s(\alpha)}}, k^{d_{t(\alpha)}}) \cong M_{t(\alpha) \times s(\alpha)}(k)$ , luego

$$E_d \cong \bigoplus_{\alpha \in Q_1} M_{d_{t(\alpha)} \times d_{s(\alpha)}}(k) \cong k^{\sum d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)}}$$

lo que implica que  $E_d$  es un espacio vectorial sobre  $k$  con dimensión  $\sum d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)}$ .

**Definición 6.2.** Sea  $G_d := \prod_{i \in Q_0} GL_{d_i}(k)$

Entonces  $G_d$  es un grupo que actúa sobre  $E_d$  vía

$$\{g\}_i \cdot M := \widetilde{M}, \text{ con } \widetilde{M}_i = k^{d_i} \text{ y } \widetilde{\varphi}_\alpha := g_{t(\alpha)} \varphi_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1}$$

Es decir,

$$\begin{array}{ccc}
M_{s(\alpha)} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_{t(\alpha)} \\
g_{s(\alpha)}^{-1} \uparrow & & \downarrow g_{t(\alpha)} \\
M_{s(\alpha)} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_\alpha} & M_{t(\alpha)}
\end{array}$$

conmuta.

**Definición 6.3.** Sea  $\mathcal{O}_M := \{g \cdot M : g \in G_d\}$  la órbita de  $M$ .

**Ejemplo 6.4.** Sea  $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$  y  $d = (1, 1, 0)$ . Entonces  $E_d = \text{Hom}_k(k, k) = k$  y  $G_d = GL_1(k) \times GL_1(k) = k^\times \times k^\times$ .

Notemos que entre  $g \cdot M$  y  $M$  hay un isomorfismo de representaciones dado por  $g$ . Y efectivamente, dentro del conjunto de todas las representaciones de vector dimensión  $d$ ,  $\mathcal{O}_M$  es el conjunto de representaciones isomorfas a  $M$ :

**Lema 6.5.** Sea  $M \in E_d$ ,  $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ . Entonces  $\mathcal{O}_M := \{M' \in \text{Rep}_Q : M' \cong M\}$ .

*Demostración.* Sea  $g \cdot M \in \mathcal{O}_M$ . Luego  $g \cdot M \cong M$  vía  $(g \cdot M)_i \xrightarrow{g_i^{-1}} M_i$ .

Sea ahora  $N$  una representación isomorfa a  $M$ , con  $N = (M_i, \psi_\alpha)$ , y  $f: N \rightarrow M$  un isomorfismo. Luego como  $f$  es un morfismo de representaciones,  $f_j \circ \psi_\alpha = \varphi_\alpha \circ f_i$  con  $\alpha: i \rightarrow j$ . Por lo tanto

$$\psi_\alpha = f_j^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ f_i = (f_j^{-1}) \circ \varphi_\alpha \circ (f_i^{-1})^{-1} \text{ con } f_i \in GL_{d_i}(k)$$

Luego  $N = f \cdot M$ . □

**Definición 6.6.**  $\text{Stab}(M) := \{g \in G_d : g \cdot M = M\} = \text{Aut}(M)$ .

Usaremos los siguientes hechos de la geometría algebraica:

**Lema 6.7.** Sea  $d \in (\mathbb{N}_0)^n$ . Entonces:

1. Para toda representación  $M$  de vector dimensión  $d$ , la dimensión de  $\mathcal{O}_M$  satisface

$$\dim \mathcal{O}_M = \dim G_d - \dim \text{Aut}(M)$$

2. Hay a lo sumo una órbita de codimensión cero en  $E_d$ .

3. Si  $E_d$  tiene finitas órbitas bajo la acción de  $G_d$ , entonces existe una órbita de codimensión cero.

**Teorema 6.8.** Sea

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

una sucesión exacta corta que no se parte. Entonces:

$$\dim \mathcal{O}_{L \oplus N} < \dim \mathcal{O}_M$$

*Demostración.* Recordemos que si  $d = \underline{\dim} M = \underline{\dim} L \oplus N$ ,

$$\mathcal{O}_{L \oplus N} = \{J : J \cong L \oplus N\} = \{g \cdot (L \oplus N) : g \in G_d\} \leq E_d$$

Escribamos a las representaciones como  $L = (L_i, \psi_\alpha)$ ,  $M = (M_i, \varphi_\alpha)$  y  $N = (N_i, \chi_\alpha)$ . Para cada  $i$ , sea  $\mathcal{L}_i = \{l_1^i, \dots, l_{n_i}^i\}$  una base de  $L_i$ . Además sea  $B_i$  una base que extiende al conjunto linealmente independiente  $\{f_i(\mathcal{L}_i)\} \leq M$ . Afirmamos que  $g_i(B_i)$  es una base de  $N$ :



que genera es obvio pues la función  $g$  es sobreyectiva. Además es linealmente independiente: Si  $B_i = \{f_i(l_1^i), \dots, f_i(l_{n_i}^i), v_1, \dots, v_{r_i}\}$  entonces  $g_i(B_i)$  es  $\{g_i(v_1), \dots, g_i(v_{r_i})\}$  con  $\{v_1, \dots, v_{r_i}\}$  linealmente independientes. Como  $\text{Ker}(g) = \langle f_i(b_1^i), \dots, f_i(b_{n_i}^i) \rangle$ ,  $g|_{\langle v_1, \dots, v_{r_i} \rangle}$  es un monomorfismo y por lo tanto la imagen de vectores linealmente independientes también es linealmente independiente. Luego  $\mathcal{N}_i := g_i(B_i)$  es base de  $N_i$ .

En las bases  $\mathcal{L}_i$ ,  $B_i$  y  $\mathcal{N}_i$ ,  $f$  y  $g$  se escriben como

$$f_i = \left[ \begin{array}{c} Id_{n_i \times n_i} \\ 0_{r_i \times n_i} \end{array} \right] \text{ y } g_i = \left[ \begin{array}{c|c} 0_{r_i \times n_i} & Id_{r_i \times r_i} \end{array} \right]$$

Sea ahora  $\alpha: i \rightarrow j$  una flecha. Buscamos calcular los morfismos de cada representación en las bases  $\mathcal{L}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{N}_i$ .

Como  $f$  y  $g$  son morfismos de representaciones, tenemos dos ecuaciones:

$$\varphi_\alpha \circ f_i = f_j \circ \psi_\alpha \quad (6.1)$$

y

$$g_j \circ \varphi_\alpha = \chi_\alpha \circ g_i \quad (6.2)$$

con  $[\psi]: k^{n_i} \rightarrow k^{n_j}$ ,  $[\varphi_\alpha]: k^{n_i+r_i} \rightarrow k^{n_j+r_j}$ ,  $[\chi_\alpha]: k^{r_i} \rightarrow k^{r_j}$ . Usaremos la notación de matrices para las transformaciones lineales, donde  $[A]^c$  indica la columna  $c$  de la matriz  $[A]$ ,  $[A]^l$  indica la fila  $l$  y  $[A]_{1 \leq k \leq m}$  indica las filas de la primera a la  $m$ -ésima y lo mismo pero arriba para las columnas de la primera a la  $m$ -ésima.

Mirando la igualdad 6.1 tenemos que

$$[\varphi_\alpha] \circ \left[ \begin{array}{c} Id_{n_i \times n_i} \\ 0_{r_i \times n_i} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} Id_{n_j \times n_j} \\ 0_{r_j \times n_j} \end{array} \right] \circ [\psi_\alpha]$$

luego

$$\left[ \begin{array}{c|c} [\varphi_\alpha]^1 & \dots & [\varphi_\alpha]^{n_i} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} [\psi_\alpha] \\ 0_{r_j \times n_j} \end{array} \right]$$

Entonces  $[\varphi_\alpha] = \left[ \begin{array}{c|c} [\psi_\alpha] & * \\ 0 & * \end{array} \right]$ . Por otra parte,  $\chi_\alpha \circ g_i = g_j \circ \varphi_\alpha$ , es decir

$$[\chi_\alpha] \circ \left[ \begin{array}{c|c} 0_{r_i \times n_i} & Id_{r_i \times r_i} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} 0_{r_j \times n_j} & Id_{r_j \times r_j} \end{array} \right] \circ \left[ \begin{array}{c|c} [\psi_\alpha] & [\varphi_\alpha]^{n_i+1 \leq l \leq n_i+r_i} \\ 0 & [\varphi_\alpha]^{n_i+1 \leq l \leq n_i+r_i} \end{array} \right]$$

luego

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} 0_{r_j \times n_i} & [\chi_\alpha]^1 & \dots & [\chi_\alpha]^{r_i} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} 0_{r_j \times n_i} & [\varphi_\alpha]_{k \geq n_j+1}^{n_i+1} & \dots & [\varphi_\alpha]_{k \geq n_j+1}^{n_i+r_i} \end{array} \right]$$

y por lo tanto  $\varphi_\alpha$  en esas bases tienen la forma

$$[\varphi_\alpha]_{\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j} = \left[ \begin{array}{c|c} [\psi_\alpha]_{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j} & \epsilon_\alpha \\ 0 & [\chi_\alpha]_{\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j} \end{array} \right]$$

donde  $\epsilon_\alpha$  es una matriz de  $(d_j - r_j) \times (d_i - n_i)$ .

Afirmamos que  $M$  no es isomorfa a  $L \oplus N$ . En efecto, si lo fuera, tendríamos que  $\text{Hom}(N, M) = \text{Hom}(N, L) \oplus \text{Hom}(N, N)$ , y entonces

$$\dim_k \text{Hom}(N, M) = \dim_k \text{Hom}(N, L) + \dim_k \text{Hom}(N, N)$$

Luego, como hay una secuencia exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}(N, L) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(N, M) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(N, N) \quad (6.3)$$

evaluando las dimensiones concluimos que

$$\begin{aligned} \dim_k \text{Im}(g_*) + \dim_k \text{Ker}(g_*) &= \dim_k \text{Hom}(N, M) \\ \dim_k \text{Im}(g_*) + \dim_k \text{Hom}(N, L) &= \dim_k \text{Hom}(N, L) + \dim_k \text{Hom}(N, N) \\ \dim_k \text{Im}(g_*) &= \dim_k \text{Hom}(N, N) \end{aligned}$$

Luego en 6.3  $g_*$  es sobreyectiva, y por lo tanto existe  $r: N \rightarrow M$  tal que  $g \circ r = \text{Id}_N$ . Por lo tanto la sucesión original se parte, absurdo. Por lo tanto  $M$  no es isomorfa a  $L \oplus N$ . Entonces algún  $\epsilon_\alpha$  debe ser no nulo. Si fueran todos nulos, la transformación lineal  $G_i: M_i \rightarrow L_i \oplus N_i$  que manda  $G_i(f_i(l_k^i))$  en  $l_k^i$  y  $G_i(v_k)$  en  $g_i(v_k)$  sería un isomorfismo de representaciones para todo  $i$  lo cual contradeciría que no son isomorfos. En efecto, basta comprobar que sería un *morfismo* de representaciones (biyectiva ya es): queremos ver que si  $\alpha: i \rightarrow j$ ,  $G_j \circ \varphi_\alpha = \psi_\alpha \oplus \chi_\alpha \circ G_i$ . Si lo miro en las bases  $\mathcal{B}, \mathcal{L}, \mathcal{N}$ , como  $[G_j]_{\mathcal{B}_j, \mathcal{L}_j \oplus \mathcal{N}_j}$  y  $[G_i]_{\mathcal{B}_i, \mathcal{L}_i \oplus \mathcal{N}_i}$  son las identidades y

$$[\varphi_\alpha]_{\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j} = [\psi_\alpha]_{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j} \oplus [\chi_\alpha]_{\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} [\psi_\alpha \oplus \chi_\alpha]_{\mathcal{L}_i \oplus \mathcal{N}_i, \mathcal{L}_j \oplus \mathcal{N}_j} \circ [G_i]_{\mathcal{B}_i, \mathcal{L}_i \oplus \mathcal{N}_i} &= [\psi_\alpha]_{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j} \oplus [\chi_\alpha]_{\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j} \circ \text{Id} = [\psi_\alpha]_{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j} \oplus [\chi_\alpha]_{\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j} = \\ &= [\varphi_\alpha]_{\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j} = \text{Id} \circ [\varphi_\alpha]_{\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j} = [G_j]_{\mathcal{B}_j, \mathcal{L}_j \oplus \mathcal{N}_j} \circ [\varphi_\alpha]_{\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j} \end{aligned}$$

y por lo tanto  $G$  es un morfismo de representaciones, además es biyectivo y por lo tanto  $M \cong L \oplus N$ , absurdo.

Luego existe algún  $\alpha_0$  tal que  $[\varphi_{\alpha_0}] = \left[ \begin{array}{c|c} [\psi_{\alpha_0}] & \epsilon_{\alpha_0} \\ \hline 0 & [\chi_{\alpha_0}] \end{array} \right]$  y  $\epsilon_{\alpha_0} \neq 0$ . Luego si consideramos la curva de representaciones

$$t \cdot M := (M_i, t \cdot \varphi_\alpha), \quad t \in k^\times \text{ con } [t \cdot \varphi_\alpha] = \left[ \begin{array}{c|c} [\psi_\alpha] & t \cdot \epsilon_\alpha \\ \hline 0 & [\chi_\alpha] \end{array} \right]$$

tenemos que  $t \cdot M \in \mathcal{O}_M$  para todo  $t \neq 0$  (pues es isomorfa a  $M$ ) pero  $t \cdot M \notin \mathcal{O}_{L \oplus N}$  para todo  $t \neq 0$  (pues no es isomorfa a  $L \oplus N$ ). Esto nos dice que  $\mathcal{O}_M$  tiene al menos una dimensión que no tiene  $\mathcal{O}_{L \oplus N}$ . Entonces  $\dim \mathcal{O}_{L \oplus N} < \dim \mathcal{O}_M$ .  $\square$

**Ejemplo 6.9.** Veamos algunos ejemplos de cálculos de órbitas:

1. Sea  $Q$  un carcaj acíclico. Si  $M$  es una representación semisimple (es decir, es de la forma  $\bigoplus_k S(i_k)^{d_k}$ ) y  $M'$  es isomorfa a  $M$ , entonces claramente resulta ser igual a  $M$ . Por lo tanto  $\# \mathcal{O}_M = 1$ , luego  $\dim \mathcal{O}_M = 0$ .

2. Sea  $Q = 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$  y  $M = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}$ . Calculemos  $\dim \mathcal{O}_M$ :

Sea

$$M' = k \xrightarrow{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} k^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}} k$$

una representación isomorfa a  $M$ . Notemos que  $M$  tiene la forma

$$k \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} k^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} k$$

Como son isomorfas, existen constantes no nulas  $\lambda, \mu$  y una matriz  $A$  con determinante no nulo tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & k^2 & \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & k \\ \downarrow \mu \neq 0 & & \downarrow A & & \downarrow \lambda \neq 0 \\ k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} & k^2 & \xleftarrow{\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}} & k \end{array}$$

conmuta. Entonces  $A = \begin{bmatrix} \mu a & \lambda c \\ \mu b & \lambda d \end{bmatrix}$ . Como  $A$  es inversible,

$$\det(A) = \mu \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \neq 0$$

Lo cual es equivalente a que

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \neq 0$$

En conclusión,

$$M' \cong M \text{ si y sólo si } \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \neq 0$$

Por lo tanto  $\mathcal{O}_{\frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}} \cong Gl_{2 \times 2}(k)$  y entonces  $\dim \mathcal{O}_M = 4$ .

## 6.1. Forma cuadrática de un carcaj

**Definición 6.10.** Sea  $Q$  sin ciclos dirigidos. Una  $n$  **forma cuadrática**  $q$  es un polinomio en  $n$  variables con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  que es homogéneo de grado dos. Luego  $q$  es de la forma

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j.$$

Pensaremos a  $q$  como una función polinomial  $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ . Notemos que como es homogéneo de grado dos,  $q(rx) = r^2 q(x)$  para todo  $r \in \mathbb{Z}$ . Asociado a una forma cuadrática tenemos inmediatamente una forma bilineal simétrica:

Dada una forma cuadrática  $q$ , definimos una forma bilineal simétrica

$$\langle x, y \rangle := q(x + y) - q(x) - q(y)$$

$\langle -, - \rangle$  claramente es simétrica y se demuestra que es bilineal.

Recíprocamente, dada una forma bilineal simétrica  $\langle -, - \rangle$  podemos definir una forma cuadrática como

$$q(x) := \frac{1}{2} \langle x, x \rangle$$

y las dos operaciones son inversas.

**Definición 6.11.** Dado  $Q$  un carcaj con  $n$  vértices, definimos su forma cuadrática, llamada también **forma de Tits**, como

$$q(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)} \quad q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$$

**Observacion 6.12. (importante):** La forma cuadrática  $q$  no depende de la dirección de las flechas, sólo del grafo sin orientar subyacente.

**Ejemplo 6.13.** Si  $Q$  es el carcaj  $1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$ , su 3-forma cuadrática es  $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3$ .

**Teorema 6.14.** Sea  $Q$  un carcaj acíclico. Entonces para toda representación  $M$  con vector dimensión  $d$ , podemos calcular a su forma de Tits usando las dimensiones de sus espacios de morfismos. Más precisamente:

$$q(d) = \dim_k \text{End}(M) - \dim_k \text{Ext}^1(M, M)$$

*Demostración.* Como  $Q$  no tiene relaciones ni ciclos dirigidos, existe una resolución proyectiva

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}} \rightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} \rightarrow M \rightarrow 0$$

Aplicando el funtor  $\text{Hom}(-, M)$  tenemos

$$0 \rightarrow \text{End}(M) \rightarrow \bigoplus_i \text{Hom}(P(i)^{d_i}, M) \xrightarrow{T} \bigoplus_{\alpha} \text{Hom}(P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}}, M) \rightarrow \text{Ext}^1(M, M) \rightarrow 0$$

Expandiendo y usando que  $\text{Hom}(P(i), M) = M_i$ ,

$$0 \rightarrow \text{End}(M) \rightarrow \bigoplus_i M_i^{d_i} \xrightarrow{T} \bigoplus_{\alpha} M_{t(\alpha)}^{d_{s(\alpha)}} \rightarrow \text{Ext}^1(M, M) \rightarrow 0$$

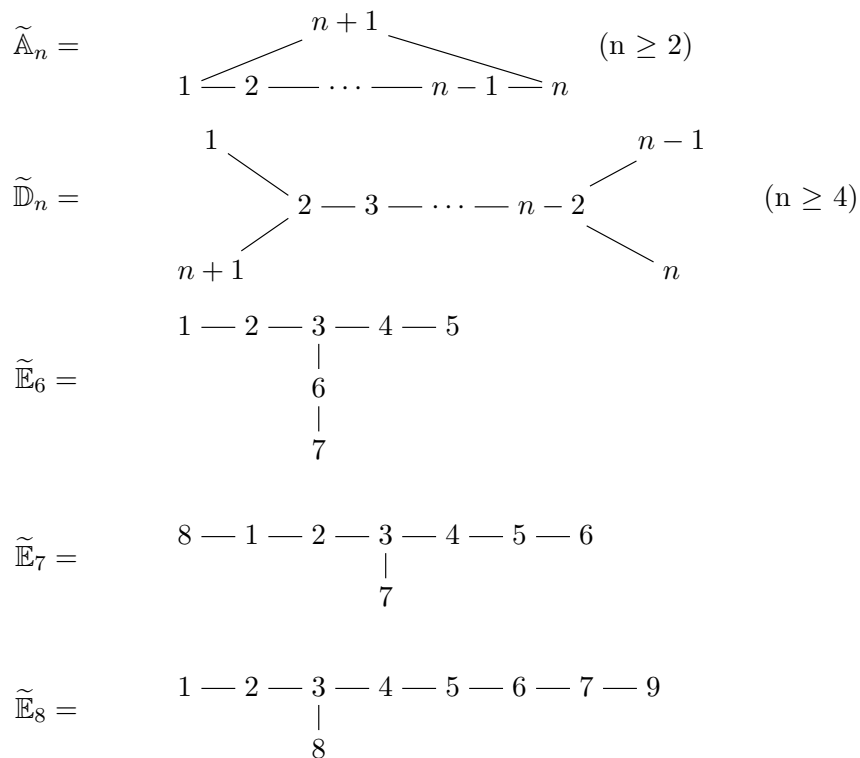
Luego tomando dimensión,

$$\begin{aligned} \sum d_i^2 &= \dim_k \text{Ker}(T) + \dim_k \text{Im}(T) \\ \sum d_i^2 &= \dim_k \text{End}(M) + \dim_k \text{Im}(T) - \dim_k \bigoplus_{\alpha} M_{t(\alpha)}^{d_{s(\alpha)}} + \dim_k \bigoplus_{\alpha} M_{t(\alpha)}^{d_{s(\alpha)}} \\ \sum d_i^2 &= \dim_k \text{End}(M) - \dim_k \text{Coker}(T) + \sum d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)} \\ \sum d_i^2 - \sum d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)} &= \dim_k \text{End}(M) - \dim_k \text{Ext}^1(M, M) \\ q(d) &= \dim_k \text{End}(M) - \dim_k \text{Ext}^1(M, M) \end{aligned}$$

□

**Definición 6.15.** Análogamente a como definimos los carcajes de tipo Dynkin, tenemos los de tipo Euclideo, llamados también “Dynkin extendidos”, que se consiguen agregando un vértice a un diagrama Dynkin de manera que el resultado no es un diagrama de Dynkin, pero si se

remueve cualquier vértice se obtiene una unión de Dynkings.



$\tilde{A}_1$  tiene una definición aparte que es  $\tilde{A}_1 := 1 \text{ --- } 2$

**Lema 6.16.** Sea  $Q$  conexo y sin lazos,  $d = (d_i) \in (\mathbb{N}_0)^n$  un vector dimensión no nulo tal que  $\langle d, x \rangle = 0$  para todo  $x \in \mathbb{Z}^n$ . Las siguientes afirmaciones son válidas:

1.  $q = \frac{1}{2} \langle x, x \rangle$  es semidefinida positiva.
2.  $d_i \neq 0$  para todo  $i$ .
3.  $q(x) = 0$  si y sólo si  $x = q \cdot d$ ,  $q \in \mathbb{Q}$ .

*Demostración.* Definimos  $n_{i,j} := \#\{\text{flechas de } i \text{ en } j\} + \#\{\text{flechas de } j \text{ en } i\}$ , que es igual a la cantidad de aristas que conectan  $i$  y  $j$  en el grafo subyacente.

Demostremos primero que  $d_i \neq 0$  para todo  $i$ . Escribamos  $q$  utilizando  $n_{i,j}$ :

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_i \sum_{j < i} n_{i,j} x_i x_j$$

Entonces, reemplazando en la definición tenemos

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle &= \sum_i (x_i + y_i)^2 - \sum_i \sum_{j:j < i} n_{i,j} (x_i + y_i)(x_j + y_j) - \sum_i x_i^2 + \sum_i \sum_{j:j < i} n_{i,j} x_i x_j \\
 &\quad - \sum_i y_i^2 + \sum_i \sum_{j:j < i} n_{i,j} y_i y_j = 2 \sum_i x_i y_i - \sum_i \sum_{j:j < i} n_{i,j} (x_i y_j + y_i x_j)
 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\langle d, e_k \rangle &= 2 \sum_i d_i (e_k)_i - \sum_i \sum_{j:j < i} n_{i,j} (d_i (e_k)_j + (e_k)_i d_j) = \\
&= 2d_k - \left( \sum_{i \neq k} \sum_{j:j < i} n_{i,j} (d_i (e_k)_j + \overbrace{(e_k)_i d_j}^{=0}) + \sum_{j:j < k} n_{k,j} (d_k \overbrace{(e_k)_j}^{=0} + (e_k)_k d_j) \right) = \\
&= 2d_k - \left( \sum_{i:k < i} \sum_{j:j < i} n_{i,j} d_i (e_k)_j + \sum_{j:j < k} n_{k,j} d_j \right) = \\
&= 2d_k - \left( \sum_{i:k < i} n_{i,k} d_i + \sum_{j:j < k} \underbrace{n_{k,j}}_{=n_{j,k}} d_j \right) = 2d_k - \sum_{j \neq k} n_{j,k} d_j
\end{aligned}$$

Como  $\langle d, e_k \rangle = 0$  por hipótesis, entonces  $d_k = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} n_{j,k} d_j$ . Supongamos por absurdo que existe  $k_0$  un vértice tal que  $d_{k_0} = 0$ . Como  $n_{j,k} d_j \geq 0$  para todo  $j$ , eso implica que  $d_j = 0$  para cualquier vértice  $j$  tal que existe una flecha entre  $k_0$  y  $j$  (pues en ese caso  $n_{j,k_0} > 0$ , lo que contradice que  $\sum_{j \neq k_0} n_{j,k_0} d_j$  sea cero). Por lo tanto  $d_j$  sería cero para todo  $j$  vecino de  $k_0$ .

Como  $Q$  es conexo y finito, todo vértice es alcanzable por finitos vecinos desde  $k_0$ . Entonces si  $i_0$  es un vértice cualquiera, existe una secuencia  $k_0, k_1, \dots, k_r = i_0$  donde vértices consecutivos están unidos por una flecha. Pero entonces  $d_{k_1} = 0$ , lo que implica  $d_{k_2} = 0$  y así siguiendo  $d_{k_r} = 0 = d_{i_0}$ . Luego  $d_k = 0$  para todo vértice. Entonces  $d = 0$ , absurdo. Por lo tanto  $d_k \neq 0$  para todo  $k$ . Eso demuestra 2.

Demostremos ahora 1. Reescribamos

$$\sum_i x_i^2 = \sum_{i \in Q_0} d_i \cdot \frac{x_i^2}{d_i} \stackrel{\star}{=} \sum_{i \in Q_0} \left( \sum_{j \neq i} \frac{n_{j,i} d_j}{2} \right) \frac{x_i^2}{d_i} = \sum_{i \in Q_0} \sum_{j > i} \frac{n_{j,i}}{2} d_j \frac{x_i^2}{d_i} + \sum_{i \in Q_0} \sum_{j < i} \frac{n_{j,i}}{2} d_j \frac{x_i^2}{d_i}$$

Donde en  $\star$  uso la igualdad del párrafo anterior. Expandiendo la suma y recordando que  $n_{j,i} = n_{i,j}$  se ve que

$$\sum_{i \in Q_0} \sum_{j > i} \frac{n_{j,i}}{2} d_j \frac{x_i^2}{d_i} = \sum_{i \in Q_0} \sum_{j < i} \frac{n_{j,i}}{2} d_i \frac{x_j^2}{d_j}$$

Por lo tanto

$$\sum_i x_i^2 = \sum_{i \in Q_0} \sum_{j:j < i} \left( \frac{n_{j,i}}{2} d_j \frac{x_i^2}{d_i} + \frac{n_{j,i}}{2} d_i \frac{x_j^2}{d_j} \right) = \sum_{i \in Q_0} \sum_{j:j < i} \frac{n_{j,i}}{2} \left( d_j \frac{x_i^2}{d_i} + d_i \frac{x_j^2}{d_j} \right)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
q(x) &= \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_i \sum_{j:j < i} n_{i,j} x_i x_j = \sum_i \sum_{j:j < i} \frac{n_{j,i}}{2} \left( d_j \frac{x_i^2}{d_i} - 2x_i x_j + d_i \frac{x_j^2}{d_j} \right) = \\
&= \sum_i \sum_{j:j < i} \frac{n_{j,i}}{2} \left( x_i \frac{\sqrt{d_j}}{\sqrt{d_i}} - x_j \frac{\sqrt{d_i}}{\sqrt{d_j}} \right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Luego  $q(x)$  es semidefinida positiva. Supongamos ahora que  $q(x) = 0$ . Reescribamos  $q(x)$  como

$$q(x) = \sum_i \sum_{j:j < i} \frac{n_{j,i} d_i d_j}{2} \left( \frac{x_i}{d_i} - \frac{x_j}{d_j} \right)^2$$



euclideo que se obtiene al agregar un vértice  $n + 1$  y  $\tilde{q}$  a su forma cuadrática. Supongamos que existe  $x \neq 0 \in \mathbb{Z}^n$  tal que  $q(x) \leq 0$ . Definimos

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in Q \\ 0 & \text{si } i = n + 1 \end{cases}$$

Calculemos  $\tilde{q}$  sobre este vector dimensión:

$$\tilde{q}(\tilde{x}) = \sum_{i \in Q} x_i^2 + x_{n+1}^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)} - \sum_{\substack{\alpha: s(\alpha)=n+1 \\ \text{o } t(\alpha)=n+1}} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)} = q(x) \leq 0$$

Entonces  $\tilde{q}(\tilde{x}) = 0$  pues  $\tilde{q}$  es semidefinida positiva y por lo tanto por el lema 6.16,  $\tilde{x} = \lambda d$  con  $\lambda \in \mathbb{Q}$  y  $d$  uno de los vectores para diagramas euclideos ya vistos. Absurdo pues  $\tilde{x}_{n+1} = 0$  y  $d_{n+1} \neq 0$ . Por lo tanto  $q$  es definida positiva. Esto demuestra la vuelta de 1.

Supongamos ahora  $q$  semidefinida positiva y que  $Q$  no es de tipo euclideo ni Dynkin. Afirmamos que entonces, si  $Q$  no tiene lazos, necesariamente contiene un **subquiver propio** de tipo euclideo. Un subcarcaj propio es un carcaj  $(Q'_0, Q'_1, s', t')$  tal que  $Q'_0 \subseteq Q_0$ ,  $Q'_1 \subseteq Q_1$  y, o bien  $Q'_0 \neq Q_0$  o bien  $Q'_1 \neq Q_1$ . Esto claramente es falso si  $Q$  tiene lazos, por ejemplo  $\curvearrowright 1 \longleftarrow 2$  no tiene ningún subquiver euclideo.

Si  $Q$  tiene caminos dobles (dos vértices con dos flechas distintas que los unen) entonces  $Q$  contiene un  $\tilde{\mathbb{A}}_1$ . Si  $Q$  no tiene caminos dobles pero tiene un ciclo (dirigido o no), contiene un  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  con  $n \geq 2$ . Podemos suponer entonces que  $Q$  no tiene ciclos, ni lazos ni caminos dobles. Entonces el grafo subyacente de  $Q$  es un árbol. Sea  $T$  una sucesión maximal de vértices vecinos sin repetirse (existe pues  $Q$  no tiene ciclos). Digamos

$$T = v_1 - v_2 - \cdots - v_n$$

con  $v_1$  y  $v_n$  sin continuación. Como  $Q$  es conexo y no es de tipo  $\mathbb{A}_n$  y  $T$  es maximal, en algún momento algún  $v_i$ ,  $i = 2, \dots, n - 1$  se separa en dos:

$$\begin{array}{ccccccc} v_1 & \text{---} & v_2 & \text{---} & \cdots & \text{---} & v_i & \text{---} & \cdots & \text{---} & v_n \\ & & & & & & | & & & & \\ & & & & & & w_1 & & & & \end{array}$$

Los casos del  $n = 3$  al  $n = 7$  los haremos a mano, y después el caso para  $n \geq 8$  sale de los casos previos.

Caso  $n = 3$ : Obtenemos un  $\mathbb{D}_3$ . Debido a que  $Q$  es conexo y no es Dynkin, y  $T$  es maximal, necesariamente  $T$  continúa en  $w_1$  o en  $v_2$ . Si  $v_2$  se vuelve a separar obtenemos un  $\tilde{\mathbb{D}}_4$ :

$$\begin{array}{ccc} & w'_1 & \\ & | & \\ v_1 & \text{---} & v_2 & \text{---} & v_3 \\ & & | & & \\ & & w_1 & & \end{array}$$

Podemos suponer entonces que en  $v_2$  no se separa. Entonces continúa en  $w_1$ , obteniendo:

$$\begin{array}{ccc} v_1 & \text{---} & v_2 & \text{---} & v_3 \\ & & | & & \\ & & w_1 & & \\ & & | & & \\ & & w_2 & & \end{array}$$



que sigue siendo un  $\mathbb{D}_n$ . Entonces eventualmente, algún  $w_i$  se debe separar en dos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & v_3 & & & & \\ & & | & & & & \\ & v_2 & - & w_1 & - & \cdots & - & w_i & - & w_{i+1} \\ & & | & & & & & & & | \\ & & v_1 & & & & & & & w_{i+2} \end{array}$$

y por lo tanto existe un  $\tilde{\mathbb{D}}_n$  contenido en  $Q$ .

Caso  $n = 4$ : Supongamos

$$T = \begin{array}{cccc} v_1 & - & v_2 & - & v_3 & - & v_4 \\ & & | & & & & \\ & & w_1 & & & & \end{array}$$

Este es un diagrama de tipo  $\mathbb{D}_n$ .

Si  $T$  también se separa en  $v_3$   $T$ , obtenemos un  $\tilde{\mathbb{D}}_5$ . Si no se separa,  $w_1$  o  $v_2$  se deben separar. Si  $v_2$  se separa en otro vértice obtenemos un  $\tilde{\mathbb{D}}_4$ . Si no lo hace,  $w_1$  se separa:

$$T = \begin{array}{ccccccc} v_4 & - & v_3 & - & v_2 & - & w_1 & - & w_2 \\ & & & & | & & & & \\ & & & & v_1 & & & & \end{array}$$

que es un  $\mathbb{E}_6$ . Como  $Q$  no es euclideo y es conexo,  $w_1$  o  $w_2$  se separa. Si  $w_1$  lo hace obtenemos un  $\tilde{\mathbb{D}}_n$ . Si no lo hace,  $w_2$  se separa:

$$T = \begin{array}{ccccccc} v_4 & - & v_3 & - & v_2 & - & w_1 & - & w_2 & - & w_3 \\ & & & & | & & & & & & \\ & & & & v_1 & & & & & & \end{array}$$

que es un  $\mathbb{E}_7$ . Entonces de nuevo  $w_2$  o  $w_3$  se tienen que volver a separar. Si  $w_2$  lo hace obtenemos un  $\tilde{\mathbb{D}}_n$ . Si no lo hace,  $w_3$  se separa y obtenemos en cambio un  $\mathbb{E}_8$ :

$$T = \begin{array}{ccccccc} v_4 & - & v_3 & - & v_2 & - & w_1 & - & w_2 & - & w_3 & - & w_4 \\ & & & & | & & & & & & & & \\ & & & & v_1 & & & & & & & & \end{array}$$

Como  $Q$  no es Dynkin,  $w_3$  o  $w_4$  se separan. En el primer caso obtenemos un  $\tilde{\mathbb{D}}_n$  y en el segundo un  $\tilde{\mathbb{E}}_8$ .

Caso  $n = 5$ : Por simetría, hay esencialmente dos posibilidades:

$$T = \begin{array}{ccccccc} v_1 & - & v_2 & - & v_3 & - & v_4 & - & v_5 \\ & & | & & & & & & \\ & & w_1 & & & & & & \end{array} \quad \text{o} \quad T = \begin{array}{ccccccc} v_1 & - & v_2 & - & v_3 & - & v_4 & - & v_5 \\ & & & & | & & & & \\ & & & & w_1 & & & & \end{array}$$

La primera es completamente análoga a los casos anteriores. Para la segunda, como  $Q$  no es un  $\mathbb{E}_6$ , el diagrama continúa en algún  $v_2, v_3, v_4$  o bien en  $w_1$ . Si continúa en un  $v_k$  obtenemos un subquiver de tipo  $\tilde{\mathbb{D}}_n$ . Si continúa en  $w_1$  tenemos

$$T = \begin{array}{ccccccc} v_1 & - & v_2 & - & v_3 & - & v_4 & - & v_5 \\ & & & & | & & & & \\ & & & & w_1 & & & & \\ & & & & & & | & & \\ & & & & & & w_2 & & \end{array}$$

que es un  $\tilde{\mathbb{E}}_6$ .

Caso  $n = 6$  y  $n = 7$  se deja como un ejercicio completamente análogo.

Supongamos  $n \geq 8$ . Volvamos al diagrama del comienzo: Si la cantidad de vértices de  $v_1$  a  $v_i$  y de  $v_n$  a  $v_i$  es mayor o igual a cuatro, entonces  $Q$  contiene un  $\tilde{\mathbb{E}}_7$  y listo. Podemos suponer entonces que la cantidad de vértices en  $\{v_1, \dots, v_i\}$  es menor o igual a tres. Uno no puede ser porque en  $v_1$   $T$  no continúa.

a) Supongamos que  $i = 2$ .

$$T = \begin{array}{ccccccc} v_1 & - & v_2 & - & \cdots & - & v_n \\ & & | & & & & \\ & & w_1 & & & & \end{array}$$

Como esa forma es de un  $\mathbb{D}_n$  y  $Q$  no es un Dynkin, y además es conexo, alguno de  $w_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  se tiene que volver a separar. Si se separa  $v_2$  tenemos un diagrama de tipo  $\tilde{\mathbb{D}}_4$  porque  $n \geq 3$ , y si separa alguno entre  $v_3$  y  $v_{n-1}$  tenemos también un diagrama de tipo  $\tilde{\mathbb{D}}_n$  porque  $n \geq 4$ . Entonces el camino continúa en  $w_1$ :

$$T = \begin{array}{ccccccc} v_1 & - & v_2 & - & \cdots & - & v_n \\ & & | & & & & \\ & & w_1 & & & & \\ & & | & & & & \\ & & w_2 & & & & \end{array}$$

Como  $n \geq 7$ , tenemos al menos

$$T = \begin{array}{cccccccc} v_1 & - & v_2 & - & v_3 & - & v_4 & - & v_5 & - & v_6 & - & v_7 \\ & & | & & & & & & & & & & \\ & & w_1 & & & & & & & & & & \\ & & | & & & & & & & & & & \\ & & w_2 & & & & & & & & & & \end{array}$$

que es un  $\tilde{\mathbb{E}}_8$  torcido.

b) Supongamos  $i = 3$ . Entonces, como  $n \geq 8$ , tenemos al menos

$$T = \begin{array}{cccccccc} v_1 & - & v_2 & - & v_3 & - & v_4 & - & v_5 & - & v_6 & - & v_7 & - & v_8 \\ & & & & | & & & & & & & & & & \\ & & & & w_1 & & & & & & & & & & \end{array}$$

que es otro  $\tilde{\mathbb{E}}_8$ . Entonces en cualquier caso  $Q$  contiene un euclideo. Queda demostrada así la afirmación.

Sea  $Q' \subseteq Q$  un subquiver propio de tipo euclideo. Sea  $q'$  su forma cuadrática y  $\langle -, - \rangle'$  su forma bilineal asociada. Como ya vimos recién, existe  $d$  vector dimensión tal que  $\langle d, x \rangle' = 0$  para todo  $x \in \mathbb{Z}^{n'} - \{0\}$  y  $q'(d) = 0$ . Separo en casos:

Si  $Q_0 = Q'_0$ , como

$$q'(z) = q(z) + \sum_{\alpha \in Q_1 - Q'_1} z_{s(\alpha)} z_{t(\alpha)}$$

usando que  $d_i > 0$  para todo  $i$  y que  $Q'_1 \subsetneq Q_1$ ,

$$q'(d) = 0 = q(d) + \sum_{\alpha \in Q_1 - Q'_1} \underbrace{d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)}}_{>0} > q(d)$$

Luego  $0 > q(d)$ , lo que contradice que  $q(d)$  es semidefinida positiva, absurdo.

Si  $Q'_0 \subsetneq Q_0$ , como antes tomamos  $q'$  la forma cuadrática de  $Q'$  y  $d$  un vector dimensión tal que  $\langle d, x \rangle' = 0$  para todo  $x$  y  $q'(d) = 0$ . Definamos un vector dimensión  $\tilde{d}$  como

$$\tilde{d}_i = \begin{cases} d_i & \text{si } i \in Q'_0 \\ 0 & \text{si } i \notin Q'_0 \end{cases}$$

Luego

$$q(\tilde{d}) = \sum_{i \in Q'_0} d_i^2 - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1: s(\alpha) \\ \text{y } t(\alpha) \in Q'_0}} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)} \leq \sum_{i \in Q'_0} d_i^2 - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1: \\ \alpha \in Q'_1}} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)} = q'(d) = 0$$

Si  $Q'_1 \subsetneq \{\alpha \in Q_1 : s(\alpha) \text{ y } t(\alpha) \in Q'_0\}$  tendría una desigualdad estricta arriba, lo que contradiría que  $q$  es semidefinida positiva.

Supongamos que la inclusión no es estricta, es decir que  $Q'_1 = \{\alpha \in Q_1 : s(\alpha) \text{ y } t(\alpha) \in Q'_0\}$ . Definiremos en este caso otro vector dimensión: Sean  $i_0 \in Q'_0$  y  $j_0 \notin Q'_0$  tal que existe una flecha en  $Q_1$  entre ellos dos. Como  $Q$  es conexo, dichos vértices existen. Definimos un nuevo vector dimensión  $x$  de la siguiente forma:

$$x_i := \begin{cases} 2d_i, & \text{si } i \in Q'_0 \\ 1 & \text{si } i = j_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{k \in Q'_0} (2d_k)^2 + 1 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)} - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1: \\ s(\alpha)=j_0 \text{ y } t(\alpha) \in Q'_0 \\ s(\alpha) \in Q'_0 \text{ y } t(\alpha)=j_0}} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)} \\ &= q'(2d) + 1 - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1: \\ s(\alpha)=j_0 \text{ y } t(\alpha) \in Q'_0 \\ s(\alpha) \in Q'_0 \text{ y } t(\alpha)=j_0}} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)} \end{aligned}$$

Notemos que como existe una flecha entre  $i_0$  y  $j_0$  (no importa la dirección), la última suma tiene el término  $x_{j_0} \cdot x_{i_0} = 2d_{i_0} > 1$ . Luego  $q(x) < q'(2d) = 4q'(d) = 0$ , absurdo también. Por lo tanto  $q$  es semidefinida positiva si y solamente si  $Q$  es Dynkin o euclideo.

2. Ya demostramos que si  $Q$  era Dynkin, entonces  $q$  era definida positiva. Demostremos la vuelta. Supongamos que  $q$  es definida positiva y veamos que  $Q$  es Dynkin. Observemos primero que  $Q$  no puede tener lazos: Si tuviera, existe  $i_0$  un vértice y una flecha  $\alpha: i_0 \rightarrow i_0$ . Entonces evaluando  $q$  en el vector  $e_{i_0}$ , tenemos

$$q(e_{i_0}) = 1^2 - \#\{\text{cantidad de flechas } \beta: i_0 \rightarrow i_0\} \leq 0$$

Por lo tanto,  $q$  no sería definida positiva, absurdo. Luego podemos suponer  $Q$  sin lazos. Entonces es semidefinida positiva y por lo tanto  $Q$  o es euclideo o es Dynkin. Pero para los euclideos vimos al comienzo que existe un vector  $d$  tal que  $q(d) = 0$ . Por lo tanto  $Q$  debe ser Dynkin.  $\square$

## 6.2. Raíces de una forma cuadrática

**Definición 6.18.** Sea  $q$  una forma cuadrática semidefinida positiva. Un elemento  $x \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$  es una **raíz real** si  $q(x) = 1$  y es una **raíz imaginaria** si  $q(x) = 0$ . Llamamos  $\Phi$  al conjunto de raíces.

Si  $Q$  no tiene lazos, todos los  $e_i$  son raíces reales, donde identificamos a  $e_i$  con el vector que tiene 1 en  $i$ , y 0 en todos los otros vértices. En general, cualquier raíz se puede escribir como  $\sum_i a_i e_i$  con  $a_i \in \mathbb{Z}$  de forma única.

Una raíz se dice **positiva** si  $a_i \geq 0$  para todo  $i$  y **negativa** si  $a_i \leq 0$  para todo  $i$ . Denotamos al conjunto de raíces positivas como  $\Phi_+$  y al conjunto de raíces negativas como  $\Phi_-$ .

**Lema 6.19.** *Sea  $Q$  conexo y sin lazos.*

1.  $e_i$  es una raíz real para todo  $i \in Q_0$ .
2. Si  $\alpha$  es una raíz,  $-\alpha$  es una raíz.
3. Si  $Q$  es euclideo,  $\alpha$  es una raíz y  $\delta$  es una raíz imaginaria, entonces  $\alpha - \delta$  es una raíz del mismo tipo que  $\alpha$ .
4. Si  $q$  es semidefinida positiva, entonces cada raíz o es positiva, o es negativa,  $\Phi = \Phi_- \cup \Phi_+$  y  $\Phi_- = -\Phi_+$ .

*Demostración.* 1. Evaluemos en  $e_i$  y demostremos que da uno:

$$q(e_i) = 1^2 - 0 = 1$$

2. Sea  $\alpha$  una raíz de  $q$ :

$$q(-\alpha) = (-1)^2 q(\alpha) = q(\alpha)$$

3. Como  $\delta$  es una raíz imaginaria, si  $d$  es la raíz imaginaria del teorema 6.17 correspondiente,  $\delta = q.d$ . Además por definición de raíz  $\delta \neq 0$ , entonces  $q \neq 0$ .

3.i. Supongamos que  $\alpha$  es una raíz imaginaria. Si  $q(\alpha) = 0$ , entonces  $\alpha = \lambda d$  por el lema 6.16. Luego  $\alpha = \frac{\lambda}{q} \delta$ . Entonces:

$$\alpha - \delta = \left(\frac{\lambda}{q} - 1\right) \delta$$

Por lo tanto

$$q(\alpha - \delta) = \left(\frac{\lambda}{q} - 1\right)^2 q(\delta) = 0$$

Luego  $\alpha - \delta$  es una raíz imaginaria.

- 3.ii. Supongamos que  $\alpha$  es una raíz real.

$$\begin{aligned} q(\alpha) &= q((\alpha - \delta) + \delta) = \langle \alpha - \delta, \delta \rangle + q(\alpha - \delta) + q(\delta) \\ 1 &= \langle \alpha - \delta, \delta \rangle + q(\alpha - \delta) + 0 \end{aligned}$$

Como  $\langle x, \delta \rangle = \langle x, qd \rangle = q \langle x, d \rangle = 0$  para todo  $x$  entonces  $\langle \alpha - \delta, \delta \rangle = 0$ . Luego  $1 = q(\alpha - \delta)$ . Por lo tanto  $\alpha - \delta$  es una raíz real.

4. Empiezo por suponer que  $x$  es una raíz imaginaria. Como  $q$  es semidefinida positiva, por el teorema anterior  $Q$  es euclideo o Dynkin.

Dynkin no puede ser, pues en ese caso sería definida positiva y sin raíces imaginarias. Por lo tanto  $Q$  es euclideo. Pero entonces  $x = \lambda \cdot \delta$  con  $\delta$  una de las raíces del teorema 6.17. Luego todas las coordenadas de  $x$  tienen el mismo signo.

Sea ahora  $x$  una raíz real. Escribo a  $x$  como  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . Si definimos

$$x^+ := \sum_{i: x_i \geq 0} x_i e_i \quad x^- := \sum_{i: x_i < 0} x_i e_i$$

entonces  $x = x^+ + x^-$ . Completando las coordenadas faltantes por cero, podemos considerar a  $x^+$  y  $x^-$  como vectores de  $\mathbb{Z}^n$ . Además

$$\langle x^+, x^- \rangle = 2 \sum_{i=1}^n \underbrace{x_i^+ x_i^-}_{=0} - \sum_{i=1}^n \sum_{j:j \neq i} \underbrace{n_{i,j} x_i^+ x_j^-}_{\leq 0} \geq 0$$

Entonces

$$1 = q(x) = q(x^+ + x^-) = \langle x^+, x^- \rangle + q(x^+) + q(x^-) \geq q(x^+) + q(x^-)$$

y por lo tanto:

$$1 \geq q(x^+) + q(x^-) \geq 0$$

Como  $q(x^+)$  y  $q(x^-)$  son dos números enteros mayores o iguales a cero tenemos tres opciones:

1.  $q(x^+) = 0, q(x^-) = 0$ .
2.  $q(x^+) = 1, q(x^-) = 0$ .
3.  $q(x^+) = 0, q(x^-) = 1$ .

Si suponemos que  $x$  tiene coordenadas positivas y negativas, entonces  $x^+$  y  $x^-$  son no nulos. Por lo tanto en los tres casos concluimos que  $Q$  no puede ser Dynkin, y entonces es euclideo. Luego o existe  $\lambda$  tal que  $x^+ = \lambda \delta$  o  $x^- = \lambda \delta$ . Pero entonces en el primer caso eso significa que  $x^+$  tiene todas sus coordenadas no nulas y por lo tanto  $x^- = 0$ , y en el segundo que  $x^-$  tiene todas sus coordenadas no nulas y por lo tanto  $x^+ = 0$ . Absurdo. Por lo tanto  $x^+ = 0$  o  $x^- = 0$ . Luego  $\Phi = \Phi_- \cup \Phi_+$  y por 2,  $\Phi_- = -\Phi_+$ .  $\square$

**Corolario 6.20.** *Si  $Q$  es de tipo Dynkin entonces  $q$  tiene finitas raíces y son todas reales.*

*Demostración.* Que no hay raíces imaginarias es obvio pues  $q$  es definida positiva. Sea  $\alpha$  una raíz real, que podemos suponer positiva. Sea  $\tilde{Q}$  el grafo euclideo que extiende a  $Q$ , y denoto  $n+1$  el nuevo vértice. Definimos  $\tilde{\alpha}$  como el siguiente vector dimensión:

$$\tilde{\alpha}_k = \begin{cases} \alpha_k & \text{si } k \in Q \\ 0 & \text{si } k = n+1 \end{cases}$$

y sea  $\tilde{q}$  la forma cuadrática semidefinida positiva de  $\tilde{Q}$  y  $\delta$  la raíz imaginaria de  $\tilde{q}$ . Luego  $\tilde{q}(\tilde{\alpha}) = q(\alpha) = 1$ . Luego  $\tilde{\alpha}$  es una raíz real de  $\tilde{q}$ , y por lo tanto  $\tilde{\alpha} - \delta$  es una raíz real de  $\tilde{q}$ . Entonces mirando el vértice  $n+1$ ,  $\tilde{\alpha}_{n+1} - \delta_{n+1} = -\delta_{n+1} < 0$ . Pero como  $\tilde{\alpha} - \delta$  es una raíz, y  $\tilde{q}$  es semidefinida positiva, y en la coordenada  $n+1$  es negativa,  $\tilde{\alpha} - \delta$  es negativa. Por lo tanto

$$\tilde{\alpha}_i - \delta_i \leq 0 \text{ para todo } i$$

Lo que es equivalente a que

$$\tilde{\alpha}_i \leq \delta_i \text{ para todo } i$$

Como en la coordenada  $n+1$  el vector  $\tilde{\alpha}$  vale 0, tenemos que

$$\alpha_i \leq \delta_i \text{ para todo } i \in Q$$

Luego  $\alpha_i \in \{0, \dots, \delta_i\}$  para todo  $i \in Q$ . Por lo tanto hay sólo finitas posibilidades para  $\alpha$ .  $\square$

Se puede probar ([Sch14]) que no todas las posibilidades son raíces, y de hecho que la cantidad de raíces de un Dynkin está dada por los siguientes números:

$A_n$	$D_n$	$E_6$	$E_7$	$E_8$
$\frac{n(n+1)}{n}$	$n^2 - n$	36	63	120

### 6.3. Teorema de Gabriel

En la última sección demostraremos el famoso teorema de Gabriel. Empezamos con un lema:

**Lema 6.21.** *Sea  $Q$  conexo,  $M$  una representación de  $Q$  y  $d = d_M$  su vector dimensión. Entonces*

$$\text{codim } \mathcal{O}_M = \dim_k \text{End}(M) - q(d) = \dim_k \text{Ext}^1(M, M)$$

*Demostración.* Por el lema 6.7,

$$\dim \mathcal{O}_M = \dim_k G_d - \dim_k \text{Aut}(M)$$

Por lo tanto,

$$\dim E_d - \dim \mathcal{O}_M = \dim E_d - \dim_k G_d + \dim_k \text{Aut}(M)$$

donde  $\dim E_d$  es la dimensión como variedad algebraica. Luego

$$\text{codim } \mathcal{O}_M = \dim E_d - \dim_k G_d + \dim_k \text{Aut}(M)$$

Claramente  $\text{Aut}(M)$  es un subgrupo abierto de  $\text{End}(M)$ , tanto en la topología fuerte como en la Zariski, pues es el complemento del conjunto  $\{\det A = 0\}$ , que es un cerrado Zariski. Entonces  $\dim_k \text{Aut}(M) = \dim_k \text{End}(M)$ . Entonces

$$\text{codim } \mathcal{O}_M = \dim E_d - \dim_k G_d + \dim_k \text{End}(M)$$

Recordemos que  $\dim_k G_d = \sum d_i^2$ . Y que  $\dim_k E_d = \sum_{\alpha} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)}$ . Además, un subespacio de  $k^n$  tiene la misma dimensión como variedad algebraica o como subespacio. Por lo tanto

$$\dim_k E_d - \dim_k G_d = -q(d)$$

Luego

$$\text{codim } \mathcal{O}_M = \dim_k \text{End}(M) - q(d) = \dim_k \text{Ext}^1(M, M), \text{ por el teorema 6.14.}$$

□

**Corolario 6.22.** *Sea  $d$  un vector dimensión distinto de 0. Si  $q(d) \leq 0$ , entonces la cantidad de órbitas en  $E_d$  es infinita. Es decir, hay infinitas clases de isomorfismo con el mismo vector dimensión  $d$ .*

*Demostración.* Supongamos que solamente hay finitas órbitas en  $E_d$ . Por lo tanto, por el lema 6.7, una de ellas,  $\mathcal{O}_{M_0}$ , tiene dimensión igual a la dimensión de  $E_d$ . Entonces

$$0 = \text{codim}_k \mathcal{O}_{M_0} = \dim_k \text{End}(M_0) - q(d) \geq \dim_k \text{End}(M_0) \geq 1$$

Notemos que  $\dim_k \text{End}(M_0) \geq 1$  pues  $M_0 \neq 0$ , ya que  $d \neq 0$ . Absurdo. Por lo tanto la cantidad de órbitas debe ser infinita. □

**Corolario 6.23.** *Si  $Q$  tiene lazos, es de tipo de representación infinita.*

*Demostración.* Como  $Q$  tiene lazos, existe  $i_0$  un vértice y una flecha  $\beta: i_0 \rightarrow i_0$ . Por lo tanto  $q(e_{i_0}) \leq 0$ . Entonces existen infinitas representaciones no isomorfas con vector dimensión  $e_{i_0}$ . Pero estas tienen todas dimensión 1, entonces son todas indescomponibles. Luego  $Q$  tiene infinitas representaciones indescomponibles no isomorfas. □

**Ejemplo 6.24.** Sea  $Q$  el carcaj  $1 \curvearrowright$ . Entonces su álgebra de caminos, como ya vimos, es  $k[x]$ . Existen infinitos  $k[x]$  módulos indescomponibles no isomorfos de la misma dimensión. En efecto, para todo  $n$ , las representaciones  $V_\lambda = k^n$  junto con el producto dado por la matriz  $A_\lambda$ .

$$x \cdot v := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

son  $k[x]$ -módulos. Si  $\lambda \neq \lambda'$ ,  $V_\lambda$  y  $V_{\lambda'}$  son no isomorfas, y además son indescomponibles por la unicidad de la forma de Jordan.

Solamente vamos a necesitar un lema más antes de demostrar el teorema principal del trabajo:

**Lema 6.25.** *Sea  $M$  una representación indescomponible de  $Q$ . Si  $\dim_k \text{End}(M) > 1$ , entonces existe una subrepresentación  $M'$  tal que  $\dim_k \text{End}(M') = 1$  y  $\dim_k \text{Ext}^1(M', M') > 0$ .*

*Demostración.* Por hipótesis y por el teorema 3.32, existe  $g$  endomorfismo de  $M$  nilpotente y no nulo. Más aún, podemos tomar a  $g$  tal que  $g^2 = 0$ . Y entre todos los nilpotentes tal que  $g^2 = 0$  tomar el que tiene  $\text{Im}(g)$  de dimensión mínima. Como  $g^2 = 0$  entonces  $\text{Im}(g) \subseteq \text{Ker}(g)$ . Descompongo  $\text{Ker}(g)$  como suma de indescomponibles no nulos:

$$\text{Ker}(g) = N_1 \oplus \cdots \oplus N_t$$

a) Primero demosremos que  $\text{Ext}^1(\text{Im}(g), N_{s_0}) \neq 0$  para todo sumando directo no nulo de  $\text{Ker}(g)$ . En efecto, como  $\bigoplus_{j \neq s_0} N_j \subseteq \text{Ker}(g)$ , tenemos un morfismo sobreyectivo

$$M / \bigoplus_{j \neq s_0} N_j \xrightarrow{\bar{g}} \text{Im}(g)$$

Y además si consideramos la proyección  $\pi: M \rightarrow M / \bigoplus_{j \neq s_0} N_j$ , es inyectiva sobre  $N_{s_0}$  y entonces  $\pi(N_{s_0}) \cong N_{s_0}$ . Luego tenemos una sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow N_{s_0} \longrightarrow M / \bigoplus_{j \neq s_0} N_j \xrightarrow{\bar{g}} \text{Im}(g) \longrightarrow 0$$

Si  $\text{Ext}^1(\text{Im}(g), N_{s_0}) = 0$ , esta sucesión se parte y por lo tanto

$$M / \bigoplus_{j \neq s_0} N_j = \text{Im}(g) \oplus N_{s_0}$$

Entonces

$$M = \overbrace{\text{Im}(g)}^{\neq 0} \oplus \overbrace{N_{s_0}}^{\neq 0} \oplus \left( \bigoplus_{j \neq s_0} N_j \right)$$

lo que contradice que  $M$  sea indescomponible. Por lo tanto  $\text{Ext}^1(\text{Im}(g), N_{s_0}) \neq 0$ .

b) Sea  $p_s: \text{Ker}(g) \rightarrow N_s$  la proyección. A continuación, demuestro que existe un sumando directo  $N_{s_0}$  tal que  $p_{s_0}(\text{Im}(g)) \neq 0$ . En efecto, como  $\text{Im}(g) \neq 0$ , existe  $0 \neq x \in \text{Im}(g)$ . Entonces  $x \in \text{Ker}(g)$ , luego  $x$  se puede escribir como  $x = x^1 + \cdots + x^t$ . Como  $x \neq 0$ , existe  $s_0$  tal que  $x^{s_0} \neq 0$ .

Por lo tanto  $p_{s_0}(x) = x^{s_0} \neq 0$ . Luego  $p_{s_0}|_{\text{Im}(g)} \neq 0$ . Llamemos  $N$  a  $N_{s_0}$  y  $p$  a esa proyección restringida a  $\text{Im}(g)$ :  $p := p_{s_0}|_{\text{Im}(g)} : \text{Im}(g) \rightarrow N$ . Entonces si defino  $i := \iota \circ p \circ g : M \rightarrow M$ , tenemos una composición

$$M \xrightarrow{g} \text{Im}(g) \xrightarrow{p} N \xrightarrow{\iota} M$$

$i$

con  $\iota : N \hookrightarrow M$  la inclusión,  $i$  es un endomorfismo no nulo. Además es nilpotente:  $i^2 = 0$ . En efecto, si  $x \in M$ ,  $i(x) = p(g(x)) \in N \subseteq \text{Ker}(g)$ . Luego

$$i(i(x)) = p \circ g(i(x)) = 0$$

Por lo tanto  $i^2 = 0$  y entonces  $\dim_k \text{Im}(g) \leq \dim_k \text{Im}(i)$ . Pero  $\text{Im}(i) = \text{Im}(p)$ . Y además  $\dim_k \text{Im}(p) \leq \dim_k \text{Im}(g)$ . Luego

$$\dim_k \text{Im}(p) \leq \dim_k \text{Im}(g) \leq \dim_k \text{Im}(i) = \dim_k \text{Im}(p)$$

En conclusión  $\dim_k \text{Im}(p) = \dim_k \text{Im}(g)$  y por lo tanto  $p$  es inyectiva.

c) Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \text{Ker}(g) \xrightarrow{p} N \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(p) \rightarrow 0$$

Aplicando el funtor  $\text{Ext}$  tenemos una sucesión exacta larga...

$$\dots \rightarrow \text{Ext}^1(N, N) \rightarrow \text{Ext}^1(\text{Ker}(g), N) \rightarrow \text{Ext}^2(\text{Coker}(p), N) \rightarrow \dots$$

Como  $\text{Ext}^2(\text{Coker}(p), N) = 0$  pues  $Q$  no tiene relaciones, y  $\text{Ext}^1(\text{Ker}(g), N) \neq 0$ , entonces  $\text{Ext}^1(N, N) \neq 0$ . Como  $\dim_k N < \dim_k M$ , entonces  $\dim_k \text{End}(N) < \dim_k \text{End}(M)$ . Si  $\dim_k \text{End}(N) = 1$ , listo. Sino, como  $N$  es indescomponible, podemos reemplazar  $N$  por  $M$  y proceder usando inducción.  $\square$

**Teorema 6.26.** (Gabriel) Sea  $Q$  un carcaj conexo. Entonces:

1.  $Q$  es de tipo de representación finito si y sólo si  $Q$  es de tipo  $\mathbb{A}, \mathbb{D}$  o  $\mathbb{E}_i$  ( $i \in \{6, 7, 8\}$ ).
2. Si  $Q$  es de tipo  $\mathbb{A}, \mathbb{D}$  o  $\mathbb{E}_i$ , el vector dimensión induce una biyección  $\psi$  del conjunto de isoclases de representaciones indescomponibles de  $Q$  al conjunto de raíces positivas. En otras palabras, una representación indescomponible queda unívocamente determinada por su vector dimensión.

*Demostración.* Empezamos por 2. Denotamos  $\text{Ind}_Q$  al conjunto de representaciones indescomponibles de  $Q$ . La demostración del teorema consistirá en demostrar que hay tantas representaciones indescomponibles como raíces positivas de su forma cuadrática. Para eso mostraremos que existe una función biyectiva entre ambos conjuntos. Más precisamente, definiremos

$$\begin{aligned} \psi : \text{Ind}_Q &\longrightarrow \Phi_+ \\ M &\longmapsto \underline{\dim} M \end{aligned}$$

Afirmamos que  $\psi$  es una función bien definida y es biyectiva.



Buena definición: Sea  $M$  indescomponible. Queremos ver que  $\underline{\dim} M$  es una raíz de  $q$ . Como  $q$  va ser definida positiva, la única posibilidad es que sea una raíz real. Usando la fórmula

$$\dim_k \text{End}(M) - q(d) = \dim_k \text{Ext}^1(M, M) \quad (6.4)$$

del lema 6.21 tenemos que  $q(d) = \dim_k \text{End}(M) - \dim_k \text{Ext}^1(M, M)$ . Entonces alcanza con probar que  $\dim_k \text{End}(M) = 1$  y  $\dim_k \text{Ext}^1(M, M) = 0$ . Supongamos que  $\dim_k \text{End}(M) > 1$ . Entonces por el lema anterior existe  $M'$  tal que  $\dim_k \text{End}(M') = 1$  y  $\dim_k \text{Ext}^1(M', M') > 0$ . Sea  $d' = \underline{\dim} M'$ . Luego, reemplazando en la ecuación 6.4 tenemos la igualdad

$$1 - q(d') = \dim_k \text{Ext}^1(M', M') \geq 1$$

Luego  $0 \geq q(d')$ . Absurdo pues  $q$  es definida positiva al ser  $Q$  de tipo Dynkin. Luego  $\dim_k \text{End}(M) = 1$ . Entonces de nuevo por el lema 6.21,  $1 - q(d) = \dim_k \text{Ext}^1(M, M)$ . Como  $q(d) \geq 1$ ,

$$0 \geq 1 - q(d) = \dim_k \text{Ext}^1(M, M)$$

Luego  $\text{Ext}^1(M, M) = 0$ .

Inyectividad: Sea  $R$  una representación indescomponible de  $Q$  con vector dimensión  $d$ . Ya vimos en la primera parte que  $\text{End}(R) \cong k$  y que  $d$  es una raíz imaginaria de  $q$ . Luego  $\text{codim}_k \mathcal{O}_R = 1 - q(d) = 1 - 1 = 0$ , y como existe a lo sumo una órbita con codimensión 0, dos representaciones indescomponibles con el mismo vector dimensión tienen órbitas iguales (por el lema 6.7), y por lo tanto son isomorfas.

Sobreyectividad: Sea  $d$  una raíz real positiva de  $q$ . Luego  $d_i \geq 0$  para todo  $i$ . Trivialmente, al menos una representación con vector dimensión  $d$  existe ( $M_i = d_i$  para todo  $i$ ,  $\varphi_\alpha = 0$  para todo  $\alpha$ ). Elijamos  $M$  una representación tal que  $\underline{\dim} M = d$  y que  $\dim \mathcal{O}_M$  sea maximal. Afirmamos que  $M$  es indescomponible. Usaremos la equivalencia del teorema 3.32 y demostraremos que  $\text{End}(M)$  es local. Para eso, usando la fórmula  $\dim_k \text{End}(M) - q(d) = \dim_k \text{Ext}^1(M, M)$ , como  $q(d) = 1$ , alcanza con probar que  $\dim_k \text{Ext}^1(M, M) = 0$ . Eso implica que  $\text{End}(M) \cong k$ , que es local.

Supongamos que  $M = M_1 \oplus M_2$  con  $M_1$  indescomponible no nulo y  $M_2 \neq 0$ . Luego

$$\text{Ext}^1(M, M) = \text{Ext}^1(M_1, M_1) \oplus \text{Ext}^1(M_1, M_2) \oplus \text{Ext}^1(M_2, M_1) \oplus \text{Ext}^1(M_2, M_2)$$

Si asumimos que  $\text{Ext}^1(M_1, M_2) \neq 0$ , entonces existe una sucesión exacta corta que no se parte

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow N \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

Por lo tanto, por el teorema 6.8,  $\dim \mathcal{O}_{M_1 \oplus M_2} < \dim \mathcal{O}_N$ , absurdo. Por lo tanto  $\text{Ext}^1(M_1, M_2) = 0$ . Análogamente  $\text{Ext}^1(M_2, M_1) = 0$ . Además  $M_1$  es una representación indescomponible de un Dynkin. Por lo visto en la buena definición,  $\text{Ext}^1(M_1, M_1) = 0$ . Luego  $\text{Ext}^1(M, M) \cong \text{Ext}^1(M_2, M_2)$  con  $\dim_k M_2 < \dim_k M$ . Por inducción,  $\text{Ext}^1(M, M) = 0$  y entonces  $\dim_k \text{End}(M) = q(d) = 1$ . Luego  $\text{End}(M) \cong k$  y es local y por lo tanto  $M$  indescomponible.

1. Si  $Q$  es Dynkin, la cantidad de isoclasas de representaciones indescomponibles es igual a la cantidad de raíces positivas de  $q$ , que por el corolario 6.20 es finita.

Asumamos ahora que  $Q$  es de tipo de representación finita. Entonces  $Q$  no tiene lazos por el corolario 6.23. Afirmamos que  $q$  es definida positiva. Supongamos que existe  $x_0$  vector dimensión tal que  $q(x_0) < 0$ . Luego por el corolario 6.22, la cantidad de órbitas en  $E_{x_0}$  es infinita. Por lo tanto existen infinitas representaciones no isomorfas con el mismo vector dimensión. Por Krull-Schmidt, esto sólo puede pasar si la cantidad de indescomponibles no isomorfos también es infinita. Absurdo.  $\square$

# Bibliografía

- [AR75] A. M. Auslander, I. Reiten, *Representation theory of artin algebras III almost split sequences* Communications in Algebra, vol. 3, 1975, pp. 239–294.
- [ASS06] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Vol. 1, Cambridge, 2006, pp. 28-30.
- [BB81] R. Bautista y S. Brenner, *On the number of terms in the middle of an almost split sequence*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 903, Springer, 1981, pp. 1-8.
- [Bri00] M. Brion, *Representations of quivers*. 2000.
- [Gab7] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*. Manuscripta Mathematica, vol. 6, Springer, 1972, pp. 71-103.
- [MCR87] J.C. McConnell, J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*. AMS, 1987, pp. 249.
- [Sch14] R. Schiffler, *Quiver Representations*. Springer, 2014.
- [SY12] A. Skowroński, K. Yamagata, *Frobenius Algebras I: Basic representation theory*. European Mathematical Society, 2012.