



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Propiedades homotópicas del complejo de Vietoris-Rips de  
subconjuntos de espacios euclídeos

Denys Bulavka

Director: Jonathan A. Barmak

Agosto de 2017



# Agradecimientos

A mi mamá por darme la oportunidad de dedicarme completamente a la carrera y por aguantar mis nervios a lo largo de ella siempre con una sonrisa.

A Jonathan por mostrarme el hermoso mundo de la Topología Algebraica, por su dedicación y el debatir igual a igual las dificultades que los ejemplos particulares oscurecen.

A Gabriel y a Mariano por aceptar ser jurados, por sus correcciones y sus comentarios.

A Teresa y a Nacho por la oportunidad de trabajar juntos en la intersección de la Biología y la Matemática, por su paciencia, por repetir las ideas cuando no se entendían y todas las oportunidades que surgieron a partir de esto. Muchas gracias!

A todos los docentes del departamento por compartir su forma de ver la matemática. A Daniel Carando y a Julián Bonder por esas clases en las que los teoremas resultan conclusiones naturales.

A los chicos de la facu, por hacer que el día a día sea más que cursar materias, por el 8 en línea y el ajedrez con habilidades de Enrique, por el metateti de Nacho y por esas charlas de matemática y la vida. Gracias Nacho, Enrique, Agus, Jaqui, Nico, Mariano, Juany, Lucio, Facu, Martín y a todos los que me falta nombrar.

A Gutu, Jonaz y Agus por compartir conmigo el hermoso mundo de la programación competitiva, sin ustedes mis sábados habrían sido muy aburridos. Aguante Buen Guiso de Lentejas!

A Nahuel por hablarme sobre la Facultad de Ciencias Exactas, a Yaya y a Juan Manuel por esos proyectos que empezaron como una locura y nunca dejaron de serlo, por las aventuras y por mostrarme el mundo de la ingeniería.

A mis amigos del colegio y de la vida Nico, Luis, Nikita, Seva, Jimmy, Samuel, Lucas, Dai y Bogdan por acompañarme, crecer juntos, las pelis, los divagues y las juntadas.



# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. El grupoide de caminos por aristas . . . . .	3
1.2. Un lema del pegado para funciones $k$ -conexas . . . . .	9
<b>2. El complejo de Vietoris-Rips</b>	<b>15</b>
2.1. Definiciones y ejemplos . . . . .	15
2.2. Lemas geométricos . . . . .	20
2.3. Equivalencia homotópica en dimensión 1 . . . . .	22
2.4. El isomorfismo en el $\pi_1$ en dimensión 2 . . . . .	24
2.4.1. Un poco de geometría en el plano . . . . .	24
2.4.2. Estructura combinatoria del shadow y levantar caminos . . . . .	29
2.5. Dimensión 3 y la estrategia local . . . . .	38
2.6. Un ejemplo en dimensión 4 . . . . .	41
<b>3. Vietoris-Rips en el círculo</b>	<b>47</b>
3.1. Grafos dirigidos y cíclicos . . . . .	47
3.2. Desmantelamiento . . . . .	53
3.3. La clasificación de los tipos homotópicos . . . . .	56
3.4. Vietoris-Rips en una poligonal . . . . .	58



# Introducción

Originalmente Vietoris [21] definió el complejo Vietoris-Rips para extender la teoría de homología simplicial a espacios métricos. Posteriormente Rips redescubrió tal objeto para estudiar grupos hiperbólicos, su uso fue popularizado por Gromov [12], quien los llamó complejos de Rips. Actualmente se conoce al complejo por el nombre de Vietoris-Rips debido a Hausmann [14]. Hoy en día el interés surge de, pero no se limita a, su potencial en el área del análisis cualitativo de datos.

El cálculo efectivo de invariantes topológicos de un espacio  $M$  a partir de una muestra de puntos de dicho espacio es un tema central en el análisis de datos. Dado que los grupos de homología son algorítmicamente computables para los complejos simpliciales finitos, una manera de estudiar un espacio métrico es aproximándolo por poliedros.

Si  $M$  es un espacio topológico y  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  es un cubrimiento por abiertos tal que cada intersección finita  $\bigcap U_\alpha$  es vacía o contráctil entonces, por el Teorema del Nervio [7], el nervio  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  del cubrimiento es homotópicamente equivalente a  $M$ . Ahora, necesitamos una manera de generar este cubrimiento por abiertos. Si  $M$  es un espacio métrico, podemos considerar el dado por  $\{B(x; \epsilon)\}_{x \in V}$  para cierto  $\epsilon > 0$  y  $V \subseteq M$ . En este caso, el complejo asociado se denomina complejo de Čech con parámetros  $V$  y  $\epsilon$ . Esta construcción funciona cuando  $M$  es una variedad Riemanniana, pues en este caso tal  $\epsilon$  y  $V$  finito existen (ver la revisión de Gunnar Carlsson [9, Theorem 2.4]). Sin embargo, el teorema no nos dice cómo construirlos. La gran fidelidad de esta construcción trae consigo el problema de la dificultad del computo y almacenamiento. Por lo tanto, otro enfoque es necesario.

Dado un espacio métrico  $X$  (subconjunto de un espacio  $M$ ) y  $r > 0$ , el complejo de Vietoris-Rips  $\mathcal{R}(X; r)$  es el complejo simplicial que tiene como vértices a los puntos de  $X$  y como símlices a los subconjuntos finitos de diámetro menor a  $r$ . En términos de almacenamiento, la ventaja del complejo de Vietoris-Rips es que está completamente determinado por su 1-esqueleto. La desventaja es que no es claro qué es lo que captura su tipo homotópico. Los enfoques actuales se dividen en ver qué condiciones tiene que cumplir la variedad para poder reconstruir la información topológica [4] y dar condiciones sobre  $\epsilon$  y la densidad de la muestra  $X$  [14, 16]. Otro método para recuperar posibles invariantes topológicos con el complejo Vietoris-Rips es a través del cálculo de homología persistente [11], muestreando sobre un rango de valores para  $\epsilon$  y calculando

los grupos de homología en cada paso.

Este trabajo presenta una exposición basada en tres artículos [10, 3, 2] que estudian propiedades homotópicas de complejos de Vietoris-Rips  $\mathcal{R}(X; r)$  en los casos en que  $X$  sea un subconjunto del plano, de  $\mathbb{R}^3$  o del círculo  $S^1$ . En los primeros dos casos, la idea es estudiar la proyección  $P : |\mathcal{R}(X; r)| \rightarrow \mathbb{R}^n$  que es la función lineal que manda cada vértice  $x \in X$  del complejo de Vietoris-Rips en  $x \in \mathbb{R}^n$ . Notemos que si bien  $\mathcal{R}(X; r)$  puede tener dimensión arbitrariamente grande, la imagen de  $P$  es un CW-complejo de dimensión menor o igual a  $n$ . La imagen de la proyección es lo que se llama el shadow de  $\mathcal{R}(X; r)$  y se denota  $\mathcal{S}(X; r)$ . A pesar de no preservar la dimensión, la proyección sí respeta algunos invariantes homotópicos. Concretamente, cuando  $n = 1$ ,  $P$  es una equivalencia homotópica. En el caso  $n = 2$ , la proyección no es en general una equivalencia homotópica, aunque sí induce un isomorfismo en los grupos fundamentales. Esto es uno de los resultados principales del trabajo realizado por Chambers, De Silva, Erickson y Ghrist [10]. En este caso,  $P$  no preserva los grupos de homotopía ni homología superiores. En el caso de dimensión  $n = 3$ ,  $\pi_1(P) : \pi_1(|\mathcal{R}(X; r)|) \rightarrow \pi_1(\mathcal{S}(X; r))$  es un epimorfismo, como muestran Adamaszek, Frick y Vakili en [3], y se desconoce si es un monomorfismo. De hecho se conjetura que  $P$  induce un monomorfismo en los grupos fundamentales para cualquier dimensión  $n$ . Sabemos, gracias a [10], que  $\pi_1(P)$  no es un epimorfismo en general si  $n \geq 4$ . Si bien los resultados anteriores prueban que el complejo de Vietoris-Rips tiene  $\pi_1$  libre cuando  $X \subseteq \mathbb{R}^2$ , no se sabe cuáles son los posibles tipos homotópicos que pueden surgir en dimensión dos. No es difícil ver que todo wedge de esferas se realiza por algún  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  y se conjetura que estos son todos los tipos homotópicos posibles. En el artículo [2] Adamaszek y Adams prueban esta conjetura para el caso en que  $X \subseteq S^1$ . De hecho se clasifican todos los tipos homotópicos posibles para subconjuntos del círculo a partir del invariante conocido como winding fraction.

En el primer capítulo de este trabajo recordaremos las herramientas homotópicas y combinatorias que se utilizarán en los capítulos siguientes. En el capítulo 2 presentaremos los resultados de [10] y [3] sobre las propiedades homotópicas de la proyección geométrica. Por último, en el capítulo 3 veremos los resultados de [2] sobre subconjuntos del círculo. Completamos las demostraciones de dichos artículos y explicamos con más detalle las construcciones y razonamientos. En esta tesis ofrecemos un enfoque uniforme del tema y añadimos ejemplos para ayudar al lector a comprender las explicaciones. Los resultados originales de esta tesis se encuentran en la sección 3.4. En esta sección probamos un resultado análogo al de los subconjuntos del círculo. Concretamente, vemos que cuando  $X$  está contenido en una poligonal cerrada convexa de  $\mathbb{R}^2$  (borde de un polígono convexo), entonces  $\mathcal{R}(X; r)$  tiene el tipo homotópico de un wedge de esferas si el parametro  $r$  se encuentra en cierto rango (ver Teorema 3.32).

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo estableceremos las notaciones que usaremos en el resto de la tesis. Recordaremos dos resultados clásicos de topología algebraica. El primero es la descripción del grupo fundamental de un poliedro por medio de caminos de aristas y el segundo es una versión del lema del pegado para funciones  $k$ -conexas.

### 1.1. El grupoide de caminos por aristas de un complejo simplicial

En este apartado recordaremos resultados básicos sobre la categoría de complejos simpliciales y el funtor realización geométrica. En la segunda parte introduciremos el grupoide de caminos por aristas asociado a un complejo simplicial siguiendo la exposición del libro de Spanier [18]. El grupoide de caminos por aristas de un complejo  $K$  da una descripción combinatoria del grupo fundamental de la realización geométrica de  $K$  que nos será de utilidad en el capítulo siguiente.

Dada una categoría  $\mathcal{C}$  y objetos  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , denotamos  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  al conjunto de morfismos de  $X$  a  $Y$ . Denotamos por **Top** a la categoría de espacios topológicos y funciones continuas, **Top\*** a la categoría de espacios topológicos punteados y **Grp** a la categoría de grupos.

**Definición 1.1.** Un *complejo simplicial*  $K$  consta de un conjunto  $V_K$  cuyos elementos se llaman vértices y un conjunto  $S_K$  cuyos elementos se llaman símplices y son subconjuntos finitos no vacíos de  $V_K$  tales que para todo  $v \in V_K$  se tiene que  $\{v\} \in S_K$  y para todo  $\sigma \in S_K$  vale que si  $\emptyset \neq \tau \subset \sigma$  entonces  $\tau \in S_K$ .

**Definición 1.2.** Sea  $K$  un complejo simplicial. El  $n$ -esqueleto de  $K$  es el subcomplejo  $K^n = \{\sigma \in K : |\sigma| \leq n + 1\}$ .

**Definición 1.3.** Dados dos complejos simpliciales  $K$  y  $K'$ , un *morfismo simplicial*  $\phi : K \rightarrow K'$  es una función  $\phi : V_K \rightarrow V_{K'}$  tal que para todo  $\sigma \in S_K$  resulta que  $\phi(\sigma) \in S_{K'}$ .

Los complejos simpliciales junto con los morfismos simpliciales forman una categoría que denotamos **Simp**. Análogamente se define la categoría de complejos simpliciales punteados que denotamos **Simp\***.

Los complejos simpliciales se pueden representar geoméricamente como unión de segmentos, triángulos, tetraedros, etc, es decir, como unión de combinaciones convexas de puntos. Por ejemplo el complejo simplicial que tiene por conjunto de símplices a  $S_K = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}, \{a, d\}\}$  se puede visualizar en la Figura 1.1.

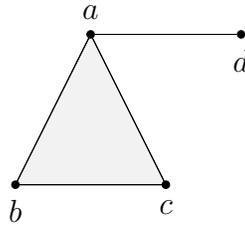


Figura 1.1: Realización geométrica del complejo simplicial cuyo conjunto de símplices es  $S_K = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}, \{a, d\}\}$

Podemos formalizar esta idea de la siguiente manera.

**Definición 1.4.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in S_K$ . Definimos la *realización geométrica*  $|\sigma|$  de  $\sigma$  como el espacio topológico que tiene por elementos a las expresiones formales  $\sum_{i=0}^n t_i v_i$  tales que  $t_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  para todo  $i$  y  $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ . La topología del espacio  $|\sigma|$  es la inducida por la métrica

$$d(\sum_{i=0}^n t_i v_i, \sum_{i=0}^n s_i v_i) = \sqrt{\sum_{i=0}^n (t_i - s_i)^2}$$

Definimos la *realización geométrica*  $|K|$  de  $K$  como el espacio topológico cuyos elementos son las expresiones formales  $\sum_{v \in V_K} t_v v$  tales que  $t_v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  para cada  $v$ ,  $\sum_{v \in V_K} t_v = 1$  y  $\{v \in V_K : t_v > 0\} \in S_K$ . Para cada símplex  $\sigma \in S_K$  tenemos una función inyectiva

$$i_\sigma : \sum_{v \in \sigma} t_v v \in |\sigma| \mapsto \sum_{v \in V_K} s_v v \in |K|$$

donde  $s_v = t_v$  si  $v \in \sigma$  y  $s_v = 0$  en caso contrario. Equipamos a  $|K|$  con la topología final respecto de las funciones  $\{i_\sigma : |\sigma| \rightarrow |K|\}_{\sigma \in S_K}$ .

Dados dos complejos simpliciales y un morfismo simplicial entre ellos podemos construir una función que relacione las realizaciones geométricas de la siguiente manera.

$$\begin{array}{ccc}
lk_K(v) & \xleftarrow{i} & \overline{st_K}(v) \\
\downarrow j & & \downarrow \bar{j} \\
|K \setminus v| & \xleftarrow{\bar{i}} & |K|
\end{array}$$

Figura 1.2: Diagrama de push-out inducido por la inclusión  $i : K \setminus v \hookrightarrow K$ .

**Definición 1.5.** Si  $\phi : K \rightarrow K'$  es un morfismo simplicial, definimos el morfismo inducido en las realizaciones geométricas  $|\phi| : |K| \rightarrow |K'|$  como  $\phi(\sum_{i=1}^n t_i v_i) = \sum_{i=1}^n t_i \phi(v_i)$ . Así definido  $|\phi|$  resulta una función continua.

**Observación 1.6.** La realización geométrica,  $|\cdot|$ , resulta ser un functor covariante de la categoría **Simp** a la categoría **Top**. Si  $K$  es un complejo simplicial, la realización geométrica  $|K|$  es un espacio topológico y, por lo tanto, podemos mirar el grupoide fundamental  $\Pi_1(|K|)$  o su grupo fundamental  $\pi_1(|K|, v_0)$ . Luego  $\pi_1 \circ |\cdot|$  es un functor de la categoría **Simp\*** a la categoría **Grp**.

**Definición 1.7.** Sean  $K$  un complejo simplicial y  $v \in K$  un vértice. El *star abierto* de  $v$  en  $K$  es  $st_K(v) = \{\sum_{w \in V_K} t_w w \in |K| : t_v > 0\}$ . El *star cerrado* de  $v$  en  $K$  es la clausura de  $st_K(v)$  en  $|K|$ ,  $\overline{st_K}(v)$ . El *link* de  $v$  en  $K$  es  $lk_K(v) = \overline{st_K}(v) \setminus st_K(v)$ .

**Observación 1.8.** Sean  $K$  un complejo simplicial y  $v \in K$  un vértice. Entonces  $\overline{st_K}(v)$  es un espacio contráctil pues es un cono.

**Lema 1.9.** Sean  $K$  un complejo simplicial y  $v \in K$  tales que  $lk_K(v)$  es contráctil. La inclusión  $i : K \setminus v \hookrightarrow K$  resulta ser una equivalencia homotópica, donde  $K \setminus v$  denota al subcomplejo pleno generado por los vértices distintos de  $v$ .

*Demostración.* Se tiene el push-out de la Figura 1.2. Como  $i : lk_K(v) \hookrightarrow \overline{st_K}(v)$  es una equivalencia homotópica y  $j : lk_K(v) \hookrightarrow |K \setminus v|$  es cofibración, se sigue que la inclusión  $\bar{i} : |K \setminus v| \hookrightarrow |K|$  es una equivalencia homotópica por el Lema del Pegado [8, Theorem 7.4.3].  $\square$

Si  $K$  es un complejo simplicial, una *arista* en  $K$  es un 1-símplex orientado, es decir, un par ordenado  $e = (v, w)$  donde  $\{v, w\} \in S_K$ . Un *camino por aristas* en  $K$  es una sucesión finita de aristas  $\xi = (v_1, v_2)(v_2, v_3) \dots (v_n, v_{n+1})$ . El *origen* de  $\xi$  es  $\text{origen}(\xi) = v_1$  y el *fin* de  $\xi$  es  $\text{fin}(\xi) = v_{n+1}$ . Queremos identificar dos caminos por aristas si difieren sólo en recorrer 2-símplices de  $K$ , concretamente.

**Definición 1.10.** Dos caminos por aristas  $\xi$  y  $\xi'$  en  $K$  se dicen *simplemente equivalentes* si  $\{\xi, \xi'\} = \{\xi_1(v, v'')\xi_2, \xi_1(v, v')(v', v'')\xi_2\}$ , donde  $\{v, v', v''\} \in S_K$  y  $\xi_i$  es un camino por aristas en  $K$  para  $i = 1, 2$ . Dos caminos por aristas  $\xi$  y  $\xi'$  en  $K$  se dicen *equivalentes*

si existe una sucesión finita de caminos por aristas  $\xi_0, \dots, \xi_n$  tal que  $\xi_0 = \xi$ ,  $\xi_n = \xi'$  y  $\xi_{i-1}$  y  $\xi_i$  son simplemente equivalentes para  $i = 1, \dots, n$ . En este caso notamos  $\xi \simeq \xi'$ .

**Observación 1.11.** La equivalencia entre caminos por aristas en  $K$  es una relación de equivalencia. Notamos por  $[\xi]$  a la clase de equivalencia de  $\xi$ .

**Proposición 1.12.** *Los caminos por aristas cumplen las siguientes propiedades.*

1. Si  $\xi \simeq \xi'$  entonces  $\xi$  y  $\xi'$  tienen el mismo origen y el mismo final.
2. Si  $\xi_1 \simeq \xi'_1$ ,  $\xi_2 \simeq \xi'_2$  y  $\text{fin}(\xi_1) = \text{origen}(\xi_2)$  entonces  $\xi_1 \xi_2 \simeq \xi'_1 \xi'_2$ .
3. Si  $\text{origen}(\xi) = v_1$  y  $\text{fin}(\xi) = v_2$  entonces  $(v_1, v_1)\xi \simeq \xi(v_2, v_2)$ .

*Demostración.* Veamos cada una de las propiedades por separado.

1. Si  $\xi \simeq \xi'$  entonces existe una sucesión de caminos  $\xi = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n = \xi'$ , tal que  $\xi_{i-1}$  y  $\xi_i$  son simplemente equivalentes para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Hacemos inducción en  $n$ . Si  $n = 1$  entonces  $\{\xi, \xi'\} = \{\xi_1(v, v')(v', v'')\xi_2, \xi_1(v, v'')\xi_2\}$  donde  $\{v, v', v''\} \in S_K$ . Por lo tanto  $\text{origen}(\xi) = \text{origen}(\xi_1) = \text{origen}(\xi')$  y  $\text{fin}(\xi) = \text{fin}(\xi_2) = \text{fin}(\xi')$ .

Supongamos que vale para  $n - 1$ , quiero ver que vale para  $n$ . Siguiendo el razonamiento anterior resulta que  $\text{origen}(\xi) = \text{origen}(\xi_{n-1}) = \text{origen}(\xi_n) = \text{origen}(\xi')$  y de manera análoga para el vértice final. Por lo tanto vale la propiedad.

2. Como  $\xi_i \simeq \xi'_i$  existe una sucesión de caminos por aristas  $\xi_{i,0}, \xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,n_i}$  tal que  $\xi_i = \xi_{i,0}$ ,  $\xi'_i = \xi_{i,n_i}$  y  $\xi_{i,j-1}$  y  $\xi_{i,j}$  son simplemente equivalentes para todo  $i = 1, 2$  y  $j = 1, \dots, n_i$ . Por lo tanto la sucesión

$$\xi_{1,1}\xi_{2,1}, \xi_{1,1}\xi_{2,2}, \dots, \xi_{1,1}\xi_{2,n_2}, \xi_{1,2}\xi_{2,n_2}, \dots, \xi_{1,n_1}\xi_{2,n_2}$$

cumple que dos consecutivos son simplemente equivalentes,  $\xi_{1,1}\xi_{2,1} = \xi_1\xi_2$  y  $\xi_{1,n_1}\xi_{2,n_2} = \xi'_1\xi'_2$ . Luego se sigue la conclusión.

3. Es inmediato de la definición de la relación de equivalencia. □

**Observación 1.13.** Sea  $\xi$  un camino por aristas en  $K$ . En vista de la Proposición 1.12 tiene sentido definir el *origen de*  $[\xi]$  como  $\text{origen}([\xi]) = \text{origen}(\xi)$  y *fin de*  $[\xi]$  como  $\text{fin}([\xi]) = \text{fin}(\xi)$ .

**Definición 1.14.** Si  $e = (v, w)$  es una arista en  $K$  entonces definimos  $e^{-1} = (w, v)$ . Si  $\xi = e_1 \dots e_n$  es un camino por aristas en  $K$  entonces definimos  $\xi^{-1} = e_n^{-1} \dots e_1^{-1}$ .

**Observación 1.15.** Las siguientes propiedades son inmediatas de las definiciones.

1.  $(\xi^{-1})^{-1} = \xi$
2.  $\text{origen}(\xi^{-1}) = \text{fin}(\xi)$  y  $\text{fin}(\xi^{-1}) = \text{origen}(\xi)$ .
3. Si  $\xi_1 \simeq \xi_2$  entonces  $\xi_1^{-1} \simeq \xi_2^{-1}$ .
4. Si  $\text{origen}(\xi) = v$  y  $\text{fin}(\xi) = w$  entonces  $\xi\xi^{-1} \simeq (w, w)$  y  $\xi^{-1}\xi \simeq (v, v)$

**Definición 1.16.** Sean  $K$  un complejo simplicial,  $v \in V_K$  y  $\xi$  un camino por aristas en  $K$ . Decimos que  $\xi$  es un *ciclo en  $v$*  si  $\text{origen}(\xi) = \text{fin}(\xi) = v$ . Decimos que un ciclo en  $v$  es *contráctil* si es equivalente a  $(v, v)$ .

**Definición 1.17.** Sea  $K$  un complejo simplicial, hay una categoría  $\mathcal{E}(K)$  que tiene por objetos a los vértices de  $K$  y cuyos morfismos  $\text{hom}_{\mathcal{E}(K)}(v, w)$  son las clases de equivalencia de caminos por aristas en  $K$  con  $\text{origen}([\xi]) = v$ ,  $\text{fin}([\xi]) = w$  y la composición de morfismos viene dada por  $[\xi][\xi'] = [\xi\xi']$ . Está bien definida por la Proposición 1.12. Más aún, si  $[\xi] \in \text{hom}_{\mathcal{E}(K)}(v, w)$ , entonces  $[\xi^{-1}] \in \text{hom}_{\mathcal{E}(K)}(w, v)$  y cumple que  $[\xi][\xi^{-1}] = [\xi\xi^{-1}] = [(w, w)]$  y  $[\xi^{-1}][\xi] = [\xi^{-1}\xi] = [(v, v)]$ . Por lo tanto,  $[\xi^{-1}] = [\xi]^{-1}$ , de donde podemos concluir que todo morfismo es un isomorfismo, es decir,  $\mathcal{E}(K)$  es un grupoide. Lo llamamos el *grupoide de caminos por aristas*.

Sea  $v \in K$  denotamos  $\mathcal{E}(K, v)$  al grupo de clases de ciclos en  $v$ , llamado el *grupo de caminos por aristas con punto base  $v$* .

**Definición 1.18.** Sea  $\xi = (v_1, v_2) \dots (v_n, v_{n+1})$  un camino por aristas en  $K$ , definimos  $\phi_\xi : I \rightarrow |K|$  como

$$\phi_\xi(t) = v_i(i - nt) + v_{i+1}(1 - i + nt) \text{ si } (i - 1)/n \leq t \leq i/n$$

Notamos a  $\phi_{(v,w)}$  como  $vw$ .

**Observación 1.19.** Si  $\xi = (v_1, v_2) \dots (v_n, v_{n+1})$  entonces  $\phi_\xi \simeq v_1v_2 * v_2v_3 * \dots * v_nv_{n+1}$  rel  $\dot{I}$ .

El siguiente teorema relaciona el grupoide de caminos por aristas con el grupoide fundamental de la realización geométrica del mismo complejo simplicial.

**Teorema 1.20.** [18, Theorem 3.6.16] Sean  $K$  un complejo simplicial y  $v, w \in V_K$ . La función

$$\rho : [\xi] \in \text{hom}_{\mathcal{E}(K)}(v, w) \rightarrow [\phi_\xi] \in \text{hom}_{\mathcal{P}(|K|)}(v, w)$$

es una biyección. En particular, si  $v \in V_K$  la función

$$\rho : [\xi] \in \mathcal{E}(K, v) \rightarrow [\phi_\xi] \in \pi_1(|K|, v)$$

es un isomorfismo.

Recordemos que un grafo  $G = (V, E)$  consta de un conjunto  $V$  cuyos elementos se llaman vértices y un conjunto  $E \subset V \times V$  cuyos elementos se llaman aristas. Observemos que el 1-esqueleto de un complejo simplicial es un grafo.

**Definición 1.21.** Sea  $K$  un complejo simplicial finito y sean  $\sigma, \tau \in K$  tales que  $\tau$  es una cara inmediata de  $\sigma$  y no hay otro símplex que tenga a  $\tau$  como cara propia. En este caso decimos que  $\tau$  es una cara simple de  $\sigma$ . Consideramos el subcomplejo de  $K$  definido por  $L = K \setminus \{\tau, \sigma\}$ . Entonces decimos que hay un *colapso elemental de  $K$  a  $L$* .

Sea  $H$  un subcomplejo de  $K$ . Decimos que  $K$  *colapsa a  $H$*  si existe una sucesión de subcomplejos de  $K$ ,  $K = L_1, L_2, \dots, L_n = H$  de modo que existe un colapso elemental de  $L_i$  a  $L_{i+1}$  para todo  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Recordemos que un complejo simplicial  $K$  es un cono si existe algún vértice  $v \in K$ , tal que para todo vértice  $w \in K$  se tiene que  $\{v, w\} \in K$ . Vamos a llamar ápice a un vértice del complejo  $K$  que tenga esta propiedad.

$$\begin{array}{ccc} |v\dot{\tau}| & \xleftarrow{i} & |\sigma| \\ j \downarrow & & \downarrow \bar{j} \\ |L| & \xleftarrow{\bar{i}} & |K| \end{array}$$

Figura 1.3: Diagrama de push-out inducido por la inclusión  $i : |L| \hookrightarrow |K|$ .

**Observación 1.22.** Sea  $K$  un complejo simplicial finito y sean  $\sigma, \tau \in K$  tales que  $\tau$  es una cara simple de  $\sigma$ . Si  $v \in \sigma \setminus \tau$ , entonces  $v\dot{\tau}$  es un cono y, por lo tanto, la inclusión  $|v\dot{\tau}| \hookrightarrow |\sigma|$  es una equivalencia homotópica. Por otro lado, como la inclusión  $|v\dot{\tau}| \hookrightarrow |L|$  es cofibración, vía el push-out de la Figura 1.3 y el Lema del Pegado [8, Theorem 7.4.3] obtenemos que la inclusión  $|L| \hookrightarrow |K|$  es una equivalencia homotópica.

La siguiente proposición nos será de utilidad a la hora de clasificar el grupo fundamental de un complejo de Vietoris-Rips cuyos puntos se encuentran en el plano.

**Proposición 1.23.** *Sea  $K$  un complejo simplicial finito tal que su realización geométrica  $|K|$  se embebe de manera lineal en  $\mathbb{R}^2$ . Entonces  $K$  tiene el tipo homotópico de un grafo.*

*Demostración.* Basta ver que  $K$  colapsa a un grafo. Notemos primero que el complejo  $K$  no tiene símplex de dimensión mayor a 2. En caso contrario, si  $\sigma = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  es un 3-símplex, el conjunto  $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  es un conjunto afínmente independiente en  $\mathbb{R}^2$ . Luego  $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0\}$  es un conjunto linealmente independiente en  $\mathbb{R}^2$ ,

lo cual es absurdo pues este tiene dimensión 2. Por lo tanto  $K$  no tiene símplices de dimensión mayor a 2.

Hagamos inducción en  $n = |\{2\text{-símplices de } K\}|$ . Si  $n = 0$  entonces  $K$  es un grafo. Si  $n > 0$  consideramos  $K' \subset K$  el subcomplejo generado por los 2-símplices de  $K$ . Afirimo que  $\partial|K'| \neq \emptyset$ , pues en caso contrario  $|K'| = \text{Int}|K'|$  entonces es un abierto, cerrado y no vacío en  $\mathbb{R}^2$ , que es conexo, por lo tanto  $|K'| = \mathbb{R}^2$  lo cual es absurdo dado que  $|K'|$  es compacto.

Sean  $x \in \partial|K'|$  y  $\sigma \in K'$  un 2-símplex tales que  $x \in |\sigma|$ . Si  $\{v, w\}$  es una cara propia de  $\sigma$  y  $x \in \text{Int}|\{v, w\}|$  entonces  $\{v, w\}$  es una cara libre, pues en caso contrario existe un entorno de  $x$  contenido en la realización geométrica de los dos 2-símplices que tienen a  $\{v, w\}$  como cara propia, lo cual es absurdo pues  $x$  estaba en el borde de  $K'$ . Colapsando esta arista obtenemos un complejo con  $(n - 1)$  2-símplices, por hipótesis inductiva este colapsa a un grafo y, por lo tanto,  $K$  también.

Si  $x$  es un vértice de  $\sigma$  y toda arista que tiene a  $x$  por vértice no es libre, entonces  $st_K(x)$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  que contiene a  $x$ , lo cual es absurdo. Por lo tanto alguna arista es libre y procedemos como en el caso anterior.  $\square$

## 1.2. Un lema del pegado para funciones $k$ -conexas

En esta sección recordamos algunos resultados fundamentales sobre propiedades homotópicas de CW-complejos. La proyección del complejo de Vietoris-Rips de  $X \subset \mathbb{R}^n$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$  que tiene una estructura de CW-complejo no simplicial y necesitamos los resultados de esta sección para estudiarlo.

El lema clásico del pegado [8, Theorem 7.4.3] establece que si  $f : X \rightarrow Y$  es un función continua tal que  $X = A \cup B$  y  $Y = C \cup D$  donde  $A, B, C$  y  $D$  son subespacios cerrados. Si se cumple que  $f|_A : A \rightarrow C$ ,  $f|_B : B \rightarrow D$  y  $f|_{A \cap B} : A \cap B \rightarrow C \cap D$  son equivalencias homotópicas y cada una de las inclusiones  $A \cap B \hookrightarrow A$ ,  $A \cap B \hookrightarrow B$ ,  $C \cap D \hookrightarrow C$ ,  $C \cap D \hookrightarrow D$  es un cofibración. Entonces  $f : X \rightarrow Y$  es una equivalencia homotópica. Recordaremos la versión de este resultado para funciones  $k$ -conexas.

**Definición 1.24.** Un CW-complejo es un espacio topológico Hausdorff  $X$  junto con una familia de celdas abiertas  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  tal que

$$X = \bigsqcup_{\alpha \in A} e_\alpha$$

es decir, es la unión disjunta de las celdas abiertas, y

- para cada  $n$ -celda  $e_\alpha$  existe una función continua  $f_\alpha : D^n \rightarrow X$  tal que  $f_\alpha|_{\text{Int}D^n} : \text{Int}D^n \rightarrow e_\alpha$  es un homeomorfismo y  $f_\alpha(S^{n-1})$  está contenido en una unión finita de celdas abiertas de dimensión menor que  $n$ . La función  $f_\alpha$  se llama función característica de  $e_\alpha$  y  $g_\alpha = f_\alpha|_{S^{n-1}}$  función de adjunción.

- $X$  tiene la topología final con respecto a las inclusiones  $\{\iota : \overline{e_\alpha} \rightarrow X\}_{\alpha \in A}$ .

Dado  $n \geq 0$ ,  $X^n$  denota al  $n$ -esqueleto de  $X$ , es decir, al subcomplejo formado por las celdas de dimensión menor o igual a  $n$ .

El siguiente teorema nos será de utilidad en dimensión 2 para levantar los caminos desde la proyección geométrica del complejo de Vietoris-Rips. El resultado muestra como cambia el grupo fundamental de un grafo al adjuntar celdas de dimensión 2.

**Teorema 1.25.** [18, Theorem 3.8.10] Sea  $X$  un CW-complejo. La inclusión  $\iota : X^1 \rightarrow X$  induce una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow N \rightarrow \pi_1(X^1, v) \rightarrow \pi_1(X, v) \rightarrow 0$$

donde  $N$  es el subgrupo normal generado por las funciones de adjunción de las 2-celdas conjugadas al punto base  $v$ , es decir,  $N = \langle \langle [w_i * \gamma_i * \overline{w}_i] \rangle \rangle_{i \in I}$  donde  $\{e_i^2\}_{i \in I}$  es el conjunto de 2-celdas,  $\gamma_i : S^1 \rightarrow X^1$  es la función de adjunción de  $e_i^2$  y  $w_i$  es un camino de  $v$  hasta  $\gamma_i(s_0)$ .

**Definición 1.26.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0 \in X$ . Definimos el  $n$ -ésimo grupo de homotopía de  $X$  con punto base  $x_0$  como

$$\pi_n(X, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$$

es decir, el conjunto de clases de funciones continuas  $f : I^n \rightarrow X$  tales que  $f(\partial I^n) = x_0$ . Donde  $[f] = [g]$  si  $f \simeq g$  rel  $\partial I^n$ . Este conjunto resulta ser un grupo con la operación dada por  $[f] + [g] = [f + g]$  donde

$$(f + g)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{si } s_1 \leq 1/2 \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \text{si } s_1 \geq 1/2 \end{cases}$$

Es un grupo abeliano si  $n \geq 2$ .

**Definición 1.27.** Sea  $k \geq 0$ , una función continua  $f : X \rightarrow Y$  se dice  $k$ -conexa si la función inducida  $f_* : \pi_i(X, x) \rightarrow \pi_i(Y, f(x))$  es biyectiva para todo  $0 \leq i < k$  y es sobreyectiva cuando  $i = k$ , para toda elección de punto base  $x \in X$ .

**Definición 1.28.** Sea  $X$  un espacio topológico,  $A$  y  $B$  subespacios de  $X$  tales que  $X = (\text{Int}A) \cup (\text{Int}B)$  llamamos a  $(X; A, B)$  una terna escisiva. Si  $(Y; C, D)$  es otra terna escisiva, una función  $f : (X; A, B) \rightarrow (Y; C, D)$  de ternas escisivas es una función continua  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(A) \subset C$  y  $f(B) \subset D$

**Teorema 1.29.** [20, Theorem 6.7.9] Sea  $k \geq 1$  y  $f : (X; A, B) \rightarrow (Y; C, D)$  una función de ternas escisivas. Si  $f|_A : A \rightarrow C$  y  $f|_B : B \rightarrow D$  son  $k$ -conexas y  $f|_{A \cap B} : A \cap B \rightarrow C \cap D$  es  $(k - 1)$ -conexa entonces  $f : X \rightarrow Y$  es  $k$ -conexa.

En lugar de dar la demostración de [20] probamos este teorema a partir del siguiente resultado que aparece en el libro de Hatcher [13, Proposition 4K.1].

**Proposición 1.30.** [13, Proposition 4K.1] Sea  $f : (X; A, B) \rightarrow (Y; C, D)$  una función de ternas escisivas. Si las funciones inducidas  $\pi_i(f) : \pi_i(A, A \cap B) \rightarrow \pi_i(C, C \cap D)$  y  $\pi_i(f) : \pi_i(B, A \cap B) \rightarrow \pi_i(D, C \cap D)$  son biyecciones para  $i < n$  y sobreyectivas para  $i = n$ , para toda elección de punto base, entonces  $\pi_i(X, A) \rightarrow \pi_i(Y, C)$  es una biyección para  $i < n$  y sobreyectiva para  $i = n$ . Simétricamente con  $\pi_i(X, B) \rightarrow \pi_i(Y, D)$ .

Antes de dar la demostración del Teorema 1.29 recordamos los enunciados de los siguientes lemas básicos de álgebra.

**Lema 1.31.** (Lema de los cinco) Consideramos el siguiente diagrama conmutativo de grupos, donde cada fila es exacta,

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\
 f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & p \downarrow & & q \downarrow \\
 A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E'
 \end{array}$$

Si  $g$  y  $p$  son isomorfismos,  $q$  es un monomorfismo y  $f$  es un epimorfismo entonces  $h$  es un isomorfismo.

**Lema 1.32.** (Lema de los cuatro) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de grupos, donde cada fila es exacta,

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D \\
 f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & p \downarrow \\
 A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D'
 \end{array}$$

Si  $f$  y  $h$  son epimorfismos y  $p$  es un monomorfismo entonces  $g$  es un epimorfismo.

*Demostración del Teorema 1.29.* Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \pi_i(A \cap B) & \longrightarrow & \pi_i(A) & \longrightarrow & \pi_i(A, A \cap B) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(A \cap B) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(A) \\
 \pi_i(f) \downarrow & & \pi_i(f) \downarrow & & \pi_i(f) \downarrow & & \pi_{i-1}(f) \downarrow & & \pi_{i-1}(f) \downarrow \\
 \pi_i(C \cap D) & \longrightarrow & \pi_i(C) & \longrightarrow & \pi_i(C, C \cap D) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(C \cap D) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(C)
 \end{array}$$

Si  $i < k$  entonces  $\pi_{i-1}(f) : \pi_{i-1}(A \cap B) \rightarrow \pi_{i-1}(C \cap D)$ ,  $\pi_{i-1}(f) : \pi_{i-1}(A) \rightarrow \pi_{i-1}(C)$  y  $\pi_i(f) : \pi_i(A) \rightarrow \pi_i(C)$  son isomorfismos y  $\pi_i(f) : \pi_i(A \cap B) \rightarrow \pi_i(C \cap D)$  es un epimorfismo. Por el Lema de los cinco (Lema 1.31) se sigue que  $\pi_i(f) : \pi_i(A, A \cap B) \rightarrow \pi_i(C, C \cap D)$  es un isomorfismo.

Si  $i = k$  entonces  $\pi_{i-1}(f) : \pi_{i-1}(A \cap B) \rightarrow \pi_{i-1}(C \cap D)$  y  $\pi_i(f) : \pi_i(A) \rightarrow \pi_i(C)$  son epimorfismos y  $\pi_{i-1}(f) : \pi_{i-1}(A) \rightarrow \pi_{i-1}(C)$  es un monomorfismo entonces por el Lema de los cuatro (Lema 1.32) se sigue que  $\pi_i(f) : \pi_i(A, A \cap B) \rightarrow \pi_i(C, C \cap D)$  es un epimorfismo.

Análogamente  $\pi_i(f) : \pi_i(B, A \cap B) \rightarrow \pi_i(D, C \cap D)$  es un isomorfismo si  $i < k$  y un epimorfismo si  $i = k$ . Por la Proposición 1.30 se concluye que  $\pi_i(f) : \pi_i(X, A) \rightarrow \pi_i(Y, C)$  es un isomorfismo  $i < k$  y un epimorfismo si  $i = k$ . Por lo tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \pi_{i+1}(X, A) & \longrightarrow & \pi_i(A) & \longrightarrow & \pi_i(X) & \longrightarrow & \pi_i(X, A) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(A) \\
 \pi_{i+1}(f) \downarrow & & \pi_i(f) \downarrow & & \pi_i(f) \downarrow & & \pi_i(f) \downarrow & & \pi_{i-1}(f) \downarrow \\
 \pi_{i+1}(X, A) & \longrightarrow & \pi_i(C) & \longrightarrow & \pi_i(Y) & \longrightarrow & \pi_i(Y, C) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(C)
 \end{array}$$

Si  $i < k$  entonces  $\pi_i(f) : \pi_i(X, A) \rightarrow \pi_i(Y, C)$ ,  $\pi_{i-1}(f) : \pi_{i-1}(A) \rightarrow \pi_{i-1}(C)$  y  $\pi_i(f) : \pi_i(A) \rightarrow \pi_i(C)$  son isomorfismos y  $\pi_{i+1}(f) : \pi_{i+1}(X, A) \rightarrow \pi_{i+1}(Y, C)$  es un epimorfismo. Entonces por el Lema de los cinco (Lema 1.31) se sigue que  $\pi_i(f) : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$  es un isomorfismo.

Si  $i = k$  entonces  $\pi_i(f) : \pi_i(X, A) \rightarrow \pi_i(Y, C)$  y  $\pi_i(f) : \pi_i(A) \rightarrow \pi_i(C)$  son epimorfismos y  $\pi_{i-1}(f) : \pi_{i-1}(A) \rightarrow \pi_{i-1}(C)$  es un monomorfismo. Entonces por el Lema de los cuatro (Lema 1.32) se sigue que  $\pi_i(f) : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$  es un epimorfismo. Por lo tanto  $f : X \rightarrow Y$  es  $k$ -conexa.  $\square$

La versión para CW-complejos se sigue usando el argumento de  $\epsilon$ -entornos que exponemos a continuación.

**Definición 1.33.** Sea  $X$  un CW-complejo,  $A \subset X$  subespacio y  $\epsilon$  una función que a cada celda  $e_\alpha$  le asigna un número real  $0 < \epsilon_\alpha < 1$ . El  $\epsilon$ -entorno de  $A$  se define inductivamente esqueleto por esqueleto, primero construimos  $N_\epsilon^0(A) = A \cap X^0$ , que es un entorno de  $A \cap X^0$  en  $X^0$ . Supongamos construido  $N_\epsilon^n(A)$ , un entorno de  $A \cap X^n$  en  $X^n$ , quiero construir  $N_\epsilon^{n+1}(A)$ . Tomamos  $e_\alpha^{n+1}$  una  $(n+1)$ -celda del complejo  $X$  y  $f_\alpha^{n+1} : D^{n+1} \rightarrow \bar{e}_\alpha^{n+1}$  su función característica. Consideramos  $U_\alpha$  el abierto formado por los puntos de  $IntD^{n+1}$  que distan de  $\overline{f_\alpha^{n+1}}^{-1}(A) \cap IntD^{n+1}$  en menos que  $\epsilon_\alpha$ . Por otro lado, definimos el conjunto

$$V_\alpha = \{tx : x \in f_\alpha^{-1}(N_\epsilon^n(A)), 1 - \epsilon_\alpha < t \leq 1\} \subset D^{n+1},$$

que resulta ser un abierto en  $D^{n+1}$ . Por lo tanto, la unión  $U_\alpha \cup V_\alpha \subset D^{n+1}$  es un subespacio abierto de  $D^{n+1}$ . Luego extendemos  $N_\epsilon^n(A)$  al  $(n+1)$ -esqueleto como

$$N_\epsilon^{n+1}(A) = N_\epsilon^n \cup \bigcup_{\alpha} \overline{f_\alpha}(U_\alpha \cup V_\alpha)$$

Finalmente definimos el  $\epsilon$ -entorno de  $A$  como

$$N_\epsilon(A) = \bigcup_{n \geq 0} N_\epsilon^n(A)$$

**Observación 1.34.** Las propiedades fundamentales que vamos a utilizar de los  $\epsilon$ -entornos es que  $N_\epsilon(A)$  se retrae por deformación fuerte en  $A$  y  $N_\epsilon(A \cap B) = N_\epsilon(A) \cap N_\epsilon(B)$ .

**Definición 1.35.** Sea  $X$  un CW-complejo,  $A, B$  subcomplejos tales que  $X = A \cup B$  entonces  $(X; A, B)$  se dice una terna escisiva de celdas. Si  $(Y; C, D)$  es otra terna escisiva de celdas, una función  $f : (X; A, B) \rightarrow (Y; C, D)$  de ternas escisivas de celdas es una función continua  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(A) \subset C$  y  $f(B) \subset D$ .

**Proposición 1.36.** Sean  $k \geq 1$  y  $f : (X; A, B) \rightarrow (Y; C, D)$  una función de ternas escisivas de celdas. Si  $f|_A : A \rightarrow C$  y  $f|_B : B \rightarrow D$  son  $k$ -conexas y  $f|_{A \cap B} : A \cap B \rightarrow C \cap D$  es  $(k-1)$ -conexa entonces  $f : X \rightarrow Y$  es  $k$ -conexa.

*Demostración.* Sean  $N_\epsilon(C), N_\epsilon(D)$   $\epsilon$ -entornos correspondientes a  $C$  y  $D$ . Como  $f$  es continua existen  $N_\delta(A)$  y  $N_\delta(B)$   $\epsilon$ -entornos de  $A$  y  $B$  respectivamente tales  $f(N_\delta(A)) \subset N_\epsilon(C)$  y  $f(N_\delta(B)) \subset N_\epsilon(D)$ . Por lo tanto  $f : (X; N_\delta(A), N_\delta(B)) \rightarrow (Y; N_\epsilon(C), N_\epsilon(D))$  es una función de ternas escisivas. Dado que  $N_\delta(A)$  y  $N_\epsilon(C)$  se retraen por deformación fuerte a  $A$  y a  $C$  respectivamente, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(A) & \xrightarrow{\pi_i(f)} & \pi_i(C) \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ \pi_i(N_\delta(A)) & \xrightarrow{\pi_i(f)} & \pi_i(N_\epsilon(C)) \end{array}$$

donde los morfismos verticales son isomorfismos. Si  $i < k$ , como  $\pi_i(f) : \pi_i(A) \rightarrow \pi_i(C)$  es un isomorfismo,  $\pi_i(f) : \pi_i(N_\delta(A)) \rightarrow \pi_i(N_\epsilon(C))$  resulta ser un isomorfismo. Si  $i = k$ , como  $\pi_i(f) : \pi_i(A) \rightarrow \pi_i(C)$  es un epimorfismo,  $\pi_i(f) : \pi_i(N_\delta(A)) \rightarrow \pi_i(N_\epsilon(C))$  resulta ser un epimorfismo. El razonamiento es análogo para  $\pi_i(f) : \pi_i(N_\delta(B)) \rightarrow \pi_i(N_\epsilon(D))$ . Por otro lado, como  $N_\delta(A \cap B) = N_\delta(A) \cap N_\delta(B)$  y  $N_\epsilon(C \cap D) = N_\epsilon(C) \cap N_\epsilon(D)$ , vía el mismo argumento concluimos que  $\pi_i(f) : \pi_i(N_\delta(A) \cap N_\delta(B)) \rightarrow \pi_i(N_\epsilon(C) \cap N_\epsilon(D))$  es un isomorfismo si  $i < k-1$  y un epimorfismo si  $i = k-1$ . Finalmente, por la Proposición 1.29 obtenemos que  $f : X \rightarrow Y$  es  $k$ -conexa.  $\square$



## Capítulo 2

# El complejo de Vietoris-Rips y la proyección al shadow

En este capítulo estudiaremos la proyección  $P : |\mathcal{R}(X; r)| \rightarrow \mathbb{R}^n$  del complejo de Vietoris-Rips  $\mathcal{R}(X; r)$  de un conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$ , cuya imagen recibe el nombre de shadow de  $\mathcal{R}(X; r)$ , y notamos  $\mathcal{S}(X; r)$ . Vemos que  $\mathcal{S}(X; r)$  tiene una estructura natural de CW-complejo con celdas convexas y usamos esta descripción para estudiar el morfismo inducido por la proyección en los grupos fundamentales. Vemos las diferencias que existen al estudiar el problema en dimensiones 1, 2, 3 y dimensiones mayores. Los resultados de este capítulo se encuentran contruidos en los artículos [10] de Chambers, De Silva, Erickson y Ghrist y [3] de Adamaszek, Frick y Vakili.

### 2.1. Definiciones y ejemplos

Recordamos la definición del complejo de Vietoris-Rips de un conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  y parametro  $r > 0$  y estudiamos el comportamiento de la proyección  $P : |\mathcal{R}(X; r)| \rightarrow \mathcal{S}(X; r)$  en una serie de ejemplos.

**Definición 2.1.** El *complejo de Vietoris-Rips* de  $X \subset \mathbb{R}^n$  a una distancia escalar  $r > 0$ ,  $\mathcal{R}(X; r)$ , es un complejo simplicial que tiene por vértices al conjunto  $X$  y por símlices a subconjuntos finitos y no vacíos  $Y \subset X$  que cumplen  $\text{diam}(Y) < r$ .

**Observación 2.2.** Si bien  $X$  está contenido en un espacio de dimensión  $n$ , el complejo  $\mathcal{R}(X; r)$  puede ser de dimensión más grande. Por ejemplo si  $X_1 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\} \subset \mathbb{R}$ , la realización geométrica del complejo de Vietoris-Rips asociado a  $X_1$ ,  $|\mathcal{R}(X_1; 1)|$ , es un tetraedro, como se puede observar en la Figura 2.1.

De manera análoga en dimensión dos,  $X_2 = \{(0, 1), (-\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{3})\} \subset \mathbb{R}^2$ , la realización geométrica del complejo  $\mathcal{R}(X_2; 1)$  también resulta ser un tetraedro como se puede observar en la Figura 2.2.

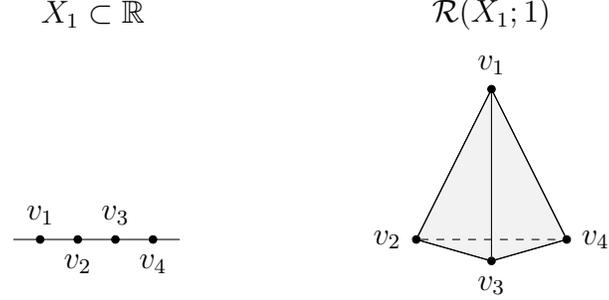


Figura 2.1: Notamos  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = \frac{1}{4}$ ,  $v_3 = \frac{1}{2}$  y  $v_4 = \frac{3}{4}$ . A la izquierda está el conjunto  $X_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}$ . A la derecha la realización geométrica  $|\mathcal{R}(X_1; 1)|$ .

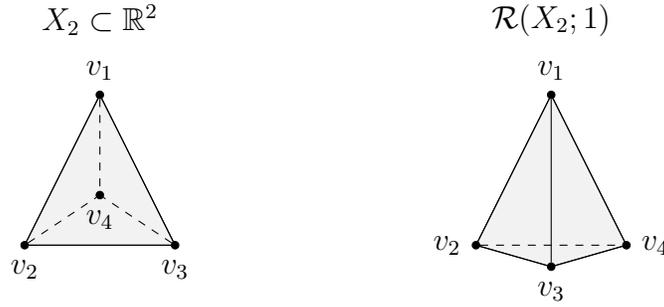


Figura 2.2: Notamos  $v_1 = (0, 1)$ ,  $v_2 = (-\frac{1}{2}, 0)$ ,  $v_3 = (\frac{1}{2}, 0)$  y  $v_4 = (0, \frac{1}{3})$ . A la izquierda está el conjunto  $X_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^2$ . A la derecha la realización geométrica  $|\mathcal{R}(X_2; 1)|$ .

Podemos construir la estructura simplicial del complejo Vietoris-Rips a partir de su 1-esqueleto vía el siguiente objeto.

**Definición 2.3.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo, *el complejo clique de  $G$* ,  $Cl(G)$ , es el complejo simplicial que tiene por símlices a los subgrafos completos de  $G$ . También  $Cl(G)$  se conoce como la *completación flag* de  $G$ .

Luego una manera alternativa de definir el complejo de Vietoris-Rips es como el complejo clique del grafo  $R(X; r) = (X, E)$  donde  $(x, y) \in E$  si  $|x - y| < r$ , es decir,  $\mathcal{R}(X; r) = Cl(R(X; r))$ .

**Definición 2.4.** Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$ , el shadow  $\mathcal{S}(X; r) \subset \mathbb{R}^n$  es la imagen de  $|\mathcal{R}(X; r)|$  vía la proyección geométrica dada por  $P : \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \in |\mathcal{R}(X; r)| \mapsto \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \in \mathbb{R}^n$ .

Podemos visualizar el shadow de los complejos  $\mathcal{R}(X_1; 1)$  y  $\mathcal{R}(X_2; 1)$  en la Figura 2.3.

Notemos que la proyección no es inyectiva pues en el segundo ejemplo,  $X_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,  $P(v_4) = P(v_1 \frac{1}{3} + v_2 \frac{1}{3} + v_3 \frac{1}{3})$ . En ambos casos la realización geométrica



Figura 2.3: A la izquierda el complejo shadow correspondiente a  $X_1$ . A la derecha el complejo shadow correspondiente a  $X_2$

tiene el mismo tipo homotópico que la proyección geométrica. Esto no sucede siempre como podemos observar en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.5.** Notemos  $\xi = e^{i\pi/3}$  y consideremos el conjunto de puntos  $X^2 = \{v_i\}_{i=0}^5 \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  donde  $v_i = r\xi^i$  con  $1/2 < r < 1/\sqrt{3}$ . Como la rotación no afecta a la distancia  $|v_k - v_{k+j}| = |v_0 - v_j|$ , además dado que  $|v_0 - v_1| = |v_0 - v_5|$  y  $|v_0 - v_4| = |v_0 - v_2|$ , basta ver sólo las distancias entre  $v_0$  a los tres vértices consecutivos para construir  $\mathcal{R}(X^2; 1)$ .

$$|v_0 - v_1| = r|1 - e^{i\pi/3}| < 1,$$

$$|v_0 - v_2| = r|1 - e^{i2\pi/3}| < 1,$$

$$|v_0 - v_3| = r|1 + 1| = 2r > 1$$

Resulta que  $\{v_k, v_{k+1}, v_{k+2}\}, \{v_k, v_{k+2}, v_{k+4}\} \in \mathcal{R}(X^2; 1)$  para todo  $k$  y, por lo tanto, la realización geométrica es un octaedro regular, mientras que la proyección geométrica es un hexágono, como se puede visualizar en la Figura 2.4.

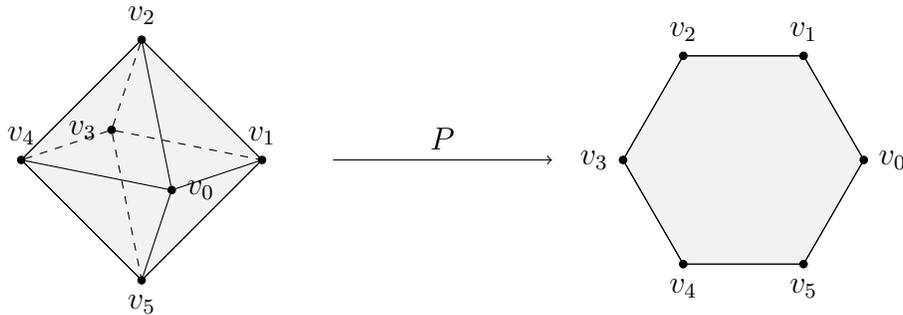


Figura 2.4: Tomamos  $\xi = e^{i\pi/3}$ ,  $X^2 = \{v_i\}_{i=0}^5 \subset \mathbb{C}$  con  $v_i = r\xi^i$ . A la izquierda la realización geométrica del complejo  $\mathcal{R}(X^2; 1)$ . A la derecha el shadow  $\mathcal{S}(X^2; 1)$ .

El complejo  $\mathcal{R}(X^2; 1)$  tiene el tipo homotópico de una esfera mientras que  $\mathcal{S}(X^2; 1)$  es contráctil. Podemos observar que el segundo grupo de homología, así como el segundo grupo de homotopía no se conservan. Dado que  $\pi_2(\mathcal{R}(X^2; 1)) = H_2(\mathcal{R}(X^2; 1)) = \mathbb{Z}$  mientras que tanto  $\pi_2(\mathcal{S}(X^2; 1))$  como  $H_2(\mathcal{S}(X^2; 1))$  son triviales al ser  $\mathcal{S}(X^2; 1)$  contráctil.

A continuación, generalizando el ejemplo anterior, construimos un complejo de Vietoris-Rips cuya realización geométrica tiene el tipo homotópico de  $S^k$  para  $k \geq 2$ , mientras que el shadow resulta contráctil.

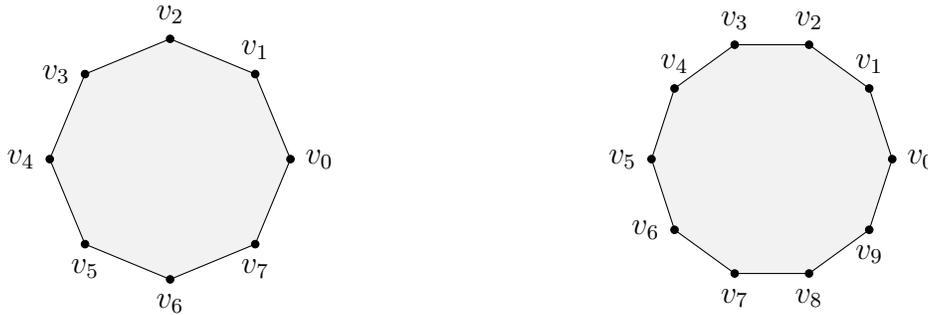


Figura 2.5: A la izquierda  $\mathcal{S}(X^3)$  y a la derecha  $\mathcal{S}(X^4)$ .

**Ejemplo 2.6.** Sea  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \geq 2$ , consideramos  $\xi = e^{i\pi/(k+1)}$  y el conjunto de puntos  $X^k = \{v_i\}_{i=0}^{2k+1} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  donde  $v_i = r\xi^i$  con  $1/2 < r < 1/2 + \epsilon(k)$ , con  $\epsilon(k)$  tal que  $\{v_i, v_j\} \in \mathcal{R}(X^k; 1)$  si y sólo si  $i + (k+1) \neq j \pmod{2(k+1)}$ . El conjunto  $\mathcal{S}(X^k; 1)$  resulta contráctil pues es star-shaped con centro  $(0, 0)$ . El complejo  $\mathcal{R}(X^k; 1)$  tiene por símplices al conjunto  $\{v_0, \dots, v_i, \dots, \hat{v}_{i+k+1 \pmod{2k+2}}, v_{2k+1}\}_{i=0}^{2k+1}$ . Hagamos inducción en  $k$  para ver que el tipo homotópico de  $\mathcal{R}(X^k)$  es efectivamente  $S^k$ . Vimos en el ejemplo anterior que vale para  $k = 2$ , basta observar que  $\mathcal{R}(X^{k+1})$  es la suspensión de  $\mathcal{R}(X^k)$  y, por lo tanto, vale la conclusión, ver Figura 2.5.

Podemos unir las circunferencias dándole a  $\mathcal{R}(X)$  el tipo homotópico de un wedge de esferas, ver Figura 2.6. Se conjetura que estos son todos los tipos homotópicos que pueden aparecer cuando  $X \subset \mathbb{R}^2$ .

**Observación 2.7.** El teorema de Carathéodory nos asegura que la cápsula convexa de un conjunto finito de  $\mathbb{R}^n$  es la unión de las cápsulas convexas de sus subconjuntos de como mucho  $(n+1)$ -elementos, por lo tanto, si  $X \subset \mathbb{R}^n$  finito entonces

$$\mathcal{S}(X; r) = \bigcup_{\substack{Y \subset X \\ |Y| \leq n+1 \\ \text{diam}(Y) < r}} \text{conv}(Y) \quad (2.1)$$

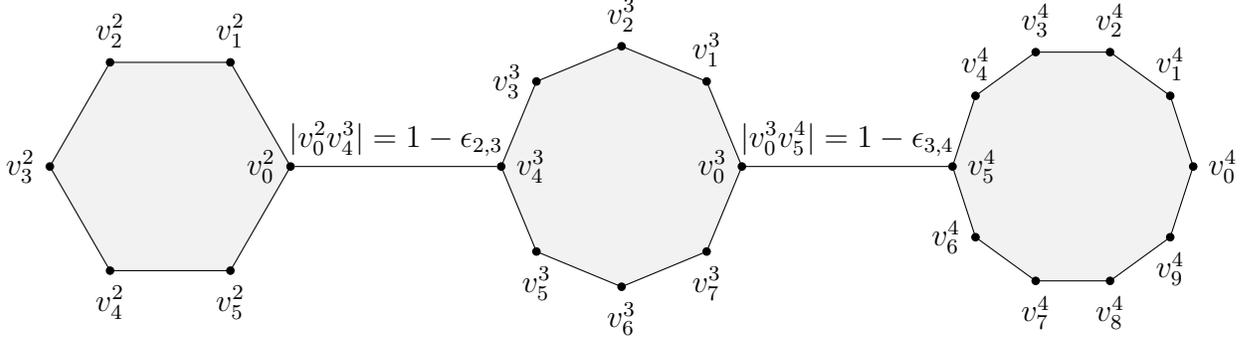


Figura 2.6: La proyección de un wedge de esferas  $S^2 \vee S^3 \vee S^4$ , donde  $\{v_j^k\}_{j=0}^{2k+1} = X^k$  con  $k = 2, 3, 4$ . Donde  $\epsilon_{2,3}, \epsilon_{3,4} > 0$  son suficientemente chicos para que los otros nodos no se conecten.

donde  $\text{conv}(Y)$  denota a la cápsula convexa dada por lo puntos de  $Y$ . Además notemos que la topología de  $\mathcal{S}(X; r)$  es la topología final con respecto a las inclusiones

$$\{\text{conv}(Y) \hookrightarrow \mathcal{S}(X; r)\}_{Y \subset X, |Y| \leq n+1, \text{diam}(Y) < r}$$

pues es una unión finita de cerrados.

De manera análoga al camino inducido en la realización geométrica de un complejo simplicial, podemos definir el camino inducido en el shadow de un complejo de Vietoris-Rips.

**Definición 2.8.** Sea  $\xi = (v_1, v_2) \dots (v_n, v_{n+1})$  un camino por aristas en  $\mathcal{R}(X)$ , definimos  $\varphi_\xi : I \rightarrow \mathcal{S}(X)$  como

$$\varphi_\xi(t) = v_i(i - nt) + v_{i+1}(1 - i + nt) \text{ si } (i - 1)/n \leq t \leq i/n$$

Notamos a  $\varphi_{(v,w)}$  como  $vw$ .

**Observación 2.9.** Sea  $\xi = (v_1, v_2) \dots (v_n, v_{n+1})$  entonces  $\varphi_\xi \simeq v_1 v_2 * v_2 v_3 * \dots * v_n v_{n+1}$  rel  $\dot{I}$ .

Vía la proyección podemos relacionar el grupoide de caminos por aristas de un complejo de Vietoris-Rips y el grupoide fundamental del shadow.

**Proposición 2.10.** Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$ , la proyección  $P : |\mathcal{R}(X; r)| \rightarrow \mathcal{S}(X; r)$  induce un functor  $P_* : \mathcal{E}(\mathcal{R}(X; r)) \rightarrow \Pi_1(\mathcal{S}(X; r))$  definido por  $P_*(v) = v$ , y si  $\xi = (v_1, v_2) \dots (v_n, v_{n+1})$  es un camino por aristas en  $\mathcal{R}(X)$  entonces  $P_*([\xi]) = [\varphi_\xi]$ .

*Demostración.* Veamos primero que  $P_*$  está bien definida, es decir, no depende del representante. Sean  $\xi$  y  $\xi'$  dos caminos por aristas en  $\mathcal{R}(X; r)$  simplemente equivalentes, entonces  $\{\xi, \xi'\} = \{\xi_1(v, v'')\xi_2, \xi_1(v, v')(v', v'')\xi_2\}$ , donde  $\{v, v', v''\} \in \mathcal{R}(X; r)$  y  $\xi_i$  es un camino por aristas en  $\mathcal{R}(X; r)$  para  $i = 1, 2$ . Luego

$$\varphi_\xi = \varphi_{\xi_1(v, v'')\xi_2} \simeq \varphi_{\xi_1} * vv'' * \varphi_{\xi_2} \text{ rel } \dot{I}$$

y

$$\varphi_{\xi'} = \varphi_{\xi_1(v, v')(v', v'')\xi_2} \simeq \varphi_{\xi_1} * vv' * v'v'' * \varphi_{\xi_2} \text{ rel } \dot{I}$$

Por lo tanto, basta ver que  $vv'' \simeq vv' * v'v'' \text{ rel } \dot{I}$ . Como  $\{v, v', v''\} \in \mathcal{R}(X; r)$  entonces  $\text{conv}\{v, v'v''\} \subset \mathcal{S}(X; r)$  y, por lo tanto,  $vv'' \simeq vv' * v'v'' \text{ rel } \dot{I}$  al ser dos caminos en un convexo con los mismos vértices inicial y final.

Veamos que  $P_*([\xi][\xi']) = P_*([\xi]) * P_*([\xi'])$ ,

$$\begin{aligned} P_*([\xi][\xi']) &= P_*([\xi\xi']) = \varphi_{\xi\xi'} \\ &\simeq \varphi_\xi * \varphi_{\xi'} = P_*([\xi]) * P_*([\xi']) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $P_*$  es un funtor. □

A lo largo de este capítulo vamos a considerar  $r = 1$  y notaremos  $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X; 1)$  y  $\mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(X; 1)$ . Pues dado  $r > 0$  arbitrario se sigue que  $(v, w) \in \mathcal{R}(X; r)$  si y sólo si  $|v - w| < r$  si y sólo si  $|v/r - w/r| < 1$  si y sólo si  $(v/r, w/r) \in \mathcal{R}(X/r; 1)$ .

## 2.2. Lemas geométricos

A continuación estudiaremos propiedades del complejo de Vietoris-Rips asociado a ciertas configuraciones  $X \subset \mathbb{R}^n$  con  $\#X \leq 5$ . Estos resultados valen independientemente de la dimensión  $n$ .

**Proposición 2.11.** *Sea  $X = \{v_1, v_2, w_1, w_2\} \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\{v_1v_2\}, \{w_1w_2\} \in \mathcal{R}(X)$  y  $\text{conv}\{v_1, v_2\} \cap \text{conv}\{w_1, w_2\} \neq \emptyset$ . Entonces  $\mathcal{R}(X)$  es un cono.*

*Demostración.* Sea  $x \in \text{conv}\{v_1, v_2\} \cap \text{conv}\{w_1, w_2\}$ , podemos visualizar la situación en la Figura 2.7. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $|v_1x| \leq |v_2x|, |w_1x|, |w_2x|$ . Veamos que  $|v_1w_1|, |v_1w_2| < 1$ ,

$$\begin{aligned} |v_1w_1| &\leq |v_1x| + |xw_1| \leq |w_2x| + |xw_1| = |w_1w_2| < 1 \\ |v_1w_2| &\leq |v_1x| + |xw_2| \leq |w_1x| + |xw_2| = |w_1w_2| < 1. \end{aligned}$$

Entonces  $\{v_1w_1\}, \{v_1w_2\} \in \mathcal{R}(X)$ , por lo cual  $v_1$  resulta ser un ápice y, por lo tanto,  $\mathcal{R}(X)$  es un cono. □

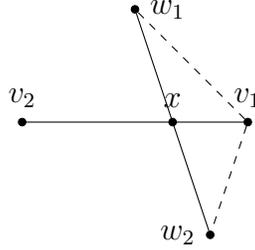


Figura 2.7: Intersección de rectas.

**Proposición 2.12.** Sea  $X = \{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2\} \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\{v_1, v_2, v_3\}, \{w_1, w_2\} \in \mathcal{R}(X)$  y  $\text{conv}\{v_1, v_2, v_3\} \cap \text{conv}\{w_1, w_2\} \neq \emptyset$ . Entonces  $\mathcal{R}(X)$  es un cono.

*Demostración.* Primero veamos que si  $|w_1v_2|, |w_1v_3| > 1$  entonces  $|w_2v_1| < 1$ . Como se

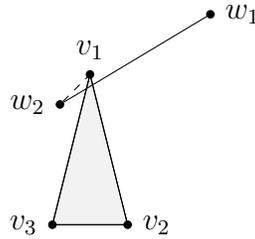


Figura 2.8: Intersección de un triángulo con una recta.

puede visualizar en la Figura 2.8.

Supongamos que  $|w_2v_1| \geq 1$ , por lo tanto, resulta  $|w_1w_2| < |v_1w_2|$ ,  $|v_1v_2| < |w_1v_2|$  y  $|v_1v_3| < |w_1v_3|$ . Sea  $v_1w_1^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n / |v_1x| = |w_1x|\}$ , el hiperplano afín perpendicular al segmento que une  $v_1$  con  $w_1$  y que lo interseca en el punto medio. Como  $|w_2v_1| \geq 1$ , se sigue que  $w_2$  se encuentra del mismo lado del hiperplano  $v_1w_1^\perp$  que  $w_1$ , mientras que  $v_2$  y  $v_3$  están del lado de  $v_1$ .

Como los conjuntos  $\{x \in \mathbb{R}^n / |w_1x| < |v_1x|\}$  y  $\{x \in \mathbb{R}^n / |w_1x| > |v_1x|\}$  son convexos resulta que  $\text{conv}\{v_1, v_2, v_3\} \cap \text{conv}\{w_1, w_2\} = \emptyset$ , lo cual es absurdo. Por lo tanto,  $|v_1w_2| < 1$ .

Si ninguno de los puntos  $v_1, v_2, v_3$  es ápice cada uno se conecta a lo sumo con uno de los vértices  $w_1$  o  $w_2$ . Sin pérdida de generalidad  $|w_1v_2|, |w_1v_3| \geq 1$ , por el razonamiento de la primera parte se sigue que  $|w_2v_1| < 1$  y como  $v_1$  no es ápice resulta  $|v_1w_1| \geq 1$ . Repitiendo el argumento vemos que  $|w_2v_2|, |w_2v_3| < 1$  y, por lo tanto,  $w_2$  es ápice.  $\square$

**Lema 2.13.** Sean  $X = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ , entonces  $\text{diam}(\text{conv}(X)) = \text{diam}(X)$ .

*Demostración.* Basta ver que si  $x, y \in \text{conv}(X)$ , entonces

$$|x - y| \leq \max\{|v_i v_j| : j, i = 1, \dots, m\}.$$

Como  $x \in \text{conv}(X)$  existen  $\{x_i\}_{i=1}^m$  tales que  $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ ,  $1 \geq x_i \geq 0$  y  $x = \sum_{i=1}^m x_i v_i$ . Por lo tanto, para cada  $i$  se sigue que

$$\begin{aligned} |xv_i| &= \left| \sum_{j=1}^m x_j v_j - v_i \right| = \left| \sum_{j=1}^m x_j (v_j - v_i) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m x_j |v_j v_i| \leq \max\{|v_j v_i| : j = 1, \dots, m\} \sum_{j=1}^m x_j \\ &= \max\{|v_j v_i| : j = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

Por otro lado, existen  $\{y_i\}_{i=1}^m$  tales que  $\sum_{i=1}^m y_i = 1$ ,  $1 \geq y_i \geq 0$  e  $y = \sum_{i=1}^m y_i v_i$ . Entonces

$$\begin{aligned} |x - y| &= \left| \sum_{i=1}^m x - y_i v_i \right| = \left| \sum_{i=1}^m y_i (x - v_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m y_i |x - v_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^m y_i \max\{|v_i v_j| : j = 1, \dots, m\} \text{ por el razonamiento anterior} \\ &\leq \max\{|v_i v_j| : i, j = 1, \dots, m\} \sum_{i=1}^m y_i = \max\{|v_i v_j| : i, j = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

□

### 2.3. Componentes arcoconexas y equivalencia homotópica en dimensión 1

Veamos que  $P : |\mathcal{R}(X)| \rightarrow \mathcal{S}(X)$  establece una biyección en los conjuntos de componentes arcoconexas, independientemente de la dimensión  $n$ . Aunque  $P$  no es en general una equivalencia homotópica probamos que para  $n = 1$ , sí lo es.

**Teorema 2.14.** *Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$ , la proyección  $P : |\mathcal{R}(X)| \rightarrow \mathcal{S}(X)$  induce una biyección en los conjuntos de componentes arcoconexas,  $\pi_0(P) : \pi_0(|\mathcal{R}(X)|) \rightarrow \pi_0(\mathcal{S}(X))$ .*

*Demostración.* Como  $P$  es sobreyectiva,  $\pi_0(P)$  también lo es. Mostremos que también es inyectiva. Sean  $v, w \in |\mathcal{R}(X)|$  tales que  $\pi_0(P)[v] = \pi_0(P)[w]$ . Sea  $\eta \in \mathcal{R}(X)$  tal que  $v \in |\eta|$ . Definimos  $T_1 = \{\eta\}$ , es decir, el subcomplejo de  $K$  generado por  $\eta$ . Construimos  $T_{n+1}$  recursivamente, si existe  $\tau \in \mathcal{R}(X) \setminus T_n$  tal que  $P(|\tau|) \cap P(|T_n|) \neq \emptyset$  entonces tomamos  $T_{n+1} = T_n \cup \{\tau\}$ .

Vía un argumento inductivo veamos que  $|T_{n+1}|$  es arcoconexo. Por definición  $T_{n+1} = \overline{T_n \cup \{\tau\}}$  y existe  $\sigma \in T_n$  tal que  $P(|\sigma|) \cap P(|\tau|) \neq \emptyset$ . Sin pérdida de generalidad  $0 \in P(|\sigma|) \cap P(|\tau|)$ ,  $\sigma = \{v_1, \dots, v_m\}$ ,  $\tau = \{w_1, \dots, w_{m'}\}$  entonces

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = 0 = \sum_{j=1}^{m'} \mu_j w_j$$

para ciertos  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\mu_j \geq 0$  con  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 = \sum_{j=1}^{m'} \mu_j$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j |v_i - w_j|^2 &= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j |v_i|^2 - 2 \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i \cdot w_j) + \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j |w_j|^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i |v_i|^2 - 2 \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^{m'} \mu_j w_j \right) + \sum_{j=1}^{m'} \mu_j |w_j|^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i |v_i|^2 + \sum_{j=1}^{m'} \mu_j |w_j|^2 \end{aligned}$$

Como  $\text{diam}\{v_i, v_{i'}\} < 1$  para todo  $i, i'$  y  $\text{diam}\{w_j, w_{j'}\} < 1$  para todo  $j, j'$ , se sigue que

$$1 > \sum_{i,i'} \lambda_i \lambda_{i'} |v_i - v_{i'}|^2 = 2 \sum_{i=1}^m \lambda_i |v_i|^2$$

y de la misma manera

$$1 > \sum_{j,j'} \mu_j \mu_{j'} |w_j - w_{j'}|^2 = 2 \sum_{j=1}^{m'} \mu_j |w_j|^2$$

es decir,  $\sum_{i=1}^m \lambda_i |v_i|^2 < 1/2$  y  $\sum_{j=1}^{m'} \mu_j |w_j|^2 < 1/2$ . Luego se tiene que

$\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j |v_i - w_j|^2 < 1$  y en consecuencia al menos algún par de vértices cumple que  $|v_i - w_j| < 1$ , pues en caso contrario, es decir,  $|v_i - w_j| \geq 1$  para todo  $i, j$ , resulta

$$1 > \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j |v_i - w_j|^2 \geq \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = 1$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto, los símlices  $\sigma$  y  $\tau$  están conectados por una arista. Luego  $|T_{n+1}|$  resulta arcoconexo.

Dado que  $X$  es finito,  $\mathcal{R}(X)$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\{\tau \in \mathcal{R}(X) \setminus T_N : P(|\tau|) \cap P(|T_N|)\} = \emptyset$ . Como  $|T_N|$  es compacto,  $P(T_N)$  también lo es y, por lo tanto, es cerrado. Por el mismo argumento  $P(|\mathcal{R}(X) \setminus T_N|)$  es cerrado y por definición de  $N$  se sigue que  $P(|T_N|) \cap P(|\mathcal{R}(X) \setminus T_N|) = \emptyset$ . Luego  $P(|T_N|)^c = P(|\mathcal{R}(X) \setminus T_N|)$  es cerrado, es decir,  $P(|T_N|)$  es abierto, entonces es una componente arcoconexa de  $\mathcal{S}(X)$ . Como  $P(w) \in P(|T_N|)$ , se sigue que  $w \in |T_N|$  y finalmente  $v$  y  $w$  están en  $|T_N|$ , que es arcoconexo. Por lo tanto,  $\pi_0(P)$  es inyectiva.  $\square$

**Teorema 2.15.** *Si  $X \subset \mathbb{R}$  finito, entonces la función  $P : |\mathcal{R}(X)| \rightarrow \mathcal{S}(X)$  es una equivalencia homotópica.*

*Demostración.* Primero veamos que tanto  $|\mathcal{R}(X)|$  como  $\mathcal{S}(X)$  son homotópicamente equivalentes a un conjunto finito de puntos en  $\mathbb{R}$ . Por la Observación 2.7,

$$\mathcal{S}(X) = \bigcup_{\substack{v, w \in X \\ \text{diam}\{v, w\} < 1}} \text{conv}\{v, w\}$$

como cada componente arcoconexa es contráctil vale la afirmación para el shadow. Por otro lado consideramos el cubrimiento por abiertos  $\mathcal{U} = \{B(v, 1/2)\}_{v \in X}$  con  $B(v, 1/2) \subset \mathbb{R}$ . Se tiene que el nervio de  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ , y  $\mathcal{R}(X)$  tienen el mismo 1-esqueleto y, por lo tanto, son iguales. Pues ambos son completaciones flag de un grafo al ser el cubrimiento dado por conjuntos convexos.

Como la intersección de bolas es contráctil, por ser intersección de convexos, por el Teorema del Nervio [7] se sigue que  $\mathcal{N}(X)$  y, por lo tanto,  $\mathcal{R}(X)$ , tiene el tipo homotópico de la unión  $\cup_{v \in X} B(v, 1/2)$ . Como cada componente arcoconexa de la unión es contráctil, por ser un intervalo, se sigue que  $\mathcal{R}(X)$  tiene el tipo homotópico de un conjunto finito de puntos.

Dado que  $P : |\mathcal{R}(X)| \rightarrow \mathcal{S}(X)$  induce una biyección en las componentes arcoconexas, es una equivalencia homotópica.  $\square$

## 2.4. El isomorfismo en el $\pi_1$ en dimensión 2

Ahora exploraremos la relación entre el tipo homotópico del complejo Vietoris-Rips y su proyección en dimensión 2. La idea central es dotar a la proyección geométrica de una estructura combinatoria y relacionar su grupo de caminos por aristas con el del complejo Vietoris-Rips.

A diferencia de lo que sucede en dimensión 1, en dimensión 2 la proyección no es una equivalencia homotópica como observamos en el Ejemplo 2.5.

### 2.4.1. Un poco de geometría en el plano

Veamos los resultados necesarios para probar que la proyección  $P$  induce isomorfismos en los grupos fundamentales cuando  $X \subset \mathbb{R}^2$ . El objetivo central es describir a los lazos shadow que representan al elemento trivial de  $\pi_1(\mathcal{S}(X))$  y cómo estos afectan a la estructura del complejo de Vietoris-Rips.

**Lema 2.16.** *Sean  $X = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^2$  y  $w \in \mathbb{R}^2$  tales que  $\text{dist}(\text{conv}(X), w) < 1/2$  entonces  $\{w, v_i\} \in \mathcal{R}(w \cup X)$  para algún  $i \in \{1, 2, 3\}$ .*

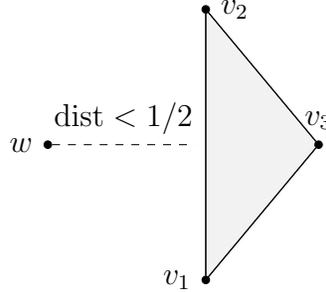


Figura 2.9: El punto  $w$  está a distancia menor que  $1/2$  del convexo generado por  $\{v_1, v_2, v_3\}$ .

*Demostración.* Si  $w \in \text{conv}(X)$ , por el Lema 2.13 se sigue que  $\{w, v\} \in \mathcal{R}(X)$  para todo  $v \in X$ . Si en cambio  $w \notin \text{conv}(X)$ , como se puede visualizar en la Figura 2.9, al ser  $\text{conv}(X)$  compacto existe  $y \in \text{conv}(X)$  tal que  $|wy| < 1/2$ , podemos suponer que  $y \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$ . Por otro lado, existe  $i \in \{1, 2\}$  tal que  $|v_i y| \leq 1/2$  entonces  $|xv_i| \leq |xy| + |yv_i| < 1/2 + 1/2 = 1$ . Por lo tanto,  $\{y, v_i\} \in \mathcal{R}(X)$ .  $\square$

**Proposición 2.17.** Sea  $X = \{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3\} \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\{v_1, v_2, v_3\}$  y  $\{w_1, w_2, w_3\} \in \mathcal{R}(X)$ ,  $\text{conv}\{v_1, v_2\} \cap \text{conv}\{w_1, w_2, w_3\} \neq \emptyset$ ,  $\text{conv}\{v_2, v_3\} \cap \text{conv}\{w_1, w_2, w_3\} = \emptyset$  y  $\text{conv}\{v_1, v_3\} \cap \text{conv}\{w_1, w_2, w_3\} = \emptyset$ . Entonces  $\mathcal{R}(X)$  es un cono.

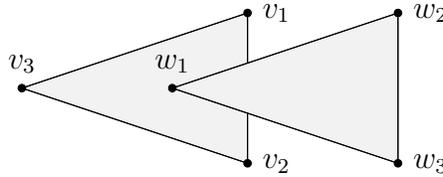


Figura 2.10: Intersección de dos triángulos.

*Demostración.* Veamos que  $w_i \in \text{conv}\{v_1, v_2, v_3\}$  para algún  $i$  como nos sugiere la Figura 2.10. Si  $v_1$  ó  $v_2 \in \text{conv}\{w_1, w_2, w_3\}$ , entonces  $\text{conv}\{v_1, v_3\}$  ó  $\text{conv}\{v_2, v_3\}$  interseca  $\text{conv}\{w_1, w_2, w_3\}$  respectivamente, lo cual es absurdo y, por lo tanto,  $v_1, v_2 \notin \text{conv}\{w_1, w_2, w_3\}$ . Podemos suponer además que  $w_i \notin \text{conv}\{v_1, v_2\}$  para todo  $i$ , pues en caso contrario este resultaría siendo el ápice. Por lo tanto,  $\text{conv}\{v_1, v_2\}$  es un segmento que interseca el triángulo  $\text{conv}\{w_1, w_2, w_3\}$ , sin pasar por los vértices y tiene sus extremos fuera del mismo. Por el Axioma de Pasch [6, Axiom 2] se sigue que el segmento interseca dos lados del triángulo, sin pérdida de generalidad  $\text{conv}\{w_1, w_2\}$  y  $\text{conv}\{w_1, w_3\}$ .

Consideramos  $L(t) = (w_2 - w_1)t + w_1$ , la recta que pasa por  $w_1$  y por  $w_2$ . Como  $\text{conv}\{w_1, w_2\} \cap \text{conv}\{v_1, v_2\} \neq \emptyset$ , existe  $0 < t' < 1$  tal que  $L(t') \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$ . Si

$L(t) = v_3$  para algún  $t \in \mathbb{R}$ , entonces  $t < 0$  ó  $t > 1$ , pues si no,  $\text{conv}\{w_1, w_2\}$  interseca  $\text{conv}\{v_1, v_3\}$  contradiciendo la hipótesis. Si  $t > 1$ ,  $w_2 \in L([t', t]) \subset \text{conv}\{v_1, v_2, v_3\}$  y, por lo tanto,  $w_2 \in \text{conv}\{v_1, v_2, v_3\}$ . Análogamente  $w_1 \in \text{conv}\{v_1, v_2, v_3\}$  si  $t < 0$ .

Si  $L$  no interseca  $v_3$  entonces  $L$  es una recta que no pasa por ningún vértice de  $\text{conv}\{v_1, v_2, v_3\}$  e interseca  $\text{conv}\{v_1, v_2\}$ , por Pasch resulta que  $L$  interseca otro lado del triángulo  $\text{conv}\{v_1, v_2, v_3\}$ , sin pérdida de generalidad  $\text{conv}\{v_2, v_3\}$ . Por lo tanto, existe  $t$  tal que  $L(t) \in \text{conv}\{v_2, v_3\}$ . Resulta que  $t < 0$  o  $t > 1$  pues en caso contrario  $\text{conv}\{v_2, v_3\}$  intersectaría  $\text{conv}\{w_1, w_2\}$  contradiciendo la hipótesis. Sin pérdida de generalidad  $t > 1$  y por convexidad resulta que  $w_2 \in L([t', t]) \subset \text{conv}\{v_1, v_2, v_3\}$ . Finalmente  $w_2$  es el ápice y, por lo tanto,  $\mathcal{R}(X)$  es un cono.  $\square$

**Proposición 2.18.** *Sea  $X = \{v_1, v_2, w_1, w_2, t_1, t_2, t_3\} \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\{v_1, v_2\}$ ,  $\{w_1, w_2\}$  y  $\{t_1, t_2, t_3\} \in \mathcal{R}(X)$  y  $\text{conv}\{v_1, v_2\} \cap \text{conv}\{w_1, w_2\} \cap \text{conv}\{t_1, t_2, t_3\} \neq \emptyset$ . Entonces  $\mathcal{R}(X)$  es simplemente conexo.*

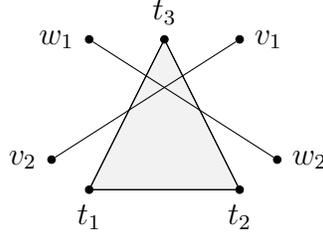


Figura 2.11: Intersección de dos rectas y un triángulo.

*Demostración.* La situación geométrica que estamos teniendo en cuenta se puede visualizar en la Figura 2.11. Sea  $\gamma$  un ciclo no contráctil en  $\mathcal{R}(X)$  y minimal en longitud con esa propiedad, es decir, si  $\beta$  es otro ciclo no contráctil entonces  $|\gamma| \leq |\beta|$ . Notemos que el minimal se toma sobre todos los puntos base posibles.

Como  $\mathcal{R}(X)$  es una completación flag,  $\gamma$  recorre al menos cuatro aristas. Pues si recorre tres o menos, por ejemplo  $\{u_1, u_2\}$ ,  $\{u_2, u_3\}$ ,  $\{u_3, u_1\}$ , como  $\{u_1, u_2, u_3\} \in \mathcal{R}(X)$ , y, por lo tanto,  $\gamma$  es equivalente al elemento trivial.

Más aún  $\gamma$  visita al menos un vértice de cada uno de los símplexes  $\{v_1, v_2\}$ ,  $\{w_1, w_2\}$  y  $\{t_1, t_2, t_3\}$ . Pues vía las Proposiciones 2.11 y 2.12 cualquier par de estos símplexes forma un cono.

Por minimalidad  $\gamma$  recorre sólo una arista de  $\{t_1, t_2, t_3\}$  pues si visita dos, sin pérdida de generalidad  $(t_1, t_2)$  y  $(t_2, t_3)$  ó  $(t_1, t_2)$  y  $(t_1, t_3)$ :

- Si  $\gamma$  recorre las aristas orientadas  $(t_1, t_2)$  y  $(t_1, t_3)$  se puede expresar como  $(t_1, t_2)\gamma_1(t_1, t_3)\gamma_2$ . Tanto  $(t_1, t_2)\gamma_1$  como  $(t_1, t_3)\gamma_2$  son ciclos en  $t_1$  estrictamente más cortos que  $\gamma$  y, por lo tanto, resultan equivalentes al elemento trivial. Consecuentemente  $\gamma$  también.

- Si  $\gamma$  recorre las aristas orientadas  $(t_1, t_2)$  y  $(t_3, t_1)$  se puede expresar como  $(t_1, t_2)\gamma_1(t_3, t_1)\gamma_2$ . Como  $\gamma_2$  es un ciclo en  $t_1$  estrictamente más chico que  $\gamma$ , resulta trivial. Permutando la última arista obtenemos que  $(t_1, t_2)\gamma_1(t_3, t_1)$  es contráctil si y sólo si  $(t_3, t_1)(t_1, t_2)\gamma_1$  lo es. Este último es equivalente a  $(t_3, t_2)\gamma_1$ , que por la minimalidad de  $\gamma$  resulta ser contráctil. Por lo tanto,  $\gamma$  lo es.

Los análisis usando las aristas restantes son análogos. Veamos que podemos asumir que  $\gamma$  recorre los vértices en el orden  $v_1(v_2)w_1(w_2)t_1(t_2)$ , donde  $()$  representa un vértice opcional.

Notemos que  $\gamma$  puede visitar como mucho seis vértices. Si visita un vértice dos veces, da lugar a un ciclo de longitud estrictamente menor. Por otro lado, como mucho recorre dos vértices del simplex  $\{t_1, t_2, t_3\}$ .

En principio  $\gamma$  visita al menos un vértice de los simplices  $\{v_1, v_2\}$ ,  $\{w_1, w_2\}$  y  $\{t_1, t_2, t_3\}$ . Sin pérdida de generalidad recorre  $v_1, w_1$  y  $t_1$  y, por lo tanto, tiene la forma  $\gamma = \gamma_{v_1, w_1}\gamma_{w_1, t_1}\gamma_{t_1, v_1}$  donde  $\gamma_{v, w}$  es un camino desde  $v$  hasta  $w$ , si no permutando las aristas se obtiene la misma forma.

- Si  $\gamma_{w_1, t_1}$  pasa por el vértice  $v_2$

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_{v_1, w_1}\gamma_{w_1, v_2}\gamma_{v_2, t_1}\gamma_{t_1, v_1} \\ &\simeq (v_1, v_2)(v_2, v_1)\gamma_{v_1, w_1}\gamma_{w_1, v_2}\gamma_{v_2, t_1}\gamma_{t_1, v_1} \\ &\simeq (v_1, v_2)\gamma_{v_2, t_1}\gamma_{t_1, v_1} \text{ pues } (v_2, v_1)\gamma_{v_1, w_1}\gamma_{w_1, v_2} \text{ es un ciclo más chico que } \gamma \\ &\simeq (v_1, v_1)\end{aligned}$$

Donde la última equivalencia vale pues  $(v_1, v_2)\gamma_{v_2, t_1}\gamma_{t_1, v_1}$  es un ciclo más chico que  $\gamma$ . Por lo tanto,  $\gamma$  resulta contráctil.

- Si  $\gamma_{t_1, v_1}$  pasa por el vértice  $v_2$

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_{v_1, w_1}\gamma_{w_1, t_1}\gamma_{t_1, v_2}\gamma_{v_2, v_1} \\ &= \gamma_{v_1, w_1}\gamma_{w_1, t_1}\gamma_{t_1, v_2}(v_2, v_1) \text{ pues existe la arista } (v_2, v_1)\end{aligned}$$

Este ciclo resulta contráctil si y sólo si  $(v_2, v_1)\gamma_{v_1, w_1}\gamma_{w_1, t_1}\gamma_{t_1, v_2}$  y este caso se cubre en el ítem anterior cambiando los roles de  $v_1$  y de  $v_2$ .

- El razonamiento para la arista  $\{w_1, w_2\}$  es análogo al de la arista  $\{v_1, v_2\}$ .
- Si  $\gamma_{v_1, w_1}$  pasa por  $t_2$

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_{v_1, t_2}(t_2, t_1)(t_1, t_2)\gamma_{t_1, w_1}\gamma_{w_1, t_1}\gamma_{t_1, v_1} \\ &\simeq \gamma_{v_1, t_2}(t_2, t_1)\gamma_{t_1, v_1} \text{ pues } (t_1, t_2)\gamma_{t_2, w_1}\gamma_{w_1, t_1} \text{ es un ciclo de longitud menor que } \gamma \\ &\simeq (v_1, v_1)\end{aligned}$$

La última equivalencia vale pues  $\gamma_{v_1, t_2}(t_2, t_1)\gamma_{t_1, v_1}$  es un ciclo de longitud menor que  $\gamma$  y, por lo tanto, contráctil. Luego  $\gamma$  lo es.

- Si  $\gamma_{w_1, t_1}$  pasa por  $t_2$  se cambian los roles de  $t_1$  y  $t_2$ .

Veamos que no puede haber subcaminos  $(v_1, v_2)(v_2, w_1)(w_1, w_2)$ ,  $(w_1, w_2)(w_2, t_1)(t_1, t_2)$  ni  $(t_1, t_2)(t_2, v_1)(v_1, v_2)$ . Por la Proposición 2.11 el camino  $(v_1, v_2)(v_2, w_1)(w_1, w_2)$  está en el cono  $\mathcal{R}(\{v_1, v_2, w_1, w_2\})$  entonces es equivalente a un camino de dos aristas allí y, por lo tanto, en  $\mathcal{R}(X)$ . Por minimalidad de  $\gamma$  esto no puede suceder. Por otro lado, vía la Proposición 2.12 resulta que los caminos  $(w_1, w_2)(w_2, t_1)(t_1, t_2)$  y  $(t_1, t_2)(t_2, v_1)(v_1, v_2)$  están en los conos  $\mathcal{R}(\{w_1, w_2, t_1, t_2, t_3\})$  y  $\mathcal{R}(\{v_1, v_2, t_1, t_2, t_3\})$  respectivamente, entonces cada uno es equivalente a un camino de dos aristas allí y, por lo tanto, en  $\mathcal{R}(X)$ . Por la minimalidad de  $\gamma$  esto no puede suceder.

La afirmación anterior implica que hay exactamente una letra extra. Por lo tanto, los casos restantes a verificar son  $(v_1, w_1)(w_1, t_1)(t_1, t_2)(t_2, v_1)$ ,  $(v_1, v_2)(v_2, w_1)(w_1, t_1)(t_1, v_1)$  y  $(v_1, w_1)(w_1, w_2)(w_2, t_1)(t_1, v_1)$ .

**Caso 1:**  $\gamma = (v_1, w_1)(w_1, t_1)(t_1, t_2)(t_2, v_1)$ . Si  $\text{conv}\{v_1, w_1\} \cap \text{conv}\{t_1, t_2, t_3\} \neq \emptyset$ , por la Proposición 2.12 el complejo  $\mathcal{R}(\{v_1, w_1, t_1, t_2, t_3\})$  resulta ser un cono. Con lo cual el ciclo  $(v_1, w_1)(w_1, t_1)(t_1, t_2)(t_1, v_1)$  es contráctil. Por lo tanto, podemos suponer que  $\text{conv}\{v_1, w_1\} \cap \text{conv}\{t_1, t_2, t_3\} = \emptyset$ .

Como  $\text{conv}\{v_1, v_2\} \cap \text{conv}\{w_1, w_2\} \neq \emptyset$  resulta que  $\{v_2, w_1\}$  ó  $\{v_1, w_2\} \in \mathcal{R}(X)$ , pues alguno es un ápice. Sin pérdida de generalidad  $\{v_2, w_1\} \in \mathcal{R}(X)$  y, por lo tanto,  $\{v_1, v_2, w_1\} \in \mathcal{R}(X)$ .

Si  $\text{conv}\{v_2, w_1\} \cap \text{conv}\{t_1, t_2, t_3\} = \emptyset$ , por la Proposición 2.17 el complejo  $\mathcal{R}(\{v_1, v_2, w_1, t_1, t_2, t_3\})$  resulta ser un cono y en consecuencia  $(v_1, w_1)(w_1, t_1)(t_1, t_2)(t_2, v_1)$  es contráctil. Por lo tanto, podemos suponer que  $\text{conv}\{v_2, w_1\} \cap \text{conv}\{t_1, t_2, t_3\} \neq \emptyset$ .

Como  $\text{conv}\{v_2, w_1\} \cap \text{conv}\{t_1, t_2, t_3\} \neq \emptyset$ , por la Proposición 2.12 tanto  $\mathcal{R}(\{v_1, v_2, t_1, t_2, t_3\})$  como  $\mathcal{R}(\{v_2, w_1, t_1, t_2, t_3\})$  resultan ser conos. Si  $\{v_2, t_i\} \in \mathcal{R}(X)$  para algún  $i \in \{1, 2, 3\}$ , entonces  $(v_1, w_1)(w_1, t_1)(t_1, t_2)(t_2, v_1)$  es equivalente a la concatenación de dos ciclos, cada uno contenido en los conos  $\mathcal{R}(\{v_1, v_2, t_1, t_2, t_3\})$  y  $\mathcal{R}(\{v_2, w_1, t_1, t_2, t_3\})$ , por ejemplo si  $\{v_2, t_1\} \in \mathcal{R}(X)$  entonces

$$\begin{aligned} (v_1 w_1)(w_1 t_1)(t_1 t_2)(t_2 v_1) &\simeq (v_1, v_2)(v_2, w_1)(w_1, v_2)(v_2, t_1)(t_1, t_2)(t_2, v_1) \\ &\simeq (v_1, v_2)(v_2, t_1)(t_1, t_2)(t_2, v_1) \in \mathcal{R}(\{v_1, v_2, t_1, t_2\}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos asumir que  $v_2$  no es ápice. A partir de esto el ápice de  $\mathcal{R}(\{v_1, v_2, t_1, t_2, t_3\})$  es  $v_1$ . En particular  $\{v_1, t_1\} \in \mathcal{R}(X)$  y  $\gamma$  resulta contráctil pues

$$\begin{aligned} (v_1, w_1)(w_1, t_1)(t_1, t_2)(t_2, v_1) &\simeq (v_1, t_1)(t_1, w_1)(w_1, t_1)(t_1, t_2)(t_2, v_1) \\ &\simeq (v_1, t_1)(t_1, t_2)(t_2, v_1) \simeq (v_1, v_1) \end{aligned}$$

**Caso 2:**  $\gamma = (v_1, v_2)(v_2, w_1)(w_1, t_1)(t_1, v_1)$ . Si  $\{v_1, w_1\}$  ó  $\{v_2, t_1\} \in \mathcal{R}(X)$  entonces  $(v_1, v_2)(v_2, w_1)(w_1, t_1)(t_1, v_1)$  resulta contráctil pues  $(v_1, v_2)(v_2, w_1)(w_1, t_1)(t_1, v_1) \simeq$

$(v_1, w_1)(w_1, t_1)(t_1, v_1) \simeq (v_1, v_1)$  ó  $(v_1, v_2)(v_2, w_1)(w_1, t_1)(t_1, v_1) \simeq (v_1, v_2)(v_2, t_1)(t_1, v_1) \simeq (v_1, v_1)$  respectivamente.

Por otro lado, si  $\{v_2, t_2\}$  ó  $\{v_2, t_3\} \in \mathcal{R}(X)$  entonces  $(v_1, v_2)(v_2, w_1)(w_1, t_1)(t_1, v_1)$  se reduce a la concatenación de dos ciclos, ambos contráctiles. Pues si  $\{v_2, t_2\} \in \mathcal{R}(X)$

$$\begin{aligned} (v_1, v_2)(v_2, w_1)(w_1, t_1)(t_1, v_1) &\simeq (v_1, v_2)(v_2, w_1)(w_1, t_1)(t_1, t_2)(t_2, t_1)(t_1, v_1) \\ &\simeq (v_1, v_2)(v_2, w_1)(w_1, t_1)(t_1, t_2)(t_2, v_2)(v_2, t_2)(t_2, t_1)(t_1, v_1) \end{aligned}$$

intercambiando la primera arista con la última obtenemos que este ciclo es contráctil si y sólo si  $(v_2, w_1)(w_1, t_1)(t_1, t_2)(t_2, v_2)(v_2, t_2)(t_2, t_1)(t_1, v_1)(v_1, v_2)$  lo es. Este ciclo se puede escribir como concatenación de  $(v_2, w_1)(w_1, t_1)(t_1, t_2)(t_2, v_2)$  y de  $(v_2, t_2)(t_2, t_1)(t_1, v_1)(v_1, v_2)$ , como  $\mathcal{R}(\{v_2, w_1, t_1, t_2, t_3\})$  y  $\mathcal{R}(\{v_1, v_2, t_1, t_2, t_3\})$  son conos, ambas partes del ciclo son contráctiles, luego  $\gamma$  lo es.

Podemos asumir que  $\{v_1, w_1\}, \{v_2, t_1\}, \{v_2, t_2\}, \{v_2, t_3\} \notin \mathcal{R}(X)$ . Sea  $x \in \text{conv}\{v_1, v_2\} \cap \text{conv}\{w_1, w_2\} \cap \text{conv}\{t_1, t_2, t_3\}$ , por el Lema 2.16 resulta que  $|v_2x| > 1/2$  entonces  $|v_1x| = |v_1v_2| - |v_2x| < 1/2$ . Por otro lado,  $1 \leq |v_1w_1| \leq |v_1x| + |xw_1| < 1/2 + |w_1x|$ , entonces  $1/2 < |w_1x|$  y de donde resulta  $|w_2x| = |w_2w_1| - |w_1x| < 1/2$  y  $|v_1w_2| \leq |v_1x| + |xw_2| < 1$ . Por lo tanto,  $\{v_1, w_2\} \in \mathcal{R}(X)$ . Por lo cual  $\mathcal{R}(X)$  contiene al ciclo  $(v_1, w_2)(w_2, w_1)(w_1, t_1)(t_1, v_1)$  y este ciclo es equivalente a  $(v_1, v_2)(v_2, w_1)(w_1, t_1)(t_1, v_1)$  ya que al ser  $\mathcal{R}(\{v_1, v_2, w_1, w_2\})$  un cono,  $(v_1, v_2)(v_2, w_1)$  y  $(v_1, w_2)(w_2, w_1)$  son equivalentes.

Por el Lema 2.16 se sigue que  $\{w_2, t_i\} \in \mathcal{R}(X)$  para algún  $i \in \{1, 2, 3\}$ , entonces  $(v_1, w_2)(w_2, w_1)(w_1, t_1)(t_1, v_1)$  es contráctil, y en consecuencia  $\gamma$  lo es.

**Caso 3:**  $\gamma = (v_1, w_1)(w_1, w_2)(w_2, t_1)(t_1, v_1)$ . Es análogo al Caso 2. □

## 2.4.2. Estructura combinatoria del shadow y levantar caminos

Estudiamos la estructura de complejo de celdas convexas de  $\mathcal{S}(X)$  y vemos como levantar caminos de aristas de  $\mathcal{S}(X)$  a  $\mathcal{R}(X)$ , para así conseguir la inversa de  $P_* : \mathcal{E}(\mathcal{R}(X), v_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{S}(X), v_0)$ .

Sea  $X \subset \mathbb{R}^2$  finito, equipamos a  $\mathcal{S}(X)$  con la siguiente estructura combinatoria.

- Un elemento  $v \in \mathcal{S}(X)$  es un vértice shadow si  $v \in X$  ó existen  $\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\} \in \mathcal{R}(X)$  tal que  $v = \text{conv}\{a_1, a_2\} \cap \text{conv}\{b_1, b_2\}$ . Notamos  $\mathcal{S}^0(X)$  al conjunto de los vértices shadow.
- Un par de vértices  $a_1, a_2 \in \mathcal{S}^0(X)$  definen una *arista shadow* si  $\text{conv}\{a_1, a_2\}$  es la clausura de una componente de  $P(|\mathcal{R}^1(X)|) \setminus \mathcal{S}^0(X)$ . Por lo tanto, la función característica de una 1-celda  $f_{a_1, a_2} : D^1 \rightarrow \mathcal{S}(X)$  es  $f_{a_1, a_2}(t) = (1-t)a_1 + ta_2$ . Notamos  $\mathcal{S}^1(X)$  a la unión de los vertices shadow y las aristas shadow.

- Un conjunto de vértices  $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathcal{S}^0(X)$  define una *cara shadow* si el convexo  $\text{conv}\{a_1, \dots, a_n\}$  es la clausura de una componente de  $P(|\mathcal{R}^2(X)|) \setminus \mathcal{S}^1(X)$ . Si  $a_1, \dots, a_n$  aparecen en ese orden en el borde de la cara shadow, entonces la función característica de una 2-celda es  $f_{a_1, \dots, a_n} : D^2 \rightarrow \mathcal{S}(X)$  es el push-out de la función de adjunción  $g_{a_1, \dots, a_n} : S^1 \rightarrow \mathcal{S}(X)$  dada por

$$g_{a_1, \dots, a_n}(t) = a_i(i - nt) + a_{i+1}(1 - i + nt) \text{ si } (i - 1)/n \leq t \leq i/n$$

donde  $a_{n+1} = a_1$ . Notamos  $\mathcal{S}^2(X)$  a la unión de caras shadow y  $\mathcal{S}^1(X)$ .

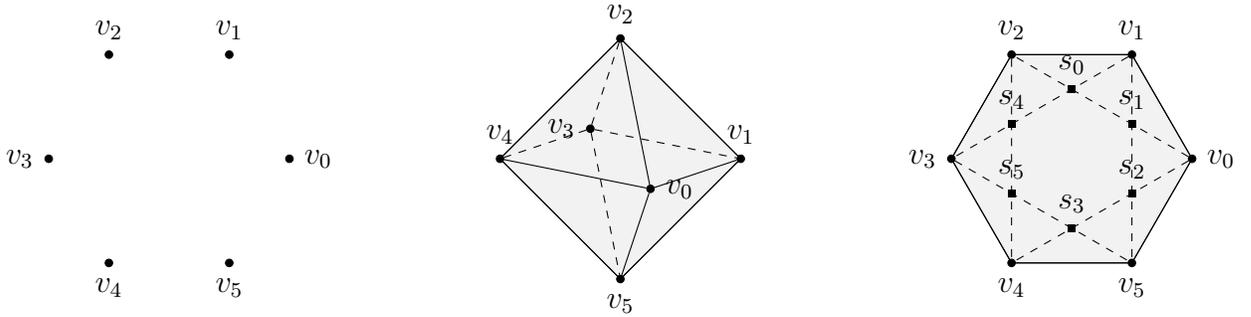


Figura 2.12: De izquierda a derecha:  $X \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{R}(X)$  y  $\mathcal{S}(X)$ .

**Ejemplo 2.19.** Sea  $X$  el conjunto de puntos del Ejemplo 2.5. En la Figura 2.12 representamos el conjunto de puntos  $X$ , el complejo de Vietoris-Rips  $\mathcal{R}(X)$  y el complejo shadow  $\mathcal{S}(X)$  junto con la estructura combinatoria. Notemos que el conjunto de vértices de  $\mathcal{R}(X)$  tiene seis elementos,  $\mathcal{R}^0(X) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ , mientras que el conjunto de vértices shadow tiene doce elementos,  $\mathcal{S}^0(X) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ . Así mismo  $\mathcal{S}(X)$  tiene 24 aristas shadow mientras que  $\mathcal{R}(X)$  tiene 12 y hay 13 caras shadow pero sólo 8 2-símplices en  $\mathcal{R}(X)$ . Más aún la cara shadow  $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$  no es un 2-símplice.

Observemos que  $\mathcal{S}^1(X)$  es un grafo y, por lo tanto, están definidos los caminos por aristas shadow, que notaremos  $(s_1, s_2)(s_2, s_3) \dots (s_{n-1}, s_n)$  donde  $(s_i, s_{i+1})$  es una arista shadow. Reservaremos las letras  $v, w, v_i, w_i$  para vértices del complejo de Vietoris-Rips y  $s, s_i$  para vértices del shadow.

**Definición 2.20.** Sea  $X \subset \mathbb{R}^2$  finito y  $\xi$  un camino por aristas en  $\mathcal{S}^1(X)$ ,  $\xi = (s_1, s_2)(s_2, s_3) \dots (s_n, s_{n+1})$ . Consideramos  $\{(v_i, w_i)\}_{i=1}^n \subset \mathcal{R}(X)$  una familia de aristas orientadas tales que valga la inclusión  $\text{conv}\{s_i, s_{i+1}\} \subset \text{conv}\{v_i, w_i\}$  y las semirectas  $\overrightarrow{s_i s_{i+1}}, \overrightarrow{v_i w_i}$  tienen la misma orientación para todo  $i = 1, \dots, n$ . Definimos el *levantado de  $\xi$  relativo a la familia de aristas  $\{(v_i, w_i)\}_{i=1}^n$*  como

$$(v_1, w_1)\gamma_{w_1, v_2}(v_2, w_2)\gamma_{w_2, v_3} \dots (v_n, w_n) \quad (2.2)$$

donde  $\gamma_{w_i, v_{i+1}}$  es un camino desde  $w_i$  hasta  $v_{i+1}$  en  $\mathcal{R}(\{v_i, w_i, v_{i+1}, w_{i+1}\})$ , existe pues este complejo es un cono.

**Lema 2.21.** Sea  $X \subset \mathbb{R}^2$  finito y  $\xi$  camino por aristas en  $\mathcal{S}^1(X)$ ,  $\xi = (s_1, s_2)(s_2, s_3) \dots (s_n, s_{n+1})$ , y  $\{(v_i, w_i)\}_{i=1}^n, \{(v'_i, w'_i)\}_{i=1}^n$  dos familias de aristas en  $\mathcal{R}(X)$  tales que  $\text{conv}\{s_i, s_{i+1}\} \subset \text{conv}\{v_i, w_i\} \cap \text{conv}\{v'_i, w'_i\}$  y las semirectas  $\overrightarrow{s_i s_{i+1}}, \overrightarrow{v_i w_i}, \overrightarrow{v'_i w'_i}$  tienen la misma orientación para todo  $i = 1, \dots, n$ . Si  $v_1 = v'_1$  y  $w_n = w'_n$  entonces los levantados relativos  $(v_1, w'_1)\gamma'_{v'_1, w'_2}(v'_2, w'_2)\gamma'_{v'_2, w'_3} \dots (v'_n, w'_n)$  y  $(v_1, w_1)\gamma_{w_1, v_2}(v_2, w_2)\gamma_{w_2, v_3} \dots (v_n, w_n)$  son equivalentes en  $\mathcal{R}(X)$ .

*Demostración. Caso 1:*  $v_i = v'_i$  y  $w_i = w'_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Como el complejo  $\mathcal{R}(\{v_i, w_i, v_{i+1}, w_{i+1}\})$  es un cono,  $\gamma_{w_i, v_{i+1}} \simeq \gamma'_{w'_i, v'_{i+1}}$  allí y, por lo tanto, en  $\mathcal{R}(X)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Luego ambos levantados son equivalentes.

**Caso 2:** existe un único  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $(v_i, w_i) \neq (v'_i, w'_i)$ . Consideramos  $L(t) = (w_i - v_i)t + v_i$  la recta que pasa por  $v_i$  y  $w_i$ . Como  $\text{conv}\{s_i, s_{i+1}\} \subset \text{conv}\{v_i, w_i\} \cap \text{conv}\{v'_i, w'_i\}$ ,  $L$  pasa por  $v'_i$  y  $w'_i$ .

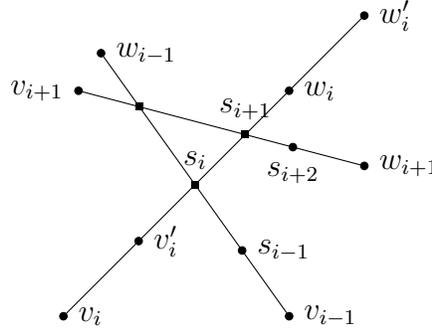


Figura 2.13: Configuración de vértices con  $\text{conv}\{s_i, s_{i+1}\} \subset \text{conv}\{v_i, w_i\} \cap \text{conv}\{v'_i, w'_i\}$ .

Como  $\text{conv}\{s_i, s_{i+1}\} \subset \text{conv}\{v_i, w_i\}$ , existe  $0 < t' < 1$  tal que  $L(t') \in \text{conv}\{s_i, s_{i+1}\}$ . Sin pérdida de generalidad existe  $0 \leq t_1 \leq t'$  tal que  $L(t_1) = v'_i$ , si no cambio los roles de las aristas. Resulta que  $|v_i - v'_i| = |w_i - v_i|t_1 < 1$  y, por lo tanto,  $\{v_i, v'_i\} \in \mathcal{R}(X)$ . Más aún como  $|w_i - v'_i| \leq |w_i - v_i||1 - t_1| < 1$  resulta que  $\{w_i, v'_i\} \in \mathcal{R}(X)$ , como se puede visualizar en la Figura 2.13.

Por otro lado, existe  $t_2 \geq t'$  tal que  $L(t_2) = w'_i$ . Si  $t_2 \leq 1$  entonces  $|w_i - w'_i| = |w_i - v_i||1 - t_2| < 1$  resultando que  $\{w_i, w'_i\} \in \mathcal{R}(X)$ . En cambio si  $1 < t_2$  entonces  $|w_i - w'_i| \leq |w_i - v_i||t_2 - 1| \leq |w_i - v_i||t_2 - t_1| = |w'_i - v'_i| < 1$  resultando que  $\{w_i, w'_i\} \in \mathcal{R}$ .

Vía la Proposición 2.18 los complejos  $\mathcal{R}(\{v_{i-1}, w_{i-1}, v_i, w_i, v'_i, w'_i\})$  y  $\mathcal{R}(\{v_i, w_i, v'_i, w'_i, v_{i+1}, w_{i+1}\})$  son simplemente conexos. Por lo tanto,

$$(v_i, w_i)\gamma_{w_i, v_{i+1}}(v_{i+1}, w_{i+1}) \simeq (v_i, v'_i)(v'_i, w'_i)\gamma_{w'_i, v'_{i+1}}(v_{i+1}, w_{i+1})$$

en  $\mathcal{R}(\{v_i, w_i, v'_i, w'_i, v_{i+1}, w_{i+1}\})$  y, por lo tanto, en  $\mathcal{R}(X)$ . Análogamente

$$(v_{i-1}, w_{i-1})\gamma_{w_{i-1}, v_i}(v_i, w_i) \simeq (v_{i-1}, w_{i-1})\gamma_{w_{i-1}, v'_i}(v'_i, w'_i)(w'_i, w_i)$$

en  $\mathcal{R}(\{v_{i-1}, w_{i-1}, v_i, w_i, v'_i, w'_i\})$  y, por lo tanto, en  $\mathcal{R}(X)$ .

Luego se tiene que

$$\begin{aligned} & (v_{i-1}, w_{i-1})\gamma_{w_{i-1}, v_i}(v_i, w_i)\gamma_{w_i, v_{i+1}}(v_{i+1}, w_{i+1}) \\ & \simeq (v_{i-1}, w_{i-1})\gamma_{w_{i-1}, v_i}(v_i, w_i)(w_i, v_i)(v_i, w_i)\gamma_{w_i, v_{i+1}}(v_{i+1}, w_{i+1}) \\ & \simeq (v_{i-1}, w_{i-1})\gamma_{w_{i-1}, v'_i}(v'_i, w'_i)(w'_i, w_i)(w_i, v_i)(v_i, v'_i)(v'_i, w'_i)\gamma_{w'_i, v_{i+1}}(v_{i+1}, w_{i+1}) \\ & \simeq (v_{i-1}, w_{i-1})\gamma_{w_{i-1}, v'_i}(v'_i, w'_i)\gamma_{w'_i, v_{i+1}}(v_{i+1}, w_{i+1}) \end{aligned}$$

en  $\mathcal{R}(X)$ , donde la última equivalencia es válida pues  $\mathcal{R}(\{v_i, w_i, v'_i, w'_i\})$  es un cono, entonces  $(v'_i, w'_i)(w'_i, w_i)(w_i, v_i)(v_i, v'_i)(v'_i, w'_i) \simeq (v'_i, v'_i)$ . Por lo tanto, ambos levantados resultan equivalentes.

**Caso 3:** las familias de aristas difieren en más de una arista. Como la relación de equivalencia de caminos por aristas es transitiva modificando de a una arista a la vez obtenemos la conclusión.  $\square$

**Notación 2.22.** Dado  $\xi$  camino por aristas en  $\mathcal{S}^1(X)$ , notamos  $\hat{\xi}$  al levantado de  $\xi$  respecto a alguna familia de aristas. Por el Lema 2.21,  $\hat{\xi}$  está bien definido salvo equivalencia fijado los vértices inicial y final.

**Lema 2.23.** Sean  $X \subset \mathbb{R}^2$  finito,  $\xi$  y  $\xi'$  dos caminos por aristas en  $\mathcal{S}^1(X)$  simplemente equivalentes en  $\mathcal{S}^1(X)$ . Si  $\hat{\xi}$  y  $\hat{\xi}'$  cumplen  $\text{origen}(\hat{\xi}) = \text{origen}(\hat{\xi}')$  y  $\text{fin}(\hat{\xi}) = \text{fin}(\hat{\xi}')$ , entonces  $\hat{\xi} \simeq \hat{\xi}'$  en  $\mathcal{R}(X)$ .

*Demostración.* Sean  $\xi_1, \xi_2$  caminos por aristas en  $\mathcal{S}^1(X)$  y  $(s, s') \in \mathcal{S}^1(X)$  tales que  $\{\xi, \xi'\} = \{\xi_1\xi_2, \xi_1(s, s')(s', s)\xi_2\}$ .

Consideramos  $\{(v_i, w_i)\}_{i=1}^n, \{(v'_i, w'_i)\}_{i=1}^{n'}$ ,  $(v, w)$  aristas en  $\mathcal{R}(X)$  cuyas proyecciones cubren  $\xi_1, \xi_2$  y  $(s, s')$  respectivamente con las orientaciones correspondientes. Por definición se sigue que

$$\begin{aligned} (\xi_1(s, s')(s', s)\xi_2)^\wedge & \simeq (v_1, w_1) \dots (v_n, w_n)\gamma_{w_n, v}(v, w)\gamma_{w, v}\gamma_{v, v'_1}(v'_1, w'_1) \dots (v'_{n'}, w'_{n'}) \\ & \simeq (v_1, w_1) \dots (v_n, w_n)\gamma_{w_n, v}\gamma_{v, v'_1}(v'_1, w'_1) \dots (v'_{n'}, w'_{n'}) \\ & \simeq (v_1, w_1) \dots (v_n, w_n)\gamma_{w_n, v'_1}(v'_1, w'_1) \dots (v'_{n'}, w'_{n'}) \end{aligned}$$

donde la última equivalencia es válida pues  $\gamma_{w_n, v}\gamma_{v, v'_1}$  es un camino en  $\mathcal{R}(\{v_n, w_n, v, w, v'_1, w'_1\})$  que es simplemente conexo, por la Proposición 2.18. Por lo tanto, todo par de caminos cuyos vértices inicial y final coincidan son equivalentes allí y

en consecuencia en  $\mathcal{R}(X)$ . Tomamos  $\gamma_{w_n, v'_1}$  camino de  $w_n$  a  $v'_1$  en  $\mathcal{R}(\{v_n, w_n, v'_1, w'_1\})$ , existe pues este es un cono. Además, este último camino es equivalente a  $\xi_1 \hat{\xi}_2$  y, por lo tanto, vale la proposición.  $\square$

**Notación 2.24.** Sea  $X \subset \mathbb{R}^2$  finito y  $\xi$  camino por aristas en  $S^1(X)$ , notamos  $[\xi]^\wedge$  al levantado de la clase de  $\xi$  en  $\mathcal{S}^1(X)$ . Por el lema anterior,  $[\xi]^\wedge$  está bien definido salvo equivalencias fijados los vértices inicial y final.

**Lema 2.25.** Sea  $X = \{v_1, w_1, v_2, w_2\} \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\{s_1, s_2\}, \{s_2, s_3\} \in \mathcal{S}(X)$ ,  $\{v_1, w_1\}, \{v_2, w_2\} \in \mathcal{R}(X)$ ,  $\text{conv}\{s_i, s_{i+1}\} \subset \text{conv}\{v_i, w_i\}$  y las semirectas  $\overrightarrow{s_i s_{i+1}}, \overrightarrow{v_i w_i}$  tienen igual orientación para  $i = 1, 2$ . Entonces

$$P_*([\widehat{(s_1, s_2)(s_2, s_3)}]) = [v_1 w_1 * w_1 s_2 * s_2 v_2 * v_2 w_2] \in \text{hom}_{\Pi_1(\mathcal{S}(X))}(v_1, w_2)$$

donde  $[\widehat{(s_1, s_2)(s_2, s_3)}]$  se considera empezando en  $v_1$  y con fin en  $w_2$ .

*Demostración.* Dado que  $\text{conv}\{v_1, w_1\} \cap \text{conv}\{v_2, w_2\} \neq \emptyset$  por la Proposición 2.11 se sigue que  $\{w_1, v_2\}$  ó  $\{v_1, w_2\} \in \mathcal{R}(X)$ , pues alguno es un ápice.

**Caso 1:  $w_1$  ó  $v_2$  es ápice.** Por el Lema 2.21 la sucesión encadenante es el camino  $(v_1, w_1)(w_1, v_2)(v_2, w_2)$ , salvo equivalencia en  $\mathcal{R}(X)$ . Pues  $(v_1, w_1)$  y  $(v_2, w_2)$  son aristas en  $\mathcal{R}(X)$  orientadas inducidas por las aristas  $(s_1, s_2)$  y  $(s_2, s_3)$ . Así mismo es un camino de  $v_1$  a  $w_2$  en  $\mathcal{R}(X)$  que empieza con la arista  $(v_1, w_1)$  y termina con  $(v_2, w_2)$ .

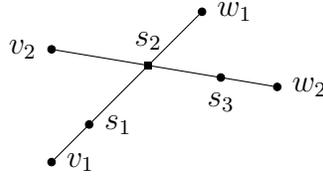


Figura 2.14: Aristas  $(v_1, w_1)$  y  $(v_2, w_2) \in \mathcal{R}(X)$  orientadas inducidas por las aristas  $(s_1, s_2)$  y  $(s_2, s_3) \in \mathcal{S}(X)$ .

Luego  $P_*([\widehat{(v_1, w_1)(w_1, v_2)(v_2, w_2)}]) = [v_1 w_1 * w_1 v_2 * v_2 w_2]$ . Como  $v_2$  o  $w_1$  es ápice,  $\{v_1, w_1, v_2\}$  ó  $\{v_2, w_2, w_1\} \in \mathcal{R}(X)$ . Como  $\text{conv}\{w_1, v_2, s_2\} \subset \text{conv}\{v_1, w_1, v_2\} \cap \text{conv}\{w_1, v_2, w_2\}$  se sigue que  $\text{conv}\{w_1, v_2, s_1\} \subset P(\mathcal{R}(X))$ . Esto da lugar a que

$$\begin{aligned} v_1 w_1 * w_1 v_2 * v_2 w_2 &\simeq v_1 s_2 * s_2 w_1 * w_1 v_2 * v_2 s_2 * s_2 w_2 \simeq v_1 s_2 * s_2 w_2 \\ &\simeq v_1 s_2 * s_2 w_1 * w_1 s_2 * s_2 v_2 * v_2 s_2 * s_2 w_2 \\ &\simeq v_1 w_1 * w_1 s_2 * s_2 v_2 * v_2 w_2 \text{ en } \mathcal{S}(X) \text{ rel } \dot{I} \end{aligned}$$

pues  $s_2 w_1 * w_1 v_2 * v_2 s_2$ ,  $s_2 w_1 * w_1 s_2$ ,  $s_2 v_2 * v_2 s_2$  son ciclos contráctiles al estar en un convexo.

**Caso 2:  $v_1$  ó  $w_2$  es ápice.** Por el Lema 2.21 la sucesión encadenante es  $(v_1, w_1)(w_1, v_1)(v_1, w_2)(w_2, v_2)(v_2, w_2)$ , salvo equivalencia en  $\mathcal{R}(X)$ . Pues es un camino de  $v_1$  hasta  $w_2$  en  $\mathcal{R}(X)$  que empieza en la arista  $(v_1, w_1)$  y termina en  $(v_2, w_2)$ .

Luego  $P_*([(v_1, w_1)(w_1, v_1)(v_1, w_2)(w_2, v_2)(v_2, w_2)]) = [v_1w_1 * w_1v_1 * v_1w_2 * w_2v_2 * v_2w_2]$ . Por otro lado, como  $v_1$  ó  $w_2$  es ápice,  $\{v_1, v_2, w_2\}$  ó  $\{v_1, w_1, w_2\} \in \mathcal{R}(X)$  y como consecuencia  $\text{conv}\{v_1, w_2, s_2\} \subset \mathcal{S}(X)$ . Esto da lugar a

$$\begin{aligned} v_1w_1 * w_1v_1 * v_1w_2 * w_2v_2 * v_2w_2 &\simeq v_1w_1 * w_1s_2 * s_2v_1 * v_1w_2 * w_2s_2 * s_2v_2 * v_2w_2 \\ &\simeq v_1w_1 * w_1s_2 * s_2v_2 * v_2w_2 \text{ en } \mathcal{S}(X) \text{ rel } \hat{I} \end{aligned}$$

pues  $s_2v_1 * v_1w_2 * w_2s_2$  es un ciclo contráctil al estar en un convexo.  $\square$

**Comentario 2.26.** De ahora en adelante, cada vez que consideremos un levantado de un camino por aristas shadow  $\xi$  que cumpla  $\text{origen}(\xi), \text{fin}(\xi) \in X$  lo elegiremos empezando y terminando en estos vértices

**Lema 2.27.** Sean  $X \subset \mathbb{R}^2$  finito y  $\xi = (v_1, s_2)(s_2, s_3) \dots (s_n, w_n)$  un camino por aristas en  $\mathcal{S}^1(X)$  con  $v_1, w_n \in X$ . Entonces  $P_*([\hat{\xi}]) = [\varphi_\xi]$ .

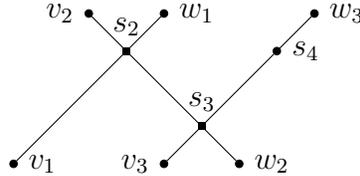


Figura 2.15: Aristas  $(v_1, w_1), (v_2, w_2), (v_3, w_3) \in \mathcal{R}(X)$  orientadas inducidas por las aristas  $(v_1, s_2), (s_2, s_3), (s_3, s_4) \in \mathcal{S}(X)$ .

*Demostración.* Sea  $\{(v_i, w_i)\}_{i=1}^n \subset \mathcal{R}(X)$  cubrimiento de  $\xi$ , podemos visualizar el comienzo del cubrimiento por aristas en la Figura 2.15. Por lo tanto, tomando el levantado de  $\xi$  con vértices inicial y final respectivamente  $v_1$  y  $w_n$ , por el Lema 2.21 resulta

$$\begin{aligned} \hat{\xi} &\simeq (v_1, w_1)\gamma_{w_1, v_2}(v_2, w_2)\gamma_{w_2, v_3} \dots (v_n, w_n) \\ &\simeq (v_1, w_1)\gamma_{w_1, v_2}(v_2, w_2)(w_2, v_2)(v_2, w_2)\gamma_{w_2, v_3} \dots (v_n, w_n) \\ &\simeq ((v_1, s_2)(s_2, s_3))^\wedge (w_2, v_2)((s_2, s_3)(s_3, s_4))^\wedge (w_3, v_3) \dots ((s_{n-1}, s_n)(s_n, w_n))^\wedge \end{aligned}$$

donde cada levantado  $((s_i, s_{i+1})(s_{i+1}, s_{i+2}))^\wedge$  se toma con vértices inicial y final respectivamente  $v_i$  y  $w_{i+1}$ .

Por el Lema 2.25, para cada  $i = 1, \dots, n-1$  resulta

$$P_*([(s_i, s_{i+1})(s_{i+1}, s_{i+2})^\wedge]) = [v_iw_i * w_is_{i+1} * s_{i+1}v_{i+1} * v_{i+1}w_{i+1}] = [v_is_{i+1} * s_{i+1}w_{i+1}]$$

tomando  $s_1 = v_1$  y  $s_{n+1} = w_n$ .

Como  $P_*$  es un funtor

$$\begin{aligned} P_*([\xi^\wedge]) &= P_*([(v_1, s_2)(s_2, s_3)]^\wedge [(w_2, v_2)] [(s_2, s_3)(s_3, s_4)]^\wedge [(w_3, v_3)] \cdots [(s_{n-1}, s_n)(s_n, w_n)]^\wedge) \\ &\simeq P_*([(v_1, s_2)(s_2, s_3)]^\wedge) * [w_2 v_2] * P_*([(s_2, s_3)(s_3, s_4)]^\wedge) * [w_3 v_3] * \cdots * P_*([(s_{n-1}, s_n)(s_n, w_n)]^\wedge) \\ &\simeq [v_1 s_2 * s_2 w_2 * w_2 v_2 * v_2 s_3 * s_3 w_3 * \cdots * v_{n-1} s_n * s_n w_n] \\ &\simeq [v_1 s_2 * s_2 s_3 * s_3 s_4 \cdots s_{n-1} s_n * s_n w_n] = [\phi_\xi] \end{aligned}$$

donde usamos que  $s_i w_i * w_i v_i * v_i s_{i+1} \simeq s_i s_{i+1}$  pues está en  $\text{conv}\{v_i, w_i\}$ .  $\square$

El siguiente teorema es el resultado central de esta sección. En su demostración veremos cómo se relaciona la estructura combinatoria subyacente de la proyección geométrica con la del complejo Vietoris-Rips a través del levantado de caminos.

**Teorema 2.28.** *Para todo  $X \subset \mathbb{R}^2$  finito y  $v_0 \in X$ ,  $P_* : \mathcal{E}(\mathcal{R}(X), v_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{S}(X), v_0)$  es un isomorfismo.*

*Demostración.* Como  $\mathcal{S}(X)$  se obtiene a partir de  $\mathcal{S}^1(X)$  adjuntando una 2-celda por cada cara shadow, vía el Teorema 1.25 resulta que el morfismo inducido por la inclusión

$$\iota_* : \pi_1(\mathcal{S}^1(X), v_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{S}(X), v_0)$$

es un epimorfismo con  $\ker(\iota_*) = N$ . Donde  $N$  es el subgrupo normal generado por las clases de lazos  $w * \gamma * \bar{w}$ , donde  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathcal{S}^1(X)$  es un ciclo en el borde de una cara shadow y  $w$  es un camino en  $\mathcal{S}^1(X)$  de  $v_0$  hasta  $\gamma(p_0)$ , donde  $p_0$  es el punto base de  $S^1$ . En otras palabras  $N = \langle [\gamma_i] \rangle_{i \in I}$  donde cada  $[\gamma_i]$  es un ciclo en el borde de una cara shadow conjugado a  $v_0$ .

Sea  $[\phi] \in \pi_1(\mathcal{S}(X), v_0)$  entonces existe  $[\phi'] \in \pi_1(\mathcal{S}^1(X), v_0)$  tal que  $\iota_*([\phi']) = [\phi]$ . Como  $\rho : \mathcal{E}(\mathcal{S}^1(X), v_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{S}^1(X), v_0)$  es un isomorfismo, por el Teorema 1.20, existe  $[\xi] \in \mathcal{E}(\mathcal{S}^1(X), v_0)$  tal que  $\rho([\xi]) = [\phi_\xi] = [\phi']$ . Por el Lema 2.27  $P_*([\xi^\wedge]) = [\phi_\xi] = [\phi_\xi] = [\phi'] = [\phi]$ , donde la segunda igualdad vale pues son exactamente el mismo camino y, por lo tanto, es un epimorfismo.

Sea  $[\xi] \in \mathcal{E}(\mathcal{R}(X), v_0)$  tal que  $P_*([\xi]) = [\phi_\xi] = [v_0]$  entonces  $\phi_\xi \in N$ . Sea  $\tilde{N} = \rho^{-1}(N)$ . Como  $N = \langle [\gamma_i] \rangle_{i \in I}$ , resulta que  $\tilde{N} = \langle [l_i] \rangle_{i \in I}$  donde  $[l_i]$  es un ciclo en una cara shadow, la misma que recorre  $[\gamma_i]$ , conjugado a  $v_0$  tal que  $\rho([l_i]) = [\gamma_i]$ .

Como  $\xi = (v_0, v_1) \dots (v_n, v_0)$  consideramos  $v_i = s_1^i, s_2^i, \dots, s_{r_i}^i = v_{i+1} \in \mathcal{S}^0(X)$  vértices ordenados de  $\text{conv}\{v_i, v_{i+1}\}$  y tomamos el ciclo shadow en  $v_0$  dado por  $\xi_\# = (v_0 s_2^0)(s_2^0 s_3^0) \dots \dots (s_{r_0}^0 s_1^0) \dots (s_{r_{n-1}}^0 v_0)$ . Como  $\rho([\xi_\#]) = [\phi_{\xi_\#}] = [\phi_\xi] = [\phi_\xi] \in N$  se sigue que  $\xi_\# \in \tilde{N}$  y, por lo tanto, existen  $l_1 \dots, l_r$  ciclos por bordes de caras shadow conjugados a  $v_0$  tales que  $\xi_\# \simeq l_1 \dots l_r$  en  $\mathcal{S}^1(X)$ . Por Lema 2.23 se sigue que  $(l_1, \dots, l_r)^\wedge \simeq \hat{\xi}_\#$  en  $\mathcal{R}(X)$ , ya que los levantados tienen los mismos vértices inicial y final pues  $v_0 \in X$ .

Por otro lado, como  $\text{conv}\{s_1^i, s_2^i, \dots, s_{r_i}^i\} \subset \text{conv}\{v_i, v_{i+1}\}$  para todo  $i$ . Se sigue que  $((s_1^i, s_2^i) \dots (s_{r_i-1}^i, s_{r_i}^i))^\wedge \simeq (v_i, v_{i+1})$  y, por lo tanto,  $\hat{\xi}_\# \simeq \xi$  en  $\mathcal{R}(X)$ . Finalmente obtuvimos que  $(l_1 \dots l_r)^\wedge \simeq \xi$  en  $\mathcal{R}(X)$ .

Hagamos inducción en  $r$  para ver que  $(l_1 \dots l_r)^\wedge$  es contráctil. Si  $r = 1$ ,  $l_1 = \alpha \partial \Psi \alpha^{-1}$  donde  $\Psi$  es una cara shadow y  $\alpha$  es la conjugación al punto base.

Por definición  $\Psi$  está contenido en la proyección de algún 2-símplex  $\{t_1, t_2, t_3\} \in \mathcal{R}(X)$ . Consideramos  $\{t_1, t_2, t_3\}$  minimal con respecto al orden parcial dado por la inclusión en las proyecciones. Podemos visualizar esta situación en la Figura 2.16.

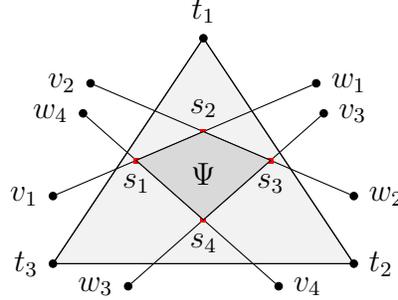


Figura 2.16: Cara shadow  $\Psi$  y el triángulo minimal que la contiene.

Desarrollamos  $\partial \Psi = (s_1, s_2) \dots (s_m, s_1)$  donde  $s_i \in \mathcal{S}^0(X)$ . Sea  $\{(v_i, w_i)\}_{i=1}^m \subset \mathcal{R}(X)$  tal que  $\text{conv}\{s_i, s_{i+1}\} \subset \text{conv}\{v_i, w_i\}$  y  $\overrightarrow{s_i s_{i+1}}$  tiene la misma orientación que  $\overrightarrow{v_i w_i}$ .

Para todo  $i$  se tiene que  $v_i, w_i \notin \text{conv}\{t_1, t_2, t_3\}$ , pues si  $v_i \in \text{conv}\{t_1, t_2, t_3\}$  entonces  $\{v_i, t_1\}, \{v_i, t_2\}, \{v_i, t_3\} \in \mathcal{R}(X)$ . Como  $\Psi$  es la clausura de una componente entonces no es atravesada por ninguna arista, sin pérdida de generalidad  $\Psi \subset \text{conv}\{v_i, t_1, t_2\}$ . Lo cual es absurdo pues  $\text{conv}\{v_1, t_1, t_2\} \subset \text{conv}\{t_1, t_2, t_3\}$  y  $\{t_1, t_2, t_3\}$  era minimal en este sentido.

Luego la hipótesis de la Proposición 2.18 se aplica a  $\{t_1, t_2, t_3\}$  y aristas consecutivas  $(v_i, w_i), (v_{i+1}, w_{i+1})$ . Por lo tanto,  $\mathcal{R}(\{v_i, w_i, v_{i+1}, w_{i+1}, t_1, t_2, t_3\})$  es simplemente conexo.

Fijemos el vértice  $t_1$  como punto base y una sucesión de aristas  $\beta_i$  en  $\mathcal{R}(\{v_i, w_i, t_1, t_2, t_3\})$  de  $t_1$  a  $v_i$ . Tales caminos existen y son únicos módulo equivalencia, pues  $\mathcal{R}(\{v_i, w_i, t_1, t_2, t_3\})$  es un cono.

Tomando  $\{v, w\} \in \mathcal{R}$  que cubre la última arista de  $\alpha$  y, por lo tanto, la primera de  $\alpha^{-1}$ , el levantado de  $l_1$  resulta

$$\begin{aligned} \hat{l}_1 &\simeq (\alpha(s_1, s_2) \dots (s_m, s_1) \alpha^{-1})^\wedge \\ &\simeq (\alpha(s_1, s_2) \dots (s_m, s_1) (s_1, s_1) \alpha^{-1})^\wedge \\ &\simeq \hat{\alpha} \gamma_{w, v_1} ((s_1, s_2) \dots (s_m, s_1) (s_1, s_1))^\wedge \gamma_{v_1, w}^{-1} \alpha^{-1} \end{aligned}$$

Tomando  $(v_1, w_1)$  como artista orientada tal que  $\text{conv}\{s_1, s_1\} \subset \text{conv}\{v_1, w_1\}$ , veamos que  $((s_1, s_2) \dots (s_m, s_1) (s_1, s_1))^\wedge$  es trivial en  $\mathcal{R}(X)$ .

$$\begin{aligned} ((s_1, s_2) \dots (s_m, s_1)(s_1, s_1))^\wedge &\simeq (v_1, w_1)\gamma_{w_1, v_2}(v_2, w_2)\gamma_{w_2, v_3} \dots (v_m, w_m)\gamma_{w_m, v_1}(v_1, w_1)(w_1, v_1) \\ &\simeq (v_1, w_1)\gamma_{w_1, v_2}\beta_2^{-1}\beta_2(v_2, w_2)\gamma_{w_2, v_3} \dots \gamma_{w_{m-1}, v_m}\beta_m^{-1}\beta_m(v_m, w_m)\gamma_{w_m, v_1}\beta_1^{-1}\beta_1 \\ &\simeq (v_1, w_1)\gamma_{w_1, v_2}\beta_2^{-1}\beta_1 \end{aligned}$$

pues  $\beta_i(v_i w_i)\gamma_{w_i v_{i+1}}\beta_{i+1}^{-1} \simeq (t_1, t_1)$  ya que  $\mathcal{R}(\{v_i, w_i, v_{i+1}, w_{i+1}, t_1, t_2, t_3\})$  es simplemente conexo.

Finalmente, como  $(v_1, w_1)\gamma_{w_1, v_2}\beta_2^{-1}\beta_1$  es un ciclo en  $v_1$  en  $\mathcal{R}(\{v_1, w_1, v_2, w_2, t_1, t_2, t_3\})$ , que es simplemente conexo, resulta equivalente al ciclo trivial. Por lo tanto,  $(s_1, s_2) \dots (s_m, s_1)(s_1, s_1)^\wedge$  es equivalente al ciclo trivial y en consecuencia  $\hat{l}_1$  lo es.

Supongamos que  $r > 1$  y vale para todo los valores menos que  $r$ . Como  $(l_1 \dots l_r)^\wedge \simeq (l_1 \dots l_{r-1})^\wedge \hat{l}_r \simeq (v_0, v_0)$ , pues  $\text{fin}(l_{r-1}) = \text{origen}(l_r) = v_0$  que es un elemento de  $X$ . Luego vale para todo  $r$  y en consecuencia  $P_*$  es inyectiva. Finalmente  $P_*$  resulta ser un isomorfismo.  $\square$

**Corolario 2.29.** *Sea  $X \subset \mathbb{R}^2$  finito y  $v_0 \in X$ . Entonces  $\pi_1(\mathcal{R}(X))$  es un grupo libre.*

*Demostración.* Por el teorema anterior basta ver que  $\pi_1(\mathcal{S}(X), v_0)$  es libre. Como toda cara shadow es triangulable, al ser un polígono,  $\mathcal{S}(X)$  es un poliedro planar y vía la Proposición 1.23 se sigue que tiene el tipo homotópico de un grafo. Como el grupo fundamental de un grafo es libre [18, Corollary 3.7.5], concluimos lo que queríamos.  $\square$

**Proposición 2.30.** *Sea  $F$  un grupo libre finitamente generado, entonces existe  $X \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\pi_1(\mathcal{R}(X)) = F$ .*

*Demostración.* Sea  $n$  el rango de  $F$  y consideramos  $X = \{(k, 0), (k + 1/2, 1/2), (k + 1/2, -1/2), (k + 1, 0) : k = 0, \dots, n - 1\} \subset \mathbb{R}^2$ .

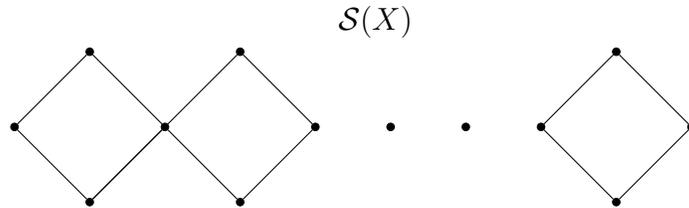


Figura 2.17: Complejo shadow homotópico a  $n$  wedges de  $S^1$ .

Por lo tanto,  $\mathcal{S}(X)$  es un grafo y  $\pi_1(\mathcal{R}(X)) \simeq F$ .  $\square$

## 2.5. Dimensión 3 y la estrategia local

En esta sección estudiaremos complejos de Vietoris-Rips de subconjuntos  $X$  de  $\mathbb{R}^3$  y propiedades homotópicas de la proyección  $P : |\mathcal{R}(X)| \rightarrow \mathbb{R}^3$ . A diferencia de lo que ocurre en dimensión 2, en dimensión 3 no se sabe si  $P$  induce un isomorfismo  $\pi_1(|\mathcal{R}(X)|, v_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{S}(X), v_0)$ . Sin embargo sí se sabe que  $P$  induce un epimorfismo en los grupos fundamentales, esto fue demostrado en ([3], Theorem 1). A continuación, siguiendo los pasos de [3], damos una demostración de ese resultado. La idea central es la localización del problema al entorno de un punto y luego extender la resolución del problema en ese entorno a todo el complejo simplicial.

Vamos a adoptar la siguiente notación a lo largo de esta sección, sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  y  $v \in X$ ,  $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X; 1)$ , definimos  $X_v = (X - v) \cap B(v, 1)$  y  $X^v = X \cap B(v, 1)$ . Notemos que  $\mathcal{R}(X_v)$  y  $\mathcal{R}(X^v)$  son respectivamente el link  $lk_{\mathcal{R}(X)}(v)$  y el star cerrado  $\overline{\text{st}_{\mathcal{R}(X)}(v)}$  de  $v$  en  $\mathcal{R}(X)$ .

**Proposición 2.31.** *Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^3$  tales que  $|A|, |B| \leq 4$  y  $\text{conv}(A) \cap \text{conv}(B) \neq \emptyset$ , entonces vale alguna de las siguientes.*

1. *Se tiene que  $\text{conv}(A) \subset \text{conv}(B)$  ó  $\text{conv}(B) \subset \text{conv}(A)$ .*
2. *Existen  $\{a_1, a_2, a_3\} \subset A$  y  $\{b_1, b_2\} \subset B$  tales que  $\text{conv}\{a_1, a_2, a_3\} \cap \text{conv}\{b_1, b_2\} \neq \emptyset$ .*
3. *Existen  $\{a_1, a_2\} \subset A$  y  $\{b_1, b_2, b_3\} \subset B$  tales que  $\text{conv}\{a_1, a_2\} \cap \text{conv}\{b_1, b_2, b_3\} \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad ningún elemento de  $A$  es combinación convexa de los otros, lo mismo ocurre con  $B$ . Los casos  $|A| \leq 3$  y  $|B| \leq 2$  son inmediatos. Por lo tanto, analicemos primero el caso  $|A| = 3$  y  $|B| = 3$ . Si  $B \cap \text{conv}(A) \neq \emptyset$  el resultado es cierto y, por lo tanto, supongamos que no es el caso. Sea  $\mathbb{P}$  el plano que contiene a  $\text{conv}(A)$ , este separa  $\mathbb{R}^3$  en dos semiespacios convexos cerrados y, por lo tanto, en cada una de ellos hay elementos de  $B$ .

Consideramos  $x \in \text{conv}(A) \cap \text{conv}(B)$  y  $b_1, b_2 \in B$  vértices en semiespacios distintos de  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{P}$ . Tomamos  $y \in \text{conv}\{b_1, b_2\} \cap \mathbb{P}$ , si  $y \notin \text{conv}(A)$  entonces existe  $\{a_1, a_2\} \subset A$  tal que  $\text{conv}\{a_1, a_2\} \cap \text{conv}\{x, y\} \neq \emptyset$ , ver Figura 2.18. Como  $x, y \in \text{conv}(B)$  se sigue que  $\text{conv}\{a_1, a_2\} \cap \text{conv}(B) \neq \emptyset$ . Si en cambio  $y \in \text{conv}(A)$  entonces  $\text{conv}\{b_1, b_2\} \cap \text{conv}(A) \neq \emptyset$ . En ambos casos se sigue la proposición.

Si  $|A| = 4$  y  $|B| \geq 3$ , si  $A \cap \text{conv}(B) \neq \emptyset$  ó  $B \cap \text{conv}(A) \neq \emptyset$  el enunciado es inmediato y, por lo tanto, supongamos que esto no sucede. Sean  $x \in \text{conv}(A) \cap \text{conv}(B)$  y  $b_1 \in B$ , por hipótesis existe  $\{a_1, a_2, a_3\} \subset A$  tal que  $\text{conv}\{x, b_1\} \cap \text{conv}\{a_1, a_2, a_3\} \neq \emptyset$ . Si  $|B| = 3$  sigo el razonamiento del caso anterior. Si  $|B| = 4$  repito los pasos de este párrafo con los conjuntos  $B$  y  $\{a_1, a_2, a_3\}$ .  $\square$

**Lema 2.32.** *Sean  $X \subset \mathbb{R}^3$  y  $v \in X$ . Los espacios  $\mathcal{R}(X^v)$  y  $\mathcal{S}(X^v)$  son contráctiles.*

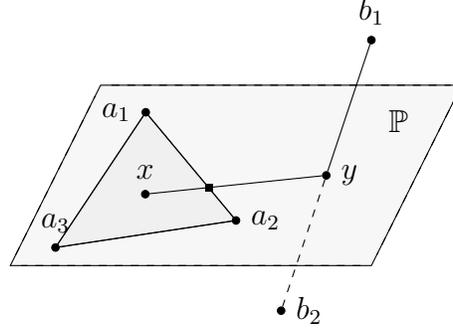


Figura 2.18: Hiperplano  $\mathbb{P}$  contiene a  $\text{conv}(A)$  y separa a los puntos  $b_1, b_2 \in B$ .

*Demostración.*  $\mathcal{R}(X^v)$  es un cono con ápice  $v$  y  $\mathcal{S}(X^v)$  es star-shaped con centro  $v$ .  $\square$

**Proposición 2.33.** Sean  $X \subset \mathbb{R}^3$  finito y  $v \in X$ . Entonces la inclusión

$$i : \mathcal{S}(X_v) \rightarrow \mathcal{S}(X^v) \cap \mathcal{S}(X - v) \quad (2.3)$$

es 0-conexa, es decir, induce una función sobreyectiva en los  $\pi_0$ .

*Demostración.* Basta ver que para todo punto  $x \in \mathcal{S}(X^v) \cap \mathcal{S}(X - v)$  hay un camino continuo en  $\mathcal{S}(X^v) \cap \mathcal{S}(X - v)$  que empieza en  $x$  y termina en algún elemento de  $\mathcal{S}(X_v)$ .

Por la Observación 2.7 existen subconjuntos  $A \subset X^v$  y  $B \subset X - v$  tales que  $|A|, |B| \leq 4$ ,  $\text{diam}(A) < 1$ ,  $\text{diam}(B) < 1$  y  $x \in \text{conv}(A) \cap \text{conv}(B)$ .

Si  $A \subset X_v$  o  $B \subset X_v$  entonces  $x \in \mathcal{S}(X_v)$  y, por lo tanto, la afirmación es válida.

Podemos suponer que  $v \in A$  y  $B \not\subseteq B(v, 1)$ . En particular  $v \notin B$ , pues en caso contrario  $\text{diam}(B) > 1$  y, por lo tanto,  $\text{conv}(A) \not\subseteq \text{conv}(B)$  y  $\text{conv}(B) \not\subseteq \text{conv}(A)$ . La Proposición 2.31 nos asegura que existe  $y$  en la intersección de un triángulo con vértices en  $A$  con un segmento de vértices en  $B$ , o viceversa.

Como  $\text{conv}(A) \cap \text{conv}(B)$  es un convexo, la recta que une a  $x$  con  $y$  está en  $\text{conv}(A) \cap \text{conv}(B) \subset \mathcal{S}(X^v) \cap \mathcal{S}(X - v)$ . Luego basta encontrar un camino de  $y$  a  $\mathcal{S}(X_v)$  en  $\mathcal{S}(X^v) \cap \mathcal{S}(X - v)$ .

- Caso 1: si  $y \in \text{conv}\{a_1, a_2, a_3\} \cap \text{conv}\{b_1, b_2\}$  con  $a_1, a_2, a_3 \in A \subset X^v$  y  $b_1, b_2 \in B \subset X - v$ . Repitiendo el argumento de la primera parte con  $A' = \{a_1, a_2, a_3\}$  y  $B' = \{b_1, b_2\}$  reducimos el caso a  $a_1 = v, a_2, a_3 \in X_v$  y  $b_2 \notin X_v$ . Por la Proposición 2.12 el complejo  $\mathcal{R}(\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\})$  admite un ápice.
  - Si  $b_1$  es ápice entonces  $b_1 \in X_v$  y, por lo tanto, el segmento  $\text{conv}\{y, b_1\} \subset \text{conv}\{a_1, a_2, a_3, b_1\} \cap \text{conv}\{b_1, b_2\} \subset \mathcal{S}(X^v) \cap \mathcal{S}(X - v)$  conecta  $y$  con  $b_1 \in X_v$ .
  - Como ni  $a_1$  ni  $b_2$  pueden ser ápices entonces  $a_2$  o  $a_3$  lo son, sin pérdida de generalidad  $a_2$  es ápice. Por lo tanto, el segmento  $\text{conv}\{y, a_2\} \subset \text{conv}\{a_1, a_2, a_3\} \cap \text{conv}\{b_1, b_2, a_2\} \subset \mathcal{S}(X^v) \cap \mathcal{S}(X - v)$  conecta  $y$  con  $a_2 \in X_v$ .

- Caso 2:  $y \in \text{conv}\{a_1, a_2\} \cap \text{conv}\{b_1, b_2, b_3\}$  con  $a_1, a_2 \in A \subset X^v$  y  $b_1, b_2, b_3 \in B \subset X - v$ . Como en el caso anterior, podemos suponer que  $a_1 = v, a_2 \in X_v$  y  $b_3 \notin X_v$ . Las posibilidades son

- si  $b_1, b_2 \in X_v$ , resulta que  $a_2, b_1$  o  $b_2$  es un ápice y, por lo tanto,  $|a_2b_1| < 1$  o  $|a_1b_2| < 1$ . Sin pérdida de generalidad  $|a_2b_1| < 1$  por lo que  $\text{conv}\{y, b_1\} \subset \text{conv}\{a_1, a_2, b_1\} \cap \text{conv}\{b_1, b_2, b_3\} \subset \mathcal{S}(X^v) \cap \mathcal{S}(X - v)$  es un segmento que une  $y$  con  $b_1 \in X_v$ .
- si  $b_1 \in X_v, b_2 \notin X_v$ , entonces  $b_1$  o  $a_2$  es un ápice y, por lo tanto,  $|a_2b_1| < 1$  y se sigue de forma análoga.
- si  $b_1 \notin X_v, b_2 \notin X_v$ , entonces  $a_2$  es ápice y, por lo tanto, el segmento  $\text{conv}\{y, a_2\} \subset \text{conv}\{a_1, a_2\} \cap \{b_1, b_2, b_3, a_2\} \subset \mathcal{S}(X^v) \cap \mathcal{S}(X - v)$  y con  $a_2 \in X_v$ .  $\square$

**Teorema 2.34.** *Para todo conjunto  $X \subset \mathbb{R}^3$  finito, la proyección  $P : |\mathcal{R}(X)| \rightarrow \mathcal{S}(X)$  es 1-conexa.*

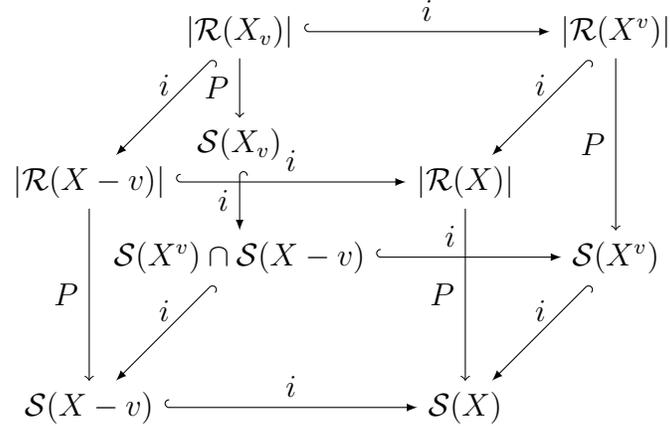


Figura 2.19: Diagrama conmutativo inducido vía remover un vértice.

*Demostración.* Veamos por inducción en el cardinal de  $X$  que  $P : |\mathcal{R}(X)| \rightarrow \mathcal{S}(X)$  es 1-conexa. Vale si  $X = \emptyset$ . Si no, tomamos  $v \in X$  y observemos en el diagrama conmutativo en la Figura 2.19 que  $P : |\mathcal{R}(X^v)| \rightarrow \mathcal{S}(X^v)$  es  $\infty$ -conexa por el Lema 2.32,  $P : |\mathcal{R}(X - v)| \rightarrow \mathcal{S}(X - v)$  y  $P : |\mathcal{R}(X_v)| \rightarrow \mathcal{S}(X_v)$  son 1-conexas, por hipótesis inductiva, y  $i : \mathcal{S}(X_v) \rightarrow \mathcal{S}(X^v) \cap \mathcal{S}(X - v)$  es 0-conexa, por la Proposición 2.33. Por lo tanto,  $|\mathcal{R}(X^v)| \cap |\mathcal{R}(X - v)| = |\mathcal{R}(X_v)| \rightarrow \mathcal{S}(X_v) \rightarrow \mathcal{S}(X^v) \cap \mathcal{S}(X - v)$  resulta 0-conexa. Finalmente, por la Proposición 1.36, resulta que  $P : |\mathcal{R}(X)| \rightarrow \mathcal{S}(X)$  es 1-conexa.  $\square$

**Observación 2.35.** La función  $i : \mathcal{S}(X_v) \rightarrow \mathcal{S}(X^v) \cap \mathcal{S}(X - v)$  no induce en general un monomorfismo en los grupos fundamentales, ni siquiera en dimensión dos. Consideremos

otra vez el ejemplo del hexágono  $X^2 = \{v_i\}_{i=1}^5 \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  donde  $v_i = r\xi^i$ ,  $\xi = e^{i\pi/3}$  y  $1/2 < r < 1/\sqrt{3}$  y tomamos  $v = v_0$ . Como se puede visualizar en la parte izquierda de

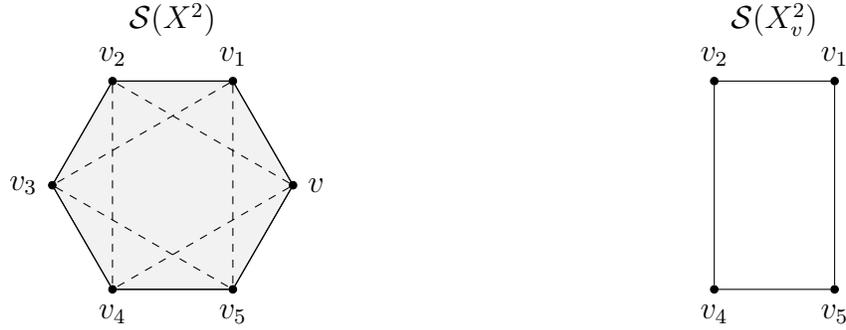


Figura 2.20: A la izquierda se visualiza el shadow  $\mathcal{S}(X^2)$  y a la derecha el shadow  $\mathcal{S}(X_v^2)$ .

la Figura 2.20. Resulta que  $X_v^2 = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$  y  $(X^2)^v = \{v, v_1, v_2, v_4, v_5\}$  y, por lo tanto,  $\pi_1(\mathcal{S}(X_v^2)) = \mathbb{Z}$  como se puede observar en la parte derecha de la Figura 2.20. Mientras que  $\pi_1(\mathcal{S}(X^2 - v) \cap \mathcal{S}((X^2)^v))$  es trivial pues es contráctil, podemos visualizar

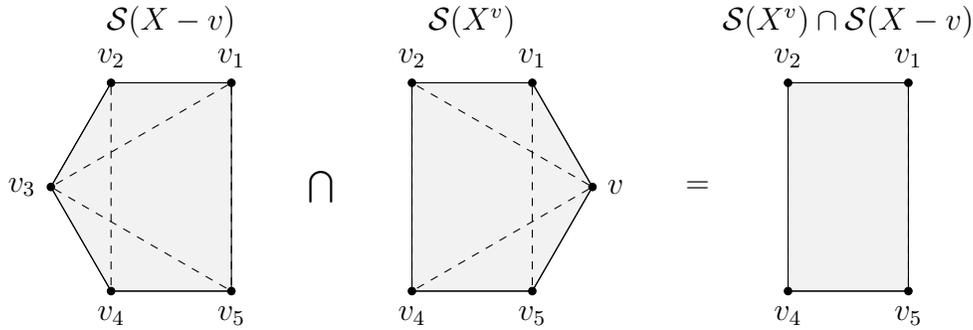


Figura 2.21: Intersección de  $\mathcal{S}((X^2)^v)$  y  $\mathcal{S}(X^2 - v)$ .

esta operación en la Figura 2.21.

Adamaszek, Frick y Vakili conjeturan que para todo  $X \subset \mathbb{R}^3$  finito, la función

$$i : \mathcal{S}(X_v) \rightarrow \mathcal{S}(X^v) \cap \mathcal{S}(X - v)$$

es 1-conexa [3, Conjecture 7.1].

## 2.6. Un ejemplo en dimensión 4

A continuación veremos que el análogo al Teorema 2.34 para dimensión 4 es falso. El siguiente ejemplo aparece en [10, Proposition 5.4].

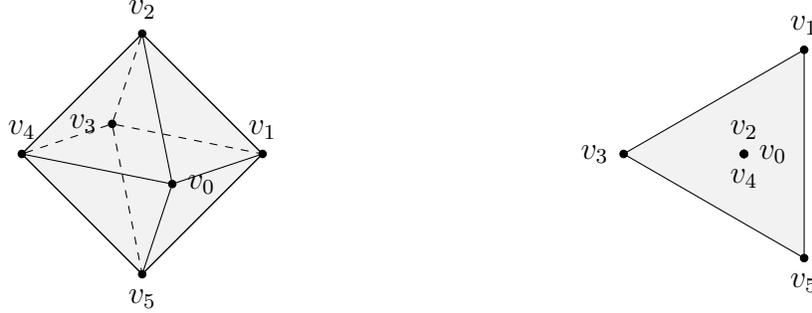


Figura 2.22: (1) A la izquierda el complejo de Vietoris-Rips asociado al conjunto  $X$ . (2) A la derecha la segunda coordenada compleja de los convexos  $\text{conv}\{v_0, v_2, v_4\}$  y  $\text{conv}\{v_1, v_3, v_5\}$ .

**Proposición 2.36.** *Existe  $X \subset \mathbb{R}^4$  tal que el morfismo inducido por la proyección,  $\pi_1(P) : \pi_1(|\mathcal{R}(X)|) \rightarrow \pi_1(\mathcal{S}(X))$ , no resulta sobreyectivo.*

*Demostración.* Sean  $\xi = e^{i\pi/3}$ ,  $1/2 < r < 1/\sqrt{3}$  y  $X = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$  con

$$v_0 = (r\xi^0, 0), v_2 = (r\xi^2, 0), v_4 = (r\xi^4, 0), v_1 = (r\xi^1, \epsilon\xi^1), v_3 = (r\xi^3, \epsilon\xi^3), v_5 = (r\xi^5, \epsilon\xi^5)$$

Notemos que  $|v_i v_{i+1}| > 2r > 1$  para todo  $i$ , considerando los subíndices módulo 6. Tomemos  $\epsilon > 0$  suficientemente chico para que  $|v_i v_j| < 1$  para todo  $i, j$  tales que  $i \neq j + 3 \pmod{6}$ . Entonces  $\mathcal{R}(X) \simeq S^2$ , ver Figura 2.22. Veamos que la proyección sólo identifica los centros de los triángulos  $\{v_0, v_2, v_4\}$  y  $\{v_1, v_3, v_5\}$  y, por lo tanto, tiene el tipo homotópico de  $S^2$  con los polos identificados. El grupo fundamental de este espacio es  $\mathbb{Z}$  mientras que el grupo fundamental de  $\mathcal{R}(X)$  es trivial y en consecuencia  $\pi_1(P)$  no es sobreyectivo. A continuación  $a_j$  denotará al coeficiente de  $v_j$  en la combinación convexa.

- Veamos que  $(0, 0) = \text{conv}\{v_0, v_2, v_4\} \cap \text{conv}\{v_1, v_3, v_5\}$ . Si proyectamos ambos triángulos en la segunda coordenada compleja obtenemos que sólo se intersectan en el 0, ver Figura 2.22.2. Por ende  $a_1 = a_3 = a_5 = \frac{1}{3}$  y proyectando en la primer coordenada compleja obtenemos que  $0 = a_1 r \xi + a_3 r \xi^3 + a_5 r \xi^5 = a_0 r + a_2 r \xi^2 + a_4 r \xi^4$ . Luego el único punto de intersección es el  $(0, 0)$ .
- Veamos que si los triángulos no comparten ningún vértice, la intersección de los convexos es vacía, es decir,  $\text{conv}\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\} \cap \text{conv}\{v_{i+3}, v_{i+4}, v_{i+5}\} = \emptyset$  para todo  $i = 0, \dots, 5$ . Estos son los únicos casos que hay que verificar con vértices disjuntos pues la intersección  $\text{conv}\{v_i, v_{i+2}, v_{i+4}\} \cap \text{conv}\{v_{i+1}, v_{i+3}, v_{i+5}\}$  se vio en el ítem anterior.

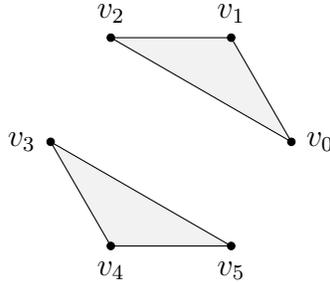


Figura 2.23: Proyección en la primer coordenada compleja de las cápsulas convexas  $\text{conv}\{v_0, v_1, v_2\}$  y  $\text{conv}\{v_3, v_4, v_5\}$ .

Al proyectar en la primer coordenada compleja obtenemos que las cápsulas convexas son disjuntas allí y, por lo tanto, en  $\mathbb{C}^2$ . Ver Figura 2.23 para el caso  $i = 0$ , los otros casos se obtienen vía rotación.

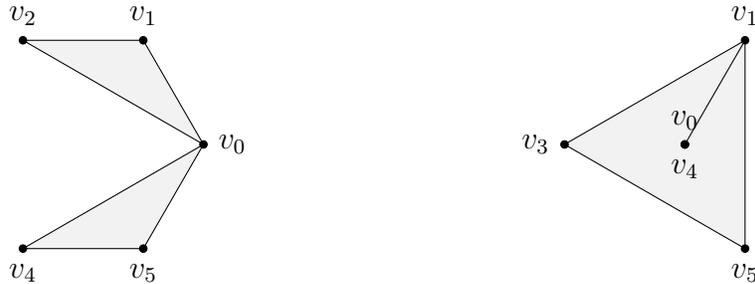


Figura 2.24: (1) A la izquierda la proyección en la primer coordenada compleja de los convexas  $\text{conv}\{v_0, v_1, v_2\}$  y  $\text{conv}\{v_4, v_5, v_0\}$ . (2) A la derecha la proyección de los convexas  $\text{conv}\{v_0, v_1, v_4\}$  y  $\text{conv}\{v_1, v_3, v_5\}$ .

- Veamos que si los dos triángulos comparten sólo un vértice, la intersección de los convexas resulta ser ese vértice. Las intersecciones posibles son  $\text{conv}\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\} \cap \text{conv}\{v_i, v_{i+4}, v_{i+5}\}$  y  $\text{conv}\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\} \cap \text{conv}\{v_{i+1}, v_{i+3}, v_{i+5}\}$  para  $i = 0, \dots, 5$ . En el primer caso, al proyectar en la primer coordenada compleja obtenemos que la intersección es sólo el vértice en el que coinciden, ver Figura 2.24.1 para el caso  $i = 0$ , los otros casos se obtienen vía rotación. Por lo tanto,  $a_i = a'_i = 1$ , es decir, la combinación convexa es sólo el vértice  $v_i$ .

El segundo caso se separa a la vez en dos subcasos según si la segunda coordenada compleja de  $v_{i+1}$  es nula ó no. Si es nula entonces lo son también las segundas coordenadas complejas de  $v_{i+3}$  y  $v_{i+5}$  y, por lo tanto, la intersección de los convexas en esta coordenada es el 0. Por otro lado la segunda coordenada compleja de  $v_i$  y  $v_{i+2}$  son no nulas entonces  $a_i = a_{i+2} = 0$  y, por lo tanto,  $a_{i+1} = 1$ .

Si la segunda coordenada de  $v_{i+1}$  no es nula tampoco lo son las de  $v_{i+3}$  y  $v_{i+5}$  y si son nulas las segundas coordenadas de  $v_i$  y  $v_{i+2}$ . Como la intersección de las proyecciones es sólo el segmento que une la segunda coordenada de  $v_i$  con el 0, ver Figura 2.24.2, resulta que  $a_{i+3} = a_{i+5} = a \geq 0$  y, por lo tanto,  $a_{i+1} = 1 - 2a$ . A continuación desarrollamos el caso  $i = 0$ , los otros casos se obtienen vía rotación par. Proyectando en la parte imaginaria de la primera coordenada compleja, simplificando los parametros  $r$ , obtenemos

$$(1 - 3a)\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = (a_1 + a_2)\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

como  $a_1 = 1 - a_0 - a_2$  concluimos que  $a_0 = 3a$ . Así mismo mirando la parte real de la misma coordenada obtenemos  $a(\cos(\frac{\pi}{3}) - 2) = a_2\cos(\frac{\pi}{3})$ . Como  $\cos(\frac{\pi}{3}) > 0$  y  $\cos(\frac{\pi}{3}) - 2 < 0$  tanto  $a$  como  $a_2$  resultan ser nulos, con lo cual  $a_1 = a'_1 = 1$ .



Figura 2.25: (1) A la izquierda la segunda coordenada compleja de los convexos  $\text{conv}\{v_0, v_1, v_2\}$  y  $\text{conv}\{v_0, v_1, v_5\}$ . (2) A la derecha la primera coordenada compleja de los convexos  $\text{conv}\{v_0, v_1, v_2\}$  y  $\text{conv}\{v_0, v_2, v_4\}$ .

- Veamos que si los dos triángulos comparten sólo dos vértices, la intersección de los convexos resulta ser el convexo generado por esos dos vértices. Las intersecciones posibles son  $\text{conv}\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\} \cap \text{conv}\{v_i, v_{i+1}, v_{i+5}\}$  ó  $\text{conv}\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\} \cap \text{conv}\{v_i, v_{i+2}, v_{i+4}\}$  para  $i = 0, \dots, 5$ .

Analicemos el primer caso, como  $v_{i+2}$  ó  $v_{i+5}$  tiene segunda coordenada compleja nula entonces al proyectar ambos convexos en dicha coordenada obtenemos respectivamente que  $a_{i+5}$  ó  $a_{i+2}$  es nulo. ver Figura 2.25.1. Con lo cual la combinación convexa sólo se encuentra determinada por  $a_i$  y  $a_{i+1}$ .

En el segundo caso al proyectar en la primera coordenada obtenemos que la intersección es sólo el convexo determinado por  $v_i$  y  $v_{i+1}$ , ver Figura 2.25.2. Con lo cual  $a_{i+2} = a_{i+4} = 0$  y se sigue la afirmación.  $\square$

**Observación 2.37.** Tomando  $X$  el conjunto construido en la Proposición 2.36 y  $v = v_0$ . La función  $i : \mathcal{S}(X_v) \rightarrow \mathcal{S}(X^v) \cap \mathcal{S}(X - v)$  no es  $\pi_0$  sobreyectiva. Pues la intersección

$\mathcal{S}(X^v) \cap \mathcal{S}(X - v)$  tiene dos componentes conexas dadas por

$$\mathcal{S}(X_v) = \mathcal{S}(\{v_1, v_2, v_4, v_5\}) = \text{conv}\{v_1, v_2\} \cup \text{conv}\{v_1, v_5\} \cup \text{conv}\{v_4, v_5\} \cup \text{conv}\{v_2, v_4\}$$

$$\text{y } (0, 0) = \text{conv}\{v_0, v_2, v_4\} \cap \text{conv}\{v_1, v_3, v_5\}.$$



# Capítulo 3

## Vietoris-Rips en el círculo

En este capítulo nos vamos a enfocar en el análisis del tipo homotópico del complejo de Vietoris-Rips,  $\mathcal{R}(X; r)$ , cuando  $X \subset S^1$ . Para ello introduciremos, y haremos uso de la estructura de grafo cíclico del 1-esqueleto de  $\mathcal{R}(X; r)$ , pues este tiene asociado un invariante, el winding fraction, que nos permitirá clasificar su tipo homotópico. La exposición en este capítulo está basada en el artículo [2].

Como los grafos cíclicos en particular son grafos dirigidos tratamos estos primero.

### 3.1. Grafos dirigidos y cíclicos

Empezamos introduciendo la categoría de grafos dirigidos así como también el grafo dirigido de Vietoris-Rips. Vemos luego que este grafo tiene una estructura de grafo cíclico. Finalizamos con el desarrollo de los conceptos básicos sobre grafos cíclicos.

**Definición 3.1.** Por un grafo dirigido  $\vec{G}$  nos referimos al par  $\vec{G} = (V, E)$  donde  $V$  es el conjunto de vértices y  $E \subset V \times V$ , el conjunto de aristas, cumple que  $(v, v) \notin E$  para todo  $v \in V$  y si  $(v, w) \in E$  entonces  $(w, v) \notin E$ .

Sea  $\vec{G} = (V, E)$  grafo dirigido y  $v \in V$ . Notamos a los entornos de salida y de entrada de  $v$  como  $N^+(\vec{G}, v) = \{w \in V : (v, w) \in E\}$  y  $N^-(\vec{G}, v) = \{w \in V : (w, v) \in E\}$  respectivamente. Sus versiones cerradas se definen como  $N^+[\vec{G}, v] = \{v\} \cup N^+(\vec{G}, v)$  y  $N^-[\vec{G}, v] = \{v\} \cup N^-(\vec{G}, v)$ . Sea  $G = (V, E)$  grafo no dirigido y  $v \in V$ , notamos al entorno abierto de  $v$  como  $N(G, v) = \{w \in V : (v, w) \in E\}$  y el entorno cerrado de  $v$  como  $N[G, v] = \{v\} \cup N(G, v)$ .

Algunas veces notaremos al conjunto de vértices de  $\vec{G}$  como  $V(\vec{G})$  y al conjunto de aristas de  $\vec{G}$  como  $E(\vec{G})$ .

**Definición 3.2.** Sea  $\vec{G} = (V, E)$  un grafo dirigido, un *ciclo dirigido* en  $\vec{G}$  es un sucesión de vértices  $v_1, \dots, v_r$  tal que  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  para todo  $i = 1, \dots, r$  con  $v_{r+1} = v_1$ .

Relacionamos dos grafos dirigidos vía morfismos que preservan la estructura combinatoria subyacente, más específicamente damos la siguiente definición.

**Definición 3.3.** Un morfismo de grafos dirigidos  $f : \vec{G} \rightarrow \vec{H}$  es una función definida entre los vértices de ambos grafos tal que para toda arista  $(v, w) \in \vec{G}$  se cumple que  $f(v) = f(w)$  ó  $(f(v), f(w)) \in \vec{H}$ .

Los grafos dirigidos junto con los morfismo de grafos dirigidos forman una categoría que vamos a denotar  $\overrightarrow{\mathbf{Graph}}$ . Notar que si  $f : \vec{G} \rightarrow \vec{H}$  es un morfismo de grafos dirigidos entonces induce un morfismo entre las cliques de los grafos subyacentes  $Cl(f) : Cl(G) \rightarrow Cl(H)$ . Por lo tanto,  $Cl$  es un funtor covariante entre las categorías  $\overrightarrow{\mathbf{Graph}}$  y  $\mathbf{Simp}$ .

El principal grafo dirigido que vamos a estudiar es el grafo dirigido de Vietoris-Rips asociado a un subconjunto finito de la circunferencia.

**Definición 3.4.** Sea  $X \subset S^1$  finito y  $0 < r < 1/2$ , el grafo dirigido de Vietoris-Rips se define como  $\vec{R}(X; r) = (X, E)$  donde  $(x, y) \in E$  si  $0 < \vec{d}(x, y) < r$ , con  $\vec{d}(x, y)$  la longitud normalizada del arco cerrado desde  $x$  hasta  $y$  en  $S^1$  recorrido en sentido horario. Con normalizada nos referimos a que el perímetro de  $S^1$  vale según esta función 1.

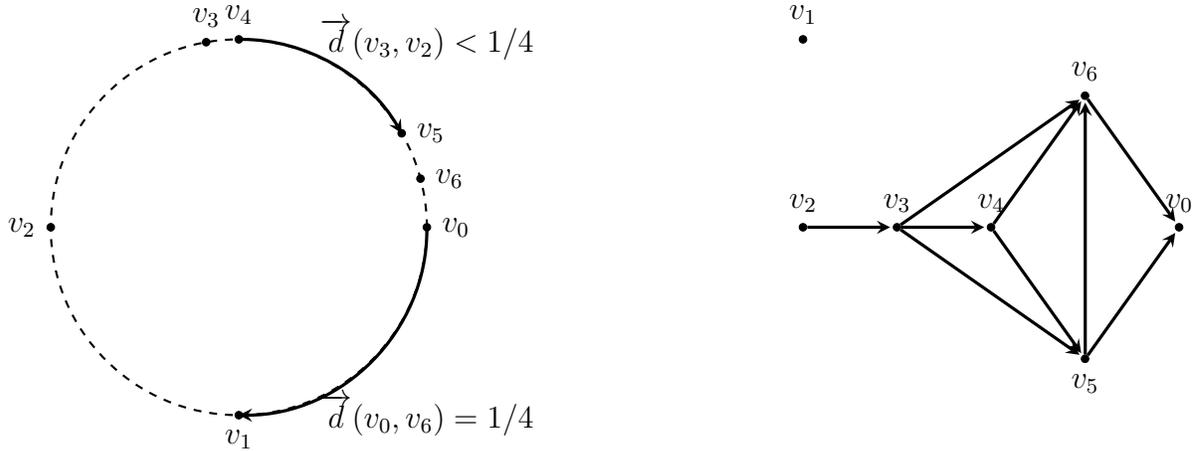


Figura 3.1: A la izquierda el conjunto de puntos  $X = \{v_i\}_{i=0}^6 \subset S^1$  y a la derecha el grafo dirigido de Vietoris-Rips  $\vec{R}(X; \frac{1}{4})$ .

**Ejemplo 3.5.** Consideramos los puntos  $X = \{e^{i\theta\pi}\}_{\theta \in A} \subset S^1 \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  con  $A = \{0, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, 1, \frac{3}{2}\}$ , y  $r = \frac{1}{4}$ . Podemos visualizar el grafo dirigido de Vietoris-Rips  $\vec{R}(X; \frac{1}{4})$  en la Figura 3.1.

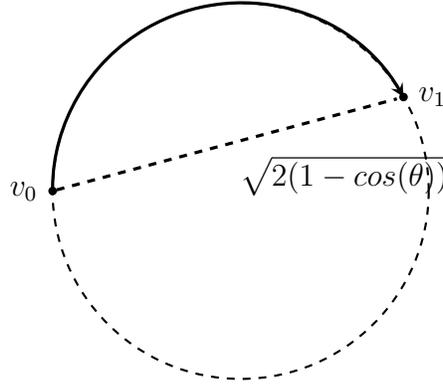


Figura 3.2: Comparación entre longitud de arco y la distancia euclidea, donde  $\theta$  denota el ángulo entre  $v_0$  y  $v_1$ .

Este grafo es importante pues su clique coincide con el complejo de Vietoris-Rips del mismo conjunto de puntos ajustando la cota, es decir,  $Cl(R(X; r)) = \mathcal{R}(X; r')$  donde  $r' = \sqrt{2(1 - \cos(2\pi r))}$ . Pues si  $v, w \in S^1$  cumplen que  $\vec{d}(v, w) = r$ , entonces  $0 < r < 1/2$  y, por lo tanto, el ángulo desde  $v$  hasta  $w$  es menor que  $\pi$ . Luego  $|vw| = 2(1 - \cos(\theta))$ , donde  $\theta$  es el ángulo desde  $v$  hasta  $w$ . Como la circunferencia es unitaria y  $\vec{d}$  es la distancia normalizada obtenemos que  $\theta = 2\pi r$  y se sigue la igualdad, ver Figura 3.2.

Más aún los vértices de este grafo admiten un orden cíclico, por ejemplo el dado por el sentido horario. Vamos a aprovechar la estructura que tiene este grafo para clasificar su tipo homotópico, idea que hacemos más concreta a continuación.

**Definición 3.6.** Sea  $S$  un conjunto de cardinal  $n$ . Un orden cíclico en  $S$  es una biyección  $h : S \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Si  $v_i = h^{-1}(i)$ , otra forma de denotar el orden cíclico de  $S$  es  $v_0 < \dots < v_{n-1}$ . Si  $n \geq 3$  se sigue que  $v_i < v_j < v_k$  si  $i < j < k$  ó  $k < i < j$  ó  $j < k < i$ .

**Definición 3.7.** Sea  $S$  un conjunto de cardinal  $n$  con un orden cíclico  $v_0 < \dots < v_{n-1}$ . Un *subintervalo* en  $S$  es alguno de los siguientes conjuntos

- el conjunto vacío.
- un conjunto de la forma  $\{v_i, \dots, v_j\}$  con  $0 \leq i \leq j \leq n-1$ .
- un conjunto de la forma  $\{v_j, \dots, v_{n-1}, v_0, \dots, v_i\}$  con  $0 \leq i < j \leq n-1$ .

**Definición 3.8.** Sean  $S$  y  $T$  dos conjuntos finitos con órdenes cíclicos dados. Una función  $f : S \rightarrow T$  se dice una *monótona cíclica* si se cumplen las siguientes condiciones

- para todo  $t \in T$ , el conjunto  $f^{-1}(t)$  es un subintervalo de  $S$ .

- dados  $s, s', s'' \in S$ , si  $f(s) < f(s') < f(s'')$  en  $T$  entonces  $s < s' < s''$  en  $S$ .

Todas las operaciones en los subíndices de los vértices se van a considerar módulo la cantidad total de vértices.

**Lema 3.9.** Sean  $S$  y  $T$  conjuntos con órdenes cíclicos  $v_0 < \dots < v_{n-1}$  y  $w_0 < \dots < w_{m-1}$  respectivamente. Sean además  $f : S \rightarrow T$  función monótona cíclica y  $J$  un subintervalo de  $T$ . Entonces  $f^{-1}(J)$  es un subintervalo de  $S$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $J \subset \text{Im}(f)$ , pues  $\text{Im}(f)$  hereda el orden cíclico de  $T$ . Separemos en casos según la forma de  $J$ .

- Si  $J = \emptyset$  entonces  $f^{-1}(J) = \emptyset$  y, por lo tanto, es un subintervalo de  $S$ .
- Si  $J = \{w_i, \dots, w_j\}$  con  $0 \leq i \leq j \leq m-1$ . Notamos a los vértices del subintervalo  $f^{-1}(w_k) = \{v_{s(k)}, \dots, v_{e(k)}\}$ . Luego, basta ver que  $v_{e(k)+1} = v_{s(k+1)}$  para  $k = i, \dots, j-1$ , pues en tal caso  $f^{-1}(J)$  admite una numeración secuencial módulo  $n$  y, por lo tanto, es un subintervalo. Si  $v_{e(k)+1} \neq v_{s(k+1)}$  entonces  $f(v_{e(k)}), f(v_{e(k)+1})$  y  $f(v_{s(k+1)})$  son tres elementos distintos de  $T$  y  $v_{e(k)} < v_{e(k)+1} < v_{s(k+1)}$  en  $S$ . Entonces  $w_k = f(v_{e(k)}) < f(v_{e(k)+1}) < f(v_{s(k+1)}) = w_{k+1}$  en  $T$ , lo cual es absurdo pues  $w_k$  y  $w_{k+1}$  son elementos contiguos.
- Si  $J = \{w_j, \dots, w_{m-1}, w_0, \dots, w_i\}$  con  $0 \leq i < j \leq m-1$ . Siguiendo el razonamiento del caso anterior vemos que  $v_{e(k)+1} = v_{s(k+1)}$  para  $k = 0, \dots, i-1, j, \dots, m-1$ . Por lo tanto,  $f^{-1}(J)$  admite una numeración secuencial módulo  $n$  y así resultando en un subintervalo de  $S$ .  $\square$

**Definición 3.10.** Un grafo dirigido  $\vec{G} = (V, E)$  se dice cíclico si el conjunto de vértices  $V$  admite un orden cíclico  $v_0 < \dots < v_{n-1}$  tal que si  $(v_i, v_j) \in E$  entonces  $j = (i+1) \bmod n$  ó bien  $(v_i, v_{(j-1) \bmod n}), (v_{(i+1) \bmod n}, v_j) \in E$ .

En particular el grafo dirigido de Vietoris-Rips,  $\vec{R}(X; r)$ , resulta ser un grafo cíclico considerando  $v_0 < \dots < v_{n-1}$  el orden cíclico de los vértices dado por el sentido horario. Pues si  $(v_i, v_j) \in E(R(X; r))$  y  $j \neq i+1$  entonces podemos deducir que

$$r > \vec{d}(v_i, v_j) = \vec{d}(v_i, v_{i+1}) + \vec{d}(v_{i+1}, v_j)$$

de donde se sigue que  $\vec{d}(v_{i+1}, v_j) < r$  y, por lo tanto,  $(v_{i+1}, v_j) \in E(R(X; r))$ . Análogamente obtenemos que  $(v_i, v_{j-1}) \in E(R(X; r))$ .

Veamos algunas propiedades básicas de los grafos cíclicos.

**Lema 3.11.** Sea  $\vec{G} = (V, E)$  un grafo cíclico con un orden cíclico sobre los vértices  $v_0 < v_1 < \dots < v_{n-1}$ . Entonces

1. Si  $(v_i, v_{i+s}) \in E$ , entonces  $(v_{i+j}, v_{i+s}), (v_i, v_{i+j}) \in E$  para todo  $0 < j < s$ .

2. Para todo  $i = 0, \dots, n-1$  existen  $s, s' \geq 0$  tales que  $N^+(\vec{G}, v_i) = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+s}\}$  y  $N^-(\vec{G}, v_i) = \{v_{i-s'}, \dots, v_{i-1}, v_i\}$ .
3. Para todo  $i = 0, \dots, n-1$  vale que  $N^+(\vec{G}, v_i) \subset N^+(\vec{G}, v_{i+1})$  y  $N^-(\vec{G}, v_{i+1}) \subset N^-(\vec{G}, v_i)$ .
4. Todo subgrafo inducido de  $\vec{G}$  es cíclico.
5. Si  $\vec{G}$  contiene un ciclo dirigido entonces  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$ .

*Demostración.*

1. Hagamos inducción en  $s$ , si  $s = 1$  la afirmación es válida. Si  $s > 1$  como  $\vec{G}$  es cíclico y  $(v_i, v_{i+s}) \in E$  entonces  $(v_{i+1}, v_{i+s}), (v_i, v_{i+s-1}) \in E$ . Como  $(v_i, v_{i+s-1}) \in E$  por hipótesis inductiva se sigue que  $(v_i, v_{i+j}) \in E$  para todo  $0 < j < s-1$ . Análogamente como  $(v_{i+1}, v_{i+1+(s-1)}) \in E$  por hipótesis inductiva  $(v_{i+1+j}, v_{i+s}) \in E$  para todo  $0 < j < s-1$  y, por lo tanto, se sigue la proposición.
2. Por definición  $N^+(\vec{G}, v_i) = \{v_i\} \cup \{w : (v_i, w) \in E\}$ , sea  $s = \max\{0 < j < n : (v_i, v_{i+j}) \in E\}$ , por la parte 1 se sigue que  $(v_i, v_j) \in E$  para todo  $0 < j \leq s$  entonces  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+s}\} \subset N^+(\vec{G}, v_i)$ . Por otro lado si  $(v_i, v_j) \in E$  entonces  $j = i+k$  con  $0 < k < n$ , más aún  $k \leq s$  y, por lo tanto, ambos conjuntos son iguales. Se procede análogamente para concluir que  $N^-(\vec{G}, v_i) = \{v_{i-s'}, \dots, v_{i-1}, v_i\}$  con  $s' = \max\{0 < j < n : (v_{i-s'}, v_i) \in E\}$ .
3. Sea  $v_j \in N^+(\vec{G}, v_i)$  entonces  $(v_i, v_j) \in E$ . Si  $j = i+1$  entonces  $v_j \in N^+(\vec{G}, v_{i+1})$ . Si no como  $\vec{G}$  es cíclico se sigue que  $(v_{i+1}, v_j) \in E$  y, por lo tanto,  $v_j \in N^+(\vec{G}, v_{i+1})$  como queríamos ver. Un razonamiento análogo se aplica para ver que  $N^-(\vec{G}, v_{i+1}) \subset N^-(\vec{G}, v_i)$ .
4. Sea  $\vec{G}'$  subgrafo de  $\vec{G}$  y  $v_{i_0} < \dots < v_{i_{m-1}}$  el orden cíclico inducido en los vértices  $V(\vec{G}')$ . Si  $(v_{i_j}, v_{i_k}) \in E(\vec{G}')$  y  $j+1 \neq k$ , dado que  $E(\vec{G}') \subset E(\vec{G})$  entonces  $v_{i_{k-1}} \in N^+(\vec{G}, v_{i_j})$  y, por lo tanto,  $(v_{i_j}, v_{i_{k-1}}) \in E(\vec{G})$ . Como  $\vec{G}'$  es el subgrafo cíclico inducido se sigue que  $(v_{i_j}, v_{i_{k-1}}) \in E(\vec{G}')$ . Vía un razonamiento análogo concluimos que  $(v_{i_{j+1}}, v_{i_k}) \in E(\vec{G}')$ .
5. Sean  $v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$  vértices que forman un ciclo dirigido. Como  $\vec{G}$  es cíclico, cada arista  $(v_{i_j}, v_{i_k})$  con  $i_k \neq i_j + 1$  induce el par  $(v_{i_j}, v_{i_{k-1}}), (v_{i_{j+1}}, v_{i_k})$ . Repitiendo este proceso finitas veces obtenemos para cada arista  $(v_i, v_j)$  del ciclo dirigido una sucesión de aristas de la forma  $(v_i, v_{i+1}), \dots, (v_{j-1}, v_j)$ . Sean  $v_k, v_{k+1} \in V$  tomamos  $1 \leq j \leq r$  tal que  $i_j \leq k \leq i_{j+1}$ . Por el razonamiento anterior

$(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) \dots (v_{i_{j+1}-1}, v_{i_{j+1}}) \in E$  y, por lo tanto,  $(v_k, v_{k+1}) \in E$ , como queríamos.  $\square$

**Definición 3.12.** Sean  $\vec{G}$  y  $\vec{H}$  grafos cíclicos con  $v_0 < \dots < v_{n-1}$  un orden cíclico en los vértices de  $\vec{G}$ . Un morfismo de grafos dirigidos  $f : \vec{G} \rightarrow \vec{H}$  es un morfismo cíclico si además cumple que

- no es constante cuando  $\vec{G}$  tiene un ciclo dirigido.
- es monótono cíclico.

**Lema 3.13.** *Propiedades de morfismos cíclicos.*

- Si  $f : \vec{G} \rightarrow \vec{H}$  es un morfismo cíclico y  $\vec{G}$  tiene un ciclo dirigido, entonces  $\vec{H}$  también tiene un ciclo dirigido.
- Composición de morfismos cíclicos es un morfismo cíclico.
- La inclusión de un subgrafo inducido  $\vec{H}$  en un grafo cíclico  $\vec{G}$  es un morfismo cíclico.

*Demostración.*

- Como  $\vec{G}$  tiene un ciclo dirigido, por el Lema 3.11.5 se sigue que  $(v_i, v_{i+1}) \in E(\vec{G})$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$ . Como  $f$  no es constante existen  $v_i, v_j \in V(\vec{G})$  tales que  $f(v_i) \neq f(v_j)$ . Por lo tanto, el ciclo

$$(v_i, v_{i+1}) \dots (v_{j-1}, v_j)(v_j, v_{j+1}) \dots (v_{i-1}, v_i)$$

en  $\vec{G}$  vía  $f$  induce un ciclo en  $\vec{H}$  desde  $f(v_i)$  hasta  $f(v_j)$ , eliminando las aristas en las que  $f$  sea constante.

- Sean  $f : \vec{G} \rightarrow \vec{H}$  y  $g : \vec{H} \rightarrow \vec{K}$  morfismos cíclicos de grafos cíclicos. Veamos primero que  $g \circ f$  es monótona cíclica. Sea  $w \in \vec{K}$ , el conjunto  $(g \circ f)^{-1}(w) = f^{-1}(g^{-1}(w))$  resulta ser un subintervalo pues  $g^{-1}(w)$  es un subintervalo y por el Lema 3.9 la pre imagen de un subintervalo por una función monótona es un subintervalo. Sean  $v, v', v'' \in V(\vec{G})$  tales que  $g \circ f(v) < g \circ f(v') < g \circ f(v'')$  en  $\vec{K}$ , como  $g$  es monótona cíclica resulta que  $f(v) < f(v') < f(v'')$  en  $\vec{H}$  y finalmente, dado que  $f$  es monótona cíclica podemos concluir que  $v < v' < v''$  en  $\vec{G}$ .

Falta ver que si  $\vec{G}$  tiene un ciclo dirigido entonces  $g \circ f$  no es constante. Como  $f$  es monótona cíclica entonces  $\vec{H}$  tiene un ciclo dirigido y como  $g$  es monótona cíclica  $\vec{K}$  también tiene un ciclo dirigido. Supongamos que  $g \circ f$  es constante, es decir,  $g \circ f(v) = w$  para todo  $v \in V(\vec{G})$ . Como  $g$  no es constante existe

$u \in \vec{H}$  que no está en la imagen de  $f$  tal que  $g(u) \neq w$ . Dado que  $f$  no es constante, vía este morfismo los vértices de  $\vec{G}$  forman un ciclo en  $\vec{H}$  y, por lo tanto, existe  $i$  tal que  $f(v_i) < u < f(v_{i+1})$  están ordenados ciclicamente en  $\vec{H}$  y, por lo tanto,  $(f(v_i), f(v_{i+1})) \in \vec{H}$ . Entonces  $(f(v_i), u), (u, f(v_{i+1})) \in \vec{H}$  y, por lo tanto,  $(w, g(u)), (g(u), w) \in \vec{K}$ , lo cual es absurdo pues  $\vec{K}$  es dirigido.

- Sea  $\vec{H}$  subgrafo inducido de  $\vec{G}$ ,  $i: \vec{H} \rightarrow \vec{G}$  el morfismo dado por la inclusión y supongamos además que  $\vec{H}$  tiene más de un vértice. Basta ver que es monótona cíclica. Sea  $x \in \vec{G}$  entonces  $i^{-1}(x) = \emptyset$  si  $x \notin \vec{H}$  ó  $\{x\}$  si  $x \in \vec{H}$ , en ambos casos es un subintervalo. Si  $i(v) < i(v') < i(v'')$  en  $\vec{G}$  dado que el orden cíclico de  $\vec{H}$  es el inducido por  $\vec{G}$ , se sigue que  $v < v' < v''$  en  $\vec{H}$ . Finalmente como  $i$  no es constante se sigue que es un morfismo cíclico.  $\square$

## 3.2. Desmantelamiento

La noción de desmantelamiento de un grafo cíclico está directamente relacionada con el concepto de grafo (simple) desmantelable [17], la noción de poset desmantelable/espacio finito contráctil [19] y complejo simplicial fuertemente colapsable [15, 5].

**Definición 3.14.** Sea  $\vec{G}$  un grafo cíclico con el orden cíclico sobre los vértices  $v_0 < \dots < v_{n-1}$ . Un vértice  $v_i$  se dice *dominado* si  $N^-(\vec{G}, v_{i+1}) = N^-(\vec{G}, v_i)$ .

Notaremos  $\vec{G} \setminus v$  al grafo dirigido que se obtiene a partir de  $\vec{G}$  removiendo el vértice  $v$  y todas las aristas que llegan o salen de  $v$ .

**Lema 3.15.** Sea  $\vec{G}$  grafo cíclico con el orden cíclico  $v_0 < \dots < v_{n-1}$  y  $v_i$  un vértice dominado. Entonces la función  $f: \vec{G} \rightarrow \vec{G} \setminus v_i$  definida como

$$f(v_j) = \begin{cases} v_j & \text{si } j \neq i \\ v_{i+1} & \text{si } j = i \end{cases}$$

es un morfismo cíclico.

*Demostración.* Primero veamos que  $f$  es un morfismo de grafos dirigidos, como  $f$  preserva todas las aristas que no contienen a  $v_i$  basta ver que pasa con las que sí lo contienen. Si  $(v_k, v_i) \in E(\vec{G})$  como  $v_i$  es un vértice dominado se tiene que  $(v_k, v_{i+1}) \in E(\vec{G})$ . Si  $(v_i, v_k) \in E(\vec{G})$  y  $k = i + 1$  entonces  $f(v_i) = f(v_k)$ . Si  $(v_i, v_k) \in E(\vec{G})$  y  $k \neq i + 1$  entonces  $(v_{i+1}, v_k) \in E(\vec{G})$  pues  $\vec{G}$  es cíclico. Si  $f(v_j) < f(v_k) < f(v_l)$  en  $\vec{G}$ , si  $j, k, l \neq i$  entonces  $v_j < v_k < v_l$ . Si  $k = i$  entonces  $v_j < v_{i+1} < v_l$ , como  $j \neq i$  y  $v_j < v_{i+1}$  entonces  $v_j < v_i$  y, por lo tanto,  $v_j < v_i < v_l$ . Los casos  $j = i$  y  $k = i$  son análogos. Si  $\vec{G}$  tiene un ciclo dirigido entonces tiene al menos tres vértices y, por lo tanto,  $f$  no es constante. Luego  $f$  es un morfismo cíclico.  $\square$

**Definición 3.16.** Decimos que un grafo cíclico  $\vec{G}$  se *desmantela* a un subgrafo inducido  $\vec{H}$  si hay una sucesión de grafos  $\vec{G} = \vec{G}_0, \dots, \vec{G}_r = \vec{H}$  tal que  $\vec{G}_i$  se obtiene de  $\vec{G}_{i-1}$  removiendo un vértice dominado.

**Observación 3.17.** Esta noción de desmantelamiento está basada en el desmantelamiento clásico de grafos no dirigidos, es decir, un grafo no dirigido  $G$  se desmantela a un subgrafo  $H$  si un hay una sucesión de grafos  $\vec{G} = \vec{G}_0, \dots, \vec{G}_r = \vec{H}$  tal que  $\vec{G}_i$  se obtiene de  $\vec{G}_{i-1}$  removiendo un vértice cuyo link es un cono. Bajo esta noción de desmantelamiento clásico el grafo final es único módulo isomorfismo [15, Theorem 1.1].

**Observación 3.18.** Si un grafo cíclico  $\vec{G}$  se desmantela en un subgrafo inducido  $\vec{H}$ , componiendo los morfismos cíclicos definidos en el Lema 3.15. Como por el Lema 3.13.2 composición de morfismos cíclicos es un morfismo cíclico, obtenemos un morfismo cíclico  $\psi : \vec{G} \rightarrow \vec{H}$ . La importancia de este morfismo viene dada por el siguiente lema.

**Lema 3.19.** Sea  $\vec{G}$  grafo cíclico que se desmantela a  $\vec{H}$ , entonces  $Cl(\psi) : Cl(G) \rightarrow Cl(H)$  y  $Cl(i) : Cl(H) \rightarrow Cl(G)$  son mutuamente inversas homotópicas. Donde  $i : \vec{H} \rightarrow \vec{G}$  es la inclusión y  $\psi : \vec{G} \rightarrow \vec{H}$  el morfismo cíclico definido en la Observación 3.18.

*Demostración.* Si  $\vec{G}$  se desmantela a  $\vec{H}$  entonces existe una sucesión de subgrafos  $\vec{G} = \vec{G}_0, \dots, \vec{G}_r = \vec{H}$  tales que  $\vec{G}_i$  se obtiene de  $\vec{G}_{i-1}$  removiendo un vértice dominado. Por lo tanto, basta ver que la inclusión  $i : \vec{G} \setminus v_i \rightarrow \vec{G}$  y la función definida en la Proposición 3.15  $f : \vec{G} \rightarrow \vec{G} \setminus v_i$  inducen inversas homotópicas en las cliques.

Observemos que

$$\begin{aligned} N[G, v_i] &= N^-(\vec{G}, v_i) \cup N^+(\vec{G}, v_i) \\ &\subset N^-(\vec{G}, v_{i+1}) \cup N^+(\vec{G}, v_{i+1}) \text{ por definición de vértices dominado y el Lema 3.11.3} \\ &= N[G, v_{i+1}] \end{aligned}$$

Por lo tanto, el link  $lk_{Cl(G)}(v_i)$  es un cono con ápice  $v_{i+1}$ . Luego por el Lema 1.9 se sigue que la inclusión  $Cl(i) : Cl(G \setminus v_i) \rightarrow Cl(G)$  es una equivalencia homotópica. Como la composición

$$Cl(\psi) \circ Cl(i) : Cl(G \setminus v_i) \rightarrow Cl(G) \rightarrow Cl(G \setminus v_i)$$

es la identidad entonces  $Cl(\psi)$  es también una equivalencia homotópica.  $\square$

El siguiente grafo va a ser muy importante en nuestro desarrollo pues vamos a ver que todo grafo cíclico se puede desmantelar a un grafo de este tipo.

**Definición 3.20.** Sean  $n, k \in \mathbb{N}_0$  tal que  $0 \leq k < n/2$ , el grafo dirigido  $\vec{C}_n^k$  tiene por vértices a  $V(\vec{C}_n^k) = \{0, 1, \dots, n-1\}$  y  $(i, i+s) \in E(\vec{C}_n^k)$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$  y  $s = 1, \dots, k$ .

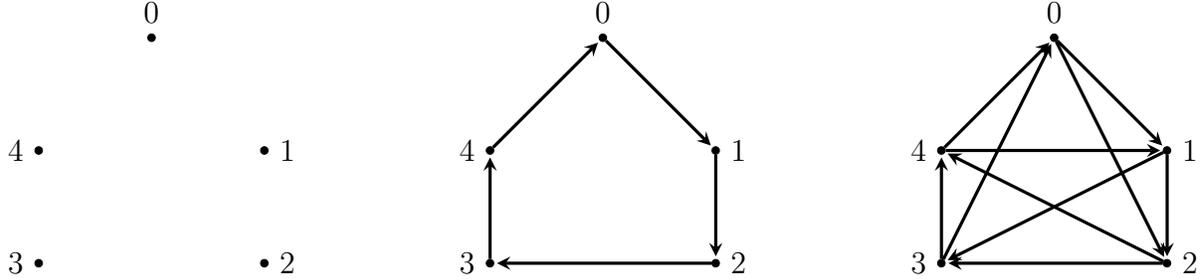


Figura 3.3: De izquierda a derecha los grafos cíclicos  $\vec{C}_5^0$ ,  $\vec{C}_5^1$  y  $\vec{C}_5^2$

Podemos visualizar un ejemplo de  $\vec{C}_n^k$  en la Figura 3.3 con  $n = 5$  y  $k = 0, 1, 2$ .

**Observación 3.21.** El grafo dirigido  $\vec{C}_n^k$  resulta cíclico tomando el orden cíclico  $0 < 1 < \dots < n - 1$ , pues si  $(i, i + s) \in E(\vec{C}_n^k)$  entonces  $0 < s \leq k$  y por definición se sigue que  $(i, i + s - 1), (i + 1, i + s) \in E(\vec{C}_n^k)$ . Más aún si  $k > 0$ ,  $\vec{C}_n^k$  tiene un ciclo dirigido, concretamente el ciclo formado por los vértices  $0, 1, \dots, n - 1$  pues para cada  $i = 0, \dots, n - 1$  la arista  $(i, i + 1) \in E(\vec{C}_n^k)$ .

También, notemos que la condición  $0 \leq k < n/2$  es necesaria pues si  $n$  es par y  $k \geq n/2$  entonces por definición  $(v_0, v_{n/2}), (v_{n/2}, v_n) \in E(\vec{C}_n^k)$ . Pero la última arista es  $(v_{n/2}, v_0)$  lo cual es absurdo pues  $\vec{C}_n^k$  es un grafo dirigido.

**Observación 3.22.** Fijando un origen arbitrario  $0 \in S^1$ , todo punto  $x \in S^1$  puede ser identificado con el numero real  $\vec{d}(0, x) \in [0, 1)$ . Por lo tanto, pensando los vértices de  $\vec{C}_n^k$  como los vértices de un  $n$ -ágono regular en  $S^1$  obtenemos que  $(i, j) \in E(\vec{C}_n^k)$  si y sólo si  $0 < n \vec{d}(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) \leq k$ .

Tomamos  $\epsilon > 0$  tal que  $0 \leq k + \epsilon < \frac{n}{2}$  y  $0 < n \vec{d}(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) < k + \epsilon$  si y sólo si  $0 < n \vec{d}(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) \leq k$ . Entonces  $\vec{C}_n^k = \vec{R}(\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\}; \frac{k}{n} + \epsilon)$ .

**Proposición 3.23.** Un grafo cíclico sin vértices dominados es isomorfo a  $\vec{C}_n^k$  para algún par  $0 \leq k < n/2$ . Por lo tanto, todo grafo cíclico se desmantela a un subgrafo inducido isomorfo a  $\vec{C}_n^k$ .

*Demostración.* Sea  $\vec{G}$  un grafo cíclico con un orden cíclico en el conjunto de vértices dado por  $v_0 < \dots < v_{n-1}$ , sin vértices dominados. Por el Lema 3.11.3 y como no hay vértices dominados se tiene que  $N^-(\vec{G}, v_{i+1})$  es un subconjunto propio de  $N^-(\vec{G}, v_i)$ .

Consideramos  $N_i = N^-(\vec{G}, v_i) \setminus N^-(\vec{G}, v_{i+1})$  para  $i = 0, \dots, n - 1$ . Afirmamos que son disjuntos dos a dos, pues si  $w \in N_i \cap N_j$  con  $i < j$  entonces  $(w, v_i), (w, v_j) \in E$  y,

por lo tanto,  $w \in N^-(\vec{G}, v_{i+1})$  lo cual es absurdo. Entonces  $\sqcup_{i=0}^{n-1} N_i = X$ , en particular

$$n = |X| = \left| \bigsqcup_{i=0}^{n-1} N_i \right| = \sum_{i=0}^{n-1} |N_i|$$

De donde podemos concluir que  $|N_i| = 1$  y que

$$|N^-(\vec{G}, v_{i+1})| = |N^-(\vec{G}, v_i)] - 1 = |N^-(\vec{G}, v_i) \cup \{v_i\}| - 1 = |N^-(\vec{G}, v_i)|.$$

Luego si  $k = |N^-(\vec{G}, v_i)|$ , por el Lema 3.11.2 obtenemos que  $N^-(\vec{G}, v_i) = \{v_{i-k}, \dots, v_i\}$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$  y, por lo tanto,  $\vec{G}$  es isomorfo  $\vec{C}_n^k$ .  $\square$

### 3.3. Winding fraction y la clasificación de los tipos homotópicos

En este apartado desarrollamos un invariante de los grafos cíclicos, el winding fraction. Como  $\vec{R}(X; r)$  es un grafo cíclico vamos a usar este invariante para clasificar su tipo homotópico, pues vimos en la sección anterior que todo grafo cíclico se desmantela a un grafo  $\vec{C}_n^k$ . Veremos que los coeficientes  $k$  y  $n$  los da el winding fraction y, por lo tanto, basta calcular los tipos homotópicos de  $Cl(C_n^k)$ . Estos los da el siguiente teorema [1, Corollary 6.7] que enunciamos sin demostración, pues ella diverge del tema central de la tesis.

**Teorema 3.24.** [1, Corollary 6.7]

$$Cl(C_n^k) \simeq \begin{cases} S^{2l+1} & \text{si } \frac{l}{2l+1} < \frac{k}{n} < \frac{l+1}{2l+3} \text{ para algún } l \geq 0 \\ \sqrt{n-2k-1} S^{2l} & \text{si } \frac{k}{n} = \frac{l}{2l+1} \text{ para algún } l \geq 0 \end{cases}$$

**Ejemplo 3.25.** Veamos algunos ejemplos de posibles tipos homotópicos para las cliques  $Cl(C_n^k)$ . En primer lugar observemos que  $Cl(C_n^1)$  es el borde de un polígono si  $n > 3$  y, por lo tanto, tiene el tipo homotópico de  $S^1$ . Por otro lado, la clique  $Cl(C_{2n}^2)$ , si  $n > 3$ , es homotópicamente equivalente a  $S^1 \times I$ , pues la clique de los vértices pares es el borde de un n-ágono así como también la clique de los vértices impares. Cada uno de los vértices pares forma un 2-símplex con 2 vértices impares y viceversa, de donde obtenemos una triangulación de  $S^1 \times I$ . Finalmente este espacio resulta ser homotópicamente equivalente a  $S^1$ .

Si ahora consideramos la clique del grafo  $C_6^2$  resulta que esta es simplemente la suspensión del cuadrado de vértices  $0, 1, 3, 4$ , con lo cual su tipo homotópico es el de  $S^2$ . Inductivamente  $C_{2(n+1)}^n$  resulta ser la suspensión de  $C_{2n}^{n-1}$  y, por lo tanto, tiene el tipo homotópico de  $S^n$ .

**Definición 3.26.** El winding fraction de un grafo cíclico  $\vec{G}$  se define como

$$wf(\vec{G}) = \sup\left\{\frac{k}{n} : \text{existe un morfismo cíclico } \vec{C}_n^k \rightarrow \vec{G}\right\}$$

**Lema 3.27.** *Propiedades del winding fraction*

1.  $wf(\vec{G}) > 0$  si y sólo si  $\vec{G}$  tiene un ciclo dirigido.
2. Si existe un morfismo cíclico  $\vec{G} \rightarrow \vec{H}$  entonces  $wf(\vec{G}) \leq wf(\vec{H})$ .
3. Si  $X \subset S^1$  finito y  $0 < r < 1/2$  entonces  $wf(\vec{R}(X; r)) < r$
4.  $wf(\vec{C}_n^k) = \frac{k}{n}$ .

*Demostración.*

1. Si  $\vec{G}$  tiene un ciclo dirigido por el Lema 3.11.5 la función  $g : j \in \vec{C}_n^1 \mapsto v_j \in \vec{G}$  define un morfismo cíclico, donde  $n = |V(\vec{G})|$ . Recíprocamente si  $\vec{G}$  no tiene ciclos dirigidos, admite un morfismo cíclico de  $\vec{C}_n^0$  pero no de  $\vec{C}_n^k$  con  $k > 0$ , pues este tiene un ciclo dirigido y por Lema 3.13.1  $\vec{G}$  tendría uno. Por lo tanto,  $wf(\vec{G}) = 0$ .
2. Sea  $g : \vec{C}_n^k \rightarrow \vec{G}$  morfismo cíclico. Por el Lema 3.13.2 tenemos que  $f \circ g : \vec{C}_n^k \rightarrow \vec{H}$  es un morfismo cíclico y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} wf(\vec{G}) &= \sup\left\{\frac{k}{n} : \text{existe morfismo cíclico } \vec{C}_n^k \rightarrow \vec{G}\right\} \\ &\leq \sup\left\{\frac{k}{n} : \text{existe morfismo cíclico } \vec{C}_n^k \rightarrow \vec{H}\right\} = wf(\vec{H}) \end{aligned}$$

3. Supongamos que  $f : \vec{C}_n^k \rightarrow \vec{R}(X; r)$  es un morfismo cíclico con  $k \geq 1$ , en particular es un morfismo entre grafos dirigidos y, por lo tanto, para todo  $i = 0, \dots, n-1$  tenemos que  $0 < \vec{d}(f(i), f(i+k)) < r$ . Como todo arco en  $S^1$  de la forma  $[f(j), f(j+1)]$  está cubierto por exactamente  $k$  arcos de la forma  $[f(i), f(i+k)]$ , concretamente los arcos  $[f(j+1-s), f(j+1-s+k)]$  con  $s = 1, \dots, k$ , se sigue que

$$nr > \sum_{i=0}^{n-1} d(f(i), f(i+k)) = k \sum_{j=0}^{n-1} \vec{d}(f(j), f(j+1)) = k$$

donde la última igualdad es válida pues como  $f$  es cíclica monótona y no constante,  $f(1), \dots, f(n-1)$  es un ciclo en  $S^1$  entonces  $\sum_j \vec{d}(f(j), f(j+1)) =$  perímetro normalizado de  $S^1 = 1$ .

4. El morfismo identidad  $id : \overrightarrow{C}_n^k \rightarrow \overrightarrow{C}_n^k$  es un morfismo cíclico entonces por definición  $wf(\overrightarrow{C}_n^k) \geq \frac{k}{n}$ . Por otro lado considerando  $X = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$  vértices de un  $n$ -ágono regular en  $S^1$ , por la Observación 3.22 para un  $\epsilon > 0$  suficientemente chico  $\overrightarrow{R}(X; \frac{k}{n} + \epsilon) = \overrightarrow{C}_n^k$ . Por la parte 3 del lema actual se sigue que  $\frac{k}{n} + \epsilon > wf(\overrightarrow{C}_n^k)$  y como  $\epsilon$  era arbitrariamente chico, se tiene que  $\frac{k}{n} \geq wf(\overrightarrow{C}_n^k)$ .  $\square$

Concluimos este capítulo con la clasificación del tipo homotópico del complejo de Vietori-Rips de un subconjunto de  $S^1$ .

**Teorema 3.28.** *Sea  $\overrightarrow{G}$  un grafo cíclico, entonces*

$$Cl(G) \simeq \begin{cases} S^{2l+1} & \text{si } \frac{l}{2l+1} < wf(\overrightarrow{G}) < \frac{l+1}{2l+3} \text{ para algún } l \geq 0 \\ \sqrt{n-2k-1} S^{2l} & \text{si } wf(\overrightarrow{G}) = \frac{l}{2l+1} \text{ y } \overrightarrow{G} \text{ se desmantela a } \overrightarrow{C}_n^k \end{cases}$$

*Demostración.* Por la Proposición 3.23,  $\overrightarrow{G}$  se desmantela a un subgrafo inducido isomorfo a  $\overrightarrow{C}_n^k$  para algún  $n, k$ . Dado que existen morfismos cíclicos  $\overrightarrow{G} \rightarrow \overrightarrow{C}_n^k$  y  $\overrightarrow{C}_n^k \rightarrow \overrightarrow{G}$ , el inducido por el desmantelamiento y la inclusión respectivamente, vía el Lema 3.27.2 concluimos que  $wf(\overrightarrow{G}) = wf(\overrightarrow{C}_n^k)$  y por el Lema 3.27.4 que  $wf(\overrightarrow{G}) = \frac{k}{n}$ . Finalmente por el Teorema 3.24 se sigue el resultado.  $\square$

**Corolario 3.29.** *Sea  $X \subset S^1$  finito,  $0 < r' < 2$  entonces*

$$\mathcal{R}(X; r) \simeq \begin{cases} S^{2l+1} & \text{si } \frac{l}{2l+1} < wf(\overrightarrow{R}(X; r)) < \frac{l+1}{2l+3} \text{ para algún } l \geq 0 \\ \sqrt{n-2k-1} S^{2l} & \text{si } wf(\overrightarrow{R}(X; r)) = \frac{l}{2l+1} \text{ y } \overrightarrow{R}(X; r) \text{ se desmantela a } \overrightarrow{C}_n^k \end{cases}$$

*Demostración.* Como  $\mathcal{R}(X; r') = Cl(\mathcal{R}(X; r))$ , donde  $r$  es tal que  $r' = \sqrt{2(1 - \cos(2\pi r))}$ , y  $\overrightarrow{R}(X; r)$  es un grafo cíclico. Entonces, por el teorema anterior, se sigue la conclusión.  $\square$

### 3.4. Vietoris-Rips en una poligonal

A continuación estudiamos el complejo de Vietoris-Rips  $\mathcal{R}(X; r)$  cuando  $X$  es un subconjunto finito de una poligonal convexa cerrada  $\mathcal{C}$ . Vemos qué valores puede tomar el parámetro  $r$  para construir un grafo cíclico  $\overrightarrow{R}(X; r)$  que coincida con el 1-esqueleto de  $\mathcal{R}(X; r)$ .

**Ejemplo 3.30.** Sea  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  el borde de un cuadrado de vértices consecutivos  $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$  ordenados en sentido horario tales que  $|v_k v_{k+1}| = 1$  para  $k = 0, 1, 2, 3$ , y sea  $X$  un subconjunto finito allí. Tomamos algún  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$  tal que  $X \cap \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\} \neq \emptyset$



Figura 3.4: (1) A la izquierda el conjunto  $X \subset \mathcal{C}$  ordenado en sentido horario. (2) A la derecha  $X \subset \mathcal{C}$ ,  $1 < r \leq \sqrt{\frac{5}{4}}$  y  $\mathcal{R}(X; r) \simeq S^1 \vee S^1$ .

y sea  $x$  el elemento de esta intersección más cercano a  $v_k$ . A partir de  $x$  ordeno los elementos de  $X$  en sentido horario, ver Figura 3.4.1 para el caso  $x \in \text{conv}\{v_0, v_1\}$ . La idea es que en una misma arista todos los elementos de  $X$  estén enumerados sucesivamente.

Sea  $0 < r \leq 1$ , construimos el grafo  $\vec{\mathcal{R}}(X; r) = (X, E)$ , para cada par de elementos  $x_i, x_j \in X$  tales que  $|x_i x_j| < r$  agregamos una arista según el siguiente criterio

- si  $x_i, x_j \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$  y  $i < j$  entonces agrego  $(x_i, x_j)$  a  $E$ .
- si  $x_i \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$ ,  $x_j \in \text{conv}\{v_{k+1}, v_{k+2}\}$  agrego  $(x_i, x_j)$  a  $E$ .

Notemos que vértices en lados opuestos no se conectan dado que la distancia entre los lados opuestos es exactamente 1. Veamos que  $\vec{\mathcal{R}}(X; r)$  así definido es un grafo cíclico. Sea  $(x_i, x_j) \in E$  tal que  $i + 1 \neq j \pmod{n}$

- si  $x_i, x_j \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$  entonces  $x_{i+1}, x_{j-1} \in \text{conv}\{x_i, x_j\}$  y, por lo tanto,  $|x_{i+1} x_{j-1}|, |x_i, x_{j-1}| \leq |x_i, x_j| < r$ . Como  $x_{i+1}, x_{j-1} \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$ ,  $i + 1 < j$  y  $i < j - 1$  obtenemos que  $(x_i, x_{j-1}), (x_{i+1}, x_j) \in E$ .
- si  $x_i \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$  y  $x_j \in \text{conv}\{v_{k+1}, v_{k+2}\}$  entonces  $x_{i+1}, x_{j-1} \in \text{conv}\{x_i, x_j, v_{k+1}\}$ . Por Pitágoras  $|x_i v_{k+1}|, |v_{k+1} x_j| \leq |x_i x_j|$  y por el Lema 2.13 obtenemos

$$\text{diam}(\text{conv}\{x_i, x_j, v_{k+1}\}) = \text{diam}\{x_i, x_j, v_{k+1}\} = |x_i x_j| < r$$

Por lo tanto,  $|x_{i+1} x_{j-1}|, |x_i x_{j-1}| < r$ . Si  $x_{i+1} \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$  entonces  $(x_{i+1}, x_j) \in E$ . Si no  $x_{i+1} \in \text{conv}\{v_{k+1}, v_{k+2}\}$ , como  $i + 1 < j$  obtenemos que  $(x_{i+1}, x_j) \in E$ . Análogamente  $(x_i, x_{j-1}) \in E$ .

Finalmente  $\vec{\mathcal{R}}(X; r)$  resulta cíclico y como  $\mathcal{R}(X; r) = Cl(\vec{\mathcal{R}}(X; r))$ , por el Teorema 3.28 obtenemos que

$$\mathcal{R}(X; r) \simeq \begin{cases} S^{2l+1} & \text{si } \frac{l}{2l+1} < wf(\vec{\mathcal{R}}(X; r)) < \frac{l+1}{2l+3} \text{ para algún } l \geq 0 \\ \bigvee^{n-2k-1} S^{2l} & \text{si } wf(\vec{\mathcal{R}}(X; r)) = \frac{l}{2l+1} \text{ y } \vec{\mathcal{R}}(X; r) \text{ se desmantela a } \vec{C}_n^k \end{cases}$$

Sea ahora  $1 < r \leq \sqrt{\frac{5}{4}}$  y  $X = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \frac{v_0+v_1}{2}, \frac{v_2+v_3}{2}\}$  entonces el complejo de Vietoris-Rips  $\mathcal{R}(X; r)$  tiene el tipo homotópico  $S^1 \vee S^1$ , ver Figura 3.4.2. Por el contrareciproco del Teorema 3.28 su 1-esqueleto no admite una orientación cíclica.

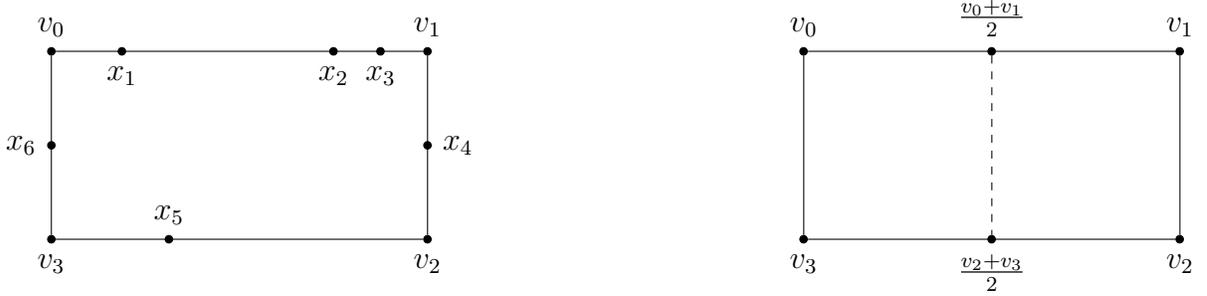


Figura 3.5: (1) A la izquierda el conjunto  $X \subset \mathcal{C}$  ordenado en sentido horario. (2) A la derecha  $X \subset \mathcal{C}$ ,  $1 < r \leq \sqrt{\frac{5}{4}}$  y  $\mathcal{R}(X; r) \simeq S^1 \vee S^1$ .

**Ejemplo 3.31.** Sea  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  el borde de un rectángulo de vértices consecutivos  $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$  ordenados en sentido horario tales que  $|v_1v_2| = |v_3v_0| = l_1 \leq |v_0v_1| = |v_2v_3| = l_2$  y sea  $X$  un subconjunto finito allí, ver Figura 3.5.1. Si  $0 < r \leq l_1$ , haciendo la misma construcción del ejemplo anterior vemos que  $\vec{\mathcal{R}}(X; r)$  es un grafo cíclico y, por lo tanto, se sigue la misma clasificación del tipo homotópico de  $\mathcal{R}(X; r)$ . En cambio si  $l_1 < r < \sqrt{\frac{l_2^2}{4} + l_1^2}$ , de manera análoga al ejemplo anterior consideramos

$$X = \left\{ \frac{v_0 + v_1}{2}, v_0\epsilon + (1 - \epsilon)v_1, v_1\epsilon + (1 - \epsilon)v_0, \frac{v_2 + v_3}{2}, v_3\epsilon + (1 - \epsilon)v_2, v_2\epsilon + (1 - \epsilon)v_3 \right\}$$

Donde  $\epsilon = \left(\frac{l_2}{2} + \sqrt{r^2 - l_1^2}\right) \frac{1}{l_2}$ , con lo cual los elementos de  $X$  no se conectan en diagonal. Se sigue que  $\mathcal{R}(X; r)$  tiene el tipo homotópico de  $S^1 \vee S^1$  y por el contrareciproco del Teorema 3.28 su 1-esqueleto no admite una orientación cíclica, ver Figura 3.5.2.

Una manera de generalizar los ejemplos anteriores a todas las curvas poligonales cerradas convexas es la siguiente.

**Teorema 3.32.** Sea  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  una poligonal convexa cerrada con vértices ordenados en sentido horario  $\{v_k\}_{k=0}^n$ , donde  $n > 2$ , tales que el ángulo  $\angle v_k v_{k+1} v_{k+2} \geq \frac{\pi}{2}$  para todo  $k = 0, \dots, n$ , y sea  $X \subset \mathcal{C}$  un subconjunto finito. Si

$$0 < r \leq \min_{k=0, \dots, n} |v_k v_{k+1}|$$

entonces existe un grafo cíclico  $\vec{R}(X; r)$  que coincide con el 1-esqueleto de  $\mathcal{R}(X; r)$  y, por lo tanto,

$$\mathcal{R}(X; r) \simeq \begin{cases} S^{2l+1} & \text{si } \frac{l}{2l+1} < wf(\vec{R}(X; r)) < \frac{l+1}{2l+3} \text{ para algún } l \geq 0 \\ \sqrt{n-2k-1}S^{2l} & \text{si } wf(\vec{R}(X; r)) = \frac{l}{2l+1} \text{ y } \vec{R}(X; r) \text{ se desmantela a } \vec{C}_n^k \end{cases}$$

Antes de dar la demostración veamos que la hipótesis sobre los ángulos es necesaria.

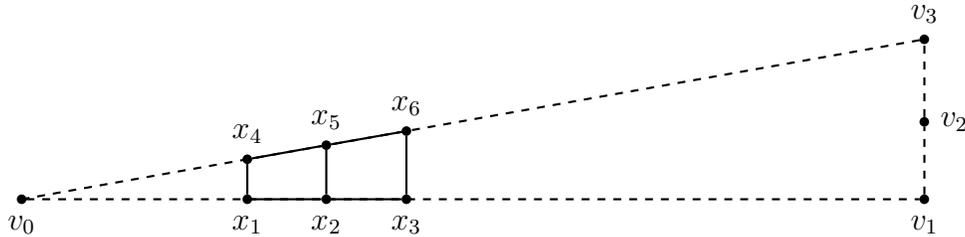


Figura 3.6

**Ejemplo 3.33.** Consideramos los puntos  $x_1 = (0, 0)$ ,  $x_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ,  $x_3 = (\sqrt{2}, 0)$ ,  $x_4 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $x_5 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1+\epsilon\sqrt{2}}{2})$ ,  $x_6 = (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon)$  con  $0 < \epsilon < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $r = 1$ . Sean  $X = \{x_i\}_{i=1}^6$  y la poligonal de vértices  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$  que contiene a  $X$  tal que  $|v_1v_2| = |v_3v_2| > |x_3x_6|$ , ver Figura 3.6. Por un lado, se cumple que  $0 < r \leq \min_{k=1,2,3} |v_k, v_{k+1}|$  y, por otro lado, el tipo homotópico del complejo  $\mathcal{R}(X; r)$  es  $S^1 \vee S^1$ . Por el contrarecíproco del Teorema 3.28, obtenemos que el 1-esqueleto del complejo  $\mathcal{R}(X; r)$  no admite una orientación cíclica.

El siguiente lema va a ser de utilidad en la demostración del Teorema 3.32.

**Lema 3.34.** Sea  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  una poligonal convexa cerrada con vértices ordenados en sentido horario  $\{v_k\}_{k=0}^n$ , donde  $n > 2$ , tales que el ángulo  $\angle v_k v_{k+1} v_{k+2} \geq \frac{\pi}{2}$  para todo  $k = 0, \dots, n$ . Entonces

$$\min_{k \neq k', k+1 \neq k', k'+1 \neq k} \text{dist}(\text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}, \text{conv}\{v_{k'}, v_{k'+1}\}) = \min_{k=0, \dots, n} |v_k v_{k+1}|$$

*Demostración.* Sean  $x \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$  e  $y \in \text{conv}\{v_{k'}, v_{k'+1}\}$  tales que  $k \neq k'$ ,  $k+1 \neq k'$  y  $k'+1 \neq k$ , es decir, que no están en lados adyacentes, quiero ver que  $|xy| \geq \min_{k=0, \dots, n} |v_k v_{k+1}|$ . Supongamos además que las rectas  $\overline{v_k v_{k+1}}$  y  $\overline{v_{k'} v_{k'+1}}$  no son paralelas y, por lo tanto, existe  $s = \overline{v_k v_{k+1}} \cap \overline{v_{k'} v_{k'+1}}$ .

La recta  $\overline{xy}$  separa el plano en dos semiespacios convexos cerrados y en alguno de ellos está  $s$ , allí consideramos  $v$  el anteúltimo vértice más lejano de  $\overline{xy}$ . Sea  $L$  la recta paralela a  $\overline{xy}$  que interseca  $v$ , ver Figura 3.7.

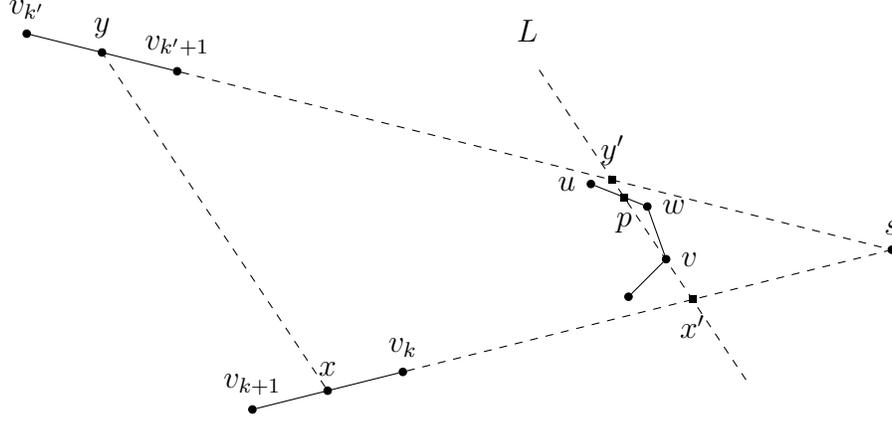


Figura 3.7

Sean  $x'$  e  $y'$  los puntos de la intersección de  $L$  con  $\overline{v_k v_{k+1}}$  y con  $\overline{v_{k'} v_{k'+1}}$  respectivamente. Por semejanza resulta que  $|xy| \geq |x'y'|$ . Si  $w$  es el vértice más lejano, entonces  $wv$  es un lado de la poligonal. Si  $\text{conv}\{w, v\} \subset \text{conv}\{x', y'\}$  se sigue el resultado, pues en tal caso  $|xy| \geq |x'y'| \geq |wv|$ . Si no, entonces existe un vértice  $u \neq v, w$  tal que  $L$  interseca  $\text{conv}\{u, w\}$  en un punto  $p$ , pues  $v$  es el anteúltimo vértice. Como el ángulo  $\angle p w v$  es obtuso o recto, por el Teorema del coseno  $|pv|$  resulta ser mayor o igual que  $|wv|$ . Luego

$$|xy| \geq |x'y'| \geq |pv| \geq |wv| \geq \min_{k=0, \dots, n} |v_k v_{k+1}|$$

Si los lados son paralelos se hace el mismo razonamiento pero es indistinto en que semiespacio cerrado se tome el anteúltimo vértice. La otra desigualdad es inmediata de la definición y, por lo tanto, se sigue el lema.  $\square$

*Demostración del Teorema 3.32.* Tomamos algún  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  tal que  $X \cap \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\} \neq \emptyset$  y sea  $x$  el elemento de esta intersección más cercano a  $v_k$ . A partir de  $x$  ordeno los elementos de  $X$  en sentido horario.

Notemos que si  $x_i, x_j$  no están en lados consecutivos entonces por el Lema 3.34  $|x_i x_j| \geq r$ . Construimos el grafo  $\vec{R}(X; r) = (X, E)$ , para cada par de elementos  $x_i, x_j \in X$  tales que  $|x_i x_j| < r$  agregamos la arista según el siguiente criterio:

- si  $x_i, x_j \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$  y  $i < j$  entonces agrego  $(x_i, x_j)$  a  $E$ .
- si  $x_i \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$  y  $x_j \in \text{conv}\{v_{k+1}, v_{k+2}\}$  agrego  $(x_i, x_j)$  a  $E$ .

Veamos que  $\vec{R}(X; r)$  así definido es un grafo cíclico. Si  $(x_i, x_j) \in E$  tal que  $i+1 \neq j \pmod{n}$

- si  $x_i, x_j \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$  entonces  $x_{i+1}, x_{j-1} \in \text{conv}\{x_i, x_j\}$  y, por lo tanto,  $|x_{i+1} x_j|, |x_i, x_{j-1}| \leq |x_i, x_j| < r$ . Como  $x_{i+1}, x_{j-1} \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$ ,  $i+1 < j$  y  $i < j-1$  obtenemos que  $(x_i, x_{j-1}), (x_{i+1}, x_j) \in E$ .

- si  $x_i \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$  y  $x_j \in \text{conv}\{v_{k+1}, v_{k+2}\}$  entonces  $x_{i+1}, x_{j-1} \in \text{conv}\{x_i, x_j, v_{k+1}\}$ . Como el ángulo  $\angle x_i v_{k+1} x_j$  es mayor o igual que  $\frac{\pi}{2}$ , por el Teorema del coseno se sigue que  $|x_i v_{k+1}|, |v_{k+1} x_j| \leq |x_i x_j|$  y por el Lema 2.13 obtenemos

$$\text{diam}(\text{conv}\{x_i, x_j, v_{k+1}\}) = \text{diam}(\{x_i, x_j, v_{k+1}\}) = |x_i x_j| < r$$

Por lo tanto,  $|x_{i+1} x_j|, |x_i x_{j-1}| < r$ . Si  $x_{i+1} \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$  entonces  $(x_{i+1}, x_j) \in E$ . Si no  $x_{i+1} \in \text{conv}\{v_{k+1}, v_{k+2}\}$ , como  $i + 1 < j$  entonces  $(x_{i+1}, x_j) \in E$ . Análogamente  $(x_i, x_{j-1}) \in E$ .

Finalmente  $\vec{R}(X; r)$  resulta cíclico y como  $\mathcal{R}(X; r) = \text{Cl}(\vec{R}(X; r))$  entonces por el Teorema 3.28 se sigue el resultado.  $\square$

A continuación vemos que para poligonales regulares podemos dar una cota mejor para el parámetro de conexión  $r$ .

**Proposición 3.35.** *Sea  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  una poligonal regular con vértices ordenados en sentido horario  $\{v_k\}_{k=0}^{2n-1}$ , donde  $n > 1$ , y sea  $X \subset \mathcal{C}$  un subconjunto finito. Si  $0 < r \leq |v_0 v_{n+1}|$  entonces existe  $\vec{R}(X; r)$  grafo cíclico que coincide con el 1-esqueleto de  $\mathcal{R}(X; r)$  y, por lo tanto,*

$$\mathcal{R}(X; r) \simeq \begin{cases} S^{2l+1} & \text{si } \frac{l}{2l+1} < \text{wf}(\vec{R}(X; r)) < \frac{l+1}{2l+3} \text{ para algún } l \geq 0 \\ \sqrt{n-2k-1} S^{2l} & \text{si } \text{wf}(\vec{R}(X; r)) = \frac{l}{2l+1} \text{ y } \vec{R}(X; r) \text{ se desmantela a } \vec{C}_n^k \end{cases}$$

*Demostración.* Tomamos algún  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  tal que  $X \cap \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\} \neq \emptyset$  y sea  $x$  el elemento de esta intersección más cercano a  $v_k$ . A partir de  $x$  ordeno los elementos de  $X$  en sentido horario.

Notemos que si  $x_i \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$  y  $x_j \in \text{conv}\{v_{k+n}, v_{k+1+n}\}$  entonces  $|x_i x_j| \geq r$ . Construimos el grafo  $\vec{R}(X; r) = (X, E)$ , para cada par de elementos  $x_i, x_j \in X$  tales que  $|x_i x_j| < r$  agregamos la arista según el siguiente criterio

- si  $x_i, x_j \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$  y  $i < j$  entonces agrego  $(x_i, x_j)$  a  $E$ .
- si  $x_i \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$ ,  $x_j \in \text{conv}\{v_{k+s}, v_{k+1+s}\}$  con  $s = 1, \dots, n-1$ , agrego  $(x_i, x_j)$  a  $E$ .

Veamos que  $\vec{R}(X; r)$  así definido es un grafo cíclico. Si  $(x_i, x_j) \in E$  tal que  $i + 1 \neq j \pmod{n}$  entonces

- si  $x_i, x_j \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$  entonces  $x_{i+1}, x_{j-1} \in \text{conv}\{x_i, x_j\}$  y, por lo tanto,  $|x_{i+1} x_j|, |x_i, x_{j-1}| \leq |x_i, x_j| < r$ . Como  $x_{i+1}, x_{j-1} \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$ ,  $i + 1 < j$  y  $i < j - 1$  obtenemos que  $(x_i, x_{j-1}), (x_{i+1}, x_j) \in E$ .

- si  $x_i \in \text{conv}\{v_k, v_{k+1}\}$  y  $x_j \in \text{conv}\{v_{k+s}, v_{k+1+s}\}$  para algún  $s = 1, \dots, n-1$  entonces  $x_{i+1}, x_{j-1} \in \text{conv}\{x_i, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{k+s}, x_j\}$ . Como el ángulo  $\angle x_i v_{k+l} x_j$  es mayor o igual que  $\frac{\pi}{2}$  para todo  $l = 1, \dots, s$ , por el Teorema del coseno se sigue que  $|x_i v_{k+l}|, |v_{k+l} x_j| \leq |x_i x_j|$  para todo  $i = l, \dots, s$ . Luego por el Lema 2.13 obtenemos

$$\begin{aligned} \text{diam}(\text{conv}\{x_i, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{k+s}, x_j\}) &= \text{diam}(\{x_i, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{k+s}, x_j\}) \\ &= |x_i x_j| < r \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $|x_{i+1} x_j|, |x_i x_{j-1}| < r$ . Si  $x_{i+1} \in \text{conv}\{v_{k+l}, v_{k+1+l}\}$  para algún  $l = 0, \dots, s-1$ , entonces  $(x_{i+1}, x_j) \in E$ . Si no  $x_{i+1} \in \text{conv}\{v_{k+s}, v_{k+1+s}\}$ , como  $i+1 < j$  obtenemos que  $(x_{i+1}, x_j) \in E$ . Análogamente  $(x_i, x_{j-1}) \in E$ .

Finalmente  $\vec{R}(X; r)$  resulta cíclico y como  $\mathcal{R}(X; r) = Cl(\vec{R}(X; r))$  entonces por el Teorema 3.28 se sigue el resultado.  $\square$

Veamos que la cota no se puede mejorar en el caso de una poligonal regular par.

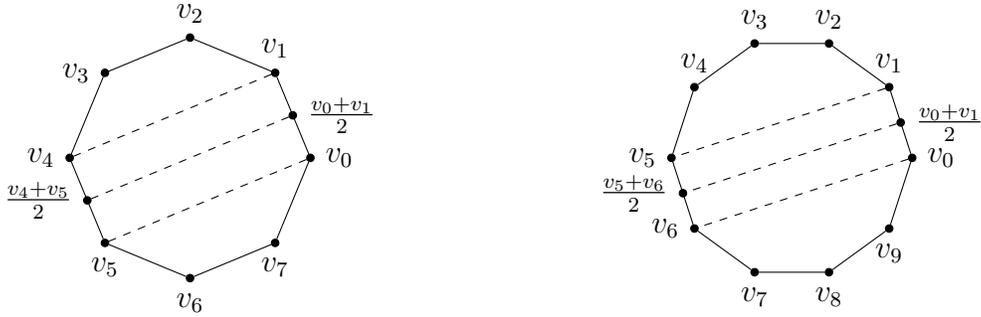


Figura 3.8

**Ejemplo 3.36.** Sea  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  una poligonal regular con vértices ordenados en sentido horario  $\{v_k\}_{k=0}^{2n-1}$ , donde  $n > 1$ . Si  $l$  denota a la longitud de un lado, consideramos

$$|v_0 v_{n+1}| < r < \sqrt{|v_0 v_{n+1}|^2 + \frac{l^2}{4}}$$

y  $X = \{v_0, v_1, \frac{v_0+v_1}{2}, v_n, v_{n+1}, \frac{v_n+v_{n+1}}{2}\}$ , ver Figura 3.8 para los casos  $n = 4, 5$ . Resulta que  $\mathcal{R}(X; r)$  es homotópicamente equivalente a  $S^1 \vee S^1$  y por el contrarecíproco del Teorema 3.28 resulta que su 1-esqueleto no admite un orientación cíclica.

# Bibliografía

- [1] Michał Adamaszek. Clique complexes and graph powers. *Israel Journal of Mathematics*, 196(1):295–319, 2013.
- [2] Michał Adamaszek and Henry Adams. The vietoris–rips complexes of a circle. *Pacific Journal of Mathematics*, 290(1):1–40, 2017.
- [3] Michał Adamaszek, Florian Frick, and Adrien Vakili. On homotopy types of euclidean rips complexes. *arXiv preprint arXiv:1602.04131*, 2016.
- [4] Dominique Attali, André Lieutier, and David Salinas. Vietoris–rips complexes also provide topologically correct reconstructions of sampled shapes. *Computational Geometry*, 46(4):448–465, 2013.
- [5] Jonathan Ariel Barmak and Elias Gabriel Minian. Strong homotopy types, nerves and collapses. *Discrete & Computational Geometry*, 47(2):301–328, 2012.
- [6] Albrecht Beutelspacher and Ute Rosenbaum. *Projective geometry: from foundations to applications*. Cambridge University Press, 1998.
- [7] Karol Borsuk. On the imbedding of systems of compacta in simplicial complexes. *Fundamenta Mathematicae*, 35(1):217–234, 1948.
- [8] Ronald Brown. *Topology and groupoids*. [www.groupoids.org](http://www.groupoids.org), 2006.
- [9] Gunnar Carlsson. Topology and data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46(2):255–308, 2009.
- [10] Erin W Chambers, Vin De Silva, Jeff Erickson, and Robert Ghrist. Vietoris–rips complexes of planar point sets. *Discrete & Computational Geometry*, 44(1):75–90, 2010.
- [11] Herbert Edelsbrunner and John Harer. *Computational topology: an introduction*. American Mathematical Society., 2010.
- [12] Mikhael Gromov. Hyperbolic groups. *Essays in group theory*, 8(75-263):2, 1987.

- [13] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. 2002.
- [14] Jean-Claude Hausmann et al. On the Vietoris-Rips complexes and a cohomology theory for metric spaces. *Annals of Mathematics Studies*, 138:175–188, 1995.
- [15] Jiří Matoušek. Lc reductions yield isomorphic simplicial complexes. *Contributions to Discrete Mathematics*, 3(2), 2008.
- [16] Partha Niyogi, Stephen Smale, and Shmuel Weinberger. Finding the homology of submanifolds with high confidence from random samples. *Twentieth Anniversary Volume.*, pages 1–23, 2009.
- [17] Richard Nowakowski and Peter Winkler. Vertex-to-vertex pursuit in a graph. *Discrete Mathematics*, 43(2-3):235–239, 1983.
- [18] Edward H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, 1966.
- [19] Robert E Stong. Finite topological spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 123(2):325–340, 1966.
- [20] Tammo Tom Dieck. *Algebraic topology*. European Mathematical Society, 2008.
- [21] Leopold Vietoris. Über den höheren zusammenhang kompakter räume und eine klasse von zusammenhangstreuen abbildungen. *Mathematische Annalen*, 97(1):454–472, 1927.