UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Operadores de Integral Doble y la conjetura de Krein para funciones Lipschitz

Franco Arrejoría

Director: Gabriel Larotonda

Fecha de Presentación: 13 de Marzo de 2017

Índice general

Agradecimientos

"Begin at the beginning,"the King said, very gravely, "and go on till you come to the end: then stop."

—Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

Al jurado por aceptar leer esta tesis.

A Gabriel por aceptar dirigirla, por su incansable ayuda y consejo, y por todo lo que aprendí haciendo este trabajo.

A mis padres. Gracias por el gran esfuerzo que hicieron, por apoyarme y alentarme constantemente a hacer aquello que me gusta.
Gracias papá por enseñarme a siempre dar lo mejor en todo lo que haga y a no conformarme con menos.
Gracias mamá por enseñarme a ponerle el corazón a la vocación que uno elige y a perseguir siempre mis sueños.

A mis hermanas. Gracias por su paciencia y su amor incodicional. Por los juegos, risas y peleas de cuando éramos chicos y por los de ahora, que ya no somos tan chicos. Gracias Nahir y Mayra por cuidarme y mimarme tanto. Las amo.

A mi tío Raul con quien viví mi primer tiempo en Buenos Aires. Gracias por tu compañía, por las charlas y los viajes. Todo es más fácil con la familia cerca.

A mi familia en el sur, que me acompañó y me alentó tanto estos años : Raquel, Mónica, Marcela, Alicia y Lucho entre tantos.

A mi tío Miguel que, con las manos sucias, seguro aplaude desde arriba y a mi tía Elba por todo el afecto que siempre me demostró.

A mi tío José Luis, por los veranos que pasamos en San Juan en la casa de la abuela y por los que vendrán en tu nueva casa.

A mis amigos, que estuvieron desde siempre acompañando a la distancia: Mati, Juli, Tuli, Peta, Manu, Maca, José y Jere. Gracias por su amistad.

A Kevin y Julian, por ser mi aire del sur acá en Buenos Aires, gracias por cada charla, salida y compañía.

A Eusebio, Monica, Laura, Sebastian y tantos otros buenos docentes que tuve la suerte de tener, y que me enseñaron que hacer matemáticas no es solo hacer cuentitas.

A José, Diego, Andres y Daniel por los años de Olimpíadas en el sur.

A Magus y Pame, por todas las cervezas en Paseo.

A Nico por tantas charlas este último año y por acompañarme en el camino.

A los que me acompañaron en estos años en Exactas, que fueron los mejores de mi vida.

A Mari por no haberme dejado huir y ser mi amiga.

A Joan por ser tan manija y, a la vez, un gran tipo.

A Agus, por su amistad, y por estar siempre a pesar de lo que le dije después de ese parcial de análisis.

A Guido, por arrastrarme al DC, y por tener siempre un problema para pensar.

A Ivan, por ser mi compañero y amigo en esta carrera desde el primer día.

A Nahuel, Tomás, Sebas, Juan, Vir, Nico, Fer, Nacho, Ariel, Mariano, Seba, Miguel, y tantos otros compañeros de los cuales aprendí bocha.

A Augusto, por las tardes de estudio.

A Sebas y Ezequiel por ser tan buenos compañeros. A la mesa de físicos de la Noriega, por adoptarme como uno más.

A Juan y Belén por los mates.

A tantos otros amigos, a los que lo son desde hace mucho, y a los que desde hace no tanto. De verdad, gracias.

Introducción

En 1877 Rayleigh dio una fórmula para computar los modos y frecuencias naturales de un conjunto de vibraciones, que varía ligeramente respecto de un sistema más simple para el cual las frecuencias y los modos están completamente determinados (ver [31] § 90, 91). Matemáticamente hablando, el método es equivalente a hallar una solución aproximada al problema de cálculo de autovalores para un operador lineal (*el operador sin perturbar*) que varía ligeramente de un operador más simple (*el operador perturbado*) para el cual el problema está completamente resuelto. Schrödinger en 1928, desarrolló un método similar, con más generalidad y sistemático con aplicaciones a la mecánica cuántica (ver [34]).
Estos primeros trabajos, si bien permitían resolver algunos problemas físicos que en principio parecían complicados eran, sin embargo, desarrollos formales y matemáticamente incompletos.
La teoría de perturbaciones para operadores lineales creada por Rayleigh y Schrödinger (ver [36]) estudia cómo cambian las propiedades espectrales (autovalores, autovectores, autoespacios, etc.) de un operador lineal a en un espacio vectorial X cuando se lo somete a una pequeña perturbación, en general de la forma

$$\tilde{a}(\varepsilon) = a + \varepsilon a^{(1)} + \varepsilon^2 a^{(2)} \ldots$$

donde $|\varepsilon|$ es pequeño. Una de las posibles preguntas a responder sobre este nuevo operador $\tilde{a}$, que depende del paramentro ε, es si es posible expresar los autovaloes y autovectores de $\tilde{a}(\varepsilon)$ como una serie de potencias en el parámetro ε en un entorno de $\varepsilon = 0$. Los fundamentos de la teoría general de perturbaciones de operadores lineales, tanto para el caso donde X es un espacio vectorial de dimensión finita como para el caso de dimensión infinita donde X es un espacio de Banach o de Hilbert está desarrollada por T. Kato en [20].

La teoría de perturbaciones estudia entonces cómo cambian las propiedades espectrales de un operador lineal. Dado un espacio de Hilbert separable H y un operador autoadjunto (posiblemente no acotado), uno de los principales resultados de la teoría espectral es el cálculo funcional que establece la existencia de una función $e^a : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(H)$ definida en los borelianos de $\mathbb{R}$ con valores en las proyecciones ortogonales de H, a la que llamamos medida espectral asociada a a, y para la cual vale el Teorema espectral (Teorema 3.10)

$$a = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, de^a_\lambda$$

y dada una función medible Borel f se le asocia el cálculo funcional de a que es un operador $f(a)$ dado por

$$f(a) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, de^a_\lambda.$$

Luego tiene sentido plantearse el siguiente problema: Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un operador lineal autoadjunto a, ¿cómo cambia el cálculo funcional $f(a)$ si perturbamos un poco el operador a? Para darle un planteo correcto a este problema habría que considerar que significa *perturbar un poco* un operador a, es decir, definir alguna métrica que determine cuando dos operadores están cerca uno del otro.

En principio, si a es un operador autoadjunto y suponemos que b es un operador autoadjunto que resulta de realizar una perturbación a a uno esperaría que el operador $a-b$ tenga una extensión acotada a todo el espacio de Hilbert H. Más aún, si la perturbación es de verdad pequeña, uno esperaría que el operador $f(a) - f(b)$ también tenga una extensión acotada en todo H.

De esta manera, dada una norma en $\mathcal{B}(H)$ uno llega a la pregunta de si se podrá establecer una relación entre $\|f(a) - f(b)\|$ en función de $\|a - b\|$. Claramente la pregunta depende tanto de la norma de operadores que se esté considerando como de la función f. En particular uno podría preguntarse para qué funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vale la desigualdad

$$\|f(a) - f(b)\| \leq C \|a - b\| \tag{1}$$

para operadores a y b con $\|a - b\| < \infty$. Tales funciones se llaman *Lipschitz de operadores*.

Es claro que, si f es una función Lipschitz de operadores, entonces es *Lipschitz*, es decir,

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|,$$

para $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Notamos $Lip(\mathbb{R})$ a la clase de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Lipschitz. Entonces podemos preguntarnos si, dada una norma $\mathcal{B}(H)$, toda función Lipschitz es Lipschitz de operadores.

La primer referencia que se encuentra a esta pregunta es de M. G. Krein (ver [22]) que conjeturó en 1964 que la condición $f' \in L^\infty$ es suficiente para que valga (1) para operadores a y b en la clase de traza $\mathcal{S}^1$. Sin embargo, esta conjetura fue refutada por Yu. Farforovskaya en 1973[15].

Anteriormente, en 1967, Farforovskaya estableció que la conjetura análoga a la de Krein no vale para el caso donde la norma es la norma usual de operadores y $a - b \in \mathcal{S}^\infty = \mathcal{K}(H)$([13][14]). Luego, T. Kato [19](respectivamente E.B Davies,[8]) demostró que la función $f(t) = |t|$ no cumple la propiedad (1) para $\mathcal{S}^1$ (respectivamente para $\mathcal{S}^\infty$).

Las funciones Lipschitz de operadores juegan un rol importante en la teoría de operadores y en la física matemática. En particular, aparecen al estudiar la aplicabilidad de la formula de traza de Lifshits-Krein (ver [23])

$$\operatorname{tr}(f(a) - f(b)) = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\xi(t)dt. \tag{2}$$

En la formula, a y b son operadores autoadjuntos en H con $a - b \in \mathcal{S}^1$ y ξ es una función en $L^1(\mathbb{R})$(*spectral shift function*) que depende sólo de a y b. Claramente el lado derecho de (2) tiene sentido para cualquier funcion f Lipschitz. Por su parte, en el lado izquierdo, por lo visto en el ejemplo de Farfarovskaya en [15], la condición de que $a - b \in \mathcal{S}^1$ y $f \in Lip(\mathbb{R})$ no garantizan que $f(a) - f(b) \in \mathcal{S}^1$. Luego, para aplicar la fórmula de traza (2) para operadores autoadjuntos con diferencia en la clase de traza, uno tiene que imponer condiciones más fuertes sobre f. Por lo menos, f tiene que tener la siguiente propiedad:

$$a - b \in \mathcal{S}^1 \implies f(a) - f(b) \in \mathcal{S}^1 \tag{3}$$

para operadores a y b autoadjuntos. Para una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, que valga la propiedad (3) para operadores autoadjuntos es equivalente a que f sea una función Lipschitz de operadores en $\mathcal{S}^1$ (ver [1, Teorema 3.6.5]). En 2016, V.V Peller (ver [25]) demostró que la condición (3), y por lo tanto, que f sea Lipschitz de operadores, no es sólo necesaria para la validez de la formula de traza (2), sino que también es suficiente.

Entonces, tenemos que la conjetura de Krein no vale para operadores autoadjuntos a y b que satisfagan $a - b \in \mathcal{S}^p$ con $p = 1, \infty$. Pero si tiene sentido plantearse el análogo a la conjetura de Kreǐn para los espacios p-Schatten $\mathcal{S}^p$ (ver Capítulo 1), es decir, si es cierto que una función $f \in Lip(\mathbb{R})$ satisface que

$$\|f(a) - f(b)\|_{\mathcal{S}^p} \leq C_p \|a - b\|_{\mathcal{S}^p} \tag{4}$$

siempre que $a - b \in \mathcal{S}^p$. Llamemos F_p al conjunto de funciones f que satisfacen (4). Por ejemplo, se tiene que $f(t) = |t| \in F_p$ para $1 < p < \infty$ (ver [8]). Otra condición suficiente para garantizar que $f \in F_p$ para $1 < p < \infty$, obtenida en [8], establece que f' tiene que estar acotada y ser de variación acotada.
Por otro lado, con respecto al problema de describir las clases F_p para $1 < p < \infty$ con $p \neq 2$, en su trabajo [16], Yu. Farfarovskaya observó que "un pequeño cambio en la demostración en [15]" lleva a la existencia de una función Lipschitz f_p que no pertenece a F_p para todo $1 < p < 2$, y luego continuó con un "ejemplo" explícito de una función f_p tal que $f_p' \in L^\infty$, pero $f_p \notin F_p$, con $2 < p < \infty$. Con respecto al mismo problema, en [26], V. Peller conjeturó que $f \in F_p$, $1 \leq p < 2$, implicaba que los coeficientes lagunares de

Fourier de f' satisfacen

$$\{\hat{f}'(2^n)\}_{n\geq 0} \in \ell^p.$$

En 2011 D. Potapov y F. Sukochev establecieron que vale la conjetura de Krein para $1 < p < \infty$, esto es que $f' \in L^\infty$ implica que $f \in F_p$. Equivalentemente, F_p para $1 < p < \infty$ coincide con la clase de funciones Lipschitz. En particular, esto muestra que la observación de Farfarovskaya respecto a $F_p, 1 < p < 2$, y su resultado para $F_p, 2 < p < \infty$, dados en [16] *no* son ciertos, y que la conjetura de V. Peller en [26] tampoco lo es.
La demostración de Potapov y Sukochev es una aplicación directa de la teoría de Operadores de Integral Doble desarrollada inicialmente por Birman y Solomjak en [5],[6] y [7] y más tarde, ampliada por De Pager, Witvlet y Sukochev en [9].

En el siguiente trabajo vamos a construir las herramientas necesarias para dar una prueba del resultado de Potapov y Sukochev acerca de las funciones Lipschitz de operadores en la clase $\mathcal{S}^p$.

En el Capítulo 1 establecemos algunos resultados conocidos de la teoría de operadores compactos en un espacio de Hilbert separable y definimos, para cada $1 \leq p \leq \infty$, la clase $\mathcal{S}^p$ de operadores compactos p-Schatten. Introducimos distintas convergencias en $\mathcal{B}(H)$, las topologías que estas inducen, el concepto de álgebra de von Neumann y damos algunas propiedades del conjunto de proyecciones ortogonales.
En este capítulo también introducimos la técnica de interpolación en espacios de Banach, vemos cómo se aplica a las clases p-Schatten y demostramos que el operador truncar está acotado en esta clase de operadores.
Definimos la noción de operador no acotado en un espacio de Hilbert, qué significa ser autoadjunto para este tipo de operadores y el concepto de *core* de un operador no acotado.
Por último, damos una forma de representar el espacio de operadores acotados en H como una subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{S}^2)$ y enumeramos algunas propiedades

de esta representación.

En el Capítulo 2, presentamos muy brevemente la teoría de espacios de Banach UMD. Un desarrollo completo de esta teoría, ejemplos y aplicaciones pueden encontrarse en [18] de T. Hytönen , J. van Neerven, M. Veraar y L. Weis.
Usamos el hecho de que, para $1 < p < \infty$, las clases p-Schatten son espacios UMD para probar ciertas desigualdades asociadas a los multiplicadores de Schur. En particular, utilizamos estos resultados para probar que el multiplicador de Schur asociado a las diferencias divididas $\phi_f = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ de una función f Lipschitz, está acotado en $\mathcal{S}^p$. Con esto, damos una demostración del resultado de Potapov y Sukochev acerca de las funciones Lipschitz de operadores para el caso donde los operadores a y b son compactos.
Para terminar el capítulo, enunciamos dos lemas que van ser de utilidad cuando consideremos el caso continuo del multiplicador de Schur asociado a las diferencias divididas.

En el Capítulo 3 definimos la noción de medida espectral, construimos la medida espectral producto e introducimos la teoría de integración respecto a medidas con valores en las proyecciones de un espacio de Hilbert. Enunciamos el teorema espectral para operadores autoadjuntos y probamos algunos resultados que relacionan las medidas espectrales y las proyecciones ortogonales en $\mathcal{B}(H)$.

En el Capítulo 4, aplicamos los resultados del capítulo anterior a la la teoría básica de operadores de integral doble y probamos que, para cada $1 < p < \infty$, el operador de integral doble T_{ϕ_f} asociado a las diferencias divididas ϕ_f, está acotado como operador de $\mathcal{S}^p$ en $\mathcal{S}^p$.
Para finalizar el trabajo, generalizamos el resultado sobre funciones Lipschitz de operadores al caso donde a y b son operadores autoadjuntos posiblemente no acotados. Para esto, primero hay que darle significado a la expresión $a - b \in \mathcal{S}^p$. Después, hay que probar que si f es una función Lipschitz, entonces $f(a) - f(b) \in \mathcal{S}^p$ y probar entonces la estimación (4). Para lograrlo,

utilizamos la representación regular a izquierda $\mathcal{B}(H)_L \subset \mathcal{B}(\mathcal{S}^2(H))$ de los operadores acotados en H que introducimos en el Captulo 1. Esta representación, nos da un espacio ambiente en el cual, responder la pregunta anterior, es un poco mas fácil. Una de las razones de esto es que, por ejemplo, dado un operador $\mathbf{a} \in \mathcal{B}(H)_L$, podemos encontrar encontrar un core de $\mathbf{a}$ que contenga operadores de $\mathcal{S}^1(H)$ y usar la geometría del espacio $\mathcal{B}(\mathcal{S}^2(H))$. Por último, vemos cómo lo probado para la representación regular izquierda nos permite volver para atrás y probar el resultado para $\mathcal{B}(H)$.

En el Apéndice, damos una aplicación del resultado acerca de funciones Lipschitz de operadores que se encuentra en [2]. Usando el resultado de Potapov y Sukochev que la aplición $w \to |w|^q$ es localmente Lipschitz como función de operadores en $\mathcal{S}^p$ y esto nos proveé de existencia y unicidad de solución para la ecuación de Hamilton que proviene del problema de buscar un extremal del funcional de p-energía en el espacio $GL_n(\mathbb{C})$ provisto de la métrica de Finsler inducida por la traslación a izquierda de las p-normas de Schatten.

Capítulo 1

Operadores Compactos y Clases de Schatten

1.1. Propiedades

1.1.1. Operadores positivos

Definición 1.1. Sea H un espacio de Hilbert. Un operador $a \in \mathcal{B}(H)$ se dice *positivo* si $\langle ax, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in H$. Escribimos $a \geq 0$ si a es positivo.

Observación 1.2. Todo operador positivo y acotado en un espacio de Hilbert complejo H es autoadjunto. Para ver esto, como $\langle \xi, a\xi\rangle = \overline{\langle \xi, a\xi\rangle} = \langle a\xi, \xi\rangle$ se tiene que por la identidad de polarización $\langle a\xi, \eta\rangle = \langle \xi, a\eta\rangle$ para todo $\xi, \eta \in H$.
Observemos que para todo $a \in \mathcal{B}(H)$ se tiene $a^*a \geq 0$ pues $\langle a^*ax, x\rangle = \|ax\|^2 \geq 0$.

Teorema 1.3. *[32, Teorema VI.9] Sea $a \in \mathcal{B}(H)$ y $a \geq 0$. Entonces existe un único operador $b \in \mathcal{B}(H)$ con $b \geq 0$ y $b^2 = a$.*

Definición 1.4. Sea $a \in \mathcal{B}(H)$. Entonces definimos $|a| = \sqrt{a^*a}$.

Definición 1.5. Un operador $u \in \mathcal{B}(H)$ se llama *isometría* si $\|u\xi\| = \|\xi\|$ para todo $\xi \in H$. u se dice *isometría parcial* si u es una isometría cuando se lo restringe al subespacio cerrado $(\operatorname{Nu} u)^{\perp}$.

Teorema 1.6. *Sea $a \in \mathcal{B}(H)$. Entonces existe una isometría parcial u tal que $a = u\,|a|$. u está unívocamente determinado si pedimos que* $\operatorname{Nu} u = \operatorname{Nu} a$. *Mas aún,* $\operatorname{Ran} u = \overline{\operatorname{Ran} a}$

Demostración. Definimos $u : \operatorname{Ran}|a| \to \operatorname{Ran} a$ por $u(|a|\,\xi) = a\xi$ para todo $\xi \in H$. Como

$$\||a|\,\xi\|^2 = \langle \xi, |a|^2\,\xi\rangle = \langle \xi, a^*a\xi\rangle = \|a\xi\|^2 \quad \text{para todo } \xi \in H$$

se tiene que u está bien definida, es decir, si $|a|\,\xi = |a|\,\eta$ entonces $a\xi = a\eta$. u es una isometría y se puede extender a una isometría de $\overline{\operatorname{Ran}|a|}$ en $\overline{\operatorname{Ran} a}$. Como $|a|$ es autoadjunto, $(\operatorname{Ran}|a|)^\perp = \operatorname{Nu}|a|$. Mas aún, $|a|\,\xi = 0$ si y solo si $a\xi = 0$ con lo cual $\operatorname{Nu}|a| = \operatorname{Nu} a$. Entonces $\operatorname{Nu} u = \operatorname{Nu} a$.
Si u y v son isometrías parciales tales que $a = u\,|a| = v\,|a|$ y

$$\operatorname{Nu} u = \operatorname{Nu} v = \operatorname{Nu} a = (\operatorname{Ran}|a|)^\perp,$$

se tiene entonces que u y v coinciden en $\operatorname{Ran}|a|$ y en $(\operatorname{Ran}|a|)^\perp$ con lo cuál coinciden en todo H, y entonces, $u = v$. □

1.1.2. Operadores compactos y clases p-Schatten

Definición 1.7. Un operador $a \in \mathcal{B}(H)$ se dice *compacto* si para toda sucesión $\{\xi_n\} \subset H$, $\{a\xi_n\}$ tiene una subsucesión convergente en H. Notamos $\mathcal{K}(H)$ al conjunto de operadores compactos en H.

Ejemplo 1.8. Un operador $z \in \mathcal{B}(H)$ se dice de *rango finito* si $\operatorname{Ran} z$ tiene dimensión finita, es decir, si para todo $\eta \in H$ se tiene $z\eta = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\xi_i$ con N finito y $\{\xi_i\}_{i=1}^{N}$ familia fija de elementos de H. Si $\{\eta_n\}$ es una sucesión acotada en H, los correspondientes α_i^n son una sucesión acotada de números complejos. Extrayendo para cada n una subsucesión convergente podemos armar una subsucesión de $\{z\eta_n\}$ convergente con lo cual z resulta compacto.

Dos propiedades importantes acerca de los operadores compactos son las siguientes

Teorema 1.9. *Un operador compacto manda sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma.*

Teorema 1.10. *Todo operador compacto en H es límite en norma operador de una sucesión de operadores de rango finito.*

Demostración. Sea z un operador compacto y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ un conjunto ortonormal en H. Definimos

$$\lambda_n = \sup_{\substack{\xi \in \langle e_1, \ldots, e_n \rangle^{\perp} \\ \|x\|=1}} \|z\xi\| .$$

La sucesión $\{\lambda_n\}$ es monótona decreciente de términos positivos con lo cual converge a un $\lambda \geq 0$. Veamos primero que $\lambda = 0$. Sea $\xi_n \in \langle e_1, \ldots, e_n \rangle^{\perp}$, $\|\xi_n\| = 1$, con $\|z\xi_n\| \geq \lambda/2$. Como $\xi_n \xrightarrow{w} 0$, $z\xi_n \to 0$ por el Teorema 1.9. Entonces $\lambda = 0$. Luego

$$\sum_{j=1}^{n} \langle e_j, \cdot \rangle z x_j \to z$$

en norma pues λ_n es la norma de la diferencia. $\square$

Teorema 1.11 (Forma canónica de un operador compacto). *Sea z un operador compacto en H. Entonces, existen conjuntos ortonormales (no necesariamente completos) $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ y $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ y numeros reales positivos tales que*

$$z = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle \cdot, e_n \rangle f_n$$

donde la suma puede ser finita o infinita y la convergencia es en norma de operadores.

Definición 1.12. Sea H un espacio de Hilbert separable y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de H. Para todo operador positivo $a \in \mathcal{B}(H)$ definimos

$$\operatorname{tr}(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, a e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle a e_n, e_n \rangle .$$

El número $\operatorname{tr}(a)$ se llama la *traza de a* y es independiente de la elección de la base.

Teorema 1.13. *Dado $a \in \mathcal{B}(H)$ positivo, el valor $\operatorname{tr}(a)$ es independiente de la base ortonormal de H escogida y tiene las siguientes propiedades*

(a) $\operatorname{tr}(a+b) = \operatorname{tr}(a) + \operatorname{tr}(b)$ *para todo $a, b \in \mathcal{B}(H)$ positivos.*

(b) $\operatorname{tr}(\lambda a) = \lambda \operatorname{tr}(a)$ *para todo $\lambda \geq 0$.*

Demostración. Dada una base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ definimos

$$\operatorname{tr}_e(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, a e_n \rangle.$$

Si $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ es otra base ortonormal entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}_e(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, a e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| a^{1/2} e_n \right\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left| \langle a^{1/2} f_m, e_n \rangle \right|^2 \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| a^{1/2} f_m \right\| \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \langle f_m, a f_m \rangle \\
&= \operatorname{tr}_f(a).
\end{aligned}$$

Como todos los términos son positivos, no hay problema con intercambiar las sumas. $\square$

Definición 1.14. Sea H un espacio de Hilbert separable. Definimos la clase de operadores de traza como el conjunto de operadores $a \in \mathcal{B}(H)$ que cumplen que $\operatorname{tr}(|a|) < \infty$ y lo notamos $\mathcal{S}^1(H) = \mathcal{S}^1$.

Observación 1.15. E l espacio $\mathcal{S}^1$ es el espacio dual de los operadores compactos $\mathcal{K}(H)$ (ver [32] Teorema VI.26).

Definición 1.16 (Clases p-Schatten)**.** Para $1 \leq p < \infty$ definimos

$$\mathcal{S}^p = \mathcal{S}^p(H) = \{a \in \mathcal{B}(H) : |a|^p \in \mathcal{S}^1\}$$

y $\|a\|_p = (\mathrm{tr}(|a|^p)^{1/p}$ resulta una norma en $\mathcal{S}^p$. Para $p = \infty$, definimos $S^\infty = \mathcal{K}(H)$ con $\|a\|_\infty = \|a\|$.

Si $|a|^p \in \mathcal{S}^1$, entonces por el teorema de Riesz-Schauder (Teorema V1.5 en [32]) tenemos que $\sigma(|a|^p)\backslash\{0\}$ consiste en autovalores aislados con multiplicidad finita. Se sigue que $|a|$ es compacto y por lo tanto $a = u\,|a|$ es compacto pues $\mathcal{K}(H)$ es un ideal de $\mathcal{B}(H)$.
Por Teorema 1.11, a puede ser representado de la forma $a = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle \psi_n, \cdot\rangle \phi_n$ donde $\{\psi_n\}$ y $\{\phi_n\}$ son dos conjuntos ortonormales y los $\{\lambda_n\}$ son los *valores singulares* de a (es decir, los autovalores no nulos de $|a|$).
Luego

$$|a| = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle \psi_n, \cdot\rangle \psi_n \qquad y \qquad |a|^p = \sum_{n=1}^N \lambda_n^p \langle \psi_n, \cdot\rangle \psi_n$$

y por lo tanto

$$\|a\|_p = (\mathrm{tr}(|a|^p))^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n^p\right)^{1/p}.$$

Luego tenemos que

Proposición 1.17. *$\mathcal{S}^p$ es el conjunto de operadores compactos cuyos valores singulares estan en l_p.*

Lema 1.18. *Supongamos que a es un operador compacto en H y $p \geq 1$. Entonces a está en $\mathcal{S}^p$ si y solo si $\sum_n |\langle a\xi_n, \xi_n\rangle|^p < \infty$ para todo conjunto ortonormal $\{\xi_n\}$ si y solo si $\sum_n |\langle a\xi_n, \eta_n\rangle|^p < \infty$ para todo par de conjuntos* *ortonormales* $\{\xi_n\}$ *y* $\{\eta_n\}$*, y vale que*

$$\begin{aligned}\|a\|_p &= \sup\left\{\left(\sum |\langle a\xi_n, \eta_n\rangle|^p\right)^{1/p} : \{\xi_n\} \text{ y } \{\eta_n\} \text{conjuntos ortonormales}\right\}\\ &= \sup\left\{\left(\sum |\langle a\xi_n, \xi_n\rangle|^p\right)^{1/p} : \{\xi_n\} \text{ conjunto ortonormal}\right\}\end{aligned}$$

(Teoremas 1.4.7 y 1.4.8 de [38])

Proposición 1.19. *Sea* $1 \leq p \leq \infty$*. Entonces*

1. $\mathcal{S}^p$ *es un espacio de Banach con la norma* $\|\cdot\|_p$
2. $\mathcal{S}^1 \subset \mathcal{S}^p \subset \mathcal{K}(H)$ *y* $\mathcal{S}^p$ *es la clausura de los operadores de rango finito en la norma* $\|\cdot\|_p$*.*
3. *Si* $a \in \mathcal{S}^p$*, entonces* $a^* \in \mathcal{S}^p$ *y* $\|a^*\|_p = \|a\|_p$

Lema 1.20. *Supongamos que* $1 \leq p < \infty$ *y* $1/p + 1/q = 1$ *. Si* $a \in \mathcal{S}^p$ *y* $b \in \mathcal{S}^q$*, entonces*

1. *ab y ba están en la clase de traza* $\mathcal{S}^1$*;*
2. $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$*;*
3. $|\mathrm{tr}(ab)| \leq \|a\|_p \|b\|_q$*.*

Demostración. Para probar (2), primero observemos que como todo operador en $\mathcal{B}(H)$ se puede escribir como combinación lineal de a lo sumo cuatro operadores unitarios y usando la linealidad de tr; basta probar (2) para b un operador unitario cualquiera y a de rango finito. En este caso, si $\{\xi_n\}$ es una base ortonormal, entonces $\{b\xi_n\}$ tambien lo es. Luego

$$\mathrm{tr}(ab) = \sum_{n\geq 1}\langle ab\xi_n, \xi_n\rangle = \sum_{n\geq 1}\langle ab\xi_n, b^*b\xi_n\rangle = \sum_{n\geq 1}\langle bab\xi_n, b\xi_n\rangle = \mathrm{tr}(ba).$$

Para ver (3), de nuevo por un argumento de aproximación, podemos asumir que a y b son operadores de rango finito. Sea

$$a = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle \cdot, \xi_n\rangle \eta_n$$

la descomposición canonica de a del Teorema 1.11. Entonces

$$abx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle bx, \xi_n \rangle \eta_n = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, b^* \xi_n \rangle \eta_n, \qquad x \in H.$$

Sea para cada $1 \leq n \leq N$, a_n el operador de rango uno definido por

$$a_n x = \langle x, b^* \xi_n \rangle \ \eta_n, \qquad x \in H;$$

Luego

$$ab = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n.$$

Entonces, como la suma es finita y el operador tr es lineal, usando la desigualdad de Hölder y el Lema 1.18 tenemos que

$$\begin{aligned} |\mathrm{tr}(ab)| = \left| \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \, \mathrm{tr}(a_n) \right| &\leq \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \, |\langle b\eta_n, \xi_n \rangle| \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{N} |\langle b\eta_n, \xi \rangle|^q \right)^{1/q} \\ &\leq \|a\|_p \, \|b\|_q \, . \end{aligned}$$

Lema 1.21. *Supongamos $1 \leq p \leq \infty$ y $1/p + 1/q = 1$. Si $a \in \mathcal{S}^p$, entonces*

$$\|a\|_p = \sup\{|\mathrm{tr}\,(ab)| : \|b\|_q = 1\}.$$

Demostración. Por el Lema 1.20, $\|a\|_p$ es más grande que este supremo. Para probar la otra desigualdad, asumamos primero que $1 < p < \infty$. Sea

$$ax = \sum_{n} \lambda_n \langle x, \xi_n \rangle \eta_n$$

la descomposición canónica de a y s_N el operador definido por

$$s_N x = \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^p \right)^{-1/q} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{p/q} \langle x, \eta_n \rangle \xi_n, \qquad x \in H.$$

Entonces $\|s_N\|_q = 1$ y

$$s_N a x = \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^p \right)^{-1/q} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{p} \langle x, \xi_n \rangle \xi_n, \qquad x \in H.$$

Luego $\operatorname{tr}(s_N a) = \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^p \right)^{1/p}$, de lo cual se sigue la desigualdad que faltaba.
El caso $p = 1$ se resuelve de manera similar tomando los operadores

$$s_N x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, \eta_n \rangle \xi_n, \qquad x \in H. \qquad \square$$

Corolario 1.22. *Si $1 < p, q \leq \infty$ y $1/p + 1/q = 1$, entonces $(\mathcal{S}^p)^* = \mathcal{S}^q$.*

1.2. Topologías en $\mathcal{B}(H)$

Definición 1.23. Sean $\{x_\alpha\}$ una red en $\mathcal{B}(H)$ y $x \in \mathcal{B}(H)$.

(i) Decimos que $x_\alpha \to x$ WOT si para todo $\xi, \eta \in H$ se tiene que

$$\langle x_\alpha \xi, \eta \rangle \underset{\alpha}{\to} \langle x \xi, \eta \rangle$$

(ii) Decimos que $x_\alpha \to x$ SOT si para todo $\xi \in H$ vale que

$$\|x_\alpha \xi\| \underset{\alpha}{\to} \|x \xi\|.$$

Definición 1.24. Si X es un espacio de Banach y X^* es su espacio dual, decimos que una red $\{x_\alpha\}$ en X tiende a un $x \in X$ en la topología $\sigma(X, X^*)$

si para todo $\varphi \in X^*$ se tiene que

$$\varphi(x_\alpha) \underset{\alpha}{\to} x.$$

A la topología $\sigma(X, X^*)$ se la llama *topologá débil de* X.

Definición 1.25. Decimos que un conjunto $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ es un *álgebra de von Neumann* si es un álgebra cerrada por la involución y cerrada para la topología WOT en $\mathcal{B}(H)$ o, equivalentemente, para la topología SOT (ver [35, Corollary 1.5]).

1.3. Proyecciones ortogonales y lemas de convergencia

Recordemos que un operador $a \in \mathcal{B}(H)$ se dice *positivo*, y notamos $a \geq 0$, si $\langle ah, h \rangle \geq 0$ para todo $h \in H$. Esta noción nos permite introducir una relación de orden en los operadores autoadjuntos de $\mathcal{B}(H)$. Para $x, y \in \mathcal{B}(H)$ decimos que $x \leq y$ si el operador $y - x \geq 0$.

Proposición 1.26. *Sea $\{x_\alpha\}$ una red creciente de operadores autoadjuntos, tal que existe $y \in \mathcal{B}(H)$ tal que $x_\alpha \leq y$ para todo α. Entonces existe un operador autoadjunto $x \in \mathcal{B}(H)$, tal que*

$$x = \sup_\alpha x_\alpha.$$

Más aún, x es el límite en la topología SOT en $\mathcal{B}(H)$ de la red $\{x_\alpha\}$ y notamos $x_\alpha \nearrow x$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $0 \leq x_\alpha \leq 1$ para todo α.
Para todo $h \in H$ definimos

$$F(h, h) = \sup_\alpha \langle x_\alpha h, h \rangle = \lim_\alpha \langle x_\alpha h, h \rangle$$

y, para $h, k \in H$,

$$\begin{aligned} F(h,k) = \frac{1}{4} &(F(h+k, h+k) - F(h-k, h-k) \\ &+ iF(h+ik, h+ik) - F(h-ik, h-ik)) . \end{aligned}$$

Luego, $F : H \times H \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal acotada con norma menor o igual a 1.
Por el teorema de Riesz, existe un único operador $x \in \mathcal{B}(H)$, $\|x\| \le 1$, tal que

$$F(h,k) = \langle xh, k\rangle, \quad h, k \in H.$$

Como para todo α y $h \in H$

$$\langle xh, h\rangle = F(h,h) \ge \langle x_\alpha h, h\rangle \ge 0,$$

se tiene que x es positivo y es una cota superior para la red $\{x_\alpha\}$. Por otro lado, si $x_0 = x_0^*$ es una cota superior de $\{x_\alpha\}$, entonces para todo $h \in H$, tenemos que

$$\langle xh, h\rangle = F(h,h) = \lim_\alpha \langle x_\alpha h, h\rangle \le \langle x_0 h, h\rangle$$

y entonces $x \le x_0$. Luego

$$x = \sup_\alpha x_\alpha.$$

Por último, para todo $h \in H$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|(x - x_\alpha)h\|^2 &\le \left\|(x - x_\alpha)^{1/2}\right\|^2 \left\|(x - x_\alpha)^{1/2} h\right\|^2 \\ &\le \langle (x - x_\alpha)h, h\rangle = F(h,h) - \langle x_\alpha h, h\rangle \to 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto x es el límite de la red $\{x_\alpha\}$ para la topología SOT en $\mathcal{B}(H)$. $\square$

Observación 1.27. Sea $x \in \mathcal{B}(H)$, $0 \le x \le 1$ y $e = e^2 = e^*$ es una proyección ortogonal. Entonces

$$x \le e \iff x = xe.$$

En efecto, de la relación $x \leq 1$ tenemos que $exe \leq e$ de lo cual, si $x = xe$, se deduce que $x \leq e$. Recíprocamente, si $0 \leq x \leq e$, entonces

$$0 = (1-e)0(1-e) \leq (1-e)x(1-e) \leq (1-e)e(1-e) = 0$$

luego

$$0 = (1-e)x(1-e) = ((1-e)x^{1/2})((1-e)x^{1/2})^*$$

y por lo tanto, $(1-e)x = 0$ con lo cual $x = ex = xe$.
En particular, si p_1, p_2 son proyecciones ortogonales en $\mathcal{B}(H)$ entonces $p_1 \leq p_2$ si y solo si $p_1 = p_1 p_2$.

Definición 1.28. Si $\{p_\alpha\}$ es una familia de proyecciones podemos definir las siguientes proyecciones

$$\bigvee_\alpha p_\alpha = \text{proyección ortogonal sobre el subespacio } \overline{\sum_\alpha p_\alpha H}$$
$$\bigwedge_\alpha p_\alpha = \text{proyección ortogonal sobre el subespacio } \bigcap p_\alpha H.$$

Es fácil chequear que $\bigvee_\alpha p_\alpha = \sup_\alpha p_\alpha$ y $\bigwedge_\alpha p_\alpha = \operatorname{ínf}_\alpha p_\alpha$.

De lo observado anteriormente y de la Proposición 1.26 se tiene el siguiente

Corolario 1.29. *Si $\{p_\alpha\}$ es una red creciente de proyecciones ortogonales en $\mathcal{B}(H)$, entonces*

$$p_\alpha \nearrow \bigvee_\alpha p_\alpha.$$

A continuación establecemos algunos lemas de convergencias que van a ser útiles más adelante

Lema 1.30. *Si $\{x_\alpha\}$ es una red en $\mathcal{S}^p$ con $\sup_\alpha \|x_\alpha\|_p < \infty$ y $\operatorname{tr}(x_\alpha y) \to 0$ para todo $y \in \mathcal{S}^1$ entones $x_n \to 0$ respecto a $\sigma(\mathcal{S}^p, \mathcal{S}^q)$ con $1/p + 1/q = 1$ (la topología debil de $\mathcal{S}^p$).*

Demostración. Tenemos que ver que $\operatorname{tr}(x_\alpha z) \to 0$ para todo $z \in \mathcal{S}^q$. Fijado $z \in \mathcal{S}^q$ y $\varepsilon > 0$, como $\mathcal{S}^1$ es denso en $\mathcal{S}^q$ (contiene a los operadores de rango finito), existe $y \in \mathcal{S}^1$ tal que $\|z - y\|_{\mathcal{S}^q} < \varepsilon$.
Entonces

$$\begin{aligned}|\operatorname{tr}(x_\alpha z)| &\leq |\operatorname{tr}(x_\alpha y)| + |\operatorname{tr}(x_\alpha(z-y))| \\ &\leq |\operatorname{tr}(x_\alpha y)| + \|x_\alpha\|_p \|z-y\|_q \\ &\leq |\operatorname{tr}(x_\alpha y)| + \varepsilon \|x_\alpha\|_p .\end{aligned}$$

Como $|\operatorname{tr}(x_\alpha y)| \to 0$ tenemos que

$$|\operatorname{tr}(x_\alpha y)| \leq \varepsilon \sup_\alpha \|x_\alpha\|_p$$

pero $\varepsilon > 0$ era arbitrario y $\sup_\alpha \|x_\alpha\|_p < \infty$ con lo cual $|\operatorname{tr}(x_\alpha z)| \to 0$. $\square$

Lema 1.31. *Sea H un espacio de Hilbert separable. Si $y \in \mathcal{S}^p$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $\{p_\beta\}$ es un sistema de proyecciónes ortogonales tal que $p_\beta \searrow 0$ entonces* $\operatorname{tr}(p_\beta y) \to 0$.

Demostración. Basta probar el resultado para y de rango finito y positivo. Entonces $y = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle \cdot, e_n \rangle e_n$ con $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ conjunto ortonormal de H y N finito.
Llamemos $h \otimes h = \langle \cdot, h \rangle h$ para $h \in H$. Entonces usando la linealidad de la traza tenemos que

$$\operatorname{tr}(p_\beta y) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \operatorname{tr}\left(p_\beta(e_n \otimes e_n)\right).$$

Luego basta ver que $\operatorname{tr}(p_\beta h \otimes h) \underset{\beta}{\to} 0$ para $h \in H$ de norma 1.

Sea $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H con $h_1 = h$. Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(p_\beta h\otimes h) &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle (p_\beta h\otimes h)\, h_n, h_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\langle h_n, h_1\rangle\langle p_\beta h, e_n\rangle \\
&= \langle p_\beta h, h\rangle = \|p_\beta h\|^2 \underset{\beta}{\rightarrow} 0
\end{aligned}$$

pues p_β es una proyección ortogonal y $p_\beta \searrow 0$. □

Lema 1.32. *Si $x \in \mathcal{S}^p$ y $\{p_\alpha\}$, $\{q_\alpha\}$ redes de proyecciones ortogonales en $\mathcal{B}(H)$ tal que $p_\alpha \nearrow 1$ y $q_\alpha \nearrow 1$, entonces $p_\alpha x q_\alpha \to x$ con respecto a $\sigma(\mathcal{S}^p, \mathcal{S}^q)$.*

Demostración. Sea $y \in \mathcal{S}^q$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\operatorname{tr}((x - p_\alpha x q_\alpha)y)| &\leq |\operatorname{tr}(e_n^a x(1-q_\alpha)y)| + |\operatorname{tr}((1-p_\alpha)xy)| \\
&= |\operatorname{tr}((1-q_\alpha)ye_n^a x^*)| + |\operatorname{tr}((1-p_\alpha)xy)|\,.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{S}^q$ es un ideal en $\mathcal{B}(H)$ se tiene que $ye_n^a x^*, xy \in \mathcal{S}^q$ .Además $(1-p_\alpha) \searrow 0$ y $(1-p_\alpha) \searrow 0$ con lo cual el resultado se sigue de aplicar dos veces el Lema 1.31. □

1.4. Interpolación de espacios de Banach

1.4.1. Espacios de interpolación

Definición 1.33. Decimos que dos espacios de Banach X e Y son *compatibles* si existe un espacio vectorial topológico y Hausdorff Z que los contiene a ambos. En ese caso $X \cap Y$ y $X + Y$ son subespacio de Z. Es fácil ver que ambos subespacios son espacios de Banach con las siguientes normas

$$\begin{aligned}
\|z\|_{X\cap Y} &= \max\{\|z\|_X\,, \|z\|_Y\} \\
\|z\|_{X+y} &= \inf\{\|x\|_X + \|y\|_Y\ : z = x+y \quad x\in X,\, y\in Y\}.
\end{aligned}$$

Definición 1.34. Supongamos que X_1 y X_2 son espacios de Banach compatibles. Un espacio de Banach X se dice *espacio intermedio entre* X_1 *y* X_2 si

$$X_1 \cap X_2 \subset X \subset X_1 + X_2$$

con inclusiones continuas. Un espacio intermedio entre X_1 y X_2 se dice un *espacio de interpolación* si vale que cualquier transformación lineal en X_1+X_2 que mapea de manera acotada X_1 en X_1 y X_2 en X_2, también mapea X en X de manera acotada.

1.4.2. Interpolación compleja

La base para el método de interpolación compleja es el teorema clásico de las tres lineas de Hadamard. Sean $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ y $\bar{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$.

Teorema 1.35 (Cauchy-Hadamard). *Sea f una función continua en $\bar{S}$ analítica en la banda abierta S. Para todo $\theta \in [0,1]$, sea*

$$M_\theta = \sup\{|f(\theta + iy)| : y \in \mathbb{R}\},$$

entonces $M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$.

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos asumir que M_0 y M_1 son ambos positivos. Entonces, considerando $f(z)M_0^{z-1}M_1^{-z}$, también podemos asumir que $M_0 = M_1 = 1$.
Luego $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \partial S$ y hay que ver que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in S$. Sea $K = \sup_{z \in \bar{S}} |f(z)|$ y para todo entero positivo n consideramos la función

$$f_n(z) = \frac{f(z)}{1 + \frac{K}{n} z}.$$

Es claro que $|f_n(z)| \leq 1$ para todo $z \in \partial S$ y $|f_n(z)| \leq 1$ para todo $z = x + iy$ en S con $|y| = n$. Por el principio del máximo, $|f_n(z)| \leq 1$ para todo $z = x+iy$ con $0 \leq x \leq 1$ y $-n \leq y \leq n$. Si ahora hacemos $n \to \infty$, tenemos que $|f(z)| \leq 1$ par todo $z \in S$. $\square$

Definición 1.36. Sea X un espacio de Banach. Decimos que una función $f : S \to X$ es *analítica* si para todo $\varphi \in X^*$ se tiene que $\varphi \circ f : S \to \mathbb{C}$ es analítica en el sentido usual.

Con la definión anterior, el teorema de las tres líneas de Hadamard se puede extender a funciones acotadas definidas en la banda cerrada $\bar{S}$ con valores en un espacio de Banach X. Con esto ahora podemos introducir el método de interpolación compleja.
Dado un par compatible de espacios de Banach X_0 y X_1, sea $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ el espacio de las funciones $f : \bar{S} \to X_0 + X_1$ con las siguientes propiedades :

1. f es acotada y continua en $\bar{S}$ y analítica en S.

2. Las aplicaciones $y \mapsto f(k+iy)$ de $\mathbb{R}$ en X_k son continuas para $k = 0, 1$.

$\mathcal{F}(X_0, X_1)$ es claramente un espacio vectorial y, más aún, con la norma

$$\|f\|_{\mathcal{F}} := \max\left\{\sup_{y\in\mathbb{R}} \|f(iy)\|_{X_0}, \sup_{y\in\mathbb{R}} \|f(1+iy)\|_{X_1}\right\}$$

resulta ser un espacio de Banach (ver [38, pp. 28]).
Dado $0 \leq \theta \leq 1$, sea X_θ el espacio de los vectores $v \in X_0 + X_1$, tal que $v = f(\theta)$ para alguna f en $\mathcal{F}(X_0, X_1)$. Normamos X_θ con

$$\|v\|_\theta = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}} : v = f(\theta)\}.$$

El principal resultado del método de interpolación compleja es el siguiente.

Teorema 1.37. *Si X_0 y X_1 son espacios de Banach compatibles y $0 < \theta < 1$, entonces*

(a) X_θ es un espacio de Banach.

(b) X_θ es un espacio de interpolación entre X_0 y X_1.

(c) Si X_0 y X_1 e Y_0, Y_1 son pares compatibles de espacios de Banach y $T : X_0 + X_1 \to X_0 + X_1$ es una función lineal y acotada tal que

$T|_{X_k} \in \mathcal{B}(X_k, Y_k)$ para $k = 0, 1$. Entonces $T|_{X_\theta} \in \mathcal{B}(X_\theta . Y_\theta)$ para todo $0 < \theta < 1$.

Demostración. La aplicación lineal $f \mapsto f(\theta)$ es continua de $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ en $X_0 + X_1$ pues por el teorema de las tres líneas de Hadamard $\|f\|_{X_0+X_1} \leq \|f\|_{\mathcal{F}}$. Como X_θ es la imagen de esta aplicación, se tiene que X_θ es equivalente al espacio cociente inducido por la misma con lo cual X_θ es un espacio de Banach.
Como $\|v\|_{X_0+X_1} = \|f(\theta)\|_{X_0+X_1} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)}$ para todo $v = f(\theta)$, tomando ínfimo sobre todas las f se tiene $\|v\|_{X_0+X_1} \leq \|v\|_\theta$. Entonces $X_\theta \subset X_0 + X_1$ de manera continua. Por otro lado, tomando la función $f_v(z) \equiv v$, se tiene que $v = f_v(\theta)$ y entonces $\|v\|_\theta \leq \|f_v\|_{\mathcal{F}}$. Para $v \in X_0 \cap X_1$ tenemos

$$\|f_v\|_{\mathcal{F}} = \text{máx}\{\|v\|_{X_0}, \|v\|_{X_1}\}.$$

Entonces $\|v\|_\theta \leq \text{máx}\{\|v\|_{X_0}, \|v\|_{X_1}\} = \|v\|_{X_0 \cap X_1}$, con lo cual $X_0 \cap X_1 \subset X_\theta$ de manera continua. Luego X_θ es un espacio intermedio entre X_0 yX_1.

Si probamos (c) entonces poniendo $X_k = Y_k$ tenemos que X_0 es un espacio intermedio entre X_0 y X_1. Veamos entonces que vale (c).
Sea $C_k = \|T|_{X_k}\|_{\mathcal{B}(X_k,Y_k)}$ para $k = 0, 1$. Si $v \in X_\theta$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe $f \in \mathcal{F}(X_0, X_1)$ tal que $v = f(\theta)$ y $\|f\|_{\mathcal{F}} \leq \|v\|_\theta + \varepsilon$. Definimos

$$g(z) = C_0^{z-1} C_1 - zT(f(z)).$$

Claramente $g \in \mathcal{F}(Y_0, Y_1)$ y $g(\theta) = C_0^{\theta-1} C_1^{-\theta} T(v)$. Entonces

$$C_0^{\theta-1} C_1^{-\theta} \|Tv\|_\theta \leq \|g\|_{\mathcal{F}}. \tag{1.1}$$

Además

$$\|g(z)\|_{X_0+X_1} \leq \left|C_0^{z-1}\right| \left|C_1^{-z}\right| \|T(f(z))\|_{Y_0+Y_1}$$

entonces

$$\|g(1+iy)\|_{Y_1} \leq \|f(x+iy)\|_{X_1}$$

y

$$\|g(iy)\|_{X_0} \leq \|f(iy)\|_{X_0}$$

con lo cual

$$\|g\|_{\mathcal{F}} \leq \|f\|_{\mathcal{F}}. \tag{1.2}$$

Juntando (1.1) y (1.2) se tiene que

$$\|Tv\|_\theta \leq C_0^{1-\theta} C_1^\theta \|v\|_\theta,$$

o, lo que es lo mismo, $T|_{X_\theta} \in \mathcal{B}(X_\theta, Y_\theta)$ y

$$\|T|_{X_\theta}\| \leq \|T|_{X_0}\|^{1-\theta} \|T|_{X_1}\|^\theta.$$

□

Observación 1.38. De la prueba del teorema anterior se sigue que si se tiene que $T : X_0 \to Y_0$ y $T : X_1 \to Y_1$ están acotados con normas C_0 y C_1 respectivamente, entonces $T : X_\theta \to Y_\theta$ está acotado con norma a lo sumo $C_0^{1-\theta} C_1^\theta$. En lo que sigue escribimos $[X_0, X_1]_\theta = X_\theta$.

Apliquemos el resultado anterior a las clases de Schatten definidas anteriormente.

Teorema 1.39. *Se tiene que $[\mathcal{S}^{p_0}, \mathcal{S}^{p_1}]_\theta = \mathcal{S}^p$ (con normas iguales) para todo $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ y todo $\theta \in (0,1)$, donde $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.*

Demostración. Como $\theta \in (0,1)$ entonces $1 < p < \infty$. Luego por la Proposición 1.19 se tiene que $\mathcal{S}^p$ esta generado por los operadores de rango finito. Entonces, es suficiente probar que $\|v\|_\theta = \|v\|_{\mathcal{S}^p}$, para todo v de rango finito. Sean v de rango finito con $\|v\|_{\mathcal{S}^p} = 1$. Si $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ son los valores singulares de v entonces $\sum_{n=1}^N \lambda_n^p = 1$. Sea

$$v = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle \cdot, e_n \rangle f_n$$

la descomposición canónica de v. Consideremos la función

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{p\frac{1-z}{p_0}+\frac{z}{p_1}} \langle \cdot, e_n \rangle f_n.$$

Es claro que $v = f(\theta)$ y entonces $\|v\|_\theta \leq \|f\|_{\mathcal{F}}$. Para todo $z = x + iy$ en la banda cerrada $\bar{S}$, los valores singulares de $f(z)$ son $\{\lambda_n^{p(\frac{1-x}{p_0}+\frac{x}{p_1})}\}$. Luego $\|f\|_{\mathcal{F}} \leq 1$, y entonces $\|v\|_\theta \leq 1 = \|v\|_{\mathcal{S}^p}$.
Para ver la otra desigualdad supongamos $\|v\|_\theta = 1$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $f_\varepsilon(z)$ en $\mathcal{F}(\mathcal{S}^{p_0}, \mathcal{S}^{p_1})$ tal que $v = f_\varepsilon(\theta)$ y $\|f_\varepsilon\|_{\mathcal{F}} \leq 1+\varepsilon$. Sea $u \in \mathcal{S}^q$ de norma 1 con descomposición canónica

$$u = \sum_{n=1}^{N} \mu_n \langle \cdot, e'_n \rangle f'_n$$

y sea

$$g(z) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n^{q(\frac{1-z}{q_0}+\frac{z}{q_1})} \langle \cdot, e'_n \rangle f'_n$$

donde $1/q_k + 1/p_k = 1$ para $k = 0, 1$. Sea

$$F_\varepsilon(z) = \operatorname{tr}(f_\varepsilon(z)g(z)).$$

Entonces $F_\varepsilon(\theta) = \operatorname{tr}(uv)$ y $F_\varepsilon(z)$ es una función continua y acotada en $\bar{S}$ y analítca en S. Como $\text{máx}\{\|f_\varepsilon(ix)\|_{\mathcal{S}^{p_0}}, \|f_\varepsilon(1+ix)\|_{\mathcal{S}^{p_1}}\} = \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{F}} \leq 1+\varepsilon$ se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$|F_\varepsilon(ix)| = |\operatorname{tr}(f_\varepsilon(ix)g(ix))| \leq \|f_\varepsilon(ix)\|_{\mathcal{S}^{p_0}} \|g(ix)\|_{\mathcal{S}^{q_0}} \leq 1+\varepsilon$$

y

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(1+ix)| &= |\operatorname{tr}(f_\varepsilon(1+ix)g(1+ix))| \\ &\leq \|f_\varepsilon(1+ix)\|_{\mathcal{S}^{p_0}} \|g(1+ix)\|_{\mathcal{S}^{q_0}} \leq 1+\varepsilon. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de las tres líneas de Hadamard y haciendo tender $\varepsilon \to 0$ tenemos que $|\operatorname{tr}(uv)| \leq 1$ para todo $u \in \mathcal{S}^q$ de norma 1. Por el Teorema 1.21

se obtiene que $\|v\|_{\mathcal{S}^p} \leq 1 = \|v\|_\theta$. Luego $\|v\|_{\mathcal{S}^p} = \|v\|_\theta$. $\square$

1.5. Operador Truncar

Definición 1.40. Decimos que un conjunto $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{B}(H)$ es una familia de proyecciones mutuamente ortogonales, si $e_n^2 = e_n = e_n^*$ y $e_n e_j = 0$ para todo $n \neq j$.
Definimos el operador truncar $T : \mathcal{S}^p \to \mathcal{S}^p$ respecto a esta familia de proyecciones como

$$Tx = \sum_{k<j} e_k x e_j.$$

Tenemos el siguiente resultado que se le atribuye a Gohberg y Krein (ver [17]) que va a ser de gran utilidad cuando hablemos de multiplicadores de Schur.

Lema 1.41. [1] *Si $1 < p < \infty$ y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una familia de proyecciones mutuamente ortogonales, entonces $T : \mathcal{S}^p \to \mathcal{S}^p$ dado por $Tx = \sum_{k<j} e_k x e_j$ es un operador acotado.*

Demostración. Veámoslo primero para $p = 2$. Tenemos que en este caso $\mathcal{S}^2$ es un espacio de Hilbert con el producto interno $\langle x, y\rangle_2 := \mathrm{tr}(xy^*)$. Pensemos a $T : \mathcal{F}(H) \to \mathcal{S}^p$ definido en los operadores de rango finito, que son densos en $\mathcal{S}^2$. Veamos que admite una extensión acotada a todo S^2. Para eso primero veamos que si $x, y \in \mathcal{F}(H)$ se tiene

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle_2 = \mathrm{tr}(Txy^*) &= \mathrm{tr}\left(\sum_{k<j} e_k x e_j y^*\right) \\ &= \sum_{k<j} \mathrm{tr}(e_k x e_j y^*) \qquad (1.3)\end{aligned}$$

[1]Gracias a Jorge Antezana por la ayuda con la demostración de este lema

y

$$\begin{aligned}
\langle x, Ty\rangle_2 &= \operatorname{tr}\left(x \left(\sum_{k<j} e_k y e_j \right)^* \right) \\
&= \operatorname{tr}\left(x \sum_{k<j} e_j y^* e_k \right) \\
&= \sum_{k<j} \operatorname{tr}(x e_j y^* e_k) \\
&= \sum_{k<j} \operatorname{tr}(e_k x e_j y^*), \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

con lo cual $\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, Ty\rangle_2$ y entonces $T = T^*$ en $\mathcal{F}(H)$. Además de la definición de T claramente se ve que $T^2 = T$. Entonces $\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{Ran}(T)^\perp$ y $\mathcal{F}(H) = \mathrm{Dom}(T) = \mathrm{Nu}(T) \oplus \mathrm{Ran}(T)$ con lo cual se tomando clausura en norma de $\mathcal{S}^2$

$$\mathcal{S}^2 = \overline{\mathcal{F}(H)} = \overline{\mathrm{Nu}(T)} \oplus \overline{\mathrm{Ran}(T)}.$$

Si consideramos el operador P como la proyección ortogonal sobre $\overline{\mathrm{Ran}(T)}$ se tiene que $P \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^2)$, $P^2 = P$ y $P = P^*$. Además, tenemos que $P|_{\mathcal{F}(H)} = T$ luego se tiene que T se extiene a un operador acotado en todo $\mathcal{S}^2$ y $\|T\|_2 = 1$.

Veamos que sucede ahora para $1 < p < \infty$ arbitrario.

Llamemos $C_p = \max\{\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{S}^p)}, \|1 - T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{S}^p)}\}$ y por lo hecho para el caso $p = 2$ tenemos que $C_2 = 1$
Si vemos que $C_{2p} \leq 2C_p$ para todo p, por interpolación tenemos que $C_q \leq q$ para todo $q \geq 2$, pues $C_{2^k} \leq 2^{k-1}$ para todo k entero positivo y si

$$p_1 = 2^k < q < p_2 = 2^{k+1} = 2p_1$$

entonces por el Teorema 1.37 se tiene

$$C_q \leq C_{p_1}^{1-\theta} C_{p_2}^{\theta} \leq C_{p_1} 2^{\theta} \leq 2^{k-1} 2 = 2^k \leq q.$$

Para todo $z \in \mathcal{S}^{2p}$ se tiene que

$$(Tz)^*(Tz) = T((Tz)^*z) + (1-T)(z^*Tz)$$

y entonces

$$\|Tz\|_{2p}^2 = \|(Tz)^*(Tz)\|_{2p} \leq \|T((Tz)^*z)\|_p + \|(1-T)(z^*Tz)\|_p$$

y cada término es menor o igual que

$$C_p \|z^*Tz\|_p \leq C_p \|z\|_{2p} \|Tz\|_{2p}$$

y por lo tanto

$$\|Ty\|_{2p} \leq 2C_p \|y\|_{2p}$$

con lo cual $\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{S}^{2p})} \leq 2C_p$. $\square$

1.6. Operadores no acotados

Es un hecho que la gran mayoría de los operadores que se estudian en la física matematica y en teoría de perturbaciones son operadores no acotados. En esta sección introducimos algunos conceptos necesarios para trabajar con ellos.

Decimos que $a : \operatorname{Dom} a \subset H \to H$ es un *operador lineal en* H si $\operatorname{Dom} a$ es un subespacio denso de H y, en ese caso, decimos que a está *densamente definido*.

Definición 1.42. El *gráfico* de un operador lineal a es el conjunto de pares

$$\Gamma(a) = \{(h, ah) : \ h \in \operatorname{Dom}(a)\}.$$

El gráfico de a es un subconjutno de $H \times H$. Decimos que a es *cerrado* si $\Gamma(a)$ es cerrado como subespacio de $H \times H$.

Definición 1.43. Sean a y b operadores lineales en H. Si $\Gamma(a) \subset \Gamma(b)$, entonces decimos que b *es una extensión de* a y escribimos $a \subset b$. Equivalentemente $a \subset b$ si y solo si $\mathrm{Dom}(a) \subset \mathrm{Dom}(b)$ y $ah = bh$ para todo $h \in \mathrm{Dom}(a)$.

Definición 1.44. Un operador a es *cerrable* si tiene una extensión cerrada. Si a es cerrable, llamamos *clausura de* a a la extensión cerrada mas chica y la notamos $\bar{a}$.

La noción del adjunto de un operador se puede extender al caso de operadores no acotados de la siguiente forma

Definición 1.45. Sea a un operador lineal densamente definido en H. Definimos $\mathrm{Dom}(a^*)$ como el conjunto de los $h \in H$ para los cuales existe un $z \in H$ tal que

$$\langle a\psi, h\rangle = \langle \psi, z\rangle \quad \text{para todo } \ \psi \in \mathrm{Dom}(a). \tag{1.5}$$

Para cada $h \in \mathrm{Dom}(a^*)$, definimos $a^*h = z$ y decimos que a^* es el *adjunto* de a. Por el lema de Riesz, $h \in \mathrm{Dom}(a^*)$ si y solo si $|\langle a\psi, h\rangle| \leq C\,\|\psi\|$ para todo $\psi \in \mathrm{Dom}(a)$.

Con esto, podemos ahora definir que significa que un operador no acotado a sea autoadjunto

Definición 1.46. Un operador lineal a densamente definido en un espacio de Hilbert H se dice *simétrico* si $a \subset a^*$. Equivalentemente, a es simétrico si y solo si

$$\langle a\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, a\psi\rangle \quad \text{para todo } \ \varphi, \psi \in \mathrm{Dom}(a)$$

Definición 1.47. Un operador a se dice *autoadjunto* si $a = a^*$, es decir, si a es simétrico y $\mathrm{Dom}(a) = \mathrm{Dom}(a^*)$.

Observación 1.48. La distinción entre operadores simétricos y operadores autoadjuntos es muy importante. Pues, es solo para los operadores *autoadjuntos* que vale el teorema espectral y solo para los operadores *autoadjuntos* pueden ser exponenciados para dar el grupo a un parametro de los operadores unitadores (ver [32, Chapter X]) que da la dinámica en la mecánica cuántica.

Algunos ejemplos de operadores no acotados. Sea $H = L^2[0,1]$

Ejemplo 1.49. Defimos el operador lineal D_1 dado por

$$\mathrm{Dom}(D_1) = \{f \in L^2[0,1] : f \in C^1[0,1], f(0) = f(1) = 0\}$$

y

$$D_1 f = i\frac{df}{dx} \quad \text{para toda } f \in \mathrm{Dom}(D_1).$$

Es fácil ver que

$$D_1^* f = i\frac{df}{dx} \quad \text{para toda } f \in \mathrm{Dom}(D_1^*)$$

donde

$$\mathrm{Dom}(D_1^*) = \{f : f \text{ es absolutamente continua}, \frac{df}{dx} \in L^2[0,1]\}.$$

Entonces $D_1 \subseteq D_1^*$, es decir, D_1 es simétrico. Se puede ver que D_1 no es cerrado y que es cerrable con clausura $\overline{D_1}$ definida por

$$\overline{D_1} f = i\frac{df}{dx} \quad \text{para toda } f \in \mathrm{Dom}(\overline{D_1})$$

donde

$$\mathrm{Dom}(\overline{D_1}) = \{f : f \text{ es absolutamente continua}, \frac{df}{dx} \in L^2[0,1],\ f(0) = f(1) = 0\}.$$

Ejemplo 1.50. Definimos el operador D_2 dado por

$$\mathrm{Dom}(D_2) = \{f : f \text{ es absolutamente continua}, \frac{df}{dx} \in L^2[0,1],\ f(0) = f(1) = 0\}$$

y

$$D_2 f = i\frac{df}{dx} \quad \text{para toda } f \in \mathrm{Dom}(D_2).$$

No es difícil ver que $D_2 \subseteq D_2^*$, es decir, D_2 es simétrico. Mas aún, se puede mostrar que $D_2 = D_2^*$.

Definición 1.51. Dado un operador lineal $T : \mathrm{Dom}(T) \to H$ decimos que un subespacio $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{Dom}(T)$ es un *core del operador* T si la clausura del operador $T_1 := T|_{\mathcal{D}}$ extiende a T, es decir,$T \subseteq \bar{T}_1$.

1.7. Representación regular a izquierda

Dado un espacio de Hilbert separable H, en la Sección 1.1.2 definimos las clases p-Schatten $\mathcal{S}^p = \mathcal{S}^p(H)$. Dijimos que para todo $1 \le p \le \infty$ $\mathcal{S}^p$ resulta un espació de Banach. Además, si $p = 2$ a la clase de operadores en $\mathcal{S}^2$ se los llaman *operadores de Hilbert-Schmidt* y resulta que $\mathcal{S}^2$ es un espacio de Hilbert donde el producto interno está dado por

$$\langle x, y \rangle := \mathrm{tr}(xy^*)$$

para todo par $x, y \in \mathcal{S}^2$ y tr la traza usual de operadores.

En esta sección, vamos a ver como como representar $\mathcal{B}(H)$ como operadores de multiplicación a izquierda en el espacio de Hilbert $\mathcal{S}^2(H)$.
Dado $x \in \mathcal{B}(H)$, consideramos el operadores $L_x \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^2)$ dado por

$$L_x(\xi) = x\xi, \quad \xi \in \mathcal{S}^2.$$

Consideremos ahora la funcion $L : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(\mathcal{S}^2)$ dada por

$$L(x) := L_x, \quad x \in \mathcal{B}(H).$$

Notamos $\mathcal{B}(H)_L = L(\mathcal{B}(H))$.

Lema 1.52. *La función $L : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)_L$ es un $*$-isomorfismo de $\mathcal{B}(H)$ en $\mathcal{B}(H)_L$.*

Demostración. Si $x, y \in \mathcal{B}(H), \xi \in \mathcal{S}^2$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces

$$L(x + \alpha y)(\xi) = (x + \alpha y)\xi = x\xi + \alpha y\xi = L_x(\xi) + \alpha L_y(\xi)$$

y

$$L_{xy}(\xi) = (xy)\xi = L_x(L_y(\xi)).$$

Mas aún,

$$\langle L_x(\xi), \eta\rangle = \mathrm{tr}(x\xi\eta^*) = \mathrm{tr}(\xi(x^*\eta)^*) = \langle \xi, L_n^*(\eta)\rangle, \quad \xi, \eta \in \mathcal{S}^2,\ x \in \mathcal{B}(H).$$

Entonces, tenemos que $L : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(\mathcal{S}^2)$ es un $*$-morfismo y

$$L(x + \alpha y) = L_x + \alpha L_y, \quad L_{xy} = L_x L_y, \quad L_x^* = L_{x^*}.$$

Esto último nos dice que $\mathcal{B}(H)_L$ es una $*$-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{S}^2)$.
Si $L(x) = L(y)$ para $x, y \in \mathcal{B}(H)$ entonces $x\xi = y\xi$ para todo $\xi \in \mathcal{S}^2$. Luego

$$\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= \|(x - y)^*(x - y)\| \\
&= \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{S}^1_+ \\ \|\xi\|_1 = 1}} \mathrm{tr}((x - y)^*(x - y)\xi) \\
&= \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{S}^1_+ \\ \|\xi\|_1 = 1}} \mathrm{tr}(\xi^{1/2}(x - y)^*(x - y)\xi^{1/2}) \\
&= \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{S}^1_+ \\ \|\xi\|_1 = 1}} \left\|(x - y)\xi^{1/2}\right\|_{\mathcal{S}^2} = 0
\end{aligned}$$

con lo cual $x = y$ y entonces L es inyectiva. □

El álgebra $\mathcal{B}(H)_L$ se llama la *representación regular a izquierda* de $\mathcal{B}(H)$. En $\mathcal{B}(H)_L$ podemos definir la siguiente traza tr_L dada por

$$\mathrm{tr}_L(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}(x), \quad \mathbf{x} = L(x) \in \mathcal{B}(H)_L.$$

Observación 1.53. Notemos que como $\mathcal{B}(H)$ es álgebra de von-Neumann y L es un $*$-isomorfismo, entonces $\mathcal{B}(H)_L \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{S}^2)$ es una subálgebra de von Neumann con unidad.

Capítulo 2

Espacios UMD, desigualdades y multiplicadores de Schur

El objetivo de este capítulo es demostrar que el multiplicador de Schur asociado a las diferencias divididas de una función Lipschitz, está acotado como operador de $\mathcal{S}^p$ en $\mathcal{S}^p$. Para esto, necesitamos algunas desigualdades y teoremas que provienen del análisis en espacios de Banach y de la teoría de Littlewood-Paley. En este contexto, es que aparecen lo que se llaman, espacios UMD. En la primera sección incluimos las definiciones necesarias para defininir estos espacios que, en principio, están definidos de una manera probabilística, pero que tienen definiciones equivalentes en términos puramente analíticos.
Una de las equivalencias analíticas de estos espacios, está dada porque la transformada de Hilbert periodica $\tilde{H}$ en $L^p(\mathbb{T}, \mathcal{S}^p)$ dada por

$$\tilde{H}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e_n\right) := -i \sum_{k\in\mathbb{Z}} sgn(k) a_k e_k,$$

donde $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e_k$ es un polinomio trigonométrico, este acotada (ver [18, Theorem 5.2.7]). Esta equivalencia, es la que se usa para probar que $\mathcal{S}^p$ es un espacio UMD (ver[18, Proposition 5.4.2]).
En [18], puede encontrarse un desarrollo detallado de los espacios de Banach UMD y la teoría de Littlewood-Palley.

2.1. Martingalas y espacios UMD

En lo que sigue, $(S, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida, $(I, \leq)$ un conjunto ordenado, y X un espacio de Banach.

Definición 2.1. Una función $f : S \to X$ se dice *simple* si es de la forma $f = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{A_n} x_n$ con $A_n \in \mathcal{A}$ y $x_n \in X$ para todo $1 \leq n \leq N$.

Definición 2.2. Una función $f : S \to X$ se dice *fuertemente medible* si existe una sucesión de funciones simples $f_n : S \to X$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ puntualmente en S. Llamamos $L^0(S; X)$ al conjunto de funciones $f : S \to X$ fuertemente medibles.

Dada una sub-σ-álgebra $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$ denotamos $L^0(S, \mathcal{F}; X)$ al conjunto de funciones $f : S \to X$ fuertemente medibles respecto al espacio de medida $(S, \mathcal{F}, \mu|_{\mathcal{F}})$.

Definición 2.3 (Espacios de Bochner). Para $1 \leq p < \infty$ definimos $L^p(S; X)$ como el subespacio lineal de todas las funciones μ-medibles $f : S \to X$ para las cuales

$$\int_S \|f\|^p \, d\mu < \infty.$$

Dada una subálgebra $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, si $f \in L^0(S; X)$ denotamos

$$\mathcal{F}_f := \{F \in \mathcal{F} : \mathbb{1}_F f \in L^1(S; X)\}.$$

Definición 2.4. Una función $f \in L^0(S; X)$ se dice *σ-integrable sobre $\mathcal{F}$* si S puede cubrirse por a lo sumo una cantidad numerable de conjuntos en $\mathcal{F}_f$.

Definición 2.5 (Esperanza condicional). Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ es una sub-σ-álgebra. Dada $f \in L^0(S; X)$ decimos que una funciø'n $g \in L^0(S, \mathcal{F}; X)$ es una *esperanza condicional de f respecto a $\mathcal{F}$* si

$$\int_F g d\mu = \int_F f d\mu, \qquad \textit{para todo}\, F \in \mathcal{F}_f \cap \mathcal{F}_g.$$

Teorema 2.6 (Unicidad de la esperanza condicional [18]). *Supongamos que $f \in L^0(S; X)$ es σ-integrable respecto a $\mathcal{F}$. Si $g \in L^0(S; X)$ y*

$\tilde{g} \in L^0(S;X)$ *son esperanzas condicionales de* f *respecto a* $\mathcal{F}$*, entones* $g = \tilde{g}$ *en casi todo punto.*
En ese caso, se nota $\mathbb{E}(f|\mathcal{F})$ *a la esperanza condicional de* f *respecto a* $\mathcal{F}$*.*

Definición 2.7. (i) Una familia de *sub*-σ-álgebras $(\mathcal{F}_n)_{n\in I}$ de $\mathcal{A}$ se dice una *filtración* en $(S, \mathcal{A}, \mu)$ si $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n$ siempre que $m, n \in I$ y $m \leq n$. La filtración se dice σ*-finita* si μ es σ-finita en cada $\mathcal{F}_n$.

(ii) Una familia de funciones $(f_n)_{n\in I}$ en $L^0(S;X)$ es adaptada a la filtracioń $(\mathcal{F}_n)_{n\in I}$ si $f_n \in L^0(S, \mathcal{F}_n; X)$ para todo $n \in I$.

(iii) Una familia de funciones $(f_n)_{n\in I}$ en $L^0(S;X)$ se dice una *martingala* respecto a una filtración σ-finita $(\mathcal{F}_n)_{n\in I}$ si es adaptada a $(\mathcal{F}_n)_{n\in I}$, y para todo par de índices $m \leq n$ la función f_n es σ-integrable sobre $\mathcal{F}_m$ y satisface

$$\mathbb{E}(f_n|\mathcal{F}_m) = f_m.$$

Definición 2.8 (**Propiedad y espacios UMD**)**.** Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad de *diferencia incondicional de martingalas* (propiedad UMD) si para todo $p \in (1, \infty)$ existe una constante finita $\beta \geq 0$ (que depende solo de p y X) tal que vale lo siguiente. Siempre que $(S, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finita , $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ es una filtración σ-finita, y $(f_n)_{n=0}^N$ una martingala finita en $L^p(S;X)$, entonces para todo conjunto de escalares $(\varepsilon_n)_{n=1}^N$ con $|\varepsilon_n| = 1$ se tiene que

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n df_n \right\|_{L^p(S;X)} \leq \beta \left\| \sum_{n=1}^{N} df_n \right\|_{L^p(S;X)}$$

donde $df_n = f_n - f_{n+1}$.
Si esta condición se cumple, entonces decimos que X *tiene la propiedad UMD.*

2.2. Multiplicadores de Fourier y de Schur

Definición 2.9. Dado $m \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(X,Y))$ definimos su *multiplicador de Fourier* asociado como

$$T_m : \widecheck{L^1}(\mathbb{R}^d; X) \longmapsto \widecheck{L^1}(\mathbb{R}^d; Y) \tag{2.1}$$

$$f \longmapsto \widecheck{(m\hat{f})}. \tag{2.2}$$

La función m se llama el *multiplicador* o *símbolo* del operador T_m.

Para ver que esta definición tiene sentido, es suficiente observar que la multiplicación punto a punto $g \mapsto mg$ con $m \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(X,Y))$ manda elementos de $L^1(\mathbb{R}^d, X)$ en elementos de $L^1(\mathbb{R}^d, Y)$.

La función $T_m f$ (Definición 2.9) con $f \in \widecheck{L^1}(\mathbb{R}^d; X)$ y $m \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(X,Y))$ es continua y esta dada explícitamente por la integral de Bochner ([18, Chapter 1])

$$T_m f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} m(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi.$$

Además, T_m esta acotado como operador de $\widecheck{L^1}(\mathbb{R}^d; X)$ en $\widecheck{L^1}(\mathbb{R}^d; Y)$. Esto se sigue de la siguiente factorización

$$T_m : \widecheck{L^1}(\mathbb{R}^d; X) \xmapsto{\hat{}} L^1(\mathbb{R}^d, X) \xmapsto{m} L^1(\mathbb{R}^d, Y) \xmapsto{\quad\check{}\quad} \widecheck{L^1}(\mathbb{R}^d; Y).$$

Teorema 2.10. *[18, p. 411] Sea X un espacio UMD complejo y $p \in (1,\infty)$. Entonces las potencias imaginarias $m_s(\xi) := |\xi|^{is}$, con $s \in \mathbb{R}$ son multiplicadores de Fourier para $L^p(\mathbb{R}; X)$ y*

$$\|T_{m_s}\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R};X))} \leq c_{p,X}(1+|s|).$$

Teorema 2.11. *[18] Sea $m \in C(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ con $m(0) = 0$ y $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Z}}$ una familia de proyecciones mutuamente ortogonales en H (el espacio de Hilbert subyacente). Si $T_m \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}, \mathcal{S}^p))$ entonces*

$$M_m^e x := \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} m(j-k)e_k x e_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{k,j\in\Lambda_n} m(j-k)e_k x e_j$$

converge en $\mathcal{S}^p$ para cada $x \in \mathcal{S}^p$, $\Lambda_n \nearrow \mathbb{Z}$ con Λ_n finito y

$$\|M_m^e\|_{\mathcal{B}(\mathcal{S}^p)} \leq 2\,\|T_m\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R},\mathcal{S}^p))}$$

Demostración. Si Λ_n es una sucesión de conjuntos finitos y $\Lambda_n \nearrow \mathbb{Z}$ entonces $x_n := \sum_{k,j\in\Lambda_n} e_k x e_j \to x$ en $\mathcal{S}^p$ pues si $h \in H$ es claro que $\sum_{k\in\Lambda_n} e_k h \to h$ en H, y de esto se sigue fácilmente que $x_n \to x$ en $\mathcal{S}^p$ para x de rango finito escribiendo su desarrollo en término de tensores elementales. Como los operadores de rango finito son densos en $\mathcal{S}^p$ se tiene la convergencia para un $x \in \mathcal{S}^p$ arbitrario por aproximación. Luego es suficiente probar el teorema para x_n en vez de para x. Observamos que

$$M_m^e x_n = \sum_{k,j\in\Lambda_n} m(j-k) e_k x e_j$$

forma una sucesión de Cauchy en $\mathcal{S}^p$ y podemos definir $M_m^e x$ como su límite, el cuál es fácil ver que es independiente de la aproximación Λ_n que se use. En lo que sigue, vamos a considerar solo estas sumas finitas y vamos a dejar de escribir en subíndice n para simplificar la escritura.
La idea ahora está en pre y post componer $M_m^e x$ con operadores de la forma $u_t := \sum_{k\in\Lambda} e^{2\pi i k t} e_k$, pues la aplicación $x \mapsto u_t x u_{-t}$ es una isometría en $\mathcal{S}^p$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|M_m^e x\|_{\mathcal{S}^p} &= \|u_t(M_m^e x)u_{-t}\|_{\mathcal{S}^p} \\
&= \left\| \sum_{k,j} m(j-k) e^{2\pi i (j-k)t} e_k x e_j \right\|_{\mathcal{S}^p} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \\
&= \left\| \sum_{\theta\in\Delta := \Lambda-\Lambda\setminus\{0\}} m(\theta) e^{2\pi i \theta t} x_\theta \right\|_{\mathcal{S}^p}
\end{aligned}$$

con $x_\theta := \sum_{\substack{k,j\in\Lambda \\ j-k=\theta}} e_k x e_j$ y la convergencia de las sumas es trivial pues Λ es finito. Ahora, si repetimos la cuenta anterior con $m \equiv 1$ se tiene

$$\|x\|_{\mathcal{S}^p} = \left\| x_0 + \sum_{\theta\in\Delta} e^{2\pi i \theta t} x_\theta \right\|_{\mathcal{S}^p} \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde x_0 se define igual que los otros x_θ, poniendo $\theta = 0$.
Tomemos una función auxiliar $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ de norma uno. Entonces

$$\begin{aligned}
\|M_m^e x\|_{\mathcal{S}^p}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \|M_m^e x\|_{\mathcal{S}^p}^2 \, \varepsilon \, |\phi(\varepsilon t)|^2 \, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left\| \sum_{\theta\in\Delta} m(\theta) e^{2\pi i\theta t} x_\theta \phi(\varepsilon t) \right\|_{\mathcal{S}^p}^2 \varepsilon dt \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Si en (2.3) reemplazamos $m(\theta)$ por el operador multiplicador de Fourier T_m la expresión resulta acotada por

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left\| \sum_{\theta\in\Delta} T_m \left(t \mapsto e^{2\pi i\theta t} x_\theta \phi(\varepsilon t)\right) \right\|_{\mathcal{S}^p}^2 \varepsilon dt \\
&\leq \|T_m\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R},\mathcal{S}^p))}^2 \int_{\mathbb{R}} \left\| \sum_{\theta\in\Delta} e^{2\pi i\theta t} x_\theta \phi(\varepsilon t) \right\|_{\mathcal{S}^p}^2 \varepsilon dt \\
&= \|T_m\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R},\mathcal{S}^p))}^2 \int_{\mathbb{R}} \left\| \sum_{\theta\in\Delta} e^{2\pi i\theta t} x_\theta \right\| |\phi(\varepsilon t)|^2 \, \varepsilon dt \\
&\leq \|T_m\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R},\mathcal{S}^p))}^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\|x\|_{\mathcal{S}^p} + \|x_0\|_{\mathcal{S}}^p\right)^2 \varepsilon \, |\phi(\varepsilon t)|^2 \, dt \\
&\leq \|T_m\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R},\mathcal{S}^p))}^2 \, 2^2 \, \|x\|_{\mathcal{S}^p}^2 .
\end{aligned}$$

Ahora falta estimar el error de reemplazar $m(\theta)$ por T_m:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \sum_{\theta\in\Delta} (m(\theta) - T_m)(t \mapsto e^{2\pi i\theta t} x_\theta \phi(\varepsilon t)) \right\|_{\mathcal{S}^p}^2 \varepsilon dt \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{\theta\in\Delta} \left(\int_{\mathbb{R}} \left|(m(\theta) - T_m)(t \mapsto e^{2\pi i\theta t} \phi(\varepsilon t))\right|^2 \varepsilon dt \right)^{1/2} \|x_\theta\|_{\mathcal{S}^p} \\
&= \sum_{\theta\in\Delta} \left(\int_{\mathbb{R}} \left|(m(\theta) - m(\xi)) \hat{\phi}\left(\frac{\xi - \theta}{\varepsilon}\right)\right|^2 \frac{d\xi}{\varepsilon} \right)^{1/2} \|v_\theta\|_{\mathcal{S}^p} . \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

donde en el último paso, luego de extraer la componente x_θ de la norma usamos el teorema de Plancharel para funciones en L^2 con valores escalares.

Ahora con el cambio de variables $\eta = \frac{\xi-\theta}{\varepsilon}$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \left|(m(\theta) - m(\xi))\hat{\phi}\left(\frac{\xi-\theta}{\varepsilon}\right)\right|^2 \frac{d\xi}{\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}} |m(\theta) - m(\theta+\varepsilon\eta)|^2 \left|\hat{\phi}(\eta)\right|^2 d\eta$$

Como m es continua en $\Delta = (\Lambda - \Lambda)\backslash\{0\}$ se tiene que

$$|m(\theta) - m(\theta+\varepsilon\eta)| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \, \forall \eta$$

y

$$|m(\theta) - m(\theta+\varepsilon\eta)| \leq (2\left\|m\right\|_\infty)^2$$

y por convergencia mayorada se tiene que la integral converge a 0 pues $\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$.
Luego para terminar de ver que el error de estimar m por T_m tiende a cero solo hay que observar que la suma en (2.4) es finita y cada $\|x_\theta\|_{\mathcal{S}}^p$ es finito para cada θ. □

Como corolario del teorema anterior y del Teorema 2.10 usando el hecho de que $\mathcal{S}^p$ es un espacio UMD para $p \in (1,\infty)$[18, p. 422] se tiene que

Corolario 2.12 ([18]). *Si $e = (e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es como en el Teorema anterior y $m_s(\xi) = |\xi|^{is}$ $s \in \mathbb{R}$ entonces $\left\|M^e_{m_s}\right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{S}^p)} \leq c_p(1+|s|)$.*

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente lema que va a ser de utilidad en la próxima seccion

Lema 2.13. *Si $x \in \mathcal{S}^p$ y si*

$$x_s = \sum_{k<j} (f(j) - (k))^{is} e_k x e_j, \qquad s \in \mathbb{R}$$

entonces, para cada $1 < p < \infty$, existe una constante $c_p > 0$ tal que

$$\|x_s\|_p \leq c_p(1+|s|)\,\|x\|_p\,,$$

donde $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es una función no-decreciente con valores en los enteros.

Demostración. La aplicación $x \mapsto x_s$ puede factorizarse como

$$x \mapsto \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} m_s(f(j)-f(k))e_k x e_j \overset{T}{\mapsto} x_s = \sum_{k<j} m_s(f(j)-f(k))e_k x e_j$$

Luego, como en (1.41) vimos que T estaba acotada en $\mathcal{S}^p$ basta ver que vale la cota para

$$x \mapsto \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} m_s(f(j)-f(k))e_k x e_j = \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} (f(j)-f(k))^{is} e_k x e_j. \tag{2.5}$$

Pero

$$\sum_{k,j\in\mathbb{Z}} (f(j)-f(k))^{is} e_k x e_j = \sum_{\alpha,\beta\in f(\mathbb{Z})} m(\beta-\alpha)e_{f^{-1}(\alpha)} x e_{f^{-1}(\beta)}$$

Luego la aplicacion (2.5) coincide con $M^e_{m_s}$ con $e = (e_\alpha)_{\alpha\in f(\mathbb{Z})}$ para el cual vale la cota por el teorema anterior. $\square$

2.3. Multiplicadores de Schur de diferencias divididas

Sea H un espacio de Hilbert separable equipado con la traza usual de operadores en $\mathcal{B}(H)$. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{B}(H)$ una sucesión que cumple

1. e_k es una proyección ortogonal para todo $k \in \mathbb{Z}$.

2. $e_k e_j = 0$ si $k \neq j$.

3. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} e_k h = h$ para todo $h \in H$.

Para un conjunto con estas propiedades tenemos que además si $x \in \mathcal{B}(H)$ entonces

$$\sum_{k,j\in\mathbb{Z}} e_k x e_j = x.$$

Definición 2.14. Sea $\mu = (\mu_{k,j})_{k,j\in\mathbb{Z}}$ una matriz (infinita) de elementos de H y $\{e_{k,j}\}$ el sistema usual de matrices que corresponden al sistema ortonormal

$\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ en H. Definimos en el espacio de matrices infinitas con entradas en H el *multiplicador de Schur asociado a* μ, dado por multiplicar a izquierda por μ, es decir

$$T_\mu : x = \sum_{k,j} \alpha_{k,j} e_{k,j} \longmapsto \sum_{k,j} \mu_{i,j}\alpha_{i,j} e_{k,j}.$$

Observación 2.15. Para la próxima sección va a ser conveniente pensar que el operador T_μ puede reescribirse como

$$T_\mu = \sum_{k,j} \mu_{k,j} e_k \otimes e_j$$

donde $e_k \otimes e_j$ está dado por $(e_k \otimes e_j)x = e_k x e_j$.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función Lipschitz, es decir, existe una constante positiva M tal que $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}$. Llamamos $\|f\|_{Lip\,1}$ a la menor de dichas constantes siendo $\|f\|_{Lip\,1} = \infty$ si f no es Lipschitz.
En esta sección vamos a estudiar el siguiente operador definido para una función f Lipschitz

$$Tx = \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \phi_{kj} e_k x e_j \qquad \textit{donde} \qquad \phi_{kj} = \begin{cases} \frac{f(k)-f(j)}{k-j}, & \text{si } k \neq j \\ 0, & \text{si } k = j \end{cases} \tag{2.6}$$

En esta sección, el conjunto $\{e_n\}$, la función f, el operador T están fijos y si x está en S^p notamos $x_{kj} := e_k x e_j$.

El siguiente resultado de Potapov, D. y Sukochev, F. en [28] es una de las piezas fundamental de esta tesis. En el, probamos que el multiplicador de Schur asociado a las diferencias divididas $\{\phi_{kj}\}$ está acotado en $\mathcal{S}^p$ para cada $1 < p < \infty$.
Este teorema va a ser de suma importancia en el Capítulo 4, a la hora de probar que la generalización continua del multiplicador de Schur (que llamaremos *operadores de integral doble*), tambien está acotado en $\mathcal{S}^p$ si $1 < p < \infty$.

Teorema 2.16. *Si* $\|f\|_{Lip\,1} \leq 1$ *, entonces el operator* T *está acotado en* $\mathcal{S}^p$ *para todo* $1 < p < \infty$.

Demostración.
Sin perdida de generalidad, supongamos que $f(0) = 0$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sean $x \in S^p$ e $y \in S^q$ con $1 < p, q < \infty$ y $1/p + 1/q = 1$. Para ver que el operador T esta acotado, por el Lema 1.21 basta ver que

$$|\mathrm{tr}(yTx)| \leq c_p \|x\|_p \|y\|_q \tag{2.7}$$

para cierta constante $c_p > 0$.

Ahora, si $x = \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} e_k x e_j$ entonces

$$Tx = \sum_{\lambda,\mu} \phi_{\lambda,\mu} e_\lambda \left(\sum_{k,j} e_k x e_k \right) e_j = \sum_{k,j} \phi_{kj} e_k x e_j.$$

Si $y = \sum_{s,t} e_s y e_t$ se tiene que, por un lado

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(yTx) &= \left(\left(\sum_{s,t} e_s y_e t \right) \left(\sum_{k,j} \phi_{kj} e_k x e_j \right) \right) \\
&= \mathrm{tr} \left(\sum_{s,t} \sum_{k,j} \phi_{kj} e_j y e_t e_k x_e j \right) \\
&= \sum_{s,t} \sum_{k,j} \phi_{kj} \, \mathrm{tr}(e_s y e_t e_k x e_j) \\
&= \sum_{s,t} \sum_{k,j} \phi_{kj} \, \mathrm{tr}(y e_t e_k x e_j e_s) \\
&= \sum_{k,j} \phi_{kj} \, \mathrm{tr}(y e_k e_k x e_j e_j) \\
&= \mathrm{tr} \left(\sum_{k,j} \phi_{kj} \, e_j y e_k \, e_k x e_j \right) \\
&= \mathrm{tr} \left(\sum_{k<j} \phi_{kj} \, e_j y e_k \, e_k x e_j \right) + \mathrm{tr} \left(\sum_{k>j} \phi_{kj} \, e_j y e_k \, e_k x e_j \right),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\operatorname{tr}(yTx) = \operatorname{tr}\left(\sum_{k<j} \phi_{kj}\, e_j y e_j\, e_k x e_j\right) + \operatorname{tr}\left(\sum_{k>j} \phi_{kj}\, e_j y e_k\, e_k x e_j\right). \qquad (2.8)$$

Por otro lado, si

$$\begin{aligned} \tilde{x}_s &= \sum_{k<j} e_k x e_j & \qquad \tilde{x}_i &= \sum_{s>t} e_s x e_t \\ \tilde{y}_s &= \sum_{k<j} e_k y e_j & \qquad \tilde{y}_i &= \sum_{s>t} e_s y e_t \end{aligned}$$

(si pensamos a x como matriz, sería truncar en la parte triangular superior de x y la parte triangular inferior de x) tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\tilde{y}_i T \tilde{x}_s) &= \operatorname{tr}\left(\left(\sum_{s>t} e_s y e_t\right)\left(\sum_{k<j} \phi_{kj} e_k x e_j\right)\right) \\ &= \sum_{s>t}\sum_{k<j} \phi_{kj} \operatorname{tr}(e_j y e_t e_k x e_j)) \\ &= \sum_{k<j} \phi_{kj} \operatorname{tr}(e_j y e_k\, e_k x_e j) \\ &= \operatorname{tr}\left(\sum_{k<j} \phi_{kj}\, e_j y e_k\, e_k x e_j\right) \end{aligned}$$

y análogamente,

$$\operatorname{tr}(\tilde{y}_s T \tilde{x}_i) = \operatorname{tr}\left(\sum_{k>j} \phi_{kj}\, e_j y e_k\, e_k x e_j\right)$$

y por lo tanto juntando esto último con (2.8) tenemos que

$$\operatorname{tr}(yTx) = \operatorname{tr}(\tilde{y}_i T \tilde{x}_s) + \operatorname{tr}(\tilde{y}_s T \tilde{x}_i). \qquad (2.9)$$

Por el Lema 1.41, el operador truncar está acotado en la clase S^p para cada $1 < p < \infty$ y entonces, si la desigualdad (2.7) vale para $\tilde{x}$ triangular superior e $\tilde{y}$ triangular inferior, se tiene que por (2.9) el resultado vala probado para

$x \in \mathcal{S}^p$ e $y \in \mathcal{S}^q$ cualesquiera.

Supongamos entonces que $x \in S^p$ es triagular superior (respecto a la sucesión $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$) y que $y \in S^q$ es triangular superior (respecto a la sucesión $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$). Luego

$$Tx = \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \phi_{kj} e_k x e_j = \sum_{k<j} \phi_{kj} e_k x e_j.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(yTx) = \operatorname{tr}\left(y \sum_{k<j} \phi_{kj} e_k x e_j \right) &= \sum_{k<j} \phi_{kj} \operatorname{tr}(y e_k^2 x e_j^2) \\ &= \sum_{k<j} \phi_{kj} \operatorname{tr}(e_j y e_k e_k x e_j) \\ &= \sum_{k<j} \operatorname{tr}(y_{jk} \phi_{kj} x_{kj}) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\operatorname{tr}(yTx) = \sum_{k<j} \operatorname{tr}(y_{jk} \phi_{kj} x_{kj}) \tag{2.10}$$

Veamos ahora que podemos asumir que f toma valores enteros en los enteros. Llamemos $a_k = f(k) - f(k-1)$, luego, si $k < j$ tenemos que

$$\phi_{kj} = \frac{f(k) - f(j)}{k - j} = \frac{1}{j-k} \sum_{k<m\leq j} a_m$$

entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(yTx) = \sum_{k<j} \operatorname{tr}(y_{jk} \phi_{kj} x_{kj}) &= \frac{1}{j-k} \sum_{k<j} \operatorname{tr}(y_{jk} x_{kj}) \sum_{k<m\leq j} a_m \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \left(\sum_{k<m\leq j} \frac{\operatorname{tr}(y_{jk} x_{kj})}{j-k} \right). \end{aligned}$$

Ahora, como $\|f\|_{Lip\,1} \leq 1$ tenemos que $\|\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}}\|_\infty \leq 1$ y por lo tanto basta ver que vale (2.7) para cualquier sucesión $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^\infty$ con $\|\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}}\|_\infty \leq 1$. Para esto, alcanza verlo para $a_m \in \{-1, 0, 1\}$ con lo cual se tiene que para todo $k \in \mathbb{Z}$

$$f(k) = f(k) - f(0) = \sum_{1 \le m \le k} a_m \in \mathbb{Z}.$$

Además de todo esto, podemos suponer que f es no-decreciente (si no fuese así, tomamos la función $f_1(t) = f(t) + t$). Entonces, supongamos a partir de ahora que f toma valores entores en los puntos enteros, es no-decreciente, y

$$f(k) - f(j) \le 2(k - j) \qquad \text{para } j \le k \qquad j, k \in \mathbb{Z}$$

y por lo tanto $0 \le \phi_{kj} \le 2$ para todo $j \le k$ con $j, k \in \mathbb{Z}$.
De acuerdo al Lema 2.20, tenemos que

$$\phi_{kj} = \int_{\mathbb{R}} g(s)(f(j) - f(k))^{is}(j - k)^{-is} ds \qquad \text{para } k < j \tag{2.11}$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisface que

$$\int_{\mathbb{R}} |s|^n \, |g(s)| \, ds < \infty \qquad \text{para } n \ge 0 \tag{2.12}$$

Con esto, reemplazando la expresión (2.11) en (2.10) tenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(yTx) &= \sum_{k<j} \operatorname{tr}(y_{jk}\phi_{kj}x_{kj}) \\
&= \sum_{k<j} \operatorname{tr}\left(y_{jk} \left(\int_{\mathbb{R}} g(s)(f(j) - f(k))^{is}(j - k)^{-is} \right) x_{kj} \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(s) \operatorname{tr}\left(\left[\sum_{k<j} (f(j) - f(k))^{is} y_{jk} \right] \left[\sum_{k<j} (j - k)^{-is} x_{kj} \right] \right) ds. \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(s) \operatorname{tr}(y_s x_s) \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

donde

$$y_s = \sum_{k<j} (f(j) - (k))^{is} y_j \qquad y \qquad x_s = \sum_{k<j} (j - k)^{-is} x_{kj}.$$

y por Lema 2.13 se tiene que

$$\|x_s\|_p \leq c_p(1+|s|)\|x\|_p \qquad y \qquad \|y_s\|_q \leq c_q(1+|s|)\|y\|_q .$$

Luego, juntando esto con (2.13) y usando (1.20) y el Lema 2.20 se tiene que

$$\begin{aligned}|\mathrm{tr}(yTx)| \leq \int_{\mathbb{R}} |g(s)|\,|\mathrm{tr}(y_s x_s)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |g(s)|\,\|x_s\|_p\,\|y_s\|_q \\ &\leq C\,\|x\|_p\,\|y\|_q \int_{\mathbb{R}} (1+|s|)^2\,|g(s)|\,ds \\ &\leq c_p\,\|x\|_p\,\|y\|_q\end{aligned}$$

para cierta constante c_p que depende solo de p. □

Observación 2.17. El operador T definido en (2.6) también puede definirse respecto a dos familias de proyecciones. Si $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\{f_j\}_{k\in\mathbb{Z}}$ son dos familias de proyecciones ortogonales, entonces

$$\tilde{T}x = \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \phi_{kj} e_k x f_j \tag{2.14}$$

donde ϕ_{kj} se define como en (2.6).
Para ver que $\tilde{T}$ esta acotado en $\mathcal{S}^p$, observemos que este operador es de la forma (2.6) si consideramos la familia de proyecciones ortogonales

$$\{e_j \otimes e_{11} + f_j \otimes e_{22}\}_{j\in\mathbb{Z}}$$

en el producto tensorial de álgebras de von Neumann $\mathcal{B}(H)\otimes\mathbb{M}_2$, donde $\mathbb{M}_2$ es el álgebra de matrices de 2×2.

Si bien el Teorema 2.16 está enunciado para $\mathcal{B}(H)$, este resultado puede extenderse al contexto de un álgebra de von Neumann semifinita $(\mathcal{M},\tau)$ y los espacios no-conmutativos $L^p(M,\tau)$(ver [28, Theorem 2]).

2.4. Funciones Lipschitz de operadores: caso compacto

Con la las ideas usadas para demostrar el teorema anterior, estamos en condiciones de probar el resultado de Potapov y Sukochev para funciones Lipschitz operador para el caso donde los operadores que se tienen en cuenta son compactos.

Teorema 2.18 (Potapov-Sukochev)**.** *Sean a, b operadores compactos y autoadjuntos en un espacio de Hilbert separable H y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz. Entonces*

$$\|f(a) - f(b)\|_{\mathcal{S}^p} \leq c_p \|f\|_{Lip} \|a - b\|_{\mathcal{S}^p}, \quad 1 < p < \infty$$

La demostración de este teorema utiliza la siguiente proposición

Proposición 2.19. *Sean u y v operadores compactos y autoadjuntos, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz. Entonces*

$$\|[f(u), v]\|_{\mathcal{S}^p} \leq c_p \|f\|_{Lip\,1} \|[u, v]\|_{\mathcal{S}^p}.$$

Demostración. Como u es compacto y autoadjunto, podemos considerar su descomposición canónica de la forma $u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ donde $\{e_k\}_k$ proyecciones ortogonales de rango 1. Como $f(u) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k) e_k$ e $I = \sum_{k=1}^{\infty} e_k$ se tiene que

$$\begin{aligned}[f(u), v] &= \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k) e_k \sum_{j=1}^{\infty} v e_j - \sum_{k=1}^{\infty} e_k v \sum_{j=1}^{\infty} f(\lambda_j) e_j \\ &= \sum_{k,j}^{\infty} (f(\lambda_k) - f(\lambda_j)) e_k v e_j,\end{aligned}$$

y de manera similar tenemos que $[u, v] = \sum_{k,j}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_j) e_k v e_j$.
Ahora observemos que $[f(u), v] = T_{\phi_f}([u, v])$ donde $T_{\phi_f}(x)$ es el multiplicador

de Schur definido por

$$T_{\phi_f} x = \sum_{k \neq j} \phi_f(k,j) e_k x e_j$$

donde ϕ_f es la función definida en (2.6). Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} T([u,v]) &= \sum_{k \neq j} \frac{f(\lambda_k) - f(\lambda_j)}{\lambda_k - \lambda_j} e_k \left(\sum_{s,t} (\lambda_s - \lambda_t) e_s v e_t \right) e_j \\ &= \sum_{k \neq j} \frac{f(\lambda_k) - f(\lambda_j)}{\lambda_k - \lambda_j} (\lambda_k - \lambda_j) e_k v e_j \\ &= \sum_{k \neq j} (f(\lambda_k) - f(\lambda_j)) e_k v e_j = [f(u), v]. \end{aligned}$$

Lo único que queda es ver que el operador T_{ϕ_f} está acotado en $\mathcal{S}^p$. La prueba es casi identica a la del Teorema 2.16 y los detalles pueden encontrarse en [18, Proposition 5.4.8]

□

Demostración (del Teorema 2.18). Consideremos los operadores

$$u = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

en $H \times H$. Entonces

$$\begin{aligned} \|[f(u), v]\|_{\mathcal{S}^p(H)} &= \left\| \begin{pmatrix} 0 & f(a) - f(b) \\ f(a) - f(b) & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{S}^p(H \times H)} \\ &= 2^{1/p} \|f(a) - f(b)\|_{\mathcal{S}^p(H)} \end{aligned}$$

donde usamos la siguiente identidad

$$\|\tilde{s}\|_{\mathcal{S}^p(H \times H)} = 2^{1/p} \|s\|_{\mathcal{S}^p}, \qquad \tilde{s} := \begin{pmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{pmatrix},$$

pues cada valor singular $\lambda_k = \lambda_k(s)$ aparece dos veces en la descomposición en valores singulares de $\tilde{s}$ (ver [18]), y por lo tanto

$$\|\tilde{s}\|_{\mathcal{S}^p(H\times H)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\tilde{s})^p\right)^{1/p} = \left(2\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(s)^p\right)^{1/p} = 2^{1/p}\,\|s\|_{\mathcal{S}^p}$$

De manera similar, tenemos que $\|[u,v]\|_{\mathcal{S}^p} = 2^{1/p}\,\|a-b\|_{\mathcal{S}^p}$. □

2.5. Algunos lemas

Terminamos con dos lemas que son independientes del contenido de este capítulo pero que van a ser de utilidad mas adelante para acotar la norma de cierto operador.

Lema 2.20. *Existe una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |s|^n\,|g(s)|\,ds < \infty, \qquad n \geq 0,$$

y para cada par $\lambda, \mu > 0$ con $0 \leq \lambda/\mu \leq 2$ se tiene

$$\frac{\lambda}{\mu} = \int_{\mathbb{R}} g(s)\lambda^{is}\mu^{-is}ds.$$

Demostración. Sea f una función C^∞ con las siguientes propiedades:

(i) $f \geq 0$;

(ii) $f(t) = 0$, *si* $t \geq 1 + \log 2$;

(iii) $f(t) = e^t$, *si* $t \leq \log 2$.

Una función f con estas condiciones cumple que ella y todas sus derivadas son funciones en L^2, es decir,

$$\left\|f^{(n)}\right\|_{L^2} < \infty, \quad n \geq 0.$$

Si ahora definimos $g(s) := \hat{f}(s)$, entonces se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} |s|^n |g(s)| \, ds \leq c_0 \operatorname{máx}\{\left\| f_{L^2}^{(n)} \right\|, \left\| f^{n+1} \right\|_{L^2}\} < \infty, \quad n \geq 0.$$

Mas aún, via la inversa de la transformada de Fourier tenemos que

$$e^t = \int_{\mathbb{R}} g(s) e^{its} ds, \quad t \leq \log 2$$

y reemplazando $t = \log \lambda/\mu$ se tiene la relación que se buscaba. $\square$

Lema 2.21. *Sea $d\nu$ un medida finita en los borelianos de $\mathbb{R}^2$ y $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ una función integrable en $(\mathbb{R}^2, d\nu)$. Si G_n es la familia de funciones gaussianas dilatadas dadas por*

$$G_n(t) = nG(nt), \quad G(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}, \, n = 1, 2, \ldots,$$

y si

$$\phi_n(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{R}} G_n(s) \phi(\lambda - s, \mu - s) ds,$$

entonces

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\phi_n - \phi| \, d\nu = 0. \tag{2.15}$$

Demostración. Como la clase de funciones uniformemente continuas en $\mathbb{R}^2$ es densa respecto de la norma en $L^1(\mathbb{R}^2, d\nu)$, podemos asumir que ϕ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^2$. Veamos que

$$\lim_{n \to \infty} \|\phi_n - \phi\|_{\infty} = 0,$$

lo cual, como $d\nu$ es finita, implica (2.15).
Observemos primero que

$$\int_{\mathbb{R}} G_n(s) ds = 1, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

En consecuencia, tenemos que

$$\begin{aligned}\phi_n(\lambda,\mu)-\phi(\lambda,\mu) &= \int_{\mathbb{R}} G_n(s)\phi(\lambda-s,\mu-s)ds-\phi(\lambda,\mu)\int_{\mathbb{R}} G_n(s)ds\\ &= \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(\lambda,\mu,s)ds,\end{aligned}$$

donde

$$\Phi_n(\lambda,\mu,s)=G_n(s)(\phi(\lambda-s,\mu-s)-\phi(\lambda,\mu)).$$

Fijemos $\varepsilon>0$. Como ϕ es uniformemente continua, existe $\delta>0$ tal que

$$\sup_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}}|\phi(\lambda-s,\mu-s)-\phi(\lambda,\mu)|\leq\varepsilon,\quad si\ |s|<\delta.$$

Usando este $\delta>0$, tenemos que

$$\phi_n(\lambda,\mu)-\phi(\lambda,\mu)=\omega_0(\lambda,\mu)+\omega_\infty(\lambda,\mu),$$

donde

$$\omega_0(\lambda,\mu)=\int_{|s|<\delta}\Phi(\lambda,\mu,s)ds\qquad y\qquad \omega_\infty(\lambda,\mu)=\int_{|s|\geq\delta}\Phi(\lambda,\mu,s)ds.$$

Acotemos cada término por separado. Para ω_0, usando la continuidad uniforme de de ϕ se tiene

$$\begin{aligned}\lambda,\mu\,|\omega_0(\lambda,\mu)| &\leq \int_{|s|<\delta} G_n(s)\sup_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}}|\phi(\lambda-s,\mu-s)-\phi(\lambda,\mu)|\,ds\\ &\leq\varepsilon\int_{\mathbb{R}} G_n(s)ds\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

Por otro lado, para ω_∞ tenemos

$$\sup_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}}|\omega_\infty(\lambda,\mu)|\leq 2\int_{|s|\geq\delta}G_n(s)\sup_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}}|\phi(\lambda,\mu)|\,ds=2\,\|\phi\|_\infty\int_{|s|\geq\delta}G_n(s)ds.$$

Ahora observemos que, fijado δ, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|s|\geq\delta} G_n(s)ds = 0,$$

con lo cual existe N_ε tal que para todo $n \geq N_\varepsilon$,

$$\sup_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} |\omega_\infty(\lambda,\mu)| \leq \varepsilon.$$

Combinando las estimaciones para ω_0 y ω_∞, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe N_ε tal que, si $n \geq N_\varepsilon$,

$$\|\phi_n - \phi\|_\infty \leq \|\omega_0\|_\infty + \|\omega_\infty\|_\infty \leq 2\varepsilon$$

con lo cual el lema está probado. $\square$

Capítulo 3

Medidas espectrales

En este capítulo definimos la noción de medida espectral. Establecemos sus propiedades básicas y construimos, a partir de dos medidas espectrales que conmutan, la medida espectral producto. Luego, introducimos la noción de integral de una función respecto a una medida espectral y enunciamos el teorema espectral para operadores autoadjuntos no necesariamente acotados. Un desarrollo sistemático de esto puede encontrarse en [4].
Para terminar, establecemos algunas propiedades que relacionan la medida espectral de un operador autoadjunto. Estos resultados van a ser útiles en el siguiente capítulo y pueden encotrarse en [9].

3.1. Medidas espectrales

Sea $(Y, \mathcal{A})$ un espacio de medida, H un espacio de Hilbert separable y $\mathcal{P} = \mathcal{P}(H)$ el conjunto de las proyecciones ortogonales en H.
Supongamos que $E : \mathcal{A} \to \mathcal{P}$ es una función que satisface

1. *σ-aditividad*: Si $\{\delta_n\}$ es un conjunto finito de conjuntos disjuntos con $\delta_n \in \mathcal{A}$ y $\delta = \bigcup_n \delta_n$ entonces $E(\delta) = \sum_n E(\delta_n)$ donde la convergencia de la serie es en la topología SOT.

2. *completitud*: $E(Y) = 1$.

Entonces E se llama una *medida espectral* en H y $(Y, \mathcal{A}, H, E)$ se dice un *espacio de medida espectral*.

Teorema 3.1. *Si E es una medida espectral en H entonces*

$$E(\delta_1)E(\delta_2) = E(\delta_2)E(\delta_1) = E(\delta_1 \cap \delta_2). \tag{3.1}$$

Demostración. Si $\delta_1 \cap \delta_2 = \varnothing$ entonces $E(\delta_1) + E(\delta_2) = E(\delta_1 \cup \delta_2)$ con lo cual $E(\delta_1) + E(\delta_2)$ es una proyección y por lo tanto $E(\delta_1)E(\delta_2) = 0$.
Si $\delta_1 \cap \delta_2 \neq \varnothing$ consideremos $\delta_0 = \delta_1 \cap \delta_2$ y $\delta^i = \delta_i \backslash \delta_0$ para $i = 1, 2$.
Entonces

$$E(\delta_i) = E(\delta^i \cup \delta_0) = E(\delta^i) + E(\delta_0)$$

y esto, junto con el hecho de que E toma valores en las proyecciones ortogonales de H se tiene que

$$\begin{aligned} E(\delta_1)E(\delta_2) &= (E(\delta^1) + E(\delta_0))(E(\delta^2) + E(\delta_0)) \\ &= E(\delta_1)E(\delta_2) + E(\delta^1)E(\delta_0) + E(\delta_0)E(\delta^2) + E(\delta_0)E(\delta_0) \quad = E(\delta_0). \end{aligned}$$

□

Como consecuencia de la σ-aditividad de una medida espectral tenemos el siguiente resultado

Teorema 3.2. *[4, pp. 124] Sea (Y, E) un espacio de medida espectral y $\{\delta_n\}$ colección de conjuntos medibles en en Y*

1. *Si $\{\delta_n\} \nearrow \bigcup \delta_n$ entonces $s - \lim_n E(\delta_n) = E(\bigcup \delta_n)$*
2. *Si $\{\delta_n\} \searrow \bigcap \delta_n$ entonces $s - \lim_n E(\delta_n) = E(\bigcap \delta_n)$*

donde ambos límites son en la topología fuerte de operadores (SOT).

Toda medida espectral genera una familia de medidas escalares definidas en $\mathcal{A}$. Para cada $f \in H$ se define

$$\mu_f(\delta) = \langle E(\delta)f, f\rangle = \|E(\delta)f\|^2 .$$

Por la σ-aditividad de E tenemos que si $\{\delta_n\}$ es una familia de conjuntos medibles disjuntos dos a dos entonces

$$\begin{aligned}\mu_f(\bigcup \delta_n) = \left\|E(\bigcup \delta_n)f\right\|^2 &= \left\|\left(\sum_n E(\delta_n)\right) f\right\|^2 \\ &= \left\|\sum_n E(\delta_n)f\right\|^2 = \sum_n \|E(\delta_n)f\|^2 = \sum_n \mu_f(\delta_n)\end{aligned}$$

con lo cual tenemos que μ_f es una medida σ-aditiva para todo $f \in H$ y $\mu_f(Y) = \|f\|^2$.

3.2. Extensión de medidas espectrales: medidas producto

Sea $\mathcal{A}^\circ$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Y y $E^\circ : \mathcal{A}^\circ \to \mathcal{P}(H)$ una función aditiva, es decir, que para subconjuntos disjuntos $\delta_1, \cdots, \delta_n$ de A se tiene que

$$E^\circ(\bigcup_{k=1}^{n} \delta_k) = \sum_{k=1}^{n} E^\circ(\delta_k).$$

Supongamos además que $E^\circ(Y) = I$, entonces el Teorema 3.1 sigue valiendo para E° (en la demostración sólo se usa la aditividad de la medida).
Dado $f \in H$ consideremos la función con valores escalares μ_f° en $\mathcal{A}^\circ$ definida como

$$\mu_f^\circ = \langle E^\circ(\delta)f, f\rangle, \qquad \delta \in \mathcal{A}^\circ.$$

Lema 3.3. *Sea E° una función aditiva definida en un álgebra $\mathcal{A}^\circ$ de subconjuntos de Y con valores en las proyecciones ortogonales de un espacio de Hilbert H. Si para todo $f \in H$ la función μ_f° es σ-aditiva en $\mathcal{A}^\circ$ entonces E° también lo es.*

Demostración. Sea $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos en $\mathcal{A}^\circ$ disjuntos dos a dos y $\delta = \bigcup_n \delta_n \in \mathcal{A}^\circ$. Entonces

$$\langle E^\circ(\delta)f, f) = \mu_f^\circ(\delta) = \sum_n \mu_f^\circ(\delta_n) = \sum_n \langle E^\circ(\delta)f, f\rangle, \qquad \forall f \in H.$$

Usando polarización podemos obener la igualdad anterior para la forma sesquilineal

$$\langle E^\circ(\delta)f, g\rangle = \sum_n \langle E^\circ f, g\rangle \qquad \forall f, g \in H$$

con lo cual

$$E^\circ(\delta) = wo - \sum_n E^\circ(\delta_n)$$

donde la convergencia de la serie es en la topología debil de operadores (WOT) y como $\sum_n^N E^\circ(\delta_n)$ es un proyector para todo $N \in \mathbb{N}$ se tiene que la serie converge SOT (ver [4, Teorema 2.8.8])

□

Lema 3.4. *Sea E° una función aditiva con valores en las proyecciones definida en un álgebra $\mathcal{A}$ y superiormente semi-continua en $\varnothing$.*
Entonces E° es σ-aditiva.

Demostración. Sean δ_n, δ como en el lema anterior. Definimos

$$\Delta_n := \bigcup_{k>n} \delta_k = \delta \backslash \bigcup_{k \leq n} \delta_k \; n \in \mathbb{N}.$$

Se tiene que $\Delta_n \in \mathcal{A}^\circ$ y $\bigcup_n \Delta_n = \varnothing$. Luego

$$E^\circ(\Delta_n) = E^\circ(\delta) - \sum_{k \leq n} E^\circ(\delta_k) \xrightarrow[SOT]{} 0$$

con lo cual $\sum_{k=1}^n E^\circ(\delta_k) \xrightarrow[SOT]{} E^\circ(\delta)$.

□

Sea E° una función σ-aditiva con valores en las proyecciones ortogonales de un espacio de Hilbert H , definida en un álgebra $\mathcal{A}^\circ$ de subconjuntos de un conjunto y $E^\circ(Y) = I$.

Veamos que E° puede extenderse a una σ-álgebra, es decir, E° se puede extender a una medida espectral. Para $f \in H$ consideremos la medida μ_f como la extensión de la medida σ-aditiva con valores escalares μ_f°.

Primero, extenderemos E° al conjunto $\mathcal{A}'$ de uniones numerables de elementos de $\mathcal{A}^\circ$ de la siguiente forma, si $w \in \mathcal{A}'$ entonces :

$$E'(w) := so - \sum_n E^\circ(\delta_n)$$

con

$$w = \bigcup_n \delta_n, \quad \delta_n \in \mathcal{A}^\circ \text{ disjuntos dos a dos.} \tag{3.2}$$

Entonces

$$\langle E'(w)f, f)\rangle = \sum_n \mu_f^\circ(\delta_n) = \mu_f(w) \qquad \forall f \in H$$

con lo cual (3.2) no depende de la elección de los δ_n.
Si $w', w'' \in \mathcal{A}'$ con $w' = \bigcup_n \delta_n'$ y $w'' = \bigcup_k \delta_k''$ son descomposiciones disjuntas de w' y w'' (i.e. $\delta_k' \cap \delta_n' = \varnothing$ si $k \neq n$ y lo mismo para los δ_n'') entonces

$$w' \cap w'' = \bigcup_{n,k} \delta_n' \cap \delta_k''$$

es una descomposición disjunta de $w' \cap w''$ y se tiene que

$$E'(w' \cap w'') = \sum_{n,k} E^\circ(\delta_n' \cap \delta_k'') = \sum_{n,k} E^\circ(\delta_n')E^\circ(\delta_k'') = E(w')E(w'')$$

donde la convergencia de las series es en la topología SOT.
La igualdad anterior se extiende a intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{A}'$ y para $\delta \subset Y$ arbitrario definimos la medida exterior $\hat{E}(\delta)$ como

$$\hat{E}(\delta) = \text{ínf}\{E'(w) : \delta \subset w \; w \in \mathcal{A}'\} \tag{3.3}$$

donde el ínfimo de una familia de proyecciones $\{P_n\}_n$ que conmutan dos a dos se define como la proyección ortogonal sobre $H_0 = \bigcap P_n(H)$ (ver Definición

1.28 y [4] §2.8 Sub-§ 4) y como el conjunto de proyecciones en el lado derecho de (3.3) es cerrado por multiplicación se tiene que

$$\langle \hat{E} f, f \rangle = \hat{\mu_f}(\delta) \qquad \forall \delta \subset Y \; \forall f \in H \qquad [4, \text{ Teorema } 2.8.9]. \tag{3.4}$$

Denotamos por $\mathcal{A}(E^\circ)$ al conjunto de los $\delta \subset Y$ tal que

$$\hat{E}(\delta) + \hat{E}(Y \backslash \delta) = I. \tag{3.5}$$

Para la medida μ_f° denotamos $\mathcal{A}(f)$ a la σ-álgebra $\mathcal{A}(\mu_f^\circ)$ de los conjuntos medibles respecto a μ_f.

Teorema 3.5. *El conjunto $\mathcal{A}(E^\circ)$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}^\circ$ y admite la siguiente descripción*

$$\mathcal{A}(E^\circ) = \bigcap_{f \in H} \mathcal{A}(f). \tag{3.6}$$

La restricción de $\hat{E}$ a $\mathcal{A}(E^\circ)$ es una medida espectral E que extiende a E°.

La medida espectral E contruida en (3.5) se la suele llamar la *extensión estándar* de E°. Además de E, consideremos su restricción a la σ-álgebra mas chica $\mathcal{A}_{min}^\circ$ que contiene a $\mathcal{A}^\circ$. Se tiene el siguiente resultado sobre la σ-álgebra $\mathcal{A}_{min}^\circ$

Teorema 3.6. *1. Para todo $\delta \in \mathcal{A}(E^\circ)$ existe $\Delta \in \mathcal{A}_{min}^\circ$ tal que $\delta \subset \Delta$ y $E(\Delta \backslash \delta) = 0$.*

2. Si $\bar{E}$ es una medida espectral que extiende E° a una σ-álgebra $\tilde{\mathcal{A}}$, entonces $\bar{E} = E$ en $\mathcal{A}_{min}^\circ$.

Consideremos ahora un espacio de medida Y, el cual además tiene una métrica (o topología) consistente con la estructura de espacio de medida. Sea Y un espacio métrico completo y $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\mathcal{B}}(Y)$ la σ-álgebra de los borelianos de Y y sea $(Y, \mathcal{A}, H, E)$ espacio de medida espectral. En este caso E se dice *medida espectral boreliana.*

Para todo $f \in H$ la medida escalar μ_f es una medida boreliana finita y entonces

$$\mu_f(\delta) = \sup\{\mu_f(K) : K \subset \delta \, , K \, \text{compacto en} \, Y\} \qquad \forall \delta \in \mathcal{A}. \tag{3.7}$$

Toda función aditiva en $\mathcal{A}$ que satisfaga (3.7) es automaticamente σ-aditiva.

Teorema 3.7. *Sean Y un espacio métrico completo y separable, $\mathcal{A}^\circ \subseteq \mathcal{A}^\mathcal{B}(Y)$ un álgebra. Sea $E^\circ : \mathcal{A}^\circ \to \mathcal{P}(H)$ aditiva y supongamos que para todo $\Delta \in \mathcal{A}^\circ$ y $f \in H$*

$$\mu_f^\circ(\Delta) = \sup\{\mu_f^\circ(w) : \bar{w} \subset \Delta, w \in \mathcal{A}^\circ, \bar{w} \; compacto \;\; en \; Y\}. \tag{3.8}$$

Entonces E° es σ-aditiva.

Demostración. Por el Lema 3.3 basta ver que μ_f° es σ-aditiva $\forall f \in H$ lo cual se sigue fácilmente por como está definida. □

3.2.1. Producto de medidas espectrales

Sean Y_1, Y_2 espacios métricos completos; E_1, E_2 medidas espectrales borelianas definidas en Y_1 y en Y_2 respectivamente actuando sobre el mismo espacio de Hilbert H. Supongamos además, que E_1 Y E_2 conmutan, es decir, que las proyecciones $E_1(\delta)$ y $E_2(\partial)$ conmutan para todo $\delta \in \mathcal{A}^\mathcal{B}(Y_1)$ y $\partial \in \mathcal{A}^\mathcal{B}(Y_2)$.
Sea $Y = Y_1 \times Y_2$ con una métrica que genere la topología producto en Y.

Teorema 3.8. *Bajo las hipótesis anteriores existe una única medida espectral boreliana E en Y tal que*

$$E(\delta \times Y_2) = E_1(\delta) \qquad\qquad \forall \delta \in \mathcal{A}^\mathcal{B}(Y_1) \tag{3.9}$$

$$E(Y_1 \times \partial) = E_2(\partial) \qquad\qquad \forall \partial \in \mathcal{A}^\mathcal{B}(Y_2). \tag{3.10}$$

A E se la llama la medida producto de E_1 con E_2.

Demostración. Sean $\mathcal{A}_\circ^\circ$ el conjunto de los rectángulos medibles $\Delta \subset Y$ de la forma

$$\Delta = \delta \times \partial \qquad \delta \in \mathcal{A}^{\mathcal{B}}(Y_1)\,, \partial \in \mathcal{A}^{\mathcal{B}}(Y_2).$$

Para $\Delta \in \mathcal{A}_\circ^\circ$ definimos

$$E^\circ(\Delta) = E^\circ(\delta \times \partial) = E_1(\delta)E_2(\partial) \in \mathcal{P}(H)$$

que resulta una proyección pues E_1 y E_2 conmutan.
Claramente $E^\circ(Y) = E_1(Y_1)E_2(Y_2) = I$ y es fácil ver que E° es aditiva en $\mathcal{A}_\circ^\circ$.
Sea $\mathcal{A}^\circ$ la colección de uniones finitas de conjuntos de $\mathcal{A}_\circ^\circ$. Claramente $\mathcal{A}^\circ$ es un álgebra ($\mathcal{A}_\circ^\circ$ no lo es).
La menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}^\circ$ es $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}(Y)$.
Ahora extendamos E° a $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}(Y)$. Como E° es aditiva en $\mathcal{A}_\circ^\circ$ se puede extender a $\mathcal{A}^\circ$ por aditividad. Veamos ahora que la funcion E° en $\mathcal{A}^\circ$ satisface las hipótesis del Teorema 3.7.
Sea $f \in H$, basta ver que vale (3.8) para las rectángulos medibles $\Delta = \delta \times \partial$.
Sea $\mu_f^{(i)}(\cdot) = \langle E_i(\cdot)f, f\rangle, \quad i = 1, 2$. Como E es boreliana, por (3.7) se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existen compactos $\delta' \subset \delta$ y $\partial' \subset \partial$ tal que

$$\mu_f^{(1)}(\delta\backslash\delta') < \varepsilon \quad y \quad \mu_f^{(2}(\partial\backslash\delta') < \varepsilon. \tag{3.11}$$

El conjunto $\Delta' = \delta' \times \partial'$ es compacto en Y, $\Delta' \in \mathcal{A}^\circ$ y $\Delta' \subset \Delta$. Juntando esto con (3.11) se tiene que

$$\Delta\backslash\Delta' = [\delta \times (\partial \times \partial')] \cup [(\delta\backslash\delta') \times \partial']$$

y

$$E^\circ(\Delta\backslash\Delta') = E_1(\delta)E_2(\partial\backslash\partial') + E_1(\delta\backslash\delta')E_2(\partial').$$

Con esto tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mu_f^\circ(\Delta\backslash\Delta') &= \langle E^\circ f, f\rangle \\
&= \langle E_1(\delta)E_2(\partial\backslash\partial')f, f\rangle + \langle E_1(\delta\backslash\delta')E_2(\partial')f, f\rangle \\
&= \|E_1(\delta)E_2(\partial\backslash\partial')f\|^2 + \|E_1(\delta\backslash\delta')E_2(\partial')f\|^2 \\
&\le \|E_2(\partial\backslash\partial')f\|^2 + \|E_1(\delta\backslash\delta')f\|^2 \\
&= \mu_f^{(2)}(\partial\backslash\partial') + \mu_f^{(1)}(\delta\backslash\delta') < 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Luego (3.8) está probado, y por el Teorema 3.7 E° es σ-aditiva y $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ es un álgebra. Además, por el Teorema 3.5 existe una extensión de E° a una medida espectral E en la σ-álgebra $\mathcal{A}^\circ(E^\circ) \supset \mathcal{A}^{\mathcal{B}}(Y) = \mathcal{A}^\circ_{min}$.
La unicidad de la medida E se sigue de que $(\delta \times Y_2) \cap (Y_1 \times \partial) = \delta \times \partial$ y entonces las igualdades (3.9) y (3.10) determinan unívocamente a E en $\mathcal{A}^\circ_\circ$ y por lo tanto en $\mathcal{A}^\circ$. Por el Teorema 3.6, E está unívocamente determinada en $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}_{min} = \mathcal{A}^{\mathcal{B}}(Y)$. $\square$

3.3. Integral respecto a una medida espectral

Sea $(Y, \mathcal{A}, H, E)$ un espacio de medida espectral. Denotamos por $L_\infty(Y, E)$ al conjunto de funciones E-acotadas y E-medibles en Y con valores en los complejos, identificando las iguales E-ctp. Se tiene que $L_\infty(Y, E)$ es un álgebra de Banach con involución y unidad.
Vamos ahora a definir que significa integrar una función acotada respecto a una medida espectral que toma valores en las proyecciones ortogonales de un espacio de Hilbert separable H.
En [12, Capítulo X.1] se puede encontrar una definición de integral espectral que abarca medidas espectrales con valores en operadores acotados en espacios de Banach y las demostraciones de muchos de los resultados no difieren mucho de los de este capítulo. Este enfoque es muy similar al que adoptaron Birman y Solomjak en [4, Capítulo 5] restringiéndose al caso de medidas espectrales con valores en proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert.
En [9] podemos encontrar una generalización del concepto de integral respec-

to a una medida espectral al caso de integrar respecto a funciones finitamente aditivas con valores en los operadores acotados de un espacio de Banach. Allí el concepto de que una función medible sea integrable requiere un poco más de trabajo y exceden las utilidades que se le va a dar a esta integral en el próximo capítulo.

3.3.1. Definiciones y propiedades básicas

Notamos $Sim(\mathcal{A})$ al conjunto de las funciones simples en Y y E-medibles. Se tiene que $Sim(\mathcal{A})$ es una subálgebra densa de $L_\infty(Y, E)$. Para cada $\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\delta_k}$ donde $\{\delta_k\}$ es una partición de Y en subconjuntos disjuntos y medibles definimos la *integral de φ respecto a E* como el operador T_φ dado por

$$T_\varphi = \int_Y \varphi dE := \sum_{k=1}^{n} c_k E(\delta_k) \tag{3.12}$$

La definición (3.12) no depende de la escritura de φ como combinación lineal de funciones simples. Esto se sigue de la aditividad de la medida espectral.

Observación 3.9. Como consecuencia de la definición de integral espectral para funciones simples se tienen las siguientes propiedades para $\varphi \in Sim(\mathcal{A})$ y $f, g \in H$ (ver [4]).

$$\begin{aligned}
T_{a\varphi+b\psi} &= aT_\varphi + bT_\psi \\
T_{\varphi\psi} &= T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi \\
(T_\varphi)^* &= T_{\bar{\varphi}} \qquad (3.13) \\
T_1 &= I \qquad (3.14) \\
\langle T_\varphi f, g\rangle &= \int_Y \varphi(\lambda)\langle E(\lambda) f, g\rangle \\
\|T_\varphi\| &= \|\varphi\|_\infty
\end{aligned}$$

y resulta que la aplicación $\varphi \mapsto T_\varphi$ es un morfismo de álgebras.

De (3.13) podemos ver que se puede extender la definición de integral a funciones $f \in L_\infty(Y, E)$ aproximandlas por funciones simples. Entonces definimos la *integral de* f por la ecuación

$$\int_Y f(\lambda) dE(\lambda) = \lim_n \int_Y \varphi_n(\lambda) dE(\lambda) \tag{3.15}$$

para $\varphi_n \in Sim(\mathcal{A})$ tal que $\varphi_n \to f$ en $L_\infty(Y, E)$.
Las propiedades que valen para las funciones simples se extienden a $L_\infty(Y, E)$ y resulta que la aplicación $\varphi \mapsto T_\varphi$ es un isomorfismo isométrico del álgebra de Banach $L_\infty(Y, E)$ a una subálgebra conmutativa de $\mathcal{B}(H)$[4, pp. 132].

La integral puede extenderse a funciones φ E-finitas en casi todo punto y E-medibles en Y aproximando por funciones de $L^\infty(Y, E)$.

Si $Y = \mathbb{R}$ tenemos que $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ es la σ-álgebra de Borel y la denotamos $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$. Entonces, si E es una medida espectral definida $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$a := \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda) \tag{3.16}$$

es un operador autoadjunto en H con dominio

$$\mathrm{Dom}(a) = \{f \in H : \int_{\mathbb{R}} s^2 d\mu_f(s) < \infty\}.$$

El principal resultado de la teoría espectral es la recíproca del resultado anterior. Es decir, todo operador autoadjunto a admite una *resolución espectral* de la forma (3.16). Más precisamente, vale el siguiente teorema espectral

Teorema 3.10 (Teorema espectral para operadores autoadjuntos[4])**.** *Si a es un operador autoadjunto (posiblemente no acotado) en H. Entonces existe una única medida espectral $e = e^a$ en H definida en la σ-álgebra* $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ *tal que*

$$a = \int_{\mathbb{R}} \lambda de^a(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \lambda de^a_\lambda$$

y para cada función φ e-medible y e-finita ctp definimos el operador (posible-

mente no acotado)

$$\varphi(a) := J_\varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) de^a_\lambda$$

con

$$\mathrm{Dom}(\varphi(a)) = \{h \in H : \int_{\mathbb{R}} |\varphi(\lambda)|^2 \, d\langle e^a_\lambda h, h\rangle\}.$$

Observación 3.11. Recordemos que dado un espacio de Hilbert H, en la Sección 1.7 definimos una reprentación de $\mathcal{B}(H)$ dada por el *-isomorfismo

$$L : x \in \mathcal{B}(H) \to L_x \in \mathcal{B}(H)_L \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{S}^2).$$

Como aplicación del teorema espectral, podemos extender esta representación a operdores autoadjuntos $a : \mathrm{Dom}(a) \to H$ densamente definidos. Si $e^a_n(\cdot)$ es la medida espectral del operador a entonces como L es un *-isomorfismo se tiene que $L(e^a(\cdot))$ es una medida espectral en $\mathcal{B}(\mathcal{S}^2)$. Luego existe un único operador lineal autoadjunto y densamente definido, al que llamamos $\bar{L}(a)$, tal que $e^{\bar{L}(a)}(\cdot) = L(e^a(\cdot))$.
Observemos que, como $\mathcal{B}(H)_L$ es subálgebra de von Neumann de $\mathcal{B}(\mathcal{S}^2)$, en particular WOT cerrada, se tiene que $e^{\bar{L}(a)}$ toma valores en las proyecciones de $\mathcal{B}(H)_L$.

Tenemos el siguiente lema que dice como se comporta el cálculo funcional del operador a respecto del de L_a que es consecuencia de la observación anterior y del teorema espectral.

Lema 3.12. *Si $a : \mathrm{Dom}(a) \to H$ es un un operador autoadjunto, entonces $f(\bar{L}(a)) = L(f(a))$, para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ medible Borel.*
En particular tomando como f funciones características de $\mathbb{R}$, se deduce que los proyectores espectrales de $\bar{L}(a)$ son elementos de $\mathcal{B}(H)_L$.

3.4. Estimación de conmutador

Lema 3.13. *Sea a : Dom $a \to H$ un operador autoadjunto con medida espectral e^a. Luego existe un sistema de proyecciones mutuamente ortogonales $\{p_\alpha\}$ con $\vee_\alpha p_\alpha = 1$ tal que para cada α existe una proyección ortogonal q_α*

con $0 < q_\alpha \leq p_\alpha$ *tal que* $\operatorname{tr}(q_\alpha) < \infty$ *y*

$$p_\alpha = \bigvee \{R(e^a(\Delta) q_\alpha : \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}. \tag{3.17}$$

donde $R(e^a(\delta) q_\alpha)$ *es la proyección ortogonal sobre la clausura de* $\operatorname{Ran}(e^a(\delta) q_\alpha)$.

Demostración. Sea $\{p_\alpha\}$ un sistema de proyecciones ortogonales disjuntas dos a dos maximal respecto a la propiedad de que para cada α existe una proyección q_α de traza finita con $0 < q_\alpha \leq p_\alpha$ tal que vale (3.17) (existe por el lema de Zorn). Supongamos que

$$p_0 = \bigvee_\alpha p_\alpha < 1.$$

Si $\Delta, \Delta' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tenemos que para todo α

$$e^a(\Delta) \operatorname{Ran}(e^a(\Delta') q_\alpha) = \operatorname{Ran}(e^a(\Delta \cap \Delta') q_\alpha) \subseteq \operatorname{Ran}(p_\alpha),$$

con lo cual $e^a(\Delta) \operatorname{Ran}(p_\alpha) \subseteq \operatorname{Ran}(p_\alpha)$, es decir, $p_\alpha e^a(\Delta) = e^a(\Delta) p_\alpha(\Delta) = e^a(\Delta) p_\alpha$ con lo cual $p_0 e^a(\Delta) = e^a(\Delta) p_0$ para todo $\delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Como supusimos que $p_0 < 1$, existe una proyección ortogonal q tal que $0 < q \leq 1 - p_0$ y $\operatorname{tr}(q) < \infty$. Definimos

$$p = \bigvee \{R(e^a(\Delta q) : \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Se tiene que para todo $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$e^a(\Delta) q = e^a(\Delta)(1 - p_0) q = (1 - p_0) e^a(\Delta) q,$$

y entonces $R(e^a(\Delta) q) \leq 1 - p_0$. Luego $p \leq 1 - p_0$. Como $0 < q \leq p$ entonces $p \neq 0$ contradiciendo la maximalidad del sistema $\{p_\alpha\}$. Luego $\vee_\alpha p_\alpha = 1$.

□

Definición 3.14. Una proyección ortogonal q en H se dice *proyección generadora* para a si

$$\overline{span} \{\operatorname{Ran}(e^a(\Delta) q) : \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = H,$$

donde $\overline{span}$ denota el subspacio lineal y cerrado generado.

Lema 3.15. *Sea* $a : \operatorname{Dom} a \to H$ *un operador lineal autoadjunto. Supongamos que* a *tiene una proyeción generadora* q *con* $\operatorname{tr}(q) < \infty$*, Entonces para* $1 < p < \infty$ *existe una sucesión* $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *de proyecciones ortogonales tal que* $p_m \nearrow 1$*,* $\operatorname{tr}(p_m) < \infty$ *y* $\|ap_m - p_m a\|_{\mathcal{S}^p} \leq 1/m$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. Como $\frac{1}{t^{1-1/p}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$[1] puedo construir una sucesión $s_1 < s_2 < \cdots$ de números naturales tal que los números $r_m = (2m)2^{s_m}$ satisfacen

$$\frac{1}{(r_m t_0)^{1-1/p}} < \frac{1}{4m^2 t_0} \tag{3.18}$$

para todo $m = 1, 2, \ldots$, donde $t_0 = \operatorname{tr}(q_0)$. Para $m = 1, 2, \ldots$ definimos

$$\lambda_{m.k} = -m + k2^{-s_m} \quad (k = 0, 1, \ldots, r_m) \tag{3.19}$$

y $\Delta_{m.k} = [\lambda_{m,k-1}, \lambda_{m,k})$, $e_{m,k} = e^a(\Delta_{m.k})$ para $k = 1, \ldots, r_m$. Para $m = 1, 2, \ldots$ y $k = 1, \ldots, r_m$ definimos $q_{m,k} = R(e_{m,k}q_0)$ la proyección ortogonal sobre $\overline{\operatorname{Ran}}(e_{m,k}q_0)$. Como $0 \leq q_{m,k} \leq e_{m,k}$, se tiene que $\{q_{m,k} : k = 1, \ldots, r_m\}$ son ortogonales dos a dos. Además $\operatorname{tr}(q_{m,k}) \leq \operatorname{tr}(q_0) = t_0$ para todo m y k. Definimos

$$p_m = \sum_{k=1}^{r_m} q_{m,k}$$

para $m = 1, 2, \ldots$. Es claro que $\operatorname{tr}(p_m) < \infty$. Veamos que $p_m \leq p_{m+1}$ para todo m. Para $k = 1, \ldots, r_m$ sea

$$I_{m,k} = \{l \in \mathbb{N} : \Delta_{m+1,l} \subseteq \Delta_{m,k}\}.$$

Entonces $I_{m,k_1} \cap I_{m,k_2} = \varnothing$ si $k_1 \neq k_2$ y $\Delta_{m,k} = \bigcup_{l\in I_{m,k}} \Delta_{m+1,l}$. Luego

$$e_{m,k} = \sum_{l\in I_{m,k}} e_{m+1,l}$$

[1] En [9] se puede encontrar una versión de este Lema para un espacio de Banach simétrico E de funciones en $(0,\infty)$ para el cual $\varphi_E(t)/t \to_{t\to\infty} 0$ donde $\varphi_E(t) := \left\|\chi_{(0,t]}\right\|_E$ es la función fundamental del espacio E.

y

$$e_{m,k}q_0 = \sum_{l \in I_{m,k}} e_{m+1,l}q_0,$$

con lo cual

$$\mathrm{Ran}(e_{m.k}q_0) \subseteq \bigoplus_{l \in I_{m.k}} \mathrm{Ran}(e_{m+1,l}q_0).$$

Esto muestra que

$$q_{m,k} \leq \sum_{l \in I_{m.k}} q_{m+1,l}, \qquad (k = 1, \ldots, r_m).$$

Entonces

$$p_m = \sum_{k=1}^{r_m} q_{m,k} \leq \sum_{k=1}^{r_m} \sum_{l \in I_{m.k}} q_{m+1,l} \leq \sum_{l=1}^{r_{m+1}} q_{m+1,l} = p_{m+1}.$$

Veamos ahora que $p_m \nearrow 1$. Llamemos $V_m = \mathrm{Ran}(p_m)$. Tenemos que ver que

$$H = \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m}. \tag{3.20}$$

Para $m = 1, 2, \ldots$ sea $D_m = \{\lambda_{m,k} : k = 1, \ldots, r_m\}$ y $D = \cup_{m=1}^{\infty} D_m$. Entonces $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \cdots$ y D es denso en $\mathbb{R}$. Para ver que vale (3.20) basta ver que

$$\mathrm{Ran}(e^a([\alpha, \beta))q_0) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m \tag{3.21}$$

para todo $\alpha, \beta \in D$ con $\alpha < \beta$ (ver [9, Lemma 6.2]). Dados estos $\alpha, \beta \in D$, existe m tal que $\alpha, \beta \in D_m$. Entonces $[\alpha, \beta) = \cup_{k \in I} \Delta_{m,k}$ para cierto $I \subseteq \{1, \ldots, r_m\}$, y entonces

$$e^a([\alpha, \beta))q_0 = \sum_{k \in I} e_{m,k}q_0.$$

Esto muestra que

$$\operatorname{Ran}(e^a([\alpha,\beta))q_0) \subseteq \bigoplus_{k\in I} \operatorname{Ran}(e_{m,k}q_0) = \bigoplus \operatorname{Ran}(q_{m,k}).$$

Como $q_{m,k} \leq p_m$, se tiene que $\operatorname{Ran}(e^a([\alpha,\beta))q_0) \subseteq V_m$, lo que prueba (3.21) y por lo tanto (3.20).

Falta ver que $\|ap_m - p_m a\|_{\mathcal{S}^p} \leq 1/m$ para todo $m = 1, 2, \dots$. Para esto, observemos que

$$p_m = \sum_{k=1}^{r_m} q_{m,k} \leq \sum_{k=1}^{r_m} e_{m,k} = e^a([-m,m))$$

con lo cual

$$ap_m = \underbrace{ae^a([-m,m))}_{\in\mathcal{B}(H)} \underbrace{p_m}_{\in\mathcal{S}^1} \in \mathcal{S}^1 \subset \mathcal{S}^p$$

y

$$p_m a = \underbrace{p_m}_{\in\mathcal{S}^1} \underbrace{e^a([-m,m))}_{\in\mathcal{B}(H)} \in \mathcal{S}^1 \subset \mathcal{S}^p$$

(donde $e^a([-m,m))a$ se interpreta como la clausura del producto algebraico que coincide con $ae^a([-m,m))$). Entonces $\|ap_m - p_m a\|_{\mathcal{S}^p}$ está bien definido. Ahora, como $q_{m,k} = q_{m,k}e_{m,k} = e_{m,k}q_{m,k}$ y $q_{m,l}e_{m,k} = 0$ si $l \neq k$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{r_m} e_{m,k}\right) \underbrace{\sum_{l=1}^{r_m} q_{m,l}}_{p_m} &= \sum_{k=1}^{r_m}\sum_{l=1}^{r_m} e_{m,k}q_{m,l} \\
&= \sum_{k=1}^{r_m} e_{m,k}q_{m,k} \\
&= \sum_{k=1}^{r_m} q_{m,k} = p_m
\end{aligned}$$

y análogamente

$$p_m\left(\sum_{k=1}^{r_m} e_{m,k}\right) = p_m.$$

De manera similar resulta que

$$\left(\sum_{k=1}^{r_m} \lambda_{m,k} e_{m,k}\right) p_m = p_n \left(\sum_{k=1}^{r_m} \lambda_{m,k} e_{m,k}\right).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
ap_m - p_m a &= a\left(\sum_{k=1}^{r_m} e_{m,k}\right) p_m - \left(\sum_{k=1}^{r_m} \lambda_{m,k} e_{m,k}\right) p_m \\
&+ \left(\sum_{k=1}^{r_m} \lambda_{m,k} e_{m,k}\right) p_m - p_m \left(\sum_{k=1}^{r_m} e_{m,k}\right) a \\
&= \left\{ a\left(\sum_{k=1}^{r_m} e_{m,k}\right) - \sum_{k=1}^{r_m} \lambda_{m,k} e_{m,k} \right\} p_m \qquad (3.22) \\
&- p_m \left\{ a\left(\sum_{k=1}^{r_m} e_{m,k}\right) - \sum_{k=1}^{r_m} \lambda_{m,k} e_{m,k} \right\} \\
&= w_m - w_m^*,
\end{aligned}$$

donde

$$w_m = \left\{ a\left(\sum_{k=1}^{r_m} e_{m,k}\right) - \sum_{k=1}^{r_m} \lambda_{m,k} e_{m,k} \right\}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\|w_m\|_{\mathcal{S}^p} &\leq \left\| a\left(\sum_{k=1}^{r_m} e_{m,k}\right) - \sum_{k=1}^{r_m} \lambda_{m,k} e_{m,k} \right\|_{\mathcal{B}(H)} \|p_m\|_{\mathcal{S}^p} \\
&\leq 2^{-s_m} \|p_m\|_{\mathcal{S}^p}
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad sale de la definición de los $\lambda_{m,k}$ y de aplicar el teorema espectral con la función $f(t) = t\chi_{[-m,m)}(t) - \sum_{k=1}^{r_m} \lambda_{m,k} \chi_{\Delta_{m,k}}(t)$.
Como

$$\operatorname{tr}(p_m) = \sum_{k=1}^{r_m} \operatorname{tr}(q_{m,k}) \leq r_m t_0,$$

se tiene que por (3.18)

$$\|p_m\|_{\mathcal{S}^p} = \operatorname{tr}(p_m)^{1/p} \le (r_m t_0)^{1/p} \le \frac{r_m}{4m^2}.$$

Entonces

$$\|w_m\|_{\mathcal{S}^p} \le \frac{2^{-s_m} r_m}{4m^2} = \frac{1}{2m},$$

y usando (3.22) llegamos a

$$\|ap_m - p_m a\|_{\mathcal{S}^p} \le \|w_m\|_{\mathcal{S}^p} + \|w_m^*\|_{\mathcal{S}^p} \le 1/m$$

con lo cual termina la demostración del teorema. $\square$

Observación 3.16. Sea $a : \operatorname{Dom} a \to H$ un opeador autoadjunto con medida espectral e^a. Supongamos que $p \in \mathcal{B}(H)$ es una proyección ortogonal tal que $pe^a(\Delta) = e^a(\Delta)p$ para todo $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Sea $H_0 = \operatorname{Ran}(p)$. Se sigue del teorema espectral que si $\xi \in \operatorname{Dom}(a)$ entonces $p\xi \in \operatorname{Dom}(a)$ y $a(p\xi) = p(a\xi) \in H_0$. Luego tenemos que

$$Dom(a) = \operatorname{Dom}(a) \cap H_0 \oplus \operatorname{Dom}(a) \cap H_0^{\perp}.$$

Definimos $a_0 : \operatorname{Dom}(a) \cap H_0 \to H_0$ como $a_0\xi = a\xi$ para $\xi \in \operatorname{Dom}(a_0) = \operatorname{Dom}(a) \cap H_0$. Entonces a_0 es un operador autoadjunto con medida espectral dada por $pe^a(\cdot)p|_{H_0}$.

Lema 3.17. *Sea $a : \operatorname{Dom} a \to H$ un operador lineal autoadjunto y $1 < p < \infty$. Entonces existe un sistema $\{p_\beta\}$ de proyecciones ortogonales tal que $p_\beta \nearrow 1$, $\operatorname{tr}(p_\beta) < \infty$ y $\|ap_\beta - p_\beta a\|_{\mathcal{S}^p} \le 1$ para todo β.*

Demostración. Sea $\{p_\alpha\}$ un sistema de proyecciones mutuamente ortogonales como en el Lema 3.13. Entonces $p_\alpha(\Delta) = e^a(\Delta)p_\alpha$ para todo $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y α. Entonces se pueden aplicar las observaciones hechas en (3.16). Sea a_α la restricción de a al subespacio $H_\alpha = \operatorname{Ran}(p_\alpha)$. Para cada α la proyección q_α es generador (respecto al espacio H_α). Entonces podemos aplicar el Lema 3.15 a $\mathcal{B}(H_\alpha) = p_\alpha \mathcal{B}(H) p_\alpha$. Luego, para cada α existe una sucesión $\{p_{\alpha,m}\}_{m=1}^{\infty}$ de proyecciones ortogonales en $p_\alpha \mathcal{B}(H) p_\alpha$ tal que $\mathrm{tr}(p_{\alpha,m}) < \infty$, $p_{\alpha,m} \nearrow_m p_\alpha$ y

$$\|a_\alpha p_{\alpha,m} - p_{\alpha,m} a_\alpha\|_{\mathcal{S}^p} \leq \frac{1}{m}.$$

Como $p_{\alpha,m} = p_{\alpha,m} p_\alpha = p_\alpha p_{\alpha,m}$ y $a_\alpha = a p_\alpha = p_\alpha a$ tenemos

$$\|a p_{\alpha,m} - p_{\alpha,m} a\|_{\mathcal{S}^p} \leq \frac{1}{m}$$

para todo α y m. Sea $\mathcal{F}$ la colección de todos los subconjuntos finitos de $\{\alpha\}$. Para cada $F \in \mathcal{F}$ y $n = 1, 2, \ldots$ definimos

$$p_{F,n} = \sum_{\alpha \in F} p_{\alpha, n+|F|}$$

donde $|F|$ denota el número de elementos del conjunto F. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \|a p_{F,n} - p_{F,n} a\|_{\mathcal{S}^p} &\leq \sum_{\alpha \in F} \left\|a p_{\alpha, n+|F|} - p_{\alpha, n+|F|} a\right\|_{\mathcal{S}^p} \\ &\leq |F| \frac{1}{n + |F|} \leq 1 \end{aligned}$$

para todo $F \in \mathcal{F}$ y $n = 1, 2, \ldots$. Ahora observemos que si $n_1 \leq n_2$ entonces $p_{\alpha, n_1 + |F|} \leq p_{\alpha, n_2 |F|}$ para todo $\alpha \in F$, luego $p_{F,n_1} \leq p_{F,n_2}$. Más aún, si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ y $F_1 \subseteq F_2$ entonces $n + |F_1| \leq n + |F_2|$ y entonces $p_{\alpha, n+|F_1|} \leq p_{\alpha, n+|F_2|}$ para todo α y todo n. Luego,

$$p_{F_1,n} = \sum_{\alpha \in F_1} p_{\alpha, n+|F_1|} \leq \sum_{\alpha \in F_1} p_{\alpha, n+|F_2|} \leq p_{F_2,n}.$$

Esto muestra que la red

$$\{p_\beta\} := \{p_{F,n} : (F, n) \in \mathcal{F} \times \mathbb{N}\}$$

es dirigida y creciente.

Para todo α y para cada $F \in \mathcal{F}$ tenemos que $p_{\alpha,n+|F|} \nearrow_n p_\alpha$, y entonces

$$p_{F,n} \nearrow_n \sum_{\alpha \in F} p_\alpha = p_F.$$

Como $p_F \nearrow 1$, se sigue que $p_{F,n} \nearrow_{(F,n)} 1$ y por construcción, se tiene que $\mathrm{tr}(p_{F,n}) < \infty$ para todo $(F,n) \in \mathcal{F} \times \mathbb{N}$. Esto termina con la prueba del lema. $\square$

Capítulo 4

Operadores de Integral Doble

La definición de operadores de integral doble fue descripta originalmente por Birman y Solomjak entre 1966 y 1973 en [5], [6] y [7] para el caso de operadores en $\mathcal{B}(H)$ con H un espacio de Hilbert separable e integrando respecto a un producto de medidas espectrales.
En [12] podemos encontrar una descripción de la integral espectral respecto a medidas espectrales σ-finitas con valores en los operadores de un espacio de Banach arbitrario. Mas adelante, en [21], Kluvanek generaliza este concepto a integrar respecto a funciones multiplicativas y aditivas con valores en $\mathcal{B}(X)$, con X espacio de Banach, definidas primero en un álgebra de funciones simples y luego extendiendo a la clausura respecto a la norma infinito.
En 2002 en [9], De Pagter, Witlev y Sukochev extienden la teoría general de operadores de integral doble al producto de medidas espectrales finitamente aditivas definidas en un álgebra de conjuntos con valores en $\mathcal{B}(X)$ (la hipótesis de σ- aditividad de la medida espectral ya no es requerida). En particular se desarrolla la teoría de operadores de integral doble en espacios simétricos no conmutativos $\mathbb{E} = E(\mathcal{M}, \tau)$ asociados a un álgebra de von Neuman semifinita $(\mathcal{M}, \tau)$ en un espacio de Hilbert separable H con τ una traza normal, semifinita y fiel.
El caso que nos interesa es cuando $\mathbb{E} = L^p(\mathcal{M}, \tau)$ con $1 < p < \infty$, y en particular, cuando $\mathcal{M} = B(H)$ este espacio coincide con la clase de Schatten $\mathcal{S}^p$ y es el que vamos a desarrollar con detalle en lo que sigue.

Los resultados de este capítulo valen para el caso general de los espacios L^p no conmutativos con las mismas demostraciones teniendo cuidado con la buena definición de las medidas espectrales que se definen y de la norma en los espacios $L^p(M,\tau)$. Una exposición detallada de estos espacios puede encontrarse en [27] y los detalles de las definiciones de las medidas espectrales y la integral de funciones respecto a estas medidas se encuentran en [9].
En lo que sigue nos vamos a restrigir al caso $\mathcal{M} = \mathcal{B}(H)$.

4.1. Definiciones básicas

Sean a, b son operadores autoadjuntos (no necesariamente acotados) en un espacio de Hilbert separable H y $E^a, F^b : \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(H)$ las medidas espectrales asociadas a a y b.
Para $B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ definimos las proyecciones

$$P^a(B), Q^b(B) : \mathcal{S}^2 \to \mathcal{S}^2 \tag{4.1}$$

como

$$P^a(B)x = E^a(B)x \qquad Q^b(B)x = xF^b(B) \qquad x \in \mathcal{S}^2. \tag{4.2}$$

Se tiene que $P^a, Q^b : \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(\mathcal{S}^2)$ son medidas espectrales σ-aditivas que conmutan pues para todo $B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ y $x \in \mathcal{S}^2$ vale que

$$\begin{aligned} P^a(B)Q^b(B)x = P^a(xF^b(B)) = E^a(B)xF^b(B) \\ Q^b(B)P^a(B)x = Q^b(B)(E^a(B)x) = E^a(B)xF^b(B). \end{aligned}$$

Luego, como en (3.8) podemos definir la medida espectral producto $P^a \otimes Q^b : \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{B}(\mathcal{S}^2)$ que cumple $P^a \otimes Q^b(A \times B) = P^a(A)P^b(B)$ para todo rectángulo medible (ver Cápitulo 3 Sección 3.2).
En particular $\langle P^a \otimes Q^b x, y^* \rangle = \mathrm{tr}(yP^a \otimes Q^b x)$ es una medida σ- aditiva con valores complejos para todo $x, y \in \mathcal{S}^2$.
En lo que sigue vamos a omitir la dependencia respecto a los operadores a y

b de las medidas P^a y Q^b y notamos $P^a = P$ y $Q^b = Q$.

Definición 4.1. Para cada $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ medible Borel se define la integral espectral de φ como el operador T_φ dado por

$$T_\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\lambda, \mu)\, d(P \otimes Q)(\lambda, \mu) \tag{4.3}$$

A T_φ se lo llama el *operador de integral doble* asociado a φ.

Se tiene que el operador $T_\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^2)$ por la definición de integral espectral del capítulo anterior. Para cada $1 < p < \infty$ se tiene que $\mathcal{S}^p \cap \mathcal{S}^2$ es denso tanto en $\mathcal{S}^p$ y $\mathcal{S}^2$. Luego tiene sentido pensar la restricción de T_φ a $\mathcal{S}^p \cap \mathcal{S}^2$ que mapea $\mathcal{S}^p \cap \mathcal{S}^2$ en sí mismo. Notamos $T_{\varphi,p}$ a esta restricción.

Definición 4.2. Decimos que una función $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ medible borel es *integrable en* $\mathcal{S}^p$ si $T_{\varphi,p} : \mathcal{S}^p \cap \mathcal{S}^2 \to \mathcal{S}^p \cap \mathcal{S}^2$ es acotado respecto de $\|\cdot\|_{\mathcal{S}^p}$.

Tenemos el siguiente resultado de convergencia mayorada que es un caso particular de [9, Lemma 2.6].

Lema 4.3. *Sea φ es una función medible Borel en $\mathbb{R}^2$ y $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones integrables en $\mathcal{S}^p$ con $1 < p < \infty$ respecto a $P \otimes Q$. Si además $\|T_{\varphi_n}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{S}^p)} \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y alguna constante $C > 0$ entoces φ es integrable en $\mathcal{S}^p$ respecto a $P \otimes Q$ y $\|T_\varphi\|_{\mathcal{B}(\mathcal{S}^p)} \leq C$.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{S}^p \cap \mathcal{S}^2$ e $y \in \mathcal{S}^q \cap \mathcal{S}^2$ con $1/p + 1/q = 1$.

$$\operatorname{tr}(yT_{\varphi_n}x) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_n(\lambda, \mu) \operatorname{tr}(yE_\lambda x F_\mu) \to \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \operatorname{tr}(ydE_\lambda x dF_\mu)$$

pues $\operatorname{tr}(yExF) = \operatorname{tr}(yP \otimes Qx)$ es una medida boreliana σ-aditiva con valores complejos y como la sucesión $\{\varphi_n\}_n$ esta uniformemente acotada y converge puntualmente a φ y la convergencia se sigue por el Teorema de convergencia mayorada clásico.

Por otro lado

$$\begin{aligned}|\mathrm{tr}(yT_{\varphi_n}x)| &\leq \|T_{\varphi_n}(x)\|_p \|y\|_q \\ &\leq \|T_{\varphi_n}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{S}^p)} \|x\|_p \|y\|_q \\ &\leq C \|x\|_p \|y\|_q .\end{aligned}$$

Luego se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\lambda,\mu)\,\mathrm{tr}(ydE_\lambda xF_\mu) \leq C \|x\|_p \|y\|_q .$$

Entonces la aplicación

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^p \cap \mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^q \cap \mathcal{S}^2 &\to \mathbb{C} \\ (x,y) &\mapsto \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\lambda,\mu)\,\mathrm{tr}(ydE_\lambda xF_\mu)\end{aligned}$$

se extiende a una forma bilineal continua definida en $\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2$ y entonces existe un único operador acotado T_φ tal que

$$\mathrm{tr}(yT_\varphi x) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\lambda,\mu)\,\mathrm{tr}(ydE_\lambda xF_\mu)\, x, y \in \mathcal{S}^2.$$

En particular

$$\mathrm{tr}(yT_\varphi x) \leq C \|x\|_p \|y\|_q \quad x \in \mathcal{S}^p \cap \mathcal{S}^2\; y \in \mathcal{S}^q \cap \mathcal{S}^2$$

con lo cual como $\mathcal{S}^q \cap \mathcal{S}^2$ es denso en $\mathcal{S}^q$ se tiene que

$$\|T_\varphi x\|_p = \|T_{\varphi,p} x\| \leq C \|x\|_p \quad x \in \mathcal{S}^p$$

y entonces φ es integrable en $\mathcal{S}^p$. □

4.2. Operadores de integral doble de diferencias divididas.

A continuación vamos a presentar la versión continua de la transformación (2.14) y del Teorema 2.16. La prueba del caso continuo usa el Teorema 2.16, la Observación 2.17 y un argumento de sucesivas aproximaciones.

Fijemos $dE_\lambda, dF_\mu \in \mathcal{B}(H)$ medidas espectrales para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: Si $x, y \in \mathcal{S}^2$ entonces la aplicación

$$(\lambda, \mu) \longmapsto d\nu_{x,y} := \operatorname{tr}(y dE_\lambda x dF_\mu)$$

es una medida σ-aditiva en $\mathbb{R}^2$ con valores en los complejos y con variación total que no excede $\|x\|_2 \|y\|_2$. Si ahora $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ es una función boreliana y acotada, entonces tenemos que

$$(x, y) \longmapsto \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\lambda, \mu) d\nu_{x,y}(\lambda, \mu), \qquad x, y \in \mathcal{S}^2$$

es una forma bilineal y continua, por lo tanto, existe un operador lineal y acotado $T_\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^2)$ tal que

$$\operatorname{tr}(y T_\phi(x)) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi d\nu_{x,y}, \qquad x, y \in \mathcal{S}^2. \tag{4.4}$$

Teorema 4.4. *Si $\|f\|_{Lip\,1} \leq 1$, entonces el operador T_{ϕ_f} está acotado en S^p para cada $1 < p < \infty$, donde*

$$\phi_f = \begin{cases} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu}, & si\ \lambda \neq \mu \\ 0, & si\ \lambda = \mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Necesitamos antes el siguiente lema auxiliar.

Lema 4.5 (Fórmula de Duhamel [37]). *Sean a y b operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert. Si $a - b$ es acotado entonces*

$$e^{ira} - e^{ira} = ir \int_0^1 e^{ir(1-t)a}(a - b) e^{irtb} dt, \quad r \in \mathbb{R}.$$

En particular,

$$\left\| e^{irA} - e^{irB} \right\| \leq |r| \, \|A - B\|$$

Demostración (del Teorema 4.4). Supongamos que tenemos probado el resultado para funciones de soporte compacto. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es Lipschitz, definimos la sucesión de funciones

$$\phi_n(\lambda, \mu) = \chi_n(\lambda)\phi_f(\lambda, \mu)\chi_n(\mu) \quad \text{con } \chi_n := \chi_{[-n,n]}$$

y tenemos que los operadores T_{ϕ_n} están uniformemente acotados pues, por como fueron construidos, se tiene $\|T_{\phi_n}\| = \|\varphi_n\|$ donde

$$\varphi_n(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi_n(\lambda, \mu) d\nu_{x,y}(\lambda, \mu),$$

por lo tanto $\|T_{\phi_n}(x)\| = \|\varphi_n\| \leq \|f\|_{Lip\,1} \|x\|_2$ y entonces

$$\|T_{\phi_n}\| \leq \|f\|_{Lip\,1} .$$

Además, como $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi_f$ puntualmente, se tiene que T_{ϕ_f} también está acotado por el Lema 4.3.

Supongamos entonces que f es de soporte compacto. Sea $x \in \mathcal{S}^2$ *diagonal* respecto a las medidas dE_λ y dF_μ, i.e;

$$dE_\lambda x = x dF_\lambda.$$

En ese caso,

$$d\nu_{x,y}(\lambda, \mu) = \delta(\lambda - \mu)\,\mathrm{tr}(dE_\lambda x dF_\mu y), \qquad y \in S^2$$

donde δ es la función de Dirac con

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

pues

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(ydE_\lambda xdF_\mu) &= \operatorname{tr}(dE_\lambda xdF_\mu y) \\
&= \operatorname{tr}(xdF_\lambda dF_\mu y) = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda \neq \mu \\ \operatorname{tr}(xdF_\lambda^2 y) = \operatorname{tr}(dE_\lambda xdF_\mu y), & \text{si } \lambda = \mu \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Ahora, de (4.4) tenemos

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{tr}(yT_\phi(x)|) = \left|\int_{\mathbb{R}^2} \phi d\nu_{x,y}\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^2} \phi(\lambda,\mu)\delta(\lambda-\mu)\operatorname{tr}(dE_\lambda xdF_\mu y)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda,\lambda)\operatorname{tr}(dE_\lambda xdE_\lambda y)\right| \\
&= \left|\operatorname{tr}\left(\int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda,\lambda) dE_\lambda xdF_\lambda y\right)\right| \\
&= \left|\operatorname{tr}\left(y\int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda,\lambda) dE_\lambda xdF_\lambda\right)\right| \\
&\leq \|y\|_q \left\|\int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda,\lambda) dE_\lambda xdF_\lambda\right\|_p \\
&\leq \|y\|_q \|\phi\|_\infty \left\|\int_{\mathbb{R}} dE_\lambda xdF_\lambda\right\|_p \\
&= \|\phi\|_\infty \|y\|_q \|x\|_p
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \mathcal{S}^2 \cap S^p$ e $y \in \mathcal{S}^2 \cap \mathcal{S}^q$, con x diagonal. Luego, T_ϕ esta acotado en la parte diagonal de $\mathcal{S}^p$ para toda función ϕ boreliana y acotada.

Decimos que un elemento $x \in S^p$ es *codiagonal* si

$$dE_\lambda xdF_\lambda = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

o, equivalentemente, si

$$\int_{\mathbb{R}} dE_\lambda xdF_\lambda = 0$$

Si ahora $x \in S^2 \cap S^p$ es arbitrario entonces $x = x_{nd} + x_d$ donde

$$x_{nd} = x - \int_{\mathbb{R}} dE_\mu x dF_\mu \qquad y \qquad x_d = \int_{\mathbb{R}} dE_\mu x dF_\mu$$

y resulta que x_d es *diagonal* respecto a las medidas dE_λ y dF_μ; y x_{od} *codiagonal* respecto a las mismas medidas pues

$$\begin{aligned} dE_\lambda x_{nd} dF_\lambda &= dE_\lambda x dF_\lambda - \int_{\mathbb{R}} dE_\lambda dE_\mu x dF_\mu dF_\lambda \\ &= dE_\lambda x dF_\lambda - dE_\lambda x dF_\lambda = 0. \end{aligned}$$

Ya probamos que T_ϕ esta acotado en la parte *diagonal* de S^p, veamos ahora que esta acotado en la parte *codiagonal* de $\mathcal{S}^p$. Supongamos entonces que x es *codiagonal* respecto a las medidas dE_λ y dE_μ (i.e $x = x_{nd}$). Sean $\{G_n\}_{n\geq 1}$ la familia de funciones Gausianas dilatadas definidas de la siguiente manera

$$G_n(t) = nG(nt), \; G(t) = (2\pi)^{-1/2} e^{-t^2/2}, \qquad t \in \mathbb{R}, \; n = 1, 2, \cdots .$$

Si ahora $f_n := G_n * f$, entonces

$$\phi_n(\lambda, \mu) := \phi_{f_n}(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{R}} G_n(s) \phi_f(\lambda - s, \mu - s) ds.$$

Como f es de soporte compacto y Lipschitz, tenemos que $\phi_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ también lo es y entonces $\phi_f \in L^1(\mathbb{R}^2, d\nu_{x,y})$. Por el Lema 2.21, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\phi_n - \phi_f| \, d\nu_{x,y} = 0, \qquad x, y \in \mathcal{S}^2.$$

y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\left|\operatorname{tr}(yT_{\phi_n} - yT_{\phi_f})\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^2} \phi_n - \phi_f d\nu_{x,y}\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\phi_n - \phi_f|\, d\nu_{x,y} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}
$$

De esto se deduce que

$$
\lim_{n\to\infty} \operatorname{tr}(yT_{\phi_n}) = \operatorname{tr}(yT_{\phi_f}(x)), \qquad x, y \in \mathcal{S}^2. \tag{4.5}
$$

Luego, para ver que T_{ϕ_f} está acotado en $\mathcal{S}^p$ basta ver que la familia de operadores $\{T_{\phi_n}\}$ está uniformemente acotada en $\mathcal{S}^p$. Por como construimos f_n, se tiene que $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la clase de Schwartz de $\mathbb{R}$ y por lo tanto $\hat{f}_n$, su transformada de Fourier, también cumple que $\hat{f}_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, con lo cual

$$
c_{n,m} := \int_{\mathbb{R}} \left|s^m \hat{f}_n(s)\right| < \infty, \quad m = 0, 1, \cdots, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{4.6}
$$

Más aún, si $h_n(s) := \widehat{f'_n}(s) = n\hat{f}_n(s)$, entonces h_n es integrable y , para $\lambda \neq \mu$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\phi_n(\lambda, \mu) = \phi_{f_n}(\lambda, \mu) = \frac{f_n(\lambda) - f_n(\mu)}{\lambda - \mu} &= \int_0^1 f'_n((1-t)\lambda + t\mu)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} h_n(s) \int_0^1 e^{is((1-t)\lambda + t\mu)} dt\, ds.
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

Si llamamos

$$
A := \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda \qquad y \qquad B := \int_{\mathbb{R}} \mu dF_\mu
$$

entonces

$$
e^{is(1-t)A} = \int_{\mathbb{R}} e^{is(1-t)\lambda} dE_\lambda \qquad y \qquad e^{istB} = \int_{\mathbb{R}} e^{ist\mu} dF_\mu.
$$

Recordando la definición de $T_{\phi_n}(x)$ en (4.4) y que $d\nu_{x,y} = \operatorname{tr}(ydE_\lambda x dF_\mu)$ tenemos que para $x \in \mathcal{S}^p$ codiagonal

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(yT_{\phi_n}(x)) &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi_n d\nu_{x,y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} h_n(s) \int_0^1 e^{is((1-t)\lambda + t\mu)} dt\, ds \right) d\nu_{x,y} \\
&= \int_{\mathbb{R}} h_n(s) \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{is((1-t)\lambda + t\mu)} d\nu_{x,y} \right) dt\, ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} h_s(s) \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{is((1-t)\lambda + t\mu)} \operatorname{tr}(ydE_\lambda x dF_\mu) \right) dt\, ds \\
&= \operatorname{tr}\left(y \int_{\mathbb{R}} h_n(s) \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} e^{is(1-t)\lambda} dE_\lambda \right) x \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ist\mu} dF_\mu \right) dtds \right) \\
&= \operatorname{tr}\left(y \int_{\mathbb{R}} h_n(s) \int_0^1 e^{is(1-t)A} x e^{istB} dtds \right)
\end{aligned}
$$

para todo $y \in \mathcal{S}^2$ y por lo tanto

$$
T_{\phi_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} h_n(s) \int_0^1 e^{is(1-t)A} x e^{istB} dtds. \tag{4.8}
$$

Ahora, dadas dos medidas espectrales dE_λ y dF_μ consideramos la siguiente discretización dada por

$$
E_m(\Omega) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j/m \in \Omega}} e_j \quad y \quad F_m(\Omega) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k/m \in \Omega}} f_k,
$$

donde

$$
e_j = E\left[\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}\right),\ f_k = F\left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right),\ j, k \in \mathbb{Z} \quad \Omega \subset \mathbb{R} \text{ boreliano.}
$$

Luego tenemos que $\{e_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ y $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ son dos familias de proyecciones ortogonales y entonces consideramos el operador definido en (2.14) respecto a estas dos familias y la función $f_{n,m}(t) = mf_n(t/m)$. Entonces $T_{n,m}$ tiene la siguiente expresión

$$T_{n,m} = \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \frac{f_{n,m}(k) - f_{n,m}(j)}{k-j} e_k x f_j = \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \phi_n\left(\frac{k}{m}, \frac{j}{m}\right) e_k x f_j.$$

Además, $f_{n,m}$ es Lipschitz pues

$$\|f_{n.m}\|_{Lip\,1} = \|f_n\|_{Lip\,1} = \|G_n * f\|_{Lip\,1} \leq 1,$$

y se sigue por el Teorema 2.16 que la familia $\{T_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ está uniformemente acotada y se tiene que $T_{n,m}$ coincide con el operador de integral doble definido en (4.4) asociado a la funcion ϕ_n y a las medidas espectrales $dE_{m,\lambda}$ y $dF_{m,\mu}$, que por (4.8) puede expresarse como

$$T_{n,m}(x) = \int_{\mathbb{R}} h_n(s) \int_0^1 e^{it(1-t)A_m} x e^{istB_m} dt\, ds.$$

con

$$A_m := \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_{m,\lambda} \quad y \quad B_m := \int_{\mathbb{R}} \mu dF_{m,\mu}$$

y entonces

$$T_{\phi_n}(x) - T_{n,m}(x) = \int_{\mathbb{R}} h_n(s) \int_0^1 (e^{is(1-t)A} x e^{istB} - e^{is(1-t)A_m} x e^{istB_m}) dt\, ds. \tag{4.9}$$

Para estimar esta diferencia, observemos que por el teorema espectral se tiene que

$$\|A - A_m\| \leq \frac{1}{m} \quad y \quad \|B - B_m\| \leq \frac{1}{m}$$

y como

$$\begin{aligned} e^{is(1-t)A} x e^{istB} - e^{is(1-t)A_m} x e^{istB_m} &= e^{is(1-t)A} x (e^{istB} - e^{istB_m}) \\ &+ (e^{is(1-t)A} - e^{is(1-t)A_m}) x e^{istB_m} \end{aligned}$$

usando (4.5) tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|e^{is(1-t)A}xe^{istB} - e^{is(1-t)A_m}xe^{istB_m}\right\|_p &\leq \frac{1}{m}\left\|x\right\|_p \left|s\right| + \frac{1}{m}\left\|x\right\|_p \left|s\right| (1-t) \\ &\leq \frac{2\left|s\right|}{m}\left\|x\right\|_p \qquad (4.10)\end{aligned}$$

y entonces resulta

$$\left\|T_{\phi_n}(x) - T_{n,m}(x)\right\|_p \leq \frac{2}{m}\left\|x\right\|_p \int_{\mathbb{R}} \left|sh_n(s)\right| ds = \frac{2c_{n,2}}{m}\left\|x\right\|_p$$

pues $h_n(s) = s\hat{f}(s)$ y $c_{n,2} \leq \infty$ por (4.6) . En particular, tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} \left\|T_{\phi_n}(x) - T_{n,m}(x)\right\|_p = 0.$$

Con esto, y como la familia $\{T_{n,m}\}$ estaba uniformemente acotada en $\mathcal{S}^p$ se tiene que la familia $\{T_{\phi_n}\}$ también está uniformemente acotada en $\mathcal{S}^p$ por una constante C y por lo tanto

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{tr}(yT_{\phi_f}(x))\right| &\leq \left|\operatorname{tr}(yT_{\phi_f}(x)) - \operatorname{tr}(yT_{\phi_n}(x))\right| + \left|\operatorname{tr}(yT_{\phi_n})\right| \\ &\leq \left|\operatorname{tr}(yT_{\phi_f}(x)) - \operatorname{tr}(yT_{\phi_n}(x))\right| + \left\|T_{\phi_n}(x)\right\|_p \\ &\leq \left|\operatorname{tr}(yT_{\phi_f}(x)) - \operatorname{tr}(yT_{\phi_n}(x))\right| + \left\|T_{\phi_n}\right\| \left\|x\right\|_p \\ &\leq \left|\operatorname{tr}(yT_{\phi_f}(x)) - \operatorname{tr}(yT_{\phi_n}(x)\right| + C\left\|x\right\|_p\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $y \in \mathcal{S}^q$ con $1/p + 1/q = 1$ y por (4.5) tenemos que

$$\sup_{\substack{y\in\mathcal{S}^q \\ \|y\|_q=1}} \left|\operatorname{tr}(yT_{\phi_f}(x))\right| \leq C\left\|x\right\|_p$$

y por la dualidad de la traza (Teorema 1.21) se tiene $\left\|T_{\phi_f}(x)\right\|_p \leq C\left\|x\right\|_p$, es decir, T_{ϕ_f} esta acotado en S^p como queríamos ver.

$\square$

4.3. Funciones Lipschitz de operadores: caso no acotado

En esta sección vamos a demostrar el resultado de Potapov y Sukochev acerca de funciones Lipschitz de operadores para el caso $\mathcal{M} = \mathcal{B}(H)$.

Definición 4.6. Sean $a : \mathrm{Dom}(a) \to H$ y $b : \mathrm{Dom}(b) \to H$ operados autoadjuntos. Para $1 \leq p \leq \infty$ decimos que el operador $a - b$ está bien definido y pertenece a $\mathcal{S}^p$ si

(i) existe un core $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{Dom}(b)$ del operador b tal que $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{Dom}(a)$;

(ii) el operador $a - b$, inicialmente definido en $\mathcal{D}$, es cerrable;

(iii) su clausura $\overline{a - b}$ pertence a $\mathcal{S}^p$.

En este caso, con el símbolo $a - b$ denotamos tambien a su clasura $\overline{a - b}$.

Teorema 4.7 (Potapov- Sukochev [28]). *Sea f una función Lipschitz con $\|f\|_{Lip\,1} \leq 1$. Para todo $1 < p < \infty$ existe una constante $c_p > 0$ tal que*

$$\|f(a) - f(b)\|_p \leq c_p \|a - b\|_p$$

donde a y b son operadores lineales autoadjuntos (posiblemente no acotados) que satisfacen $a - b \in \mathcal{S}^p$.
Es decir, si f es Lipschitz como función de de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, entonces f es una función Lipschitz de operadores.

El teorema anterior prueba con total generalidad la conjetura Krein formulada en [22]. Para demostrarlo, necesitamos establecer, al igual que que hicimos en el caso compacto en el Teorema 2.18, que la imagen del operador T_{ϕ_f} aplicada a $a - b$ concide, en efecto, con $f(a) - f(b)$. La prueba de esto último, si permitimos que a y b sean no acotados, es considerablemente más complicada que en el caso compacto y a eso le vamos a dedicar lo que queda del capítulo.

Teorema 4.8. *Sean a y b operadores lineales autoadjuntos y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $\|f\|_{Lip\,1} \leq 1$. Entonces para cada $1 < p < \infty$ $T_{\phi_f} \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^p)$ y satisface*

$$T_{\phi_f}(ae_n^a x e_n^b - e_n^a x b e_n^b) = f(a)e_n^a x e_n^b - e_n^a x f(b) e_n^b$$

donde $e_n^a = e^a([-n, n])$ y $e_n^b = e^b([-n, n])$ para todo $x \in \mathcal{S}^p$ y todo $n \in \mathbb{N}$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. En $\mathbb{R}^2$ definimos las funciones

$$\chi_1(\lambda, \mu) = \mathbb{1}_{[-n,n]}(\lambda), \qquad \chi_2(\lambda, \mu) = \mathbb{1}_{[-n,n]}(\mu),$$
$$\varphi_1(\lambda, \mu) = \lambda \chi_1(\lambda, \mu), \qquad \varphi_2(\lambda, \mu) = \mu \chi_2(\lambda, \mu)$$

y $\psi_1 = \varphi_1 \cdot \chi_2,\ \psi_2 = \varphi_2 \cdot \chi_1$. Si además $f^1(\lambda, \mu) = f(\lambda)$ y $f^2(\lambda, \mu) = f(\mu)$ se tiene, que por la definición de ϕ_f,

$$\phi_f \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = f^1 \chi_1 - f^2 \chi_2,$$

y entonces multiplicando la igualdad anterior por $\chi_1 \chi_2$ se obtiene

$$\phi_f(\psi_1 - \psi_2) = (f^1 \chi_1) \cdot \chi_2 - \chi_1 \cdot (f^2 \chi_2).$$

Luego, como la aplicación $\varphi \mapsto T_\varphi$ es un morfismo de álgebras (ver Observación 3.9) tenemos que

$$T_{\phi_f}(T_{\psi_1} - T_{\psi_2}) = T_{f^1\chi_1} T_{\chi_2} - T_{\chi_1} T_{f^1\chi_2}.$$

Además

$$T_{\psi_1}(x) = ae_n^a x e_n^b \quad y \quad T_{\psi_2}(x) = e_n^a x b e_n^b$$

para todo $x \in \mathcal{S}^p$.
Como $(f\mathbb{1}_{[-n,n]})(a) = f(a)e_n^a$ y $(f\mathbb{1}_{[-n,n]})(b) = f(b)e_n^b$ se tiene que

$$T_{f^1\chi_1} T_{\chi_2}(x) = T_{f^1\chi_1}(x e_n^b) = f(a) e_n^a x e_n^b$$

y

$$T_{\chi_1} T_{f^2\chi_2}(x) = T_{\chi_1}(x f(b) e_n^b) = e_n^a x f(b) e_n^b.$$

$\square$

Lema 4.9. *Sean a, b operadores autoadjuntos tal que $a - b \in \mathcal{S}^p$, $1 < p < \infty$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ con $\|f\|_{Lip\,1} \leq 1$. Entonces*

$$T_{\phi_f}(ae_n^a e_n^b - e_n^a b e_n^b) = f(a)e_n^a e_n^b - e_n^a f(b) e_n^b$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{p_\beta\}$ un sistema de proyecciones ortogonales respecto a a en $\mathcal{B}(H)$ como en Lema 3.17. Aplicando el Lema 4.8 para $x = x_\beta$ tenemos que

$$T_{\phi_f}(ae_n^a p_\beta e_n^b - e_a^a p_\beta b e_n^n) = f(a)e_n^a p_\beta e_n^b - e_n^a p_\beta f(b) e_n^n. \tag{4.11}$$

Escribimos

$$\begin{aligned} e_n^a p_\beta e_n^b - e_a^a p_\beta b e_n^n &= e_n^a p_\beta e_n^b - e_n^a p_\beta a e_n^b + e_n^a p_\beta a e_n^b - e_a^a p_\beta b e_n^n \\ &= e_n^a [a, p_\beta] e_n^b + e_n^a p_\beta (a-b) e_n^n. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \left\| e_n^a p_\beta e_n^b - e_a^a p_\beta b e_n^n \right\|_p &\leq \left\| e_n^a [a, p_\beta] e_n^b \right\|_p + \| e_n^a p_\beta (a-b) e_n^n \|_p \\ &\leq \| [a, p_\beta] \|_p + \|a - b\|_p \end{aligned}$$

para todo β. Luego

$$\begin{aligned} \sup_\beta \left\| e_n^a p_\beta e_n^b - e_a^a p_\beta b e_n^n \right\|_p &\leq \sup_\beta \| [a, p_\beta] \|_p + \|a - b\|_p \\ &\leq 1 + \|a - b\|_p \end{aligned}$$

con lo cual si llamamos $x_\beta := e_n^a p_\beta e_n^b - e_n^a p_\beta b e_n^b$ se tiene que $x_\beta \in \mathcal{S}^p$ para todo β. Llamemos $x := ae_n^a e_n^b - e_n^a b e_n^b = e_n^a (a-b) e_n^b \in \mathcal{S}^p$ y veamos que $x - x_\beta \to 0$ en $\sigma(\mathcal{S}^p, \mathcal{S}^q)$ con $1/p + 1/q = 1$.

Sea $y \in \mathcal{S}^p$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\mathrm{tr}\,((x - x_\beta)y))| &= \left|\mathrm{tr}\left(ae_n^a(1-p_\beta)e_n^b y - e_n^a(1-p_\beta)be_n^b y\right)\right| \\
&\leq \left|\mathrm{tr}\left(ae_n^a(1-p_\beta)e_n^b y\right)\right| + \left|\mathrm{tr}\left(e_n^a(1-p_\beta)be_n^b y\right)\right| \\
&\leq \left|\mathrm{tr}\left((1-p_\beta)e_n^b y a e_n^a\right)\right| + \left|\mathrm{tr}\left((1-p_\beta)be_n^b y e_n^a\right)\right|.
\end{aligned}$$

Luego, como $y \in \mathcal{S}^q$ y $\mathcal{S}^q$ es un ideal de $\mathcal{B}(H)$ tenemos que

$$e_n^b y a e_n^a, be_n^b y e_n^a \in \mathcal{S}^q$$

y por el Lema 1.31 $|\mathrm{tr}\,(x - x_\beta)y)| \underset{\beta}{\to} 0$.
Por lo tanto, mostramos que

$$e_n^a p_\beta e_n^b - e_n^a p_\beta b e_n^b \underset{\beta}{\to} ae_n^a e_n^b - e_n^a b e_n^b \quad \text{en } \sigma(\mathcal{S}^p, \mathcal{S}^q).$$

Como T_{ϕ_f} es continuo en $\mathcal{S}^p$ por el Teorema 4.4, también es continuo respecto de la topología $\sigma(\mathcal{S}^p, \mathcal{S}^q)$ pues si $x_\alpha \to 0$ en $\mathcal{S}^p$ e $y \in \mathcal{S}^q$ entonces

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{tr}(T_{\phi_f}(x_\alpha)y)\right| &\leq \left\|T_{\phi_f}(x_\alpha)\right\|_p \|y\|_q \\
&\leq \left\|T_{\phi_f}\right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{S}^p)} \|x_\alpha\|_p \|y\|_q \underset{\alpha}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Luego

$$T_{\phi_f}(e_n^a p_\beta e_n^b - e_n^a p_\beta b e_n^b) \underset{\beta}{\to} T_{\phi_f}(ae_n^a e_n^b - e_n^a b e_n^b) \tag{4.12}$$

respecto de $\sigma(\mathcal{S}^p, \mathcal{S}^q)$.
Ahora, veamos que

$$f(a)e_n^a p_\beta e_n^b - e_n^a p_\beta f(b) e_n^b \underset{\beta}{\to} f(a)e_n^a e_n^b - e_n^a f(b) e_n^b \quad \text{en } \sigma(\mathcal{S}^p, \mathcal{S}^q) \tag{4.13}$$

Para esto, tomemos $y \in \mathcal{S}^q$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\left|\operatorname{tr}((f(a)e_n^a e_n^n - f(a)e_n^a p_\beta e_n^b)y\right| &= \left|\operatorname{tr}(f(a)e_n^a(1-p_\beta)e_n^b y)\right| \\
&= \left|\operatorname{tr}((1-p_\beta)e_n^b y f(a)^* e_n^a)\right| \underset{\beta}{\to} 0
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

por el Lema 1.31 pues $e_n^b y f(a)^* e_n^a \in \mathcal{S}^q$ pues $e_n^b, f(a)^* e_n^a \in \mathcal{B}(H)$ y $\mathcal{S}^q$ es un ideal en $\mathcal{B}(H)$. Análogamente obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left|\operatorname{tr}((e_n^a f(b)e_n^b - e_n^a p_\beta f(b)e_n^b)y)\right| &= \left|\operatorname{tr}(e_n^a(1-p_\beta)f(b)e_n^b y\right| \\
&\leq \left|\operatorname{tr}((1-p_\beta)f(b)e_n^b y e_n^a)\right| \underset{\beta}{\to} 0.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Entonces juntando (4.14) y (4.15), y usando la linealidad de la traza se tiene (4.13) y queda demostrado el lema.

□

Para demostrar la estimación Lipschitz para operadores no acotados y así, el Teorema 4.7, tenemos que lidiar con el problema de ver que si $a - b \in \mathcal{S}^p$ entonces $f(a) - f(b) \in \mathcal{S}^p$. Esto es, encontrar un core $\mathcal{D}$ del operador $f(b)$ tal que $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{Dom} f(a)$. Un posible candidado a ser este $\mathcal{D}$, dado que $\mathcal{S}^1 \subset \mathcal{S}^p$ para $1 \leq p \leq \infty$, es

$$\operatorname{Dom} f(b) \cap \mathcal{S}^1.$$

Desafortunadamente, en general, la expresión de arriba no tiene sentido, dado que $\operatorname{Dom} f(a) \subseteq H$ puede tener intersección vacia con el subespacio $\mathcal{S}^1$. Es aquí donde la representación a izquierda de $\mathcal{B}(H)$ resulta útil para encontrar un core que contenga operadores de $\mathcal{S}^1$.

Recordemos la noción de representación a izquierda $\mathcal{B}(H)_L$ del álgebra $\mathcal{B}(H)$. Esto es, $\mathcal{B}(H)_L$ es el álgebra de operadores $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^2(H))$ de multiplicar a izquierda por $x \in \mathcal{B}(H)$. Vimos que la aplicación $L : x \mapsto \mathbf{x}$ es un $*$-isomorfismo entre las álgebras de von Neumann $\mathcal{B}(H)$ y $\mathcal{B}(H)_L$. Definimos la traza tr_L por $\operatorname{tr}_L(\mathbf{x}) = \operatorname{tr}(x)$, $x \in \mathcal{B}(H)$. Denotamos por $\mathcal{S}_L^p$ al conjunto de operadores $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(H)_L$ tal que $x \in \mathcal{S}^p(H)$.

El siguiente lema técnico, que no demostraremos, nos dice que en la representación a izquierda $\mathcal{B}(H)_L$ podemos encontrar un core del operador $\mathbf{a}$ que contenga elementos de $\mathcal{S}^1$.

Lema 4.10. *[29, Lemma 3.6] Si* $\mathbf{a} : \mathrm{Dom}(\mathbf{a}) \to \mathcal{S}^2$ *es un operador autoadjunto densamente definido, entonces el subespacio* $\mathcal{D}\mathbf{a} := \mathrm{Dom}(\mathbf{a}) \cap \mathcal{S}^1$ *es un core para* $\mathbf{a}$.

Para lo que sigue, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son operadores autoadjuntos densamente definidos en $\mathcal{B}(H)_L$.

Definición 4.11. Decimos que $\mathbf{a}-\mathbf{b} \in \mathcal{S}^p_L$ si $\mathcal{D}\mathbf{b} \subset \mathrm{Dom}\, a$ y el operador $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, inicialmente definido en $\mathcal{D}\mathbf{b}$, es cerrable con clausura $\mathbf{a}-\mathbf{b} := \overline{\mathbf{a}-\mathbf{b}} \in \mathcal{S}^p_L$.

Tenemos los siguientes lemas que relacionan la representación regular a izquierda y las clases de operadores $\mathcal{S}^p_L$.

Lema 4.12. *Si* $a-b \in \mathcal{S}^p$, *entonces* $\mathbf{a}-\mathbf{b} = L_a - L_b \in \mathcal{S}^p_L$, $2 \leq p \leq \infty$. *Más aún,*

$$L(a-b) = L_a - L_b.$$

Demostración. Si e_n^a, e_n^b son como antes, por el teorema espectral se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} L(e_n^a a)(\eta) = L_a(\eta), \quad \eta \in \mathrm{Dom}(L_a)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} L(e_n^b b)(\xi) = L_b(\xi), \quad \xi \in \mathrm{Dom}(L_b).$$

Veamos que, para $\mathcal{D}(L_b) = \mathcal{D}(\mathbf{b})$ vale que

$$\mathcal{D}(L_b) \subseteq \mathrm{Dom}(L_a).$$

Para esto, fijado $\xi \in \mathcal{D}(L_b)$, consideremos el funcional lineal

$$\eta \mapsto \langle \xi, L_a(\eta) \rangle,\ \eta \in \mathcal{D}(L_a). \tag{4.16}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \xi, L_a(\eta)\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle e_n^b \xi, e_n^a L_a(\eta)\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle e_n^a L_a e_n^b \xi, \eta\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle e_n^a L_a e_n^b \xi - e_n^a L_b e_n^b \xi, \eta\rangle + \langle e_n^a L_b e_n^b \xi, \eta\rangle \qquad (4.17)\\
&= \lim_{n\to\infty} \langle L(e_n^a e_n^b - e_n^a b e_n^b)\xi, \eta\rangle + \lim_{n\to\infty} \langle e_n^a L_b e_n^b \xi, \eta\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle L(e_n^a (a-b) e_n^b)\xi, \eta\rangle + \langle L_b \xi, \eta\rangle.
\end{aligned}$$

Como $a - b \in \mathcal{S}^p$, por el Lema 1.32 tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle L(e_n^a (a-b) e_n^b)(\xi), \eta\rangle &= \lim_{n\to\infty} \operatorname{tr}_L(L(e_n^a (a-b) e_n^b) L_\xi L_\eta^*) \\
&= \lim_{n\to\infty} \operatorname{tr}_L(L(e_n^a (a-b) e_n^b \xi\eta^*)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \operatorname{tr}(e_n^a (a-b) e_n^b \xi\eta^*) \\
&= \lim_{n\to\infty} \operatorname{tr}((a-b)\xi\eta^*) \\
&= \langle L(a-b)(\xi), \eta\rangle.
\end{aligned}$$

Con esto, junto con (4.17) se tiene

$$\langle \xi, L_a(\eta)\rangle = \langle L(a-b)(\xi), \eta\rangle + \langle L_b(\xi), \eta\rangle,\ \eta \in \mathcal{D}(L_a). \qquad (4.18)$$

Claramente la aplicación

$$\eta \mapsto \langle L_b(\xi), \eta\rangle, \eta \in \mathcal{S}^2$$

es continua. Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|L(a-b)(\xi)\|_{\mathcal{S}^2} &= \|(a-b)\xi\|_{\mathcal{S}^2} \\
&\leq \|a-b\|_{\mathcal{S}^p} \|\xi\|_{\mathcal{S}^q} < \infty
\end{aligned}$$

pues $\xi \in \mathcal{D}(L_b) = \operatorname{Dom}(L_b) \cap \mathcal{S}^1 \subseteq \mathcal{S}^1 \subseteq \mathcal{S}^q$.

Entonces, la aplicación

$$\eta \mapsto \langle L(a-b)(\xi), \eta \rangle,\ \eta \in \mathcal{S}^2$$

también es continua. En consecuencia, la identidad (4.18) implica que la forma lineal 4.16 está acotada y entonces $\mathcal{D}(L_b) \subseteq \mathcal{D}(L_a)$.
Teniendo esto último, de la identidad (4.18) resulta que

$$(L_a - L_b)(\xi) = (a-b)\xi, \quad \text{para todo } \xi \in \mathcal{D}(L_b).$$

Esto dice que el operador $L_a - L_b$ esta definido en $\mathcal{D}(L_b)$ como multiplicar a izquierda por $a - b \in \mathcal{S}^p$. Luego $L_a - L_b$ es cerrable y su clausura pertenece a $\mathcal{S}^p_L$. □

Ahora veamos la recíproca del lema anterior para el caso $p = \infty$.

Lema 4.13. *Si $L_a - L_b \in \mathcal{S}^\infty_L$, entonces $a - b \in \mathcal{S}^\infty$ y*

$$L(a-b) = L_a - L_b.$$

Demostración. En forma similar al lema anterior, probemos primero que

$$\mathcal{D}(b) \subseteq \mathcal{D}(a).$$

Para esto, consideremos la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \langle \xi, a(\eta) \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle e^b_n(\xi), a e^a_n(\eta) \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle (e^a_n a e^b_n - e^a_n b e^b_n)(\xi), \eta \rangle \\ &+ \langle (\xi), \eta \rangle. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Repitiendo el argumento del lema anterior, es suficiente mostrar que los operadores

$$y_n := e^a_n a e^b_n - e^a_n b e^b_n,\ n \geq 1$$

están uniformemente acotados en $\mathcal{S}^\infty$. Recordemos que

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}\in\mathcal{S}_L^\infty,\quad y\quad e_n^{\mathbf{b}}(\mathcal{S}^2)\subseteq \mathrm{Dom}(\mathbf{b}).$$

Como $e_n^{\mathbf{b}}(\mathcal{S}^2)\subseteq \mathrm{Dom}(\mathbf{b})$, tenemos que

$$e_n^{\mathbf{a}}(\mathbf{a}-\mathbf{b})e_n^{\mathbf{b}}(\xi)=e_n^{\mathbf{a}}\mathbf{a}e_n^{\mathbf{b}}(\xi)-e_n^{\mathbf{a}}\mathbf{b}e_n^{\mathbf{b}}(\xi),\, \xi\in\mathcal{S}^2,$$

o, equivalentemente,

$$e_n^{\mathbf{a}}(\mathbf{a}-\mathbf{b})e_n^{\mathbf{b}}=e_n^{\mathbf{a}}\mathbf{a}e_n^{\mathbf{b}}(\xi)-e_n^{\mathbf{a}}\mathbf{b}e_n^{\mathbf{b}}=L_{y_n}.$$

Entonces, los operadores y_n están uniformemente acotados en $\mathcal{S}^\infty$ y entonces $\mathrm{Dom}(b)\subseteq\mathrm{Dom}(a)$. Se sigue de la igualdad anterior que

$$wo-\lim_{n\to\infty} L(y_n)=\mathbf{a}-\mathbf{b}.$$

De (4.19), se desprende que el operador $a-b$ en $\mathrm{Dom}(b)$ está dado por

$$(a-b)(\xi)=\lim_{n\to} y_n(\xi)=L^{-1}(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\xi).$$

Esto último, significa que el operador $a-b$ se extiende a todo H como un operador acotado.

$\square$

Observación 4.14. Dados a,b autoadjuntos no acotados en H, es fácil ver (Lema 3.12) que las medidas espectrales $e^{\mathbf{a}}$ y $e^{\mathbf{b}}$ con valores en las proyecciones de $\mathcal{B}(S^2)$ toman, de hecho, valores en $\mathcal{B}(H)_L$ puesto que esta última es WOT cerrada por ser un álgebra de von Neumann (ver la Observación 1.53). Definimos para $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ funcións Lipschitz el operador

$$\begin{aligned} T_{\phi,\mathcal{S}_L^p}:\mathcal{S}_L^p&\to\mathcal{S}_L^p\\ L_x&\mapsto L_{T_{\phi_f(x)}}\end{aligned}$$

donde T_{ϕ_f} es el operador definido en 4.3 asociado a los operadores a y b.

Claramente, como L es isométrico, se tiene que

$$\left\| T_{\phi_f, \mathcal{S}^p_L}(Lx) \right\|_{\mathcal{S}^p_L} = \left\| T_{\phi_f}(x) \right\|_{\mathcal{S}^p}.$$

Luego, para cada $1 < p < \infty$, se tiene que $T_{\phi_f, \mathcal{S}^p_L} : \mathcal{S}^p_L \to \mathcal{S}^p_L$ es continuo por el Teorema 4.4.

Teorema 4.15. *Sean* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *operadores autoadjuntos densamente definidos en* $\mathcal{B}(H)_L$ *y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *es una función Lipschitz. Si* $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{S}^p_L$*, entonces para cada* $1 < p < \infty$ *se tiene* $f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b}) \in \mathcal{S}^p_L$ *y*

$$f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b}) = T_{\phi_f, \mathcal{S}^p_L}(\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

En particular,

$$\| f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b}) \|_{\mathcal{S}^p_L} \leq c_{f,p} \| \mathbf{a} - \mathbf{b} \|_{\mathcal{S}^p_L}.$$

Demostración. Sean $e^{\mathbf{a}}_n$ y $e^{\mathbf{b}}_n$ las medidas espectrales de los operadores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Como $e^{\mathbf{b}}_n(\mathcal{S}^2) \subset \operatorname{Dom} \mathbf{b}$, tenemos que $e^{\mathbf{b}}_n(\mathcal{S}^1) \subset \mathcal{D}\mathbf{b}$ para todo $n \geq 1$. Entonces, de acuerdo a la definición de $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{S}^p_L$, se tiene

$$e^{\mathbf{a}}_n(\mathbf{a} - \mathbf{b}) e^{\mathbf{b}}_n(\xi) = e^{\mathbf{a}}_n \mathbf{a} e^{\mathbf{b}}_n(\xi) - e^{\mathbf{a}}_n \mathbf{b} e^{\mathbf{b}}_n(\xi), \quad \xi \in \mathcal{S}^1, n \geq 1.$$

El operador del lado derecho está acotado. Como $\mathcal{S}^1$ es denso en $\mathcal{S}^2$, tenemos que el operador del lado izquierdo también está acotado y

$$e^{\mathbf{a}}_n(\mathbf{a} - \mathbf{b}) e^{\mathbf{b}}_n = e^{\mathbf{a}}_n \mathbf{a} e^{\mathbf{b}}_n - e^{\mathbf{a}}_n \mathbf{b} e^{\mathbf{b}}_n, \quad n \geq 1.$$

Tenemos

$$e^{\mathbf{a}}_n(\mathbf{a} - \mathbf{b}) e^{\mathbf{b}}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{S}^p_L \qquad \text{en } \sigma(\mathcal{S}^p_L, \mathcal{S}^q_L),$$

con $1/p + 1/q = 1$.

Como $T_{\phi_f, \mathcal{S}^p_L}$ es $\sigma(\mathcal{S}^p_L, \mathcal{S}^q_L)$-continuo, si llamamos

$$\mathbf{z}_n := T_{\phi_f, \mathcal{S}^p_L}(e^{\mathbf{a}}_n(\mathbf{a} - \mathbf{b}) e^{\mathbf{b}}_n) \quad y \quad \mathbf{z} := T_{\phi_f, \mathcal{S}^p_L}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

entonces

$$\mathbf{z}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{z} \quad \text{en } \sigma(\mathcal{S}^p_L, \mathcal{S}^q_L). \tag{4.20}$$

Por otro lado, por el Lema 4.9 tenemos

$$\mathbf{z}_n := e^{\mathbf{a}}_n f(\mathbf{a}) e^{\mathbf{b}}_n - e^{\mathbf{a}}_n f(\mathbf{b}) e^{\mathbf{b}}_n \in \mathcal{B}(H)_L \subset \mathcal{B}(\mathcal{S}^2).$$

Consideremos ahora la forma bilineal

$$\langle \mathbf{z}_n(\xi), \nu\rangle = \langle e^{\mathbf{b}}_n(\xi), e^{\mathbf{a}}_n \bar{f}(\mathbf{a})(\nu)\rangle - \langle e^{\mathbf{b}}_n f(\mathbf{b})(\xi), e^{\mathbf{a}}_n(\nu)\rangle, \tag{4.21}$$

para todo $\xi \in \mathcal{D}\mathbf{b}, \nu \in \mathcal{D}\bar{f}(\mathbf{a}), n \geq 1$. Por definición de los conjuntos $\mathcal{D}f(\mathbf{b})$ y $\mathcal{D}\bar{f}(\mathbf{a})$, tenemos que $L_\xi L^*_\nu \in \mathcal{S}^1_L \subset \mathcal{S}^q_L$ para todo $\xi \in \mathcal{D}f(\mathbf{b})$, $\nu \in \mathcal{D}\bar{f}(\mathbf{a})$. Entonces, se sigue de (4.20) que

$$\langle \mathbf{z}_n(\xi), \nu\rangle = \operatorname{tr}_L(\mathbf{z}_n L(\xi\nu^*)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{tr}_L(\mathbf{z} L(\xi\nu^*)) = \langle \mathbf{z}(\xi), \nu\rangle.$$

Luego, tomando límite en el lado derecho de (4.21) tenemos que

$$\langle \mathbf{z}(\xi), \nu\rangle = \langle \xi, \bar{f}(\mathbf{a})(\nu)\rangle - \langle f(\mathbf{b})(\xi), \nu\rangle, \quad \xi \in \mathcal{D}f(\mathbf{b}), \nu \in \mathcal{D}\bar{f}(\mathbf{a}). \tag{4.22}$$

Para un $\xi \in \mathcal{D}f(\mathbf{b})$ fijo, la forma lineal $\langle f(\mathbf{b})(\xi), \nu\rangle$ es continua respecto de $\nu \in \mathcal{S}^2$. Mas aún, la forma lineal $\langle \mathbf{z}(\xi), \nu\rangle$ también es continua respecto de $\nu \in \mathcal{S}^2$ pues

$$|\langle \mathbf{z}(\xi), \nu\rangle| = |\operatorname{tr}(z\xi\nu^*)| \leq \|z\xi\|_{\mathcal{S}^2} \|\nu\|_{\mathcal{S}^2} \leq \|z\|_{\mathcal{S}^p} \|\xi\|_{\mathcal{S}^1} \|\nu\|_{\mathcal{S}^2}$$

si $p \geq 2$ y si $1 < p < 2$ entonces

$$|\langle \mathbf{z}(\xi), \nu\rangle| = |\operatorname{tr}(z\xi\nu^*)| \leq \|z\xi\|_{\mathcal{S}^p} \|\nu\|_{\mathcal{S}^q} \leq \|z\xi\|_{\mathcal{S}^p} \|\nu\|_{\mathcal{S}^2}.$$

Luego, la forma lineal $\langle \xi, \bar{f}(\mathbf{a})(\nu)\rangle$ es continua respecto de $\nu \in \mathcal{D}\bar{f}(\mathbf{a})$. Como $\mathcal{D}\bar{f}(\mathbf{a})$ es un core de $\bar{f}(\mathbf{a})$, se tiene que $\xi \in \operatorname{Dom} f(\mathbf{a})$ y entonces se tiene $\mathcal{D}f(\mathbf{b}) \subset \operatorname{Dom} f(\mathbf{a})$. Finalmente, (4.22) dice que

$$\mathbf{z}(\xi) = f(\mathbf{a})\xi - f(\mathbf{b})\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}f(\mathbf{b}).$$

Luego como $\mathbf{z} \in \mathcal{S}_L^p$ se tiene que $f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b}) \in \mathcal{S}_L^p$ y la estimación del enunciado es consecuencia de que $T_{\phi_f,\mathcal{S}_L^p}$ está acotado pues f es Lipschitz.

□

Finalmente, veamos como usar toda la maquinaria previa para demostrar el Teorema 4.7. Como ya mencionamos varias veces, gran parte de los resultados de esta tesis valen en contexto más generales de álgebras de von Neumann $\mathcal{M}$ con traza semifinita τ y espacios $L^p = L^p(\mathcal{M}, \tau)$. En ese contexto vale

$$L^1 \cap L^\infty \subseteq L^p \subseteq L^1 + L^\infty$$

y en el caso $\mathcal{M} = \mathcal{B}(H)$, esta contención de espacios se traduce en

$$\mathcal{S}^1 \subseteq \mathcal{S}^p \subseteq \mathcal{S}^\infty. \tag{4.23}$$

Las pruebas de los resultados anteriores no son sustancialmente distintas y gran parte de la dificultad consiste en entender los objetos que se manejan y adaptar la demostración que dimos del caso $\mathcal{B}(H)$. Sin embargo, para el siguiente resultado, la demostración se simplifica bastante respecto al contexto mas general el cual requiere un enfoque distinto.
Para el caso de $\mathcal{B}(H)$, de (4.23) se tiene que la norma en $\mathcal{S}^\infty$ (que es la norma de operadores en el espacio de operadores compactos), es la más debil de todas las normas p-Schatten en los espacios $\mathcal{S}^p$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Pasemos entonces, a completar la demostración del resultado de Potapov y Sukochev para el caso de operadores no acotados

Demostración (del Teorema 4.7).

Como $\mathcal{S}^p \subseteq \mathcal{S}^\infty$ para todo $1 \leq p \leq \infty$, se sigue del Lema 4.12 que

$$a - b \in \mathcal{S}^p \subset \mathcal{S}^\infty \implies L_a - L_b \in \mathcal{S}_L^\infty$$

y

$$L(a-b) = L_a - L_b.$$

Luego, tenemos que

$$L_a - L_b \in \mathcal{S}_L^p.$$

Por el Teorema 4.15 se tiene que

$$f(L_a) - f(L_b) \in \mathcal{S}_L^p$$

y

$$\left\| L_{f(a)} - L_{f(b)} \right\|_{\mathcal{S}_L^p} = \| f(L_a) - f(L_b) \|_{\mathcal{S}_L^p} \leq c_{f,p} \| L_a - L_b \|_{\mathcal{S}_L^p} .$$

Finalmente, del Lema 4.13 tenemos

$$L_{f(a)} - L_{f(b)} \in \mathcal{S}_L^p \subseteq \mathcal{S}_L^\infty \implies f(a) - f(b) \in \mathcal{S}^\infty$$

y

$$L(f(a) - f(b)) = L_{f(a)} - L_{f(b)} \in \mathcal{S}_L^p.$$

En consecuencia,

$$f(a) - f(b) \in \mathcal{S}^p$$

y se tiene

$$\begin{aligned} \| f(a) - f(b) \|_{\mathcal{S}^p} &= \| f(L_a) - f(L_b) \|_{\mathcal{S}_L^p} \\ &\leq c_{f,p} \| L_a - L_b \|_{\mathcal{S}_L^p} \\ &= c_{f,p} \| a - b \|_{\mathcal{S}^p} . \end{aligned}$$

con lo cual el teorema queda demostrado. □

Apéndice: Aplicación a la Geometría Diferencial

En este apéndice vamos a mostrar una aplicación del resultado de Potapov y Sukochev para funciones Lipschitz de operadores.
En [2] E. Andruchow, G .Larotonda, L. Recht y A. Varela estudiaron la métrica de Finsler en el grupo lineal $G = GL_n(\mathbb{C})$ inducida por la translación a izquierda de las p-normas de Schatten. Es decir, como $GL_n(\mathbb{C})$ es abierto en el espacio $M_n(\mathbb{C})$, el tangente de $GL_n(\mathbb{C})$ en cualquier punto se identifica con $M_n(\mathbb{C})$, y si $x \in M_n(\mathbb{C})$ lo pensamos como un vector tangente en $g \in GL_n(\mathbb{C})$, entonces la métrica que se considera está dada por

$$\|x\|_g := \left\|g^{-1}x\right\|_p := \tau((x^*(g^{-1})^*g^{-1}x)^n)^{1/p},$$

donde $p = 2n$ es un entero par fijo, y τ la parte real normalizada de la traza tr.
Esta métrica es Riemaniana cuando $p = 2$, y como fue observado por V.I Arnorld [3, Section 2], es la métrica natural para estudiar el grupo de Lie de los movimientos asociados al problema generalizado de cuerpo rígido. El objetivo de los autores era caracterizar y establecer la existencia y unicidad de camininos suaves minimizantes para esta métrica, estudiando la ecuación de Euler-Lagrange del funcional de p-energía

$$\mathcal{E}_p(g) = \int_0^1 \left\|g^{-1}(t)\dot{g}(t)\right\|_p^p dt,$$

para $g(t) \in GL_n(\mathbb{C})$ una curva suave parametrizada en el intervalo $[0, 1]$. Llamemos $v(t) = g^{-1}(t)\dot{g}(t)$ a la traslación a izquierda de los vectores de velocidad de g. Se puede ver que si g es una curva extremal del funcional de p-energía, entonces v satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}v(v^*v)^{n-1} = (v^*v)^n - (vv^*)^n, \tag{4.24}$$

que llamamos la *ecuación de Euler-Langrange* (de la p-métrica). Si $p > 2$ o si v no es normal, esta ecuación es difícil de tratar. Usando la correspondencia suave

$$v \to w := v(v^*v)^{n-1},$$

a la que llamamos *transformada de Legendre*, esta ecuación se transforma en la *ecuación de Hamilton*:

$$w = \frac{d}{dt}w = (w^*w)^{q/2} - (ww^*)^{q/2} = |w|^q - |w^*|^q\,, \tag{4.25}$$

donde $1/p + 1/q = 1$.
El procedimiento anterior se puede repetir en el caso donde H es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. En este caso se estudia la geometría del grupo lineal

$$G_p(H) = \{g \in \mathcal{B}(H) : g - 1 \in \mathcal{S}^p(H)\},$$

donde $\mathcal{S}^p(H)$ es la clase de operadores p-Schatten y $2 \leq p = 2n < \infty$ es un entero par. Resulta que el álgebra de Banach-Lie de $G_p(H)$ es el ideal $\mathcal{S}^p(H)$. Como vimos en el Capítulo 1, $\mathcal{S}^p(H)$ es un espacio de Banach con la norma $\|x\|_p = \mathrm{tr}((x^*x)^n)^{1/p}$.
Consideramos curvas suaves $\alpha : [0, 1] \to \mathcal{S}^p(H)$ donde a $\mathcal{S}^p$ le damos la topología inducida por la p-norma.
La métrica invariante a izquierda en el fibrado tangente de $G_p(H)$ es la siguiente: si x es tangente en $x \in G_p(H)$ (es decir, que pertenece a $\mathcal{S}^p(H)$), entonces

$$\|x\|_g = \left\|g^{-1}x\right\|_p$$

que está bien definido pues $x \in \mathcal{S}^p(H)$ y este último es un ideal en $\mathcal{B}(H)$. Repitiendo los cálculo hechos para el caso matricial, si $g(t)$ es una curva suave en $G_p(H)$ entonces podemos definir de nuevo $v(t) = g^{-1}(t)\frac{d}{dt}g(t)$, y considerar la ecuación de Euler-Lagrange como en (4.24) del problema de variaciones del funcional de p-energía.

$$\frac{d}{dt}v(v^*v)^{n-1} + ((vv^*)^n - (v^*v)^n) = 0.$$

La transformación de Legendre en este contexto es una función entre los espacios duales

$$\mathcal{S}^p(H) \ni v \mapsto w = v(v^*)^{n-1} \in \mathcal{S}^q(H),$$

donde $1/p + 1/q = 1$, y la ecuación de Hamilton (4.25) está dada, de nuevo, por

$$\dot{w} = |w|^q - |\dot{w}|^q .$$

Para establecer la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de Hamilton, es suficiente ver que la función $w \mapsto |w|^q$ entre espacios de Banach, es localmente Lipschitz. Si considereamos la función $f_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_d(t) = \begin{cases} |t|^q & \text{si } |t| \leq d \\ d^q \frac{t}{|t|} & \text{si } |t| > d \end{cases}$$

Claramente f_d es una función Lipschitz, y si $x \in \mathcal{B}(H)$ es tal que $\|x\| \leq d$, $f_d(|x|) = |x|^q$. Luego por el Teorema 4.7 se tiene que la aplicación $w \mapsto |w|^q$ es localmente Lipschitz como función de operadores y por lo tanto la ecuación de Hamilton (4.25) tiene una solución local continuamente diferenciable $w : (-\varepsilon, \varepsilon) \to GL_n(\mathbb{C})$ para una condición inicial $w(0) \in GL_n(\mathbb{C})$ por el resultado para ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach (ver, por ejemplo, [24, Chapter IV]).

Bibliografía

[1] Aleksandrov,A.B, Peller,V.V. *Operator Lipschitz functions.* arXiv:1602.07994 [math.FA].

[2] Andruchow, E., Larotonda, G.,Recht, L.,Varela, A. *The left invariant metric on thegeneral linear group.* J. Geom. Phys. 86 (2014), 241-257.

[3] Arnol'd, V.I. *Mathematical methods of Classical Mechanics.* Graduate Texts in Mathematics,60. Springer-Verlag, New York, 1993.

[4] Birman, M.Š., Solomjak, M.Z. *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space.* Series:Mathematics and its applications (D. Reidel Publishing Company). Soviet Series 1986

[5] ———*Double Stieljes operator integrals. I.* Problems if Mathematical Physics No. I, Spectral Theory and Wave Processes, pp. 33-67, Izdat Leningrad Univ., Leningrad, 1966.

[6] ———*Double Stieljes operator integrals. II.* Problems if Mathematical Physics No. 2, Spectral Theory, Diffraction Problems, pp. 26-60, Izdat Leningrad Univ., Leningrad, 1967.

[7] ———*Double Stieljes operator integrals. III.* Problems if Mathematical Physics No. 6. Theory of functions. Spectral theory. Wave Propagation pp. 27-53, Izdat Leningrad Univ., Leningrad, 1973.

[8] Davies, E.B., *Lipschitz continuity of functions of operators in the Schatten classes.* J. Lond. Math. Soc., 37 (1988), 148-157.

[9] De Pagter, B.,W Witvlet, H. & Sukochev, F. A, *Double Operator Integrals.* J.Funct. Anal., 192 (2002), 52-111.

[10] Diestel, J. , Uhl Jr., J. J. *Vector Measures.* American Mathematical Society, Providence , RI, 1977

[11] Dunford, N. , Schwartz, J.T, *Linear Operators. Part I, General Theory.* John Wiley & Sons Inc, New York, 1988.

[12] ———*Linear Operators. Part II, Spectral Theory.* John Wiley & Sons Inc, New York, 1988.

[13] Farforovskaya, Yu. B., *Estimates of the closeness of spectral descomposition of self-adjoint operators in the Kantorovich-Rubinsteĭn metric.* Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom., 22 (1967), 155-156 (Russian).

[14] ———*The connection of the Kantorovich-Rubinsheĭn metric for spectral resolutions of self-adjoint operators with functions of operators.* Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom., 23 (1968), 94-97 (Russian).

[15] ———*An example of Lipschitzian function of selfadjoint operators that yields a nonnuclear increase under a nuclear perturbation.* Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), 30 (1972), 146-153 (Russian).

[16] ———*On the estimation of the differende $f(B) - f(A)$ en las clases* $\mathcal{S}_p$. Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), 39 (1974), 194-195 (Russian).

[17] Gohberg, C., Kreĭn, M. G. *Theory and Applications of Volterra Operators* Translations of Mathematical Monographs V.24. Capt́ulo

[18] Hytönen, T., van Neerven, J., Veraar, M.& Weis, L. *Analysis in Banach Spaces. Volume I.* Springer, 2016,

[19] Kato, T. *Continuity of the map $S \to |S|$ for linear operators.* Prc. Japan Acad, 49 (1973), 157-160.

[20] ———*Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag. Berlig Heidelberg New York 1980.

[21] Kluvanek I. *Integration for the spectral theory, in "Miniconference on Operator Thery and Partial Differential Equations".* North Ryde, 1986, pp. 26-34 Austral Nat. Univ., Canberra 1986.

[22] Krein, M.G. *Some new studies in the theory of perturbations of self-adjoint operators.* Topics in Differential and Integral equations and Operator Theory, pp 116-181. Springer Basel 1983

[23] Krein, M.G. *On the trace formula in perturbation theory.* Mat. Sbornik 33 (1953), 598-626 (Russian).

[24] Lang, S. *Differentiable and Riemannian manifolds.* Third Edition. Graduate Texts in Mathematics, 160. Springer-Verlag, New-York, 1995.

[25] Peller, V.V. *The Lifshits-Krein trace formula and operator Lipschitz functions.* Proc. Amer. Math. Soc. Volume 144, Number 12, December 2016, Pages 5207-5215.

[26] ———*For which* f *does* $A - B \in S_p$ *imply that* $f(A) - f(B) \in S_p$*?* Operators in Indefinite Metric Spaces, Scattering Theory and other topics (Bucharest, 1985), Oper. Theory Adv. Appl., 4, pp. 289-294. Birkhäuser, Basel, 1987.

[27] Pisier G., Xu, Q. *Non-Commutative* L^p*-Spaces.* Handbook of the theory of Banach Spaces Vol. 2. Chapter 34.

[28] Potapov, D., Sukochev, F. *Operator-Lipschitz functions in Schatten-von Neumann classes.* Acta Math., 207 (2011),375-389.

[29] ———*Lipschitz and commutator estimates in symmtetric operator spaces.* J, Operator Theory, 59 (2008), 211-234.

[30] ———*Lipschitz and commutator estimates, a unified approach.* Ph.D Thesis, Flinders Univ.,SA,2007.

[31] Rayleigh, Lord. *The theory of sound. Vol. I* Macmillan and co. 1877.

[32] Reed M, Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics Vol 1: Functional Analysis.* Academic Press

[33] ——— *Methods of Modern Mathematical Physics Vol 2: Fourier Analysis , Self-adjointness.* Academic Press

[34] Schrödinger, E. *Collected papers on wave mechanics.* London and Glasgow 1928

[35] Strătilă, S., Zsidó, L. *Lectures on von Neumann algebras* Editura Academiei, Bucuresti, Romania and Abacus Press, Turnbridge Wells, Kent, England, 1979.

[36] Sz.Nagy, B *Perturbatios des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert* Math. Helv. 19, 347-36 (1946/47).

[37] Widom, H. *When are differentiable functions differentiable?* Linear and Complex Analysis Problem Book, Lectures Notes in Mathematics, 1043, pp. 184-188. Springer, Berlin-Heidelberg, 1984.

[38] Zhu, K. *Operator Theory in Function Spaces* Monographs and textbooks in pure and applied mathematics; 139