



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

El teorema de rigidez de Mostow

Javier E. Brude

Director: Román Sasyk

11/03/2016

*A Juan Carlos Luirette,
Los héroes no siempre aparecen en los libros.*

Agradecimientos

Quisiera agradecer a Román. Ojalá que su capacidad de trabajo y compromiso sea contagioso.

Fuera de lo académico, quiero agradecer particularmente a Namis. Sin ella, nada en este mundo tendría mayor sentido.

A mi tía Isabel por su apoyo incondicional.

Por último, creo que debo agradecer a todas las personas que frecuento. No por una mera formalidad hipócrita, sino porque tengo la esperanza que cada uno de ustedes me hayan convertido en una persona a la que sea posible querer.

Índice general

Índice general	v
1 Introducción	1
2 Preliminares	5
2.1. Espacios métricos geodésicos	5
2.2. Frontera ideal	10
2.3. El espacio hiperbólico \mathbb{H}^n	11
2.4. Lema de Morse	15
2.5. Transformaciones Moebius e Isometrías: algunas herramientas	20
2.6. Funciones η -cuasi simétricas y cuasi conformes.	33
2.7. Complejos simpliciales y celulares métricos	38
3 Demostración del teorema	43
3.1. Paso 1	43
3.2. Extensión η -cuasi simétrica	49
3.3. Paso 2	54
Bibliografía	59

Capítulo 1

Introducción

Uno de los objetivos de la matemática es la clasificación de elementos en un contexto dado. Por ejemplo, la clasificación de grupos salvo isomorfismo nos da una noción de igualdad en las operaciones que los definen; la clasificación de espacios topológicos salvo homeomorfismo nos permite conocer qué estructuras poseen la misma topología. Dada la dificultad que esto conlleva, es común utilizar métodos que aunque no permitan garantizar si dos elementos son equivalentes, logran detectar cuando no lo son. El ejemplo típico es la asociación del grupo fundamental a un espacio topológico. Es un hecho conocido que dos espacios topológicos que poseen distinto grupo fundamental no pueden ser homeomorfos. Sin embargo, un isomorfismo entre grupos fundamentales no garantiza un homeomorfismo entre los espacios subyacentes (un hecho remarcable es que ni siquiera lo garantiza un isomorfismo entre todos los grupos de homotopía superior). Surge entonces naturalmente la pregunta: ¿Existe algún contexto (lo más general posible) en donde el isomorfismo de grupos fundamentales implique automáticamente que los espacios sean homeomorfos?

El objetivo de esta tesis es demostrar el siguiente hecho que apunta en esa dirección:

Definición 1.1. Una variedad hiperbólica es un cociente \mathbb{H}^n/Γ con $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Una variedad se dice cerrada si es compacta y sin borde.

Teorema 1.2 (Teorema de rigidez de Mostow versión geométrica). Sean M_1, M_2 variedades hiperbólicas cerradas de dimensión mayor o igual a 3. Si $f : M_1 \rightarrow M_2$ es una equivalencia homotópica entonces f es homotópica a una isometría.

El revestimiento universal de una variedad hiperbólica es \mathbb{H}^n el cual es contráctil y, por lo tanto, todos los grupos de homotopía superiores son triviales. Así, como podemos representar a cualquier variedad hiperbólica cerrada como un CW-complejo (considerando a tal variedad como un poliedro compacto con caras identificadas), tenemos entonces la siguiente versión del teorema de Whitehead:

Teorema 1.3. Sean $M = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$, $N = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ y $f : M \rightarrow N$ variedades hiperbólicas cerradas. Si f induce un isomorfismo en los grupos fundamentales entonces f es una equivalencia homotópica.

Con un poco más de trabajo se puede construir una equivalencia homotópica a partir del isomorfismo de grupos fundamentales. Daremos un esbozo de la construcción, la demostración completa se puede ver en [2, pág. 123, teorema C.5.2]

Proposición 1.3.1. Si M y N son variedades hiperbólicas cerradas con grupos fundamentales isomorfos entonces M y N son homotópicamente equivalentes.

Demostración: (idea) Representemos M y N como CW-complejos y levantémoslos a \mathbb{H}^n . Sea ϕ el isomorfismo entre los grupos fundamentales de M y N . Construiremos una función $\tilde{f} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ tal que

$$\tilde{f} \circ \gamma = \phi(\gamma) \circ \tilde{f} \quad \forall \gamma \in \pi_1(M).$$

Esta función se define de manera inductiva en cada k -esqueleto. Podemos empezar mapeando los 0-esqueletos entre sí como $\tilde{f}(\gamma(v)) = \phi(\gamma) \circ \tilde{f} \quad \forall \gamma \in \Gamma_1 = \pi_1(M)$. Supongamos que \tilde{f} fue definida sobre el $(k-1)$ -esqueleto. Sea σ una k -celda en la primera presentación de \mathbb{H}^n como CW-complejo, con las funciones asociadas

$$h : \overline{D^k} \rightarrow \mathbb{H}^n \text{ tal que } h|_{D^k} : D^k \rightarrow \sigma \text{ es un homeomorfismo.}$$

Si $p_0 \in S^{k-1}$ es tal que $h(p_0)$ pertenece al 0-esqueleto entonces vamos a considerar la función

$$j : S^{k-1} \times [0, 1] \rightarrow \overline{D^k} \quad (p, t) \rightarrow (1-t)p_0 + tp;$$

y definamos

$$\tilde{f}(h(j(p, t))) = (1-t)\tilde{f}(h(p_0)) + t\tilde{f}(h(p))$$

Así definido, \tilde{f} induce $f : M_1 \rightarrow M_2$ por la ecuación $f(p_1(x)) = p_2(\tilde{f}(x))$ con p_1, p_2 las proyecciones de \mathbb{H}^n a M_1 y M_2 respectivamente. Además, se tiene que f es una equivalencia homotópica cuya inversa es la que surge de la misma construcción que \tilde{f} usando $\phi^{-1} : M_2 \rightarrow M_1$ en vez de ϕ . \square

El teorema de rigidez de Mostow cuenta además con una versión algebraica. Nuestro objetivo a lo largo de la tesis es probar una generalización del siguiente teorema:

Teorema 1.4 (Teorema de rigidez de Mostow versión algebraica). Sean $M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$, $M_2 = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ dos variedades hiperbólicas cerradas de dimensión mayor o igual a 3. Si $\rho : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ es un isomorfismo entonces M_1 es conjugado a M_2 . Más precisamente, existe $\alpha \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ tal que

$$\rho(\gamma) = \alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1}$$

Proposición 1.4.1. El teorema de Mostow 1.4 es equivalente al teorema de Mostow 1.2

Demostración: Supongamos válida la versión geométrica del teorema y veamos que vale la forma algebraica. Como $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$ entonces $\pi_1(M_1) \simeq \pi_1(M_2)$ y por lo tanto, M_1 es homotópicamente equivalente a M_2 por 1.3.1. La forma geométrica del teorema de Mostow nos garantiza que dada una equivalencia homotópica f , podemos encontrar una isometría $F : M_1 \rightarrow M_2$ que induce un isomorfismo entre Γ_1 y Γ_2 . Podemos entonces levantar F a una isometría $\tilde{F} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ con \tilde{F} equivariante respecto a las acciones que definen Γ_1 y Γ_2 en \mathbb{H}^n . Por lo tanto \tilde{F} conjuga Γ_1 en Γ_2 y cumple el rol de α en el enunciado.

Recíprocamente, supongamos válida la versión algebraica. Sean M_1, M_2 variedades hiperbólicas de dimensión mayor o igual a 3 y $f : M_1 \rightarrow M_2$ una equivalencia homotópica. Como f induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales, entonces existe una isometría \tilde{F} en $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ que hace a $\pi_1(M_1)$ conjugado de $\pi_1(M_2)$. Luego

$$\pi_1(M_1) = \tilde{F}\pi_1(M_2)\tilde{F}^{-1}$$

Así, \tilde{F} desciende a una isometría $F : M_1 \rightarrow M_2$ definida como

$$F([m]) = [\tilde{F}(m)].$$

F está bien definida: supongamos que $m = \gamma n$ para $\gamma \in \Gamma_1$. Entonces

$$F([m]) = F([\gamma n]) = [\tilde{F}(\gamma n)] = [\tilde{F}(\gamma)][\tilde{F}(n)] = [\tilde{F}(n)] = F([n]).$$

Como F induce el mismo isomorfismo entre grupos fundamentales que f , se tiene que f es homotópica a F . \square

Notar que este teorema asocia dos mundos aparentemente disímiles: las características geométricas de las variedades hiperbólicas cerradas de dimensión mayor o igual a tres quedan unívocamente determinadas por el estudio de los retículos uniformes de \mathbb{H}^n . Una reinterpretación útil es que en su versión geométrica, el teorema muestra que las variedades hiperbólicas de dimensión mayor o igual a 3 admiten a lo sumo una estructura hiperbólica. Cabe señalar que las hipótesis de curvatura negativa y dimensión mayor o igual a tres no se pueden mejorar. Un contraejemplo del primer hecho son los espacios Lens (por ejemplo $L(7, 1)$ y $L(7, 2)$) que son homotópicamente equivalentes pero no homeomorfos, ver [6, pág 391]. Por otro lado, para $g \geq 2$ y $n = 2$, se puede demostrar que existen espacios no homeomorfos de género g (ver por ejemplo [2, pág. 81, teorema B.4.23.]).

El teorema de rigidez de Mostow fue probado para variedades hiperbólicas cerradas en 1968 [11] y extendido a variedades hiperbólicas de dimensión mayor 3 por

Prasad en 1973 [13]. Marden demostró en 1974 que el hecho se podía extender a variedades hiperbólicas de dimensión 3 [8]. Además, en 1973, la publicación de Mostow [12] recopila estos resultados y generaliza el teorema para espacios localmente simétricos de curvatura negativa.

Posteriormente, en 1981 Gromov postuló una demostración alternativa utilizando la norma Gromov. Además, el teorema fue generalizado por Margulis para retículos irreducibles en grupos algebraicos reales de rango real al menos dos [9] [10] Por último, en 1995 Besson, Courtois y Gallot publicaron una demostración del teorema que especifica la isometría que se obtiene del resultado utilizando argumento ergódicos [1].

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Espacios métricos geodésicos

Definición 2.1. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto. Definimos el R -entorno como $B_R(A) = \{x \in X : d(x, A) \leq R\}$. Notar, como caso particular de la definición anterior, que si A es solo un punto, el conjunto $B_R(A)$ es la definición usual de bola en un espacio métrico.

Definición 2.2. Para dos subconjuntos $A_1, A_2 \subset X$, consideramos la distancia Hausdorff entre conjuntos

$$d_H(A_1, A_2) = \inf\{R \in \mathbb{R} : B_R A_1 \subset A_2 \text{ y } B_R A_2 \subset A_1\}$$

Recordemos que dados $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos, $f : X \rightarrow Y$ se dice L -Lipschitz si

$$d(f(a), f(b)) \leq Ld(a, b), \forall a, b \in X$$

Nuestro objetivo es relajar la noción de funciones L -Lipschitz y utilizar funciones que, aunque no distinguen qué pasa con puntos que se encuentren cercanos entre sí, mantengan la estructura general del espacio. Más precisamente, se tiene la siguiente

Definición 2.3. Dados $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos, una función $f : X \rightarrow Y$ se llama (L, A) -Lipschitz gruesa si

$$d'(f(a), f(b)) \leq Ld(a, b) + A$$

para todo $a, b \in X$. Además, f se llama un embebimiento (L, A) -cuasi-isométrico si

$$L^{-1}d(a, b) - A \leq d'(f(a), f(b)) \leq Ld(a, b) + A$$

Notar que como se ha mencionado antes, si bien un embebimiento cuasi-isométrico no es un embebimiento en el sentido usual, se tiene que si $d(a, b) \geq AL$, entonces

$$0 \leq L^{-1}d(a, b) - A \leq d'(f(a), f(b))$$

y por lo tanto $f(a) \neq f(b)$.

Observación 2.3.1. De la definición se deduce que si f es una función (L, A) -Lipschitz gruesa con $L < 1$ entonces f es $(1, A)$ -Lipschitz gruesa por lo que podemos asumir siempre $L \geq 1$.

Un embebimiento (L, A) -cuasi-isométrico se dice una (L, A) -cuasi-isometría si existe un embebimiento (L, A) -cuasi-isométrico $\bar{f} : Y \rightarrow X$ que verifique que

$$d(\bar{f}f(x), x) \leq A, \quad d'(\bar{f}f(y), y) \leq A$$

para todo $x \in X, y \in Y$

Como en la mayoría de los casos las constantes L y A no cumplen un rol especial, salvo que sean estrictamente necesarias, vamos a utilizar los términos "cuasi-isometría" y "embebimiento cuasi-isométrico" sin otras especificaciones.

Definición 2.4. Un espacio métrico (X, d) se dice geodésico si para cualquier par de puntos $x, y \in X$, existe una isometría

$$\sigma : [0, d(x, y)] \rightarrow X$$

con $\sigma(0) = x, \sigma(d(x, y)) = y$. Dicha isometría se llama geodésica.

Dado dos puntos $x, y \in X$, denotaremos $[x, y]$ a una geodésica que realiza la distancia entre x e y .

Toda variedad Riemanniana posee una métrica geodésica. Dado (X, d) un espacio métrico geodésico y $A \subset X$, el espacio $(X \setminus A, d)$, usando la métrica d restringida al espacio $X \setminus A$ no es en general geodésico. Esto motiva la siguiente definición. Recordemos antes que para una función $c : [a, b] \rightarrow X$ continua, c se dice rectificable si

$$\ell(c) = \sup \sum_i d((c_i, c_{i+1})) < \infty$$

donde el supremo está tomado sobre todas las particiones finitas del intervalo $[a, b]$.

Definición 2.5. Un espacio métrico (X, d) se dice métrico por caminos si dados $x, y \in X$,

$$d(x, y) = \inf \{ \ell(c) : c \text{ es un camino que une } x \text{ con } y \}$$

Definición 2.6. Un espacio métrico se dice propio si todo conjunto cerrado y acotado es compacto.

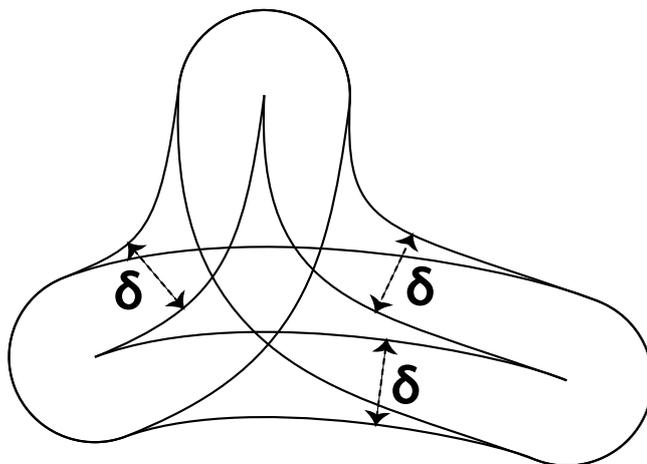


Figura 2.1: Triángulo hiperbólico Rips

Hiperbolicidad de Rips

Sea X un espacio métrico geodésico y sean a, b, c tres puntos distintos de X . Un triángulo de vértices a, b, c es la unión de geodésicas que unen el punto a con el punto b , el punto a con el punto c y el punto b con el punto c . Notar que en general las geodésicas que unen dos puntos no tienen por qué ser únicas, por lo que no basta con los puntos para describir un triángulo. Notaremos con $\{ABC\}$ a las geodésicas que forman un triángulo

Definición 2.7. Un triángulo geodésico Δ se dice δ -flaco si $A \subset B_\delta(B \cup C)$ con A, B, C los lados del triángulo. Notar que por definición esta propiedad se debe cumplir para cualquiera dos lados queelijamos. Ver figura 2.1. Llamaremos espacios métricos δ -hiperbólicos a los espacios con esta propiedad.

Definición 2.8. Un espacio se dice δ -hiperbólico si todo triángulo geodésico es δ -flaco. Los espacios δ -hiperbólicos se conocen como espacios hiperbólicos Rips.

Lema de Milnor-Schwartz

Sea G un grupo finitamente generado y S un sistema de generadores finito para G . Consideremos el grafo que tiene como vértice a los elementos de G y como aristas a los pares (g, h) tales que $gh^{-1} \in S$. Notemos $\mathcal{X}_{G,S}$ al grafo de Cayley de G con conjunto de generadores S . Además, podemos definir una métrica dist_S sobre $\mathcal{X}_{G,S}$ donde cada arista tiene longitud 1. La restricción de esta métrica a G se conoce como la "métrica de la palabra". Utilizaremos la notación $|x|_S$ para referirnos a $\text{dist}_S(x, 1)$ y $\text{dist}_S(g, h) = |gh^{-1}|_S$. Dados dos conjuntos de generadores S y S' , es

claro que $\mathcal{X}_{G,S}$ no tiene por qué ser isométrico a $\mathcal{X}_{G,S'}$. Sin embargo, el lema de Milnor-Schwartz y sus corolarios prueban que son cuasi isométricos.

Definición 2.9. Dado G un grupo actuando en un espacio métrico X , la acción se dice cocompacta si X/G es compacto.

Lema 2.9.1 (Lema de Milnor-Schwartz). Sea X un espacio métrico geodésico y propio y Γ un grupo. Supongamos que $\Gamma \curvearrowright X$ propiamente discontinua y cocompactamente por isometrías. Entonces Γ es finitamente generado. Más aún, si S es cualquier sistema de generadores finito de Γ y $x_0 \in X$ un punto base, la función $(\Gamma, d_S) \rightarrow (X, d)$ definida por la acción de Γ (más precisamente, $\Gamma \ni \gamma \rightarrow \gamma \cdot x_0$) es una cuasi isometría.

Demostración:

Denotemos \mathcal{O}_y a la órbita del elemento $y \in X$ y, dado un subconjunto $A \subset X$, se define $\mathcal{O}A = \bigcup_{a \in A} \mathcal{O}_a$. Como la acción es cocompacta, existe un compacto \mathcal{K} con $x_0 \in \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{O}\mathcal{K} = X$. Sea $R = \text{diam}(\mathcal{K})$. Para cada $y \in X$, existe $\gamma_y \in \Gamma$ tal que $y \in \gamma_y \mathcal{K}$ con $d(y, \gamma_y \cdot x_0) \leq R$ y, en consecuencia, la función $\gamma \rightarrow \gamma \cdot x_0$ es cuasi sobreyectiva.

Definamos

$$\mathcal{A} = \{\gamma \in \Gamma : d(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq 4R\}$$

y veamos que \mathcal{A} es finito. Si no fuera así, $\mathcal{A} \cdot \{x_0\}$ sería un subconjunto infinito de $\overline{B}(x_0, 4R)$ y como $\overline{B}(x_0, 4R)$ es compacto debido a que X es propio, poseería un punto de acumulación. Por lo tanto, el conjunto

$$M = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \neq 1, \gamma \overline{B} \cap \overline{B} \neq \emptyset\}$$

sería infinito, contradiciendo el hecho que Γ actúa de manera propiamente discontinua sobre X .

Veamos ahora que \mathcal{A} genera Γ . Sea $H \leq \Gamma$ el subgrupo generado por \mathcal{A} . Sea \mathcal{U} un entorno abierto de \mathcal{K} de diámetro menor o igual a $2R$. Sea además $\mathcal{V} = H\mathcal{U}$, $\mathcal{V}' = (\Gamma \setminus H)\mathcal{U}$. Notar que $X = \mathcal{V} \cup \mathcal{V}'$. Supongamos ahora que $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' \neq \emptyset$, por lo que deben existir $x \in X, h \in H, h' \notin H$ tales que $d(x, h \cdot x_0) \leq 2R$ y $d(x, h' \cdot x_0) \leq 2R$. Como la acción es por isometrías,

$$d(x_0, h^{-1}h' \cdot x_0) = d(h \cdot x_0, h' \cdot x_0) \leq d(h \cdot x_0, x) + d(x, h' \cdot x_0) \leq 4R$$

por lo que $h^{-1}h' \in H$ y, por lo tanto, $h' \in H$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \emptyset$. Como \mathcal{V} y \mathcal{V}' son abiertos, \mathcal{V} es no vacío y $\mathcal{V} \cup \mathcal{V}' = X$, entonces $\mathcal{V}' = \emptyset$ y $\mathcal{V} = X$.

Denotemos $d_{\mathcal{A}}$ la métrica de la palabra asociada al par (Γ, \mathcal{A}) y sea

$$\lambda = \max\{d(x_0, \gamma \cdot x_0), \gamma \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}\}.$$

Si $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ tales que $d_{\mathcal{A}}(\gamma, \gamma') = n$, entonces $\gamma^{-1}\gamma' = a_1 a_2 \dots a_n$ con $a_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$. Sea $\gamma_0 = 1$ y $\gamma_i = a_1 \dots a_i$ para $i = 1, \dots, n$. Como Γ actúa por isometrías y $\gamma_{i-1}^{-1}\gamma_i = a_i$, entonces

$$d(\gamma \cdot x_0, \gamma' \cdot x_0) = d(x_0, \gamma^{-1}\gamma' \cdot x_0) = d(x_0, a_1 a_2 \dots a_n x_0) \leq \sum_{i=1}^n d(x_0, a_i \cdot x_0) \leq \lambda d_{\mathcal{A}}(\gamma, \gamma')$$

Sea $c : [0, 1] \rightarrow X$ un segmento geodésico entre $\gamma \cdot x_0$ y $\gamma' \cdot x_0$. Sea $D = d(\gamma \cdot x_0, \gamma' \cdot x_0)$. Sea $N = \lfloor D/R \rfloor$ la parte entera inferior. Particionemos $c([0, 1])$ en segmentos geodésicos de longitud menor a R de tal manera que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$ y $d(c(t_{i-1}), c(t_i)) \leq R$. Como $\gamma \rightarrow \gamma \cdot x_0$ es cuasi sobreyectivo, para cada $i = 0, \dots, N$, existe algún $\gamma_i \in \Gamma$ tal que $d(\gamma_i \cdot x_0, c(t_i)) \leq R$ y como

$$d(\gamma_i \cdot x_0, \gamma_{i+1} \cdot x_0) \leq d(\gamma_i \cdot x_0, c(t_i)) + d(c(t_i), c(t_{i+1})) + d(c(t_{i+1}), \gamma_{i+1} \cdot x_0) \leq 3R$$

Se sigue que $\gamma_i^{-1}\gamma_{i+1} \in \mathcal{A}$ y como podemos escribir

$$\gamma^{-1}\gamma' = (\gamma_0^{-1}\gamma_1)(\gamma_1^{-1}\gamma_2) \dots (\gamma_{N-1}^{-1}\gamma_N),$$

podemos deducir de la definición de la métrica de la palabra que $d_{\mathcal{A}}(\gamma, \gamma') \leq N \leq \frac{1}{R}d(\gamma \cdot x_0, \gamma' \cdot x_0)$ y, por lo tanto, $\gamma \rightarrow \gamma \cdot x_0$ es un embebimiento cuasi isométrico. \square

Corolario 2.9.1. (1) Sea Γ un grupo, H un subgrupo de índice finito en Γ , entonces H es finitamente generado y cuasi isométrico a Γ .

(2) Sea N un subgrupo de Γ finito y normal, entonces Γ y Γ/N son cuasi isométricos.

Demostración:

(1) Sea X el grafo de Cayley de Γ . $H \curvearrowright X$ restringiendo la acción natural de Γ . Por el lema de Milnor-Schwartz (2.9.1), H es finitamente generado y cuasi isométrico a X . Como Γ es también cuasi isométrico a X , entonces H es cuasi isométrico a Γ .

(2) Hacemos actuar a Γ en el grafo de Cayley de Γ/N . Nuevamente por 2.9.1, Γ es cuasi isométrico a Γ/N . \square

Proposición 2.9.1. Sea $(X, d_1), (X, d_2)$ espacios métricos propios y geodésicos. Dado $\Gamma \curvearrowright X$ de manera cocompacta y propiamente discontinua con respecto a ambas métricas. Entonces

$$id : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$$

es una cuasi isometría.

Demostración: Por 2.9.1, Γ es finitamente generado. Elijamos un conjunto de generadores y definimos la métrica d_G sobre G . Además, sea $x_0 \in X$ y

$$\begin{aligned} f_i : (G, d_G) &\rightarrow (X, d_i) \\ f_i(g) &= g \cdot x_0 \end{aligned}$$

son cuasi isometrías. Llamemos \bar{f}_i a sus cuasi inversas. Luego, la función

$$id : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$$

es la composición de la cuasi isometría $f_2 \circ \bar{f}_1$ □

Corolario 2.9.2. Todo grupo finitamente generado dotado con la métrica de la palabra es cuasi isométrico a su grafo de Cayley, independientemente del conjunto de finitos generadores elegido.

2.2. Frontera ideal

Definición 2.10. Sea X un espacio métrico geodésico. Dos rayos geodésicos $\sigma_1, \sigma_2 : [0, \infty) \rightarrow X$ en X se dicen asintóticos si la distancia Hausdorff entre ellos es finita o, equivalentemente, si $t \rightarrow d(\sigma_1(t), \sigma_2(t))$ es acotada en $[0, \infty]$.

Es claro que ser asintótico es una relación de equivalencia en el conjunto de rayos geodésicos en X .

Definición 2.11. La frontera ideal de un espacio métrico X es la colección de clases de equivalencias de rayos geodésicos. La denotaremos por $\partial_\infty X$.

A un elemento $\xi \in \partial_\infty X$ lo llamaremos punto ideal o punto en el infinito de X . Para decir que un rayo geodésico σ pertenece a la clase de equivalencia de ξ , usaremos la igualdad $\sigma(\infty) = \xi$.

El espacio de rayos geodésicos en X es un espacio topológico de manera natural via la topología compacto-abierto. Consideraremos entonces en $\partial_\infty X$ la topología cociente. Notaremos a esta topología τ

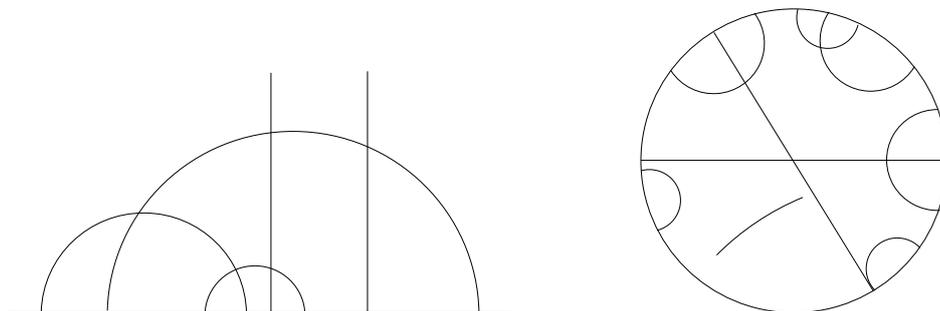


Figura 2.2: En la figura de la izquierda se muestran geodésicas en el modelo del semiplano superior de \mathbb{H}^2 . A la derecha, algunas geodésicas en el modelo de Poincaré.

Para ilustrar el comportamiento de la frontera ideal, daremos el siguiente resultado que será útil más adelante.

Proposición 2.11.1. Sea $g : X \rightarrow X$ una isometría, entonces g induce un homeomorfismo $g_\infty : \partial_\infty X \rightarrow \partial_\infty X$

Demostración: Dado ξ un rayo geodésico definamos $g_\infty([\xi]) = [g(\xi)]$. Esta función está bien definida dado que si $[\xi] = [\psi]$, se tiene que $d(\xi, \psi) = d(g(\xi), g(\psi))$ y por lo tanto $[g(\psi)] = [g(\xi)]$. La biyectividad de g asegura la de g_∞ por lo que basta ver que g_∞ es abierta, más aún, dado que estamos usando la topología cociente y g_∞ es una función biyectiva, bastará ver que mapea abiertos subbásicos en abiertos. Sea $V(K, U)$ un abierto subbásico de la topología compacto-abierta en los rayos geodésicos. Podemos asumir $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Notar que la clase de un rayo geodésico en $\partial_\infty X$ no depende de su parametrización, por lo que la clase del abierto $V(K, U)$, que llamaremos $[V(K, U)]$ en la topología cociente τ solo depende del abierto U elegido. Se tiene entonces que

$$g_\infty([V(K, U)]) = [V, g(U)]$$

que es un abierto de τ □

2.3. El espacio hiperbólico \mathbb{H}^n

En esta sección, recordaremos brevemente los modelos hiperbólicos y algunos resultados generales acerca de la clasificación de isometrías de \mathbb{H}^n .

El modelo del semiplano Sea $\mathcal{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Llamemos \mathbb{H}^n al espacio \mathcal{H}^n con la métrica Riemmaniana.

$$ds^2 = \frac{1}{x_n^2} \sum_{i=1}^n dx_i^2$$

En este modelo, las geodésicas son segmentos de rectas o círculos ortogonales al hiperplano $F = \{(x_1, \dots, x_n : x_n = 0)\}$. Una esfera en este modelo queda representado por los hiperplanos paralelos a F (Ver figura 2.2)

El modelo de Poincaré

Sea $B^n = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Equiparemos a B^n con la siguiente métrica Riemanniana:

$$ds^2 = 4 \frac{\sum_{i=1}^n dx_i^2}{\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2}$$

Para este modelo, las geodésicas son arcos circulares o rectas ortogonales a la frontera de B^n . (Ver figura 2.2)

Observación 2.11.1. Los modelos arriba descriptos son isométricos.

Mencionaremos a continuación algunas propiedades trigonométricas de \mathbb{H}^n . Las demostraciones de estos hechos pueden encontrarse en [3, cap. 7, pags. 142-151].

1. Los ángulos interiores α, β y γ de un triángulo geodésico tienen área $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.
2. El volúmen de una bola de radio R en \mathbb{H}^2 es $2\pi(\cosh(R) - 1)$.
3. para cada par de puntos $x, y \in \mathbb{H}^n$ distintos, existe un único segmento geodésico que los une. Análogamente, si $x \in \mathbb{H}^n, y \in \partial\mathbb{H}^n$, existe un único rayo geodésico $\beta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$ con $\beta(0) = x$ y $\beta(\infty) = y$.

Proposición 2.11.2. \mathbb{H}^n es 2-flaco.

Demostración: La construcción se basa en 2.3. Como los triángulos geodésicos en \mathbb{H}^n pertenecen a una copia de \mathbb{H}^2 , es suficiente con probar el caso $n = 2$. Como el área de los triángulos hiperbólicos es menor o igual a π y el área de un disco de radio r es $2\pi(\cosh(r) - 1)$, cualquier círculo inscripto en un triángulo hiperbólico debe tener área menor que π y por lo tanto su radio debe ser menor a $\cosh^{-1}(3/2) < 1$.

Dado un punto x en el triángulo hiperbólico, construyamos un círculo S de radio 1 tangente al triángulo x . Este círculo interseca otro lado del triángulo en algún y . Como ambos x e y pertenecen al círculo de radio 1, se sigue que $d(x, y) \leq 2 = \text{diam}(S)$.

□

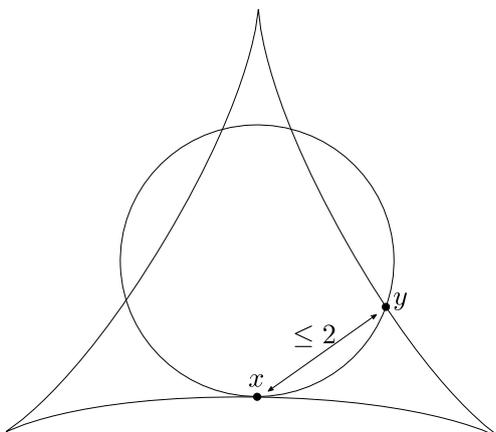
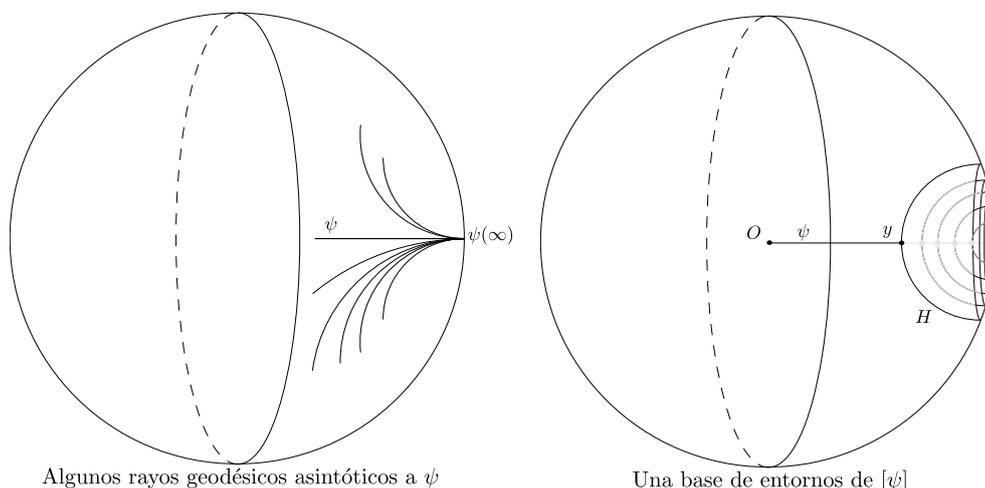


Figura 2.3: Los triángulos hiperbólicos son 2-flacos



Algunos rayos geodésicos asintóticos a ψ

Una base de entornos de $[\psi]$

Figura 2.4

La frontera ideal en \mathbb{H}^n

Daremos ahora una descripción más precisa de la frontera ideal $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ y de su topología.

Usando el modelo de Poincaré de \mathbb{H}^n , cualquier rayo geodésico posee un "punto final" bien definido. Si $\psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$ es un rayo geodésico, entonces su punto final será $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t)$, donde el límite se tomará con la topología usual de la bola unidad. Finalmente, dado un punto base $O \in \mathbb{H}^n$, para cada elemento en la frontera ideal, existe un único representante que pasa por O . Este representante puede identificarse con un vector de norma 1 sobre $T_O \mathbb{H}^n$, el tangente de \mathbb{H}^n en el punto O . Así, podemos identificar $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ con $UT_O \mathbb{H}^n$, la esfera unitaria en $T_O \mathbb{H}^n$. De esta manera, podemos pensar en $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ como la esfera S^{n-1} .

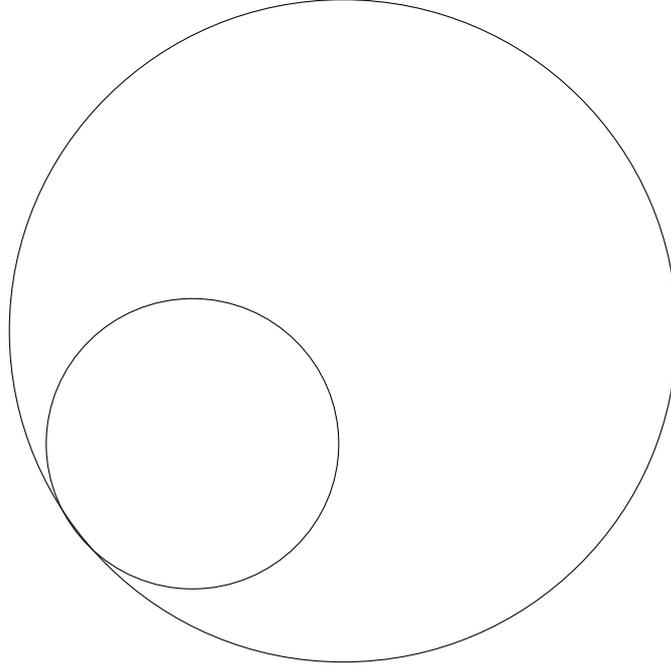


Figura 2.5: Una horoesfera en el modelo de Poincaré de \mathbb{H}^2

Definición 2.12. Consideremos \mathbb{H}^n con el modelo de Poincaré. Llamamos horoesfera con punto base $\psi \in S^{n-1}$ a la intersección de una esfera euclídea contenida en \mathbb{H}^n , tangente al punto ψ (ver figura 2.5). Se llama horobola a los puntos interiores de una horoesfera.

La topología de $\overline{\mathbb{H}^n}$.

En el modelo de Poincaré, la topología de $B \cup \partial B$ es simplemente la topología Euclídea usual. Queremos sin embargo dar una descripción intrínseca de la topología de $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ de manera que $\overline{\mathbb{H}^n} := \mathbb{H}^n \cup \partial_\infty \mathbb{H}^n$ sea un espacio topológico compacto.

Para ello, daremos una descripción específica de una base para la topología. Dado cualquier punto $[\psi]$ (con $\psi : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{H}^n$ un rayo geodésico) y algún punto $y \in \psi$, definamos H como el hiperplano ortogonal de ψ que pasa por el punto y . Sea Q_y^ψ la componente de $\overline{\mathbb{H}^n} \setminus H$ que contiene al punto $[\psi] \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$. Luego el conjunto $\{Q_y^\psi\}_{y \in \psi}$ forman una base de entornos $[\psi]$. Aunque la elección de distintos representantes en cada clase de equivalencia de distintas bases, todas generan la misma topología sobre $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ lo que vuelve a esta construcción independiente de la elección hecha.

A continuación enunciaremos un buen resultado de estos espacios que necesitaremos luego. Omitiremos la demostración por requerir un desarrollo extenso de

trigonometría hiperbólica que nos desviaría del objeto de esta tesis.

Proposición 2.12.1 (Las cuasi isometrías conmutan con las proyecciones). Existe una constante $C = C(L, A, \delta)$ tal que el siguiente resultado se cumple. Sean X, X' espacios métricos geodésicos δ -hiperbólicos y propios y sea $f : X \rightarrow X'$ una (L, A) -cuasi isometría. Sea α una geodésica (finita o infinita) en X y sea $\beta \subset X'$ una geodésica cuya distancia a $f(\sigma)$ esté acotada por $D(L, A, \delta)$. Entonces la función f "casi conmuta" con las funciones que proyectan al punto más cercano π_α, π_β . Más precisamente, se tiene que

$$d(f\pi_\alpha(x), \pi_\beta f(x)) \leq C, \quad x \in X.$$

2.4. Lema de Morse

Definición 2.13. Si X es un espacio métrico, $c : [a, b] \rightarrow X$ se dice una (L, A) -cuasi geodésica si c es un embebimiento (L, A) -cuasi isométrico.

Observación 2.13.1. Las cuasi isometrías mandan geodésicas y cuasi geodésicas en cuasi geodésicas

Una pregunta fundamental que debemos hacernos es si la clase de geodésicas se conserva por cuasi isometrías. Más aún, dado $\psi \in \partial_\infty X$, σ un rayo geodésico asintótico a ψ y f una cuasi isometría, es esperable que, aunque $f(\sigma)$ no fuera un rayo geodésico, exista un rayo geodésico asintótico a $f(\sigma)$ a distancia Hausdorff finita. Esto es lo que garantiza el lema de Morse:

Lema 2.13.1 (Lema de Morse). Si X es un espacio δ -hiperbólico, existe una constante $R = R(\delta, L, A)$ tal que para cualquier (L, A) -cuasi geodésica $\sigma : [a, b] \rightarrow X$, se tiene que

$$d_{Haus}(\sigma([a, b]), [\sigma(a), \sigma(b)]) \leq R$$

Antes de demostrar este hecho, necesitamos varios resultados preliminares:

Lema 2.13.2. Sea X un espacio δ -hiperbólico y $\sigma : [a, b] \rightarrow X$ un camino en X . Entonces para $x \in [\sigma(a), \sigma(b)]$, se tiene que

$$d(x, \sigma([a, b])) \leq \delta |\log_2(\ell(\sigma))| + 1$$

Demostración: Si $\ell(\sigma) \leq 1 = 2^0$, entonces $d(\sigma(a), \sigma(b)) \leq 1$ y entonces

$$d(x, \sigma([a, b])) \leq d(x, \sigma(a)) \leq 1 \leq \delta |\log_2(\ell(\sigma))| + 1$$

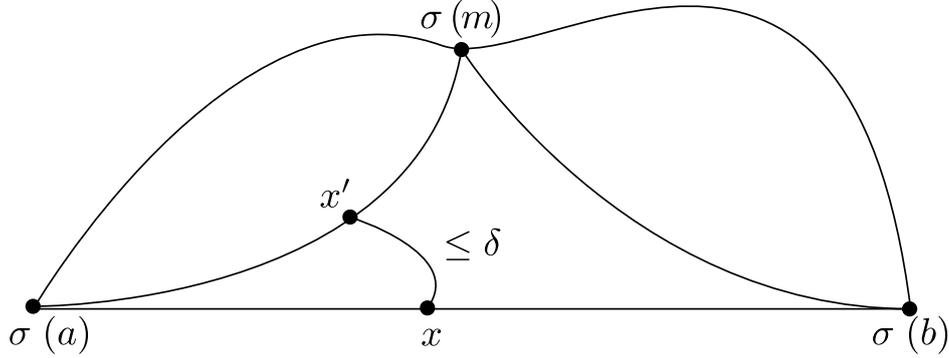


Figura 2.6: El paso inductivo del lema 2.13.2

Usaremos ahora un argumento inductivo: supongamos el enunciado válido para cualquier camino σ' con $\ell(\sigma') \leq 2^N$. Sea σ un camino con $\ell(\sigma) \leq 2^{N+1}$ y sea $m \in [a, b]$ tal que $\ell(\sigma(a, m)) = \ell(\sigma(m, b))$. Consideremos el triángulo de vértices $\sigma(a)$, $\sigma(b)$ y $\sigma(m)$. Luego existe x' o bien en la geodésica $[\sigma(a), \sigma(m)]$ o bien en la geodésica $[\sigma(m), \sigma(b)]$ de manera que $d(x, x') \leq \delta$ (ver figura 2.6). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que x' se encuentra en la primera geodésica y sea σ' la restricción de σ a $[a, m]$. Como $\ell(\sigma') = \ell(\sigma)/2 \leq 2^N$ y $x' \in [a, m]$, por hipótesis inductiva se tiene que

$$d(x', \sigma'([a, m])) \leq \delta |\log_2(\ell(\sigma'))| + 1$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} d(x, \sigma([a, b])) &\leq d(x, x') + d(x', \sigma([a, b])) \\ &\leq d(x, x') + d(x', \sigma'([a, m])) \\ &\leq \delta + (\delta |\log_2(\ell(\sigma'))| + 1) \\ &= \delta |\log_2(2\ell(\sigma'))| + 1 \\ &= \delta |\log_2(\ell(\sigma))| + 1 \end{aligned}$$

□

Lema 2.13.3 (Doma de cuasi geodésicas). Sea X un espacio métrico geodésico. Dada una (L, A) -cuasi geodésica $\sigma : [a, b] \rightarrow X$, existe una (L, A') -cuasi geodésica continua $\sigma' : [a, b] \rightarrow X$ tal que:

1. $\sigma'(a) = \sigma(a)$ y $\sigma'(b) = \sigma(b)$;
2. $A' = 2(L + A)$;

3. $\ell(\sigma'|_{[t,t']}) \leq k_1 d(\sigma'(t), \sigma'(t')) + k_2$, para todo $t, t' \in [a, b]$, con $k_1 = L(L + A)$ y $k_2 = (LA' + 3)(L + A)$

4. La distancia Hausdorff entre las imágenes de σ y σ' es menor o igual a $L + A$

Demostración: Definamos σ' a partir de σ sobre $\Sigma = \{a, b\} \cup (\mathbb{Z} \cap (a, b))$. Elijamos geodésicas que unan las imágenes sucesivas de los puntos de Σ y definamos σ' como la reparametrización de la concatenación de estas geodésicas. Dado que los nodos considerados están a distancia menor o igual a uno, cada segmento geodésico tiene longitud acotada por $L + A$ y cada punto de $Im(\sigma) \cup Im(\sigma')$ pertenece a un entorno de diámetro $(L + A)/2$ de $\sigma(\Sigma)$, con lo que se demuestra (4).

Denotemos con $[t]$ el punto de Σ más cercano a $t \in [a, b]$. Dado que σ es una (L, A) -cuasi geodésica (recordemos que podemos considerar $L \geq 1$) y $\sigma([t]) = \sigma'([t])$ para $t \in [a, b]$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(\sigma'(t), \sigma'(t')) &\leq d(\sigma'(t), \sigma'([t])) + d(\sigma'([t]), \sigma'([t'])) + d(\sigma'([t']), \sigma'(t')) \\ &\leq d(\sigma'([t]), \sigma'([t'])) + 2 \left(\frac{L + A}{2} \right) \\ &\leq L|[t] - [t']| + A + (L + A) \\ &\leq L(|t - t'| + 1) + (L + 2A) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{L}|t - t'| - 2(L + A) &\leq \frac{1}{L}(|t - t'| - 1) - (L + 2A) \\ &\leq \frac{1}{L}|[t] - [t']| - (L + 2A) \\ &\leq d(\sigma'([t]), \sigma'([t'])) - (L + A) \\ &\leq d(\sigma'([t]), \sigma'(t)) + d(\sigma'(t), \sigma'(t')) + d(\sigma'(t'), \sigma'([t'])) - (L + A) \\ &\leq d(\sigma'(t'), \sigma'(t)) \end{aligned}$$

Esto prueba que σ' es una (L, A') -cuasi geodesica con A' como en (2).

Para cualquier para de enteros $n, m \in [a, b]$,

$$\ell(\sigma'|_{[n,m]}) = \sum_{i=n}^{m-1} d(\sigma(i), \sigma(i+1)) \leq (L + A)|m - n|$$

y, de manera similar

$$\ell(\sigma'|_{[a,m]}) \leq (L + A)(m - a + 1) \text{ y } \ell(\sigma'|_{[n,b]}) \leq (L + A)(b - n + 1).$$

Así, para todo $t, t' \in [a, b]$ tenemos que:

$$\ell(\sigma'|_{[t,t']}) \leq (L + A)(|[t] - [t']| + 2)$$

y

$$d(\sigma'(t), \sigma'(t')) \geq \frac{1}{L}|t - t'| - A' \geq \frac{1}{L}|[t] - [t'] - 1| - A'.$$

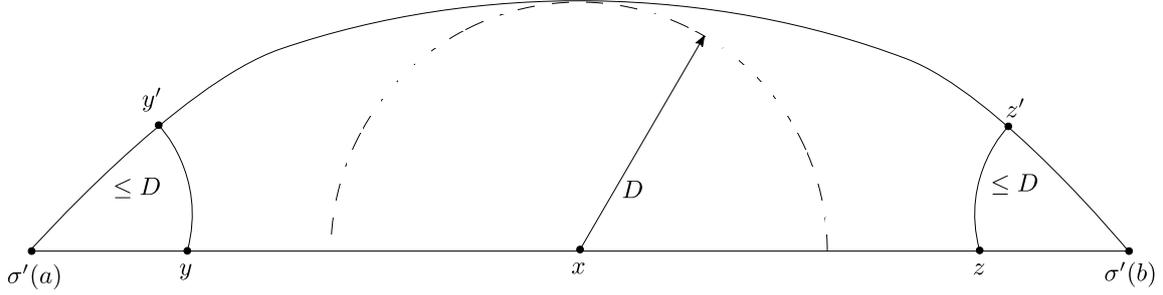


Figura 2.7: Las cuasi geodésicas se encuentran cerca de las geodésicas

Combinando estas últimas cuentas, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\ell(\sigma'|_{[t,t']})}{L+A} - 2 &\leq |[t] - [t']| \\
 &\leq \frac{\ell(\sigma'|_{[t,t']})}{L+A} - 3 \leq |[t] - [t']| - 1 \leq |[t] - [t'] - 1| \\
 &\leq \frac{1}{L} \left(\frac{\ell(\sigma'|_{[t,t']})}{L+A} - 3 \right) - A' \leq \frac{1}{L} |[t] - [t'] - 1| - A' \leq d(\sigma'(t), \sigma'(t'))
 \end{aligned}$$

Y reordenando,

$$\ell(\sigma'|_{[t,t']}) \leq L(L+A)d(\sigma'(t), \sigma'(t')) + LA'(L+A) + 3(L+A)$$

□

Demostración del Lema de Morse 2.13.1: Reemplacemos primero a la (L, A) -cuasi geodésica σ por una (L, A') -cuasi geodésica σ' como en 2.13.3.

Como $[\sigma'(a), \sigma'(b)]$ es compacto, existe $x \in [\sigma'(a), \sigma'(b)]$ tal que

$$d(x, \sigma'[a, b]) = \max_{y \in [\sigma'(a), \sigma'(b)]} d(y, \sigma'([a, b])) := D$$

Sean $y \in [\sigma'(a), x]$, $z \in [x, \sigma'(b)]$ tales que

$$D \leq d(y, [x, \sigma'(b)]) \leq 2D \text{ y } D \leq d(z, [\sigma'(a), x]) \leq 2D$$

Sea además $y' = \sigma'(a')$, $z' = \sigma'(b')$ los puntos en $\sigma'([a, b])$ más cercanos a y y z respectivamente. Notemos que $d(y, y') \leq D$ y $d(z, z') \leq D$ por la definición de D . (ver Figura 2.7)

Sea c un camino que une y con z , recorre el segmento geodésico $[y, y']$, sigue σ' desde y' hasta z' y por último recorre el segmento geodésico $[z', z]$. Aplicando el lema 2.13.3,

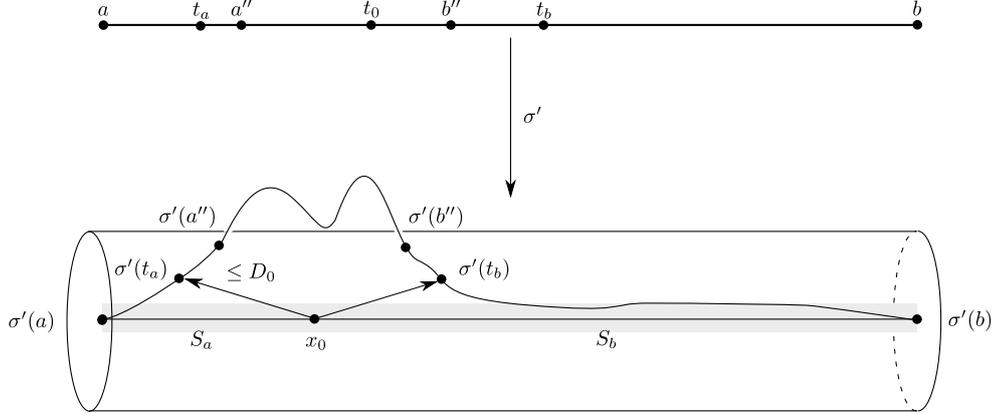


Figura 2.8: Las imágenes de geodésicas vía cuasi isoemetrías están cerca de geodésicas

$$\begin{aligned}
 \ell(c) = d(y, y') + d(z, z') + \ell(\sigma'|_{[a', b']}) &\leq D + D + k_1 d(y', z') + k_2 \\
 &\leq 2D + k_1 (d(y, y') + d(y, z) + d(z, z')) + k_2 \\
 &\leq 2D + 6k_1 D + k_2
 \end{aligned}$$

Y así, por el lema 2.13.2,

$$D = d(x, c([a, b])) \leq \delta |\log_2(2D + 6k_1 D + k_2)| + 1$$

Como k_1 y k_2 solo dependen de L y A , esto nos da una cota superior para D en términos de L, A, δ la cual llamaremos D_0 . Observar que

$$[\sigma'(a), \sigma'(b)] \subset B_{D_0}(\sigma([a, b])).$$

Para lo que queda de la demostración, seguiremos la figura 2.8. Resta probar que la distancia Hausdorff está uniformemente acotada. Más precisamente, debemos hallar $R = R(\delta, L, A)$ tal que $\sigma'([a, b]) \subset B_R([\sigma'(a), \sigma'(b)])$. Si $\sigma'([a, b]) \subset B_{D_0}([\sigma'(a), \sigma'(b)])$, basta elegir $R = D_0$ para completar la demostración. Asumamos entonces que esto no ocurre.

Sea $[a'', b'']$ maximal respecto a que $\sigma'([a'', b''])$ esté contenido en el complemento del entorno $B_{D_0}([\sigma'(a), \sigma'(b)])$. Definamos

$$\begin{aligned}
 S_a &= \{x \in [\sigma'(a), \sigma'(b)] : d(x, \sigma'([a, a'']) \leq D_0\} \\
 S_b &= \{x \in [\sigma'(a), \sigma'(b)] : d(x, \sigma'([b'', b]) \leq D_0\}
 \end{aligned}$$

Estos conjuntos son no vacíos y cubren $[\sigma'(a), \sigma'(b)]$. Como son no disjuntos, elijamos $x_0 \in S_a \cap S_b$, $t_a \in [a, a'']$ y $t_b \in [b'', b]$ tales que $d(x_0, \sigma'(t_a)) \leq D_0$ y $d(x_0, \sigma'(t_b)) \leq D_0$. Usando desigualdad triangular, $d(\sigma'(t_a), \sigma'(t_b)) \leq 2D_0$ y $d(t_a, t_b) \leq L2D_0 + LA'$.

Tomando $t_0 \in [a'', b'']$ arbitrario,

$$\begin{aligned}
d(\sigma'(t_0), [\sigma'(a), \sigma'(b)]) &\leq d(\sigma'(t_0), \sigma'(t_a)) + d(\sigma'(t_a), [\sigma'(a), \sigma'(b)]) \\
&\leq Ld(t_0, t_a) + A' + D_0 \\
&\leq Ld(t_a, t_b) + A' + D_0 \\
&\leq 2L^2D_0 + L^2A' + A' + D_0 := R'
\end{aligned}$$

Como A' solo depende de L y de A y D_0 solo depende de L, A, δ , obtuvimos la constante que buscábamos.

Como σ y σ' coinciden en los extremos, entonces $[\sigma(a), \sigma(b)] = [\sigma'(a), \sigma'(b)]$. Más aún, como la distancia Hausdorff entre $\sigma([a, b])$ y $\sigma'([a, b])$ es menor o igual a $L + A$, entonces

$$\begin{aligned}
d_H([\sigma(a), \sigma(b)], \sigma([a, b])) &\leq d_H([\sigma'(a), \sigma'(b)], \sigma'([a, b])) + d_H(\sigma'([a, b]), \sigma([a, b])) \\
&\leq R' + L + A
\end{aligned}$$

Tomando $R = R' + L + A$ el resultado queda probado. \square

La aproximación sucesiva por geodésicas extiende el lema de Morse a los rayos geodésicos. Más precisamente, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 2.13.1 (Lema de Morse extendido). Sea X un espacio δ -hiperbólico propio y geodésico. Sea ρ un rayo (L, A) -cuasi geodésica o una geodésica completa en X . Entonces existe ρ' rayo geodésico o geodésica completa (dependiendo de qué fuera ρ) tal que

$$d_H(\text{Im}(\rho), \text{Im}(\rho')) \leq R(\delta, L, A).$$

2.5. Transformaciones Moebius e Isometrías: algunas herramientas

Transformaciones de Moebius

Definición 2.14. Sea $S(a, r) \subset \mathbb{R}^n$ la esfera $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$ donde $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. La reflexión (o inversión) en $S(a, r)$ es la función ϕ definida por

$$\phi = a + \left(\frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a)$$

Como caso especial de $S(0, 1)$, este caso se reduce a

$$J(x) = x/|x|^2$$

La reflexión en $S(a, r)$ no está definida cuando $x = a$, por eso es necesario utilizar la compactificación a un punto, $\hat{\mathbb{R}}^n := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

Como $|\phi(x)| \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a$ es natural definir $\phi(a) = \infty$. De la misma manera, definiremos $\phi(\infty) = a$. La reflexión ϕ ahora está definida sobre $\hat{\mathbb{R}}^n = S^n$.

Definición 2.15. Una transformación de Moebius es una composición finita de reflexiones sobre esferas o planos. Donde una reflexión sobre un plano se define de la manera usual.

Bajo la identificación de \mathbb{R}^{n-1} con $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ en \mathbb{R}^n , un punto x de \mathbb{R}^{n-1} corresponde a un punto $\tilde{x} = (x, 0)$ en \mathbb{R}^n . Sea ϕ una transformación de Moebius de $\hat{\mathbb{R}}^{n-1}$. Nuestro objetivo es extender ϕ a una transformación $\bar{\phi}$ de $\hat{\mathbb{R}}^n$. Si ϕ es una reflexión de $\hat{\mathbb{R}}^{n-1}$ en $\hat{P}(a, t)$, con $P(a, t)$ el hiperplano con vector normal a y punto de paso $ta/||a||^2$ y $\hat{P}(a, t) = P(a, t) \cup \{\infty\}$, entonces nuestra extensión $\bar{\phi}$ será una reflexión en $\hat{P}(\bar{a}, t)$. Análogamente, si ϕ es una reflexión de $\hat{\mathbb{R}}^{n-1}$ en $S(a, r)$, la esfera de centro a y radio r , luego $\bar{\phi}$ será la reflexión de $\hat{\mathbb{R}}^n$ en $S(\bar{a}, r)$. En ambos casos se tiene que $\bar{\phi}(x, 0) = (\phi(x), 0)$ para todo x en \mathbb{R}^{n-1} . De esta manera, $\bar{\phi}$ extiende a ϕ . En particular $\bar{\phi}$ deja a $\hat{\mathbb{R}}^{n-1}$ invariante. También es claro que $\bar{\phi}$ deja invariante el semiplano superior de \mathbb{R}^n .

Asumamos ahora que ϕ es una transformación de Moebius de $\hat{\mathbb{R}}^{n-1}$ arbitraria. Luego $\bar{\phi}$ es una composición $\bar{\phi} = \bar{\sigma}_1 \cdots \bar{\sigma}_m$ de reflexiones. Sea $\bar{\phi} = \bar{\sigma}_1 \cdots \bar{\sigma}_m$. Luego $\bar{\phi}$ extiende a ϕ y deja invariante el semiplano superior. Supongamos que $\bar{\phi}_1$ y $\bar{\phi}_2$ son dos extensiones de ϕ . Entonces $\bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2^{-1}$ fija el semiplano superior y $\hat{\mathbb{R}}^{n-1}$ y, por lo tanto, $\bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2^{-1} = \text{Id}$. Así, $\bar{\phi}$ depende solo de ϕ y no de la descomposición $\bar{\phi} = \bar{\sigma}_1 \cdots \bar{\sigma}_m$. La función $\bar{\phi}$ se llama la extensión de Poincaré de ϕ .

Teorema 2.16. Una transformación de Moebius ϕ de $\hat{\mathbb{R}}^n$ deja el semiplano superior invariante si y solo si ϕ es la extensión de Poincaré de una transformación de Moebius de $\hat{\mathbb{R}}^{n-1}$.

Demostración: Sea ϕ una transformación de Moebius de $\hat{\mathbb{R}}^n$ que deja fijo el semiplano superior. Como ϕ es un homeomorfismo, también debe dejar fijo el borde de dicho semiplano. De esta manera, ϕ se restringe a un homeomorfismo ψ de $\hat{\mathbb{R}}^{n-1}$. Como ϕ es de Moebius, entonces preserva la razón doble en $\hat{\mathbb{R}}^n$ y por lo tanto ψ preserva la razón doble en $\hat{\mathbb{R}}^{n-1}$. De esta manera, ψ es una transformación de Moebius. Recíprocamente, consideremos $\bar{\psi}$ la extensión de Poincaré de ψ . Luego, $\bar{\psi} \phi^{-1}$ fija cada punto de $\hat{\mathbb{R}}^{n-1}$ y deja el semiplano superior invariante. Así, $\phi = \bar{\psi}$. \square

Definición 2.17. Una transformación de Moebius de S^n es una función $\phi : S^n \rightarrow S^n$ tal que $\pi^{-1} \phi \pi$ es una transformación de Moebius de $\hat{\mathbb{R}}^n$, donde $\pi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n$ es la proyección estereográfica.

Llamaremos $\text{Mob}(S^n)$ a las transformaciones de Moebius de S^n . Este es un grupo topológico para la topología compacto-abierto. Además, la función $\psi \rightarrow \pi\psi\pi^{-1}$ es un isomorfismo de grupos topológicos entre $\text{Mob}(\hat{\mathbb{R}}^n)$ y $\text{Mob}(S^n)$.

Sea $\phi \in \text{Mob}(S^{n-1})$. La extensión de Poincaré de ϕ es la transformación de Moebius $\bar{\phi}$ de $\hat{\mathbb{R}}^n$ definida por $\bar{\phi} = \eta\bar{\psi}\eta^{-1}$, donde $\bar{\psi}$ es la extensión de Poincaré de $\psi = \pi^{-1}\phi\pi$ y η es la función que hace compatible los dos modelos de \mathbb{H}^n . La transformación de Moebius $\bar{\phi}$ obviamente extiende ϕ y deja B^n invariante. Más aún, $\bar{\phi}$ es la única con esta propiedad. De estos hechos se deduce el siguiente teorema.

Teorema 2.18. Una transformación de Moebius ϕ de $\bar{\mathbb{R}}^n$ deja la bola abierta B^n invariante si y solo si es la extensión de Poincaré de una transformación de Moebius de S^{n-1} .

Como hecho general de la teoría de transformaciones de Moebius, usaremos el siguiente resultado cuya demostración se puede encontrar en [14, pág. 120, teorema 4.4.8]:

Lema 2.18.1. Sea ϕ una transformación de Moebius de B^n . Luego $\phi(0) = 0$ si y solo si ϕ es una transformación ortogonal de \mathbb{R}^n .

Clasificación de isometrías de \mathbb{H}^n

Pensando en el modelo de Poincaré, una isometría de \mathbb{H}^n es en particular una función continua entre bolas cerradas (recordar que una isometría se extiende de manera continua a su frontera ideal debido a 2.11.1 y por lo tanto, posee por lo menos un punto fijo. Este hecho nos ayudará a clasificar el espacio de isometrías de \mathbb{H}^n . En lo que sigue explicaremos brevemente esta clasificación. Un desarrollo extenso de lo que enunciaremos se puede encontrar en [14, Sec.4.7, págs. 136-142]

Isometrías elípticas:

Una isometría se dice elíptica si fija un punto $x \in \mathbb{H}^n$

Conjugando una isometría elíptica g por otra isometría $h \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ que fija el centro de la bola B^n , obtenemos otra isometría elíptica

$$f = hgh^{-1}$$

que fija el centro de B^n y conmuta con la inversión

$$J(x) = \frac{x}{|x|^2},$$

en el frontera S^{n-1} . Tenemos entonces que:

$$f(\infty) = JfJ(\infty) = Jf(0) = J(0) = \infty$$

y, por lo tanto, f debe ser una similaridad euclídea que fija el origen y preserva la bola unidad B^n . De hecho, vale el siguiente resultado que no probaremos por alejarse de nuestro objetivo principal:

Lema 2.18.2. Un elemento $g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n) = \text{Mob}(B^n)$ es elíptico si y solo si g es conjugado en $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ a una transformación ortogonal.

Isometrías parabólicas:

Una isometría g en \mathbb{H}^n se dice parabólica si fija exactamente un punto en la frontera ideal S^{n-1} . Notar que este tipo de isometrías no pueden ser elípticas. Sea $\psi \in S^{n-1}$ el punto fijado por g . Si existe $x \in \mathbb{H}^n$ con $g(x) = x$, entonces g fija el rayo geodésico que une x con ψ . Extendiendo dicho rayo a una geodésica completa, se tiene que g posee un segundo punto fijo en la frontera ideal lo que contradice la definición de ser parabólico.

Nuevamente, daremos otra caracterización de las isometrías parabólicas de \mathbb{H}^n sin demostración:

Lema 2.18.3. Una isometría en \mathbb{H}^n es parabólica si y solo si es conjugada en $\text{Mob}(S^n)$ a un elemento de la forma

$$f(x) = Ax + b, b \in R^{n-1}, A \in O(n-1)$$

Isometrías hiperbólicas:

Una isometría en $g \in \text{Isom}(HH^n)$ se dice hiperbólica si no fija puntos de \mathbb{H}^n y fija exactamente dos puntos de S^{n-1} .

Notar que como g fija dos puntos en la frontera, entonces g debe fijar la geodésica que los une. De esta manera, existe una única geodésica $\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$ tal que $g \circ \gamma = \gamma$. Además, restringiendo g a dicha geodésica, se tiene que g es una isometría euclídea. Luego $g|_\gamma(x) = x + b$ para algún $b \in \mathbb{R} \setminus 0$. Llamaremos eje de g a la geodésica γ y número de traslación a b .

Topología radial

Sea X un espacio métrico geodésico, hiperbólico y propio. Definamos otra topología para \bar{X} : Sea $p \in X$ un punto fijo que usaremos como base. Diremos que la sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in X$ converge radialmente (o cónicamente) a un punto $\xi \in \partial_\infty X$ si existe una constante R tal que $\{x_i\} \in B_R([p, \xi])$ y

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(p, x_i) = \infty$$

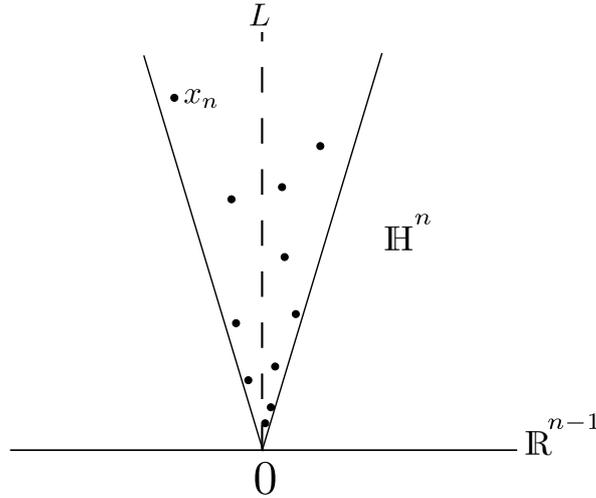


Figura 2.9: Convergencia en la topología cónica

Un subconjunto $C \subset \overline{X}$ es cerrado para la topología radial si su intersección con X es cerrado en la topología métrica de X y $C \cap \partial_\infty X$ contiene límites radiales de sucesiones en $C \cap X$.

Para ilustrar esta situación, consideremos $X = \mathbb{H}^n$ con el modelo del semiplano superior, $\xi = 0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ y sea L una geodésica vertical asintótica a ξ . La sucesión $x_i \in X$ converge a ξ en la topología del cono si y solo si todos los puntos x_i caen en algún cono euclidéo con eje L y la distancia entre x_i y 0 tiende a 0 . Esto explica el nombre de "topología cónica" (Figura 2.9)

Definición 2.19. Sea ϕ una cuasi acción de un grupo G sobre un espacio hiperbólico Rips. Un punto $\psi \in \partial_\infty X$ se dice límite cónico para la cuasi acción ϕ si existe una sucesión $g_i \in G$ tal que $\phi(g_i)(x)$ converge a ψ para la topología cónica. Más precisamente, para cada (o para algún, de manera equivalente) rayo geodésico $\sigma \subset X$ asintótico a ψ , y algún (o cualquier) punto $x \in X$, existe una constante $R < \infty$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} \phi(g_i)(x) = \psi$ y $d(\phi(g_i)(x), \sigma) \leq R$ para todo i .

Topología de Chabauty

Dado (X, τ) un espacio métrico, notemos con \mathcal{F} a la familia de subconjuntos cerrados para la topología τ . Sobre \mathcal{F} tenemos la topología de Chabauty $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$, que definiremos a partir de los entornos $\mathcal{U}_{\varepsilon, K}$ de $F \in \mathcal{F}$, para $\varepsilon > 0$ y $K \subset X$ compacto, de la siguiente manera:

$$\mathcal{U}_{\varepsilon, K} = \{Z \in \mathcal{F} : d_H(Z \cap K, F \cap K) < \varepsilon\}$$

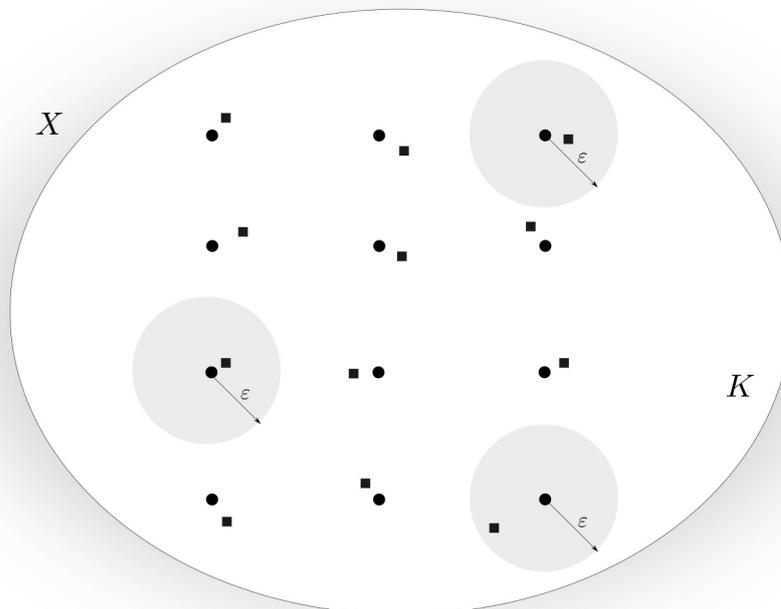


Figura 2.10: Un retículo representado por ● y un conjunto cerrado en un entorno Chabauty representado por ■

donde d_H es la distancia Hausdorff definida en 2.2.

Así, una sucesión F_i converge a un cerrado F en la topología de Chabauty si y solo si para cada subconjunto compacto $K \subset X$, se tiene que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (F_i \cap K) = F \cap K$$

para la topología de convergencia Hausdorff.

Notar que esta convergencia es muy sugerente cuando $X = \text{Homeo}(S^n)$ y consideramos una sucesión de retículos pues, al ser estos discretos, garantizamos que los puntos límites sean también discretos.

Teorema de Margulis y descomposición Gruesa-Fina

Definición 2.20. Sea $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Diremos que Γ es elemental si posee una órbita finita en $\overline{B^n}$

El siguiente resultado es crucial para la demostración del teorema de Margulis. Su prueba se basa en la inspección minuciosa de las isometrías de \mathbb{H}^n y puede ser hallada en [14, teorema 12.5.3, pág 652]

Teorema 2.21. Sea G un subgrupo nilpotente de $PO(n, 1)$ generado por elementos A tales que $|A - Id| < 2$. Luego G es abeliano.

Lema 2.21.1. Sea H un subgrupo de un grupo topológico G y sea $\alpha : G \rightarrow X$ una función tal que $\alpha^{-1}(\alpha(g)) = gH$ para cada $g \in G$. Si $\sigma : X \rightarrow G$ es una inversa continua a derecha de α , entonces la función $\phi : X \times H \rightarrow G$, definida por $\phi(x, h) = \sigma(x)h$, es un homeomorfismo. Más aún, la función $\bar{\alpha} : G/H \rightarrow X$, inducida por α , es un homeomorfismo.

Demostración: Es claro que la función ϕ es continua por ser una composición de funciones continuas. Sea $g \in G$. Como $\alpha \circ \sigma \circ \alpha(g) = \alpha(g)$, se tiene que $\sigma \circ \alpha(g) \in gH$, por lo que $g^{-1}\sigma\alpha(g) \in H$. Definamos la función

$$\psi : G \rightarrow X \times H$$

por la fórmula

$$\psi(g) = (\alpha(g), (\sigma\alpha(g))^{-1}g).$$

La función ψ es la composición de funciones continuas, por lo que es continua. Además,

$$\begin{aligned} \phi\psi(g) &= \phi(\alpha(g), (\sigma\alpha(g))^{-1}g) \\ &= \sigma\alpha(g) (\sigma\alpha(g))^{-1}g \\ &= g \end{aligned}$$

y como $\alpha^{-1}(\alpha(g)) = gH \implies \alpha(g) = \alpha(gh)$ para todo $h \in H$:

$$\begin{aligned} \psi\phi(x, h) &= \psi(\sigma(x)h) \\ &= (\alpha(\sigma(x)h), (\sigma\alpha(\sigma(x)h))^{-1}\sigma(x)h) \\ &= (x, \sigma(x)^{-1}\sigma(x)h) \\ &= (x, h) \end{aligned}$$

Por lo que ϕ es un homeomorfismo con inversa ψ . Sea $\pi : G \rightarrow G/H$ la función cociente. α induce una biyección continua $\bar{\alpha} : G/H \rightarrow X$ tal que $\bar{\alpha}\pi = \alpha$. Como $\pi\sigma$ es continua y tiene como inversa a $\bar{\alpha}$, se tiene que $\bar{\alpha}$ es un homeomorfismo. \square

Teorema 2.22. La función $\Phi : B^n \times O(n) \rightarrow Mob(B^n)$, definida por la fórmula $\Phi(b, A) = \tau_b A$, es un homeomorfismo.

Demostración: Sea $ev_0 : Mob(B^n) \rightarrow B^n$ la función de evaluación $ev_0(\phi) = \phi(0)$. Veamos que ev_0 es una función continua. Supongamos que $d(\phi, Id) < r$. Sea $\{L_\alpha\}_{\alpha \in I}$ la colección de rectas euclídeas centradas en 0. Como acotamos la distancia entre ϕ y la identidad por r , se tiene que el cilindro euclídeo C_α con eje L_α y radio r contiene a $\phi(L_\alpha)$ (ver figura 2.11).

De este hecho es inmediato que ev_0 es continua en la identidad debido a que

$$\phi(0) \in \bigcap_\alpha \phi(L_\alpha) \subset \bigcap_\alpha C_\alpha = \{x \in B^n : |x| < r\}$$

Definamos ahora $\partial\tau : B^n \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ por $\partial\tau(b, x) = \tau_b(x)$, la traslación en el elemento b . Esta función es continua. Como la topología heredada por la métrica en $Mob(S^{n-1})$ coincide con la topología compacto-abierta, usando la ley exponencial, se tiene que $\partial\hat{\tau} : B^n \rightarrow Mob(S^{n-1})$ definida por $\partial\hat{\tau}(b)(x) = \tau_b(x)$ es continua. Como $Mob(S^{n-1}) \rightarrow Mob(B^n)$, inducida por la extensión de Poincaré, es un homeomorfismo, la función $\hat{\tau}$ es una inversa a derecha de ev_0 .

Sea $\phi \in Mob(B^n)$. Es claro que $\phi O(n) \subset ev_0^{-1}(ev_0(\phi))$. Supongamos que $\psi \in ev_0^{-1}(ev_0(\phi))$. Entonces $\psi(0) = \phi(0)$ y por lo tanto $\phi^{-1}\psi(0) = 0$. Por el lema 2.18.1 se tiene que $\phi^{-1}\psi \in O(n)$. De esta manera, $\psi \in \phi O(n)$ y, por lo tanto, $ev_0^{-1}(ev_0(\phi)) = \phi O(n)$. Luego, ϕ es un homeomorfismo por el lema 2.21.1 \square

Definición 2.23. Dado un retículo $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$, un punto x de \mathbb{H}^n y $\varepsilon > 0$, definimos $\Gamma_\varepsilon(x)$ el subgrupo de Γ generado por el conjunto

$$\{g \in \Gamma : d(gx, x) \leq \varepsilon\}$$

Teorema 2.24 (Lema de Margulis). Para cada dimensión n , existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo retículo $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ y para todo punto $x \in \mathbb{H}^n$, el grupo $\Gamma_\varepsilon(x)$ es elemental.

Demostración: Usaremos el modelo de Poincaré para \mathbb{H}^n . Sea Γ un retículo en $Mob(B^n)$ y sea τ una traslación hiperbólica en B^n por x . Para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \tau^{-1}\Gamma_\varepsilon(x)\tau &= \tau^{-1}\langle g \in \Gamma : d(gx, x) \leq \varepsilon \rangle\tau \\ &= \langle \tau^{-1}g\tau \in \tau^{-1}\Gamma\tau : d(\tau^{-1}g\tau(0), 0) \leq \varepsilon \rangle \\ &= (\tau^{-1}\Gamma\tau)_\varepsilon(0) \end{aligned}$$

Luego, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x = 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos

$$Q_k = \{g \in Mob(B^n) : d(g(0), 0) \leq 1/k\}$$

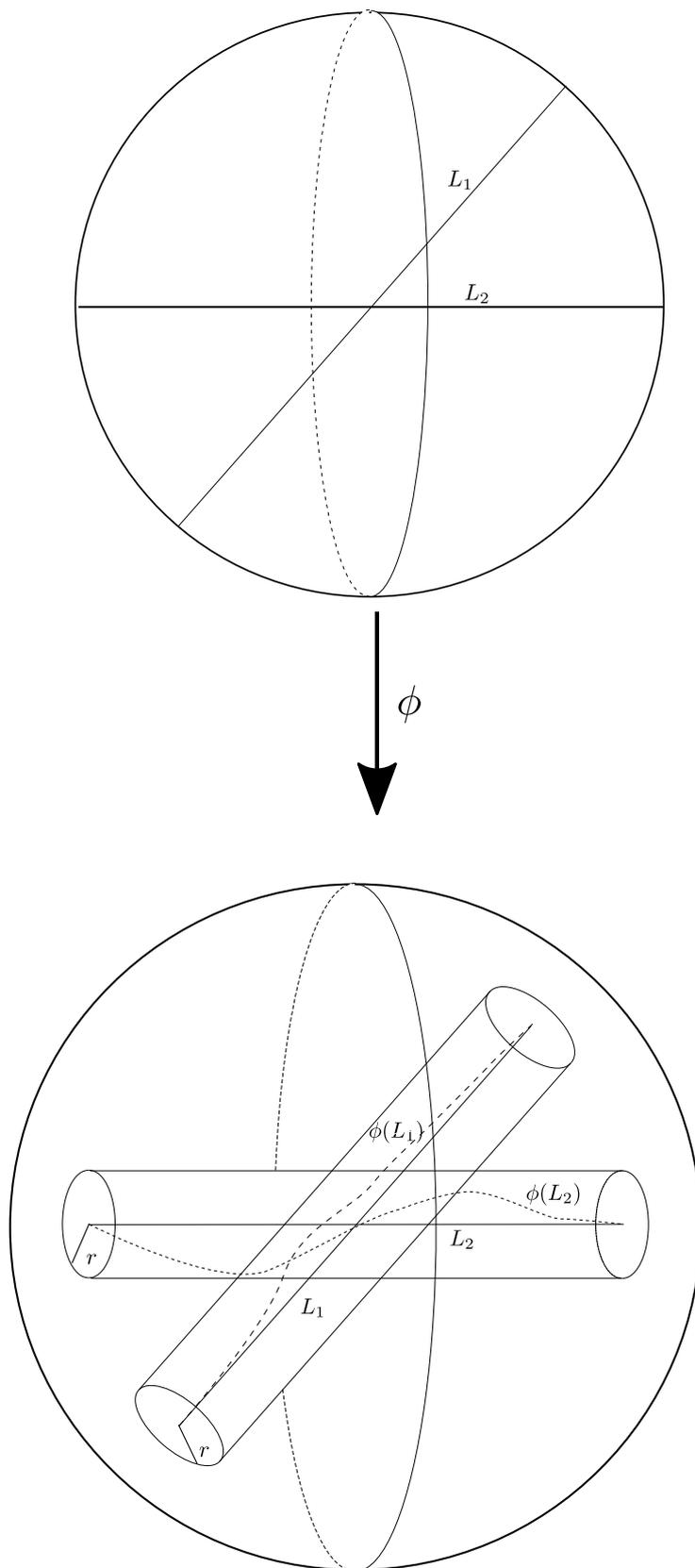


Figura 2.11: Las imágenes de las rectas L_α quedan contenidas en cilindros de radio r alrededor de ellas.

Notar que Q_k corresponde al subconjunto $C(0, 1/k) \times O(n)$ de $B^n \times O(n)$ por el homeomorfismo $B^n \times O(n) \rightarrow \text{Mob}(B^n)$ definido en 2.22 ($C(0, 1/k)$ denota el cilindro de centro 0 y radio $1/k$). De esta manera, Q_k es compacto y $id \in Q_k$ para cada k . Mas aún, Q_k es invariante bajo la inversión $g \rightarrow g^{-1}$ en $\text{Mob}(B^n)$ pues

$$d(g(0), 0) = d(0, g^{-1}(0))$$

Definamos Q_k^k el conjunto de todos los elementos de $\text{Mob}(B^n)$ de la forma $g_1 \cdots g_k$ con $g_i \in Q_k$ y $i = 1, \dots, k$. Observar que si $g_i \in Q_k$, entonces

$$\begin{aligned} d(g_1 \cdots g_k(0), 0) &\leq \sum_{i=1}^k d(g_1 \cdots g_{k+1-i}(0), g_1 \cdots g_{k-i}(0)) \\ &= \sum_{i=1}^k d(g_{k+1-i}(0), 0) \leq 1 \end{aligned}$$

Sea U el entorno de $Id \in \text{Mob}(B^n)$ que corresponde a

$$\{A \in PO(n, 1) : |A - Id| < 2 - \sqrt{3}\}$$

Como $\text{Mob}(B^n)$ es un grupo topológico, existe $r > 0$ tal que $B^{-1}B \subset U$ para $B = B(Id, r)$. Además, para todo $g \in \text{Mob}(B^n)$, se tiene que $B.g = B(g, r)$. Como Q_1 es compacto, hay un número máximo m de elementos en Q_1 cuya distancia entre sí es mayor o igual a r . Así, podemos tener a lo sumo m bolas disjuntas en Q_1 de radio r , por lo que a lo sumo existen m trasladados a derecha de B en $M(B^n)$ por elementos de Q_1 .

Sea $\epsilon = 1/(m+1)$ y sea $H = \langle \Gamma_\epsilon \cap U \rangle$. Entonces H es un subgrupo abeliano de Γ_ϵ por 2.21. Sean Bf_1, \dots, Bf_j los trasladados disjuntos dos a dos de B por elementos de $\Gamma_\epsilon \cap Q_1$, con j tan grande como sea posible. Notar que $j \leq m$. Mostraremos que $\{Hf_i\}_{i=1}^j$ contiene todas las coclases de H en Γ_ϵ .

Sea $g \in \Gamma_\epsilon$. Como Γ_ϵ está generado por $\Gamma \cap Q_{m+1}$, podemos escribir $g = g_1 \cdots g_k$ con $g_i \in \Gamma \cap Q_{m+1}$. Tomaremos además k tan pequeño como sea posible y llamaremos a k la longitud de g .

Supongamos primero el caso $k \leq m+1$. Luego $g \in Q_{m+1}^{m+1} \subset Q_1$ y por lo tanto $g \in \Gamma_\epsilon \cap Q_1$. Así, $Bg \in Bf_i$ para algún i y $gf_i^{-1} \in B^{-1}B \subset U$ (si esto último no sucediera, se contradeciría el hecho que j era la máxima cantidad de trasladados disjuntos posibles). De esta manera, $gf_i^{-1} \in H$ y por lo tanto $Hg = Hf$.

Para el caso $k > m+1$, definamos $h_i = g_1 \cdots g_i$ para $i = 1, \dots, m+1$. Luego $h_i \in Q_{m+1}^{m+1} \subset Q_1$ para cada i y, por lo tanto, los conjuntos $\{Bh_i\}_{i=1}^{m+1}$ no pueden ser todos disjuntos. Supongamos que $Bh_j \cap Bh_i \neq \emptyset$ con $i < j$. Sea $\alpha = h_i$, $\beta = g_{i+1} \cdots g_j$, y $\gamma = g_{j+1} \cdots g_k$.

Entonces $g = \alpha\beta\gamma$, con $B\alpha \cap B\alpha\beta \neq \emptyset$ y, por lo tanto, $\alpha(\alpha\beta)^{-1} \in B^{-1}B \subset U$. Se tiene entonces que $\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} \in H$ y

$$Hg = H(\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1})(\alpha\beta\gamma) = H\alpha\gamma.$$

Sea $g' = \alpha\gamma$. Luego, $Hg = Hg'$ y la cantidad de elementos con que se escribe g' es menor a la cantidad con la que se escribe g . Por inducción, se tiene que $Hg = Hg''$ con g'' de longitud a lo sumo $m + 1$. Así, $Hg = Hf_i$ para algún i por el argumento de arriba.

De esta manera, $\{Hf_i\}_{i=1}^j$ contiene a todas las coclases y, por lo tanto, $[\Gamma_\epsilon : H] \leq j \leq m$, por lo que Γ_ϵ es elemental por tener un subgrupo de índice finito abeliano. Los subgrupos abelianos son elementales. Una demostración de este hecho puede encontrarse en [14, pág. 182, lema 1].

Veamos que esto implica de Γ_ϵ es elemental. Supongamos que $[\Gamma_\epsilon : H] = t$ y sea $\Gamma_\epsilon = \bigcup_{i=1}^n g_i H$. Sea además $x \in \mathbb{H}^n$ tal que la órbita de x por la acción de H es finita. Entonces:

$$\#\{\Gamma_\epsilon x\} = \#\{\bigcup_{i=1}^n (g_i H)x\} = \sum_{i=1}^n \#\{g_i Hx\} = t \cdot \#\{Hx\} < \infty$$

□

Descomposición gruesa-fina

Sea Γ un retículo de $\text{Mob}(B^n)$. Para cada $r > 0$, definimos

$$V(\Gamma, r) = \{x \in B^n : d(x, gx) < r \text{ para algún elemento no elíptico en } \Gamma\}$$

Lema 2.24.1. Para cada $r > 0$, $V(\Gamma, r)$ es un abierto Γ -invariante de B^n .

Demostración: Sea x un punto de $V(\Gamma, r)$. Existe entonces un elemento no elíptico $g \in \Gamma$ tal que $d(x, gx) < r$. Sea $f \in \Gamma$. Entonces

$$d(fx, fgf^{-1}fx) = d(x, gx) < r.$$

Como fgf^{-1} no es elíptico (dado que g no lo es), $fx \in V(\Gamma, r)$ y, por lo tanto, $V(\Gamma, r)$ es Γ -invariante.

Sea $s = (r - d(x, gx))/2$. Para cada $y \in B(x, s)$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(y, gy) &\leq d(y, x) + d(x, gx) + d(gx, gy) \\ &= 2d(x, y) + d(x, gx) < r \end{aligned}$$

Entonces, $B(x, s) \subset V(\Gamma, r)$, lo que implica que $V(\Gamma, r)$ es abierto. □

Lema 2.24.2. Si Γ es un retículo de $\text{Mob}(B^n)$, $r > 0$ y Γ_a el estabilizador del elemento a en Γ , entonces

$$V(\Gamma, r) = \bigcup \{V(\Gamma_a, r) : a \text{ es un punto fijo de un elemento no elíptico de } \Gamma\}.$$

Demostración: Es claro que $V(\Gamma_a, r) \subset V(\Gamma, r)$ para cada punto a que es fijado por un elemento no elíptico de Γ . Para ver la otra inclusión, tomemos $x \in V(\Gamma, r)$. Por definición, existe un elemento $g \in \Gamma$ que no es elíptico tal que $d(x, gx) < r$. Sea a un punto que fija g . Entonces $g \in \Gamma_a$ y, por lo tanto, $x \in V(\Gamma_a, r)$. De esta manera, $V(\Gamma, r)$ es la unión de los conjuntos $\{V(\Gamma_a, r)\}$ \square

Sea $M=B^n/\Gamma$ un espacio hiperbólico y sea $r > 0$. Se define la parte r -fina de M como

$$V(M, r) = V(\Gamma, r)/\Gamma$$

y la parte r -gruesa de M como

$$T(M, r) = (B^n - V(\Gamma, r))/\Gamma.$$

Notar que la parte r -fina es un abierto y la parte r -gruesa es cerrada.

Teorema 2.25. Para cada dimensión n , existe una constante $\delta > 0$ tal para cada espacio hiperbólico B^n/Γ , existe un punto $x \in B^n$ tal que la función cociente $\pi : B^n \rightarrow B^n/\Gamma$ envía $B(x, \delta)$ en $B(\pi(x), \delta)$ de manera isométrica.

Demostración: Sea ε_n la constante de Margulis y sea $x \in T(\Gamma, \varepsilon_n)$, por lo que $d(x, gx) \geq \varepsilon_n$ para todo $g \neq 1$ en Γ . Luego, para cada $g \in \Gamma \setminus \{1\}$ tenemos que $B(x, \varepsilon/2) \cap gB(x, \varepsilon/2) = \emptyset$ y así π envía $B(x, \varepsilon/2)$ de manera biyectiva a $B(\pi(x), \varepsilon/2)$. De esta manera, usando desigualdad triangular, π envía $B(x, \varepsilon/4)$ de manera isométrica en $B(\pi(x), \varepsilon/4)$ \square

Proposición 2.25.1. Sea $\Gamma \subset \mathbb{H}^n$. y $r < \varepsilon$ con ε como en el lema de Margulis. Entonces $T(\Gamma, r)$ es compacto.

Demostración: Si $T(M, r)$ no fuera compacto, existiría una sucesión infinita de bolas hiperbólicas $\{B(x_i, r/4)\}$, disjuntas dos a dos e isométricas a bolas en $T(M, r)$. Esto contradice el hecho que $T(M, r)$ tiene volumen finito, por ser cociente de un retículo. \square

Teorema 2.26 (Descomposición gruesa-fina). Supongamos que Γ es un retículo de $PO(n, 1)$. Entonces:

- Existe una colección (infinita) C de horobolas abiertas $C := \{B_j, j \in J\}$, con clausuras disjuntas dos a dos, tales que $\Omega := \mathbb{H}^n \setminus \bigcup_{j \in J} B_j$ es Γ -invariante y $M_c := \Omega/\Gamma$ es compacto
- Cada elemento parabólico $\gamma \in \Gamma$ preserva (exactamente) una horobola B_j .

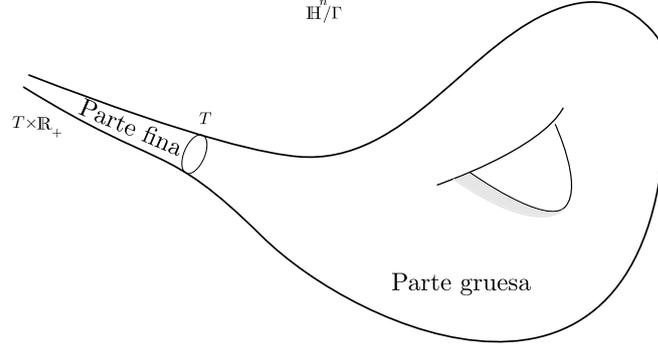


Figura 2.12: Un ejemplo de descomposición fina-gruesa

La demostración del teorema está contenida esencialmente en los enunciados de esta sección.

Notemos que el estabilizador Γ_j de cada horobola B_j no puede contener elementos hiperbólicos, dado que estos no fijan horobolas. Así, Γ_j contiene solo elementos parabólicos y elípticos. Como la parte gruesa es compacta, el cociente $T_j := \Sigma_j/\Gamma_j$ de cada horoesfera $\Sigma_j \subset \mathbb{H}^n$ frontera de B_j , es compacto. Por otro lado, Γ_j preserva horoesferas con el mismo centro como Σ_j , por lo tanto.

$$B_j/\Gamma_j \simeq T_j \times [0, \infty).$$

Este hecho justifica la figura 2.12

Algunas propiedades de los puntos de la frontera ideal

Proposición 2.26.1. Supongamos que $G \curvearrowright X$ es una cuasi acción coacotada. Entonces todos los puntos de la frontera ideal $\partial_\infty X$ son límites cónicos para la acción.

Demostración: Sea $\psi \in \partial_\infty X$ y sea $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in X$ una sucesión convergente a ψ en la topología cónica (notar que podemos tomar $x_i = \sigma(i)$, con σ el rayo geodésico asintótico a ψ). Como la acción es coacotada, sean $x \in X$ y R tal que para cada $x' \in X$ exista $g \in G$ tal que

$$d(x', \phi(g)(x)) \leq R$$

Luego, como la cuasiacción está acotada, existe una sucesión g_i para la cual

$$d(x_i, \phi(g_i)(x)) \leq R$$

Por lo que ψ es un límite cónico para la cuasiacción ψ . □

Teorema 2.27. Si Γ es un retículo, cada elemento $\psi \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$ o bien es un límite cónico o es un punto fijo parabólico.

Demostración: Sea σ un rayo geodésico en \mathbb{H}^n asintótico a ψ y sea $\bar{\sigma}$ la proyección a $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$, entonces puede pasar que:

- Exista $T \geq 0$ y una componente $M_j = B_j/\Gamma_j$ en la parte fina de M , de manera que para todo $t \geq T$, $\bar{\sigma}(t)$ pertenece a M_j . Luego, el rayo geodésico $\sigma([T, \infty])$ está contenido en un Γ -trasladado B de la horobola B_j y, por lo tanto, como la horobola contiene al rayo geodésico, este debe ser asintótico al centro de dicha horobola. Entonces ψ queda fijo por el subgrupo $\Gamma_j < \Gamma$ que, por la descomposición, contiene elementos parabólicos.
- Si no sucede lo anterior, entonces existe una sucesión divergente $t_i \in \mathbb{R}_+$ tal que para cada i , $\bar{\sigma}(t_i)$ cae en la parte gruesa de M . Como esta parte es compacta, existe un compacto $C \subset \mathbb{H}^n$ y una sucesión de $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\sigma(t_i) \in \gamma_i(C)$ y, por lo tanto, ψ es un límite cónico de Γ usando un argumento similar a 2.26.1. (Notar que en 2.26.1 solo es necesario tener un compacto C , una geodésica σ y sucesiones γ_i, t_i como en la demostración).

□

2.6. Funciones η -cuasi simétricas y cuasi conformes.

Definición 2.28. Sean $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ Una homeomorfismo $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ se dice η -cuasi simétrico si existe una función creciente y sobreyectiva $\eta : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ tal que

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x) - f(z)|} \leq \eta \left(\frac{|x - y|}{|x - z|} \right)$$

Observación 2.28.1. Notar que como f es un homeomorfismo, en particular es inyectivo y el denominador del lado izquierdo de la desigualdad no puede ser 0, por lo que el cociente está bien definido para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

Definición 2.29. Un homeomorfismo $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ se dice cuasi conforme si

$$\sup_{x \in \Omega} H_x(f) < \infty$$

Con $H_x(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \left(\max_{y, z} \frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x) - f(z)|} \right)$ y $r = |x - y| = |x - z|$

La función $H_x(f)$ se llama la función de dilatación (lineal) de f . Una función cuasi conforme f se dice que tiene dilatación acotada por H si

$$H(f) := \sup_{x \in \Omega} H_x(f) \leq H$$

Notar que como el supremo esencial es la norma de L^∞ , se ignoran conjuntos de medida cero. Intuitivamente, una función cuasi conforme es aquella que envía esferas infinitesimales a elipsoides infinitesimales de excentricidad uniformemente acotada.

Observación 2.29.1. Si f es η -cuasi simétrica entonces f es cuasi conforme.

El objetivo en esta sección es probar que las funciones η -cuasi simétricas son diferenciables en casi todo punto. Para eso, utilizaremos como primera herramienta el siguiente teorema:

Teorema 2.30 (Teorema de Rademacher). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz. Entonces f es diferenciable en casi todo punto.

Demostración: Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ usando los teoremas de extensión para funciones Lipschitz (ver [7, págs 1-5]). Para cada $x, v \in \mathbb{R}^n$, la función

$$f_{x,v}(t) = f(x + tv), t \in \mathbb{R},$$

es Lipschitz como función de una variable y, por el teorema de diferenciación de Lebesgue, es diferenciable en casi todo punto $t \in \mathbb{R}$. Para cada $v \in \mathbb{R}^n$ fijo, tenemos que $\frac{\partial f}{\partial v}$ existe en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. En particular, existen las derivadas parciales en casi todo punto x y, por lo tanto, podemos considerar el gradiente de $\nabla f(x)$ (entendido en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$).

Veamos ahora que la fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = v \cdot \nabla f(x)$$

sigue siendo cierta para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$:

Fijemos $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ y una función test $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial v}(x) \varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \varphi(x) dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \varphi(x) dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} -f(x) \frac{\varphi(x) - \varphi(x - tv)}{t} dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x - tv)}{t} dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x) dx \\
&= - \sum_{i=1}^n v_i \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^n v_i \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} v \cdot \nabla f(x) \varphi(x) dx
\end{aligned}$$

Como φ era arbitrario la igualdad se verifica para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. Por último, fijemos un conjunto denso de direcciones en \mathbb{R}^n . Además, existe un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ cuyo complemento mida 0 y verifique

$$\frac{\partial f}{\partial v_i}(a) = v_i \cdot \nabla f(a)$$

para cada dirección v_i y cada $a \in A$. Fijemos $a \in A$ y definamos

$$D(v, t) := \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} - v \cdot \nabla f(a).$$

Para probar la diferenciabilidad de f en el punto a , debemos probar que $D(v, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ de manera independiente a la dirección v .

Notar que gracias a la compacidad de la esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, considerar un conjunto denso de direcciones es lo mismo que considerar un subconjunto denso en S^{n-1} . Dado $\varepsilon > 0$, la compacidad de la esfera nos permite encontrar un conjunto finito v_1, \dots, v_N de direcciones de tal manera que para todo $v \in S^{n-1}$ se verifique que $|v - v_i| < \varepsilon$ para algún $i \in \{1, \dots, N\}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|D(v, t) - D(v_i, t)| &\leq \left| \frac{f(a + tv) - f(a + tv_i)}{t} \right| + |(v - v_i) \cdot \nabla f(a)| \\
&\leq C \cdot |v - v_i| < C \cdot \varepsilon,
\end{aligned}$$

donde C es independiente de v , dado que f es Lipschitz.

Como $\lim_{t \rightarrow 0} D(v_i, t) = 0$ para cada v_i , podemos elegir $\delta > 0$ tal que

$$D(v_i, t) < \varepsilon$$

para $|t| < \delta$ y para cada $i = 1, \dots, N$. Combinando las últimas dos desigualdades, tenemos que

$$|D(v, t)| < \hat{C} \cdot \varepsilon$$

Para $|t| < \delta$, donde \hat{C} es independiente de v . □

Como generalización del teorema de Rademacher, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.31 (Teorema de Stepanov). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Entonces f es diferenciable en casi todo punto del conjunto

$$L(f) := \{x \in \Omega : Lip(f)(x) < \infty\}$$

con

$$Lip(f)(x) := \frac{\lim_{y \rightarrow x, y \in \Omega} |f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

Demostración: Podemos asumir nuevamente $m = 1$. Sea $\{B_1, B_2, \dots\}$ una familia numerable de bolas contenidas en Ω tales que cada B_i tenga radio y centro racional y que $f|_{B_i}$ sea acotado. En particular, esta colección cubre $L(f)$. Definamos

$$u_i(x) = \inf\{u(x) : u \text{ es } i\text{-Lipschitz con } u \geq f \text{ sobre } B_i\}$$

y

$$v_i(x) = \sup\{v(x) : v \text{ es } i\text{-Lipschitz con } v \leq f \text{ sobre } B_i\}$$

Luego, las funciones $u_i, v_i : B_i \rightarrow \mathbb{R}$ son i -Lipschitz para cada i y $v_i \leq f|_{B_i} \leq u_i$. Además, f es diferenciable en cada punto a en que, para algún i , tanto u_i como v_i sean diferenciables y $v_i(a) = u_i(a)$. Afirmamos que casi todo punto de $L(f)$ es de esta forma.

Por el teorema de Rademacher, el conjunto

$$Z := \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x \in B_i : u_i \text{ o } v_i \text{ no son diferenciables en } x\}$$

posee medida cero. Si $a \in L(f) \setminus Z$, entonces existe un radio $r > 0$ tal que

$$|f(a) - f(x)| \leq M|a - x|$$

para todos los puntos $x \in B(a, r)$ y para algún M independiente de x . Como existe un índice $i > M$ tal que $a \in B_i \subset B(a, r)$.

Además $f(a) - i|x - a| < f(x)$ por ser i -Lipschitz, entonces

$$v_i(x) \geq f(a) - i|x - a|.$$

Por otra parte, $f(a) + i|x - a| > f(x)$ por ser i -Lipschitz, entonces

$$u_i(x) \leq f(a) + i|x - a|$$

Usando las dos últimas desigualdades, se tiene que

$$f(a) - i|a - x| \leq v_i(x) \leq u_i(x) \leq f(a) + i|a - x|$$

para $x \in B_i$, lo que muestra la afirmación y el teorema. \square

Con lo hecho hasta ahora, es inmedío el siguiente teorema:

Teorema 2.32. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es cuasi conforme entonces es diferenciable en casi todo punto y $\|D_x f\| \leq H_x(f)|J_x(f)|^{1/n}$ para casi todo punto de Ω .

Demostración: Por la definición de $Lip(f)(x)$ y $H_x(f)$ (recordar que $\rho = |h|$),

$$\begin{aligned} Lip(f)(x) &= \overline{\lim}_{\rho \rightarrow 0} \frac{f|(x+h) - f(x)|}{|h|} \\ &= \overline{\lim}_{\rho \rightarrow 0} \frac{\max_{|h|=\rho} |f(x+h) - f(x)|}{\rho} \\ &= H_x(f) \overline{\lim}_{\rho \rightarrow 0} \frac{r(x, \rho)}{\rho} \end{aligned}$$

Notemos que para $r = r(x, \rho)$, se tiene que $B(f(x), r) \subset f(B(x, \rho))$, lo que implica que $\omega_n r^n = |B(f(x), r)| \leq |f(B(x, \rho))|$ donde ω_n es notación para la medida de la bola n -dimensional y $|\cdot|$ se está usando en este caso como notación de la medida de Lebesgue. En consecuencia,

$$\frac{|f(B(x, \rho))|}{|B(x, \rho)|} \geq \frac{r^n}{\rho^n}$$

y, por lo tanto,

$$\mu_f(x) = \overline{\lim}_{\rho \rightarrow 0} \frac{|f(B(x, \rho))|}{|B(x, \rho)|} \geq \overline{\lim}_{\rho \rightarrow 0} \frac{r^n}{\rho^n} = \left(\frac{1}{H_x(f)} Lip(f)(x) \right)^n.$$

con μ_f la derivada de Radon-Nikodym de la medida de Lebesgue respecto a la función f , que es absolutamente continua. Además, se tiene que $\mu'_f(x) = |\det(D_x f)| = |J_f(x)|$ con $D_x f$ la matriz diferencial de f en el punto x y $J_f(x)$ su jacobiano. Reescribiendo la desigualdad de arriba, tenemos que

$$Lip(f)(x) \leq H_x(f)(\mu_f(x))^{1/n}.$$

Dado que la medida μ_f es absolutamente continua, el lado derecho de la desigualdad es finita en casi todo punto, así, f es diferenciable en casi todo punto por el teorema. Además, obtuvimos la desigualdad

$$\|D_x(f)\| = |Lip(f)(x)| \leq H_x(f)(\mu_f(x))^{1/n} = H_x(f)|J_x(f)|^{1/n}$$

□

Proposición 2.32.1. Para $n \geq 2$, toda función cuasi simétrica $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tiene jacobiano no nulo en casi todo punto.

Demostración: Supongamos contrariamente que $J_x(f) = 0$ en un conjunto de medida positiva. Por la desigualdad del teorema anterior, tenemos que $D_x f = 0$, por lo que en particular todas las derivadas parciales son 0. Sea $J = [p, q = p + te_1]$ el segmento paralelo al eje x_1 que conecta p con q en donde f es absolutamente continua. Se tiene entonces que

$$f(q) - f(p) = \int_J \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) dx_1 = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p_1 + te_1, p_2, \dots, p_n) dt = 0$$

Por lo tanto, $f(p) = f(q)$ contradiciendo el hecho que f es un homeomorfismo y, por lo tanto, inyectivo. □

Observación 2.32.1. La proposición anterior es válida para funciones cuasi conformes con una demostración mucho más complicada. Para demostrar el teorema de Mostow, será suficiente la versión que hemos probado.

2.7. Complejos simpliciales y celulares métricos

Describiremos en esta sección algunas herramientas de topología algebraica y como se adecuan para estudiar casos de cuasi isometrías.

Diremos que un espacio métrico X tiene geometría acotada si existe una función $\phi(r)$ tal que para bola $B_r(x) \subset X$ contiene al menos $\phi(r)$ puntos. Por ejemplo, si G es un grupo finitamente generado con la métrica de la palabra, entonces G posee geometría acotada.

En particular, cada espacio métrico de geometría acotada debe tener necesariamente topología discreta. Nuestro objetivo es extender la definición de arriba y permitir espacios con topología más interesante.

Sea X un complejo simplicial conexo. Diremos que (X, d) es una métrica del complejo simplicial si para cada k , la restricción de d a cada k -simplex es isométrico

al k -simplex estandar δ^k . Así, para cada m -simplex δ^m y su cara δ^k , la inclusión $\delta^k \rightarrow \delta^m$ es un embebimiento isométrico. Esto nos permite definir una métrica de camino sobre X de tal manera que cada simplex esté embebido isométricamente en X . A esta construcción se la llama complejo simplicial métrico.

Por otro lado, llamaremos complejo métrico celular a un complejo celular X junto con una métrica definida sobre su 0-esqueleto. Es importante notar que la métrica en el complejo celular está solo definida sobre X^0 . Es usual referirse, abusando de la notación, a los conceptos métricos de X en vez de X^0 . por ejemplo, una r -bola en X solo tiene sentido como una r -bola en X^0 . Análogamente, el diámetro de una celda σ en X es el diámetro de su intersección con X_0 .

Definición 2.33. Un complejo celular métrico X se dice que tiene geometría acotada

geometría acotada si:

- Cada bola $B_r(x) \subset X$ interseca al menos $\phi(r, k)$ celdas de dimensión menor o igual a k
- El diámetro de cada k -celda es a lo sumo c_k , $k = 1, 2, 3, \dots$

Por ejemplo, si G es finitamente generado y S un conjunto de generadores finito para G , $\mathcal{X}_{G,S}$ es un complejo celular métrico de geometría acotada.

La versión de geometría acotada para complejos métricos simpliciales es la siguiente:

Definición 2.34. Sea X un complejo simplicial métrico. X se dice que tiene geometría acotada si existe $N < \infty$ tal que cada vértice de X incide a lo sumo N bordes. En particular, un X de esta manera debe ser necesariamente de dimensión finita.

Las definiciones arriba citadas son esencialmente la misma, dado que los conceptos que consideramos son de dimensión finita. En general usaremos los complejos celulares métricos por tener una construcción más flexible.

Para un complejo celular métrico X de geometría acotada, podemos definir ciertos conceptos métricos. La R -bola centrada en $x \in X^0$ (con un sentido grueso) $B_R(x)$ es la unión de las celdas en X que intersecan a la R -bola $B_R(x) \subset X^0$. Más aún, diremos que la aplicación celular $f : X \rightarrow Y$ entre complejos celulares métricos de geometría acotada es L -Lipschitz si

$$f(B_R(x)) \subset B_{LR}(f(x)), \forall x \in X^0, R \in \mathbb{R}_+$$

Definición 2.35. Un espacio celular métrico X se dice uniformemente contractil si existe una función continua $\psi(R)$ tal que para cada $x \in X^0$ la función

$$B_R(x) \rightarrow B_{\psi(R)}(x)$$

es null-homotópica.

Es importante tener presente que una cuasi isometría no tiene por qué ser continua. Dado que queremos usar herramientas de topología algebraica, necesitaremos la siguiente herramienta que garantiza la aproximación de cuasi isometrías por funciones continuas.

Proposición 2.35.1 (Aproximación celular Lipschitz). Supongamos que X, Y son complejos celulares métricos, donde X es de dimensión finita y de geometría acotada, Y es uniformemente contractil y $f : X^{(0)} \rightarrow Y^{(0)}$ es una función L -Lipschitz. Entonces f admite una extensión celular $f : X \rightarrow Y$ continua. Además, f es L' -Lipschitz, donde L' depende únicamente de L , de la cota geométrica sobre el complejo X y de la función que provee la uniforme contractibilidad de Y . Más aún, $f(X) \subset \overline{B_{L'}(f(X^{(0)}))}$.

Demostración: La demostración sigue el espíritu de la demostración del teorema de Whitehead. Extenderemos f por inducción sobre el esqueleto de X . Afirmamos que para ciertas constantes $C_i, C'_{i+1}, i \geq 0$ podemos construir una sucesión de extensiones $f_k : X^{(k)} \rightarrow Y^{(k)}$ tales que:

1. $\text{diam} f(\sigma) \leq C_k$, para cada k -celda $\sigma = \hat{e}(\mathbb{D}^k)$ en $X^{(k)}$.
2. $\text{diam}(f(\partial\tau)) \leq C'_{k+1}$, para cada $(k+1)$ -celda τ en X

Caso base: Ya tenemos $f = f_0 : X^{(0)} \rightarrow Y^{(0)}$ que satisface la condición (1) para $C_0 = 0$. Si x, x' pertenecen al borde de una 1-celda τ en X , entonces

$$d(f(x), f(x')) \leq LD_1$$

donde $D_1 = D_{1,X}$ es la cota superior de los diámetros de las 1-celdas en X . De esta manera se satisface (2) para el caso base.

Paso inductivo: Asumamos que $f = f_k$ fue definida sobre $X^{(k)}$, por lo que (1) y (2) se satisfacen. Induciremos entonces la función a $X^{(k+1)}$. Sea $\sigma = \hat{e}(\mathbb{D}^{k+1})$ una $(k+1)$ -celda en X . Notar que por la hipótesis inductiva se tiene que

$$\text{diam}(f\partial\sigma) \leq C'_{k+1}.$$

Luego, como Y es uniformemente contractil, extendemos f a σ de manera que el diámetro de la imagen de σ en Y está acotado superiormente por C_{k+1} , donde $C_{k+1} = \psi(C'_k)$ para ψ la función que acota uniformemente Y . Como la composición $f \circ e : \partial\mathbb{D}^{k+1} \rightarrow Y$ es null-homotópica, se extiende a una función $\tilde{f} : \mathbb{D}^{k+1} \rightarrow Y$ con el diámetro controlado. Sin pérdida de generalidad (Debido al teorema de aproximación celular de Whitehead), podemos asumir que esta extensión es celular, o sea, que su imagen está contenida en $Y^{(k+1)}$. La extensión de $f \circ e$ a \mathbb{D}^{k+1} determina la extensión requerida de f a $\hat{e}(\mathbb{D}^{k+1})$:

$$f(x) := \tilde{f}(\hat{e}^{-1}(x)), x \in \sigma$$

Así obtenemos una función celular $f : X^{(k+1)} \rightarrow Y^{(k+1)}$. Verifiquemos que la nueva función f satisface (2). Supongamos que τ es una $(k+2)$ -celda en X . Como X posee geometría acotada, se tiene que $\text{diam}(\tau) \leq D_{k+2} = D_{k+2,X}$. En particular, $\partial\tau$ es conexo y está contenido en la unión de como mucho $\phi(D_{k+2}, k+1)$ celdas de dimensión $k+1$. Así,

$$\text{diam}(f(\partial\tau)) \leq C_{k+1} \cdot \phi(D_{k+2}, k+1) =: C'_{k+2}.$$

Esto verifica (2). Supongamos que la dimensión de X es n , por lo que la inducción termina luego de n pasos. La función que resulta de la inducción $f : X \rightarrow Y$ satisface que

$$L' := \text{diam}(f(\sigma)) \leq \max_{i=1, \dots, n} C_i$$

para cada celda σ en X . Así, $f : X \rightarrow Y$ es L' -Lipschitz. La segunda afirmación de la proposición se sigue de la definición de los C_i . □

Observación 2.35.1. El resultado anterior puede generalizarse a funciones (L, A) -Lipschitz gruesas con un pequeño cambio en la definición de las cotas C_i y C'_{i+1} .

Separación gruesa

Sea X un complejo simplicial y $W \subset X$ un subcomplejo. Sea además $B_R(W)$ el R -entorno de W en X y sea C_R su complemento en X . Para una componente $C \in C_R$ definimos el inradio, $\text{Inrad}(C)$, de C como el supremo sobre el radio de todas las bolas $B(x, R)$ en X contenidas en C . Una componente C se dice poco profunda si $\text{Inrad}(C)$ es finita y profunda si $\text{Inrad}(C) = \infty$.

Un subcomplejo W se dice gruesamente separado de X si existe R tal que $B_R(W)$ separa al espacio en al menos dos componentes disjuntas y profundas.

Observación 2.35.2. Que una curva desconecte \mathbb{R}^2 no significa que lo separe gruesamente. Como ejemplo de esto podemos considerar el embebimiento α como muestra la figura 2.13 en donde α separa a \mathbb{R}^2 en dos componentes pero una de estas es poco profunda.

El embebimiento de \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 $x \rightarrow (x, 0)$ es una separación gruesa del \mathbb{R}^2

Un hecho interesante es que se pueden enunciar teoremas clásicos con conceptos geométricos gruesos. Un ejemplo de esto es el teorema de Jordan. La demostración puede encontrarse en [5, teorema 6.71, págs. 265-267]

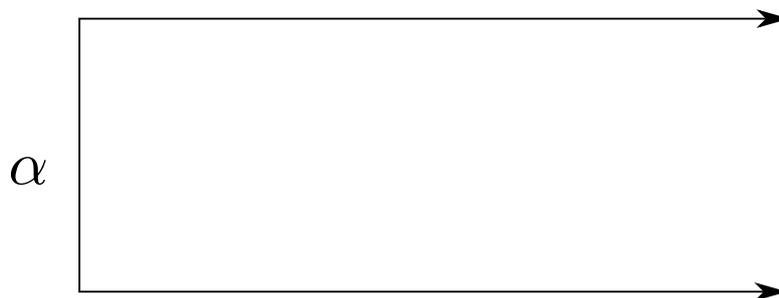


Figura 2.13: Una curva que no separa gruesamente el plano

Teorema 2.36 (Teorema de separación gruesa de Jordan). Supongamos que X, Y son complejos simpliciales uniformemente contractiles de geometría acotada, homeomorfos a \mathbb{R}^{n-1} y \mathbb{R}^n respectivamente. Luego para cada función simplicial uniformemente propia $f : X \rightarrow Y$, la imagen $V = f(X)$ separa gruesamente Y . Más aún, para todo R suficientemente grande, se tiene que $Y \setminus B_R(V)$ posee exactamente dos componentes conexas.

Capítulo 3

Demostración del teorema

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.1.

Sea $n \geq 3$ y $\Gamma, \Gamma' < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ retículos y $\rho : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ un isomorfismo. Entonces ρ está definido por conjugar una isometría $\alpha \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Más precisamente se tiene que

$$\rho(\gamma) = \alpha\gamma\alpha^{-1}$$

Para todo $\gamma \in \Gamma$

3.1. Paso 1

Nuestro objetivo en esta sección es probar la existencia de una cuasi isometría ρ -equivariante $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$. Para cualquier subconjunto Λ de \mathbb{H}^n (por ejemplo el espacio hiperbólico truncado), reservaremos la notación d para referirnos a la métrica de camino definida en 2.5 y usaremos $d_{\mathbb{H}}$ para referirnos a la métrica inducida por \mathbb{H} .

Por otra parte, notar que Γ es uniforme si y solo si Γ' es uniforme. La estrategia para construir f será hacerlo "de a pasos". Primero construyamos una cuasi isometría equivariante h para Ω y Ω' , los espacios hiperbólicos truncados de Γ y Γ' respectivamente (si Γ es uniforme, basta tomar $\Omega = \mathbb{H}^n$):

Proposición 3.1.1. Sea $\Gamma, \Gamma', \rho, \Omega$ y Ω' definidas como antes, existe una cuasi isometría $h : \Omega \rightarrow \Omega'$ ρ -equivariante.

Demostración: Fijemos $\omega \in \Omega$ y $\omega' \in \Omega'$. Por 2.9.1, las funciones

$$\begin{array}{ll} G : \Gamma \rightarrow \Omega & G' : \Gamma' \rightarrow \Omega' \\ \gamma \rightarrow \gamma \cdot \omega & \gamma' \rightarrow \gamma' \cdot \omega' \end{array}$$

son cuasi isometrías y, componiendo,

$$g := G' \circ \rho \circ G^{-1} : \begin{array}{ccc} \Gamma \cdot \{\omega\} & \rightarrow & \Gamma' \cdot \{\omega'\} \\ \gamma \cdot \omega & \rightarrow & \rho(\gamma)\omega' \end{array}$$

es una cuasi isometría. Veamos que la podemos extender a los espacios hiperbólicos truncados. Para eso, llamemos \overline{B} a la bola cerrada centrada en ω tal que $\Gamma \cdot \overline{B} = \Omega$. Esta bola existe pues como Ω/Γ es compacto, entonces totalmente acotado y, tomando representantes de las finitas bolas que cubren Ω/Γ , encontramos un conjunto de diámetro acotado cuyas órbitas cubren Ω . Usando el axioma de elección, elegimos $\Delta \subset \overline{B}$ tal que para cada $x \in \Omega$, $\Delta \cap \Gamma \cdot x$ consiste en un solo punto. Por lo tanto, para cada $y \in \Omega$, existe un único $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma \cdot y \in \Delta$. Definimos entonces

$$\begin{array}{l} \pi : \Omega \rightarrow \Gamma \cdot \{\omega\} \\ \pi(y) = \gamma^{-1}\omega \end{array}$$

Notar que $d_X(y, \pi(y)) = d_X(y, \gamma^{-1} \cdot \omega) = d_X(\gamma \cdot y, \omega) \leq \text{diam}(\overline{B})$. Por lo que π es una cuasi isometría con inversa la inclusión canónica. Por último, $h = g \circ \pi : \Omega \rightarrow \Omega'$ es una cuasi isometría por ser composición de cuasi isometrías y es equivariante por el mismo motivo. \square

El siguiente paso será extender la función h a \mathbb{H}^n .

Nota: Si el retículo Γ es uniforme, entonces no es necesaria la descomposición "gruesa-fina" y, por lo tanto, tampoco se requieren las últimas consideraciones topológicas. Esto simplificaría la demostración del teorema considerablemente. En la versión que trataremos en la tesis, utilizaremos retículos arbitrarios de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, que generaliza el trabajo inicial de G. Mostow.

Lema 3.1.1. Sea Ω un espacio hiperbólico truncado de dimensión mayor o igual a 3. Entonces cada horoesfera periférica $\Sigma \subset \Omega$ no separa gruesamente Ω

Demostración: Sea $B \subset \mathbb{H}^n$ la horobola acotada por Σ . Para cada R , el R -entorno $B' = B_R(B)$ de B en \mathbb{H}^n es también una horobola. Afirmamos que B' no separa gruesamente a Ω . Más aún, no separa gruesamente \mathbb{H}^n . En efecto, para cada par de puntos $x, y \in \Omega \setminus B'$, existe un camino geodésico a trozos p que conecta estos puntos en $\mathbb{H}^n \setminus B'$. Si el camino está enteramente contenido en Ω , hemos terminado. Si no, subdividamos el camino p en finitos subcaminos, cada uno de ellos de alguna de las siguientes formas (ver figura 3.1):

- El subcamino está contenido en Ω
- El camino conecta un par de puntos en el borde de una de las horobolas complementarias a Ω .

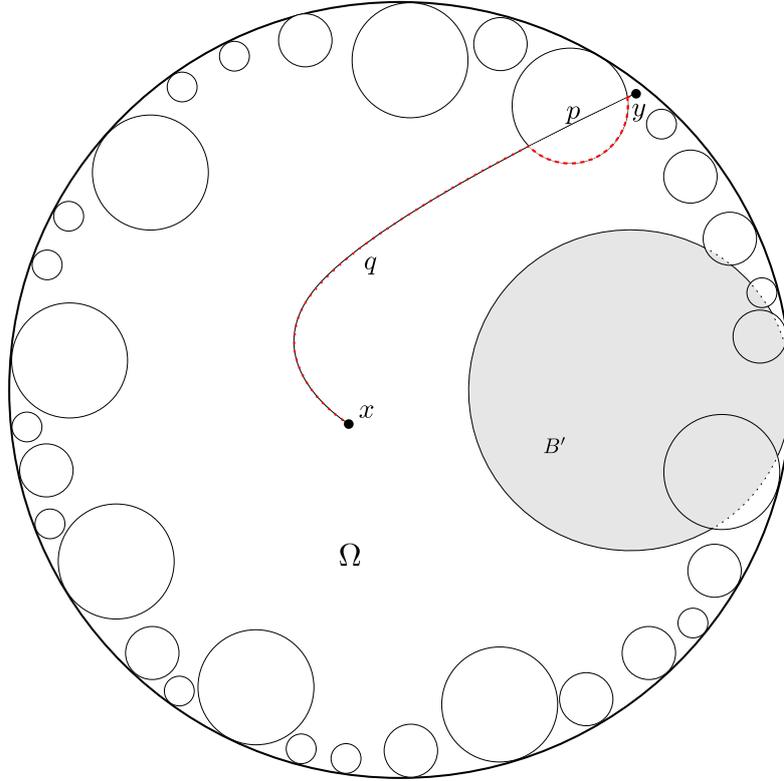


Figura 3.1: El camino de línea punteada representa a q mientras que el camino de trazo negro a p

Observación 3.1.1. Pensando en el modelos del semiplano superior de \mathbb{H}^n , la horobola $B_j \subset \mathbb{H}^n \setminus \Omega$ esta dada por la desigualdad $x_n > 1$. La intersección B' con $\Sigma_j = \partial B_j$ es la intersección de un hiperplano euclídeo con una bola euclídea y, así, es isométrica a una bola euclídea en (Σ_j, d) .

Notemos que una bola euclídea no puede separar \mathbb{R}^{n-1} , dado que $n - 1 \geq 2$. Así, podemos reemplazar $p_j = p \cap B_j$ con un nuevo camino p'_j que conecta los puntos finales de p_j con el complemento $\Sigma_j \setminus B'$. Haciendo este reemplazo para cada j , obtenemos un nuevo camino q que conecta x con y en $\Omega \setminus B'$. De esta manera, B' no separa Ω (con la métrica inducida por \mathbb{H}^n).

Veamos por último que Σ no separa gruesamente (Ω, d) . Supongamos que para algún R , $Y := \Omega \setminus B_{R,d}(B)$ contiene al menos dos componentes profundas de Y . Sean $x_i \in C_i, i = 1, 2$ las componentes profundas. Por la definición de componente profunda, existen caminos propios $\alpha_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow C_i, \alpha_i(0) = x_i, i = 1, 2$ con

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\alpha_i(t), \Sigma) = \infty.$$

Existe por lo tanto $T \in \mathbb{R}_+$ tal que $y_i = \alpha_i(T) \notin B', i = 1, 2$. Como probamos

arriba, existe un camino en $\Omega \setminus B' \subset Y$ que une y_1 con y_2 . Por lo tanto, $C_1 = C_2$ lo que es una contradicción. \square

Proposición 3.1.2. Sea $h : \Omega \rightarrow \Omega'$ una (L, A) -cuasi isometría. Para cada horoesfera periférica $\Sigma \subset \Omega$, existe $\Sigma' \subset \Omega'$ tal que

$$d_H(h(\Sigma), \Sigma') \leq R(L, A) < \infty.$$

Más aún, Σ' es única.

Demostración: Como Ω'/Γ' es compacto, existe $D < \infty$ tal que para cada $x \in \Omega'$, se tiene que

$$d_{\mathbb{H}}(x, \partial\Omega') \leq D.$$

Dado que la horoesfera Σ es isométrica a \mathbb{R}^{n-1} (con la métrica d), posee geometría acotada y es uniformemente contractil. De esta manera, usando la versión gruesa del teorema de separación de Jordan 2.36, se tiene que $h(\Sigma)$ separa gruesamente \mathbb{H}^n . Sin embargo Σ no separa gruesamente Ω , por lo tanto $h(\Sigma)$ no puede separar gruesamente Ω' dado que h es una cuasi isometría.

Sea $r < \infty$ tal que $B_r(h(\Sigma))$ separa \mathbb{H}^n en dos componentes profundas X_1, X_2 . Definamos un nuevo espacio hiperbólico truncado

$$\Omega'' = B_r(\Omega').$$

Caso 1: Supongamos que

$$\forall j, B_j'' := B_j' \setminus B_R(\Sigma_j') \subset X_1$$

Entonces $\mathbb{H}^n = X_1 \cup \Omega''$ y tenemos que

$$d_{\mathbb{H}}(x, X_1) \leq r + D,$$

debido a que la distancia hiperbólica de x a cualquier punto de Ω'' es a lo sumo $r + D$ (ver figura 3.2). Más aún, debido a que si $x \in \mathbb{H}^n \setminus X_1 \subset \Omega''$, $d(x, X_1) \leq d(x, \Omega') + d(\Omega', X_1) \leq r + r + D$ se tiene que

$$d_{\mathbb{H}}(x, X_1) \leq 2r + D$$

En particular, si tomamos cualquier punto $x \in X_2$, existe un camino de longitud a lo sumo $2r + D$ que lo conecta a X_1 . Este camino tiene que cruzar el entorno $B_r(f(\Sigma))$ que separa X_1 de X_2 . Esto implica que X_2 es una componente poco profunda, contradiciendo lo asumido. Similarmente (cambiando los roles de X_1 y X_2), descartamos la posibilidad que las B_j'' estén contenidas en X_2 .

Caso 2: Supongamos ahora que existen dos horobolas complementarias B_1', B_2' de Ω' tales que $B_1'' \subset X_1, B_2'' \subset X_2$.

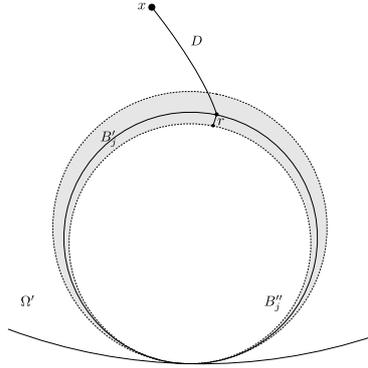


Figura 3.2

Definamos $\Sigma'_i := \partial B'_i, i = 1, 2..$ Si ambas intersecciones $T'_i := \Sigma'_i \cap X_i, i = 1, 2$ contuvieran puntos arbitrariamente lejanos de $f(\Sigma)$, entonces $f(\Sigma)$ separaría Ω' , lo que es de nuevo una contradicción. Por lo tanto, existe $r' < \infty$ tal que para alguna Σ'_i se tiene que $\Sigma'_i \subset B_{r'}(f(\Sigma))$. Supongamos que esto ocurre para $i = 1$. Llamemos $\Sigma'_1 = \Sigma'$.

Demostremos entonces que $f(\Sigma) \subset B_R(\Sigma')$ para algún $R < \infty$. Como la inclusión $i : (\Omega, d) \rightarrow (\Omega, d_{\mathbb{H}})$ es 1-Lipchitz y, por 2.9.1, uniformemente propia, se tiene que la proyección al punto más cercano $\Sigma' \rightarrow f(\Sigma)$ define un embebimiento cuasi isométrico $s : \Sigma' \rightarrow \Sigma$. Como Σ, Σ' son espacios euclídeos de la misma dimensión, s debe ser una cuasi isometría. Así, existe $R' < \infty$ tal que $f(\Sigma) \subset B_{R'}(\Sigma')$. De esta manera, $f(\Sigma)$ está cerca en el sentido Hausdorff a Σ' . □

Observación 3.1.2. Estudiando con mayor profundidad el comportamiento de la imagen de una horoesfera por una cuasi isometría, se puede conseguir una cota uniforme para la distancia entre $h(\Sigma)$ y Σ' .

Teorema 3.2 (Extensión cuasi isométrica). Toda función cuasi isométrica $h : \Omega \rightarrow \Omega'$ se puede extender a una función cuasi isométrica $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$. Además, si h es ρ -equivariante, también lo será f

Demostración: Podemos considerar una función θ que asigna a cada horoesfera Σ la horoesfera Σ' que verifica que $d_H(h(\Sigma), \Sigma') \leq R < \infty$, cuya existencia y unicidad están garantizadas por el lema anterior.

Es inmediato que θ es ρ -equivariante debido a la siguiente cuenta:

$$\begin{aligned} R \geq d_H(h(\rho(\gamma) \cdot \Sigma), \theta(\rho(\gamma) \cdot \Sigma)) &= d_H(\rho(\gamma) \cdot h(\Sigma), \theta(\rho(\gamma) \cdot \Sigma)) \\ &= d_H(h(\Sigma), \rho(\gamma^{-1}) \cdot \theta(\rho(\gamma) \cdot \Sigma)) \end{aligned}$$

y, por la definición de θ , $\rho(\gamma^{-1}) \cdot \theta(\rho(\gamma) \cdot \Sigma) = \theta(\Sigma)$.

Para cada horoesfera periférica Σ , consideremos la composición $\pi \circ h|_{\Sigma}$ siendo π la proyección de $h(\Sigma)$ en Σ' que a cada punto de $h(\Sigma)$ asigna el más cercano en Σ' . Esta composición sigue siendo una cuasi isometría dado que la perturbación que hicimos está controlada por la constante R del lema. Además satisface que $\pi \circ h(\Sigma) \subset \Sigma'$ para cualquier horoesfera periférica Σ . Para evitar cargar la notación, seguiremos llamando h a esta composición.

Extenderemos ahora h a cada horobola $B \subset \mathbb{H}^n \setminus \Omega$. Salvo composición con isometrías, podemos suponer que las horobolas son de radio 1 y punto base ∞ . Usaremos el modelo del semiplano superior de \mathbb{H}^n , por lo que las horobolas B, B' , acotadas por Σ, Σ' están dadas por

$$\{(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

Para cada $\sigma : [0, \infty) \rightarrow B$ un rayo geodésico vertical parametrizado por longitud de arco, definamos el rayo geodésico σ' en B' como el rayo geodésico vertical con inicio en $h(\sigma(0))$ y extendamos a h dentro de B como:

$$f(\sigma(t)) = \sigma'(t)$$

Veamos que la extensión es gruesamente Lipschitz. Para eso, es suficiente considerar puntos $x, y \in B$ con distancia unitaria entre ellos. Si estos están en el mismo rayo geodésico vertical, luego $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Usando la desigualdad triangular, dados x, z arbitrarios e y la proyección de x sobre la horoesfera que contiene a x y es perpendicular a la frontera ideal que contiene, se tiene que $d_{\mathbb{H}}(f(y), f(z)) = d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) + d_{\mathbb{H}}(f(y), f(z)) = d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) + d_{\mathbb{H}}(x, z)$. Componiendo con una isometría, basta estimar $d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y))$ para x, y en la misma horoesfera con punto base ∞ (y, por lo tanto, a mismo tiempo t en el rayo geodésico).

Es fácil a partir de una cuenta estandar de geometría hiperbólica hallar la cota $|x - y| \leq \sqrt{2(e-1)}t$, con $|\cdot|$ la distancia euclídea. Sea Σ_t la horoesfera de nivel t y $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma_t$ una curva parametrizada por longitud de arco que une x, y , y notemos d_{Σ_t} a la métrica Riemmaniana de \mathbb{H}^n restringida a la horoesfera Σ_t . Entonces:

$$d_{\Sigma_t}(x, y) \leq \int_a^b \frac{|\alpha'(s)|}{t^2} ds \leq \frac{|x - y|}{t^2} = \frac{\sqrt{2(e-1)}}{t} \leq \sqrt{2(e-1)}$$

por lo que en nuestro caso, la distancia entre x e y restringida a Σ_t es a lo sumo $\epsilon := \sqrt{2(e-1)}$. Si llamamos $\bar{x}, \bar{y} \in \Sigma$ a las proyecciones verticales de los puntos x, y , la distancia restringida a la horoesfera de radio t puede ser estimada como

$$d_{\Sigma}(\bar{x}, \bar{y}) = t \cdot d_{\Sigma_t}(x, y) \leq \epsilon t.$$

Como h es (L,A) -Lipschitz gruesa,

$$d_{\Sigma}(h(\bar{x}), h(\bar{y})) \leq tL\epsilon + A$$

Por lo que

$$d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) \leq d_{\Sigma_t}(f(x), f(y)) \leq L\epsilon + \frac{A}{t} \leq L\epsilon + A$$

y, por lo tanto, la extensión f es Lipschitz gruesa en la horobola B . Como ser Lipschitz gruesa es una propiedad local, la propiedad se extiende a \mathbb{H}^n . Con el mismo argumento podemos construir la inversa gruesa de f que, por la misma cuenta que f , es gruesamente Lipschitz. Además, la equivariancia de f queda clara por construcción. \square

3.2. Extensión η -cuasi simétrica

El siguiente paso será extender la función f a la frontera ideal de $\partial\mathbb{H}^n = S^{n-1}$

Lema 3.2.1. Sean X, Y espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una (L, A) -cuasi isometría, luego si $B_1, B_2 \subset X$, se tiene que

$$d_H(f(B_1), f(B_2)) \leq Ld_H(B_1, B_2) + A$$

Demostración: Sea $d_H(B_1, B_2) = R$. Para cada $a \in B_1$, existe $b_a \in B_2$ tal que $d_X(a, b_a) \leq R$, y para cada $b \in B_2$, existirá algún $a_b \in B_1$ tal que $d_X(b, a_b) \leq R$. Como f es una cuasi isometría, para cada $f(a) \in f(B_1)$ y cada $f(b) \in f(B_2)$,

$$\begin{aligned} d_Y(f(a), f(b_a)) &\leq Ld_X(a, b_a) + A \leq LR + A \\ d_Y(f(b), f(a_b)) &\leq Ld_X(b, a_b) + A \leq LR + A \end{aligned}$$

por lo que $d_H(f(B_1), f(B_2)) \leq LR + A$. \square

Proposición 3.2.1. Sea $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ una cuasi isometría, entonces

$$\begin{aligned} \partial f : \partial_{\infty}\mathbb{H}^n &\rightarrow \partial_{\infty}\mathbb{H}^n \\ \partial f([c]) &= [f \circ c] \end{aligned}$$

es una biyección con inversa dada por $\partial\bar{f}$ donde \bar{f} es una cuasi inversa de f .

Demostración: Veamos primero que ∂f está bien definida. Sean $\sigma_1, \sigma_2 : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{H}^n$ rayos cuasi geodésicos tales que $[\sigma_1] = [\sigma_2]$, o sea, $d_H(\sigma_1, \sigma_2) < \infty$. Por el lema anterior, $d(f \circ \sigma_1, f \circ \sigma_2)$ es finita y, por lo tanto, $f([\sigma_1]) = f([\sigma_2])$. Sea \bar{f} la cuasi inversa de f . Luego, dado $[\sigma] \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$, se tiene que la distancia Hausdorff entre $[\bar{f}f\sigma]$ y $[\sigma]$, así como entre $[f\bar{f}\sigma]$ y σ están acotadas y, por lo tanto $[\sigma] = [f \circ \bar{f}\sigma] = (\partial f \circ \partial \bar{f})([\sigma])$ y $[\sigma] = [\bar{f} \circ f \circ \sigma] = (\partial \bar{f} \partial f)([\sigma])$. Por lo que ∂f y $\partial \bar{f}$ son inversas una de la otra. \square

Lema 3.2.2. Sea σ una recta geodésica en \mathbb{H}^n , sea H el hiperplano hiperbólico ortogonal a σ y $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ una (L, A) -cuasi isometría. Sea α la geodésica tal que $[\alpha] = [f(\sigma)]$ y definimos $\pi_\alpha : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ la proyección ortogonal a la geodésica α . Luego existe alguna constante c que depende solo de L y de A tal que $\text{diam}(\pi_\alpha f(H)) \leq c$.

Demostración: La demostración está basada en la figura 3.3. Sea x un punto de la intersección de β y H y tomemos $y \in H \setminus \{x\}$. Sea σ el rayo geodésico contenido en H que empieza en x y pasa a través de y y sea $\xi \in S^{n-1}$ el punto final de σ y sean η_1, η_2 los puntos finales de β . Sea además σ_1 y σ_2 los rayos geodésicos que unen ξ con η_1 y η_2 respectivamente y sean x_1 y x_2 las proyecciones a los puntos más cercanos de η_1 y η_2

Para $i = 1, 2$, $d(x, x_i) := k = \cosh^{-1}(\sqrt{2})$ es una constante fija. Esto se ve fácilmente del hecho que la recta σ subdivide al triángulo ξ, x, η_i en dos triángulos congruentes y utilizando trigonometría hiperbólica.

Consideremos ahora la imagen bajo \bar{f} . Sea z uno de los puntos de α más cercanos a $f(x)$. Sea además z_0 el pie de la perpendicular desde $\partial f(\xi)$ a α y α_i el rayo geodésico asintótico a σ_i que empieza en η_i . El elemento z posee distancia uniforme a α_i pues como f es una cuasi isometría, se tiene que

$$d_{\mathbb{H}}(\alpha_i, z) \leq d(\alpha_i, f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) + d(f(x), z) \leq R + Lk + A + R.$$

Sean ahora a_1 y a_2 los puntos sobre α_1 y α_2 respectivamente que están a distancia mínima de z . El segmento geodésico $[z, a_i]$ interseca al rayo geodésico que sale de z_0 y tiene como punto final a $\partial f(\xi)$. Sin pérdida de generalidad asumamos que este segmento es $[z, a_2]$ y llamemos a esta intersección a .

Luego azz_0 es un triángulo rectángulo hiperbólico y, por lo tanto,

$$d(z, z_0) \leq d(z, a) \leq d(z, \alpha_2) \leq 2R + Lk + A$$

Supongamos ahora que $w \in [f \circ \sigma]$. La proyección de w sobre α pertenece al segmento geodésico $[z, z_0]$. Así,

$$d(\pi_\alpha(f(y)), z) \leq 2R + Lk + A.$$

Además, si w es el punto más cercano de α a $f(y)$, entonces, como la proyección ortogonal minimiza la distancia,

$$\begin{aligned} d(\pi_\alpha(f(y)), z) &\leq d(\pi_\alpha(f(y)), \pi_\alpha(w)) + d(\pi_\alpha(w), z) \\ &\leq d(f(y), w) + d(\pi_\alpha(w), z) \\ &\leq R + 2R + Lk + A. \end{aligned}$$

Considerando $c = 2(3R + Lk + A)$ se completa la demostración. \square

Proposición 3.2.2. Sea $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ es una cuasi isometría, entonces ∂f es un homeomorfismo.

Demostración: Basta probar que ∂f es continua pues ya vimos que es biyectiva y el mismo argumento que usaremos muestra la continuidad de la inversa. Veamos que $\bar{f} : \bar{\mathbb{H}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{H}}^n$ es continua en el borde. Sea $[\sigma] \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$ y sea Q un entorno de $\bar{f}([\sigma])$ que, por 2.13.1, lo podemos considerar como entorno de la geodésica asintótica a $f \circ \sigma$ a la que habíamos notado $(f \circ \sigma)'$. Existe t_0 tal que para cada $t > t_0$ la bola de radio c (con c elegido como el lema anterior) centrada en $f(\sigma(t))$ está contenida en Q . Sea H el hiperplano ortogonal a σ que pasa por $\sigma(t_0)$, sea Q' el entorno de σ definido por H y H_t el hiperplano ortogonal que pasa por $\sigma(t)$. Por el lema, sabemos que $f(H_t) \subset Q$. Tomando \bar{H}_t , por la definición de \bar{f} , se tiene que $\bar{f}(\bar{H}_t) \subset Q$ y como

$$Q' = \bigcup_{t \in [t_0, \infty]} \bar{H}_t$$

se tiene que $\bar{f}(Q') \subset Q$ por lo que \bar{f} es continua en $[\sigma]$. \square

Observación 3.2.1. Resulta claro de la construcción que si f es ρ -equivariante, entonces \bar{f} será ρ -equivariante.

Como último paso de la sección, debemos ver que $\partial f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ es η -cuasi simétrica. Para eso, identificaremos \mathbb{H}^n con el semiplano superior

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n > 0\}.$$

Además, la frontera ideal de \mathbb{H}^n la identificaremos con $S^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$. Luego de componer con una isometría, podemos asumir que $\partial f(\infty) = \infty$

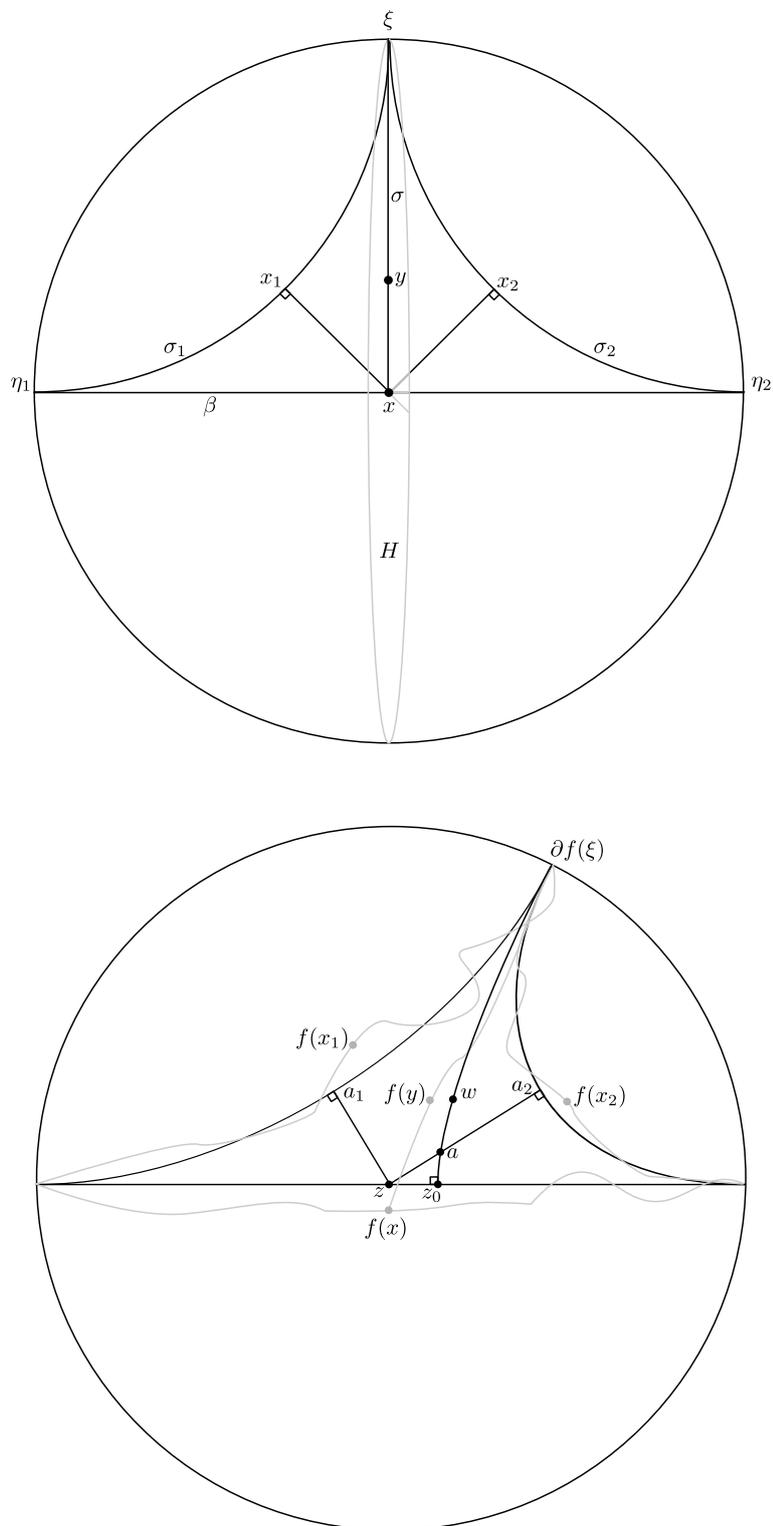


Figura 3.3

Proposición 3.2.3. Existe $C = C(L, A)$ tal que para la función $\eta(t) = t^L \exp(2C + A)$ hace a la restricción $\partial f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ una función η -cuasi simétrica.

Demostración: Sea $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $0 < R_1 \leq R_2 < \infty$, definimos el "anillo"

$$\mathbb{A} = \{v \in \mathbb{R}^{n-1} : R_1 \leq |v - x| \leq R_2\},$$

Notar que R_2/R_1 es la excentricidad de \mathbb{A} . Sea \mathbb{A}' el menor anillo centrado en $\partial f(x)$ que contenga a $\partial f(\mathbb{A})$ (Ver figura 3.4). Sea t' la excentricidad de \mathbb{A}' . Luego, por definición, se tiene que

$$\frac{|\partial f(y) - \partial f(x)|}{|\partial f(z) - \partial f(x)|} \leq t'$$

para todos los puntos y, z con y en el borde exterior y z en el borde interior. Para verificar que ∂f es η -cuasi simétrica basta ver que $t' \leq \eta(t)$.

Luego de componer con isometrías, podemos asumir que $x = 0 = \partial f(x)$. Sea $\alpha \subset \mathbb{H}^n$ la geodésica vertical que conecta 0 con ∞ . Sea $\pi_\alpha : \mathbb{H}^n \rightarrow \alpha$ la proyección ortogonal a α , i.e., para cada $p \in \mathbb{H}^n$, $\pi_\alpha(p) = q$, donde $q \in \alpha$ es el único punto que hace a la geodésica que une p con q ortogonal a α . Esta proyección se extiende de manera continua a

$$\pi_\alpha : \mathbb{H}^n \cup (\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}) \rightarrow \alpha$$

y se tiene que $\pi_\alpha(\mathbb{A}) = [R_1 e_n, R_2 e_n] \subset \alpha$, cuya distancia hiperbólica es $\log(R_2/R_1)$. Por 2.13.1, la (L, A) -cuasi geodésica $\partial f(\alpha)$ está a distancia menor o igual a $\theta(L, A, \delta)$ de α . Como estamos asumiendo que $\partial f(0) = 0$, $\partial f(\infty) = \infty$ y como las cuasi isometrías casi conmutan (ver 2.12.1) con la proyección, se tiene que

$$d(\partial f \pi_\alpha(x), \pi_\alpha \partial f(x)) \leq C = C(L, A, \delta)$$

Veamos ahora que

$$\text{diam}(\pi_\alpha(\partial f(\mathbb{A}))) \leq 2C + L \log(R_2/R_1) + A$$

Observar que \mathbb{A} es la frontera ideal de $\mathbb{B} = \pi_\alpha^{-1}([R_1 e_n, R_2 e_n]) \cap \mathbb{H}^n$ y, como \bar{f} es continua en los puntos de la frontera ideal, es suficiente con verificar la desigualdad para $f(\mathbb{B})$. Para $p, q \in \mathbb{B}$, tenemos que

$$d(\bar{f} \pi_\alpha(p), \pi_\alpha \bar{f}(p)) \leq C \text{ y } d(\bar{f} \pi_\alpha(q), \pi_\alpha \bar{f}(q)) \leq C$$

Y como $d(\pi_\alpha(p), \pi_\alpha(q)) \leq \log(R_2/R_1)$, entonces

$$d(\bar{f} \pi_\alpha(p), \bar{f} \pi_\alpha(q)) \leq L \log(R_2/R_1) + A$$

y usando desigualdad triangular,

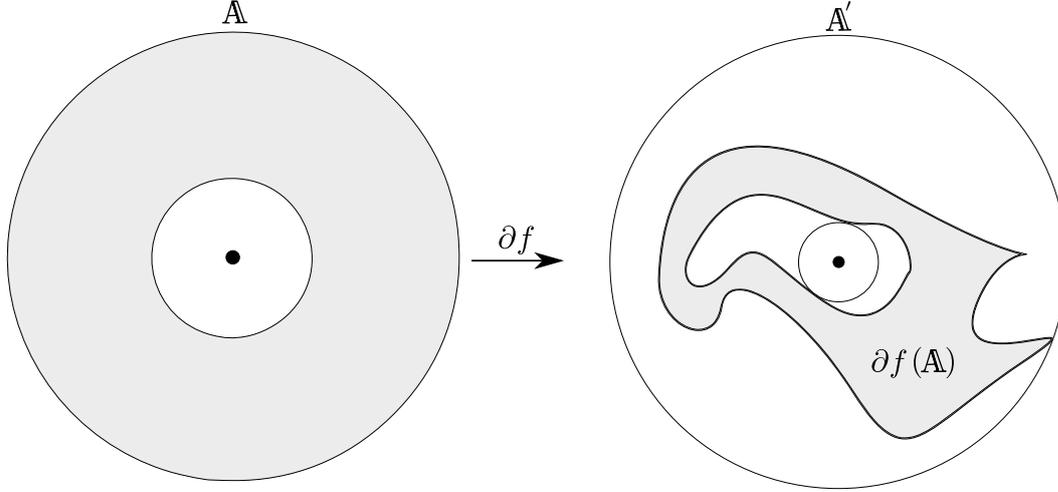


Figura 3.4

$$\begin{aligned}
 d(\pi_\alpha \bar{f}(p), \pi_\alpha \bar{f}(q)) &\leq \\
 &\leq d(\pi_\alpha \bar{f}(p), \bar{f} \pi_\alpha(p)) + d(\bar{f} \pi_\alpha(p), \bar{f}(p) \pi_\alpha(q)) + d(\bar{f} \pi_\alpha \bar{f}(q), \pi_\alpha \bar{f}(q)) \\
 &\leq 2C + L \log(R_2/R_1) + A
 \end{aligned}$$

Para finalizar la demostración, notemos que acabamos de probar que existe $\sigma \subset \alpha$ de longitud menor o igual que $\ell = 2C + L \log(R_2/R_1) + A$ de manera que

$$\partial f(\mathbb{A}) \subset \pi_\alpha^{-1}(\sigma).$$

La excentricidad de $\pi_\alpha^{-1}(\sigma) \subset S^n$ es a lo sumo $\exp(\ell)$ y, por lo tanto, la excentricidad de \mathbb{B} es a lo sumo

$$\exp(\ell) = \exp(2C + A) \cdot \exp(L \log(R_2/R_1)) = \exp(2C + A)t^L,$$

donde llamamos $t = R_2/R_1$

□

3.3. Paso 2

El siguiente objetivo es probar que ∂f es Moebius. Como ∂f es η -cuasi simétrica por 3.2.3, sabemos que es diferenciable en casi todo punto por el teorema 2.32. Por 2.27, cada punto de S^{n-1} o bien es cónico o bien un punto fijo parabólico. Como Γ posee solo contables elementos parabólicos y cada uno solo puede fijar un punto, entonces casi todo punto de S^{n-1} es un límite cónico para Γ . Luego, podemos asumir que casi todo punto de S^{n-1} es un límite cónico de Γ y un punto

de diferenciabilidad de ∂f . Sea $z \in S^{n-1} \setminus \{\infty\}$ un punto de diferenciabilidad que además es límite cónico. Luego de aplicar un cambio de coordenadas, podemos asumir $z = \partial f(z) = 0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\partial f(\infty) = \infty$.

Sea $L \subset \mathbb{H}^n$ la geodésica vertical que empieza en 0 y sea $y_0 \in L$. Como z es un límite cónico, existe una sucesión $\gamma_i \in \Gamma$ tal que para cada i ,

- $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i(y_0) = z$
- $d(\gamma_i(y_0), L) \leq Const$

Sea y_i la proyección al punto más cercano de $\gamma_i(y_0)$ en L . Tomemos la sucesión de traslaciones hiperbólicas $T_i : y \rightarrow t_i y$ que tiene como eje a L y verifica que $T_i(y_0) = y_i$. Consideremos además la sucesión de homeomorfismos cuasi conformes

$$f_i(x) = t_i^{-1} \partial f(t_i x) = T_i^{-1} \circ \partial f \circ T_i(x), x \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Notar que el hecho que $\gamma_i(y_0) \rightarrow z = 0$ implica que $T_i(y_0) = t_i y_0 = y_i \rightarrow 0$ y, por lo tanto,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = 0$$

Así, como ∂f se asumió derivable en 0, se tiene que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(v) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial f(t_i v)}{t_i} = \frac{\partial(\partial f)}{\partial v} = D\partial f(v) := A(v), A \in GL(n-1, \mathbb{R})$$

para cada $v \in \mathbb{R}^{n-1}$. Como además $\partial f(\infty) = \infty$, entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = A$$

puntualmente en S^{n-1}

Veamos que f_i conjuga al grupo $\Gamma_i = T_i^{-1} \Gamma T_i \subset Mob(S^{n-1})$ en el grupo $Mob(S^{n-1})$:

$$f_i \Gamma_i f_i^{-1} = T_i^{-1} \partial f T_i T_i^{-1} \Gamma T_i T_i^{-1} \partial f^{-1} T_i = T_i^{-1} \partial f \Gamma \partial f^{-1} T_i$$

y para cada $\gamma \in \Gamma$, por la ρ -equivariancia de ∂f , tenemos que

$$T_i^{-1} \partial f \gamma \partial f^{-1} T_i = T_i^{-1} \rho(\gamma) \partial f \partial f^{-1} T_i = T_i^{-1} \rho(\gamma) T_i$$

que pertenece a $Mob(S^{n-1})$

Definamos ahora $k_i = \gamma_i^{-1} T_i$. Notar que esta sucesión cae en un compacto de $Isom(\mathbb{H}^n)$ por lo que posee una subsucesión convergente. Vamos a asumir directamente a k_i convergente para evitar cargar la notación.

Como $\Gamma_i = T_i^{-1} \Gamma T_i = (T_i^{-1} \gamma_i)(\gamma_i^{-1} \Gamma \gamma_i)(\gamma_i^{-1} T_i) = k_i^{-1} \Gamma k_i$, se tiene que Γ_i pensada como sucesión, converge en la topología de Chabauty 2.5. Para cada sucesión $\beta_i \in \Gamma_i$ que converge a $\beta \in Isom(\mathbb{H}^n)$, se tiene que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i \beta_i f_i^{-1} = A \beta A^{-1}$$

y como $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ es cerrado en $\text{Homeo}(S^{n-1})$, el límite $A \beta A^{-1}$ es una transformación de Moebius. Como esto sucede para cada $\beta \in \Gamma_\infty$, entonces

$$A \Gamma_\infty A^{-1} \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$$

El subgrupo Γ_∞ es conjugado a Γ y, por lo tanto, no puede tener órbitas finitas en S^{n-1} . En particular, la órbita del infinito contiene un elemento γ de manera que $\gamma(\infty) \notin \{\infty, 0\}$.

Lema 3.2.3. Sea $\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n) = \text{Mob}(S^{n-1})$ tal que $\gamma(\infty) \neq \infty$ y $\gamma(\infty) \neq 0$ y sea $A \in GL(n-1, \mathbb{R})$ tal que $A \gamma A^{-1} \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Entonces A es una similaridad euclídea, o sea, A es de la forma $\lambda Mx + v$, con $M \in O(n-1)$, $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\lambda \in \mathbb{R}_+$

Demostración: Supongamos que A no es una similaridad. Sea P un hiperplano en \mathbb{R}^{n-1} que contenga al 0 pero que no contenga a $A \gamma^{-1}(\infty)$. Luego, $\gamma \circ A^{-1}(P)$ no contiene a ∞ y, por lo tanto, debe ser una esfera S en \mathbb{R}^{n-1} (una esfera redonda, sin deformaciones debido a que $A \gamma A^{-1}$ es Moebius). Como A no es una similaridad, la imagen $A(S)$ debe ser un elipsoide, pero no una esfera. Pero como $A \gamma A^{-1}(P) = A(\gamma A^{-1})(P) = A(S)$, la transformación $A \gamma A^{-1}$ no manda planos en esferas y, por lo tanto, no es Moebius, lo que es una contradicción. Entonces, A debe ser una similaridad. \square

Para finalizar, como la matriz diferencial de ∂f en 0 es una similaridad, ∂f es una transformación conforme en casi todo punto de \mathbb{R}^n .

Para terminar el teorema, veamos que ∂f es una transformación Moebius:

Sea $Q = \text{Isom}(\mathbb{H}^n) \setminus \text{Homeo}(S^{n-1})$ (notar que $\text{Isom}(\mathbb{H}^n) < \text{Homeo}(S^{n-1})$ debido a 2.16) con la topología de convergencia puntual en $\text{Homeo}(S^{n-1})$ y la topología cociente en Q . Como $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ es un subgrupo cerrado, entonces los puntos de Q son cerrados. Además, el grupo $\text{Homeo}(S^{n-1})$ actúa sobre Q por la fórmula:

$$[f] \rightarrow [f \circ g], g \in \text{Homeo}(S^{n-1})$$

Además, como ∂f es ρ -equivariante y debido a la definición de Q , se tiene que

$$[\partial f \circ \gamma] = [\rho(\gamma) \circ \partial f] = [\partial f]$$

y, por lo tanto,

$$[f_i] = [T_i^{-1} \partial f T_i] = [T_i^{-1} \partial f \gamma_i k_i] = [h \gamma_i k_i] = [\partial f k_i]$$

$$[1] = [A] = \lim_{i \rightarrow \infty} ([f_i] \circ k_i) = [\partial f] \circ \lim_{i \rightarrow \infty} k_i = [\partial f] \circ k.$$

Por lo tanto, $[\partial f] = [1] \circ k^{-1} = [1]$ lo que implica que $\partial f \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, o sea, ∂f es una transformación de Moebius, que denotaremos como en el enunciado del teorema, α . Si pensamos a α como una isometría de \mathbb{H}^n y dado que

$$\alpha : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$$

es ρ -equivariante, concluimos que $\alpha : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ es también ρ -equivariante, lo que termina de la demostración.

Bibliografía

- [1] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, *Minimal entropy and Mostow's rigidity theorems*, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 16 (1996), no. 4, 623–649.
- [2] R. Benedetti, C. Petronio, *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Alemania 1992.
- [3] A. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*. Graduate texts in mathematics; 91, Springer-Verlag New York Inc., Nueva York 1983.
- [4] M. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [5] K. Drutu, M. Kapovich, *Geometric Group Theory*.
- [6] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [7] J. Heinonen, *Lectures on Lipschitz analysis*, Reporte. Universidad de Jyväskylä, Departamento de Matemática y Estadística, vol. 100, Universidad de Jyväskylä, Jyväskylä, 2005.
- [8] Marden, Albert (1974), *The geometry of finitely generated kleinian groups*, *Annals of Mathematics. Second Series* 99: 383–462.
- [9] G. Margulis, "Discrete groups of motions of manifolds of nonpositive curvature", pp. 21-34 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, 1974)*, vol. 2, *Canad. Math. Congress*, Montreal, 1975. En Ruso.
- [10] G. A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, *Ergebnisse der Math.* 17, Springer, Berlin, 1991
- [11] G. Mostow, *Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of the hyperbolic space forms*, *Publ. Math. IHES* 34: 53–104, 1968
- [12] G. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, *Annals of mathematics studies* 78, Princeton University Press, 1973

- [13] G. Prasad , *Strong rigidity of Q -rank 1 lattices*, *Inventiones Mathematicae* 21: 255–286, 1973
- [14] J. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds* Springer-Verlag New York, 1994.
- [15] W. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, notas, Princeton University, 1979.