UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

El problema de similaridad de Halmos

Rodrigo Cardeccia

Director: Santiago Muro

Fecha de Presentación Julio 2015

Índice general

Introducción

El problema de similaridad de Halmos nace de una célebre desigualdad demostrada por von Neumann en 1951 [19].

Para presentar la desigualdad necesitamos algunas definiciones. Dado H un Hilbert, consideremos $B(H)$ el espacio formado por los operadores lineales y acotados. El espacio $B(H)$ es un álgebra de Banach con la norma usual y el producto la composición de operadores. Dados T un operador y p un polinomio, con $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, llamamos $p(T)$ al operador lineal $p(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$. A un operador con $\|T\| \leq 1$ lo llamaremos una *contracción* y notaremos $\|p\|_\infty$ a $\sup_{|z|=1} |p(z)|$.

Teorema [Desigualdad de von Neumann] Sea $T \in B(H)$ una contracción. Entonces para todo polinomio p,

$$\|p(T)\|_{B(H)} \leq \|p(z)\|_\infty.$$

Una importante consecuencia de la desigualdad de von Neumann, es que permite dar un morfismo de álgebras unital $P(\mathbb{S}^1) \to B(H)$ sin la necesidad de que el operador sea normal. El costo que se paga es que a diferencia del cálculo funcional, el morfismo deja de ser una isometría. Veremos también en el Corolario 1.2.19 que dicho morfismo se puede extender a un morfismo unital $A(\mathbb{D}) \to B(H)$, donde $A(\mathbb{D})$ es el álgebra del disco.

El problema de Halmos surge de relajar la hipótesis sobre T. Si en vez de suponer T contractivo, suponemos T similar a una contracción, esto es, existe S inversible tal que STS^{-1} es contractivo, entonces tenemos una desigualdad débil de tipo von Neumann.

Sea $T \in B(H)$ similar a una contracción, entonces existe $c > 0$ tal que para todo polinomio p,

$$\|p(T)\|_{B(H)} \leq c\|p\|_\infty. \tag{1}$$

Demostración. Usando que T es similar a una contracción, se puede reescribir T^n de una manera útil. Sean S inversible y R contracción de modo que $STS^{-1} = R$. Luego,

$$T^n = S^{-1}RSS^{-1}RS \ldots S^{-1}RSS^{-1}RS = S^{-1}R^nS. \tag{2}$$

De esto es sencillo reescribir el polinomio $p(T)$,

$$\begin{aligned} p(T) &= \sum_k a_k T^k = \sum_k a_k S R^k S^{-1} \\ &= S\left(\sum_k a_k R^k\right)S = S P(R) S^{-1}. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la desigualdad de von Neumann a $p(R)$ y tomando $c = \|S\|\|S^{-1}\|$,

$$\|P(T)\| = \|S P(R) S^{-1}\| \leq \|S\|\|S^{-1}\|\|p(R)\| \leq c\|p\|_\infty.$$

□

Un operador T que cumple la desigualdad (1) se dice *polinomialmente acotado*. En el párrafo anterior vimos que todo operador similar a una contracción es polinomialmente acotado. Halmos se preguntó en [8], si vale la recíproca ¿Si T es polinomialmente acotado, es necesariamente similar a una contracción?

La historia del problema es sin duda interesante. El problema de Halmos se remonta al estudio de Sz-Nagy sobre operadores *power bounded*. Dado $T \in B(H)$, T se dice *power bounded* si existe $c > 0$ tal que $\sup_n \|T^n\| < c$. Usando la ecuación (2), es sencillo ver que si T es similar a una contracción entonces es power bounded. En 1959, Sz-Nagy [16, 17], se pregunta si vale la recíproca ¿Serán todos los operadores power bounded similares a una contracción? Lo logra probar para algunos casos particulares. Lo demuestra para el caso en el que el operador es inversible, más aún, prueba que éstos son similares a un unitario . Además lo prueba para operadores compactos. Sin embargo no lo logra en el caso general y tampoco consigue dar una caracterización para operadores similares a una contracción.

En 1964, Foguel descubre el primer ejemplo de un operador power bounded no similar a una contracción [7]. En el Capítulo 3 veremos que dicho operador es de la forma

$$F = \begin{pmatrix} S^* & X \\ 0 & S \end{pmatrix} \in B(l_2 \oplus l_2),$$

donde S y S^* son el *shift* y *coshift* usuales de $B(l_2)$, y $X \in B(l_2)$ es una proyección. Al operador X se lo suele llamar *el símbolo de F*.

Al poco tiempo de que Foguel presenta su contraejemplo, Halmos da su propia versión en *On Foguel's answer to Nagy's question* [8]. Allí observa que aplicando la desigualdad de von Neumann a operadores similares a una contracción, se consigue que estos sean polinomialmente acotados. Además es muy sencillo probar que un operador polinomialmente acotado es power bounded. Ésto se debe a que se puede reescribir la condición de ser power bounded, en término de que se cumpla la desigualdad (1) solo para monomios. Halmos se pregunta entonces si todo operador polinomialmente acotado es similar a una contracción.

El primer paso para responder a la pregunta de Halmos, era ver si el ejemplo presentado por Foguel era efectivamente polinomialmente acotado. En 1968 Lebow [14] prueba que dicho ejemplo no es polinomialmente acotado. Dos años más tarde, Halmos presenta el problema en sus notas *Ten Problems in Hilbert Space* [9], donde expone diez importantes problemas sin resolver en espacios de Hilbert. A partir de ese entonces es cuando el problema se termina de hacer famoso y se pasa a conocer como "el problema de similaridad de Halmos".

En 1984 Paulsen [22], usando la novedosa teoría de espacios de operadores, encuentra la primer caracterización de los operadores similares a una contracción. Paulsen prueba que un operador es similar a una contracción si y sólo si es completamente polinomialmente acotado. Un operador T se dice completamente polinomialmente acotado, si existe $c > 0$ tal que para todo n y para toda matriz de polinomios $Q \in M_n(P(\mathbb{S}^1))$,

$$\|Q(T)\|_{B(H^n)} \leq c\|Q\|_{M_n(P(\mathbb{S}^1))}.$$

El caso particular $n = 1$ muestra que si un operador T es completamente polinomialmente acotado es en particular polinomialmente acotado. En este punto se reformula el problema de Halmos. La pregunta es ahora si todo operador polinomialmente acotado es completamente polinomialmente acotado.

A pesar de fallar el ejemplo de Foguel, muchos matemáticos creían que modificando el símbolo de dicho operador, se podía hallar un operador polinomialmente acotado no similar a una contracción. Una forma de Hankel A en $B(l_2)$ es una matriz infinita $(A)_{i,j}$, tal que $A_{i,j} = A_{k,l}$ si $i + j = k + l$. Por otro lado un conocido Teorema de Nehari [18] muestra que una forma de Hankel tiene asociada una función $\psi \in L_\infty(\mathbb{S}^1)$ de modo que las coordenadas $A_{0,i}$ son el i-ésimo coeficiente de Fourier de ψ. Peller propone que el símbolo de F sea una forma de Hankel inducida por una ψ tal que $\psi' \in BMO$. En 1984, Peller [25] prueba que un tal F necesariamente es polinomialmente acotado. Sin embargo dos años más tarde Bourgain [3] prueba que $\psi' \in BMO$ implica F similar a una contracción. Finalmente en 1996 Peller y Aleksandrov [1] demuestran que un operador de Foguel F, con símbolo una forma de Hankel A_ψ, es similar a una contracción si y sólo si $\psi' \in BMO$ lo que da por terminada la busqueda de operadores de Foguel con símbolos de Hankel.

Sorprendentemente un año más tarde Pisier [27] encuentra un operador de Foguel-Hankel polinomialmente acotado no similar a una contracción. La diferencia con los anteriores casos radica en que F ya no está definida en $B(l_2 \oplus l_2)$ sino en $B(l_2(H) \oplus l_2(H))$ donde H es un Hilbert separable. El símbolo X encontrado es el inducido por una sucesión de operadores que satisfaga la *CAR* (canonical anticommutative relations, ver Capítulo 3).

Para probar que dicho operador de Foguel no es similar a una contracción, Pisier usa la caracterización obtenida por Paulsen. Sin embargo su prueba de que dicho operador es polinomialmente acotado es muy díficil. Al poco tiempo de circular la versión preliminar de su paper, otros matemáticos, como Kisliakov [13], McCarthy [15] y Davidson y Paulsen [6] hacen significativos avances. El aporte más importante se debe a Paulsen y Davidson, que encuentran una simplificación en términos del Teorema de Nehari-Page [21], una generalización al caso vectorial del Teorema de Nehari [18].

Esta tesis tiene como objetivo principal presentar una resolución del problema de similaridad de Halmos . La tesis está esencialmente dividida en dos partes. Los Capítulos 1 y 2 están dedicados a demostrar la caracterización de Paulsen, mientras que en el Capítulo 3 se presenta el contraejemplo de Pisier.

En el Capítulo 1 se estudian los operadores completamente positivos. Se da una primera demostración de la desigualdad de von Neumann y además que dicha desigualdad induce un morfismo de álgebras $\rho : C(\mathbb{S}^1) \to B(H)$ unital, completamente positivo y completamente contractivo. Para ello será necesario estudiar la relación existente entre operadores unitales completamente contractivos y operadores unitales completamente positivos. Luego se demuestra una caracterización debida a Stinespring de los operadores completamente positivos. Por último un Teorema de extensión para operadores completamente positivos.

El Capítulo 2 está dividido en dos partes. La primera de ellas estudia los operadores completamente acotados, en donde se generalizan los resultados obtenidos para operadores completamente positivos. En la segunda parte, agregando la condición de que el operador sea morfismo de álgebras, se estudia la caracterización debida a Paulsen. Como corolario se demuestra un Teorema de Haagerup, que caracteriza una famosa conjetura debida a Kadison.

En el Capítulo 3 se presenta el contraejemplo de Pisier de un operador polinomialmente acotado no similar a una contracción. Para ello, se estudian primero el Teorema de Nehari Page y los operadores de Foguel-Hankel. Por último se presenta también el contraejemplo de Foguel de un operador power bounded no similar a una contracción.

Capítulo 1

Operadores completamente positivos

En este capítulo estudiaremos a los operadores completamente positivos. A diferencia de los operadores positivos, esta generalización tiene la ventaja de que se mantienen las fuertes propiedades de los funcionales positivos.

Salvo unos pocos resultados interesantes, sólamente daremos aquellas propiedades necesarias para caracterizar la conjetura de Halmos. Al principio del capítulo daremos una breve introducción de los espacios de operadores, sistemas de operadores y de la $*$-estructura matricial inducida por M_n y una C^*-álgebra $\mathscr{A}$. Antes de estudiar a los operadores completamente positivos, nos pareció necesario estudiar a los operadores positivos, una generalización de los funcionales positivos. Veremos que muchas de las propiedades conocidas ya no son válidas en general y estudiaremos condiciones para recuperar dichas propiedades. Por último veremos que un operador polinomialmente acotado, induce un morfismo de álgebras unital $\rho : P(\mathbb{S}^1) \to B(H)$, y que en el caso en el que el operador sea contractivo, el morfismo se puede extender de forma positiva a $C(\mathbb{S}^1)$.

Luego demostraremos algunos resultados generales para operadores completamente positivos, estudiaremos la relación entre operadores completamente positivos y completamente contractivos. Veremos también que el morfismo de álgebras inducido por un operador contractivo, admite una extensión completamente positiva a $C(\mathbb{S}^1)$ y aplicaremos los resultados obtenidos previamente. Finalmente nos enfocaremos en probar dos resultados centrales en esta tesis: el Teorema de factorización de Stinespring 1.4.1, que caracteriza a los operadores completamente positivos y el Teorema de extensión de Arveson 1.6.6, que establece que todo operador completamente positivo se puede extender a todo el álgebra.

1.1. Preliminares

Empecemos definiendo una C^*-álgebra. En esta Tesis solo consideraremos C^*álgebras con unidad.

Definición 1.1.1. *Sea $\mathscr{A}$ una $\mathbb{C}-$álgebra, decimos que un operador $* : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ es una involución si para todo $a \in \mathscr{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, vale que*

i) $(a^*)^* = a$,

ii) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$ y

iii) $(ab)^* = b^* a^*$.

Definición 1.1.2. *Decimos que $\mathscr{A}$ es una C^*-álgebra si es una $\mathbb{C}$-álgebra, existen una involución $*$ y una norma $\|-\|$ tal que*

i) $(\mathscr{A}, \|-\|)$ es completo,

ii) $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ para todo $a, b \in \mathscr{A}$,

iii) $\|aa^*\| = \|a\|^2$.

Diremos en este caso que $\|-\|$ es una $*$-norma.

Definición 1.1.3. *Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y $a \in \mathscr{A}$. Llamamos el espectro de a al conjunto $\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda.1 - a\}$. Decimos que a es autoadjunto si $a^* = a$ y que a es positivo si a es autoadjunto y $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$.*

Además de poseer una $*$-norma, las C^*-álgebras tienen una estructura de orden natural, inducida por los elementos positivos. En general, diremos que $b \geq a$ si $b - a$ es positivo en $\mathscr{A}$. Como toda C^* álgebra puede ser representada en un

Hilbert ([5] Capítulo VII, Teorema 5.17), esto es, existe un $*$-monomorfismo $\pi : \mathscr{A} \to B(H)$, y los $*$-monomorfismos preservan la positividad, un elemento es positivo en $\mathscr{A}$ si y sólo si lo es en $B(H)$. En $B(H)$ hay una caracterización útil, un operador $T \in B(H)$ es positivo si y sólo si para todo $h \in H$, $\langle T(h), h\rangle \geq 0$.

Además de poseer una $*$-norma y una estructura de orden parcial, a una C^*-álgebra se le puede asociar una sucesión de C^*-álgebras. El estudio de esta sucesión en forma global será fundamental en esta tesis. Veamos como construir dicha sucesión. Consideremos $M_n(\mathscr{A})$ las matrices de dimensión n con coeficientes en $\mathscr{A}$. Puesto que las matrices tienen un producto y una involución natural, definidos como $[AB]_{i,j} = \sum_l A_{i,l}B_{l,j}$ y $[A^*]_{i,j} = A^*_{j,i}$, es natural preguntarse si se le puede dotar de una $*$-norma.

Empecemos con el caso sencillo en el que $\mathscr{A}$ sea $B(H)$ para algún Hilbert H. Si H es un Hilbert, entonces H^n también, con

$$\left\langle \overline{h}, \overline{g}\right\rangle_{H^n} = \sum_i \langle h_i, g_i\rangle_H \text{ y } \|\overline{h}\|^2_{H^n} = \sum_i \|h_i\|^2_H.$$

El espacio $B(H^n)$ es una C^*álgebra con la involución y producto usuales. También hay un isomorfismo (lineal) entre $B(H^n)$ y $M_n(B(H))$,

$$\begin{pmatrix} T_{1,1} & \dots & T_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,1} & \dots & T_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sum_l T_{1,l}h_1 \\ \vdots \\ \sum_l T_{n,l}h_n \end{pmatrix}.$$

El morfismo preserva la involución y el producto. Vía el isomorfismo podemos dotar a $M_n(B(H))$ de una estructura de C^*-álgebra.

Sea ahora $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y $\pi : \mathscr{A} \to B(H)$ una representación. El morfismo π induce un monomorfismo $\pi_n : M_n(\mathscr{A}) \hookrightarrow M_n(B(H))$ con

$$\pi_n\left[\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right] \mapsto \begin{pmatrix} \pi(a_{1,1}) & \dots & \pi(a_{1,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi(a_{n,1}) & \dots & \pi(a_{n,n}) \end{pmatrix}.$$

Vale que el morfismo π_n preserva la involución, el producto y además que $\pi_n(\mathscr{A})$ es un subespacio cerrado de $M_n(B(H))$. En consecuencia $M_n(\mathscr{A})$ hereda la estructura de C^*-álgebra de $M_n(B(H))$. Por otro lado, como dada una C^*-álgebra hay una única $*$-norma ([5] Capítulo VIII Teorema 4.8), la norma que construimos no depende de la representación elegida. Con esta estructura, π_n es un $*$-monomorfismo y entonces $(\pi_n, B(H^n))$ es una representación de $M_n(\mathscr{A})$. Como los elementos positivos son estables por $*$-monomorfismos, los elementos positivos de $M_n(\mathscr{A})$ están unívocamente determinados. Un elemento $P \in M_n(\mathscr{A})$ es positivo si y sólo si $\pi_n(P) \in B(H^n)$ es positivo para algún π_n, con $(\pi, B(H))$ una representación de $\mathscr{A}$. Vemos entonces que aparte de poseer una norma y un orden parcial natural, las C^*-álgebras tienen asociada una sucesión de C^*-álgebras.

Debido a que los espacios $M_n(\mathscr{A})$ y $M_n \otimes \mathscr{A}$ son isomorfos, donde el isomorfismo viene dado por $(A)_{i,j} \mapsto \sum_{i,j} E_{i,j} \otimes [A]_{i,j}$ y notamos $E_{i,j}$ a las matrices elementales usuales de M_n, el espacio $M_n \otimes \mathscr{A}$ posee una $*$-norma (y es única). Resulta útil entender la estructura de C^*-álgebra desde el punto de vista tensorial.

Dados H y K dos espacios de Hilbert, el espacio $H \otimes K$ tiene asociado un producto interno natural dado por $\langle h_1 \otimes k_1, h_2 \otimes k_2\rangle_2 = \langle h_1, h_2\rangle_H \langle k_1, k_2\rangle_K$. Sin embargo, el espacio $H \otimes K$ no necesariamente es completo. Debido a que en esta tesis no consideraremos otra norma en $H \otimes K$, en general nos referiremos a $H \otimes K$ como la completación de $(H \otimes K, \|-\|_2)$.

Dadas las C^*-álgebras M_n y $\mathscr{A}$, el espacio $M_n \otimes \mathscr{A}$ hereda un producto y una involución natural, dados por $(A_1 \otimes b_1)(A_2 \otimes b_2) = A_1A_2 \otimes b_1b_2$ y $(A \otimes b)^* = A^* \otimes b^*$. Consideremos $(\pi, B(H))$, una representación de $\mathscr{A}$. El operador $Id_{M_n} \otimes \pi : M_n \otimes \mathscr{A} \to M_n \otimes B(H) \equiv B(\mathbb{C}^n) \otimes B(H) \equiv B(C^n \otimes H)$ es nuevamente un morfismo que preserva la involución, el producto y además $M_n \otimes \mathscr{A}$ es cerrado en $B(\mathbb{C}^n \otimes H)$. Luego $M_n \otimes \mathscr{A}$ hereda una estructura de C^*-álgebra y $Id_{M_n} \otimes \pi$ es una representación de $M_n \otimes \mathscr{A}$.

Observemos que en las construcciones consideraremos π_n y $Id_{M_n} \otimes \pi$ morfismos inducidos por π. Ésto se puede hacer independientemente de la $*$-estructura, dado M un subespacio de una C^*-álgebra, $\mathscr{B}$ una C^*-álgebra y $\phi : M \to \mathscr{B}$ un operador, uno puede considerar $\phi_n : M_n(M) \to M_n(\mathscr{B})$ definido como

$$\phi_n\left[\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right] \mapsto \begin{pmatrix} \phi(a_{1,1}) & \dots & \phi(a_{1,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(a_{n,1}) & \dots & \phi(a_{n,n}) \end{pmatrix}.$$

Es fácil probar que ϕ_n es acotado, sin embargo su norma puede depender de n. Nos va a interesar especialmente el caso en el que exista una cota que mayore a todas las normas simultaneamente.

Definición 1.1.4. *Dada $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, decimos que M es un espacio de operadores si es un subespacio cerrado de $\mathscr{A}$.*

Definición 1.1.5. *Sean M un espacio de operadores, $\mathscr{B}$ una C^*-álgebra y $\phi : M \to \mathscr{B}$ un operador. Decimos que ϕ es completamente acotado si*

$$\sup_n \|\phi_n\|_{M_n(M)} < \infty.$$

O equivalentemente si,

$$\sup_n \|Id_{M_n} \otimes \phi\|_{M_n \otimes M} < \infty.$$

En este caso llamaremos a dicho supremo $\|\phi\|_{cb}$ (Por completely bounded).

En general, dada una Propiedad P para un operador ϕ, el adjetivo *completamente*, se refiere a que la propiedad P se mantiene para ϕ_n para cada n. En la categoría de espacios de operadores, los objetos siguen siendo espacios de Banach, pero los morfismos pasan a ser los operadores completamente acotados. Es importante notar que la estructura varía según la C^*-álgebra elegida. En el siguiente ejemplo veremos que todo espacio de Banach puede ser visto como un espacio de operadores, sin embargo esto no agrega información adicional.

Ejemplo 1.1.6. Todo espacio de Banach puede ser visto como un espacio de operadores.

En efecto, consideremos X^* el dual de X y B_{X^*} su bola unitaria, que por el Teorema de Alaogu es w^*- compacto (y además es Hausdorff). Luego $C(B_{X^*})$ es una C^*-álgebra. Veamos que podemos identificar a X con un subespacio de $C(B_{X^*})$. Definamos $\hat{}: X \to C(B_{X^*})$, como $\hat{x}(\phi) = \phi(x)$. Como en $C(B_{X^*})$ estamos considerando la w^*-topología es fácil probar que $\hat{}$ está bien definido y es isométrico, de donde $X \hookrightarrow C(B_{X^*})$.

Ejemplo 1.1.7. Sean X e Y espacios de Banach y consideremos $X \hookrightarrow C(B_{X^*})$ y $Y \hookrightarrow C(B_{Y^*})$. Entonces $\phi : X \to Y$ es acotado si y sólo si ϕ es completamente acotado. Más aún, $\|\phi\|_{cb} = \|\phi\|$.

Demostración. Basta ver que para cada n, $\|\phi_n\| \le \|\phi\|$. Considerando $\tilde{\phi} = \frac{\phi}{\|\phi\|}$, podemos suponer $\|\phi\| \le 1$ y probar que $\|\phi_n\| \le 1$. Sea $(X_{i,j})_{i,j}^n \in M_n(C(B_{X^*}))$, con cada $X_{i,j} = \hat{x}_{i,j}$. Se puede probar que (y lo haremos en la Observación 1.3.12)

$$\|X_{i,j}\| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,1}(\varphi) & \dots & \hat{x}_{1,n}(\varphi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{x}_{n,1}(\varphi) & \dots & \hat{x}_{n,n}(\varphi) \end{pmatrix} \right\|_{M_n} \right\} = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} \varphi(x_{1,1}) & \dots & \varphi(x_{1,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(x_{n,1}) & \dots & \varphi(x_{n,n}) \end{pmatrix} \right\|_{M_n} \right\}.$$

Consideremos $\phi_n(X_{i,j})$ y calculemos su norma.

$$\begin{aligned} \|\phi_n(X_{i,j})\| &= \left\| \begin{pmatrix} \phi(\hat{x}_{1,1}) & \dots & \phi(\hat{x}_{1,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\hat{x}_{n,1}) & \dots & \phi(\hat{x}_{n,n}) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \widehat{\phi(x_{1,1})} & \dots & \widehat{\phi(x_{1,n})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\phi(x_{n,1})} & \dots & \widehat{\phi(x_{n,n})} \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sup_{\psi \in B_{Y^*}} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} \psi(\phi(x_{1,1})) & \dots & \psi(\phi(x_{1,n})) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi(\phi(x_{n,1})) & \dots & \psi(\phi(x_{n,n})) \end{pmatrix} \right\|_{M_n} \right\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Notemos que como $\|\phi\| \le 1$, entonces $\psi \circ \phi \in B_{X^*}$, de donde usando la igualdad (1.1),

$$\|\phi_n(X_{i,j})\| \leq \sup_{\varphi \in B_X} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} \varphi(x_{1,1}) & \dots & \varphi(x_{1,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(x_{n,1}) & \dots & \varphi(x_{n,n}) \end{pmatrix} \right\|_{M_n} \right\} = \|X_{i,j}\|.$$

□

Observemos que si $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ son C^*-álgebras y $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y $\rho : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$, entonces $(\rho \circ \phi)_n : M_n(\mathscr{A}) \to M_n(\mathscr{C})$, no es otra cosa que $\rho_n \circ \phi_n$. De esto deducimos que si ϕ y ρ son completamente acotados, entonces $\|\rho \circ \phi\|_{cb} \leq \|\rho\|_{cb}\|\phi\|_{cb}$.

1.2. Operadores Positivos

Así como en un espacio de operadores analizamos las normas $\|(-)_n\|$ de forma simultanea, también nos va a interesar estudiar de manera conjunta la positividad de los operadores. Ésto ya no lo haremos en la categoría de espacios de operadores, sino que lo haremos en la categoría de sistema de operadores. En esta nueva categoría cambian los objetos (sistemas de operadores) y los morfismos (operadores completamente positivos). Antes de estudiar a los operadores completamente positivos, nos será útil estudiar a los operadores positivos. Éstos son una generalización de los funcionales positivos. Sin embargo, muchas de las propiedades conocidas se pierden. Veremos que no necesariamente un operador positivo admite una extensión positiva al álgebra y que su norma no es necesariamente alcanzada en la unidad.

Definición 1.2.1. *Si S es un subconjunto de una C^*-álgebra $\mathscr{A}$, definimos $S^* = \{a : a^* \in S\}$. Decimos que S es autoadjunto si $S = S^*$. Por último decimos que S es un sistema de operadores si S es un subespacio (no necesariamente cerrado) autoadjunto y $1 \in S$.*

Definición 1.2.2. *Sea $\mathscr{B}$ una C^*-álgebra y $S \subseteq \mathscr{A}$ un sistema de operadores. Decimos que el operador $\phi : S \to \mathscr{B}$ es positivo si $\phi(a)$ es positivo para todo $a \in S$ positivo. Además, decimos que ϕ es completamente positivo si $\phi_n : M_n(S) \to M_n(\mathscr{B})$ es positivo para todo n. Por último decimos que ϕ es autoadjunto si $\phi(a^*) = \phi(a)^*$ para todo $a \in S$.*

Uno puede preguntarse por qué son los sistemas de operadores el lugar correcto para analizar la positividad de los morfismos. Una posible respuesta es que en general se espera que los elementos positivos generen el espacio y además que ser positivo implique ser autoadjunto. Si suponemos que S es un sistema de operadores, veremos en las Observaciones 1.2.3 y 1.2.4 que esto sucede. Por otro lado, la condición de que $1 \in S$ no afecta a la positividad del operador. Si 1 no está en S, uno puede considerar $\tilde{S} = 1 \oplus S$ de forma que $\tilde{S}$ resulta un sistema de operadores. Por otro lado, $\phi : S \to \mathscr{B}$ es positivo, si y sólo si la extensión lineal a $\tilde{S} \to \mathscr{B}$, definida como $\phi(1) = 1$ es positiva.

Recordemos que una C^*-álgebra está genererada por sus elementos positivos. Para demostrarlo uno usualmente prueba primero que el generado por los elementos autoadjuntos es todo el álgebra y luego que los positivos generan a los autoadjuntos. Sin embargo, para ver ésto último uno usualmente pasa por el cálculo funcional. Ésto ya no se puede hacer en un sistema de operadores (al menos de forma trivial), ya que vía el cálculo funcional los elementos positivos encontrados podrían no estar en S. A pesar de ello el resultado sigue siendo válido. Las siguientes observaciones explotan la estructura de sistema de operadores.

Observación 1.2.3. *Si S es un sistema de operadores entonces está generado por sus elementos positivos.*

Demostración. Vaemos primero que los autoadjuntos generan S. Sea $x \in S$, luego $x = r_1 + r_2$ con $r_1 = \frac{x+x^*}{2}$ y $r_2 = \frac{x-x^*}{2i}$.

Sea ahora a autoadjunto y veamos que existen p_1 y p_2 positivos tal que $a = P_2 - P_1$.

Tomemos $p_2 = \frac{1}{2}(\|a\|1 + a)$ y $p_1 = \frac{1}{2}(\|a\|1 - a)$. Ambos resultan positivos pues $\pm a \leq \|\pm a\|1 = \|a\|1$ además es claro que $p_2 - p_1 = a$. □

Observación 1.2.4. *Si ϕ es positivo, entonces resulta autoadjunto.*

Demostración. Sea a autoadjunto y probemos que $\phi(a)$ es autoadjunto. Por la observación previa, existen p_2 y p_1 positivos tal que $a = p_2 - p_1$. Luego $\phi(a) = \phi(p_2) - \phi(p_1)$. Como ϕ es positivo, tenemos que para cada i, $\phi(p_i)$ es positivo y en consecuencia autoadjunto. Como resta de autoadjuntos es autoadjunto, concluimos que $\phi(a)$ es autoadjunto.

Sea ahora $x \in S$, por las observaciones previas existen a, b autoadjuntos tal que $x = a + ib$. Luego

$$\phi(x^*) = \phi(a - ib) = \phi(a) - i\phi(b) = [\phi(a) + i\phi(b)]^* = \phi(x)^*$$

□

El siguiente ejemplo muestra que un operador positivo no necesariamente alcanza la norma en la unidad. El mismo es a su vez un ejemplo de un operador positivo que no se puede extender al álgebra, pero para ver esto último necesitamos antes presentar un Teorema debido a Stinespring (Teorema 1.2.9).

Ejemplo 1.2.5 (Arveson)**.** Sea $S \subseteq C(\mathbb{S}^1)$ el sistema de operadores generado por las funciones: $\{1, z, \overline{z}\}$ y sea $\phi : S \to M_2$ definido como: $\phi(a1, bz, c\overline{z}) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$. Entonces ϕ es positivo y $\|\phi\| \neq \|\phi(1)\|$.

Demostración. Se puede ver que los elementos positivos de S son de la forma $a + bz + \overline{bz}$ con $a \geq 2|b|$. Además una condición equivalente para que una matriz sea positiva es que sus entradas diagonales y determinantes sean positivos. Es trivial entonces ver que ϕ es positivo. Si tomamos $p = a + bz + \overline{bz}$, $\phi(p)$=$\begin{pmatrix} a & 2b \\ 2\overline{b} & a \end{pmatrix}$, resulta positiva porque $a \geq |b|$. Además, teniendo en cuenta que $\phi(1) = Id$ y que $\phi(z)$=$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ tenemos que $2 = 2\|\phi(1)\| \geq \|\phi\| \geq \|\phi(z)\| = 2$. □

A pesar de que la norma de un operador positivo no esteé acotada por la norma de evaluarlo en la unidad, ssucede que existe $c > 0$ tal que para todo ϕ positivo, $\|\phi\| \leq c\|\phi(1)\|$.

Proposición 1.2.6. *Sea S un sistema de operadores y $\mathscr{B}$ una C^*-álgebra. Si $\phi : S \to \mathscr{B}$ es un operador positivo, entonces ϕ es acotado y además $\|\phi\| \leq 2\|\phi(1)\|$.*

Usaremos el siguiente lema.

Lema 1.2.7. *Sean p_1 y p_2 elementos positivos en una C^* álgebra A, entonces* $\|p_1 - p_2\| \leq \text{máx}\{\|p_1\|, \|p_2\|\}$

Demostración. Sea $(\pi, B(H))$ una representación de $\mathscr{A}$. Como para todo h en $B(H)$ vale que $\|\pi(h)\| = \|h\|$ y h es positivo si y sólo si $\pi(h)$ es positivo, podemos suponer que tanto p_1, como p_2 pertenecen a $B(H)$. Además $p_1 - p_2$ es autoadjunto, por lo que tenemos que $\|p_1 - p_2\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle p_1(x) - p_2(x), x\rangle|$. Sea x con $\|x\| \leq 1$ fijo, teniendo en cuenta que p_1 y p_2 son positivos, resulta que

$$\begin{aligned} |\langle p_1(x) - p_2(x), x\rangle| &= |\langle p_2(x), x\rangle - \langle p_1(x), x\rangle| \leq \text{máx}\{\langle p_2(x), x\rangle, \langle p_1(x), x\rangle\} \\ &\leq \text{máx}\{\|p_1\|\|x\|, \|p_2\|\|x\|\} \leq \text{máx}\{\|p_1\|, \|p_2\|\}. \end{aligned}$$

Luego, $\|p_2 - p_1\| \leq \text{máx}\{\|p_1\|, \|p_2\|\}$.

□

Demostración de la Proposición 1.2.6. Sea h un elemento autoadjunto perteneciente a S y sean p_1 y p_2 como en la Observación 1.2.3, $p_i = \frac{1}{2}(\|h\|1 \pm h)$, y ambos son positivos. Tenemos entonces que $\phi(h) = \phi(p_2) - \phi(p_1)$ y $\phi(p_i)$ es positivo para cada i. Aplicando el lema enterior,

$$\|\phi(p_2) - \phi(p_1)\| \leq \text{máx}\{\|\phi(p_1)\|, \|\phi(p_2)\|\}.$$

Luego,

$$\|\phi(h)\| \leq \frac{1}{2}\,\text{máx}\{\phi(\|h\|1 + h), \phi(\|h\|1 - h)\} \leq \frac{1}{2}(\|h\|\|\phi(1)\| + \|\phi(h)\|),$$

de donde, $\|\phi(h)\| \leq \|h\|\|\phi(1)\|$.

Finalmente si a es arbitrario, lo podemos escribir como, $a = h + ik$ con h y k autoadjuntos y $\|h\|, \|k\| \leq \|a\|$. Entonces,

$$\|\phi(a)\| \leq \|\phi(h)\| + \|\phi(k)\| \leq 2\|\phi(a)\|.$$

□

En el caso particular en el que el sistema de operadores sea todo el álgebra vale que si ϕ es positivo entonces su norma es alcanzada en la unidad. Para demostrarlo, necesitaremos previamente probar el resultado para el caso en el que el álgebra sea $C(X)$.

Lema 1.2.8. *Sean $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra con unidad y p_i, $i = 1, ..., n$ elementos positivos de $\mathscr{A}$ tal que $\sum_{i=1}^n p_i \leq 1$. Si $\lambda_i, i = 1, ...n$ son escalares con $|\lambda_i| \leq 1$, entonces $\| \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i\| \leq 1$.*

Demostración. Consideremos en $M_n(\mathscr{A})$ las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} p_1^{\frac{1}{2}} & \dots & p_n^{\frac{1}{2}} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} \lambda_1 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n 1 \end{pmatrix} \; y \; S = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que $MNM^* = S$ y que la norma de S es justamente $\| \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i\|$. Por otro lado, $\|MNM^*\| \leq 1$. Esto se debe a que, por un lado $\|N\| \leq 1$ por ser una matriz diagonal y tener sus entradas con norma menor o igual que 1. Por otro lado, MM^* es otra matriz diagonal con entradas $\sum_{i=1}^n p_i$. Como dichas entradas tienen norma menor o igual que 1, $1 \geq \|MM^*\| = \|M\|^2$.

□

Teorema 1.2.9. *Sean $\mathscr{B}$ una C^*-álgebra con unidad, X un conjunto compacto y Hausdorff y $\phi : C(X) \to \mathscr{B}$ un operador positivo. Entonces $\|\phi\| = \|\phi(1)\|$.*

Demostración. Considerando $\psi = \frac{\phi}{\phi(1)}$, podemos suponer que $\|\phi(1)\| = 1$ y Probar que $\|\phi\| = 1$. Como $1 = \|\phi(1)\| \leq \|\phi\|$, basta probar que $\|\phi\| \leq 1$.
Sea f con $\|f\| \leq 1$, debemos ver que $\|\phi(f)\| \leq 1$. Sea $\epsilon > 0$, como X es compacto, existen x_i y U_i abiertos, $0 \leq i \leq n$ tal que $X \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $|f(x) - f(x_i)| < \epsilon$ para todo $x \in X$. Consideremos q_i una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}$. Es decir: q_i son funciones continuas no negativas con $\sum_{i=1}^n q_i = 1$ y $sop(q_i) \subset U_i$. Notemos que si $q_i(x) \neq 0$, entonces $x \in U_i$ y en consecuencia $|f(x) - f(x_i)| < \epsilon$.
Fijemos $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{i=1}^n q_i(x) f(x_i) \right| &= \left| f(x) \sum_{i=1}^n q_i(x) - \sum_{i=1}^n q_i(x) f(x_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n (f(x) - f(x_i)) q_i(x) \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(x) - f(x_i)| |q_i(x)| \\ &= \sum_{i: x \in sop(q_i)} |f(x) - f(x_i)| q_i(x) \leq \sum_{i: x \in sop(q_i)} \epsilon q_i(x) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Conluimos que

$$\|f - \sum_i q_i f(x_i)\| < \epsilon. \tag{1.2}$$

Apliquemos el lema anterior con $\lambda_i = f(x_i)$ y $p_i = \phi(q_i)$. Verifiquemos brevemente que se cumplen las hipótesis. Debemos ver que p_i son elementos positivos, $|f(x_i)| \leq 1$ y $\sum_{i=1}^n \phi(q_i) \leq 1$.

Debido a que ϕ es un operador positivo y q_i son funciones positivas, vale que p_i es positivo. Además por hipótesis $\|f\| \geq 1$ (y ϕ es contractivo), de donde $|f(x_i)| \leq 1$. En cuanto a la útlima condición, como $1 - \sum q_i \geq 0$ y ϕ es postivo, resulta que $\sum \phi(q_i) \leq 1$. Aplicando el lema anterior,

$$\left\| \sum f(x_i) \phi(q_i) \right\| \leq 1. \tag{1.3}$$

Finalmente, aplicando las ecuaciones (1.2) y (1.3),

$$\begin{aligned} \|\phi(f)\| &= \left\| \phi \left(f - \sum f(x_i) q_i + \sum f(x_i) q_i \right) \right\| \\ &\leq \left\| \phi \left(f - \sum f(x_i) q_i \right) \right\| + \left\| \sum f(x_i) \phi(q_i) \right\| \\ &\leq \|\phi\| \left\| f(x) - \sum q_i f(x_i) \right\| + 1 \leq \epsilon \|\phi\| + 1. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.2.10. El operador definido en el Ejemplo 1.2.5 no se puede extender de forma positiva a $C(\mathbb{S}^1)$.

Demostración. Vimos en el Ejemplo 1.2.5, que $\|\phi\| = 2\|\phi(1)\|$. De existir una extensión $\tilde{\phi}$, por el teorema anterior,

$$\|\tilde{\phi}\| = \|\tilde{\phi}(1)\| = \|\phi(1)\| < \|\phi\|.$$

Que es una contradicción. □

Observación 1.2.11. Una reformulación equivalente a la desigualdad de von Neumann es que si $T \in B(H)$ es contractivo, entonces el operador $\rho_T : P(\mathbb{S}^1) \to B(H)$, donde $\rho(p) = p(T)$ y $P(\mathbb{S}^1)$ es el subespacio generado por los polinomios, es también contractivo. En este punto surge la pregunta natural ¿Será el morfismo ρ_T positivo?

Definición 1.2.12. *Diremos que $\rho : P(\mathbb{S}^1) \to B(H)$ es un morfismo de von Neumann, si ρ es un morfismo de álgebras acotado y unital.*

Observación 1.2.13. *Sea H un Hilbert, $A = \{\rho : P(\mathbb{S}^1) \to B(H) :\ \rho$ es morfismo de von Neumann$\}$ y $B = \{T \in B(H) :$ T es polinomialmente acotado$\}$. Entonces las aplicaciones $\Lambda : A \to B$, y $\Gamma : B \to A$, definidas como $\Lambda(\rho) = \rho(z)$ y $\Gamma(T) = \rho_T$ son aplicaciones inversas. Más aún,*

$$\|\rho_T\| = \inf_c\{\|p(T)\| \leq c\|p\|_\infty\}.$$

A este fenomeno también se lo puede ver desde el punto de vista de los conjuntos espectrales. Se dice que un conjunto X, compacto de $\mathbb{C}$, es K-espectral para un operador T, si existe un operador $\rho : R(X) \to B(H)$ tal que $\rho(\frac{p}{q}) = \frac{p(T)}{q(T)}$, esté bien definido y tenga norma menor o igual que K. Observemos que a priori la desigualdad de von Neumann no es equivalente a que $\mathbb{S}^1$ sea 1-espectral para todo operador contractivo. Sin embargo lo es. En la proposición 1.2.25 veremos que existe $\rho : R(\mathbb{S}^1) \to B(H)$ bien definido y que además es positivo. Por otro lado, en el Corolario 1.2.26, veremos que necesariamente ρ es contractivo.

Si T es polinomialmente acotado, entonces su morfismo de von Neumann es un morfismo de álgebras, $\rho(pq) = \rho(p)\rho(q)$. Sin embargo si la extensión de ρ al álgebra $S = P(\mathbb{S}^1) + \overline{P(\mathbb{S}^1)}$ está bien definida, el operador ρ podría dejar de ser multiplicativo. De hecho, si fuese multiplicativo,

$$Id = \rho(1) = \rho(z\overline{z}) = T\rho(\overline{z}),$$

de donde se deduce que T tiene que ser necesariamente inversible.

Para responder a la pregunta de la Observación 1.2.11 haremos uso del siguiente lema.

Lema 1.2.14 (Fejer-Riesz)**.** *Sea $f(z) = \sum_{n=-N}^{n=N} a_n z^n$ una función continua estrictamente positiva en $\mathbb{S}^1$, entonces existe un polinomio $p(z) = \sum_{n=0}^{n=N} b_n z^n$ tal que*

$$f(z) = |p(z)|^2.$$

Demostración. Observemos que como f es real, $a_n = \overline{a}_{-n}$ y $a_0 \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$\sum_{n=-N}^{n=N} a_n z^n = f(z) = \overline{f(z)} = \sum_{n=-N}^{n=N} \overline{a_n z^n} = \sum_{n=-N}^{n=N} \overline{a_n} z^{-n} = \sum_{n=-N}^{n=N} \overline{a_{-n}} z^n,$$

de donde se concluye la afirmación. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir $a_{-N} \neq 0$. Consideremos $g(z) = f(z)z^N$, de forma que g, visto ahora en $\mathbb{C}$, es un polinomio de grado $2N$ y $g(0) \neq 0$. Además debido a la antisimetría de sus coeficientes, g cumple la siguiente igualdad

$$\overline{g(\overline{z}^{-1})} = z^{-2N} g(z),$$

ya que,

$$\overline{g(\overline{z}^{-1})} = \overline{\overline{z}^{-1^N}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{n=N} a_n(\overline{z}^{-1})^n + \sum_{n=1}^{n=N} \overline{a_n}(\overline{z}^{-1})^{-n}\right)} = z^{-N}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{n=N} \overline{a}_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{n=N} a_n z^n\right) = z^{-2N} g(z).$$

luego, recordando que 0 no es raíz de g, se deduce que r es una raíz de g si y sólo si $\overline{r}^{-1}$ también lo es. Más aún, se puede ver que si $|r| \neq 1$, la multiplicidad de r y $\overline{r}^{-1}$ es la misma. Por otro lado, debido a que f es estrictamente positivo, g no tiene raices de módulo 1.

Sean $\{r_1, ..., r_n\}$ tal que $\{r_1, \overline{r_1}^{-1} ..., r_n, \overline{r_n}^{-1}\}$ son todas las raíces de g y consideremos

$$p(z) = (z - r_1)...(z - r_n)\ ,\ q(z) = (z - \overline{r_1}^{-1})...(z - \overline{r_n}^{-1}),$$

de modo que $a_N p(z)q(z) = g(z)$. Veamos que p y q cumplen la siguiente relación:

$$\overline{q(z)} = (-1)^N \frac{\overline{z}^N p(\overline{z}^{-1})}{r_1...r_N}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
(-1)^N \overline{z}^N p(\overline{z}^{-1}) &= (-1)^N \overline{z}^N (\overline{z}^{-1} - r_1)...(\overline{z}^{-1} - r_n) \\
&= (-1)^N (1 - \overline{z}r_1)...(1 - \overline{z}r_n) \\
&= (\overline{z}r_1 - 1)...(\overline{z}r_n - 1) \\
&= r_1...r_n(\overline{z} - r_1^{-1})...(\overline{z} - r_n^{-1}) \\
&= r_1...r_n\overline{q(z)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, volviendo al círculo unitario y recordando que allí f es positiva,

$$\begin{aligned}
f(z) &= |f(z)| = |z^N g(z)| = |g(z)| \\
&= |a_N p(z)||q(z)| = |a_N||p(z)||\overline{q(z)}| \\
&= |a_N||p(z)|\left|(-1)^N \frac{\overline{z}^N p(\overline{z})^{-1}}{r_1...r_N}\right| = \left|\frac{a_N}{r_1...r_N}\right| |p(z)|^2.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.15. *Sea T un operador contractivo en un Hilbert H y S el sistema de operadores $P(\mathbb{S}^1) + \overline{P(\mathbb{S}^1)}$, entonces el operador definido por $\rho(p + \overline{q}) = p(T) + q(T)^*$ está bien definido y es positivo (y acotado).*

Demostración. Es sencillo ver que ρ está bien definido. Sean p, q, r, s polinomios tal que $p + \overline{q} = r + \overline{s}$, debemos ver que $p(T) + q(T)^* = r(T) + s(T)^*$. Como $p - r = \overline{s} - \overline{q}$, $p - r \in S \bigcap S^*$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que $p - r = \lambda$. Finalmente $p(T) + q(T)^* = \lambda Id + r(T) - \overline{\lambda} Id + s(T)^* = r(T) + s(T)^*$.

Para probar la positividad de ρ, basta probar que $\rho(f)$ es positivo para todo f estrictamente positivo. En efecto, si f fuese solo positivo, podríamos consirerar $g_\epsilon = f + \epsilon 1$ que sería estrictamente positivo para cualquier $\epsilon > 0$ y luego $\rho(f) + \epsilon Id_H = \rho(g_\epsilon) > 0$. Tomando límite con $\epsilon \to 0$ se deduciría que $\rho(f) \geq 0$.

Sea $f \in S$ estrictamente positivo. Por el Lema 1.2.14, f es de la forma

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_i \overline{a_j} z^{i-j}.$$

Debemos ver que

$$\rho(f) = f(T) = \sum_{i,j=0}^{n} a_i \overline{a_j}\, \tilde{T}(i - j)$$

es un operador positivo, donde

$$\tilde{T}(k) = \left\{ \begin{array}{c} T^k,\ k \geq 0 \\ T^{*-k}, k \leq 0 \end{array} \right).$$

Veamos que para todo $x \in H$ vale que $\langle (f(T)x, x\rangle \geq 0$ Para ello consideremos la matriz $\tilde{T}_{i,j} = \tilde{T}(i-j)$,

$$\tilde{T}_{i,j} = \begin{pmatrix} Id & T^* & \dots & T^{*n} \\ T & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & T^* \\ T^n & \dots & T & Id \end{pmatrix}$$

y notemos que

$$\langle T(f)x, x\rangle_H = \left\langle \sum_{i,j} \tilde{T}(i-j)\overline{a_j}x, \overline{a_i}x \right\rangle_H = \left\langle \tilde{T}_{i,j}h, h \right\rangle_{H^n},$$

donde tomamos $h = (\overline{a}_0 x, \dots, \overline{a}_n x)$. Luego, basta ver que la matriz de operadores $\tilde{T}_{i,j}$ es una matriz positiva.
Sea

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ T & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & T & 0 \end{pmatrix}$$

Observemos que $\|R\| \leq 1$, $R^n = 0$ y que $I - R$ es inversible (con inversa $I + R + R^2 + ... + R^{n-1}$). Tenemos entonces que

$$\tilde{T}_{i,j} = \sum_{i=0}^{n-1} R^i + \sum_{i=1}^{n-1} R^{*^i} = (I-R)^{-1} + (I-R^*)^{-1} - I.$$

Veamos que la matriz $\tilde{T}_{i,j}$ es positiva. Consideremos y tal que $h = (I-R)y$.

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{T}_{i,j}h, h \right\rangle_{H^n} &= \left\langle ((I-R)^{-1} + (I-R^*)^{-1} - I)h, h \right\rangle_{H^n} \\ &= \left\langle (I-R)^{-1}h, h \right\rangle + \left\langle (I-R^*)^{-1}h, h \right\rangle - \langle h, h\rangle \\ &= \langle y, (I-R)y\rangle + \langle (I-R)y, y\rangle - \langle (I-R)y, (I-R)y\rangle \\ &= \langle y, y\rangle - \langle y, Ry\rangle + \langle (I-R)y, y\rangle - \langle (I-R)y, y\rangle + \langle (I-R)y, Ry\rangle \\ &= \langle y, y\rangle - \langle Ry, Ry\rangle. \end{aligned}$$

La última igualdad es siempre positiva por ser R una contracción.

□

Observemos que el conjunto formado por las funciones racionales en $\mathbb{S}^1$ es exactamente $P(\mathbb{S}^1) + \overline{P(\mathbb{S}^1)}$. En efecto, $P(\mathbb{S}^1) + \overline{P(\mathbb{S}^1)} \subseteq R(\mathbb{S}^1)$ por estar $P(\mathbb{S}^1) + \overline{P(\mathbb{S}^1)}$ generado por funciones racionales. Por otro lado, $R(\mathbb{S}^1)$ es la menor álgebra $\mathscr{A}$ tal que $z, \frac{1}{z} \in \mathscr{A}$. Como $z, \overline{z} \in P(\mathbb{S}^1) + \overline{P(\mathbb{S}^1)}$ y éste último es un álgebra, deducimos que $P(\mathbb{S}^1) + \overline{P(\mathbb{S}^1)} = R(\mathbb{S}^1)$.

Si T es un operador contractivo en un Hilbert, entonces su morfismo de von Neumann se puede extender de forma positiva a las funciones racionales. Por la Proposición 1.2.6 dicho morfismo es acotado. Para probar la desigualdad de von Neumann, lo único que resta ver es que el morfismo tiene norma menor o igual que uno.

Lema 1.2.16. *Sean S un sistema de operadores que además es un álgebra, B una C^*-algebra y $\phi : S \to B$ un operador positivo, entonces ϕ se puede extender de forma positiva a la clausura de S.*

Demostración. Trivialmente ϕ se extiende de forma continua a la clausura de S. Resta ver que la extensión es positiva.

Sea $p \in \overline{S}$ un elemento positivo, veamos que existe una sucesión de elementos positivos en S (a_n) tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = p$. En efecto, sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra tal que $S \hookrightarrow \mathscr{A}$. Considerando $(\pi, B(H))$ una representación de $\mathscr{A}$, podemos suponer que S es un sistema de operadores contenido en $B(H)$. Sea $(a_n)_n \in S$ tal que $(a_n)_n \to p$. Considerando para cada n, $\tilde{a}_n = \frac{a_n + a_n^*}{2}$, $\tilde{a}_n$ es autoadjunto y $\lim_{n\to\infty}(\tilde{a}_n)_n = \frac{p+p^*}{2} = p$. Podemos suponer $(a_n)_n$ sucesión de autoadjuntos. Sea $(a_{n_k})_k$

subsucesión tal que para cada k, $\|a_{n_k} - p\| < \frac{1}{2k}$. Sea $\tilde{a}_{n_k} = a_{n_k} + \frac{Id}{k}$. Es claro que $(\tilde{a}_{n_k})_k$ tiende a p y pertenece a S, veamos que es positivo. En efecto,

$$\langle a_{n_k} + \frac{Id}{k} - p(y), y\rangle > \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k}\right)\|y\|^2 > 0,$$

de donde $a_{n_k} \geq p$.

Sea entonces (a_n) sucesión de positivos en S tendiendo a p. Como ϕ es positivo y continuo, para cada n, $\phi(a_n)$ es positivo y además $\lim_{n\to\infty} \phi(a_n) = \phi(p)$. Como $\phi(p)$ es límite de positivos, $\phi(p)$ resulta positivo.

□

Corolario 1.2.17. *Si T es contractivo entonces su morfismo de von Neumann se puede extender de forma positiva a $C(\mathbb{S}^1)$.*

Demostración. Definamos S como $P(\mathbb{S}^1) + \overline{P(\mathbb{S}^1)}$. Por el Teorema 1.2.15 podemos extender ρ a S de forma positiva. Como S es una C^*-álgebra y separa puntos, por el teorema de Stone-Weierstrass S es denso en $C(\mathbb{S}^1)$ y gracias al lema previo, la extensión a $C(\mathbb{S}^1)$ es positiva.

□

Corolario 1.2.18 (desigualdad de von Neumann)**.** *Sea T un operador contractivo en un Hilbert, entonces para todo polinomio $p \in C(\mathbb{S}^1)$,*

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_\infty.$$

Demostración. Por el Corolario 1.2.17 existe un operador $\rho : C(\mathbb{S}^1) \to B(H)$, $\rho(f) = f(T)$ bien definido y positivo. Además, como $\mathbb{S}^1$ es un compacto, por el Teorema 1.2.9, la norma de ρ se alcanza en 1. Luego vale que

$$\|P(T)\| = \|\rho(P)\| \leq \|\rho\|\|P\|_\infty = \|\rho(1)\|\|P\|_\infty = \|Id\|\|P\|_\infty.$$

□

Corolario 1.2.19. *Sea $T \in B(H)$ contractivo y sea $A(\mathbb{D})$ el álgebra del disco, las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ y continuas en el borde. Entonces existe $\rho : A(\mathbb{D}) \to B(H)$ tal que $\rho(f) = f(T)$ y $\|\rho\| \leq 1$.*

Demostración. Basta definir ρ en los polinomios y extenderla por densidad. Definamos $\rho(p) := p(T)$ y veamos que ρ tiene norma menor o igual que 1. Observemos que como los polinomios son armónicos, por el principio del módulo máximo se tiene que $\|p\|_{\infty,\mathbb{D}} = \|p\|_{\infty,\mathbb{S}^1}$. Luego por la desigualdad de von Neumann 1.2.18,

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\infty,\mathbb{S}^1} = \|p\|_{\infty,\mathbb{D}}.$$

□

Si $\mathscr{A}$ es una C^*-álgebra unital, podemos generalizar la desigualdad de von Neumann de forma sencilla. Ésto permite también generalizar la noción de morfismo de von Neumann para el caso en el que el codominio sea una C^*-álgebra unital.

Corolario 1.2.20. *Sea $a \in \mathscr{A}$ una C^*-álgebra con $1 \in \mathscr{A}$ y $\|a\| \leq 1$, entonces existe $\rho : C(\mathbb{S}^1) \to \mathscr{A}$ positivo y unital, tal que $\rho(p) = p(a)$ para todo polinomio p.*

Demostración. Sea $(\pi, B(H))$ una representación de $\mathscr{A}$. Como $\|\pi(a)\| \leq 1$, existe $\rho : C(\mathbb{S}^1) \to B(H)$ tal que $\rho(p) = p(\pi(a))$ y $\rho(p^*) = p(\pi(a^*))$ para todo polinomio p. Luego,

$$\begin{aligned}\rho(C(\mathbb{S}^1)) = \rho(\overline{P(\mathbb{S}^1) + P(\mathbb{S}^1)^*}) &\subseteq \overline{\rho(P(\mathbb{S}^1) + P(\mathbb{S}^1)^*)} \\ &\subseteq C^*(\pi(a)) \subset \pi(\mathscr{A}).\end{aligned}$$

El operador $\pi^{-1} \circ \rho$ es el buscado. □

El corolario anterior nos permite encontrar una condición sobre el sistema de operadores S de modo que si ϕ es positivo, entonces su norma se alcanza en 1.

Corolario 1.2.21. *Sean $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ C^*-álgebras con unidad, $\mathscr{A}$ una subálgebra unital de $\mathscr{B}$, S el sistema de operadores $\mathscr{A} + \mathscr{A}^*$, y $\phi : S \to \mathscr{C}$ positivo. Entonces $\|\phi(a)\| \leq \|\phi(1)\|\|a\|$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir $\|a\| = 1$.

Como ϕ es positivo la extensión a $\overline{S}$ sigue siendo positiva y además $\overline{S}$ es ahora una C^*-álgebra. Usando el corolario anterior con $\overline{S}$, existe $\rho : C(\mathbb{S}^1) \to \overline{S}$ tal que $\rho(p) = p(a)$. El operador $\phi \circ \rho$ es positivo y por el Teorema 1.2.9 su norma se alcanza en 1. Entonces

$$\|\phi(a)\| = \|\phi(\rho(z))\| \leq \|\phi(\rho(1))\|\|z\|_\infty \leq \|\phi(1)\|1.$$

□

Corolario 1.2.22. *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ C^*-álgebras con unidad y $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un operador positivo, entonces $\|\phi\| = \|\phi(1)\|$.*

Demostración. Aplicar el corolario anterior.

□

Hasta aquí estuvimos estudiando condiciones de modo que si $\phi : S \to \mathscr{B}$ es positivo y unital entonces ϕ sea contractivo. Ahora estamos interesados en la recíproca ¿Si ϕ es contractivo y unital, entonces es necesariamente positivo?

Para responder a la pregunta haremos uso del siguiente lema.

Lema 1.2.23. *Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, $S \subseteq \mathscr{A}$ un sistema de operadores y $\varphi : S \to \mathbb{C}$ un funcional con $\varphi(1) = 1$ y $\|\varphi\| = 1$. Entonces,*

i) Si a es un elemento normal de $\mathscr{A}$ y $a \in S$, entonces $\varphi(a)$ pertenece a la cápsula convexa cerrada de $\sigma(a)$.

ii) φ es positiva.

Demostración. Sea $a \in S$ un elemento normal y supongamos que no pertenece a la cápsula convexa cerrada de $\sigma(a)$. Observemos que la cápsula convexa de un compacto es la intersección sobre todos los discos que contienen al compacto. Luego existe $\alpha \in \mathbb{C}$ y un $r > 0$ tal que $|\varphi(a) - \alpha| > r$ y para todo $\lambda \in \sigma(a)$, $|\lambda - \alpha| < r$. Consideremos $a - \alpha 1$. Como $\sigma(a - \alpha 1) = \sigma(a) - \alpha$, vale que para todo $\beta \in \sigma(a - \alpha 1)$, $|\beta| < r$.

Teniendo en cuenta que $a - \alpha 1$ es normal, se deduce que $\|a - \alpha 1\| = \rho(a - \alpha 1) \leq r$. Esto es una contradicción, ya que por un lado $|\varphi(a - \alpha 1)| = |\varphi(a) - \alpha| > r$ y por el otro $|\varphi(a - \alpha 1)| \leq \|\varphi\|\|a - \alpha 1\| \leq r$.

Probemos ahora que φ es positivo. Sea a positivo y veamos que $\varphi(a)$ es positivo. Como $\sigma(a)$ está contenido en los reales no negativos, entonces la cápsula convexa de $\sigma(a)$ también lo está. Por la parte i) del Lema se deduce que $\varphi(a)$ es positivo.

□

Proposición 1.2.24. *Sean S un sistema de operadores, $\mathscr{B}$ una C^*-álgebra con unidad y $\phi : S \to \mathscr{B}$ un operador contractivo unital, entonces ϕ es positivo.*

Demostración. Sea $(\pi, B(H))$ una representación de $\mathscr{B}$. Como $\pi(b)$ es positivo si y sólo si b es positivo, podemos suponer que $\mathscr{B} = B(H)$. Debemos ver que para todo $a \in \mathscr{A}$ positivo y $x \in H$ vale que $\langle \phi(a)x, x \rangle \geq 0$. Sea $x \in H$ fijo con $\|x\| = 1$ y consideremos $\varphi_x(a) = \langle \phi(a)x, x \rangle$. Como ϕ es unital y contractivo, se tiene que $\varphi_x(1) = 1$ y que $\|\varphi_x\| \leq 1$. Aplicando el lema anterior concluimos que φ_x es positivo y en consecuencia para todo $a \in \mathscr{A}$, $x \in H$, $\langle \phi(a)x, x \rangle \geq 0$.

□

En el Teorema 1.2.15 vimos que si T es contractivo, entonces su morfismo de von Neumann admite una extensión positiva a $P(\mathbb{S}^1) + \overline{P(\mathbb{S}^1)}$. Ésto vale en general.

Proposición 1.2.25. *Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ C^*-álgebras con unidad, M un subespacio de $\mathscr{A}$, $1 \in M$ y $\phi : M \to \mathscr{B}$ un operador contractivo y unital, entonces la extensión $\tilde{\phi} : M + M^* \to \mathscr{B}$ definida como $\tilde{\phi}(a + b^*) = \phi(a) + \phi(b)^*$ está bien definida y es la única extensión positiva de ϕ a $M + M^*$.*

Demostración. La unicidad de la extensión es clara, ya que los operadores positivos que salen de un sistema de operadores son autoadjuntos (Observación 1.2.4). Necesariamente $\tilde{\phi}(a^*) = \tilde{\phi}(a)^* = \phi(a)^*$.

Probemos la buena definición. Debemos verificar que si $a + b^* = a' + b'^*$, entonces $\phi(a) + \phi(b)^* = \phi(a') + \phi(b')^*$ o equivalmente , tomando $c = a - a'$, que para todo $c \in M \bigcap M^*$, $\phi(c^*) = \phi(c)^*$. Observemos que $M \bigcap M^*$ es un sistema de operadores y que $\phi|_{M \bigcap M^*}$ es contractivo y unital. Aplicando la Proposición 1.2.24, tenemos que $\phi|_{M \bigcap M^*}$ es positivo. Como los operadores positivos son autoadjuntos, vale que si $c \in M \bigcap M^*$, entonces $\phi(c^*) = \phi(c)^*$. Ésto prueba la buena definición.

Para probar que $\tilde{\phi}$ es positivo, podemos suponer que $\mathscr{B} = B(H)$ con H un Hilbert. Debemos ver que para todo x y para todo a positivo, vale que $\left\langle \tilde{\phi}(a)x, x \right\rangle$ es positivo. Sea x con $\|x\| = 1$ fijo y consideremos $\tilde{\varphi}_x : M + M^* \to \mathbb{C} := \left\langle \tilde{\phi}(a)x, x \right\rangle$. Es suficiente probar que $\tilde{\varphi}_x$ es positivo. Sea ahora $\varphi_x : M \to \mathbb{C}$ definido como $\varphi_x = \langle \phi(a)x, x \rangle$. Notemos que φ_x cumple que es unital, $\|\varphi_x\| = 1$ y $\tilde{\varphi}_x(a + b^*) = \varphi_x(a) + \overline{\varphi_x(b)}$. Sea $\hat{\varphi}_x$ una extensión de Hahn-Banach de φ_x a $M + M^*$ con $\|\hat{\varphi}_x\| = 1$. Como $\hat{\varphi}_x$ es contractivo y unital, entonces por la Proposición 1.2.24 es positivo. Finalmente, por la unicidad de las extensiones positivas a $M + M^*$ que probamos en la primera parte, $\hat{\varphi}_x$ debe cumplir necesariamente que

$$\hat{\varphi}_x(a + b^*) = \hat{\varphi}_x(a) + \overline{\hat{\varphi}_x(b)} = \varphi_x(a) + \overline{\varphi_x(b)} = \tilde{\varphi}_x(a + b^*).$$

Como $\hat{\varphi}_x = \tilde{\varphi}_x$ y $\hat{\varphi}_x$ es positivo, se tiene que $\tilde{\varphi}_x$ es positivo.

□

Corolario 1.2.26. *Sean $\mathscr{C}, \mathscr{B}$ C^*-álgebras con unidad y sea S el sistema de operadores $A + \mathscr{A}^*$ con $\mathscr{A}$ un subálgebra unital de $\mathscr{B}$. Si $\phi : S \to \mathscr{C}$ es unital, entonces ϕ es positivo si y sólo si ϕ es contractivo.*

Demostración. Aplicar el Corolario 1.2.21 y la Proposición 1.2.24.

□

En el caso de que ϕ sea un morfismo de von Neumann, el corolario anterior dice que ϕ tiene extensión positiva a $P(\mathbb{S}^1) + \overline{P(\mathbb{S}^1)}$ si y sólo si el operador T es contractivo.

1.3. Operadores completamente positivos

Comencemos con la definición de un operador completamente positivo.

Definición 1.3.1. *Sean S un sistema de operadores, $\mathscr{B}$ una C^*-álgebra y $\phi : S \to \mathscr{B}$ un operador. Decimos que ϕ es n-positivo si, $\phi_n : M_n(S) \to M_n(\mathscr{B})$ definido como*

$$\phi_n \left[\begin{pmatrix} s_{1,1} & \cdots & s_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & \cdots & s_{n,n} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \phi(s_{1,1}) & \cdots & \phi(s_{1,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(s_{n,1}) & \cdots & \phi(s_{n,n}) \end{pmatrix}$$

es positivo.

Definición 1.3.2. *Decimos que $\phi : S \to \mathscr{B}$ es completamente positivo si ϕ es n- positivo para todo n.*

Mostremos algunos ejemplos de operadores completamente positivos.

a) El primer ejemplo de un operador completamente positivo es el de un $*$-morfismo. En efecto, si π es un $*$-morfismo, entonces π_n también y como los $*$-morfismos son positivos se deduce que π_n es positivo para todo n.

b) Para un segundo ejemplo, fijemos x en una C^*-álgebra $\mathscr{A}$ y definamos $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ como $\phi(a) = xax^*$. Para probar que ϕ es completamente positivo, basta observar que

$$\phi_n(A) = \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x^* \end{pmatrix}.$$

El último ejemplo es el de un funcional positivo. Como la demostración no es trivial, lo encapsulamos en una Proposición aparte.

Proposición 1.3.3. *Sea S un sistema de operadores y $\varphi : S \to \mathbb{C}$ un funcional positivo. Entonces φ es completamente positivo.*

Demostración. Sea $A \in M_n(S)$ una matriz positiva, y digamos $A = (a_{i,j})^n_{i,j}$. Debemos ver que $\varphi_n(A) \in M_n$ es una matriz positiva. Equivalentemente debemos probar que para todo $V \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle \varphi_n(A)V, V\rangle_{\mathbb{C}^n} \geq 0.$$

Sea $V \in \mathbb{C}^n$ con $V = (x_1, ..., x_n)$, luego

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n(A)V, V\rangle &= \sum_j \left\langle [\varphi_n(A)V]_j, [V]_j \right\rangle_{\mathbb{C}} = \sum_j \sum_i \left\langle [\varphi_n(A)]_{i,j} x_i, x_j \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \sum_{i,j} \left\langle \varphi(a_{i,j}) x_i, x_j \right\rangle_{\mathbb{C}} = \varphi\left(\sum_{i,j} a_{i,j} x_i \overline{x}_j \right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Consideremos $X \in M_n$ la siguiente matriz.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 \\ x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos también el producto X^*AX. Como A es una matriz positiva, dicho producto es positivo. Observemos que la expresión (1.4) no es otra cosa que φ evaluado en la $(1, 1)$ coordenada de X^*AX. Como la $(1, 1)$ entrada de una matriz positiva es siempre positiva (considerando $\langle Pe_1, e_1\rangle$) y φ es positivo, deducimos que la expresión (1.4) es siempre positiva.

□

Combinando los dos primeros ejemplos obtenemos el prototipo de un operador completamente positivo. Veremos en el Teorema de representación de Stinespring 1.4.1 que si ϕ es completamente positivo, entonces existen un espacio de Hilbert H, $\pi : \mathscr{A} \to B(H)$ un $*$-morfismo y $V \in B(H)$ tal que $\phi(-) = V\pi(-)V^*$.

El siguiente lema será de utilidad.

Lema 1.3.4. *Sean $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra con unidad y $a, b \in \mathscr{A}$, entonces*

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a^* & b \end{pmatrix}$ *es positiva en M_2 si y sólo si $a^*a \leq b$.*

Demostración. Considerando una representación $(\pi, B(H))$, podemos suponer que $a, b \in B(H)$ y probar que la matriz $A := \begin{pmatrix} Id & a \\ a^* & b \end{pmatrix}$ es positiva en $M_2(B(H))$ si y sólo si $aa^* \leq b$ en $B(H)$.

Dado $\overline{h} \in H \oplus H$ con $\overline{h} = (h_1, h_2)$, calculemos $\left\langle A\overline{h}, \overline{h}\right\rangle$.

$$\begin{aligned} \left\langle A\overline{h}, \overline{h}\right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} Id & a \\ a^* & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{H\oplus H} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} h_1 + a(h_2) & , a^*(h_1) + b(h_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 & , h_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{H\oplus H} \\ &= \langle h_1, h_1\rangle + \langle a(h_2), h_1\rangle + \langle a^*(h_1), h_2\rangle + \langle b(h_2), h_2\rangle . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Supongamos que $aa^* \leq b$. La matriz A es positiva si y sólo si la expresión (1.5) es positiva para todo $\overline{h} \in H \oplus H$. Sea $\overline{h} \in H \oplus H$, luego de la expresión (1.5),

$$\begin{aligned} \langle A\overline{h}, \overline{h}\rangle &= \langle h_1, h_1\rangle + \langle a(h_2), h_1\rangle + \langle a^*(h_1), h_2\rangle + \langle b(h_2), h_2\rangle \\ &\geq ||h_1||^2 - 2||a(h_2)||||h_1|| + \langle a^*a(h_2), h_2\rangle \\ &= (||h_1|| - ||a(h_2)||)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que la matriz A es positiva. Esto sucede si y sólo si la expresión (1.5) es positiva para todo $h_1,\ h_2 \in H$. Debemos ver que $a^*a \leq b$. Equivalentemente, debemos probar que para todo $h_2 \in H$, vale que $\langle b(h_2) - a^*a(h_2), h_2\rangle \geq 0$. Sea $h_2 \in H$, luego como la expresión (1.5) es positiva,

$$\langle b(h_2), h_2\rangle \geq -\langle h_1, h_1\rangle - \langle a(h_2), h_1\rangle - \langle h_1, a(h_2)\rangle \text{ para todo } h_1,\ h_2 \in H.$$

Tomando $h_1 = -a(h_2)$, tenemos que

$$\langle b(h_2), h_2\rangle \geq -\langle a(h_2), a(h_2)\rangle + 2\langle a(h_2), a(h_2)\rangle = \langle a^*a(h_2), h_2\rangle .$$

□

En el Ejemplo 1.2.5 dimos un ejemplo de un operador positivo unital no contractivo. Ésto deja de ser cierto si agregamos una condición un poco más fuerte.

Corolario 1.3.5. *Sean S un sistema de operadores, $\mathscr{B}$ una C^*-álgebra y $\phi : S \to \mathscr{B}$ un operador unital 2-positivo, entonces ϕ resulta contractivo.*

Demostración. Supongamos que ϕ es 2-positivo. Sea a con $\|a\| \leq 1$. Entonces se cumple que $a^*a \leq 1$. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{pmatrix}$. Aplicando el lema anterior, vale que la matriz A es positiva y en consecuencia

$$\phi_2(A) = \begin{pmatrix} 1 & \phi(a) \\ \phi(a^*) & 1 \end{pmatrix} \text{ es positiva.}$$

Como ϕ es 2-positivo, es en particular positivo y luego autoadjunto por la Observación 1.2.4. Vale entonces que $\phi(a^*) = \phi(a)^*$. Aplicando nuevamente el lema anterior, ahora con $\phi_2(A)$, se tiene que $\phi(a)^*\phi(a) \leq 1$ y se concluye que ϕ es contractivo.

□

En las Proposiciones 1.2.24 y 1.2.25 probamos que si $\phi : M \to \mathscr{B}$ es contractivo, entonces la extensión natural a $M + M^*$ resulta positiva (y además es única). Ahora estamos interesados en probar una versión análoga para operadores completamente contractivos.

Proposición 1.3.6. *Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ C^*-álgebras, M un subespacio de $\mathscr{A}$ y S el sistema de operadores $M + M^*$. Si $\phi : M \to \mathscr{B}$ es unital y 2-contractivo, entonces $\tilde{\phi} : S \to \mathscr{B}$ es 2-positivo y contractivo. Donde $\tilde{\phi}$ es la única extensión positiva de ϕ en S.*

Demostración. Consideremos $\phi_2 : M_2(M) \to M_2(\mathscr{B})$ y el sistema de operadores

$$\tilde{S} = M_2(M) + M_2(M)^* = M_2(M + M^*) = M_2(S).$$

Como ϕ_2 es contractivo y unital, por la Proposición 1.2.25, existe una única extensión positiva $\overline{(\phi_2)}$ a $\tilde{S}$. Si vemos que $\overline{(\phi_2)}$ coincide con $(\tilde{\phi})_2$, estaríamos probando que $\tilde{\phi}$ es 2-positivo. En efecto, sean $A,\ B \in M_2(M)$, con $A = (a_{i,j})$ y $B = (b_{i,j})$. Entonces

$$\begin{aligned}(\tilde{\phi})_2(A + B^*) = (\tilde{\phi})_2(A) + (\tilde{\phi})_2(B^*) &= \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(a_{1,1}) & \tilde{\phi}(a_{1,2}) \\ \tilde{\phi}(a_{2,1}) & \tilde{\phi}(a_{2,2}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(b^*_{1,1}) & \tilde{\phi}(b^*_{2,1}) \\ \tilde{\phi}(b_{1,2^*} & \tilde{\phi}(b^*_{2,2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi(a_{1,1}) & \phi(a_{1,2}) \\ \phi(a_{2,1} & \phi(a_{2,2}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi(b_{1,1})^* & \phi(b_{2,1})^* \\ \phi(b_{1,2})^* & \phi(b_{2,2})^* \end{pmatrix} = \phi_2(A) + \phi_2(B)^* = \overline{(\phi_2)}(A + B^*).\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $\tilde{\phi}$ es 2-positivo. Finalmente, por el corolario anterior $\tilde{\phi}$ es contractivo.

□

Proposición 1.3.7. *Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ C^*-álgebras, M un subespacio de $\mathscr{A}$ y S=$M + M^*$. Si $\phi : M \to \mathscr{B}$ es unital y completamente contractivo, entonces $\tilde{\phi}$ es completamente positivo y completamente contractivo.*

Demostración. El operador ϕ es $2n$-contractivo para todo n. O equivalentemente, identificando canónicamente $M_{2n}(M)$ con $M_2(M_n)$, ϕ_n es 2-contractivo para todo n. Luego, por la proposición anterior, la extensión $\overline{\phi_n}$ a $M_n(M) + M_n(M)^*$ es 2-positiva. Igual que en la demostración de la proposición previa (antes con $n = 2$), $\overline{(\phi_n)} = (\tilde{\phi})_n$. Luego $\tilde{\phi}_{2n} = (\tilde{\phi}_n)_2 = \overline{(\phi_n)_2}$ que es positivo. Como n-positivo implica k-positivo para todo k menor que n, deducimos que $\tilde{\phi}$ es completamente positivo.

Probar que $\tilde{\phi}$ es completamente contractivo es similar. Como $\tilde{\phi}_n$ es 2-positivo para todo n, por la proposición anterior $\tilde{\phi}_n$ es contractivo para todo n. □

Así como los operadores positivos son acotados, es esperable que los operadores completamente positivos resulten completamente acotados.

Proposición 1.3.8. *Sean S un sistema de operadores y $\mathscr{B}$ una C^*-álgebra. Si $\phi : S \to \mathscr{B}$ es completamente positivo, entonces ϕ es completamente acotado. Más aún:*

$$\|\phi(1)\| = \|\phi\| = \|\phi\|_{cb}.$$

Demostración. Como $\|\phi(1)\| \leq \|\phi\| \leq \|\phi\|_{cb}$, basta ver que $\|\phi\|_{cb} \leq \|\phi(1)\|$. Sea $A \in M_n(S)$ con $\|A\| \leq 1$. Consideremos $\tilde{A} \in M_{2n}(S) = \begin{pmatrix} Id_{M_n(S)} & A \\ A^* & Id_{M_n(S)} \end{pmatrix}$. Como $\|A\| \leq 1$, por el Lema 1.3.4, $\tilde{A}$ es positiva y debido a que ϕ es completamente positivo, resulta que $\phi_{2n}(\tilde{A}) \in M_2(M_n(\mathscr{B})) = \begin{pmatrix} \phi_n(Id) & \phi_n(A) \\ \phi_n(A^*) & \phi_n(Id) \end{pmatrix}$ es positivo. Nuevamente, aplicando el Lema 1.3.4 (con $P = \phi_n(Id)$) y observando que ϕ_n es autoadjunto (ver Observación 1.2.4), vale que $\phi_n(A)\phi_n(A)^* \leq \phi_n(Id)^2$, de donde

$$\|\phi_n(A)\| \leq \|\phi_n(Id)\|_{M_n(\mathscr{B})} = \|\phi(1)\|_{\mathscr{B}}.$$

□

Recordemos que para operadores positivos y unitales, no vale que éstos sean necesariamente contractivos (ver Ejemplo 1.2.5). Para que esto valiese había que pedir condiciones sobre S. Por otro lado, la recíproca era siempre cierta: todo operador contractivo y unital resulta positivo (ver Proposición 1.2.24). La situación en los completamente positivos es bien distinta.

Corolario 1.3.9. *Sean S un sistema de operadores, $\mathscr{B}$ una C^*-álgebra y $\phi : S \to \mathscr{B}$ un operador unital. Entonces ϕ es completamente contractivo si y sólo si es completamente positivo.*

Demostración. Una implicación es la proposición previa.

La recíproca se deduce de la Proposición 1.2.24 aplicada a ϕ_n. □

Estamos en condiciones de dar un ejemplo sencillo de un operador positivo, no completamente positivo. Basta encontrar un operador positivo unital cuya norma no se alcance en la unidad.

Ejemplo 1.3.10. *El operador ϕ definido en el Ejemplo 1.2.5 no es completamente positivo.*

Demostración. Habíamos demostrado en el Ejemplo 1.2.5 que $\|\phi\| = 2\|\phi(1)\|$. Por la Proposición 1.3.8, ϕ no puede ser completamente positivo.

□

En el Teorema 1.2.15 vimos que si T es contractivo, entonces su morfismo de von Neumann admite una extensión positiva a $P(\mathbb{S}^1) + \overline{P(\mathbb{S}^1)}$ ¿Serán dichos morfismos completamente positivos? Observemos que por la Proposición 1.3.7 esto es equivalente a que los morfismos sean completamente contractivos. En efecto, sea ρ un morfismo de von Neumann y $\tilde{\rho}$ su extensión a $P(\mathbb{S}^1) + \overline{P(\mathbb{S}^1)}$. Si $\tilde{\rho}$ es completamente positivo, entonces por el corolario anterior es completamente contractivo. Pero como

$$1 = \|\tilde{\rho}_n\| \geq \|\rho_n\| \geq \|\rho_n(Id_{P(\mathbb{S}^1)})\| = \|Id_{M_n(H)}\| = 1,$$

se deduce que ρ es completamente contractivo. Recíprocamente, si ρ es completamente contractivo, entonces por la Proposición 1.3.7 $\tilde{\rho}$ resulta completamente positivo.

La respuesta a la pregunta se halla en un Teorema mucho más general.

Teorema 1.3.11 (Stinespring)**.** *Sean X un espacio topológico compacto y Hausdorff, $\mathscr{B}$ una C^*-álgebra y $\phi : C(X) \to \mathscr{B}$ un operador positivo, entonces ϕ es completamente positivo.*

Para demostrar el teorema necesitaremos hacer tres observaciones. La primera trata sobre matrices de funciones en $M_n(C(X))$. Así como en $C(X)$ la norma de f es el supremo de $|f(x)|$ sobre X, es esperable que si F es una matriz de funciones, la norma de F sea el supremo de $\|F(x)\|$ sobre X. Análogamente, es razonable esperar que si una matriz de funciones F es positiva, entonces $F(x)$ sea positiva en M_n.

Observación 1.3.12. *Sea $F \in M_n(C(X))$, entonces*
1)$\|F\|_{M_n(C(X))} = \sup_{x\in X} \|F(x)\|_{M_n}$.
2) *Si F es positiva, entonces para cada x, $F(x)$ es positiva en M_n.*

Demostración. Sea $\| - \|' = \sup_{x\in X} \|F(x)\|_{M_n}$. Como en una C^*-álgebra hay una única $*$-norma, para probar que $\| - \|_{M_n(C(X))} = \| - \|'$, basta ver que $\sup_{x\in X} \|F(x)\|_{M_n}$ es una $*$-norma en $M_n(C(X))$. Es claro que $\| - \|'$ es una norma. Veamos que $\|FF^*\|' = \|F\|'^2$. Esto es sencillo ya que $\| - \|_{M_n}$ es una $*$-norma en M_n y para cada x, $(F)^*(x) = F(x)^*$, donde la primera involución es en $M_n(C(X))$ y la segunda en M_n. En efecto,

$$\|FF^*\|' = \sup_{x\in X} \|F(x)F(x)^*\|_{M_n} = \sup_{x\in X} \|F(x)\|^2_{M_n} = \|F\|'^2.$$

Probemos el segundo postulado. Primero observemos que si una matriz de funciones F es inversible, entonces evaluando en x, $F(x)$ también debe serlo. Deducimos entonces que $det(F)(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Sea ahora F una matriz de funciones positiva y supongamos que existe x_0 tal que $F(x_0)$ es no positivo. Esto es equivalente a que exista λ un autovalor no positivo de $F(x_0)$. Afirmamos que λ pertenece al espectro de F. Si no, $\lambda Id - F$ sería inversible y luego $det(\lambda Id - F)(x)$ sería distinto de cero para todo x. Evaluando en x_0 llegamos a una contradicción. Concluimos entonces que λ pertenece al espectro de F, lo que es un absurdo ya que F era positiva y λ no positivo.

□

La segunda observación es una cota de la norma de una matriz en términos de la norma de cada una de sus coordenadas.

Observación 1.3.13. *Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, $A \in M_n(\mathscr{A})$. Entonces $\|A\|_{M_n(\mathscr{A})} \leq n^2 max_{i,j}\|A_{i,j}\|$.*

Demostración. Considerando $(\pi, B(H))$ una representación de $\mathscr{A}$, podemos suponer $A \in B(H^n)$. Sea $\overline{h} \in H^n$ con $\|\overline{h}\| \leq 1$ y $\overline{h} = (h_1, .., h_n)$. Como $\|\overline{h}\| \leq 1$, cada coordenada h_j tiene norma menor o igual que 1 en H. Sea $m = max_{i,j}\|A_{i,j}\|$, luego

$$\|A\overline{h}\|^2 = \sum_i \left\| \sum_j A_{i,j} h_j \right\|^2 \leq \sum_i \left(\sum_j \|A_{i,j}\| \right)^2 \leq n^3 m^2.$$

□

Observación 1.3.14. *Sean $\mathscr{B}$ una C^*-álgebra, $p \in \mathscr{B}$ un elemento posivo y $(\lambda_{i,j})$ una matriz escalar positiva. Entonces la matriz $p * (\lambda_{i,j}) \in M_n(\mathscr{B})$, definida como $[p * (\lambda_{i,j})]_{i,j} = p\lambda_{i,j}$ es positiva.*

Demostración. Basta probar que si $(\pi, B(H))$ es una representación de $\mathscr{B}$, entonces $\pi_n(p*(\lambda_{i,j}))$ es positivo. Consideremos en $B(H)$, las matrices $(P)_{i,j} = \delta_{i,j}\pi(p)$ y $(\Lambda)_{i,j} = \lambda_{i,j} Id_H$. Notemos que $\pi_n(p*\lambda_{i,j}) = P\Lambda$ y que P y Λ conmutan. Luego, basta probar que las matrices P y Λ son ambas positivas. La positividad de P es inmediata. Como la inclusión $i : \mathbb{C} \hookrightarrow B(H)$ es completamente isométrica, por el Corolario 1.3.9, Λ es positivo. □

Demostración del Teorema de Stinespring 1.3.11. La prueba es de la misma idea que la del Teorema 1.2.9. Sea $F \in M_n(C(X))$ una matriz positiva. Debemos ver que $\phi_n(F)$ es positivo en $M_n(\mathscr{B})$. Sea $\epsilon > 0$. Como X es compacto, existe un cubrimiento por abiertos $\{U_l\}_{l=1}^n$ y elementos $x_l \in U_l$ tal que $|F_{i,j}(x) - F_{i,j}(x_l)| < \epsilon$ para todo $x \in U_l$ y para toda coordenada (i, j). Llamemos $p^l_{i,j}$ a los $F_{i,j}(x_l)$. Sea $(u^l)_{l=1}^n$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento U_l. Es decir, los u^l

son funciones positivas, $\sum_l u^l = 1$ y el soporte de u^l está contenido en U_l. Notar que si $u^l(x) \neq 0$, entonces $x \in U_l$ y en consecuencia $|F_{i,j}(x) - p^l_{i,j}| < \epsilon$. Sea $x_0 \in X$ fijo, luego

$$\left|F_{i,j}(x_0) - \sum_l p^l_{i,j}u^l(x_0)\right| = \left|\sum_l F_{i,j}(x_0)u^l(x_0) - \sum_l p^l_{i,j}u^l(x_0)\right| = \left|\sum_{\{l:u^l(x_0)\neq 0\}} (F_{i,j}(x_0) - p^l_{i,j})u^l(x_0)\right|$$
$$\leq \sum_{\{l:u^l(x)\neq 0\}} \left|(F_{i,j}(x_0) - p^l_{i,j})u^l(x_0)\right| \leq \sum_l \epsilon u^l(x) = \epsilon.$$

Aplicando la Observación 1.3.13, tenemos que

$$\left\|F - \sum_l (p^l_{i,j}u^l)_{i,j}\right\| \leq c_n\epsilon. \tag{1.6}$$

Consideremos ahora la matriz $P^l \in M_n(C(X))$ inducida por los $p^l_{i,j}$. Es decir, $(P^l)_{i,j} = p^l_{i,j}$ y observemos que al ser P^l la matriz proveniente de evaluar F en x_l, por la Observación 1.3.12 la matriz P^l es escalar positiva. Siguiendo la notación de la Observación 1.3.14, consideremos para cada l, $u^l * P^l$. Notemos también que (1.6) es equivalente a que

$$\left\|F - \sum_l u^l * P^l\right\| \leq c_n\epsilon. \tag{1.7}$$

Por la observación previa al teorema, $u^l * P^l$ es positivo. Calculemos $\phi_n(u^l * P^l)$,

$$\phi_n(u^l * P^l) = \begin{pmatrix} \phi([u^l * P^l]_{1,1}) & \dots & \phi([u^l * P^l]_{1,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi([u^l * P^l]_{n,1}) & \dots & \phi([u^l * P^l]_{n,n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(u^l p^l_{1,1}) & \dots & \phi(u^l p^l_{1,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(u^l p^l_{n,1}) & \dots & \phi(u^l p^l_{n,n}) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \phi(u^l)p^l_{1,1} & \dots & \phi(u^l)p^l_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(u^l)p^l_{n,1} & \dots & \phi(u^l)p^l_{n,n} \end{pmatrix} = \phi(u^l) * P^l.$$

Nuevamente, por la observación anterior al teorema y porque ϕ es positivo, $\phi(u^l) * P^l$ es positivo. Como suma de positivos es positivo, vale que $\phi_n(\sum_l (u_l) * P^l)$ es positivo. Por la desigualdad (1.7),

$$\left\|\phi_n(F) - \phi_n(\sum_l (u^l)P^l)\right\| \leq \|\phi_n\| c_n\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, $\phi_n(F)$ pertecene a la clausura del conjunto de los elementos positivos. Como dicho conjunto es cerrado, $\phi_n(F)$ es positivo·

□

Englobamos las observaciones previas al Teorema en los siguientes dos corolarios.

Corolario 1.3.15. *Si ρ es un morfismo de von Neumann contractivo, entonces la extensión de ρ a $P(\mathbb{S}^1) + \overline{P(\mathbb{S}^1)}$ es completamente positiva.*

Corolario 1.3.16. *Si un operador T es contractivo, entonces su morfismo de von Neumann es completamente contractivo y además admite una extensión completamente contractiva a $C(\mathbb{S}^1)$.*

Escribamos que quiere decir que un morfismo de von Neumann sea completamente contractivo. Esto quiere decir que para cada n, si Q es una matriz de polinomios en $M_n(P(\mathbb{S}^1))$, entonces

$$\|Q\|_{M_n(P(\mathbb{S}^1))} \geq \|\rho_n(Q)\|_{M_n(B(H))} = \left\|\begin{pmatrix} \rho(Q_{1,1}) & \dots & \rho(Q_{1,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(Q_{n,1}) & \dots & \rho(Q_{n,n}) \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} Q_{1,1}(T) & \dots & Q_{1,n}(T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n,1}(T) & \dots & Q_{n,n}(T) \end{pmatrix}\right\|.$$

Podemos entonces generalizar la desigualdad de von Neumann de la siguiente manera.

Corolario 1.3.17. *Sea $T \in B(H)$ contractivo, entonces para cada matriz polinomial P vale que*

$$\|P(T)\|_{B(H^n)} \leq \|P\|_{M_n(P(\mathbb{S}^1))}.$$

El corolario anterior motiva la siguiente definición.

Definición 1.3.18. *Sea $T \in B(H)$. Decimos que T es completamente polinomialmente acotado si existe una constante $C > 0$ tal que para cada n y para toda matriz de polinomios P,*

$$\|P(T)\|_{B(H^n)} \leq C\|P\|_{M_n(P(\mathbb{S}^1))}.$$

Observación 1.3.19. En términos de morfimos, que T sea completamente polinomialmente acotado, es equivalente a que su morfismo de von Neumann sea completamente acotado. Por otro lado, el hecho de que los morfismos de von Neumann contractivos resulten automáticamente completamente contractivos, se traduce en que si T es contractivo, en particular es completamente polinomialmente acotado.

Es claro que todo operador T completamente polinomialmente acotado es en particular polinomialmente acotado ¿Valdrá la recíproca? ¿Equivalentemente, es todo morfismo de von Neumann completamente acotado? Por otro lado, así como los operadores similares a una contracción son polinomialmente acotados, es fácil probar que éstos son también completamente polinomialmente acotados. Nos hacemos entonces la siguiente pregunta ¿Serán todos los operadores completamente polinomialmente acotados similares a una contracción? Responderemos estas preguntas en los capítulos 2 y 3, cuando hayamos desarrollado una teoría adecuada.

1.4. Teorema de representación de Stinespring

El siguiente teorema caracteriza los operadores completamente positivos.

Teorema 1.4.1 (Stinespring)**.** *Sean $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y $\phi : \mathscr{A} \to B(H)$ un operador completamente positivo, entonces existen un espacio de Hilbert K, un $*$-morfismo unital $\pi : \mathscr{A} \to B(K)$ y un operador $V : H \to K$ con $\|\phi(1)\| = \|V\|^2$ tal que*

$$\phi(a) = V^*\pi(a)V.$$

Más aún, si ϕ es unital se puede tomar V isometría.

Demostración. Construcción de K.

Consideremos el producto tensorial algebraico $\mathscr{A} \otimes H$ y la forma bilineal conjugada $\langle , \rangle_\phi$ definida como

$$\langle a \otimes h, b \otimes g\rangle_\phi = \langle \phi(b^*a)h, g\rangle_H$$

El hecho de que ϕ sea completamente positivo se traduce en que la forma bilineal sea semi-definida positiva. En efecto, si tomamos

$$A \in M_n(\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \overline{h} \in H^n = (h_1, ..., h_n) \tag{1.8}$$

y recordamos que $\langle g, h\rangle_{H^n}$ es simplemente $\sum \langle g_i, h_i\rangle_H$, vale que

$$\left\langle \sum_i a_i \otimes h_i, \sum_j a_j \otimes h_j \right\rangle_\phi = \sum_{i,j} \left\langle a_i \otimes h_i, a_j \otimes h_j \right\rangle_\phi = \sum_{i,j} \left\langle \phi(a_j^* a_i)h_i, h_j \right\rangle_H = \left\langle \phi_n(AA^*)\overline{h}, \overline{h} \right\rangle_{H^n}.$$

Sea $N = \{x \in \mathscr{A} \otimes H : \langle x, x\rangle_\phi = 0\}$. Como las formas bilineales semidefinidas positivas cumplen Cauchy-Schwartz($\langle x, y\rangle \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$), N es igual a $\{x \in \mathscr{A} \otimes H : \langle x, y\rangle_\phi = 0$ para todo $y \in \mathscr{A} \otimes H\}$. Además N resulta un subespacio.

En el cociente $\frac{\mathscr{A} \otimes H}{N}$, la forma bilineal inducida(que la seguiremos notando igual) resulta un producto interno, pues si $0 = \langle [x], [x]\rangle_\phi = \langle x, x\rangle_\phi$, entonces $x \in N$ y luego $[x]$=0.

Tomemos entonces K como la completación de $\frac{\mathscr{A} \otimes H}{N}$ con respecto a $\langle , \rangle_\phi$.

Construcción de π.

Dado $a \in \mathscr{A}$, definimos $\pi(a) : \mathscr{A} \otimes H \to \mathscr{A} \otimes H$, que en principio es solo lineal, vía

$$\pi(a)\Big(\sum a_i \otimes h_i\Big) = \sum a a_i \otimes h_i.$$

Veamos que $\pi(a)$ pasa al cociente, es decir que $\pi(a) : \frac{\mathscr{A}\otimes H}{N} \to \frac{\mathscr{A}\otimes H}{N}$ está bien definido. Donde $\pi(a)([b \otimes h]) = \pi(a)(b \otimes h)$. Para ello basta ver que $\pi(a)(N) \subset N$.

Usaremos la siguiente desigualdad: sean $x, y \in \mathscr{A}$ y $y \geq 0$, entonces

$$xyx^* \leq \|y\| xx^*. \tag{1.9}$$

Sea $n \in N$, $n = \sum a_i \otimes h_i$. Veamos que $\pi(a)(n) \in N$, es decir que $\langle \pi(a)(n), \pi(a)(n)\rangle_\phi = 0$.

$$\begin{aligned}\langle \pi(a)(n), \pi(a)(n)\rangle_\phi &= \Big\langle \sum \pi(a)(a_i \otimes h_i), \sum \pi(a)(a_i \otimes h_i)\Big\rangle_\phi = \sum_{i,j} \Big\langle \pi(a)(a_i \otimes h_i), \pi(a)(a_j \otimes h_j)\Big\rangle_\phi \\ &= \sum_{i,j} \Big\langle a a_i \otimes h_i, a a_j \otimes h_j\Big\rangle_\phi = \sum_{i,j} \Big\langle \phi(a_j{}^* a^* a a_i) h_i, h_j\Big\rangle_H = \Big\langle \phi_n((aA)^* aA)\overline{h}, \overline{h}\Big\rangle_{H^n}.\end{aligned}$$

Donde tomamos A y $\overline{h}$ como en (1.8). Aplicando la desigualdad (1.9) en $M_n(\mathscr{A})$ con $y = a^*aId$,$x = A$ y recordando que ϕ era completamente positivo, tenemos que

$$\begin{aligned}\Big\langle \phi_n((aA)^* aA)\overline{h}, \overline{h}\Big\rangle_{H^n} &= \Big\langle \phi_n(A^* a^* a Id A)\overline{h}, \overline{h}\Big\rangle_{H^n} \leq \|a^*a\| \Big\langle \phi_n(A^*A)\overline{h}, \overline{h}\Big\rangle_{H^n} = \|a^*a\| \sum_{i,j} \Big\langle \phi((a_i)^* a_j) h_j, h_i\Big\rangle_H \\ &= \|a^*a\| \sum_{i,j} \Big\langle a_j \otimes h_j, a_i \otimes h_i\Big\rangle_\phi = 0.\end{aligned}$$

Análogamente se prueba que $\pi(a) : \frac{\mathscr{A}\otimes H}{N} \to \frac{\mathscr{A}\otimes H}{N}$ es acotado con $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$. Luego $\pi(a)$ se extiende a un operador acotado en K (que seguiremos notando igual).

Resta ver que $\pi : \mathscr{A} \to B(K)$ es morfismo de C^*-álgebras.

Veamos primero que π es multiplicativo. Como $\frac{\mathscr{A}\otimes H}{N}$ es denso en K, basta ver que π es multiplicativo en $\frac{\mathscr{A}\otimes H}{N}$. Sean $a, b \in \mathscr{A}$ y $x \in \frac{\mathscr{A}\otimes H}{N}$, x=$\sum_i a_i \otimes h_i$, luego,

$$\pi(a)\pi(b)\left(\sum_i a_i \otimes h_i\right) = \pi(a) \sum_i b a_i \otimes h_i = \sum_i a b a_i \otimes h_i = \pi(ab)(x).$$

Para ver que $\pi(a)^* = \pi(a^*)$ basta probar la igualdad en $\frac{\mathscr{A}\otimes H}{N}$. Sean $x, y \in \frac{\mathscr{A}\otimes H}{N}$ con $x = \sum_i a_i \otimes x_i$ y $y = \sum_i b_i \otimes y_i$.

$$\begin{aligned}\langle \pi(a)x, y\rangle_\phi &= \left\langle \pi(a) \sum_i a_i \otimes x_i, \sum_j b_j \otimes y_j \right\rangle_\phi = \sum_{i,j} \Big\langle a a_i \otimes x_i, b_j \otimes y_j\Big\rangle_\phi = \sum_{i,j} \Big\langle \phi(b_j{}^* a a_i) x_i, y_j\Big\rangle_H \\ &= \sum_{i,j} \Big\langle \phi((a b_j)^* a_i) x_i, y_j\Big\rangle_H = \sum_{i,j} \Big\langle a_i \otimes x_i, a^* b_j \otimes y_j\Big\rangle_\phi = \langle x, \pi(a^*) y\rangle_\phi.\end{aligned}$$

Veamos ahora como definir V.

Definamos $V : H \to K$ como, $V(x) = 1 \otimes x$. V es acotada, pues

$$\|V(x)\|^2 = \langle 1 \otimes x, 1 \otimes x\rangle_\phi = \langle \phi(1)x, x\rangle_H \leq \|\phi(1)\| \|x\|^2.$$

Tenemos entonces que $\|V\| \leq \|\phi(1)\|$. La otra desigualdad también es cierta, ya que, como V es positivo, $\|V\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle \phi(1)x, x\rangle_H = \|\phi(1)\|$.

Además, es trivial ver que si $\phi(1) = 1$, entonces V es isometría:

$$\|V(x)\|^2 = \langle \phi(1)x, x\rangle_H = \|x\|^2.$$

Finalmente, veamos que $V^*\pi(a)V = \phi(a)$. Sean $h, g \in H$,

$$\langle V^*\pi(a)Vg, h\rangle_H = \langle \pi(a)Vg, Vh\rangle_\phi = \langle \pi(a)(1 \otimes g), 1 \otimes h\rangle_\phi = \langle\, a \otimes g, 1 \otimes h\rangle_\phi = \langle \phi(a)g, h\rangle_H$$

Como para todos $g,\ h \in H$, vale que $\langle V^*\pi(a)Vg, h\rangle_H = \langle \phi(a)g, h\rangle_H$, entonces $V^*\pi(a)V = \phi(a)$.

□

Observación 1.4.2. Si $\phi(a) = V^*\pi(a)V$ con π, V, K como en el Teorema 1.4.1, entonces ϕ es completamente positivo.

Demostración. Sea $A \in M_n(\mathscr{A}),\ A \geq 0$. Debemos ver que $\phi_n(A) \geq 0$ en $M_n(B(H))$. Identificando a $M_n(B(H))$ con $B(H^n)$,

$$(V^*\pi(A)V)_n = V_n{}^*\pi_n(A)V_n,$$

donde tomamos $V_n : H^n \to K^n,\ V_n((h_1, ..., h_n)) = (V(h_1), ..., V(h_n))$. Además, al ser π es un *-morfismo, es también completamente positivo. Veamos entonces que ϕ es completamente positivo:

$$\begin{aligned}\phi_n(A) \geq 0 \Leftrightarrow V_n{}^*\pi_n(A)V_n \geq 0 &\Leftrightarrow \langle V_n^*\pi_n(A)V_n(h), h\rangle_{H^n} \geq 0 \text{ para todo } h \in H^n,\\ &\Leftrightarrow \langle \pi_n(A)V_n(h), V_n(h)\rangle_{K^n} \geq 0 \text{ para todo } h \in H^n.\end{aligned}$$

La última desigualdad es válida por ser π_n completamente postivo. □

Por lo tanto el teorema de Stinespring caracteriza los operadores completamente positivos que van de una C^*-álgebra en $B(H)$.

Observación 1.4.3. Si ϕ es unital, V resulta una isometría. En ese caso podemos identificar a H con $V(H)$. Con esta identificación V^* no es otra cosa que la proyeccíon de K en H y por lo tanto,

$$\phi(a) = P_H\pi(a)|_H.$$

Definición 1.4.4. *Al trío (π, V, K) obtenidos como en el Teorema 1.4.1 lo llamamos una representación de Stinespring de ϕ.*

Dada una representación de Stinespring de ϕ, podemos considerar $\tilde{K}$ la clausura del espacio generado por $\pi(\mathscr{A})V(H)$ y $\tilde{\pi} : \mathscr{A} \to B(\tilde{K})$ la restricción de π a $\tilde{K}$. Como $\pi(\mathscr{A})(\tilde{K}) \subset \tilde{K}$, $\tilde{\pi}$ es un $*$-morfismo bien definido. $(\tilde{\pi}, V, \tilde{K})$ sigue siendo una representación de Stinespring pero con la propiedad adicional de que la clausura de $\tilde{\pi}(\mathscr{A})V(H)$ es $\tilde{K}$.

Definición 1.4.5. *Decimos que (π, V, K), una representación de Stinespring, es minimal, si el generado por la clausura de $\pi(\mathscr{A})V(H)$ es K.*

La siguiente proposición muestra que dos representaciones de Stinespring minimales no son muy distintas. Éstas son unitariamente equivalentes.

Proposición 1.4.6. *Sean $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra con unidad, $\phi : \mathscr{A} \to B(H)$ un operador completamente positivo y (π_i, V_i, K_i) dos representaciones de Stinespring minimales, entonces existe $U : K_1 \to K_2$ unitario tal que para todo $a \in A$*

$$UV_1 = V_2 \text{ y } U\pi_1(a)U^* = \pi_2(a).$$

Demostración. De existir una tal U, entonces necesariamente vale que

$$U\pi_1(a)V_1(h) = \pi_2(a)UV_1(h) = \pi_2(a)V_2(h).$$

Definimos entonces $U : \pi_1(\mathscr{A})V_1(H) \to \pi_2(\mathscr{A})V_2(H)$ como

$$U\left(\sum_i \pi_1(a_i)V_1(h_i)\right) = \sum_i \pi_2(a_i)V_2(h_i).$$

Veamos que U es una isometría(y por lo tanto está bien definida),

$$\begin{aligned}\left\|\sum_i \pi_1(a_i)V_1(h_i)\right\|^2 &= \sum_{i,j}\left\langle \pi_1(a_i)V_1(h_i), \pi_1(a_j)V_1(h_j)\right\rangle = \sum_{i,j}\left\langle V_1^*\pi_1(a_j{}^*a_i)V_1(h_i), h_j\right\rangle\\ &= \sum_{i,j}\left\langle \phi(a_j{}^*a_i)(h_i), h_j\right\rangle = \left\|\sum_i \pi_2(a_i)V_2(h_i)\right\|^2.\end{aligned}$$

Como $\pi_1(\mathscr{A})V_1(H)$ es denso en K_1 y $\pi_2(\mathscr{A})V_2(H)$ es denso en K_2 , podemos extender U a $B(K_1, K_2)$ de manera que siga siendo una isometría. Además como $\pi_2(\mathscr{A})V_2(H) \subset Im(U)$, U resulta sobreyectiva y por lo tanto unitaria. Finalmente, las condiciones $UV_1 = V_2$ y $U\pi_1 = \pi_2 U$ se satisfacen trivialmente por como definimos a U.

□

Aplicando la caracterización de Stinespring 1.4.1 a los morfismos de von Neumann contractivos, podemos obtener el Teorema de dilatación de Sz-Nagy. Éste dice que todo operador contractivo, se puede ver como un unitario en un espacio más grande. Esto resulta muy interesante ya que el Teorema de dilatación de Sz-Nagy también implica la desigualdad de von Neumann. Es decir, la desigualdad de von Neumann y el Teorema de dilatación de Sz-Nagy son equivalentes. Por otro lado, el Teorema de dilatación de Sz-Nagy admite una generalización al caso de dos operadores conmutativos(Teorema de dilatación de Ando 3.1.1), lo que permite demostrar una desigualdad de von Neumann para el toro 2-dimensional. Sorprendentemente, la desigualdad de von Neumann para n-operadores conmutativos es falsa (Un ejemplo en [31]), lo que obliga a que no exista una generalización de Sz-Nagy para n operadores conmutativos.

Para dar una versión más fuerte del Teorema de dilatación de Sz-Nagy, introduciremos la siguiente definición.

Definición 1.4.7. *Sean H un espacio de Hilbert, $U \in B(H)$ y $M \subseteq H$ un subespacio. Decimos que M reduce a U si $U(M) \subseteq M$ y $U(M^{\perp}) \subseteq M^{\perp}$.*

Teorema 1.4.8 (Teorema de dilatación de Sz-Nagy.)**.** *Sea $T \in B(H)$ con $\|T\| \leq 1$, entonces existen un espacio de Hilbert K conteniendo a H como subespacio y un operador unitario $U \in B(K)$ con la propiedad de que K es el espacio cerrado más chico que reduce a U y contiene a H tal que*

$$T^n = P_H U^n|_H.$$

Más aún, si (K', U') cumple las mismas propiedades, entonces existe un unitario $V : K \to K'$ con $Vh = h$ si $h \in H$ y $VUV^* = U'$.

Demostración. Consideremos $S \subset C(\mathbb{S}^1)$ el sistema de operadores $P(\mathbb{S}^1) + P(\mathbb{S}^1)^*$ y $\rho : S \to B(H)$ definido como $\rho(p + \overline{q}) = p(T) + q(T)^*$. Por el Corolario 1.3.15 la extensión de ρ a $C(\mathbb{S}^1)$ es completamente positiva.
Sea (π, V, K) una representación minimal de Stinespring de ρ. Tomemos $g(z) = z \in C(\mathbb{S}^1)$. Como g es unitario y π es un $*$-morfismo, $U = \pi(g)$ también resulta unitario.
Observemos que $\rho(1) = Id_H$ y luego por la Observación 1.4.3, vale que

$$T^n = \rho(g^n) = P_H \pi(g^n)|_H = P_H U^n|_H.$$

Veamos en que se traduce la minimalidad de (π, K). El par (π, K) es minimal si $\overline{\pi(C(\mathbb{S}^1(H)} = K$. Como los polinomios trigonométricos son densos en $C(\mathbb{S}^1)$, esto es equivalente a que $\overline{\pi(P(\mathbb{S}^1) + P(\mathbb{S}^1))^*(H)} = K$. O lo que es lo mismo, que el generado por $\{\pi(z)^n(H) : n \in \mathbb{Z}\}$ sea denso en K. Recordemos que $\pi(z)$ no era otra cosa que U. Veamos que esto es equivalente a que no exista un subespacio cerrado y propio que reduzca a U y contenga a H. En efecto, supongamos que existe M tal espacio, luego $U^n(H) \subset U^n(M) \subseteq M$ y entonces $K = \overline{\langle U^n(H) : n \in \mathbb{Z} \rangle} \subseteq \overline{M} = M$. Recíprocamente, considerando $M = \overline{\langle U^n(H) : n \in \mathbb{Z} \rangle}$ es fácil probar que $H \subseteq M$ y que reduce a U, de donde $M = K$.

La última afirmación es una consecuencia directa de la unicidad de las representaciones minimales.

□

Éste teorema motiva dos nuevas definiciones.

Definición 1.4.9. *Sean $H \hookrightarrow K$ dos espacios de Hilbert y sean $T \in B(H)$ y $U \in B(K)$ dos operadores con U unitario. Decimos que U es una dilatación de T si*

$$T^n = P_H U^n|_H.$$

Además decimos que la dilatación es minimal si K es el espacio cerrado más chico que reduce a U y contiene a H.

Veamos como se deduce la desigualdad de von Neumann a partir del Teorema de dilatación de Sz-Nagy.

Corolario 1.4.10 (desigualdad de von Neumann)**.** *Sea T un operador contractivo en un Hilbert H, entonces para todo polinomio p,*

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_\infty.$$

Demostración. Sea U una dilatación de T. Como para todo n, $T^n = P_H U^n|_H$, se sigue que $p(T) = P_H p(U)|_H$ para todo polinomio p. Luego, como U es normal,

$$\|p(T)\| \leq \|P(U)\| = sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in spec(U)\}$$

y el espectro de un unitario esta contenido en $\mathbb{S}^1$, resulta que $\sup_{\{} |p(\lambda)| : \lambda \in spec(U)\} \leq \|p\|_\infty$.

□

1.5. Teorema de extensión de Arveson para M_n

En el Ejemplo 1.2.5 vimos que un operador positivo $\phi : S \to M_n$ no necesariamente admite una extensión positiva a todo el álgebra. El teorema de extensión de Arveson 1.6.6 establece que si ϕ es completamente positivo esto no pasa. Todo operador completamente positivo admite una extensión completamente positiva a todo el álgebra. En esta sección nos enfocaremos en demostrar dicho teorema para el caso en que el codominio sea M_n.

Para ello usaremos la dualidad existente entre $\mathscr{L}(M, M_n)$ y $\mathscr{L}(M_n(M), \mathbb{C})$ y explotaremos las fuertes propiedades de los funcionales positivos.

Comencemos explicitando la dualidad.

Dado un espacio de operadores M y $\phi : M \to M_n$, definimos $S_\phi : M_n(M) \to \mathbb{C}$ como

$$S_\phi(A) = \frac{1}{n}\sum_{i,j}[\phi(A)]_{i,j}.$$

Podemos pensar a S_ϕ como el operador que viene de aplicar ϕ_n, identificar $M_n(M_n)$ con M_{n^2} canónicamente y luego sumar todas sus coordenadas. El factor $\frac{1}{n}$ hace que, si $1 \in M$, y ϕ es unital, S_ϕ sea unital.

Alternativamente, si no identificamos $M_n(M_n)$ con M_{n^2}, podemos escribir a S_ϕ como

$$S_\phi(A) = \frac{1}{n}\langle \phi_n(A)x, x\rangle_{\oplus_{i=1}^n \mathbb{C}^n}, \tag{1.10}$$

donde ,si notamos $\{e_i\}_{i=1}^n$ a la base canónica de $\mathbb{C}^n$, x es el vector $\oplus_{i=1}^n e_i$. En efecto,

$$(\phi_n(A)x)_i = \left(\phi_n(A)\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}\right)_i = \sum_j [\phi_n(A)]_{i,j} e_j.$$

Luego $\phi_n(A)(x) = \oplus_{i=1}^n \sum_j \phi(A_{i,j})e_j$, de donde

$$\langle \phi_n(A)x, x\rangle_{\oplus_{i=1}^n \mathbb{C}^n} = \sum_i \left\langle \sum_j \phi(A_{i,j})e_j, e_i \right\rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i,j}[\phi(A)]_{i,j}.$$

Observemos que esta última definición, muestra que si M es un sistema de operadores y ϕ es n-positivo, entonces S_ϕ es positivo. Recíprocamente, dado S un funcional de $M_n(M)$, podemos definir $\phi_S : M \to M_n$ como

$$(\phi_S(a))_{i,j} = S(a \otimes E_{i,j}).$$

Donde $a \otimes E_{i,j}$ denota la matriz que en el lugar (i, j) vale a y en el resto tiene ceros.

Es fácil probar que las aplicaciones $\Psi : \mathscr{L}(M, M_n) \to \mathscr{L}(M_n(M), \mathbb{C})$, con $\Psi(\phi) = S_\phi$ y $\Gamma : \mathscr{L}(M_n(M), \mathbb{C}) \to \mathscr{L}(M, M_n)$, con $\Gamma(S) = \phi_S$ están bien definidas y son aplicaciones inversas.

Vimos recién que si ϕ es n-positivo, entonces S_ϕ es positivo. La recíproca es también válida. Más aún, si S_ϕ es positivo, entonces ϕ es k-positivo para todo k. Lo englobamos en la siguiente proposición.

Proposición 1.5.1. *Sea $\mathscr{S}$ un sistema de operadores y $\phi : \mathscr{S} \to M_n$ un operador. Son equivalentes:*
i) El operador ϕ es completamente positivo,
ii) el operador ϕ es n-positivo,
iii) el funcional S_ϕ es positivo.

Para probar la proposición, necesitaremos dar un Lema previo. Éste resulta muy útil para determinar si un operador es n-positivo.

Lema 1.5.2. *Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y $A \in M_n(\mathscr{A})$ una matriz positiva. Entonces A es la suma de n matrices positivas P^l tal que para cada l, existe $\{p_1^l, ...p_n^l\} \subseteq \mathscr{A}$ con $(P^l)_{i,j} = (p_i^l)^* p_j^l$*

Demostración. Primero veamos que una tal P^l debe ser positiva. Consideremos R la matriz cuya primer fila es $p_1^l, ..., p_n^l$ y sus otras filas son nulas. La matriz R^*R es positiva y en la coordenada (i, j) vale $(p_i^l)^* p_j^l$, de donde P^l es positiva. Sea ahora $A \in M_n(\mathscr{A})$ positiva. Entonces existe B tal que $B^*B = A$. Sea R_k la matriz cuya k-ésima fila coincide con la k-ésima de B y el resto son nulas. Luego $B = R_1 + ... + R_n$. Como $R_i^* R_j = 0$ cuando $i \neq j$, vale que $A = B^*B = R_1^*R_1 + ... + R_n^*R_n$. □

Observemos que por el lema anterior, para probar que $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es n-positivo, basta verificar que $\phi_n(A)$ es positivo para todo A con $A_{i,j} = a_i^* a_j$ y $\{a_1, ...a_n\} \subseteq \mathscr{A}$.

Demostración de la Proposición 1.5.1. Si ϕ es completamente positivo es en particular n-positivo y por la definición alternativa (1.10) si ϕ es n-positivo entonces S_ϕ es positivo. Resta probar entonces que si S_ϕ es positivo, entonces ϕ es completamente positivo.

Sea ϕ tal que S_ϕ es positivo y probemos que ϕ es completamente positivo. Afirmamos que podemos suponer $\mathscr{S} = \mathscr{A}$. En efecto, si $S_\phi : M_n(\mathscr{S}) \to \mathbb{C}$ es positivo, por un conocido Teorema de Krein (ver [11]), existe $\tilde{S} : M_n(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}$ una extensión positiva de S_ϕ. Tomemos $\psi = \phi_{\tilde{S}}$. Veamos que ψ extiende a ϕ. Sea $s \in \mathscr{S}$. Debemos probar que $\psi_{\tilde{S}}(s) = \phi(s)$. En efecto,

$$[\psi_{\tilde{S}}(s)]_{i,j} = \tilde{S}(s \otimes E_{i,j}) = S_\phi(s \otimes E_{i,j}) = [\phi_{S_\phi}(s)]_{i,j} = [\phi(s)_{i,j}].$$

El operador ψ está definido en $\mathscr{A}$, cumple que $S_\psi = S_{\phi_{\tilde{S}}} = \tilde{S}$, es positivo y como ψ extiende a ϕ, si ψ es completamente positivo, entonces ϕ también.

Supongamos entonces que $\mathscr{S} = \mathscr{A}$. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $A \in M_k(\mathscr{S})$ una matriz positiva, debemos ver que $\phi_k(A) \in M_k(M_n)$ es positiva. Por el lema anterior, podemos suponer que $A_{i,j} = a_i^* a_j$ para algún conjunto $\{a_1, ..., a_k\} \subseteq \mathscr{A}$. Por otro lado, $\phi_k(A) \in M_k(M_n)$ es una matriz positiva si y sólo si para todo $x \in \oplus_{j=1}^k \mathbb{C}^n$,

$$\langle \phi_k(A)x, x \rangle_{\oplus_{j=1}^k \mathbb{C}^n} \geq 0.$$

Como $x \in \oplus_{j=1}^k \mathbb{C}^n$, si notamos $\{e_j\}$ a la base canónica de $\mathbb{C}^n$, existen $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$ tal que $x_i = \sum_j^n \lambda_{i,j} e_j$. Veamos cuanto vale $(\phi_k(A)x)_i$

$$(\phi_k(A)x)_i = \sum_l^k \phi_k(A_{i,l}) x_l = \sum_{l,j}^{k,n} \phi(a_i^* a_l) \lambda_{l,j} e_j.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle \phi_k(A)x, x \rangle_{\oplus_{j=1}^k \mathbb{C}^n} &= \sum_i^k \langle (\phi_k(A)x)_i, x_i \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_i^k \left\langle \sum_{l,j}^{k,n} \phi(a_i^* a_l) \lambda_{l,j} e_j, \sum_m^n \lambda_{i,m} e_m \right\rangle_{\mathbb{C}^n} \\
&= \sum_{i,j,l,m} \left\langle \lambda_{l,j} \overline{\lambda}_{i,m} \phi(a_i^* a_l) e_j, e_m \right\rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i,j,l,m} \lambda_{l,j} \overline{\lambda}_{i,m} [\phi(a_i^* a_l)]_{m,j} \\
&= \sum_{i,j,l,m} \lambda_{l,j} \overline{\lambda}_{i,m} S_\phi(a_i^* a_l \otimes E_{m,j}).
\end{aligned}$$

Consideremos A^i la matriz cuya primera fila es el vector $\{\lambda_{i,1}, ..., \lambda_{i,n}\}$ y el resto de sus filas son nulas. Vale que $(A^i)^* A^l = \sum_{m,j} \overline{\lambda}_{i,m} \lambda_{l,j} E_{m,j}$.

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,l,m} \lambda_{l,j} \overline{\lambda}_{i,m} S_\phi(a_i^* a_l \otimes E_{m,j}) &= \sum_{i,l} S_\phi(a_i^* a_l \otimes \sum_{m,j} \overline{\lambda}_{i,m} \lambda_{l,j} E_{m,j}) \\
&= \sum_{i,l} S_\phi(a_i^* a_l \otimes (A^i)^* A^l) = S_\phi[(\sum_i a_i \otimes A^i)^* (\sum_i a_i \otimes A^i)].
\end{aligned}$$

Luego

$$\langle \phi_k(A)x, x \rangle_{\oplus_{j=1}^k \mathbb{C}^n} = \sum_{i,j,l,m} \lambda_{l,j} \overline{\lambda}_{i,m} S_\phi(a_i^* a_l \otimes E_{m,j}) = S_\phi[(\sum_i a_i \otimes A^i)^* (\sum_i a_i \otimes A^i)].$$

Que es una matriz positiva por ser S_ϕ positivo. Concluimos que ϕ es k-positivo para todo k.

□

Como corolario de la proposición anterior, vale que los operadores completamente positivos $\in \mathscr{L}(S, M_n)$ se pueden extender a toda la C^*-álgebra.

Corolario 1.5.3 (Extensión de Arveson para M_n)**.** *Sean $\mathscr{S} \hookrightarrow \mathscr{A}$ con $\mathscr{S}$ un sistema de operadores y $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, si $\phi : \mathscr{S} \to M_n$ es completamente positivo, entonces existe $\tilde{\phi} : \mathscr{A} \to M_n$ una extensión completamente positiva de ϕ. Más aún $\|\phi\| = \|\tilde{\phi}\|$.*

Demostración. Como ϕ es completamente positivo, se tiene que $S_\phi : M_n(\mathscr{S}) \to \mathbb{C}$ es positivo. Como S_ϕ es un funcional positivo, por el Teorema de Krein (ver [11]), existe $\tilde{S} : M_n(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}$ una extensión positiva de S. Sea $\psi_{\tilde{S}} : \mathscr{A} \to M_n$ el operador asociado a $\tilde{S}$. Con el mismo argumento que el usado en la proposición anterior, $\psi_{\tilde{S}}$ extiende a ϕ. Además, por la proposición anterior es completamente positivo.

Para finalizar la demostración, falta probar que $\|\phi\| = \|\tilde{\phi}\|$, pero esto es trivial ya que como ϕ y $\tilde{\phi}$ son completamente positivos ambos alcanzan la norma en 1 (ver Proposición 1.3.8). Además como $\mathscr{S}$ es un sistema de operadores, $1 \in \mathscr{S}$. Luego,

$$\|\tilde{\phi}\| = \|\tilde{\phi}(1)\| = \|\phi(1)\| = \|\phi\|.$$

□

También vale una versión análoga para el caso contractivo y unital. Recordemos que por el la Proposición 1.2.25 si un operador unital $\phi : M \to \mathscr{B}$ es contractivo, entonces el operador $\tilde{\phi} : M + M^* \to B$, $\tilde{\phi}(p + q^*) = \phi(p) + \phi(q)^*$ es positivo. Más aún si M es un álgebra vale la recíproca (Corolario 1.2.26).

Corolario 1.5.4. *Sean M un espacio de operadores y $\phi : M \to M_n$ un operador unital. Entonces son equivalentes:*

i) el operador ϕ es completamente contractivo,

ii) el operador ϕ es n-contractivo,

iii) el funcional S_ϕ es contractivo.

Demostración. Si ϕ es completamente contractivo, entonces claramente es n-contractivo.

Para probar que si ϕ es n-contractivo entonces S_ϕ es contractivo, recordemos la definición alternativa de S_ϕ (1.10),

$$S_\phi[(A_{i,j})] = \frac{1}{n}\left\langle \phi_n[(A_{i,j})]x, x\right\rangle_{\oplus_{i=1}^n \mathbb{C}^n},$$

donde $x = \otimes_{i=1}^n e_i$ y $\{e_i\}_{i=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Observemos que $\|x\|^2 = \sum_i \|e_i\|^2_{\mathbb{C}^n} = n$.

Sea $A \in M_n(M)$, entonces

$$\left\|S_\phi(A)\right\| = \left\|\frac{1}{n}\langle \phi_n(A)x, x\rangle_{\oplus_{i=1}^n \mathbb{C}^n}\right\| \leq \|\phi_n(A)\|\frac{1}{n}\|x\|^2 \leq \|\phi_n\|\|A\|\frac{\|x\|^2}{n} \leq \|A\|.$$

Veamos que si S_ϕ es contractivo entonces ϕ es completamente contractivo. Existe $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra tal que $M \hookrightarrow \mathscr{A}$. Observemos que como ϕ es unital, entonces S_ϕ también. Luego, por las observaciones previas al corolario, podemos considerar $\tilde{S}_\phi : M_n(M)+(M_n(M))^* \to \mathbb{C}$ con $\tilde{S}_\phi$ un funcional positivo. A su vez, por el Teorema de Krein (ver [11]), existe una extensión positiva S de $\tilde{S}_\phi$ a todo el álgebra $\mathscr{A}$. Por la Proposición 1.5.1, el operador ψ_S asociado a $S : \mathscr{A} \to M_n$ es completamente positivo. Además, con la misma demostración que en la Proposición 1.5.1 vale que ψ_S extiende a ϕ y como ϕ es unital, ψ_S también. Luego ψ_S es completamente positivo y unital, y en consecuencia es completamente contractivo por el Corolario 1.3.9. Finalmente, como ψ_S extiende a ϕ, se concluye que ϕ es completamente contractivo.

□

Observemos que el corolario anterior muestra que si $\phi : M \to M_n$ es unital y n-contractivo, entonces su norma cb es igual a $\|\phi_n\|$. Smith probó que este resultado sigue valiendo si ϕ es acotado (y no necesariamente unital). Si $\phi : M \to M_n$ es acotado, entonces $\|\phi\|_{cb} = \|\phi_n\|$. En el capítulo 2, Proposición 2.1.8, daremos una versión más débil ($\|\phi\|_{cb} = \|\phi_{2n}\|$). La prueba del postulado de Smith se puede encontrar en [30].

1.6. Teorema de extensión de Arveson

Esta sección está dedicada a probar el teorema de extensión de Arveson 1.6.6 para operadores completamente positivos. Éste dice que, si el codominio es $B(H)$, se puede extender a los operadores completamente positivos a todo el álgebra.

Antes de atacar el teorema, necesitamos dotar a $B(S, B(H))$ de una w^*-topología. Veremos que con esta topología, los operadores completamente positivos con norma uniformente acotada forman un conjunto compacto.

Empecemos con $B(X, Y^*)$, donde X e Y son dos espacios de Banach e Y^* denota al dual de Y. Para dotar a $B(X, Y^*)$ de una w^*-topología, necesitamos encontrar un espacio de Banach Z tal que $Z^* \cong B(X, Y^*)$. Dados $x \in X$ e $y \in Y$, consideremos el funcional $x \otimes y \in B(X, Y^*)^*$ definido como

$$x \otimes y(L) := L(x)(y).$$

Debido a que $|L(x)(y)| \leq \|L\|\|x\|\|y\|$ vale que $\|x \otimes y\| \leq \|x\|\|y\|$. De hecho vale la igualdad. Sean $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$ tal que $x^*(x) = \|x\|$ e $y^*(y) = \|y\|$. Definamos $L \in B(X, Y^*)$ como $L(\tilde{x}) := x^*(\tilde{x})y^*$. Luego $\|x \otimes y(L)\| = \|L(x)(y)\| = \|x^*(x)y^*(y)\|$, de donde se deduce la igualdad.

Por otro lado, es fácil probar que la aplicación $(x, y) \mapsto x \otimes y$ es $\mathbb{C}$-bilineal. A los funcionales de la forma $x \otimes y$ los llamaremos tensores elementales. Definamos $Z \subseteq B(X, Y^*)^*$ como la clausura del espacio generado por los tensores elementales. El espacio Z es el que estamos buscando.

Lema 1.6.1. *El espacio $B(X, Y^*)$ es isométricamente isomorfo a Z^*. Donde el isomorfismo ϕ viene dado por*

$$\phi(L)(x \otimes y) = x \otimes y(L).$$

Demostración. Definamos $\psi : Z^* \to B(X, Y^*)$ como $\psi(z^*)(x)(y) := z^*(x \otimes y)$. Es trivial probar que ϕ y ψ son inversas, luego, basta probar que ψ es isometría. Para ello debemos verificar que para todo $x \in X, z \in Z^*$, $\psi(z^*)(x) \in Y^*$ y $\psi(z^*) \in B(X, Y^*)$.

Sea $x \in X$ fijo, entonces para cada $y \in Y$ vale que

$$\|\psi(z^*)(x)(y)\| = \|z^*(x \otimes y)\| \leq \|z^*\|\|x\|\|y\|.$$

Como además $\psi(z^*)(x)$ es lineal en Y, deducimos que $\psi(z^*)(x) \in Y^*$.

Con el mismo razonamiento vale que $\psi(z^*) : X \to Y^*$ es lineal y acotado. Probemos ahora que ϕ es isométrico. Sea $L \in B(X, Y^*)$, entonces

$$\|\phi(L)\|_{Z^*} = \sup_{\{z \in Z : \|z\| \leq 1\}} |\phi(L)(z)| = \sup_{\{z \in Z : \|z\| \leq 1\}} |z(L)| \leq \|L\|.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|L\|_{B(X,Y^*)} &= \sup_{\{x \in X : \|x\| \leq 1\}} \|L(x)\|_{Y^*} = \sup_{\{x \in X : \|x\| \leq 1\}} \sup_{\{y \in Y : \|y\| \leq 1\}} |L(x)(y)| \\ &= \sup_{\{x \in X,\ y \in Y :\ \|x\|,\ \|y\| \leq 1\}} |x \otimes y(L)|. \end{aligned}$$

Recordemos que $\|x \otimes y\| = \|x\|\|y\|$ y luego

$$\begin{aligned} \|L\|_{B(X,Y^*)} &= \sup_{\{x \in X,\ y \in Y :\ \|x\|,\ \|y\| \leq 1\}} |x \otimes y(L)| = \sup_{\{\|x \otimes y\| \leq 1\}} |x \otimes y(L)| = \sup_{\{\|x \otimes y\| \leq 1\}} \phi(L)(x \otimes y) \\ &\leq \sup_{\{z \in Z : \|z\| \leq 1\}} |\phi(L)(z)| = \|\phi(L)\|_{Z^*} \end{aligned}$$

□

Definición 1.6.2. *A la w^*-topología inducida por Z^* en $B(X, Y^*)$ la llamaremos la BW-topología (por bounded-weak).*

El siguiente lema caracteriza la BW-convergencia.

Lema 1.6.3. *Sea $(L_\lambda)_\lambda$ una red acotada en $B(X, Y^*)$. Entonces $(L_\lambda)_\lambda$ converge a L en la topología BW si y sólo si para todo $x \in X$, $(L_\lambda(x))_\lambda$ converge w^* a $L(x)$.*

Demostración. Sea $(L_\lambda)_\lambda$ una red en $B(X, Y^*)$ una red BW-convergente a L. Entonces $(x \otimes y(L_\lambda))_\lambda$ tiende a $x \otimes y(L)$ para cada tensor elemental $x \otimes y$. Sea $x \in X$ fijo, luego para cada y,

$$(L_\lambda(x)(y))_\lambda = (x \otimes y\,(L_\lambda))_\lambda \to x \otimes y\,(L) = L(x)(y).$$

Recíprocamente sea $(L_\lambda)_\lambda$ red acotada tal que para todo x, $L_\lambda(x)(y)_\lambda$ tiende a $L(x)(y)$. Para cada tensor elemental $x \otimes y$

$$(x \otimes y\,(L_\lambda))_\lambda = (L_\lambda(x)(y))_\lambda \to L(x)(y) = x \otimes y(L).$$

Concluimos entonces que $t(L_\lambda)_\lambda$ tiende a $t(L)$ para todo t en el espacio generado por los tensores elementales. Para finalizar la demostración resta verificar la convergencia en la clausura, pero esto es trivial ya que la red $(L_\lambda)_\lambda$ es acotada. □

Nos interesa el caso concreto $B(S, B(H))$, con S un sistema de operadores cerrado. Para dotar a $B(S, B(H))$ de una BW-topología hay que tomar un espacio de Banach Y tal que $Y^* = B(H)$. Consideremos el espacio generado por los operadores traza (TC) en $B(H)$. Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base de H. Un operador $T \in B(H)$ pertenece a TC si y sólo si $\|T\|_1 = tr(|T|) < \infty$, donde $tr(T) := \sum_i |\langle Te_i, e_i\rangle|$. A la función $tr(-)$ la llamaremos traza. Se puede ver que la traza de un operador no depende de la base elegida y además que si $A \in B(H)$ y $T \in TC$, entonces $AT \in TC$. Podemos definir entonces el siguiente isomorfismo $\Gamma : B(H) \to TC^*$

$$\Gamma(A)(T) := tr(AT).$$

Dados $h, k \in H$, definimos $R_{h,k} \in B(H)$ como el operador $R_{h,k}(x) := \langle x, k\rangle\, h$. Como $R_{h,k}$ es de rango 1, es de traza finita. Además, como la traza no depende de la base, eligiendo una base cuyo primer elemento sea $\frac{Ah}{\|Ah\|}$ se ve que para todo $A \in B(H)$,

$$tr(AR_{h,k}) = \langle Ah, k\rangle\,. \tag{1.11}$$

También vale que el generado por estos operadores es denso en TC.

Para una información detallada de los operadores Traza consultar [4].

Dotemos a $B(S, B(H))$ de la BW-topología inducida por la identificación $B(H) \approx TC^*$. Veamos como se traduce la caracterización de la BW convergencia del Lema 1.6.3 para el caso $B(S, B(H))$.

Lema 1.6.4. *Sea $(L_\lambda)_\lambda$ una red acotada en $B(S, B(H))$. Entonces $(L_\lambda)_\lambda \overset{BW}{\to} L$ si y sólo si para todo $h, k \in H$, $s \in S$, $\langle L_\lambda(s)h, k\rangle_\lambda \to \langle L(s)h, k\rangle$.*

Demostración. Por el Lema 1.6.3, una red acotada $(L_\lambda)_\lambda$ en $B(X, Y^*)$ converge BW a L si y sólo si vía la identificación $B(H) \approx TC^*$, para todo $s \in S$, $(L_\lambda(s))_\lambda \overset{w^*}{\to} L(s)$. Equivalentemente, para todo $s \in S$, $T \in TC$, $tr(L_\lambda(s)T)_\lambda \to tr(L(s)(T))$. Sea $(L_\lambda)_\lambda$ una red BW-convergente a L, tomando el caso particular $T = R_{h,k}$ y recordando la igualdad (1.11) tenemos que

$$\langle L_\lambda(s)h, k\rangle_\lambda = tr(L_\lambda(s)R_{h,k})_\lambda \to tr(L(s)R_{h,k}) = \langle L(s)h, k\rangle\,.$$

Recíprocamente, sea $(L_\lambda)_\lambda$ una red acotada tal que para todo $h, k \in H$, $x \in X$, $\langle L_\lambda(s)h, k\rangle_\lambda \to \langle L(s)h, k\rangle$.

Equivalentemente para todo operador $R_{h,k}$,

$$tr(L_\lambda(s)R_{h,k})_\lambda \to tr(L(s)R_{h,k}).$$

Luego, $L_\lambda(s)(T) \to L(s)(T)$ para todo operador T perteneciente al generado por los $R_{h,k}$. Finalmente, como la red $(L_\lambda)_\lambda$ es acotada, la convergencia pasa a la clausura del espacio generado por los $R_{h,k}$ que es TC. □

Como aplicación a los operadores completamente positivos (y completamente acotados) tenemos que la bola unitaria de los completamente positivos (completamente acotados) es BW-compacta.

Teorema 1.6.5. *Sea S un sistema de operadores cerrado. Entonces los siguientes conjuntos son BW-compactos:*

i) $B_r(S, H) := \{L \in B(S, B(H)) : \|L\| \le r\}$,

ii) $CB_r(S, H) := \{L \in B(S, B(H)) : \|L\|_{cb} \le r\}$,

iii) $CP_r(S, H) := \{L \in B(S, B(H)) :\ L \text{ es completamente positivo },\ \|L\| \le r, \}$

iv) $CP(S, H, P) := \{L \in B(S, B(H)) :\ L \text{ es completemente positivo y } L(1) = P\}$.

Demostración. Como la BW-topología es una w^*- topología, por el Teorema de Alaogu, el conjunto $B_r(S,H)$ es BW-compacto. Como el resto de los conjuntos son subconjuntos de éste último, basta ver que son BW-cerrados.

Demostraremos sólamente el caso $CP_r(S,H)$, ya que las demás demostraciones son similares.

Sea $(L_\lambda)_\lambda$ una red en $CP_r(S,H)$ BW-convergente a L, debemos ver que $L \in CP_r(S,H)$. Como $B_r(S,H)$ es BW-cerrado y $CP_r(S,H) \subseteq B_r(S,H)$ se deduce que $L \in B_r(S,H)$, es decir, que $\|L\| \leq r$. Para que L pertenezca a $CP_r(S,H)$ resta probar que es completamente positivo.

Sea $A \in M_n(S)$ una matriz positiva, debemos ver que $L_n(A)$ es positivo en $M_n(B(H)) \approx B(H^n)$. Esto último pasa si y sólo si para todo $\overline{h} \in H^n$,

$$\left\langle L_n(A)\overline{h}, \overline{h}\right\rangle_{H^n} \geq 0.$$

Sea entonces $\overline{h} \in H^n$ y digamos $\overline{h} = \oplus_{i=1}^n h_i$. Calculemos $[L_n(A)\overline{h}]_i$.

$$[L_n(A)\overline{h}]_i = \sum_j [L_n(A)]_{i,j}[\overline{h}]_j = \sum_j L(A_{i,j})h_j.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\left\langle L_n(A)\overline{h}, \overline{h}\right\rangle_{H^n} &= \sum_i \left\langle [L_n(A)\overline{h}]_i, [\overline{h}]_i\right\rangle_H = \sum_i \left\langle \sum_j L(A_{i,j})h_j, h_i\right\rangle_H \\ &= \sum_{i,j} \left\langle L(A_{i,j})h_j, h_i\right\rangle_H .\end{aligned}$$

Análogamente, como para cada λ, L_λ es completamente positivo, vale que

$$\sum_{i,j} \left\langle L_\lambda(A_{i,j})h_j, h_i\right\rangle_H \geq 0.$$

Por el Lema 1.6.4 $\sum_{i,j} \left\langle L_\lambda(A_{i,j})h_j, h_i\right\rangle_H$ tiende a $\sum_{i,j} \left\langle L(A_{i,j})h_j, h_i\right\rangle_H$ que es positivo por ser límite de positivos. Luego

$$0 \leq \sum_{i,j} \left\langle L(A_{i,j})h_j, h_i\right\rangle_H = \left\langle L_n(A)\overline{h}, \overline{h}\right\rangle_{H^n} .$$

□

Estamos en condiciones de demostrar el teorema de extensión de Arveson.

Teorema 1.6.6 (Teorema de extensión de Arveson)**.** *Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, $S \subset \mathscr{A}$ un sistema de operadores y $\phi : S \to B(H)$ un operador completamente positivo, entonces existe $\tilde{\phi} : \mathscr{A} \to B$ completamente positivo que extiende a ϕ.*

Demostración. Para cada F subespacio de dimensión finita de H, consideremos $\phi_F : S \to B(F)$ la compresión de ϕ a F. Es decir, $\phi_F(a) := P_F\phi(a)|_F$. Verifiquemos que ϕ_F sigue siendo completamente positivo. Sea $A \in M_n(S)$ una matriz positiva, debemos ver que $(\phi_F)_n(A)$ es una matriz positiva en $M_n(B(F)) \cong B(F^n)$. Esto último sucede si y sólo si para todo $x \in F^n$,

$$\langle(\phi_F)_n(A)x, x\rangle_{F^n} \geq 0.$$

Observemos que $(\phi_F)_n(A)$ es $(P_F)_n \circ \phi_n(A) \circ (i_F)_n$, donde $(P_F)_n : H^n \to F^n$ es la suma directa de n copias de P_F. Por otro lado $(P_F)_n$ no es otra cosa que la proyección de H^n en F^n. Análogamente $(i_F)_n$ es la suma directa de n copias de i_F y a su vez la inclusión de F^n en H^n.

Sea $x \in F^n$, luego

$$\begin{aligned}0 \leq \langle\phi_n(A)x, x\rangle_{H^n} &= \langle P_{F^n}\phi_n(A)x + P_{F^{n\perp}}\phi_n(A)x, x\rangle_{H^n} = \langle P_{F^n}\phi_n(A)x, x, \rangle_{H^n} \\ &= \langle P_{F^n}\phi_n(A)i_{F^n}x, x, \rangle_{H^n} = \left\langle(\phi_F)_n(A)x, x\right\rangle_{F^n} .\end{aligned}$$

Como $\phi_F : S \to B(F)$ es completamente positivo y $B(F) \cong M_k$ para algún k, por el Teorema de extensión de Arveson para el caso finito 1.5.3, existe un operador completamente positivo $\tilde{\psi}_F : \mathscr{A} \to B(F)$ con $\|\tilde{\psi}_F\| \leq \|\phi_F\|$ que extiende a ϕ_F.

Tenemos entonces que

$$||\tilde{\psi}_F|| = ||\phi_F|| \leq ||\phi||.$$

Consideremos ahora $\psi_F : \mathscr{A} \to B(H)$ definido como la extensión lineal de

$$\psi_F(a)(x) := \begin{cases} \tilde{\psi}(a)(x) & si\ x \in F \\ 0 & si\ x \in F^{\perp}. \end{cases}$$

Veamos que ψ_F es completamente positivo y que $||\psi_F|| \leq ||\phi||$.
Sea $A \in M_n(\mathscr{A})$ una matriz positiva y $\overline{h} \in H^n$, luego

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_F(A)(\overline{h}), (\overline{h}) \right\rangle &= \left\langle \psi_F(A)P_F(\overline{h}) + \psi_F(A)P_{F^{\perp}}(\overline{h}), (\overline{h}) \right\rangle = \left\langle \psi_F(A)P_F(\overline{h}), (h) \right\rangle \\ &= \left\langle \tilde{\psi}_F(A)P_F(\overline{h}), (\overline{h}) \right\rangle = \left\langle \tilde{\psi}_F(A)P_F(\overline{h}), P_F(\overline{h}) \right\rangle + \left\langle \tilde{\psi}_F(A)P_F(\overline{h}), P_{F^{\perp}}(\overline{h}) \right\rangle \\ &= \left\langle \tilde{\psi}_F(A)P_F(\overline{h}), P_F(\overline{h}) \right\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Similarmente

$$||\psi_F(h)|| = ||\psi_F P_F(h)|| = ||\tilde{\psi}_F P_F(h)|| \leq ||\tilde{\psi}|| ||P_F|| ||h|| \leq ||\phi|| ||h||.$$

Además, por como construimos ψ_F, ψ_F restringido a S y F coincide con ϕ_F. Si $s \in S$ y $x \in F$,

$$\psi_F(s)(x) = \phi_F(s)(x).$$

El conjunto de los subespacios de dimensión finita contenidos en H forma un conjunto dirigido bajo la inclusión y luego $\{\psi_F\}$ es una red en $CP_{||\phi||}(\mathscr{A}, H)$, que por el teorema anterior es BW- compacto (ya que $\mathscr{A}$ es un sistema de operadores cerrado). Entonces existe una subred $\{\psi_G\}$ $BW-$ convergente a un operador completamente positivo ψ.

Afirmamos que ψ extiende a ϕ. En efecto, sean $s \in S$ y $x,\ y \in H$. Tomemos F el espacio generado por $\{x, y, \phi(s)(x)\}$. Por el Lema 1.6.4,

$$\lim_G \langle \psi_G(x), y \rangle = \langle \psi(x), y \rangle .$$

Por otro lado, si $\tilde{F} \supseteq F$,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\tilde{F}}(s)(x), y \rangle &= \langle \phi_{\tilde{F}}(x), y \rangle = \langle P_{\tilde{F}}\phi(s)i_{\tilde{F}}(x), y \rangle \\ &= \langle P_{\tilde{F}}\phi(s)(x), y \rangle = \langle \phi(s)(x), y \rangle . \end{aligned}$$

Finalmente, como el conjunto $\{\tilde{F} \supseteq F\}$ es cofinal,

$$\begin{aligned} \langle \phi(s)(x), y \rangle &= \lim_{\tilde{F} \supseteq F} \langle \psi_{\tilde{F}}(s)(x), y \rangle = \lim_G \langle \psi_G(s)(x), y \rangle \\ &= \langle \psi(s)(x), y \rangle . \end{aligned}$$

De lo que se deduce que $\phi(s) = \psi(s)$ para todo $s \in S$.

□

Capítulo 2

Caracterización de la conjetura de Halmos

El objetivo principal de este capítulo es caracterizar el problema de similaridad Halmos. Veremos que un operador T es similar a una contracción si y sólo si su morfismo de von Neumann $\rho : P(\mathbb{S}^1) \to B(H)$ es completamente acotado. Para ello necesitaremos primero estudiar las generalizaciones de los teoremas de extensión y factorización de operadores completamente positivos para operadores completamente acotados. Luego, agregando la hipótesis de ϕ morfismo de álgebras unital, probaremos una caracterización obtenida por Paulsen en [22] para morfismos de álgebras completamente acotados de $\mathscr{A} \to B(H)$ con $\mathscr{A}$ un álgebra de operadores. El caso particular $\mathscr{A} = P(\mathbb{S}^1)$ nos dará lugar a nuestro resultado buscado.

2.1. Teoremas de extensión y factorización

Teniendo en cuenta el caso base de esta tesis, donde $\phi : P(\mathbb{S}^1) \to B(H)$, las C^*-álgebras consideradas serán todas con unidad. Además, tampoco será relevante que algunos resultados valgan sólo cuando el codominio es $B(H)$. Ya vimos que todo operador de la forma $V^*\pi(-)V$, para algún $*$- morfismo π, es completamente positivo (Observación 1.4.3). Por otro lado, vimos también que todo operador completamente positivo admite dicha factorización (Teorema de Stinespring 1.4.1). Si ahora suponemos $V_1 \neq V_2$, es trivial probar que los operadores de la forma $V_1^*\pi(-)V_2$ son completamente acotados. Veremos que la generalización natural para operadores completamente acotados es válida, todo operador completamente acotado se puede factorizar como $V_1^*\pi(-)V_2$. La generalización para el Teorema de extensión de Arveson 1.6.6 es todavia más fácil de establecer. Ésta será simplemente que todo operador completamente acotado $\phi : M \to B(H)$ con M un espacio de operadores, se puede extender de forma completamente acotada a todo el álgebra. La técnica para obtener ambas generalizaciones será la misma, veremos que los operadores completamente contractivos se pueden pensar como la $(1, 2)$ coordenada en $M_2(\mathscr{A})$ de un operador completamente positivo unital, allí aplicaremos el teorema a generalizar y luego proyectaremos sobre el codominio.

Es claro que $M_n(M_m(\mathscr{A}))$ es $*$-isomorfo a $M_{nm}(\mathscr{A})$, donde el isomorfismo viene dado simplemente por "expandir" cada coordenada $A_{i,j}$. A su vez $M_{nm}(\mathscr{A})$ es del mismo modo $*$-isomorfo a $M_m(M_n(\mathscr{A}))$. Consideremos ahora $A \in M_n(M_m(\mathscr{A}))$, A es de la forma $(A_{i,j})_{i,j=1}^n$ con cada $A_{i,j} \in M_m(\mathscr{A})$, es decir $A_{i,j} = (a_{i,j,k,l})_{k,l=1}^m$. Definiendo $B_{k,l} = (a_{i,j,k,l})_{i,j=1}^n$ obtenemos un elemento de $M_n(\mathscr{A})$ y luego $B = (B_{k,l})_{k,l=1}^m \in M_m(M_n(\mathscr{A}))$. Identificando $M_n(M_m(\mathscr{A}))$ y $M_m(M_n(\mathscr{A}))$ con $M_{nm}(\mathscr{A})$ y pensando a A y a B como elementos de $M_{nm}(\mathscr{A})$, el operador que mapea $A \mapsto B$ no es otra cosa que una permutación, y en consecuencia un $*$-morfismo. A dicho operador, pensado ahora definido en $M_n(M_m(\mathscr{A}) \to M_m(M_n(\mathscr{A}))$, lo llamaremos el *Shuffle canónico*. Es importante notar, que al ser un $*$-isomorfismo, el Shuffle canónico no afecta ni la positividad ni la norma. Un ejemplo visual de como opera el morfismo: si $A \in M_n(M_2(\mathscr{A}))$, $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^n$ con cada $A_{i,j} = \begin{pmatrix} b_{i,j} & c_{i,j} \\ d_{i,j} & e_{i,j} \end{pmatrix}$, la imagen de A es $\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$, donde $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^n$, $C = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$, $D = (d_{i,j})_{i,j=1}^n$ y $E = (e_{i,j})_{i,j=1}^n$.

También puede ser útil entender el morfismo desde el punto de vista tensorial. Recordemos que $M_n(\mathscr{A}) \cong \mathscr{A} \otimes M_n$, vía $(A_{i,j})_{i,j=1}^n \mapsto \sum_{i,j=1}^n A_{i,j} \otimes E_{i,j}$ donde $(E_{i,j})_{i,j=1}^n$ son las matrices elementales de M_n. Consideremos $A \in M_n(M_m(\mathscr{A}))$ y notemos a las matrices elementales de M_m como $F_{k,l}$. La imagen de A vía el isomorfismo $M_n(M_m(\mathscr{A})) \cong M_m(\mathscr{A}) \otimes M_n$ es $\sum_{i,j=1}^n A_{i,j} \otimes E_{i,j}$, donde cada $A_{i,j} \in M_m(\mathscr{A})$. Aplicando nuevamente el isomorfismo, esta vez entre $M_m(\mathscr{A})$ y $\mathscr{A} \otimes M_m$, tenemos que la imagen de cada $A_{i,j}$ es $\sum_{k,l}^m a_{i,j,k,l} \otimes F_{k,l}$ y luego la imagen de A en $(\mathscr{A} \otimes M_m) \otimes M_n$ es

$$\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{m}(a_{i,j,k,l}\otimes F_{k,l})\otimes E_{i,j}.$$

Por otro lado, si empezamos con $B\in M_m(M_n(\mathscr{A}))$, dada por el Shuffle canónico, y aplicamos los isomorfismos $M_m(M_n(\mathscr{A}))\mapsto M_n(\mathscr{A})\otimes M_n\mapsto(\mathscr{A}\otimes M_n)\otimes M_m$ obtenemos

$$\sum_{k,l=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{i,j,k,l}\otimes E_{i,j})\otimes F_{k,l}.$$

Vemos que el Shuffle canónico es la composición de los morfismos

$$M_n(M_m(\mathscr{A}))\cong(\mathscr{A}\otimes M_n)\otimes M_m\cong(\mathscr{A}\otimes M_m)\otimes M_n\cong M_m(M_n(\mathscr{A})).$$

La técnica presentada en el siguiente lema será fundamental para generalizar los teoremas de representación de Stinspring y de extensión de Arveson. Si bien un operador completamente contractivo puede no ser completamente positivo (por no ser unital), se puede ver como una coordenada de un operador completamente positivo y unital en otro espacio de operadores.

Lema 2.1.1. *Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ C^*-álgebras con unidad, $M\hookrightarrow\mathscr{A}$ un espacio de operadores y $\phi: M\to\mathscr{B}$ completamente contractivo. Sean $S_M\subset M_2(\mathscr{A})$ el sistema de operadores generado por*

$$\left\{\begin{pmatrix}\alpha 1 & a\\ b^* & \beta 1\end{pmatrix}:\alpha,\,\beta\in\mathbb{C}\,,\ a,\ b\in M\right\},$$

y $\psi: S_M\to M_2(\mathscr{B})$ definido como,

$$\psi\left[\begin{pmatrix}\alpha 1 & a\\ b^* & \beta 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\alpha 1 & \phi(a)\\ \phi(b)^* & \beta 1\end{pmatrix}.$$

Entonces ψ resulta completamente positivo.

Demostración. Sean $n\in\mathbb{N}$ y N perteneciente a $M_n(S_M)$ una matriz positiva. Debemos ver que $\psi_n(N)$ es positiva. La matriz N es de n x n, donde cada coordenada es un elemento de S_M, de la forma

$$(N)_{i,j}=\begin{pmatrix}\alpha_{i,j} & a_{i,j}\\ {b^*}_{i,j} & \beta_{i,j}\end{pmatrix}.$$

Análogamente, $(\psi_n(N))_{i,j}$ es

$$\begin{pmatrix}\alpha_{i,j} & \phi(a_{i,j})\\ \phi({b^*}_{i,j}) & \beta_{i,j}\end{pmatrix}.$$

Observemos que S_M es un subespacio de $M_n(M_2(\mathscr{A}))$ y que $M_2(M_n(\mathscr{A}))\cong M_n(M_2(\mathscr{A}))$ vía el Shuffle canónico. Si notamos a $A=a_{i,j}$, $B=b_{i,j}$, $H=\alpha_{i,j}$, $K=\beta_{i,j}\in M_n(\mathscr{A})$, la imagen de N vía el Shuffle canónico es

$$\begin{pmatrix}H & A\\ B^* & K\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Similarmente la imagen de $\psi_n(N)$ es

$$\begin{pmatrix}H & \phi_n(A)\\ \phi_n(B^*) & K\end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Luego, como el Shuffle canónico es un $*$-isomorfismo y preserva la positividad, es suficiente probar que si (2.1) es positivo, entonces (2.2) también.

Observemos que si (2.1) es positivo, necesariamente tiene que valer que $A=B$ y que H y K también son positivos. Fijemos un $\epsilon>0$ y consideremos $H_\epsilon=H+\epsilon.Id$, $K_\epsilon=K+\epsilon.Id$ de forma que H_ϵ y K_ϵ son estrictamente positivos y en consecuencia inversibles. Luego tiene sentido considerar $H_\epsilon^{-\frac{1}{2}}$ y $K_\epsilon^{-\frac{1}{2}}$. Multiplicando a derecha y izquierda por $D = \begin{pmatrix} H_\epsilon^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & K_\epsilon^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$, resulta que

$$D\begin{pmatrix} H_\epsilon & A \\ A^* & K_\epsilon \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} Id & H_\epsilon^{-\frac{1}{2}} A K_\epsilon^{-\frac{1}{2}} \\ K_\epsilon^{-\frac{1}{2}} A^* H_\epsilon^{-\frac{1}{2}} & Id \end{pmatrix}$$

es una matriz positiva y aplicando el Lema 1.3.4 tenemos que $\|H_\epsilon^{-\frac{1}{2}} A K_\epsilon^{-\frac{1}{2}}\| \leq 1$.

Por otro lado, como $H_\epsilon^{-\frac{1}{2}}$ y $K_\epsilon^{-\frac{1}{2}}$ son matrices escalares(i.e sus entradas son de la forma $\lambda 1$ con $\lambda \in \mathbb{C}$), se cumple que $\phi_n(H_\epsilon^{-\frac{1}{2}} A K_\epsilon^{-\frac{1}{2}}) = H_\epsilon^{-\frac{1}{2}} \phi_n(A) K_\epsilon^{-\frac{1}{2}}$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
[\phi_n(H_\epsilon^{-\frac{1}{2}} A K_\epsilon^{-\frac{1}{2}})]_{i,j} &= \phi([H_\epsilon^{-\frac{1}{2}} A K_\epsilon^{-\frac{1}{2}}]_{i,j}) = \phi\left(\sum_k [H_\epsilon^{-\frac{1}{2}} A]_{i,k} [K_\epsilon^{-\frac{1}{2}}]_{k,j}\right) \\
&= \sum_k \phi([H_\epsilon^{-\frac{1}{2}} A]_{i,k}) [K_\epsilon^{-\frac{1}{2}}]_{k,j} = \sum_k \phi\left(\sum_l [H_{\epsilon_{i,l}}^{-\frac{1}{2}}] A_{l,k}\right) [K_\epsilon^{-\frac{1}{2}}]_{k,j} \\
&= \sum_k \sum_l [H_\epsilon^{-\frac{1}{2}}]_{i,l} \phi(A_{l,k}) [K_\epsilon^{-\frac{1}{2}}]_{k,j} = [H_\epsilon^{-\frac{1}{2}} \phi_n(A) K_\epsilon^{-\frac{1}{2}}]_{i,j}
\end{aligned}$$

Muliplicando nuevamente a izquierda y derecha por D obtenemos la igualdad

$$D\begin{pmatrix} H_\epsilon & \phi_n(A) \\ \phi_n(A)^* & K_\epsilon \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} Id & H_\epsilon^{-\frac{1}{2}} \phi_n(A) K_\epsilon^{-\frac{1}{2}} \\ K_\epsilon^{-\frac{1}{2}} \phi_n(A)^* H_\epsilon^{-\frac{1}{2}} & Id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & \phi_n(H_\epsilon^{-\frac{1}{2}} A K_\epsilon^{-\frac{1}{2}}) \\ \phi_n(K_\epsilon^{-\frac{1}{2}} A^* H_\epsilon^{-\frac{1}{2}}) & Id \end{pmatrix}.$$

Recordemos que ϕ era completamente contractivo y que $\|H_\epsilon^{-\frac{1}{2}} A K_\epsilon^{-\frac{1}{2}}\| \leq 1$. Aplicando nuevamente el Lema 1.3.4, deducimos que esta última matriz es positiva. Multiplicando a izquierda y derecha por D^{-1}(y observando que es positiva) obtenemos que $\begin{pmatrix} H_\epsilon & \phi_n(A) \\ \phi_n(A)^* & K_\epsilon \end{pmatrix}$ es positiva para todo ϵ>0. La demostración concluye tomando límite con ϵ tendiendo a 0.

□

Observación 2.1.2. Como ψ es completamente positivo y unital es además completamente contractivo (ver Corolario 1.3.9).

Observación 2.1.3. Si no suponemos ϕ completamente contractivo y solo pedimos completamente acotado, aplicando el lema anterior con $\tilde{\phi} = \frac{\phi}{\|\phi\|_{cb}}$, obtenemos $\tilde{\psi}$ completamente positivo tal que $\tilde{\phi}$ es la (1,2)-coordenada de $\tilde{\psi}$. Si ahora consideramos $\psi = \|\phi\|_{cb}\tilde{\psi}$, tenemos que ψ es completamente positivo y que ϕ es la (1,2)-coordenada de ψ. La diferencia sustancial con el caso anterior es que ψ pierde la propiedad de ser unital.

Observación 2.1.4. Con exactamente la misma prueba, vale en realidad que si ϕ es k-contractivo, entonces ψ es k-positivo.

El siguiente lema nos sirve para recuperar información de ϕ a partir de ψ.

Lema 2.1.5. *Sean $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, $i : \mathscr{A} \to M_2(\mathscr{A})$ y $j : M_2(\mathscr{A}) \to \mathscr{A}$ la inclusión y proyección en la $(1,2)$-coordenada. Es decir,*

$$i(a) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } j\left[\begin{pmatrix} * & a \\ * & * \end{pmatrix}\right] = a.$$

Entonces i y j son completamente contractivos.

Demostración. Probaremos solamente j completamente contractivo, ya que la resolución de i completamente contractivo es similar.

Probemos primero que j es contractivo. Considerando $(\pi, B(H))$ una representación de $\mathscr{A}$, podemos suponer $\mathscr{A} = B(H)$. Sea $A \in M_2(B(H))$ y digamos $A = \begin{pmatrix} a_1 & a \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$.

Tomemos un $h \in H$ con $\|h\| \leq 1$, entonces

$$\left\|\begin{pmatrix} a_1 & a \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}\right\|_{M_2(B(H))} \geq \left\|\begin{pmatrix} a_1 & a \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}\right\|_{H\oplus H} = \|(a(h), a_3(h)\|_{H\oplus H} \geq \|a(h)\|_H = \|j(A)(h)\|_H.$$

Tomando supremo sobre los $\{h : \|h\|_H \leq 1\}$ se concluye la desigualdad.

Para probar que j es completamente contractivo, debemos probar que para todo n, $j_n : M_n(M_2(\mathscr{A})) \to M_n(\mathscr{A})$ es contractivo. Sin embargo, si notamos por el momento θ al Shuffle canónico $M_n(M_2(\mathscr{A})) \to M_2(M_n(\mathscr{A}))$, $j_n \circ \theta : M_2(M_n(\mathscr{A})) \to M_n(\mathscr{A})$ no es otra cosa que la proyección en la $(1,2)$-coordenada tomando ahora $\tilde{\mathscr{A}} = M_n(\mathscr{A})$. Como ya probamos que las proyecciones son contractivas, deducimos que $j_n \circ \theta$ es contractivo. Como θ es un $*$-morfismo, concluimos que j_n es contractivo.

□

Observación 2.1.6. *Supongamos ψ, S_M y ϕ como en el Lema 2.1.1, pero ahora sin ninguna condición sobre ϕ. Si ψ es completamente positivo, entonces ϕ es completamente contractivo.*

Demostración. Observemos que ϕ no es otra cosa que la composición $j \circ \psi \circ i$. Con j e i los operadores proyección e inclusión en la $(1,2)$ coordenada. Como cada componente es completamente contractiva, la composición entre ellas también lo es.

□

Si juntamos la observación anterior con el Lema 2.1.1 obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.1.7. *Sea $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ con $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ C^*-álgebras con unidad y sean ψ y S_M como en el lema 2.1.1. Entonces ψ es completamente positivo si y sólo si ϕ es completamente contractivo.*

Vimos en los Ejemplos 1.2.5 y 1.3.10 que si $\phi : M \to M_n$, ϕ podía ser positivo y no completamente positivo. Quedaba pendiente la pregunta de si ϕ acotado implica completamente acotado. Estamos en condiciones de dar una respuesta sencilla.

Proposición 2.1.8. *Sea M un espacio de operadores y $\phi : M \to M_n$ un operador acotado. Entonces $\|\phi_{2n}\| = \|\phi\|_{cb}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir $\|\phi_{2n}\| = 1$ y probar que $\|\phi\|_{cb} \leq 1$. Como ϕ es $2n$-contractivo, $\psi : S_M \to M_{2n}$ es $2n$-positivo y en consecuencia, por la Proposición 1.5.1, completamente positivo. El hecho de que ψ sea completamente positivo implica que ϕ es completamente contractivo.

□

Smith probó que, debido a las caracteristicas de ψ y S_M, la norma cb es alcanzada en $\|\phi_n\|$.

Proposición 2.1.9 (Smith)**.** *Sea M un espacio de operadores y $\phi : M \to M_n$ un operador acotado. Entonces $\|\phi_n\| = \|\phi_{cb}\|$.*

La demostración se puede encontrar en [30].

Paulsen probó que la conjetura de Halmos es equivalente a que todo morfismo de von Neumann $\rho : P(\mathbb{S}^1) \to B(H)$ sea completamente acotado. En este contexto, las proposiciones anteriores muestran que para un ejemplo de un morfismo de von Neumann no completamente acotado, el espacio de Hilbert H será necesariamente de dimensión infinita.

A continuación demostraremos la generalización del teorema de extensión de Arveson 1.6.6 para operadores completamente acotados.

Teorema 2.1.10 (Teorema de extensión de Wittstock)**.** *Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra unital, $M \subset \mathscr{A}$ un espacio de operadores y $\phi : M \to B(H)$ un operador completamente acotado, entonces existe $\tilde{\phi} : \mathscr{A} \to B(H)$ una extensión completamente acotada de ϕ con $\|\tilde{\phi}\|_{cb} = \|\phi\|_{cb}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir $\|\phi\|_{cb} \leq 1$. Consideremos S_M y ψ como en el Lema 2.1.1. Como ψ es completamente positivo, por el teorema de extensión de Arveson 1.6.6, existe un $\tilde{\psi} : M_2(\mathscr{A}) \to M_2(B(H))$ extendiendo a ψ. Observemos que como $\tilde{\psi}_n$ es completamente positivo, la norma de $\tilde{\psi}_n$ se alcanza en la identidad (ver

Proposición 1.3.8 y como ψ_n es unital, $\tilde{\psi}$ resulta completamente contractivo (ver Corolario 1.3.9 . Definamos $\tilde{\phi} : \mathscr{A} \to H$ como la composición $j \circ \tilde{\psi} \circ i$, donde tanto la inclusión como la proyección son en la coordenada $(1, 2)$. Es decir,

$$\tilde{\psi}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \tilde{\phi}(a) \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Es claro que $\tilde{\phi}$ es lineal. Como $\tilde{\psi}$ extiende a ψ y la proyección en la coordenada (1,2) de ψ coincide con ϕ, tenemos que $\tilde{\phi}$ extiende a ϕ. Además, $\tilde{\phi}$ es completamente contractivo ya que j, $\tilde{\psi}$ e i son completamente contractivos.

□

Observación 2.1.11. *Si el codominio es una C^*-álgebra $\mathscr{B}$, la podemos representar en un espacio de Hilbert H y aplicar el teorema anterior. Sin embargo, no necesariamente vale $Rg(\tilde{\phi}) \subseteq \mathscr{B}$. Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, "\tilde{\phi}"] & B(H) \\ M \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\phi"] & \mathscr{B} \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Como consecuencia del Lema 2.1.1 probaremos a continuación que un operador completamente acotado se puede ver como una coordenada de un completamente positivo en $M_2(\mathscr{A})$, y además, si el codominio es $B(H)$, se puede conseguir que las demás coordenadas sean operadores completamente positivos.

Teorema 2.1.12. *Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra unital y $\phi : \mathscr{A} \to B(H)$ completamente acotado, entonces existen operadores ϕ_i, completamente positivos con $\|\phi_i\|_{cb} = \|\phi\|_{cb}$, $i = 1, 2$, tal que el operador $\psi : M_2(\mathscr{A}) \to B(H \oplus H)$ dado por:*

$$\psi\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \phi_1(a) & \phi(b) \\ \phi(c)^* & \phi_2(d) \end{pmatrix}$$

es completamente positivo. Más aún si $\|\phi\|_{cb} \leq 1$, podemos tomar $\phi_i(1) = Id_H$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir $\|\phi\|_{cb} = 1$.

Aplicando el Lema 2.1.1 con $M = \mathscr{A}$ obtenemos un $\psi : S_{\mathscr{A}} \subseteq M_2(\mathscr{A}) \to B(H \oplus H)$ completamente positivo y unital. Por el teorema de extensión de Arveson 1.6.6, podemos extender ψ a todo $M_2(\mathscr{A})$ manteniendo la completa positividad. A dicha extensión la seguiremos notando ψ. Como $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in S_M$, por la definición de ψ, vale que

$$\psi\left[\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & \phi(b) \\ \phi(c)^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Veamos cuanto vale ψ en un elemento de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Para ello consideremos un $p \in \mathscr{A}$ tal que $0 \leq p \leq 1$. Es claro que $0 \leq \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y en consecuencia, como ψ es positivo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq \psi\left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \leq \psi\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo elemental muestra que a $\psi\left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$ no le queda otra opción que ser de la forma $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En efecto, si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \psi\left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$. Como $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, y $\begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ son positivas, se deduce que $b^* = c$ y que d y $-d$ son positivos, de donde $d = 0$. Como la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}$ es positiva, para todo $h_1,\ h_2 \in H$,

$$\begin{aligned} 0 &\le \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}(h_1, h_2), (h_1, h_2) \right\rangle_{H^2} \\ &= \langle ah_1, h_1 \rangle + 2Re(\langle bh_2, h_1 \rangle_H). \end{aligned}$$

Supongamos que existen $h_2,\ h_1$ con $\langle bh_2, h_1 \rangle_H \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $Re(\langle bh_2, h_1 \rangle_H) > 0$. Luego, para todo $t \in \mathbb{R}$ con $t \neq 0$, vale que

$$0 \le \langle ah_1, h_1 \rangle + 2Re(\langle tbh_2, h_1 \rangle_H).$$

Tomando límite con t tendiendo a infinito llegamos a una contradicción.

Como $\mathscr{A}$ es el generado por sus elementos positivos (Observación 1.2.3), existe $\phi_1 : A \to H$ tal que

$$\psi\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \phi_1(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además como un elemento $p \in \mathscr{A}$ es positivo si y sólo si $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es positivo tenemos que ϕ_1 es positivo. Con el mismo argumento, es inmediato ver que $(\phi_1)_n$ es positivo. Sea $A \in M_n(\mathscr{A})$ positiva, para cada $A_{(i,j)}$ vale que $\psi\left[\begin{pmatrix} A_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \phi_1(A_{(i,j)}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y entonces, bajo el Shuffle canónico entre $M_2(M_n(\mathscr{A}))$ y $M_n(M_2(\mathscr{A}))$, $\psi_n\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} (\phi_1)_n(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que es positivo por ser ψ completamente positivo.

De forma análoga se prueba la existencia de un ϕ_2 completamente positivo tal que

$$\psi\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi_2(d) \end{pmatrix}.$$

Luego ψ y ϕ_i son de la forma deseada puesto que

$$\psi\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \psi\left[\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \phi_1(a) & \phi(b) \\ \phi(c)^* & \phi_2(d) \end{pmatrix}.$$

Finalmente, como los ϕ_i son completamente positivos y $\phi_i(1) = 1$, tenemos que

$$||\phi_i|| = ||\phi_i(1)|| = 1 = ||\phi||_{cb}.$$

□

Estamos en condiciones de generalizar el teorema de Stinespring 1.4.1 para operadores completamente acotados.

Teorema 2.1.13 (Generalización del teorema de Stinespring para ϕ completamente acotada)**.** *Sean $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra unital y $\phi : \mathscr{A} \to B(H)$ un operador completamente acotado. Entonces existen un espacio de Hilbert K, un $*$-morfismo $\pi : \mathscr{A} \to B(K)$ y operadores acotados V_i i=1,2, con $||\phi||_{cb} = ||V_1||||V_2||$ tal que*

$$\phi(a) = V_1^* \pi(a) V_2.$$

Más aún si $||\phi||_{cb} = 1$, entonces se pueden tomar V_i isometrías.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $||\phi||_{cb} = 1$. Por el Teorema 2.1.12, existen ϕ_1, ϕ_2, ψ completamente positivos tal que

$$\psi\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \phi_1(a) & \phi(b) \\ \phi(c)^* & \phi_2(d) \end{pmatrix}.$$

Como ψ es completamente positivo, por el teorema de representación de Stinespring 1.4.1, existe $(\tilde{\pi}, V, \tilde{K})$ una representación de Stinespring de ψ. Existen un espacio de Hilbert $\tilde{K}$, un $*$-morfismo $\tilde{\pi} : M_2(\mathscr{A}) \to B(\tilde{K})$ y un operador $V : H \oplus H \to B(\tilde{K})$ tal que $\psi(-) = V^*\tilde{\pi}(-)V$. Además como ψ es unital, podemos tomar V isometría y $\tilde{\pi}$ unital.

Afirmamos que existe una representación unital $\pi : \mathscr{A} \to B(K)$, tal que $\tilde{\pi} = \pi_2$.

Para ello se deben cumplir las siguientes condiciones

i) $\tilde{K} = K \oplus K$.

ii) $\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \pi(a) & \pi(b) \\ \pi(c) & \pi(d) \end{pmatrix}$.

Primero construyamos K. Consideremos $P := \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \in B(\tilde{K})$. Observemos que por ser $\tilde{\pi}$ un $*$-morfismo, $P^2 = P$ y $P^* = P$, de lo que se deduce que P es una proyección ortogonal. Luego obtenemos la descomposición $\tilde{K} = Rg(P) \oplus Ker(P)$, con $Ker(P) = Rg(P)^\perp$. Definamos K como $Rg(P)$.

Por otro lado, consideremos $\tilde{P} := \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$. Es claro que $\tilde{P}$ es también una proyección ortogonal, pero además, como $P + \tilde{P} = \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] + \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = Id_{\tilde{K}}$, $\tilde{P}$ no es otra cosa que $P_{K^\perp}$.

Veamos ahora que K es isométrico a $K^\perp$. Consideremos $\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \in B(\tilde{K})$ y notemos que como,

$$\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right](x) = \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right](x) = P_{K^\perp}\pi\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right](x),$$

donde x es un elemento arbitrario de $\tilde{K}$, vale que

$$Rg\left(\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\right) \subseteq K^\perp.$$

Definamos $\varphi : K \to K^\perp$ como $\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\Big|_K$. Es fácil ver que φ es inversible con inversa $\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\Big|_{K^\perp}$ y también, ya que $\tilde{\pi}$ es un $*$-morfismo, que $\|\varphi\| \leq 1$ y $\|\varphi^{-1}\| \leq 1$. Luego, se concluye que φ es una isometría.

Identificando K con $K^\perp$ se tiene que

$$\tilde{K} = K \oplus K.$$

En este punto la definición de π es natural. Definamos π como

$$\pi(a) := P_K \circ \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \circ i_k \text{ donde } i_K \text{ y } P_K \text{ son la inclusión y proyección en } K.$$

Vale que π es un $*$-morfismo unital. Sólo probaremos que π es multiplicativo, las otras condiciones se demuestran en forma similar.

Teniendo en cuenta que

$$\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right],$$

deducimos que

$$Rg\left(\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \circ i_K\right) \subseteq K \subseteq \tilde{K}.$$

En consecuencia

$$\pi(ab) = P_K \circ \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\pi\left[\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \circ i_K = P_K \circ \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \circ i_K \circ P_K \circ \pi\left[\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \circ i_K = \pi(a)\pi(b).$$

Veamos que se cumple la condición ii). Basta probar que para todo $a, b, c, d \in \mathscr{A}$,

$$\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \pi(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & \pi(b) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pi(c) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi(d) \end{pmatrix}.$$

Probaremos solamente que $\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & \pi(b) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ya que las demás igualdades son análogas.

Sean $x, y \in K$, luego,

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\left\{\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right\} \\
&= \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} & ,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(b)(y) & ,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pi(b) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De donde conluímos *ii*). Ya tenemos el de espacio de Hilbert K y la representación π. Resta decir quienes son V_1 y V_2. Sea $h \in H$ y notemos que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Id_H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(1_{\mathscr{A}}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = V^*\begin{pmatrix} \pi(1_{\mathscr{A}}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= V^*\begin{pmatrix} Id_K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = V^*P_KV\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Esta última igualdad implica que $V\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$. En efecto, sea $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$. Por (2.3), vale que $\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = V^*\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Luego,

$$\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| = \left\|V\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|V^*\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right\| \leq \|V^*\|\,\|x\| = \|x\|. \tag{2.4}$$

y concluimos que $y = 0$.

Existe entonces $V_1 : H \to K$ tal que $V(h, 0) = (V_1(h), 0)$. Además, por la desigualdad (2.4), V_1 tiene que ser necesariamente una isometría.

Análogamente definimos V_2 como la isometría que cumple la propiedad $V(0, h) = (0, V_2(h))$.

Finalmente, veamos que (π, V_1, V_2) cumplen la condición deseada.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \phi_1(a) & \phi(b) \\ \phi(c)^* & \phi_2(d) \end{pmatrix} &= \psi\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = V^*\tilde{\pi}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]V = \begin{pmatrix} {V_1}^* & 0 \\ 0 & {V_2}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi(a) & \pi(b) \\ \pi(c) & \pi(d) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {V_1}^*\pi(a)V_1 & {V_1}^*\pi(b)V_2 \\ V_2^*\pi(c)V_1 & {V_2}^*\pi(d)V_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Tomando (1,2)-coordenada, se concluye el teorema.

□

2.2. Morfismos completamente acotados

En esta sección nos enfocaremos en caracterizar los morfismos unitales de álgebras $\mathscr{A} \to B(H)$ completamente acotados. Veremos que éstos son necesariamente similares a un morfismo completamente contractivo. Comencemos con las siguientes definiciones elementalales.

Definición 2.2.1. *Sean $\mathscr{B}$ una C^*-álgebra y $\mathscr{A}$ una subálgebra (no necesariamente $*$-cerrada)de $\mathscr{B}$. Entonces decimos que $\mathscr{A}$ es un álgebra de operadores.*

Definición 2.2.2. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de operadores y ρ, $\tilde{\rho} : \mathscr{A} \to B(H)$ dos operadores. Decimos que son S-similares si existe $S \in B(H)$ inversible tal que $S\rho(-)S^{-1} = \tilde{\rho}$. Además, diremos que S es una similaridad.*

Definición 2.2.3. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de operadores y $\rho : \mathscr{A} \to B(H)$. Decimos que ρ es similar a una contracción (o a un completamente contractivo) si existe $\tilde{\rho} : \mathscr{A} \to B(H)$ contractivo (completamente contractivo) tal que ρ es similar a $\tilde{\rho}$.*

Veamos como se traduce la noción de similaridad si ρ y $\tilde{\rho}$ son morfismos de von Neumann.

Observación 2.2.4. *Sean T y R dos operadores polinomialmente acotados en $B(H)$. Entonces T y R son S-similares si y sólo si sus morfismos de von Neumann asociados son S-similares.*

Demostración. Sean ρ_T y ρ_R los morfismos de von Neumann asociados a T y R respectivamente. Supongamos que T y R son S-similares. Debemos ver que $S\rho_T(-)S^{-1}$. Sea $p \in P(\mathbb{S}^1)$, luego,

$$S\rho_T(p)S^{-1} = S\,p(T)S^{-1} = p(STS^{-1}) = p(R) = \rho_R(p).$$

Recíprocamente, supongamos que ρ_T y ρ_R son S-similares. Luego,

$$STS^{-1} = S\rho_T(z)S^{-1} = \rho_R(z) = R.$$

□

De la observación anterior, podemos concluir el siguiente corolario.

Corolario 2.2.5. *Sea T un operador en $B(H)$. Entonces T es similar a una contracción si y sólo si su morfismo de von Neumann es similar a una contracción.*

Demostración. Supongamos que T es similar a una contracción. Entonces es polinomialmente acotado (Ecuación (1) de la Introducción) y en consecuencia su morfismo de von Neumann está bien definido (Observación 1.2.13). Sea R contractivo tal que R y T son S-similares y consideremos ρ_R y ρ_T los morfismos de von Neumann asociados a R y T respectivamente. Por la desigualdad de von Neumann 1.2.18, ρ_R es contractivo. Aplicando la Observación 2.2.4, concluimos que ρ_R y ρ_T son similares.

Recíprocamente sea $\tilde{\rho}$ contractivo tal que ρ_T y $\tilde{\rho}$ son similares. Sea $R = \tilde{\rho}(z) \in B(H)$. Como $\tilde{\rho}$ es contractivo, resulta que R es también contractivo y aplicando la Observación 2.2.4, tenemos que R y T son similares.

□

Recordemos que por la Observación 1.3.16 un morfismo de von Neumann es contractivo si y sólo si es completamente contractivo. Concluimos entonces que un morfismo de von Neumann es similar a un contractivo si y sólo si es similar a un completamente contractivo.

Consideremos $\mathscr{A}$ un álgebra de operadores y $\rho : \mathscr{A} \to B(H)$ un morfismo de álgebras unital y sea S similaridad tal que $\pi = S\rho S^{-1}$ es completamente contractivo. Sea $S_n : B(H^n) \to B(H^n)$ la suma directa de n copias de S. Entonces tenemos que $(S_n)^{-1} = (S^{-1})_n$ y además que $\|S_n\| = \|S\|$. Luego,

$$\|\rho_n\| = \|(S\pi S^{-1})_n\| = \|S_n\pi_n S^{-1}{}_n\| \le \|S_n\|\|\pi_n\|\|S^{-1}{}_n\| \le \|S\|\|S^{-1}\|.$$

Concluimos que ρ es completamente acotado y además su norma completamente acotada es menor o igual que $\|S\|\|S^{-1}\|$. Deducimos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.6. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de operadores y $\rho : \mathscr{A} \to B(H)$ un morfismo similar a un completamente contractivo, entonces ρ es completamente acotado. Más aún,*

$$\|\rho\|_{cb} \leq inf\{\|S\|\|S^{-1}\| : \ S\rho S^{-1} \text{ es completamente contractivo}\}.$$

Paulsen probó que para morfismos unitales vale la recíproca. Más aún probó que el ínfimo es en realidad un mínimo. Esto nos llevará luego a una reformulación de la conjetura de Halmos.

Teorema 2.2.7 (Paulsen)**.** *Sean $\mathscr{A}$ un álgebra de operadores y $\rho : \mathscr{A} \to B(H)$ un morfismo unital, entonces ρ es completamente acotado si y sólo si ρ es similar a un completamente contractivo. Más aún, en este caso, se puede tomar S similaridad con $\|S\|\|S^{-1}\| = \|\rho\|_{cb}$.*

Demostración. Una implicación del teorema es la proposición previa.

Supongamos que ρ es completamente acotado. Separaremos la demostración en dos pasos. En el primer paso, construiremos otro espacio de Hilbert $(H, |-|)$ equivalente a $(H, \|-\|)$. Luego probaremos que es suficiente mostrar que $\rho : \mathscr{A} \to (B(H), |-|)$ es completamente contractivo. Finalmente probaremos que $\rho : \mathscr{A} \to (B(H), |-|)$ es contractivo.

En el segundo paso probaremos que $\rho : \mathscr{A} \to (B(H), |-|)$ es completamente contractivo, para ello consideraremos $\rho_n : M_n(\mathscr{A}) \to (B(H^n), \|-\|_{H^n})$. Por el paso uno, existirá un espacio de Hilbert $(H^n, |-|')$ de modo que $\rho_n : M_n(\mathscr{A}) \to (B(H^n), |-|')$ sea contractivo. La demostración conluirá probando que en H^n las normas $|-|'$ y $|-|_{H^n}$ coinciden.

Paso uno.

Como $\mathscr{A}$ es un álgebra de operadores, existe $\mathscr{B}$ una C^*-álgebra tal que $\mathscr{A} \hookrightarrow B$. Por el teorema de extensión de Wittstock 2.1.10, podemos extender ρ a $\mathscr{B}$ de forma completamente acotada. A dicha extensión la seguiremos llamando ρ. Notar que, si bien ρ perdió la propiedad de ser multiplicativo, $\rho|_{\mathscr{A}}$ lo sigue siendo. Como el dominio es ahora una C^*-álgebra, podemos usar la caracterización de Stinespring de ρ (Teorema 2.1.13). Existen un espacio de Hilbert K, un $*$ morfismo $\pi : \mathscr{B} \to B(K)$, y dos operadores acotados $V_i : H \to K$ tal que $\|\rho\|_{cb} = \|V_1\|\|V_2\|$ y $\rho(a) = V_1{}^*\pi(a)V_2$.

Definamos $|-|$ otra norma en H.

$$|h| := \text{ínf}\left\{\left\|\sum \pi(a_i)V_2h_i\right\| : \ \sum \rho(a_i)h_i = h, \ a_i \in \mathscr{A}, \ h_i \in H\right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las sumas finitas. Es sencillo ver que $|-|$ es una seminorma. Veamos que $|-|$ es en realidad una norma. Para ello vamos a probar que $|-|$ y $\|-\|$ son equivalentes.

Sean a_i y h_i tal que $h = \sum \rho(a_i)h_i$. Entonces,

$$\|h\| = \left\|\sum \rho(a_i)h_i\right\| = \left\|\sum V_1{}^*\pi(a_i)V_2h_i\right\| \leq \|V_1{}^*\| \left\|\sum \pi(a_i)V_2h_i\right\|.$$

Tomando ínfimo sobre las representaciones de h, resulta que $\|h\| \leq \|V_1{}^*\||h|$ y entonces $\|-\| \leq \|V_1{}^*\||-|$. Para probar la otra desigualdad, basta con tomar como representación de h a $\rho(1).h$, luego,

$$|h| \leq \|\pi(1)V_2h\| \leq \|V_2\|\|h\|.$$

Las normas $|-|$ y $\|-\|$ son equivalentes y en consecuencia el espacio $(H, |-|)$ es un Banach. Veamos ahora que el espacio $(H, |-|)$ es de Hilbert. Para ello es condición necesaria y suficiente que se satisfaga la ley del paralelogramo,

$$|h+k|^2 + |h-k|^2 = 2(|h|^2 + |k|^2) \text{ para todo } h, \ k \ \in \ H.$$

Además, es suficiente probar que para todo $h, k \in H$ vale que

$$|h+k|^2 + |h-k|^2 \leq 2(|h|^2 + |k|^2)$$

. En efecto, si vale esa desigualdad tenemos que

$$\begin{aligned} 2|h|^2 + 2|k|^2 &= \frac{1}{2}[|(h-k) + (h+k)|^2 + |(h-k) - (h+k)|^2] \\ &\leq \frac{1}{2}[2|h-k|^2 + 2|h+k|^2]. \end{aligned}$$

Veamos entonces que $|h+k|^2 + |h-k|^2 \leq 2(|h|^2 + |k|^2)$. Sean $h = \sum \rho(a_i)h_i$ y $k = \sum \rho(b_i)k_i$. De manera que $h \pm k = \sum \rho(a_i)h_i \pm \sum \rho(b_i)k_i$. En consecuencia,

$$|h+k|^2 + |h-k|^2 \leq \left\|\sum \pi(a_i)V_2h_i + \sum \pi(b_i)V_2k_i\right\|^2 + \left\|\sum \pi(a_i)V_2h_i - \sum \pi(b_i)V_2k_i\right\|^2$$
$$= 2\left\|\sum \pi(a_i)V_2h_i\right\|^2 + 2\left\|\sum \pi(b_i)V_2k_i\right\|^2.$$

Y tomando ínfimo, resulta que $|h+k|^2 + |h-k|^2 \leq 2(|h|^2 + |k|^2)$.

Consideremos $S : (H, |-|) \to (H, \|-\|)$ la identidad. Es claro que S es inversible, acotada y como $\|-\| \leq \|V_1{}^*\|\|-|$ y $|-| \leq \|V_2\|\|-\|$, resulta que $\|S\|\|S^{-1}\| \leq \|V_1{}^*\|\|V_2\| = \|\rho\|_{cb}$.

Supongamos por un momento que $S^{-1}\rho S$ es completamente contractivo y consideremos $U : (H, \|-\|) \to (H, |-|)$ un operador unitario. De forma sencilla se ve que $U^{-1}S^{-1}\rho S U$ es completamente contractivo, pues $\|(U^{-1}S^{-1}\rho S U)_n\| = \|U_n{}^{-1}(S^{-1}\rho S)_n U_n\| \leq \|U^*{}_n\|\|(S\rho S^{-1})_n\|\|U_n\| \leq 1$, donde U_n indica las n copias de U en $B((H, \|-\|)^n, (H, |-|)^n)$. Tomando como similaridad a $R = SU$ resulta que ρ es similar a un completamente contractivo. Por otro lado, $\|US\|\|(US)^{-1}\| \leq \|S\|\|S^{-1}\| \leq \|\rho\|_{cb}$ y por la proposición previa al teorema, $\|\rho\|_{cb} = \|US\|\|(US)^{-1}\|$. En conclusión, para demostrar el teorema, basta probar que $S^{-1}\rho S$ es completamente contractivo.

Observemos que $S^{-1}\rho S$ no es otra cosa que ρ, pero visto ahora en $B((H, |-|))$. Vamos a probar primero que ρ es contractivo con la norma $|-|$. Debemos ver que si $a \in \mathscr{A}$, entonces $|\rho(a)| \leq \|a\|_{\mathscr{A}}$. Es decir, que $|\rho(a)h| \leq |h|\|a\|_{\mathscr{A}}$. Sean $h = \sum \rho(a_i)h_i$ y notemos que $\rho(a)h = \sum \rho(aa_i)h_i$, luego,

$$|\rho(a)h| \leq \left\|\sum \pi(aa_i)V_2h_i\right\| \leq \|\pi(a)\| \left\|\sum \pi(a_i)V_2h_i\right\| \leq \|a\|_{\mathscr{A}} \left\|\sum \pi(a_i)V_2h_i\right\|.$$

Tomando ínfimo, resulta que $|\rho(a)h| \leq \|a\|_{\mathscr{A}}|h|$.

Paso dos.

Para ver que ρ es completamente contractivo con la norma $|-|$, debemos ver que $\rho_n : M_n(\mathscr{A}) \to B(H^n, |-|_{H^n})$ es contractivo para todo n. Recordemos que si $(H, \|-\|)$ es un Hilbert, entonces $(H^n, \|-\|_{H^n})$ también, donde $\|\overline{h}\|^2_{H^n} = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 + ... + \|h_n\|^2$ y h_i es la coordenada i-ésima de $\overline{h} \in H^n$.

Consideremos $\rho_n : M_n(\mathscr{A}) \to B(H^n, \|-\|_{H^n})$. Como con esta norma ρ_n es completamente acotado, por el paso uno podemos construir $|-|'_{H^n}$ de modo que ρ_n sea $|-|'_{H^n}$-contractivo. Para construir $|-|$, primero necesitábamos una representacion de Stinespring de ρ. Consideremos $\overline{V_1}^* \pi_n(-)\overline{V}_2 : M_n(\mathscr{A}) \to B(H^n)$, donde $\overline{V}_i : H^n \to K^n$ es el vector n copias de V_i. Es claro que π_n es un $*$-morfismo y que $\rho_n = \overline{V_1}^* \pi_n \overline{V}_2$. De modo que $(\pi_n, \overline{V}_1, \overline{V}_2, K^n)$ es una representación de Stinespring de ρ_n.

Por el paso uno, si definimos $|-|'_{H^n}$ como

$$|\overline{h}|'_{H^n} := inf\left\{\left\|\sum \pi_n(A_j)\overline{V}_2\overline{h}_j\right\|_{H^n} : \sum \rho_n(A_j)\overline{h}_j = \overline{h},\ A_j \in M_n(\mathscr{A}),\ \overline{h}_j \in H^n\right\}.$$

el espacio $(H^n, |-|'_{H^n})$ es un Hilbert y ρ_n es $|-|'$ contractivo. Si logramos ver que $|-|'_{H^n} = |-|_{H^n}$, la demostración está terminada.

Veamos primero que $|-|_{H^n} \leq |-|'_{H^n}$.

Sean $\epsilon > 0$ y $\sum \rho_n(A_k)\overline{g}_k = \overline{h}$ tal que

$$|\overline{h}|'^2_{H^n} + \epsilon \geq \left\|\sum_k \pi_n(A_k)\overline{V}_2\overline{g}_k\right\|^2_{H^n}.$$

Tomando coordenada i-ésima,

$$h_i = \left[\sum_k \rho_n(A_k)\overline{g}_k\right]_i = \sum_{k,l}[\rho_n(A_k)]_{i,l}[\overline{g}_k]_l = \sum_{k,l}\rho([A_k]_{i,l})[\overline{g}_k]_l.$$

Luego $|h_i| \leq \| \sum_{k,l} \pi([A_k]_{i,l})V_2[\overline{g}_k]_l\|$. Finalmente,

$$\begin{aligned}|\overline{h}|'^2_{H^n}+\epsilon &\geq \left\|\sum_k \pi_n(A_k)\overline{V}_2\overline{g}_k\right\|^2_{H^n} = \sum_i \left\|\left[\sum_k \pi_n(A_k)\overline{V}_2\overline{g}_k\right]_i\right\|^2_H \\ &= \sum_i \left\|\sum_{k,l}[\pi_n(A_k)]_{i,l}V_2[\overline{g}_k]_l\right\|^2_H = \sum_i \left\|\sum_{k,l}\pi([A_k]_{i,l})V_2[\overline{g}_k]_l\right\|^2_H \\ &\geq \sum_i |h_i|^2{}_H = |\overline{h}|^2_{H^n}.\end{aligned}$$

Tomando límite con ϵ tendiendo a cero, se concluye la desigualdad deseada.

Veamos la otra desigualdad.

Sean $\epsilon > 0$, $\overline{h} \in H^n$ y h_i sus coordenadas i-ésimas. Para cada i, existen $(a_{i,j})_j$ y $(k_{j,i})_j$ tales que

i) $\sum_j \rho(a_{i,j})k_{j,i} = h_i$.

ii) $|h_i|^2 + \frac{\epsilon}{n} \geq \| \sum_j \pi(a_{i,j})V_2k_{j,i}\|^2_{(H,\|-\|)}$.

Por otro lado, si $A = (a_{i,j})^n_{i,j=1}$ y $K = (k_{j,i})^n_{i,j=1}$, consideremos $\overline{K}_i$ los vectores columna de K y A^i las matrices cuyas i-ésimas filas coinciden con las de A y el resto de las filas son nulas. Notemos que $\sum_i \rho_n(A^i)\overline{K}_i = \overline{h}$. En efecto, teniendo en cuenta la igualdad i),

$$(\rho_n(A^i)\overline{K}_i)_l = \sum_j \rho({A^i}_{l,j})k_{j,i} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq l \\ \sum_j \rho(a_{i,j})k_{j,i} & \text{si } i = l \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq l \\ h_i & \text{si } i = l. \end{cases}$$

Sumando sobre i se concluye la afirmación. Luego, por definición de $|-|'$,

$$|\overline{h}|'^2 \leq \left\|\sum_i \pi_n(A^i)\overline{V}_2\overline{K}_i\right\|^2_{H^n}.$$

Fijemos una coordenada l y miremos cuanto vale $\|[\sum_i \pi_n(A^i)\overline{V}_2\overline{K}_i]_l\|^2_H$.

$$\left\|\left[\sum_i \pi_n(A^i)\overline{V}_2\overline{K}_i\right]_l\right\|^2_H = \left\|\sum_i\sum_j \pi(A^i_{l,j})V_2k_{j,i}\right\|^2_H = \left\|\sum_j \pi(A^l_{l,j})V_2k_{l,j}\right\| = \left\|\sum_j \pi(A_{l,j})V_2k_{l,j}\right\|^2 \leq |h_l|^2 + \frac{\epsilon}{n}.$$

Donde la última desigualdad vale por la igualdad ii). Finalmente,

$$|\overline{h}|'^2 \leq \left\|\sum_i \pi_n(A^i)\overline{V}_2\overline{K}_i\right\|^2_{H^n} = \sum_l \left\|\left[\sum_i \pi_n(A^i)\overline{V}_2\overline{K}_i\right]_l\right\|^2_H \leq \sum_l |h_l|^2 + \frac{\epsilon}{n} = |\overline{h}|^2_{H^n} + \epsilon.$$

Y tomando límite queda con ϵ tendiendo a cero queda demostrado el teorema.

□

2.2.1. Caracterizacion de los operadores similares a una contracción.

Tenemos las herramientas para caracterizar a los operadores similares a un contracción. Paulsen encontró, estudiando los morfismos de von Neumann asociados, una condición necesaria y suficiente: la de ser completamente polinomialmente acotado.

Recordemos que un operador T es completamente polinomialmente acotado si y sólo si su morfismo de von Neumann es completamente acotado (Observación 1.3.19).

Teorema 2.2.8. *Sea $T \in B(H)$, entonces T es similar a una contracción si y sólo si su morfismo de von Neumann es completamente acotado.*

Demostración. Supongamos primero que T es similar a una contracción, en particular T es polinomialmente acotado (Ecuación (1) de la Introducción), y en consecuencia su morfismo de von Neumann asociado es acotado (Observación 1.2.13). Llamemos a dicho morfismo ρ_T. Por otro lado, existe S tal que $R = STS^{-1}$ es contractivo. Como R es contractivo, por el Corolario 1.3.16, su morfismo de von Neumann ρ_R es completamente contractivo.

Observemos que $\rho_R = S\rho_T S^{-1}$. En efecto,

$$\rho_R(p) = p(R) = p(STS^{-1}) = Sp(T)S^{-1} = S\rho_T S^{-1}.$$

En consecuencia, ρ_T es similar a un completamente contractivo, y por el Teorema de Paulsen 2.2.7 resulta además completamente acotado.

Recíprocamente, sea ρ el morfismo de von Neumann asociado a T, como ρ es completamente acotado, por el Teorema de Paulsen 2.2.7, existe S tal que $S\rho S^{-1}$ es completamente contractivo. Luego,

$$\|STS^{-1}\| = \|S\rho(z)S^{-1}\| \leq 1.\|z\| \leq 1.$$

□

Recordemos que la conjetura de Halmos establece que todo operador polinomialmente acotado es similar a una contracción. Por otro lado, un operador es polinomialmente acotado si y sólo admite un morfismo de von Neumann 1.2.13. Podemos entonces reformular el problema de Halmos de la siguiente manera:

-Todo morfismo de von Neumann es completamente acotado.

En el Capítulo 3 presentaremos un ejemplo debido a Pisier de un operador T cuyo morfismo de von Neumann es acotado pero no completamente acotado. Lo que resuelve la conjetura por la negativa.

El teorema de Paulsen también permite caracterizar otro problema famoso. La conjetura de Kadison [12] establece que todo morfismo unital $\mathscr{C} \to B(H)$, con $\mathscr{C}$ una C^*-álgebra, es similar a un $*$-morfismo. Con las herramientas que tenemos podemos demostrar sencillamente un Teorema de Haagerup que reformula la conjetura de Kadison. Antes, observemos lo siguiente.

Observación 2.2.9. *En una C^*-álgebra los morfismos unitales completamente contractivos, completamente positivos, positivos y $*$-morfismos coinciden.*

Demostración. En efecto, por el Corolario 1.3.9 un operador ϕ unital es completamente positivo si y sólo si es completamente contractivo.

Sea ahora ρ un morfismo positivo. Por la Observación 1.2.4, ρ es autoadjunto. Como además es morfismo, se deduce que es un $*$-morfismo.

Finalmente, si π es un $*$-morfismo, π_n sigue siendo un $*$ morfismo y en consecuencia contractivo. □

Corolario 2.2.10 (Haagerup)**.** *Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra unital y $\rho : \mathscr{A} \to B(H)$ un morfismo de álgebras unital. Entonces ρ es similar a un $*$ morfismo si y sólo si ρ es completamente acotado. Más aún, en el caso ρ completamente acotado, se puede tomar S similaridad con $\|S\|\|S^{-1}\| = \|\rho\|_{cb}$.*

Demostración. Basta aplicar el Teorema de Paulsen 2.2.7 y la observación anterior. □

Luego podemos reformular la conjetura de Kadison de la siguiente forma:

-Sean $\mathscr{C}$ una C^*-álgebra y $\rho : \mathscr{C} \to B(H)$ un morfismo unital. Entonces ρ es completamente acotado.

Si bien ambas conjeturas pueden parecer similares, ya que al fin y al cabo ambas se reducen a estudiar la completa acotación de los morfismos, son sutilmente distintas. La diferencia radica en los dominios y en que no hay una biyección canónica entre los morfismos completamente acotados de $\mathscr{L}(P(\mathbb{S}^1), B(H))$ (los de von Neumann) y los de $\mathscr{L}(C(\mathbb{S}^1), B(H))$. Recordemos que por el Corolario 1.2.17, podemos extender todo morfismo de von Neumann contractivo a $C(\mathbb{S}^1)$ de forma completamente positiva. Sin embargo dicha extensión podría no ser un morfismo (de hecho una condición necesaria es que $\rho(z)$ sea inversible en $B(H)$).

Recordemos que un operador $T \in B(H)$ se dice *power bounded* si $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|T^n\|\} < \infty$. Debido a que la condición de ser power bounded se puede reescribir en términos de que exista una constante $c > 0$ tal que para todo monomio p, $\|p(T)\| < c\|p\|_\infty$, si T es polinomialmente acotado, entonces es en particular power bounded. Sz-Nagy probó el siguiente Teorema [16].

Teorema 2.2.11 (Sz-Nagy)**.** *Sea $T \in B(H)$ un operador inversible y power-bounded, entonces T es similar a un unitario.*

No daremos la demostración del Teorema ya que ésta se aleja de las técnicas usadas hasta el momento. Sin embargo, utilizaremos el Teorema de Sz-Nagy para caracterizar los morfismos de von Neumann que admiten una extensión multiplicativa a $C(\mathbb{S}^1)$.

Proposición 2.2.12. *Sea ρ un morfismo de von Neumann. Entonces son equivalentes*

i) El operador $\rho(z)$ es inversible,

ii) ρ admite una extensión multiplicativa a $C(\mathbb{S}^1)$,

iii) ρ es similar a un morfismo de von Neumann que se extiende a un $*$-morfismo.

Demostración. ii)$\Rightarrow$ i). Es trivial probar que si ρ admite una extensión multiplicativa, entonces $\rho(z)$ es inversible. En efecto, sea $\tilde{\rho}$ dicha extensión. Luego,

$$\rho(z)\tilde{\rho}(\bar{z}) = \tilde{\rho}(z\bar{z}) = \tilde{\rho}(1) = 1.$$

i)$\Rightarrow$ iii). Supongamos que $\rho(z)$ es inversible. Veamos que ρ es similar a un morfismo que se extiende a un $*$-morfismo. Sea $T = \rho(z)$, como T admite un morfismo de von Neumann, T resulta polinomialmente acotado (Observación 1.2.13 y Teorema 1.3.11) y en consecuencia, power bounded. Luego, como T es inversible y power bounded, por el Teorema de Sz-Nagy, existe un operador unitario U tal que T es similar a U. Sea ρ_U el morfismo de von Neumann asociado a U y S la similaridad entre U y T. Luego, ρ y ρ_U son similares con similaridad S. Además, por el Corolario 1.2.17, podemos extender ρ_U a $C(\mathbb{S}^1)$ de forma completamente positiva, donde la extensión restringida a $P(\mathbb{S}^1) + \overline{P(\mathbb{S}^1)}$ está definida como $\tilde{\rho}_U(p+\overline{q}) = p(U) + q(U)^*$ y luego se extiende por densidad a $C(\mathbb{S}^1)$. Veamos que $\tilde{\rho}_U$ es multiplicativa. Por densidad, basta probar que $\tilde{\rho}_U$ es multiplicativa en el álgebra generada por $\{p, \overline{q} : p,\ q \in P(\mathbb{S}^1)\}$. Observemos que el álgebra esta generada por z y $\bar{z}$. Luego, basta probar que

$$\tilde{\rho}_U(z\bar{z}) = \tilde{\rho}_U(z)\rho(\bar{z}) \text{ y que}$$
$$\tilde{\rho}_U(\bar{z}^2) = \tilde{\rho}_U(\bar{z})^2.$$

Esto es trivial, ya que

$$\rho_U(z)\rho_U(\bar{z}) = UU^* = Id = \rho_U(1) = \rho_U(z\bar{z}).$$

La otra igualdad es análoga. Finalmente, como ρ_U es positivo, es autoadjunto (Observación 1.2.4). Como además es morfismo, concluimos que ρ_U es un $*$-morfismo.

iii)$\Rightarrow$ii) Supongamos que ρ es similar a un morfismo de von Neumann que se extiende a un $*$-morfismo y veamos que ρ admite una extensión multiplicativa. Sean ϕ un morfismo de von Neumann y S, tales que ρ y ϕ son similares con similaridad S y ϕ tal que admite una extensión $\tilde{\phi}$ que es un $*$-morfismo. Consideremos $U = \tilde{\phi}(z)$ y $T = \rho(z)$. Luego U y T son similares con similaridad S. Además, como $\tilde{\phi}$ es un $*$-morfismo, U es unitario. En efecto,

$$U^{-1} = \tilde{\phi}(z^{-1}) = \tilde{\phi}(\bar{z}) = U^*.$$

Definamos $\tilde{\rho}$ como $S\tilde{\phi}S^{-1}$. Es claro que $\tilde{\rho}$ extiende a ρ. Veamos que $\tilde{\rho}$ es multiplicativa. Nuevamente, basta probar que

$$\tilde{\rho}(z\bar{z}) = \tilde{\rho}(z)\tilde{\rho}(\bar{z}) \text{ y que}$$
$$\tilde{\rho}(\bar{z}^2) = \tilde{\rho}(\bar{z})^2.$$

Pero esto es trivial, ya que

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(z)\tilde{\rho}(\overline{z}) &= S\tilde{\phi}(z)S^{-1}S\tilde{\phi}(\overline{z})S^{-1} = SUU^*S^{-1}\\ &= Id = \tilde{\rho}(z\overline{z}).\end{aligned}$$

La otra igualdad es análoga. □

Como corolario, podemos probar la conjetura de Kadison para el caso $C(\mathbb{S}^1)$.

Proposición 2.2.13. *Sea $\rho : C(\mathbb{S}^1) \to B(H)$ un morfismo unital. Entonces ρ es similar a un $*$-morfismo.*

Demostración. Consideremos $\rho|_{P(\mathbb{S}^1)}$, y observemos que $\rho|_{P(\mathbb{S}^1)}$ es el morfismo de von Neumann asociado a $\rho(z)$. Por la proposición anterior el operador es similar a un morfismo de von Neumann que se extiende a un $*$-morfismo. Sea ϕ dicho morfismo y $\tilde{\phi}$ la extensión. Consideremos $T = \rho(z)$ y $U = \phi(z)$. Por la proposición anterior T es inversible con inversa $\rho(\overline{z})$. Además, vale que U es unitario. Luego T y U son similares con similaridad S. Veamos que ρ y $\tilde{\phi}$ son similares con similaridad S. Por densidad, basta ver que

$$\rho|_{P(\mathbb{S}^1)+\overline{P(\mathbb{S}^1)}} = S\tilde{\phi}S^{-1}|_{P(\mathbb{S}^1)+\overline{P(\mathbb{S}^1)}}.$$

A su vez, como $\rho|_{P(\mathbb{S}^1)} = S\tilde{\phi}S^{-1}|P(\mathbb{S}^1)$, basta probar que

$$\rho|_{\overline{P(\mathbb{S}^1)}} = S\tilde{\phi}S^{-1}_{\overline{P(\mathbb{S}^1)}}.$$

Pero como ρ y $S\tilde{\phi}S^{-1}$ son multiplicativos, basta probar que

$$\rho(\overline{z}) = S\tilde{\phi}(\overline{z})S^{-1}.$$

Esto último es trivial, ya que como T es similar a U con similaridad S, T^{-1} es similar a U^* con similaridad S, luego

$$\rho(\overline{z}) = T^{-1} = SU^*S^{-1} = S\tilde{\phi}(\overline{z})S^{-1}.$$

□

Aplicando la reformulación de la conjetura de Kadison tenemos el siguiente colorario.

Corolario 2.2.14. *Sea $\rho : C(\mathbb{S}^1) \to B(H)$ un morfismo unital acotado. Entonces ρ es completamente acotado.*

Capítulo 3

Contraejemplo de Pisier

En este capítulo presentaremos el ejemplo de Pisier [27] de un operador polinomialmente acotado no similar a una contracción. La prueba original de que dicho operador era polinomialmente acotado era extremadamente difícil, involucrando técnicas de martingalas. Al poco tiempo de circular la versión preliminar del trabajo de Pisier, varios matemáticos lograron hacer varias simplificaciones. Por un lado Kisliakov [13], y McCarthy [15] encontraron argumentos de teoría de funciones para evitar las técnicas probabílisticas, mientras que al mismo tiempo Davidson y Paulsen [6] lograron simplificar sustancialmente la prueba desde una aproxmación distinta, siendo ésta última significativamente más sencilla. En esta presentación seguiremos la línea de Davidson-Paulsen. Para ello, antes de estudiar el contraejemplo de Pisier, demostraremos una generalización, debida a Page [21] de un conocido Teorema de Nehari [18]. La simplificación de Davidson-Paulsen se debe a un Corolario del Teorema de Nehari-Page vectorial (Corolario 3.1.21). Veremos a dicha generalización como consecuencia de unos resultados relativos a dilataciones de operadores contractivos mutuamente conmutativos y a una representación entre los espacios $L^\infty(\mathbb{S}^1, B(H))$ y $l^2_{\mathbb{Z}}(H)$.

Foguel logró encontrar el primer ejemplo de un operador power-bounded que no es similar a una contracción. A pesar de no ser éste polinomialmente acotado, el ejemplo de Pisier es del mismo prototipo. Por eso estudiaremos los operadores de Foguel y caracterizaremos cuando éstos resultan power-bounded, polinomialmente acotados y similares a una contracción. Aprovecharemos dichas caracterizaciones para al final del capítulo presentar también el contraejemplo de Foguel.

3.1. Teorema de Nehari-Page vectorial

Como dijimos anteriormente, veremos al Teorema de Nehari-Page como Corolario de unos Teoremas relativos a operadores contractivos mutuamente conmutativos. El primer resultado a probar es el Teorema de dilatación de Ando. Éste es una generalización del Teorema de Nagy para dos operadores contractivos mutuamente conmutativos. De hecho, adaptaremos una de las pruebas conocidas de Nagy para probarlo.

Teorema 3.1.1 (Teorema de dilatación de Ando)**.** *Sean $T_1,\ T_2$ dos operadores conmutativos, contractivos en un espacio de Hilbert H, entonces existe un espacio de Hilbert K conteniendo a H como subespacio y dos operadores unitarios conmutativos $U_1,\ U_2$ de manera que para todo $n,\ m \in \mathbb{N}$,*

$$T_1^n T_2^m = P_H U_1^n U_2^m|_H.$$

Separaremos la demostración en dos Teoremas interesantes por sḿismos. Primero probaremos que n isometrías conmutativas se pueden dialatar a n operadores unitarios. Luego probaremos que dos operadores conmutativos se pueden dilatar a dos isometrías.

Teorema 3.1.2. *Sea $\{V_1, ..., V_n\}$ un conjunto de isometrías mutuamente conmutativas definidas en un espacio de Hilbert H. Entonces existe un espacio de Hilbert K conteniendo a H como subespacio y un conjunto de operadores unitarios $\{U_1, ..., U_n\}$ mutuamente conmutativas, definidos en K tal que para todo $k_1, k_2, ...k_n \in \mathbb{N}$,*

$$V_1^{k_1} ... V_n^{k_n} = P_H U_1^{k_1} ... U_n^{k_n}|_H.$$

Demostración. Sea (U_1, K_1) una dilatación minimal de V_1 (ver Definición 1.4.9). Luego, el generado por $\{U_1^n(H) : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en K_1.

Construyamos para cada $i \neq 1$, una isometría W_i que extienda a V_i y que siga conmutando con U_1. Definamos a W_i en el denso $\{U_1^n(H) : n \in \mathbb{Z}\}$.

$$W_i\left(\sum_{k=-N}^{N} U_1^k(h_k)\right) = \sum_{k=-N}^{M} U_1^k V_i(h_k).$$

Veamos que W_i está bien definido y que es isometría. Notemos antes que $U_1(H) \subseteq H$. En efecto, descomponiendo a K_1 como $H \oplus H^{\perp}$, $U_1(h) = V_1(h) + P|_{H^{\perp}} U_1(h)$. Como tanto V_1 como U_1 son isometrías, $\|P|_{H^{\perp}} U_1(h)\| = 0$. Por último notemos que no necesariamente vale $U_1(H) = H$ (V_1 debería ser unitario).

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=-N}^{M} U_1^k V_i h_k\right\|^2 &= \sum_{n,m} \langle U_1^n V_i h_n, U_1^m V_i h_m\rangle \\
&= \sum_{n\geq m} \langle U_1^{n-m} V_i h_n, V_i h_m\rangle + \sum_{m<n} \langle V_i h_n, U_1^{m-n} V_i h_m\rangle \\
&= \sum_{n\geq m} \langle V_1^{n-m} V_i h_n, V_i h_m\rangle + \sum_{m<n} \langle V_i h_n, V_1^{m-n} V_i h_m\rangle \\
&= \sum_{n\geq m} \langle V_i V_1^{n-m} h_n, V_i h_m\rangle + \sum_{m<n} \langle V_i h_n, V_i V_1^{m-n} h_m\rangle \\
&= \sum_{n\geq m} \langle V_1^{n-m} h_n, h_m\rangle + \sum_{m<n} \langle h_n, V_1^{m-n} h_m\rangle \\
&= \sum_{n\geq m} \langle U_1^{n-m} h_n, h_m\rangle + \sum_{m<n} \langle h_n, U_1^{m-n} h_m\rangle \\
&= \left\|\sum_{k=-N}^{M} U_1^k h_k\right\|^2.
\end{aligned}$$

Esta igualdad prueba que W_i es una isometría bien definida sobre K_1. Observemos que si V_j ya era unitario, entonces su extensión lo sigue siendo. Esto se debe a que por la definición de W_j, $W_j\{U_1^n(H) : n \in \mathbb{Z}\} = \{U_1^n(H) : n \in \mathbb{Z}\}$ y entonces W_j es una isometría de rango denso. Además es fácil ver que el conjunto $\{U_1, W_2, ..., W_n\}$ es conmutativo. En efecto, basta verificarlo en un denso.

$$\begin{aligned}
U_1 W_j\left(\sum U^n h_n\right) &= U_1 \sum U_1^n V_j h_n = \sum U_1^{n+1} V_j h_n \\
&= W_j\left(\sum U_1^{n+1} h_n\right) = W_j U_1\left(\sum U_1^n h_n\right).
\end{aligned}$$

De forma similar, vale que $W_j W_i = W_i W_j$ para $i \neq j$. La última observación que hay que hacer es que como $U_1(H) \subset H$, $U_1|_H = V_1$ y para cada i, $W_i|_H = V_i$ entonces,

$$P_H U_1^{k_1} W_2^{k_2} ... W_n^{k_n}|_H = V_1^{k_1} V_2^{k_2} ... V_n^{k_n}.$$

Finalmente, iterando el mismo proceso n veces, obtenemos la igualdad deseada.

□

Si bien la desigualdad de von Neumann es falsa para n operadores, el teorema anterior nos permite dar una generalización para el caso en el que los operadores sean isometrías.

Corolario 3.1.3. *Sea $\{V_1, ..., V_n\}$ un conjunto de isometrías conmutativas y sea p un polinomio en n variables. Entonces* $\|p(V_1, ...V_n)\| \leq \|p\|_{\mathbb{T}^n,\infty}$.

Demostración. Por el teorema anterior, existen $U_1, ...U_n$ operadores unitarios tal que

$$p(V_1, ..., V_n) = P_H p(U_1, ..., U_n)_H.$$

□

Como las proyecciones e inclusiones son contractivas, tenemos que $\|p(V_1, ...V_n)\| \leq \|p(U_1, ..., U_n)\|$. Debido a que cada U_i conmuta con U_j, vale que para todo i, j U_i^{-1} conmuta con U_j, y como los U_i son unitarios, para todo i, U_i conmuta con U_j^*. Luego la C^*-álgebra genererada por $U_1, ..., U_n$ es conmutativa. Por el Teorema de Gelfand podemos identificar $C^*(U_1, ...U_n)$ con $C(K)$ donde K es el conjunto w^*-compacto formado por los caracteres de $C^*(U_1, ...U_n)$. Recordemos que $\chi : C^*(U_1, ...U_n) \to \mathbb{C}$ es un caracter si es morfismo de álgebras y $\chi(Id) = \|\chi\| = \|1\|$.

Sea p un polinomio, luego

$$\|p(U_1, ...U_n)\| = \sup_{\chi} |\chi(p(U_1, ...U_n))| = \sup_{\chi} |p(\chi(U_1), ...\chi(U_n))|,$$

y como cada U_i es unitario y $\|\chi\| = 1$,

$$\sup_{\chi} |p(\chi(U_1), ...\chi(U_n))| \leq \sup_{|} z_j| = 1|p(z_1, ..., z_n)|.$$

Teorema 3.1.4. *Sean T_1, T_2 dos operadores conmutativos, contractivos en un espacio de Hilbert H, entonces existe un espacio de Hilbert K conteniendo a H como subespacio y dos isometrías conmutativas V_1, V_2 de manera que para todo n, $m \in \mathbb{N}_0$,*

$$T_1^n T_2^m = P_H V_1^n V_2^m|_H. \tag{3.1}$$

Demostración. Consideremos $K = l_2(H)$ e identifiquemos a H con la primer coordenada de $l_2(H)$. Como $\|T_i\| \leq 1$, $Id_H - T_i^* T_i$ es positivo y tiene sentido considerar para $i = 1, 2$, $D_i = (Id_H - T_i^* T_i)^{\frac{1}{2}}$. Consideremos

$$V_i(h_1, h_2, ...) = (T_i h_1, D_i h_1, h_2, ...).$$

Afirmamos que los operadores V_i son isometrías y cumplen la ecuación (3.1). Observemos también que de probar la afirmación, estaríamos probando el Teorema de dilatación de Nagy 1.4.8.

Probemos primero que $\{V_i\}$ cumplen la ecuacion (3.1).

$$\begin{aligned}
V_2^{k_2}|_H(h_1) &= (T_2^{k_2} h_1, D_2 T_2^{k_2-1} h_1, \ldots D_2 h_1, 0, \ldots) \\
V_1^{k_1} V_2^{k_2}|_H(h_1) &= (T_1^{k_1} T_2^{k_2} h_1, D_1 T_1^{k_1-1} T_2^{k_2} h_1, \ldots, D_1 T_2^{k_2} h_1, \ldots D_2 h_1, 0, \ldots) \\
P_H V_1^{k_1} V_2^{k_2}|_H(h_1) &= T_1^{k_1} T_2^{k_2} h_1.
\end{aligned}$$

Para probar que los V_i son isométricos hay que notar que

$$\begin{aligned}
\|T_i(h)\|^2 + \|D_i(h)\|^2 &= \langle T^* T(h), (h)\rangle + \langle (Id_H - T^* T)^{\frac{1}{2}}(h), Id_H - T^* T)^{\frac{1}{2}}(h)\rangle \\
&= \langle T^* T(h), (h)\rangle + \langle Id_H - T^* T(h), h\rangle = \|h\|^2,
\end{aligned}$$

de donde $\|V_i(h)\|^2 = \|T_i(h_1)\|^2 + \|D_i(h_1)\|^2 + \sum_j \|h_j\|^2 = \|h\|^2$.

Sin embargo $\{V_i\}$ puede no ser conmutativo en $l_2(H)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
V_1 V_2(h) &= (T_1 T_2 h_1, D_1 T_2 h_2, D_2 h_3, h_4, \ldots) \\
V_2 V_1(h) &= (T_2 T_1 h_1, D_2 T_1 h_2, D_1 h_3, h_4, \ldots).
\end{aligned}$$

Asumamos por el momento que existe un operador unitario $U : H \oplus H \to H \oplus H$ tal que para cada $h \in H$,

$$U(D_1 T_2 h, D_2 h) = (D_2 T_1 h, D_1 h)$$

y consideremos el siguiente operador unitario

$$W(h_1, h_2, h_3, \ldots) = (h_1, U(h_2, h_3), U(h_4, h_5), \ldots).$$

Definamos $W_1 = W V_1$ y $W_2 = V_2 W^{-1}$. Por ser composición de isometrías, cada W_i sigue siéndolo. Además $\{W_i\}$ sigue cumpliendo la ecuación (3.1). Esto se debe a que la primer coordenada de W es simplemente Id_H, de donde se deduce fácilmente que $P_H W_1^{k_1} W_2^{k_2}|_H = P_H V_1^{k_1} V_2^{k_2}|_H = T_1^{k_1} T_2^{k_2}$. Veamos que ahora las isometrías W_i conmutan.

$$
\begin{aligned}
W_1W_2(h) &= WV_1V_2W^{-1}(h_1, h_2, h_3, \ldots) \\
&= WV_1V_2(h_1, U^{-1}(h_2, h_3), U^{-1}(h_4, h_5), \ldots) \\
&= W(T_1T_2(h_1), D_1T_2h_1, D_2h_1, U^{-1}(h_2, h_3), U^{-1}(h_4, h_5), \ldots) \\
&= (T_1T_2h_1, U(D_1T_2h_1, D_2h_1), h_2, h_3, \ldots) \\
&= (T_1T_2h_1, D_2T_1h_1, D_1h_1, h_2, h_3 \ldots) \\
&= V_2V_1(h) = V_2W^{-1}WV_1(h) = W_2W_1(h).
\end{aligned}
$$

Para obtener al operador U deseado, observemos que

$$
\begin{aligned}
\|D_1T_2h\|^2 + \|D_2h\|^2 &= \langle (Id - T_1^*T_1)T_2h, T_2h\rangle + \langle (Id - T_2^*T_2)h, h\rangle \\
&= \langle (T_2^*(Id - T_1^*T_1)T_2 + Id - T_2^*T_2)h, h\rangle = \langle Id + (T_1^*T_2^*T_2T_1)h, h\rangle \\
&= \langle (Id - T_2^*T_2)T_1h, T_1h\rangle + \langle (Id - T_1^*T_1)h, h\rangle \\
&= \|D_2T_1h\|^2 + \|D_1h\|^2.
\end{aligned}
$$

Luego U define una isometría sobreyectiva entre los subespacios $R := \{(D_1T_2h, D_2h : h \in H\}$ y $S := \{(D_2T_1h, D_1h) : h \in H\}$ de $H \oplus H$. Por lo tanto U define una isometría sobreyectiva entre $\overline{R}$ y $\overline{S}$. Para poder extender U a todo H, necesitamos que ambos espacios tengan la misma codimensión. Éste es el caso cuando H es de dimensión finita, ya que R y S son isométricos y por lo tanto tienen la misma codimensión. Para el caso infinito necesitamos hilar más fino. Redefinamos las isometrías V_i para garantizar que ambos espacios tengan codimensión la dimensión de H. Redefinimos V_i vía

$$V_i(h) = (T_ih_1, D_ih_1, 0, h_2, 0, h_3, \ldots).$$

Para reproducir el argumento necesitamos ahora $U : H^{(4)} \to H^{(4)}$ tal que

$$U(D_1T_2h, 0, D_2h, 0) = (D_2T_1h, 0, D_1h, 0).$$

Los 0 extras, garantizan que en el caso infinito dimensional la codimensión de ambos subespacios sea la dimensión de H. Definiendo $W(h) = (h_1, U(h_2, h_3, h_4, h_5), U(\ldots), \ldots)$, resulta que WV_1 y V_2W^{-1} son las isometrías buscadas.

□

Como corolario de los teoremas previos obtenemos el Teorema de dilatación de Ando.

Corolario 3.1.5 (Teorema de dilatación de Ando)**.** *Sean T_1, T_2 dos operadores conmutativos, contractivos en un espacio de Hilbert H, entonces existe un espacio de Hilbert K conteniendo a H como subespacio y dos operadores unitarios conmutativos U_1, U_2 de manera que para todo n, $m \in \mathbb{N}_0$, vale que*

$$T_1^nT_2^m = P_HU_1^nU_2^m|_H.$$

Demostración. La demostración es una consecuencia inmediata de los Teoremas previos. □

El Teorema de dilatación de Ando permite generalizar la desigualdad de von Neumann para el caso de dos operadores contractivos y conmutativos.

Corolario 3.1.6 (Desigualdad de von Neumann para dos operadores conmutativos)**.** *Sean T_1 y T_2 dos operadores contractivos, mutuamente conmutativos y sea p un polinomio en dos variables. Entonces*

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \|p\|_\infty.$$

Demostración. La prueba es análoga a la hecha en el Corolario 3.1.3 □

El siguiente resultado que nos interesa analizar, es el caso en el que uno solo de los operadores sea contractivo. Éste es una reformulación del Teorema de Ando debida a Sz-Nagy y Foias, comunmente llamada *conmutant lifting theorem.*

Teorema 3.1.7. *Sea T un operador contractivo en un espacio de Hilbert H y (U, K) su dilatación minimal. Si R conmuta con T, entonces existe $S \in B(K)$ tal que,*

$$US = SU, \; \|R\| = \|S\| \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}_0, \; RT^n = P_H S U^n|_H.$$

Demostración. Sin pérdida podemos suponer $\|R\| = 1$. Por el Teorema de dilatación de Ando, existe un espacio de Hilbert K_1 y operadores unitarios conmutativos U_1 ,U_2 tal que

$$R^n T^m = P_H U_1^n U_2^m|_H.$$

Como (U, K) es la dilatación minimal de T, podemos identificar a K con la clausura del generado por $\{U_2^n h : n \in \mathbb{Z}, h \in H\}$ y además

$$U = P_K U_2|_K.$$

Como tanto U como U_2 son unitarios, identificando K_1 con $K \oplus K^{\perp}$, podemos pensar a U_1 y U_2 como los sistemas matriciales

$$U_2 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & P_{K^{\perp}} U_2|_{K^{\perp}} \end{pmatrix} \quad U_1 = \begin{pmatrix} S & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Como U_2 y U_1 conmutan, se sigue que S y U conmutan. Más aún $P_K U_1 U_2^n|_K = SU^n$. Luego,

$$P_H S U^n|_H = P_H U_1 U_2^n|_H = RT^n.$$

Finalmente,

$$1 = \|R\| \leq \|S\| \leq \|U_1\| = 1.$$

□

Por último tenemos el siguiente resultado,.

Corolario 3.1.8. *Sean T_i dos operadores contractivos en espacios de Hilbert H_i y (U_i, K_i) sus dilataciones unitarias minimales. Si $A \in B(H_1, H_2)$ es un operador con $AT_1 = T_2 A$, entonces existe $R \in B(K_1, K_2)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}_0$,*

$$RU_1 = U_2 R, \; \|A\| = \|R\| \text{ y } \; AT_1^n = T_2^n A = P_{H_2} U_1^n R|_{H_1} = P_{H_2} U_2^n R|_{H_1}$$

Demostración. Observemos que el hecho de que $AT_1 = T_2 A$, equivale a que las matrices

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{T} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$$

conmutan. Por otro lado, si (U_1, K_1) y (U_2, K_2) son las dilataciones minimales de T_1 y T_2 respectivamente, la dilatación minimal de $\tilde{T}$ no es otra cosa que

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$$

donde $\tilde{U}$ actúa en $K_1 \oplus K_2$. Aplicando el Teorema anterior con $\tilde{A}$ y $\tilde{T}$, existe $\tilde{R}$ con $\|\tilde{R}\| = \|\tilde{A}\|$, $\tilde{R}\tilde{U} = \tilde{U}\tilde{R}$ y

$$\tilde{A}\tilde{T}^n = P_{H_1 \oplus H_2} \tilde{R} \tilde{U}^n|_{H_1 \oplus H_2}.$$

Considerando R como la $(2, 1)$ coordenada de $\tilde{R}$, obtenemos que $P_{H_2} U_1^n R_| H_1 = AT_1^n$.

La otra igualdad se deduce de que $AT_1^n = T_2^n A$ y como $\tilde{R}$ y $\tilde{U}$ conmutan, $RU_1 = U_2 R$. Finalmente, $\|A\| \leq \|R\| \leq \|\tilde{R}\| = \|A\|$.

□

Dado H un Hilbert, podemos considerar $\tilde{H} = l_2(H)$, el espacio de Hilbert formado por las sucesiones de vectores de H que suman al cuadrado. Para falicitar notación, indexaremos a dichas sucesiones con $n \geq 0$. Además a un elemento típico de $l_2(H)$ lo notaremos como $\overline{h}$, mientras que h_j indicara su coordenada j-ésima.

Consideremos $S_H \in B(l_2(H))$ el *operador Shift*, definido como

$$S_H(h_0, h_1, ...) = (0, h_0, h_1, ...)$$

y S_H^* su adjunto (el operador *Coshift), con*

$$S_H^*(h_0, h_1, ...) = (h_1, h_2, ...).$$

Matricialmente, podemos pensar al Shift y Coshift como las siguientes matrices infinitas

$$S_H = \begin{pmatrix} 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ Id_H & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & Id_H & 0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \text{ y } S_H^* = \begin{pmatrix} 0 & Id_H & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & Id_H & \ddots \\ \ddots & \ddots & 0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Es decir, $[S_H]_{i,j} = \delta_{i,j+1} Id_H$ y $[S_H^*]_{i,j} = \delta_{i+1,j} Id_H$. Cuando no haya confusión acerca del espacio de Hilbert involucrado, notaremos a S_H y S_H^* como S y S^* respectivamente. Es fácil probar que S es una isometría, mientras que S^* es sólo una contracción.

Dada $(a_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de operadores en $B(H)$, podemos intentar definir $A_{i+j} \in B(l_2(H))$, vía

$$[A_{i+j}(\overline{h})]_i = \sum_j a_{i+j}(h_j).$$

Matricialmente, podemos identificar A_{i+j} con la matriz infinita cuya coordenada (i, j) es a_{i+j}.

$$A_{i+j} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \iddots \\ a_1 & a_2 & \iddots & \iddots \\ a_2 & \iddots & \iddots & \iddots \\ \iddots & \iddots & \iddots & \iddots \end{pmatrix}.$$

Definición 3.1.9. *En el caso en el que A_{i+j} esté bien definido y acotado, diremos que A_{i+j} es una forma de Hankel.*

Observación 3.1.10. *Si A_{i+j} es de Hankel, entonces $A_{i+j}S = S^*A_{i+j} = A_{i+j+1}$, donde $[A_{i+j+k}]_{i,j} = a_{i+j+k}$. En general vale que $A_{i+j}S^n = A_{i+j+n}$.*

Demostración. Hagamos la cuenta matricialmente. Para falicitar notación llamemos A a la matriz (A_{i+j}).
$[S^*A]_{i,j} = \sum_l S_{i,l}^* A_{l,j} = \sum_l \delta_{i+1,l} Id_H A_{l+j} = A_{i+j+1}$ mientras que
$[AS]_{i,j} = \sum_l A_{i,l} S_{l,j} = \sum_l A_{i+l} \delta_{l,j+1} Id_H = A_{i+j+1}$.

□

Teorema 3.1.11. *Sea H un espacio de Hilbert y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(H)$ una sucesión de operadores. Entonces el operador de Hankel $A_{i+j} \in B(l_2(H))$ es acotado si y sólo si existe A_n, $n < 0$, tal que $A_{i+j} \in B(l_{\mathbb{Z}}^2(H))$ es acotado. Más aún,*

$$||A_{i+j}||_{B(l_2(H))} = \min_{\{A_n : n<0\}} ||A_{i+j}||_{B(l_{\mathbb{Z}}^2(H))}.$$

Demostración. Supongamos que existe $(A_n)_{n<0}$ tal que $||A_{i+j}||_{B(l_{\mathbb{Z}}^2(H)} < \infty$. Para diferenciarla de la matriz de Hankel original, llamemos a esta última $(\tilde{A}_{i+j})$. La demostración concluye observando que la matriz A_{i+j} no es otra cosa que

$$A_{i+j} = P_{l_2(H)} \tilde{A}_{i+j}|_{l_2(H)}.$$

Recíprocamente, sea $A_{i+j} \in B(l_2(H))$ una forma de Hankel acotada y sean S y S^* el shift y coshift. Calculemos las dilataciones minimales de S y S^* respectivamente. Afirmamos que U_S no es otra cosa que el shift $\tilde{S}$ visto en $B(l_{\mathbb{Z}}^2(H))$, con $[\tilde{S}(\overline{h})]_j = h_{j-1}$. Análogamente, U_{S^*} es $\tilde{S}^*$. Para ver esto hay que ver que son unitarios, minimales y dilataciones. Lo primero se debe a que ambos son trivialmente isométricos y suyectivos (y además resultan mutuamente inversibles), para lo segundo, debemos ver que el conjunto $C = \{\tilde{S}^n(\overline{h}) : n \in \mathbb{Z} \text{ y } \overline{h} \in l_2(H)\}$ es denso en $l^2_{\mathbb{Z}}(H)$. Ésto es evidente, dado que todo vector de soporte finito de $l^2_{\mathbb{Z}}(H)$ está en C. La cuenta de que $S^n = P_{l_2(H)}\tilde{S}^n|_{l_2(H)}$ es elemental y no la hacemos.

Como la matriz A_{i+j} es de Hankel, por la Observación 3.1.10 $S^*A = AS = A_{i+j+1}$, luego por el Corolario 3.1.8 , existe $R \in B(l^2_{\mathbb{Z}}(H))$ tal que $A_{i+j}S^n = P_{l_2(H)}R\tilde{S}^n|_{l_2(H)}$, $\|R\| = \|A_{i+j}\|$ y $R\tilde{S} = \tilde{S}^*R$. Afirmamos que esto último implica que R es de Hankel. En efecto, consideremos la sucesión de operadores $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (R_{n,0})_{n\in\mathbb{Z}}$ y veamos que $(R_{i,j}) = C_{i+j}$. Dado $h \in H$, notemos $\overline{h}_j$ al vector cuya i-ésima coordenada es $\delta_{i,j}h$, además observemos que $[R]_{i,j}(h) = [R(\overline{h}_j)]_i$. Luego,

$$\begin{aligned}[R]_{i,j}(h) &= [R(\overline{h}_j)]_i = [RS^j(\overline{h}_0)]_i = [S^{*j}R(\overline{h}_0)]_i \\ &= [R(\overline{h}_0)]_{i+j} = R_{i+j,0}(h).\end{aligned}$$

Concluimos que existe $(R_n)_{n<0}$ tal que la forma de Hankel R_{i+j} es acotada y $R_n = A_n$ en $n \geq 0$. Por último, $\|R_{i+j}\| = \|A_{i+j}\|$. □

Consideremos ahora dos espacios H y K ambos de Hilbert separables, y $\phi : B(H) \to B(K)$ un operador acotado. Si A_{i+j} es una forma de Hankel, considerando $(\phi(A_n))_n$, ϕ induce una forma de Hankel sobre K. Notaremos a dicha forma $\phi(A_{i+j})$. Sin embargo, no es trivial que $\phi(A_{i+j})$ sea acotado. Para probarlo, identificaremos $B(L^2(\mathbb{S}^1, H))$ con $B(l^2_{\mathbb{Z}}(H))$ y veremos que bajo esta identificación una forma de Hankel tiene asociado un "símbolo" $\psi \in L_\infty(\mathbb{S}^1, B(H))$. Es en ese sentido es en el que el Teorema de Nehari-Page vectorial generaliza al Teorema de Nehari.

Dado H un Hilbet separable, queremos considerar $L^2(\mathbb{S}^1, H)$, las funciones con valores en H integrables al cuadrado. Para hablar de integrabilidad primero tenemos que dar una medida.

Diremos que una función $f : \mathbb{S}^1 \to H$ es simple si $f = \sum_k h_k\chi_{\sigma_k}$, con $\sigma_k \bigcap \sigma j = \emptyset$ si $j \neq k$ y σ_k medible para todo k. Diremos que f es fuertemente medible si existe $(f_n)_n$ simples tal que $f_n \to f$ ctp.

Se puede probar que si f es fuertemente medible y H es separable, entonces $\|f(-)\|$ es una función medible ([10] Capítulo VI, Observacón 6.2).

Definimos el espacio $L^2(\mathbb{S}^1, H)$ como $\{f :$ existe $(f_n)_n$ funciones simples con $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|^2 < \infty\}$. El espacio $L^2(\mathbb{S}^1, H)$ es un Hilbert con el producto interno y norma usuales. Muchas de las propiedades de $L^2(\mathbb{S}^1)$ se mantienen, por ejemplo, los polinomios trigonométricos, definidos como $p(e^{i\theta}) = \sum_{-N}^{N} e^{in\theta}h_n$, son densos en $L^2(\mathbb{S}^1, H)$. Veremos también, que vía la serie de Fourier podemos identificar $L^2(\mathbb{S}^1, H)$ con $l^2_{\mathbb{Z}}(H)$.

Dada $f \in L^2(\mathbb{S}^1, H)$ notamos $\hat{f}(n) \in H$ a

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{S}^1} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}.$$

Proposición 3.1.12. Sea $f \in L^2(\mathbb{S}^1, H)$, entonces el operador $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{S}^1, H) \to l^2_{\mathbb{Z}}(H)$ definido como $\mathscr{F}(f) = (\hat{f}(n))_n$ es una isometría suyectiva.

Demostración. Para hacer la identificación (haremos una aproximación diferente a la usual) veremos primero que $L^2(\mathbb{S}^1, H)$ es isométrico a $L^2(\mathbb{S}^1) \otimes H$. Como el espacio de las funciones simples es denso en $L^2(\mathbb{S}^1, H)$, basta definir la isometría en el espacio de las funciones simples. La isometría es la evidente, $\varphi(\sum_k h_k\chi_{\sigma_k}) = \sum_k(\chi_{\sigma_k}) \otimes h_k$.

Para probar que φ es una isometría, basta observar que como $\sigma_k \bigcap \sigma_j = \emptyset$ cuando $j \neq k$,

$$\left\|\sum_k h_k\chi_{\sigma_k}\right\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1,H)} = \int_{\bigcup_k \sigma_k} \left\|\sum_k h_k\chi_{\sigma_k}\right\|^2_H = \sum_k \int_{\sigma_k} \|h_k\|^2 = \sum_k |\sigma_k|\|h_k\|^2.$$

Por otro lado, debido a que $\chi_{\sigma_k} \otimes h_k$ y $\chi_{\sigma_j} \otimes h_j$ son ortogonales cuando $j \neq k$,

$$\left\|\sum_k \chi_{\sigma_k} \otimes h_k\right\|^2 = \sum_k \|\chi_{\sigma_k} \otimes h_k\|^2 = \sum_k |\sigma_k|\|h_k\|^2.$$

Igualando ambas expresiones deducimos que φ es isométrico. Como el rango de φ es denso en $L^2(\mathbb{S}^1)\otimes H$, φ es además sobreyectiva. Para finalizar la demostración hay que observar que vía la serie de Fourier usual,

$$L^2(\mathbb{S}^1, H) \equiv L^2(\mathbb{S}^1) \otimes H \equiv l^2_{\mathbb{Z}} \otimes H = l^2_{\mathbb{Z}}(H).$$

Además $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{S}^1, H) \to l^2_{\mathbb{Z}}(H)$ es la composición de dichas isometrías. Para probarlo, basta chequearlo en el denso de las funciones simples. Por linealidad, basta chequear el caso en el que $f = h\chi_\sigma$. En efecto,

$$h\chi_\sigma \mapsto \chi_\sigma \otimes h \mapsto (\hat{\chi}_\sigma(n))_n \otimes h \mapsto (\widehat{\chi_\sigma}(n)h)_n.$$

Basta verificar entonces que $\hat{\chi}_\sigma(n)h = \widehat{\chi_\sigma h}(n)$. Pero esto es fácil, ya que

$$\begin{aligned}\widehat{\chi_\sigma h}(n) &= \int \chi_\sigma h e^{-in\theta} d\theta = h \int \chi_\sigma e^{-in\theta} d\theta \\ &= \hat{\chi}_\sigma(n)h.\end{aligned}$$

□

Observación 3.1.13. Como los espacios $L^2(\mathbb{S}^1, H)$ y $l^2_{\mathbb{Z}}(H)$ son isométricos, los espacios $B(L^2(\mathbb{S}^1, H))$ y $B(l^2_{\mathbb{Z}}(H))$ son $*$-isomorfos. El isomorfismo π viene dado por $\pi(A)(\overline{h}) = \mathscr{F} A \mathscr{F}^{-1}(\overline{h})$.

Otro espacio que nos va a interesar considerar es $L^\infty(\mathbb{S}^1, B(H))$, el espacio de las funciones escencialmente acotadas. La medida que tomaremos es la siguiente. Una $\psi : \mathbb{S}^1 \to B(H)$ es SOT medible si y sólo si para todo $x \in H$, $\psi(-)(x)$ es fuertemente medible. Al igual que en el caso escalar, podemos ver a los elementos de $L^\infty(\mathbb{S}^1, B(H))$ como multiplicadores en $B(L^2(\mathbb{S}^1, H))$.

Observación 3.1.14. El espacio $L^\infty(\mathbb{S}^1, B(H))$ es una C^* álgebra con la involución usual. Una posible representación para el espacio es $(\pi, B(L^2(\mathbb{S}^1, H)))$, con $\pi(\psi(e^{i\theta})) = M_\psi$, el operador multiplicar por ψ,

$$M_\psi(f)(e^{i\theta}) = \psi(e^{i\theta})(f(e^{i\theta})).$$

Demostración. El único detalle distinto al caso escalar, es probar que $M_\psi(f)$ es una función fuertemente medible. Ésto se deduce de que si f es una función simple, entonces $\psi(e^{i\theta})(f(e^{i\theta})) = M_\psi(f)$ es fuertemente medible. Como límite de fuertemente medibles es fuertemente medible, M_ψ está bien definida. □

Dada una forma de Hankel $A_{i+j} \in B(l^2_{\mathbb{Z}}(H))$, nos va a interesar verlo como un operador en $B(L^2(\mathbb{S}^1, H))$. Para ello será más fácil considerar la matriz A_{i-j}.

Definición 3.1.15. *Decimos que un operador $A \in B(l^2_{\mathbb{Z}}(H))$ es de Toeplitz si existe una sucesión de operadores $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in B(H)$ tal que $[A]_{i,j} = A_{i-j}$.*

La siguiente observación muestra que dada una forma de Hankel en $l^2_{\mathbb{Z}}(H)$ y considerar la forma de Toeplitz inducida no hace perder información.

Observación 3.1.16. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de operadores y sea $W \in B(l^2_{\mathbb{Z}}(H))$ el operador unitario definido como $W(\dots, h_{-1}, h_0, h_1 \dots) = (\dots, h_1, h_0, h_{-1}, \dots)$, entonces $A_{i+j}W = A_{i-j}$ y $A_{i-j}W = A_{i+j}$.

Demostración. Sea $\overline{h} \in l^2_{\mathbb{Z}}(H)$, luego $[A_{i+j}W\overline{h}]_l = \sum_j A_{l+j}h_{-j} = \sum_j A_{l-j}h_j = [A_{i-j}\overline{h}]_l$. Como $W^2 = Id$, resulta que $A_{i-j}W = A_{i+j}$. □

De forma similar a que una forma de Hankel cumple $\tilde{S}^*A = A\tilde{S}$ (con $\tilde{S}^*$ y $\tilde{S}$ los shift y coshift en $l^2_{\mathbb{Z}}$(H)), una forma de Toeplitz cumple $\tilde{S}^*A\tilde{S} = A$.

Observación 3.1.17. Sea $A_{i-j} \in B(l^2_{\mathbb{Z}}(H))$ una forma de Toeplitz, entonces A_{i-j} cumple la relación

$$\tilde{S}^*A\tilde{S} = A.$$

Demostración. Se puede probar que $[S^*A\tilde{S}]_{i,j} = [A]_{i+1,j+1}$, y como la forma es de Toeplitz, $[A]_{i+1,j+1} = A_{i-j}$. □

Antes de calcular la imagen de A_{i-j} en $B(L^2(\mathbb{S}^1, H))$ por el isomorfismo de la Observación 3.1.13, nos será útil calcular la imagen de $\tilde{S}$ en $B(L^2(\mathbb{S}^1, H))$.

Observación 3.1.18. Sea $\tilde{S} \in B(l^2_{\mathbb{Z}}(H))$ el shift, entonces la imagen de $\tilde{S}$ en $B(L^2(\mathbb{S}^1, H))$ es el multplicador M_z, donde $M_z(f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta} f(e^{i\theta})$. Análogamente, la imagen de $\tilde{S}^*$ es el multiplicador $M_{\overline{z}}$.

Demostración. Por la Observación 3.1.13, $\pi^{-1}(\tilde{S})(f) = \mathscr{F}^{-1}\tilde{S}\mathscr{F}(f)$, donde $\mathscr{F}(f)$ es la sucesión inducida por los coeficientes de Fourier de f.

Luego,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\tilde{S}\mathscr{F}(f) &= \mathscr{F}^{-1}\tilde{S}(\hat{f}(n))_n = \mathscr{F}^{-1}(\hat{f}(n-1))_n \\ &= \sum_n \hat{f}(n-1)e^{in\theta} = e^{i\theta}\sum_n \hat{f}(n)e^{in\theta} = e^{i\theta} f.\end{aligned}$$

□

Lema 3.1.19. *Sea $A_{i-j} \in B(l^2_{\mathbb{Z}}(H))$ una forma de Toeplitz, entonces existe $\psi \in L^\infty(\mathbb{S}^1, B(H))$ tal que,*

i) $\pi^{-1}(A_{i-j}) = M_\psi$,

ii) $\|\pi^{-1}(A_{i-j})\| = \|\psi\|_\infty$.

Demostración. Para falicitar notación, llamemos $A_{\mathscr{F}}$ a $\pi^{-1}(A_{i-j})$. Como A_{i-j} es una forma de Toeplitz, entonces conmuta con $\tilde{S}$ y con $\tilde{S}^*$. Debido a que π es un $*$-morfismo y a que la imagen de $\pi^{-1}\tilde{S}$ es el multiplicador M_z, $A_{\mathscr{F}}$ conmuta con los multiplicadores M_z y $M_{\bar{z}}$.

Definamos $\psi(e^{i\theta}) = \sum A_n(-)e^{in\theta}$ y supongamos que $\psi \in L^\infty(\mathbb{S}^1, B(H))$.

Observemos que para cada n, el operador $A_n(-)e^{in\theta} \in B(H)$ y $e^{i\theta} \mapsto A_n(-)e^{in\theta}$ es un multiplicador en $L^\infty(\mathbb{S}^1, B(H))$ que conmuta con M_z y $M_{\bar{z}}$, deducimos que M_ψ conmuta con M_z y $M_{\bar{z}}$.

Veamos que $A_{\mathscr{F}}$ y M_ψ son iguales. Para ello, basta verificar que coinciden en el denso de los polinomios trigonométricos. Debido a que $A_{\mathscr{F}}$ y M_ψ conmutan con M_z y $M_{\bar{z}}$, por linealidad, basta verificar que $A_{\mathscr{F}}(h.1) = M_\psi(h.1)$ para todo $h \in H$.

En efecto, consideramos $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{S}^1, H) \to l^2_{\mathbb{Z}}(H)$ la representación de Fourier y veamos que $\mathscr{F}A_{\mathscr{F}}(h.1) = \mathscr{F}M_\psi(h.1)$. Observemos que $\mathscr{F}(h.1) = \overline{h}_0$, donde $\overline{h}_0$ es el vector cuya i-ésima coordenada es $\delta_{i,0}h$, luego

$$\begin{aligned}[\mathscr{F}A_{\mathscr{F}}(h.1)]_i &= [\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}A_{i-j}\mathscr{F}(h.1)]_i = [A_{i-j}\overline{h}_0]_i \\ &= \sum_j A_{i-j}[\overline{h}_0]_j = A_i(h).\end{aligned}$$

Por otro lado, como las coordenadas de $\sum_n A_n(h)e^{in\theta}$ en la base $\{e^{in\theta}\}$ son los coeficientes de Fourier de $\sum_n A_n(h)e^{in\theta}$,

$$\left[\mathscr{F}\left(\sum_n A_n(h)e^{in\theta}\right)\right]_i = A_i(h).$$

Concluimos que los operadores M_ψ y $A_{\mathscr{F}}$ son iguales. Resta ver que $\psi(e^{i\theta}) = \sum_n A_n e^{in\theta}$ pertenece a $L^\infty(\mathbb{S}^1, B(H))$. Sean x e $y \in H$ con $\|x\| = \|y\| = 1$. Consideremos $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$, definida como $\varphi(e^{i\theta}) = \langle\psi(e^{i\theta})(x), y\rangle$. Si probamos que φ pertenece a $L^\infty(\mathbb{S}^1)$, con norma que no dependa de x e y, valdría que $\psi(e^{i\theta}) \in L^\infty(\mathbb{S}^1, B(H))$.

Veamos que M_φ es un multiplicador acotado en $B(L^2(\mathbb{S}^1))$, para ello basta ver que es un multiplicador acotado en el espacio de los polinomios trigonométricos.

Sea $p(e^{i\theta}) = \sum a_n e^{in\theta}$ un polinomio trigonométrico, luego

$$\varphi p(e^{i\theta}) = \langle\psi(e^{i\theta})x, y\rangle p(e^{i\theta}) = \langle p(e^{i\theta})\psi(e^{i\theta})x, y\rangle = \langle M_\psi(px)(e^{i\theta}, y\rangle,$$

de donde,

$$\begin{aligned}\|\varphi p\|_{L^2} &= \|\langle M_\psi(px), y\rangle\|_{L^2} \leq \|\|M_\psi(px)\|_H\|_{L^2} = \|M_\psi(px)\|_{L^2(\mathbb{S}^1,H)} \\ &\leq \|M_\psi\|\|px\|_{L^2(H)} = \|M_\psi\|\|p\|_{L^2} = \|A_{\mathscr{F}}\|\|p\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Debido a que M_φ es un multiplicador en $B(L^2(\mathbb{S}^1))$ con $\|M_\varphi\| \leq \|M_\psi\| = \|A_{\mathscr{F}}\|$, vale que $\|\varphi\|_\infty \leq \|M_\psi\| = \|A_{\mathscr{F}}\|$.

En efecto, sea C medible, entonces

$$\int |\varphi|^2\chi_C = \|M_\varphi\chi_C\|^2 \leq \|M_\psi\|^2|C|.$$

Extendiendo el funcional a las funciones simples, y luego a todo $L^1(\mathbb{S}^1)$, $|\varphi|^2$ define un funcional acotado sobre L^1 con norma menor o igual que $\|M_\psi\|^2$. Deducimos que $\varphi \in L^\infty$ y $\|\varphi\|_\infty \leq \|M_\psi\|$. Luego $\|\psi\|_\infty = \sup_{\|x\|=\|y\|=1,\ \theta\in[0,2\pi]} |\langle \psi(e^{i\theta})x, y\rangle| \leq \|M_\psi\| = \|A_{\mathscr{F}}\|$

Por último, por la Observación 3.1.14 y porque π es un $*$-morfismo,

$$\|\psi\|_\infty = \|M_\psi\| = \|A_{i-j}\|.$$

□

Dada $\psi \in L^\infty(\mathbb{S}^1, B(H))$, notamos $\hat{\psi}(n) \in B(H)$ al operador $\hat{\psi}(n)(h) := \int \psi(e^{i\theta})he^{-in\theta}$. Se puede probar, de forma sencilla, que $\pi(\psi) \in B(l^2_{\mathbb{Z}}(H))$ es una matriz de Toeplitz con coordenadas, $[\pi\psi]_{i-j} = \hat{\psi}(i-j)$.

Como corolario del lema anterior podemos asociarles a las formas de Hankel un "símbolo" $\psi \in L^\infty$.

Corolario 3.1.20 (Nehari-Page vectorial)**.** *Sea H un espacio de Hilbert separable y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(H)$ una sucesión de operadores tal que el operador de Hankel $A_{i+j} \in B(l_2(H))$ es acotado. Entonces existe $\psi \in L^\infty(\mathbb{S}^1, B(H))$ tal que para todo $n \geq 0$, $A_n = \hat{\psi}(n)$ y $\|A_{i+j}\| = \|\psi\|_\infty$.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.11, podemos extender A_{i+j} a $B(l^2_{\mathbb{Z}}(H))$ de forma que se mantenga la norma. Por la Observación 3.1.16, la forma de Toeplitz A_{i-j} tiene la misma norma que A_{i+j}. Finalemente, por el lema anterior, existe ψ cumpliendo $\|A_{i-j}\| = \|M_\psi\| = \|\psi\|_\infty$, donde $\psi = \sum A_n e^{in\theta}$. □

Como corolario del Teorema de Nehari-Page vectorial, podemos probar un lema debido a Davidson y Paulsen.

Corolario 3.1.21 (Davidson-Paulsen)**.** *Sean H y K espacios de Hilbert separables y $\phi : B(H) \to B(K)$ un operador acotado. Si $A_{i+j} \in B(l_2(H))$ es una forma de Hankel acotada, entonces $\phi(A_{i+j}) \in B(l_2(K))$ también es acotada. Más aún*

$$\|\phi(A_{i+j})\| \leq \|\phi\|\|A_{i+j}\|.$$

De esta demostración daremos solo una idea, ya que no contamos con la teoría adecuada para dar una prueba formal. La base de la demostración sigue la prueba de Pisier de [28] Lema 9.5.

Sea $\psi \in L^\infty(\mathbb{S}^1, B(H))$ tal que para todo $n \geq 0$, $\hat{\psi}(n) = A_n$ y $\|\psi\| = \|A_{i+j}\|$. Consideremos $\varphi = \phi \circ \psi$. Una fácil demostración, pero con un detalle incorrecto, es considerar

$$\|\phi(A_{i+j})\|_{B(l_2(K))} \leq \|\phi(A_{i+j})\|_{B(l^2_{\mathbb{Z}}(K))}\| = \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1,K)} \leq \|\phi\|\|\psi\| = \|\phi\|\|A_{i+j}\|_{B(l_2(H))}.$$

Sin embargo la función $\phi \circ \psi$ no es necesariamente SOT medible. Para esquivar ese problema consideramos para cada $r < 1$, $\psi_r = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\hat{\psi}(n)e^{in\theta}$. El operador ψ_r no es otra cosa que convolucionar ψ con el núcleo de Poisson [20] Observaciones 3.3.4 y 3.11.3. Aplicando ϕ, obtenemos que

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi_r(e^{i\theta}) &= \phi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\hat{\psi}(n)e^{in\theta}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\phi(\hat{\psi}(n))e^{in\theta} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\hat{\varphi}(n)e^{in\theta} = \varphi_r(e^{i\theta}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ahora φ_r es una función continua y luego SOT medible. Se puede probar que $\|\psi_r\| \leq \|\psi\|$ (ver [20] Lema 3.11.6). Aplicando esto último a la ecuación (3.2),

$$\|\varphi_r\| = \|\phi \circ \psi_r\| \leq \|\phi\|\|\psi_r\| \leq \|\phi\|\|\psi\|.$$

Como los coeficientes de φ_r en la base $e^{in\theta}$ son $r^{|n|}\phi(A_n)$, vale que $\pi(\varphi_r) \in B(l^2_{\mathbb{Z}}(H))$ es la matriz de Toeplitz $r^{|i-j|}\phi(A_{i-j})$. Luego,

$$\begin{aligned} \|r^{|i+j|}\phi(A_{i+j})\|_{B(l_2(H))} &\leq \|r^{|i+j|}\phi(A_{i+j})\|_{B(l^2_{\mathbb{Z}}(H))} = \|r^{|i-j|}\phi(A_{i-j})\|_{B(l^2_{\mathbb{Z}}(H))} = \|\varphi_r\| \\ &\leq \|\phi\|\|\psi_r\| \leq \|\phi\|\|\psi\|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Finalmente, la matriz de operadores $r^{|i+j|}\phi(A_{i+j}) \in B(l_2(H))$ es fácil de analizar, ya que en este caso, $r^{|i+j|}\phi(A_{i+j}) = r^{i+j}\phi(A_{i+j}) = D_r\phi(A_{i+j})D_r$, donde D_r es la matriz diagonal cuya i-ésima coordenada es $r^i Id_H$. Como $\lim_{r\to 1} D_r = Id$, vale que $\lim_{r\to 1} \|r^{|i+j|}\phi(A_{i+j})\| = \|\phi(A_{i+j})\|$. Aplicando la ecuación (3.3), resulta que $\|\phi(A_{i+j})\| \leq \|\phi\|\|\psi\|$.

3.2. Operadores de Foguel

Pasamos a desarrollar el prototipo de operador presente en el contraejemplo de Pisier. Curiosamente, si bien el ejemplo de Foguel de un operador power-bounded no similar a una contracción falla en ser polinomialmente acotado, Pisier encontró otro ejemplo usando el mismo tipo de operadores.

Definición 3.2.1. *Sean H un Hilbert y $X \in B(l_2(H))$, al operador $F \in B(l_2(H) \oplus l_2(H))$, definido matricialmente como*

$$F = \begin{pmatrix} S^* & X \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

lo llamaremos de Foguel con símbolo X. En el caso en el que X sea de Hankel, lo llamaremos de Foguel-Hankel.

Observación 3.2.2. Sea F de Foguel con símbolo X. Nos será útil calcular F^n. Si definimos para $n \geq 2$. X_n como $\sum_{j=0}^{n-1} S^{*j} X S^{n-1-j}$, entonces

$$F^n = \begin{pmatrix} S^{*n} & X_n \\ 0 & S^n \end{pmatrix}.$$

Luego, definiendo $X_1 = X$ y $X_0 = 0$, la fórmula vale para todo n. En particular, en el caso en el que el operador sea de Foguel-Hankel, X_n no es otra cosa que $nXS^{n-1} = nA_{i+j+n-1}$.

Demostración. Veamos sólo que la coordenada $(1, 2)$ de F^n es X_n ya que las demás son triviales.

Lo hacemos por inducción en n. Para $n = 2$ vale ya que $F^2_{1,2} = S^*X + XS = X_2$. Sea $n \geq 3$, supongamos que $F^{n-1}_{1,2} = X_{n-1}$ y veamos que $F^n_{1,2} = X_n$.

$$\begin{aligned}
[F^n]_{1,2} = [F^{n-1}F]_{1,2} &= \sum_{l=1}^{2} F^{n-1}_{1,l} F_{l,2} = S^{*n-1}X + X_{n-1}S \\
&= S^{*n-1}X + \left(\sum_{j=0}^{n-2} S^{*j} X S^{n-2-j}\right) S = S^{*n-1} X S^{n-1-(n-1)} + \sum_{j=0}^{n-2} S^{*j} X S^{n-1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} S^{*j} X S^{n-1-j} = X_n.
\end{aligned}$$

En el caso en el que X sea de Hankel, por la observación anterior, $S^*X = XS$ y en consecuencia, $X_n = \sum_j S^{*j} X S^{n-1-j} = \sum_j XS^{n-1} = nXS^{n-1}$.

□

Estamos interesados en caracterizar cuando un operador de Foguel es power-bouded, polinomialmente acotado o similar a una contración.

Proposición 3.2.3. *Sea F de Foguel con símbolo X. Entonces F es power bounded si y sólo si* $\sup_n\{\|X_n\|\} < \infty$.

Demostración. Supongamos que F es power-bounded y sea c tal que $\|F^n\| < c$. Observemos que la la proyección en la $(1, 2)$ coordenada es contractiva, Entonces

$$\|X_n\| = \|P_{1,2}(F^n)\| \leq \|F^n\| < c.$$

Recíprocamente supongamos que existe $c > 0$ tal que $\sup_n\{\|X_n\|\} < c$. Recordemos que por la Observación 1.3.13 la norma de una matriz $A \in M_n(\mathscr{A})$ está acotada por $n^2 max_{i,j} \|A_{i,j}\|_{\mathscr{A}}$.

Además como S y S^* son contractivos, S^n y S^{*n} también son contractivos. Luego,

$$\|F^n\| \leq 2^2 max\{\|S^n\|, \|S^{*n}\|, \|X_n\|\} \leq 4\, max\{1, c\}.$$

□

Así como

$$F^n = \begin{pmatrix} S^{*n} & X_n \\ 0 & S^n \end{pmatrix}$$

, por linealidad vale que dado $p = \sum_n a_n z^n$ un polinomio,

$$p(F) = \begin{pmatrix} p(S^*) & \sum_n a_n X_n \\ 0 & p(S) \end{pmatrix}.$$

Definamos entonces el operador $\delta : P(\mathbb{S}^1) \to B(l_2(H))$ como $\delta(z^n) = X_n$ y luego extender linealmente. Observemos que en el caso en el que X sea de Hankel, $\delta(p) = \sum_n a_n X_n = \sum_n n a_n X S^{n-1} = X p'(S)$.

Proposición 3.2.4. *Sean F de Foguel con símbolo X y $\delta : P(\mathbb{S}^1) \to B(l_2(H))$ definido como*

$$\delta(z^n) = X_n$$

y luego extender linealmente. Entonces F es (completamente) polinomialmente acotado si y sólo si δ es (completamente) acotado.

Demostración. Al ser S y S^* contractivos ambos admiten un morfismo de von Neumann completamente contractivo (ver Corolario 1.3.16).

Supongamos que F es polinomialmente acotado y sean $\rho_F, \rho_{S^*}, \rho_S$ los morfismos de von Neumann asociados a F, S^*, S respectivamente, entonces

$$\rho_F(p) = \begin{pmatrix} \rho_{S^*}(p) & \delta(p) \\ 0 & \rho_S(p) \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\|\delta(p)\| = \|P_{1,2} \circ \rho_F(p)\| \leq \|\rho_F(p)\|.$$

Recíprocamente, si $\delta(p)$ es acotado, entonces por la Observación 1.3.13,

$$\|\rho_F(p)\| \leq 4max\{\|\rho_S{}^*(p)\|, \|\rho_S(p)\|, \|\delta(p)\|\} \leq 4max\{1, \|\delta\|\}\|p\|_\infty.$$

Veamos ahora el caso completamente acotado. Éste es análogo al anterior aplicando el Shuffle canónico entre $M_n(M_2(B(l_2(H))))$ y $M_2(M_n(B(l_2(H))))$. Notemos θ a dicho morfismo.

Supongamos ρ_F completamente acotado, y sea $Q \in M_n(P(\mathbb{S}^1))$, luego

$$\|(\rho_F)_n(Q)\| = \|\theta(\rho_F)_n(Q)\| = \left\| \begin{pmatrix} (\rho_S^*)_n(Q) & \delta_n(Q) \\ 0 & (\rho_S)_n(Q) \end{pmatrix} \right\|.$$

Nuevamente, como la proyección en la $(1, 2)$ coordenada es contractiva, $\|\delta_n(Q)\| \leq \|(\rho_F)_n\| \leq \|\rho(F)\|_{cb}$.

La prueba de que si δ es completamente acotado entonces ρ_F también es completamente acotado es análoga al caso anterior. □

3.3. Operadores de Foguel inducidos por espacios de operadores Columna y CAR

Para comenzar con el contraejemplo de Pisier, necesitamos antes estudiar una familia de operadores Foguel-Hankel fáciles de analizar. Consideremos $H = l_2$ y $E_{i,j} \in B(l_2)$ las matrices elementales usuales. Es decir, $[E_{i,j}(\overline{h})]_k = \delta_{j,k} h_i$. Vamos a quedarnos solamente con los operadores "columna", $\{E_{i,0}\}_{i \geq 0}$. Para facilitar notación, a una $E_{i,0}$ la notaremos como E_i. Observemos que $E_i^* E_j = \delta_{i,j} E_0$. Los operadores columna cumplen una propiedad bonita: generan un subespacio isométricamente isomorfo a l_2. En efecto, si definimos $T : l_2 \to B(l_2)$, vía $T(\overline{h}) = \sum_l h_l E_l$, vale que

$$\begin{aligned} \|T(\overline{h})\|^2 = \|T(\overline{h})^* T(\overline{h})\| &= \left\| \sum_{l,j} \overline{h}_l E_l{}^* h_j E_j \right\| \\ &= \left\| \sum_j |h_j|^2 E_0 \right\| = \sum_j |h_j|^2 \|E_0\| = \|\overline{h}\|_{l_2}^2. \end{aligned}$$

No necesariamente la sucesión $(E_n)_n$ induce una forma de Hankel acotada. Sin embargo, dada $(a_n)_n$ una sucesión escalar podemos considerar $X = a_{i+j} E_{i+j}$. El siguiente Teorema caracteriza cuando el operador de Foguel con símbolo $a_{i+j} E_{i+j}$ es similar a una contracción en función de la sucesión $(a_n)_n$.

Teorema 3.3.1. *Sean $\{a_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión escalar y F el operador de Foguel-Hankel con símbolo $X = (a_{i+j} E_{i+j})$. Entonces son equivalentes*

i) F es similar a una contracción,

ii) F es polinomialmente acotado,

iii) F es power bounded,

iv) $\sup_n \{n^2 \sum_{k=n-1}^{\infty} |a_k|^2\}$ es finito.

Demostración. Claramente si F es similar a una contracción es polinomialmente acotado, y si es polinomialamente acotado entonces es power bounded. Supongamos que F es power bounded. Por la Proposición 3.2.3 esto es equivalente a que $\sup_n \|X_n\| < \infty$, donde X_n es $n a_{i+j+n-1} E_{i+j+n-1}$.

Calculemos la norma de X_n. Para ello basta calcular $\|X_n^* X_n\|$. Veamos primero que matriz infinita es $X_n^* X_n$.

$$[X_n^* X_n]_{i,j} = \sum_k [X_n^*]_{i,k} [X_n]_{k,j} = n^2 \sum_k \overline{a}_{i+k+n-1} E_{k+j+n-1}^* a_{j+k+n-1} E_{k+j+n-1} = n^2 \sum_k \overline{a}_{i+k+n-1} a_{j+k+n-1} \delta_{i,j} E_0.$$

Luego $X_n^* X_n$ es una matriz de operadores diagonal con entradas diagonales

$$[X_n^* X_n]_{i,i} = \sum_k |a_{i+k+n-1}|^2 E_0 = \sum_{k=i+n-1}^{\infty} |a_k|^2 E_0.$$

Notemos que como E_0 es positivo, $[X_n^* X_n]_{i,i}$ también es positivo. Además, como $\|E_0\| = 1$,

$$\|[X_n^* X_n]_{i,i}\| = \sum_{k=i+n-1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Por último, al ser $X_n^* X_n$ una matriz diagonal positiva, su norma es exactamente

$$\sup_i \|[X_n^* X_n]_{i,i}\| = \sup_i \sum_{k=i+n-1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Como $\sum_{k=i+n-1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \sum_{k=l+n-1}^{\infty} |a_k|^2$ cuando $i \leq l$, el supremo ocurre cuando $i = 0$.

$$\|X_n\|^2 = n^2 \sum_{k=n-1}^{\infty} |a_k|^2,$$

de donde $\sup_n \{n^2 \sum_{k=n-1}^{\infty}\} < \infty$.

Supongamos ahora que $\sup_n \{n^2 \sum_{k=n-1}^{\infty} |a_k|^2\} < \infty$ y veamos que F es similar a una contracción. Consideremos la matriz infinita de operadores $Y_{i,j} = -j a_{i+j-1} E_{i+j-1}$. Por el momento supongamos Y es acotado. Afirmamos que

$$YS - S^* Y = -X.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}[YS - S^*Y]_{i,j} = [YS]_{i,j} - [S^*Y]_{i,j} &= \sum_l -la_{i+l-1}E_{i+l-1}\delta_{l,j+1}Id_H - \sum_k \delta_{i+1,k}Id_H - ja_{k+j-1}E_{k+j-1} \\ &= -(j+1)a_{i+j}E_{i+j} - (-j)a_{i+j}E_{i+j} = -[X]_{i,j}.\end{aligned}$$

Si consideramos $R = \begin{pmatrix} Id & Y \\ 0 & Id \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \begin{pmatrix} Id & -Y \\ 0 & Id \end{pmatrix}$, vale que R es una similaridad para F.

$$\begin{aligned}RFR^{-1} &= \begin{pmatrix} Id & Y \\ 0 & Id \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S^* & X \\ 0 & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Id & -Y \\ 0 & Id \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S^* & X+YS \\ 0 & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Id & -Y \\ 0 & Id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^* & X+YS-S^*Y \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

De donde F es similar a una contracción. Resta probar entonces que Y es acotado.

Calculemos la norma de Y^*Y.

$$[Y^*Y]_{i,j} = \sum_l -i\overline{a}_{i+l-1}E^*_{i+l-1} - ja_{l+j-1}E_{l+j-1} = \sum_l (-1)^2 ij\overline{a}_{i+l-1}a_{l+j-1}\delta_{i,j}E_0.$$

Luego Y^*Y es una matriz diagonal cuyas entradas diagonales son

$$[Y^*Y]_{i,i} = \sum_l i^2|a_{i+l-1}|^2E_0.$$

Como cada sumando es positivo, el operador $[Y^*Y]_{i,i}$ es positivo y su norma es exactamente $\sum_l i^2|a_{i+l-1}|^2$. En consecuencia

$$\|Y^*Y\| = \sup_n n^2\sum_l |a_{n+l-1}|^2 < \infty.$$

□

Dado un operador de Foguel-Hankel sobre H con símbolo X y $\phi : B(H) \to (K)$, el Lema de Davidson-Paulsen 3.1.21 permite considerar un operador de Foguel sobre K inducido por ϕ. Éste viene simplemente de considerar el operador de Hankel $\phi(X)$. A dicho operador lo notaremos F_ϕ.

$$F_\phi = \begin{pmatrix} S^* & X_\phi \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

También nos podemos preguntar si F es power-bounded, polinomialmente acotado o similar a una contracción implica que F_ϕ también lo sea. Usando el Lema de Davidson-Paulsen 3.1.21 es relativamente sencillo probar que las dos primeras propiedades son ciertas. Sin embargo, para reproducir una demostración análoga para la tercera propiedad necesitaríamos ϕ completamente acotado. Efectivamente es falso para operadores similares a una contracción y esto será la fuente para nuestro contraejemplo. Si encontramos un operador de Foguel similar a una contracción tal que F_ϕ no lo sea, entonces F_ϕ sería polinomialmente acotado pero no similar a una contracción.

Proposición 3.3.2. *Sean H, K espacios de Hilbert, F de Foguel-Hankel sobre H con símbolo X_F. Sea $\phi : B(H) \to B(K)$ acotado, y sea F_ϕ el operador de Foguel-Hankel sobre K con símbolo X_ϕ. Entonces*

i)Si F es power-bounded, entonces F_ϕ es power-bounded.

ii)Si F es polinomialmente acotado, entonces F_ϕ es polinomialmente acotado.

Demostración. Probaremos solamente que F polinomialmente acotado implica F_ϕ polinomialmente acotado, ya que la otra demostración es análoga.

Recordemos que un $\tilde{F}$ de Foguel es polinomialmente acotado si y sólo si el operador $\delta_{\tilde{F}} : P(\mathbb{S}^1) \to B(l_2(K))$ definido como $\delta_{\tilde{F}}(z^n) = (X_n)_{\tilde{F}}nS^{n-1}$ es acotado (Proposición 3.2.4). Debemos probar entonces que δ_{F_ϕ} es acotado.

Sea X_F el operador de Hankel asociado a F y digamos $X_F = A_{i+j}$. Entonces, $n(X_n)_F S^{n-1} = nA_{i+j+n-1}$. Si consideramos $(B_k)_k = (nA_{k+n-1})_k$, vemos que $\delta_F(z^n)$ es una forma de Hankel con $\delta_F(z^n) = B_{i+j}$. Como suma de formas de Hankel es de Hankel, $\delta_F(p)$ es de Hankel para todo p.

Por otro lado, X_ϕ no es otra cosa que $\phi(A_{i+j})$ y en consecuencia resulta que $n(X_\phi)_n n S^{n-1} = \phi(A_{i+j+n-1})$. Concluimos entonces que $\delta_{F_\phi(p)}$ es la forma de Hankel inducida por ϕ y la forma de Hankel $\delta_F(p)$.

Sea p fijo y B_{i+j} la forma de Hankel asociada a $\delta_F(p)$, luego

$$\begin{aligned}\|\delta_{F_\phi(p)}\| &= \|\phi(B_{i+j})\| \leq \|\phi\|\|B_{i+j}\| \\ &= \|\phi\|\|\delta_F(p)\| \leq \|\phi\|\|p\|_\infty\|\delta_F\|.\end{aligned}$$

□

El contraejemplo usa otro espacio de operadores isómetricamente isomorfo a l_2.

Definición 3.3.3. *Sea $(C_n)_n \in B(H)$ una sucesión de operadores, decimos que $(C_n)_n$ satisface la CAR (por Canonical anticommutation relations) si para todo i, j,*

i) $C_iC_j + C_jC_i = 0$.

ii) $C_iC_j^* + C_j^*C_i = \delta_{i,j} Id_H$.

Proposición 3.3.4. *Dada $(C_n)_n$ una sucesión de operadores que satisface la CAR, podemos definir $T : l_2 \to B(H)$ vía $T(\overline{h}) := \sum_j h_jC_j$. El espacio $T(l_2)$ es otro espacio de operadores isómetricamente isomorfo a un Hilbert.*

Demostración. Sea $\overline{h} \in l_2$, consideremos $T_n(\overline{h}) \in B(H)$ vía $T_n(\overline{h}) = \sum_{j=0}^n h_jC_j$. Veremos que para cada n, $\|T_n\|^2 = \sum_{j=0}^n |h_j|^2$ y probaremos que la sucesión $(T_n(\overline{h}))_n$ es de Cauchy. Para aliviar notación llamaremos T_n a $T_n(\overline{h})$.

Observemos que $T_nT_n^* \leq T_nT_n^* + T_n^*T_n$ y que ambos son positivos, luego

$$\|T_nT_n^*(\overline{h})\| \leq \|T_nT_n^* + T_n^*T_n(\overline{h})\|. \tag{3.4}$$

Por otro lado, si calculamos $T_nT_n^* + T_n^*T_n$, por la segunda propiedad de la definición de CAR 3.3.3 resulta que

$$T_nT_n^* + T_n^*T_n = \sum_{i,j=0}^n h_i\overline{h}_jC_iC_j^* + \overline{h}_jh_iC_j^*C_i = \sum_{i=0}^n |h_i|^2 Id_H. \tag{3.5}$$

Combinando (3.4) y (3.5), deducimos que

$$\|T_n\|^2 = \|T_n^*T_n\| \leq \|T_nT_n^* + T_n^*T_n\| = \left\|\sum_i |h_i|^2 Id_H\right\| = \|\overline{h}|_{l_2^n}\|^2.$$

Observemos ahora que por la primer propiedad de la definición de CAR 3.3.3, $T_n^2 = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}T_n^2 &= \sum_{i,j=0}^n h_ih_jC_iC_j = \sum_{i<j} h_ih_jC_iC_j + \sum_{i>j} h_ih_jC_iC_j + \sum_{i=j} h_ih_jC_iC_j \\ &= \sum_{i<j} h_ih_jC_iC_j - \sum_{i<j} h_ih_jC_iC_j = 0\end{aligned}$$

Calculemos $\|T_n\|$ notando que por la cuenta anterior $T_nT_nT_n^*T_n^* = 0$.

$$\begin{aligned}\|T_n\|^4 = \|(T_nT_n^*)^2\| = \|T_nT_n^*T_nT_n^*\| &= \|T_nT_n^*T_nT_n^* + T_nT_nT_n^*T_n^*\| = \|T_n(T_n^*T_n + T_nT_n^*)T_n^*\| \\ &= \left\|T_n\left(\sum_{i=0}^n |h_i|^2 Id\right)T_n^*\right\| = \sum_{i=0}^n |h_i|^2\|T_n\|^2.\end{aligned}$$

De donde concluimos que $\|T_n\|^2 = \sum_{i=0}^n |h_i|^2$.

Para probar que $(T_n)_n$ es de Cauchy, hay que observar que reproduciendo la misma cuenta, dados n, m la norma $\|T_n - T_m\|^2 = \sum_{i=n}^{m} |h_i|^2$, de donde se deduce fácilmente que la sucesión es de Cauchy. Luego tiene sentido considerar $T(\overline{h}) = \sum_i h_i C_i$ y como $T_n \to T(\overline{h})$,

$$\|T(h)\| = \lim_n \|T_n\| = \lim_n \sum_{i=0}^{n} |h_i|^2 = \|\overline{h}\|_{l_2}.$$

□

Explotando la isometría entre los operadores CAR y los operadores columna, podemos dar una caracterización para los operadores CAR similar a la del Teorema 3.3.1.

Teorema 3.3.5. *Sean H un Hilbert, $(C_n)_n \in B(H)$ una sucesión que satisface la CAR y $(a_n)_n$ una sucesión real. Sea F el operador de Foguel-Hankel con símbolo $a_{i+j}C_{i+j}$. Entonces son equivalentes*
i)F es polinomialmente acotado,
ii)F es power-bounded,
iii)$\sup_n\{n^2 \sum_{k=n-1} |a_k|^2\} < \infty$.

Demostración. Claramente si F es polinomialmente acotado, entonces F es power bounded. Supongamos que F es power bounded y recordemos que por la Proposición 3.2.3 esto es equivalente a que $\sup_n \|X_n\| < \infty$, donde $X_n = na_{i+j+n-1}C_{i+j+n-1}$. Observemos que como $\|X_nX_n^*\| \leq \|X_n^*X_n + X_nX_n^*\| \leq 2\|X_nX_n^*\|$, $\sup_n \|X_n\| < \infty$ si y sólo si $\sup_n \|X_n^*X_n + X_nX_n^*\| < \infty$. Calculemos la norma de $X_n^*X_n + X_nX_n^*$ (Que es lo que sabemos computar).

$$\begin{aligned}
[X_n^*X_n + X_nX_n^*]_{i,j} &= \sum_k [X_n^*]_{i,k}[X_n]_{k,j} + [X_n^*]_{i,k}][X_n^*]_{j,k} \\
&= \sum_k n^2(a_{i+k+n-1}a_{j+k+n-1}C^*_{i+k+n-1}C_{j+k+n-1} + a_{i+k+n-1}a_{j+k+n-1}C_{i+k+n-1}C^*_{j+k+n-1}) \\
&= \sum_k n^2 a_{i+k+n-1}a_{k+j+n-1}\delta_{i,j} Id. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Luego $X_n^*X_n + X_nX_n^*$ es una matriz diagonal cuyas entradas diagonales son

$$[X_n^*X_n + X_nX_n^*]_{i,i} = n^2 \sum_k |a_{i+k+n-1}|^2 Id,$$

que son operadores positivos. Al ser $X_n^*X_n + X_nX_n^*$ una matriz diagonal con entradas positivas, su norma es exactamente

$$\|X_n^*X_n + X_nX_n^*\| = \sup_i n^2 \sum_k |a_{i+k+n-1}|^2.$$

Como $n^2 \sum_k |a_{i+k+n-1}|^2 < n^2 \sum_k |a_{j+k+n-1}|^2$ cuando $i < j$, dicho supremo ocurre cuando $i = 0$.

$$\|X_n^*X_n + X_nX_n^*\| = n^2 \sum_k |a_{k+n-1}|^2 = n^2 \sum_{k=n-1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Finalmente, $\sup_n n^2 \sum_{k=n-1} |a_k|^2 < \infty$.

Supongamos que $\sup_n\{n^2 \sum_{k=n-1} |a_k|^2\} < \infty$. Debido al Teorema 3.3.1 el operador de Foguel $\tilde{F}$ con símbolo $a_{i+j}E_{i+j}$ es polinomialmente acotado. Si encontramos $\phi : B(l_2) \to B(H)$ tal que $\phi(E_i) = C_i$, entonces por la Proposición 3.3.2, el operador $\tilde{F}_\phi$ con símbolo $\phi(a_{i+j}E_{i+j}) = a_{i+j}C_{i+j}$ sería acotado. Observemos que al tener el mismo símbolo, $\tilde{F}_\phi$ y F coinciden.

Recordemos que el espacio de operadores columna (COL) y el espacio de operadores CAR, eran ambos isométricamente isomorfos a l_2, donde las isometrías vienen dadas por $T_1 : l_2 \to Col$ y $T_2 : l_2 \to CAR$, $T_1(e_i) = E_i$ y $T_2(e_i) = C_i$. Por otro lado, la proyección P de $B(l_2)$ en el espacio de operadores columna es acotada por ser el espacio de operadores Columna complementado en $B(l_2)$. Consideremos $\phi : B(l_2) \to B(H)$ la composición

$$B(l_2) \xrightarrow{P} COL \xrightarrow{T_1^{-1}} l_2 \xrightarrow{T_2} CAR.$$

Por lo visto anteriormente, ϕ es acotado y luego F resulta polinomialmente acotado. □

Por motivos que se verán en la demostración del Teorema 3.3.11, nos será útil encontrar finitos operadores que cumplan la CAR en M_{2^n}.

Ejemplo 3.3.6. Consideremos las siguientes matrices en M_2,

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vale que $V^2 = I_2$, $C^2 = 0$, $CC^* = E_{2,2}$, $C^*C = E_{1,1}$, $CV = C$ y $VC = -C$.

Para $0 \leq i \leq n-1$, definamos en $M_{2^k} \cong M_2 \overbrace{\otimes ... \otimes}^{k} M_2$ las siguientes k matrices.

$$W_{i,k} = V^{\otimes(i)} \otimes C \otimes I_2^{\otimes(n-i-1)},$$

donde $X^{\otimes(k)}$ indica $X \overbrace{\otimes ... \otimes}^{k} X \in M_{2^k}$.

Cuando no haya confusión acerca de la dimensión, notaremos a $W_{i,k}$ simplemente como W_i. Afirmamos que los W_i satisfacen la CAR. En efecto, notemos que

$$W_i{}^2 = (V^2)^{\otimes(i)} \otimes C^2 \otimes I_2^{\otimes(n-i-1)} = I_2^{\otimes(i)} \otimes 0 \otimes I_2^{\otimes(i)} = 0, \tag{3.7}$$

$$W_i^* W_i = (V^* V)^{\otimes(i)} \otimes C^* C \otimes I_2^{\otimes(n-i-1)} = I_2^{\otimes(i)} \otimes E_{1,1} \otimes I_2^{\otimes(i)} \text{ y} \tag{3.8}$$

$$W_i W_i^* = I_2^{\otimes(i)} \otimes E_{2,2} \otimes I_2^{\otimes(i)}. \tag{3.9}$$

Por otro lado, para $0 \leq i < j \leq n-1$,

$$W_i W_j = I_2^{\otimes(i)} \otimes CV \otimes V^{\otimes(j-i-1)} \otimes C I_2 \otimes I_2^{\otimes(n-j-1)} = -W_j W_i, \tag{3.10}$$

$$W_i W_j^* = I_2^{\otimes(i)} \otimes CV \otimes V^{\otimes(j-i-1)} \otimes C^* I_2 \otimes I_2^{\otimes(n-j-1)} = -W_j^* W_i. \tag{3.11}$$

De las ecuaciones (3.7) y (3.10) se deduce que $W_i W_j + W_j W_i = 0$ mientras que de (3.8), (3.9) y (3.11) se sigue que $W_i W_j^* + W_j W_i^* = \delta_{i,j} Id_H$.

Veamos ahora que el generado por los $W_i \otimes W_i \in M_{2^k} \otimes M_{2^k}$ es canónicamente isomorfo a l_1^n.

Proposición 3.3.7. *Sean $\{W_i\}$ los operadores construidos en el ejemplo anterior. Entonces,*

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=0}^{n-1} a_i W_i \otimes W_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|.$$

Demostración. La segunda desigualdad es sencilla, ya que como $\|W_i \otimes W_i\| = \|W_i\|^2 = 1$, vale que

$$\left\| \sum_{i=0}^{n-1} a_i W_i \otimes W_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|a_i W_i \otimes W_i\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|.$$

Probemos ahora que $\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \leq \| \sum_{i=0}^{n-1} a_i W_i \otimes W_i \|$.

Identifiquemos $M_{2^n} \otimes M_{2^n}$ con $(M_2 \otimes M_2) \overbrace{\otimes ... \otimes}^{n} (M_2 \otimes M_2)$, y estudiemos a $\sum_i a_i W_i \otimes W_i$ en $(M_2 \otimes M_2) \overbrace{\otimes ... \otimes}^{n} (M_2 \otimes M_2)$. Como dicha identificación es un $*$ morfismo, la norma de $\sum_i a_i W_i \otimes W_i$ es invariante. Notemos que

$$W_i \otimes W_i \approx (V \otimes V)^{\otimes(i)} \otimes (C \otimes C) \otimes Id_{M_4}^{\otimes(n-i-1)}. \tag{3.12}$$

Para cada i, sea $\omega_i \in \mathbb{S}^1$ tal que $\overline{\omega_i} a_i = |a_i|$ y consideremos $x_i \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$,

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 \otimes e_1 + \omega_i e_2 \otimes e_2).$$

Notemos que para cada i, x_i es unitario y además,

$$\begin{aligned} V \otimes V(x_i) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(V(e_1) \otimes V(e_1) + \omega_i V(e_2) \otimes V(e_2)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 + \omega_1(-e_2) \otimes (-e_2)) = x_i, \text{ mientras que} \\ C \otimes C(x_i) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C(e_1) \otimes C(e_1) + \omega_i C(e_2) \otimes C(e_2)) = \frac{e_2 \otimes e_2)}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Sea $x \in (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)^{\otimes(n)}$ definido como,

$$x = x_1 \otimes ... \otimes x_n.$$

Por ser x un tensor elemental de elementos unitarios, x es unitario. Además, debido a las ecuaciones (3.12) y (3.13),

$$\begin{aligned} W_i \otimes W_i(x) &= (V \otimes V)^{\otimes(i)} \otimes (C \otimes C) \otimes Id_{M_4}^{\otimes(n-i-1)}(x_1 \otimes ... \otimes x_n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 \otimes ... \otimes x_i \otimes (e_2 \otimes e_2) \otimes x_{i+1} ... \otimes x_n. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Afirmamos que $\langle \sum_i a_i W_i \otimes W_i(x), x\rangle = \frac{1}{2}\sum_i |a_i|$.
En efecto, basta ver que para cada i, $\langle a_i W_i \otimes W_i(x), x\rangle = \frac{1}{2}|a_i|$. Debido a la ecuación (3.14) y a que cada x_i es unitario,

$$\begin{aligned} \langle a_i W_i \otimes W_i(x), x\rangle &= \frac{a_i}{\sqrt{2}}\langle x_1 \otimes ... \otimes x_i \otimes (e_2 \otimes e_2) \otimes x_{i+1} ... \otimes x_n, x_1 \otimes ... \otimes x_n\rangle \\ &= \frac{a_i}{\sqrt{2}}\left(\prod_{j \neq i}\langle x_j, x_j\rangle\right)\langle x_i, e_2 \otimes e_2\rangle \\ &= \frac{1}{2}\overline{\omega}_i a_i = \frac{1}{2}|a_i|. \end{aligned}$$

Finalmente, como $\|\sum a_i W_i \otimes W_i\| \geq \sup_{x \in B_x}\langle \sum a_i W_i \otimes W_i x, x\rangle$, deducimos que $\|\sum a_i W_i \otimes W_i\| \geq \frac{1}{2}\sum_i |a_i|$. □

Hasta aquí hemos construido finitos operadores que satisfacen la CAR, cumpliendo además

$$\left\|\sum_{i=0}^{n-1} a_i W_i \otimes W_i\right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1}|a_i|.$$
$$\left\|\sum_{i=0}^{n-1} a_i W_i \otimes W_i\right\| \geq \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|.$$

Esto vale en general. Si $\{C_i\}_i$ satisface la CAR, entonces

$$\sum_i \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i| \leq \left\|\sum_{i=0}^{n-1} a_i W_i \otimes C_i\right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1}|a_i|. \tag{3.15}$$

Esto se deduce del siguiente Teorema, cuya demostración puede encontrarse en [2].

Teorema 3.3.8. *Sean $\{C_i\}_{i=1}^n$ y $\{W_i\}_{i=1}^n$ dos conjuntos de operadores que satisfacen la CAR, entonces existe un único $*$-morfismo $\pi : C^*(C_1, ...C_n) \to C^*(W_1, ..., W_n)$, tal que $\pi(W_i) = C_i$ para todo i.*

Para probar la desigualdad (3.15) usando el teorema anterior, basta observar que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i W_i \otimes C_i$ no es otra cosa que $\pi_n(\sum_{i=0}^{n-1} a_i W_i \otimes W_i)$. Para evitar estudiar a los operadores CAR en detalle, haremos otra aproximación. Nos construiremos una sucesión $\{C_i\}$ de operadores cumpliendo las desigualdades (3.15) y que "casi" satisfagan la CAR.

Ejemplo 3.3.9. Consideremos $H = \oplus_n \mathbb{C}^{2^n}$ y K su completado. Sean $W_{i,n}$ los operadores construidos en el Ejemplo 3.3.6. Si $i > n$, definamos $W_{i,n} = 0$. Para cada i, definamos C_i como

$$C_i = \oplus_n W_{i,n}.$$

Veamos que $(C_i)_n$ satisface las siguientes cuatro ecuaciones

i) $\| \sum_{i\geq 0} a_i C_i \|^2 = \sum_{i\geq 0} |a_i|^2$ si $a_i \in l_2$.

ii) $\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \leq \| \sum_{i=0}^{n-1} a_i C_i \otimes W_{i,n} \| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$.

iii) $C_i C_j + C_j C_i = 0$.

iv) $C_i C_j^* + C_j C_i^* = \delta_{i,j}(I - P_i)$, si P_i es la proyeccón sobre $\oplus_{n=1}^{i} \mathbb{C}^{2^n}$.

Si bien $(C_i)_i$ no satisface la CAR, su imagen cocientando por la C^*-álgebra generada por los operadores compactos si lo hace. Como H es denso en K basta verificar las ecuaciones en H. Verificaremos solamente las primeras dos ya que las ecuaciones iii) y iv) son elementales.

La ecuación i) se debe a que si $a_i \in l^2$, podemos identificar $\sum_i a_i C_i$ con el operador $\oplus_n \sum_i a_i W_{i,n}$. De donde,

$$\left\| \sum_i a_i C_i \right\|^2 = \left\| \oplus_n \sum_i a_i W_{i,n} \right\|^2 = \sup_n \left\| \sum_i a_i W_{i,n} \right\|^2_{\mathbb{C}^{2^n}}$$
$$= \sup_n \sum_i^n |a_i|^2 = \|a_i\|^2.$$

Debido a que $(C_i)_i$ es isométrico a l_2, la segunda desigualdad de la ecuación ii) es clara. Veamos la primera. Fijemos n y notemos que $P_{\mathbb{C}^{2^n}} C_i|_{\mathbb{C}^{2^n}} = W_{i,n}$. Luego

$$\left\| \sum_{i=0}^{n-1} a_i C_i \otimes W_{i,n} \right\|_{\oplus_n \mathbb{C}^{2^n} \otimes \mathbb{C}^{2^n}} \geq \left\| P_{\mathbb{C}^{2^n} \otimes \mathbb{C}^{2^n}} a_i C_i \otimes W_{i,n}|_{\mathbb{C}^{2^n} \otimes \mathbb{C}^{2^n}} \right\| = \|a_i W_{i,n} \otimes W_{i,n}\|_{\mathbb{C}^{2^n} \otimes \mathbb{C}^{2^n}}$$
$$\geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$$

Observación 3.3.10. Nos interesa poder aplicar el Teorema 3.3.5 a los operadores $(C_i)_i$ definidos en el ejemplo anterior. Sin embargo $(C_i)_i$ no cumple la CAR, así que no se cumplen las hipótesis del Teorema. Veamos como adaptar la demostración.

Recordemos que el Teorema 3.3.5 establecía que si $(C_i)_i$ que satisface la CAR, $(a_i)_i$ es una sucesión real y F es el operador de Hankel con símbolo $a_{i+j} C_{i+j}$, entonces son equivalentes,

i) F es polinomialmente acotado,

ii) F es power bounded,

iii) $\sup_n \{n^2 \sum_{k=n-1} |a_k|^2\} < \infty$.

Para probar que si $\sup_n \{n^2 \sum_{k=n-1} |a_k|^2\} < \infty$ entonces F es polimoliamente acotado, lo único que habíamos usado es que existía una isometría entre el espacio CAR y l_2. Por la ecuación i), esto sigue valiendo.

La prueba de que si F es power bounded, entonces $\sup_n \{n^2 \sum_{k=n-1} |a_k|^2\} < \infty$ es similar a la demostración del Teorema 3.3.5. La única diferencia es que por la ecuación iv), en la ecuación (3.6) de la demostración del Teorema 3.3.5, resulta

$$[X_n^* X_n + X_n X_n^*]_{i,j} = \sum_k n^2 a_{i+k+n-1} a_{k+j+n-1} \delta_{i,j} (Id - P_i).$$

La demostración concluye en forma análoga a la del Teorema 3.3.5, como $[X_n^* X_n + X_n X_n^*]_{i,j}$ es una matriz diagonal con entradas positivas, su norma es el supremo de sus coordenadas,

$$\|[X_n^* X_n + X_n X_n^*]\| = \sup_i \left\| \sum_k n^2 a_{i+k+n-1}^2 (Id - P_i) \right\| = \sum_k n^2 a_{k+n-1}^2,$$

de donde $\sum_k n^2 a_{k+n-1}^2 < \infty$.

El siguiente Teorema vale para toda sucesión de operadores CAR (en la demostración solo usamos la desigualdad 3.15) pero lo enunciamos para la sucesión construida en el Ejemplo 3.3.9

Teorema 3.3.11. *Sea $(a_n)_n$ una sucesión escalar tal que $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2|a_k|^2 = \infty$ y $(C_i)_i$ la sucesión de operadores construidas en el ejemplo 3.3.9. Entonces el operador de Foguel-Hankel con símbolo $X = a_{i+j}C_{i+j}$ no es similar a una contracción.*

Demostración. Por la Proposición 3.2.4 basta probar que el operador $\delta : P(\mathbb{S}^1) \to B(l_2(H))$, donde $\delta(z^n) = nXS^{n-1} = na_{i+j+n-1}C_{i+j+n-1}$ no es polinomialmente acotado. Sea P la $(0,0)$-proyección de $B(l_2(H))$ en $B(H)$. Como la proyección es completamente contractiva, basta probar que $P \circ \delta : P(\mathbb{S}^1) \to B(H)$ no es completamente acotada. Notemos que $P\delta(z^{n+1}) = P(n+1a_{i+j+n+1-1}C_{i+j+n+1-1}) = n+1a_nC_n$.

Supongamos que $P\delta$ es completamente acotado. Para cada n consideremos $W_{i,n}$ los operadores construidos en el Ejemplo 3.3.6 y consideremos $q_n(z) = \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)a_iW_{i,n}z^i \in M_{2^n}(P(\mathbb{S}^1))$. Calculemos la norma de $q_n(z)$. Por la Observación 1.3.12, $\|q_n(z)\| = \sup_{z_0\in\mathbb{S}^1}\|q_n(z_0)\|$. Como los $W_{i,n}$ son isométricos a l_2^n, fijado $z_0 \in \mathbb{S}^1$, la norma de $q_n(z_0)$ es exactamente $(\sum_i((i+1)|a_i||z_0|)^2)^{\frac{1}{2}}$. Tomando supremo sobre z_0, deducimos que

$$\|q_n(z)\| = \sum_i((i+1)|a_i|)^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.16}$$

Observemos ahora que desde el punto de vista tensorial, $q_n(z)$ no es otra cosa que $\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)a_iW_{i,n}\otimes z^i$. Luego $(P\delta)_{2^n}(q_n(z)) = \sum_i(i+1)^2(a_i)^2W_{i,n}\otimes C_i$. Por la desigualdad 3.15, resulta que

$$\|(P\delta)_{2^n}(q_n(z))\| = \left\|\sum_i(i+1a_i)^2W_{i,n}\otimes C_i\right\| \geq \frac{1}{2}\sum_i(i+1)^2|a_i|^2.$$

Aplicando la igualdad (3.16), tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\sum_i(i+1)^2|a_i|^2\right))^{\frac{1}{2}}\|P\delta\|_{cb} &\geq \|(P\delta)_{2^n}(q_n(z))\| \\ &\geq \frac{1}{2}\sum_i(i+1)^2|a_i|^2.\end{aligned}$$

Finalmente $\|P\delta\|_{cb} \geq \frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2|a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ y tomando límite con n tendiendo a infinito llegamos a una contradicción. □

Corolario 3.3.12 (Contraejemplo de la conjetura de Halmos)**.** *Consideremos $(a_n)_{n\geq 0}$ definido como*

$$a_k = \begin{cases} 2^{-j} & si\ 2^j = k+1 \\ 0 & si\ no. \end{cases}$$

y sea $(C_i)_i$ la sucesión de operadores construidas en el Ejemplo 3.3.9. Entonces el operador de Foguel-Hankel con símbolo $a_{i+j}C_{i+j}$ es polinomialmente acotado pero no similar a una contracción.

Demostración. Por los Teoremas 3.3.5 y 3.3.11, basta probar que $\sup_n(n+1)^2\sum_{k=n-1}|a_k|^2 < \infty$ mientras que $\sum_{k=0}(k+1)^2|a_k|^2 = \infty$. Observemos que el soporte de la sucesión es exactamente la subsucesión $a_{2^j-1} = 2^{-j}$ Luego, $\sup_n(n+1)^2\sum_{k=n-1}|a_k|^2 = \sup_j 2^{2j}\sum_{k=j}(2^{-k})^2$. Como la serie es de potencias con razón $\frac{1}{2^2}$, para cada j,

$$2^{2j}\sum_{k=j}^{\infty}(2^{-k})^2 = \frac{2^{2j}}{2^{2j}}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-2k} = \frac{4}{3},$$

de donde obtenemos que $\sup_j 2^{2j}\sum_{k=j}^{\infty}(2^{-k})^2 = \frac{4}{3}$. Por otro lado,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2|a_k|^2 = \sum_{j=0}^{\infty}2^{2j}2^{-2j} = \infty.$$

□

3.4. Contraejemplo de Foguel

Para finalizar el capítulo presentaremos el contraejemplo de Foguel [7]. Éste fue el primer ejemplo de un operador power-bounded no similar a una contracción. Más tarde Lebow mostró que este ni siquiera era polinomialmente acotado [14].

Consideremos en $B(l_2)$ el operador elemental $E_{r,r}$ y el operador de Foguel,

$$F_r = \begin{pmatrix} S^* & E_{r,r} \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Recordemos que por la Observación 3.2.2 vale que

$$F_r{}^n = \begin{pmatrix} S^{*n} & X_{n,r} \\ 0 & S^n \end{pmatrix}$$

Donde

$$X_{n,r} = \sum_{k=0}^{n-1} S^{*k} E_{r,r} S^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} E_{r-k,r-n+k+1}$$

y adoptamos la convención que $E_{i,j} = 0$ si i o $j < 0$. Además sus entradas son 0 o Id ocurriendo éstas últimas a lo largo de la antidiagonal $i + j = 2r - n + 1$, de donde $X_{n,r}$ es autoadjunto. Observemos que para $n > r$, $X_{n,r} = 0$. Dados r y s, vale que

$$\begin{aligned} X_{n,r}X_{n,r} &= \sum_{l=r-n}^{2r+1-n} E_{l,l}, \text{ mientras que} \\ X_{n,r}X_{n,s} &= \sum_{k,l=0}^{n} E_{r-k,r-n+k+1} E_{s-n+l+1,s-l}. \end{aligned}$$

Observemos que cada término de la suma es 0 a menos que $r - n + k + 1 = s - n + l + 1$, $s > n - l - 1$, $r > n - k + 1$, $r \geq k$ y $s \geq l$. De la primera igualdad deducimos que $r + k = s + l$ y reemplazando en las demás desigualdades obtenemos $r + k = s + l > n - 1$, $r > k$ y $s > l$. Como $2r > r + k > s + l$, vale que $2r > s$. Análogamente $2s > r$. Luego si $2r + 1 < s$ o $2s + 1 < r$ entonces $X_{n,r}X_{n,s} = 0$.

Teorema 3.4.1 (Foguel)**.** *Sea $(a_k)_k$ una sucesión de números naturales tal que $2a_k + 1 < a_{k+1}$. Entonces el operador de Foguel con símbolo $X = \sum_k E_{a_k,a_k}$ es power-bounded.*

Demostración. Recordemos que por la Proposición 3.2.3 un operador de Foguel es power-bounded si y sólo si $\sup_n \|X_n\| < \infty$, donde $X_n = \sum_{j=0}^{n-1} S^{*j} X S^{n-1-j}$. Debido a que $X = \sum_k E_{a_k,a_k}$,

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{j=0}^{n-1} S^{*j} X S^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} S^{*j} \sum_k E_{a_k,a_k} S^{n-1-j} \\ &= \sum_k \sum_{j=0}^{n-1} S^{*j} E_{a_k,a_k} S^{n-1-j} = \sum_k X_{n,a_k}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Notemos que además, como $2a_k + 1 < a_{k+1}$ y $X_{n,r}$ es autoadjunto para todo r, entonces para $k \neq l$, $X_{n,a_k} X^*_{n,a_l} = 0$

Calculemos la norma de X_n.

$$X_n X_n^* = \sum_{l,k} X_{n,a_l} X_{n,a_k} = \sum_l X^2_{n,a_l} = \sum_l \sum_{j=a_l-n}^{2a_l+1-n} E_{j,j}.$$

Como los intervalos $[a_l - n, 2a_l + 1 - n]_l$ son disjuntos dos a dos (ya que $a_{l+1} - n > 2a_l - n + 1$), los $E_{j,j}$ no se repiten y luego $X_n X_n^* \leq Id_{B(l_2)}$. Deducimos que $\|X_n\| \leq 1$.

□

Para probar que el operador definido en el teorema anterior no es polinomialmente acotado, necesitaremos usar un teorema relativo al álgebra del disco. Su demostración se puede encontrar en [23] Teorema 10.8.

Teorema 3.4.2. *Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números naturales tal que $2a_n + 1 < a_{n+1}$. Sea $\Gamma : A(\mathbb{D}) \to l_2$ definida como $\Gamma(f) = (f_{a_1}, f_{a_2}, ...)$ si $f = \sum_{k=0} f_k z^k$. Entonces Γ es contractiva y sobreyectiva.*

Teorema 3.4.3 (Lebow)**.** *Sea a_n una sucesión tal que $2a_n + 1 < a_{n+1}$ y sea $X = \sum_k E_{a_k,a_k}$. Entonces el operador de Foguel con símbolo X es power-bounded pero no polinomialmente acotado.*

Demostración. Consideremos $\overline{h} \in l_2$ con $h_j = \frac{1}{n+1}$ y $(b_n)_n = (2a_n + 1)_n$. Como $2b_n + 1 = 2(2a_n + 1) + 1 < 2a_{n+1} + 1 = b_{n+1}$, podemos aplicar el teorema anterior con $(b_n)_n$. Luego existe $f \in A(\mathbb{D})$ tal que $f(z) = \sum_{k=0} f_k z^k$ con $f_{2a_k+1} = \frac{1}{k+1}$.

Supongamos que el operador de Foguel es polinomialmente acotado. Recordemos que un operador polinomialmente acotado induce un operador $\rho_F : A(\mathbb{D}) \to B(H)$ acotado (ver Corolario 1.2.19), donde $\rho_F(\sum_k f_k z^k) = \sum_k f_k F^k$. Como

$$F^k = \begin{pmatrix} S^* & X_k \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

si consideramos $\rho_F(f)$ y proyectamos en la $(1, 2)$-coordenada, obtenemos que el operador $Y = \sum_k f_k X_k$ es acotado. Recordemos también que por la ecuación (3.17) X_k no es otra cosa que $\sum_l X_{k,a_l}$, donde X_{k,a_l} es $\sum_{j=0}^{k-1} E_{a_l-j,a_l-k+j+1}$.

Fijemos n y r y calculemos $\langle X_{n,r} e_0, e_0\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle X_{n,r} e_0, e_0\rangle &= \left\langle \sum_j E_{r-j,r-n+j+1} e_0, e_0 \right\rangle = \langle \delta_{r,j} e_{r-n+j+1}, e_0\rangle \\ &= \langle e_{2r-n+1}, e_0\rangle = \delta_{2r,n-1}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\langle X_k e_0, e_0\rangle = \begin{cases} f_k & \text{si existe } l \text{ con } 2a_l + 1 = k \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Finalmente $\langle Y e_0, e_0\rangle = \sum_k f_{2a_k+1} = \sum_k \frac{1}{k} = \infty$.

□

Bibliografía

[1] Aleksandrov and Peller, "Hankel operators and similarity to a contraction", Internat. Math. Res. Notices (1996), 263-275. 2

[2] Arveson, William. "The canonical anticommutative relations", Berkeley, (1998), 1-11. 66

[3] Bourgain, J. "On the similarity problem for polynomially bounded operators on Hilbert space", Israel J. Math. 54 (1986), 227-241. 2

[4] Conway, John. "Subnormal Operators", Pitman, Boston. (1981): 1-10. 30

[5] Conway, John. "A course in Functional Analysis", Springer New york. (1985). 6

[6] Davidson K y Paulsen, V."Polynomially bounded operators", J. Reine Angew. Math., 487 (1997): 153-170. 2, 49

[7] Foguel, S.R. "A counterexample to a problem of Sz.Nagy", Amer. Math. Soc. (1964):788-790. 2, 69

[8] Halmos, P.R. "On Foguel's answer to Nagy's question." Amer. Math. Soc. (1964): 791-793. 1, 2

[9] Halmos, P.R. "Ten Problems in Hilbert Space", Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970): 887-933. 2

[10] Helson, H. "Lectures on invariant subspaces". Acad, Press. (1964): 51-65. 55

[11] Krein, M. G. y Rutman, M.A. "Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space", Amer. Math. Soc. (1950). 27, 28

[12] Kadison, "R. On the orthogonalization of operator representations", Amer. J. Math. 77 (1955), 600-620. 45

[13] Kisliakov, "Operators (not) similar to a contraction: Pisiers counterexample via singular integrals", Zap. Nauchn. Semin. LOMI 247 (1997), 79-95 (Russian); English transl.: J. Math. Sci. 101 (2000), 3093- 3103. 2, 49

[14] Lebow, Arnold "A power-bounded operator that is not polynomially bounded" Michigan Math. Journal (1968):397-399. 2, 69

[15] Mc Carthy, J "On Pisier's construction of a polynomially bounded operator not similar to a contraction", M.S.R.I and Washington university: 1996. 2, 49

[16] Sz-Nagy. "On uniformly bounded linear transformations on Hilbert space", Acta Sci. Math. 11 (1946-1948):152-157. 1, 46

[17] Sz-Nagy. "Completely continuous operators with uniformly bounded iterates", Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci. 4 (1959): 89-92. 1

[18] Nehari,Z "On bounded bilinear forms", Ann. Math. 65 (1957), 153-162 2, 49

[19] Von Neumann, J. "Eine Spektraltheorie für allgemeine operatoren, eines unitären raumes". Math. Nach.4 (1951): 258-281. 1

[20] Nikolskii, N "Operators, Functions and Systems, An easy Reading, volume 1", Amer. Math. Soc. 2002. 58

[21] Page, L "Bounded and compact vectorial Hankel operators", Trans. Amer. Math. Soc. 150 (1970), 529-539 2, 49

[22] Paulsen, Vern I. "Every completely polynomially bounded operator is similar to a contraction", Journal of functional analysis 55.1 (1984): 1-17. 2, 33

[23] Paulsen, Vern I. "Completely Bounded Maps and Operator Algebras", Cambridge Press. (2002). 70

[24] Peller, V. "Estimates of functions of power bounded operators on Hilbert space", J. Oper. Theory 7 (1982): 341-372.

[25] Peller, V. "Estimates of functions of Hilbert space operators, similarity to a contraction and related function algebras", Research Problems, Springer Lecture Notes 1043 (199) (1984): 199-204. 2

[26] Peller, V. "Hankel Operators and their applications", 2002.

[27] Pisier, Gilles. "A polynomially bounded operator on Hilbert space which is not similar to a contraction", J. Amer.Math. Soc. 10 (1997):351-369. 2, 49

[28] Pisier, Gilles. "Similarity problems and completely bounded maps", (2001). 58

[29] Pisier, Gilles. "Similarity promblems and lenght", Tai. J Math. 5 (2001):1-17.

[30] Smith, R.R. "Completely bounded maps between C^*", J. London Mathh. Soc. 27 (1983):157-166. 28, 36

[31] Varopoulus, N.Th " On an inequality of von Neumann and an application of the metric theory of tensor products to operator theory", J. Funct. Anal. 16 (1974): 83-100. 25