UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

ACCIONES PARCIALES DE ALGEBRAS DE HOPF

Mariano Leonardo Rean

Director: Andrea Solotar

Marzo de 2015

Agradecimientos

Está claro que nada de esto hubiera sido posible sin la guía, el aliento y la contención de muchísima gente que de alguna u otra manera se cruzó por mi camino.

A Andrea que siempre estuvo presente y animándome a mejorar un poco más.

A mi familia por apoyarme en todo momento.

A mis amigos de la vida y de la facu por acompañarme todo el trayecto.

A mis alumnos y a mis docentes por enseñarme a ser un mejor matemático.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Las acciones parciales aparecieron en el contexto de las C^*-álgebras, principalmente en trabajos de Ruy Exel [E1, E2, E3, E4]. La idea principal consiste en obtener generalizaciones del producto cruzado de una C^*-álgebra por un automorfismo.

La teoría de acciones parciales se extendió luego al contexto algebraico, ver por ejemplo [DE, DEP, DES, DES2, DFP], donde se consideran acciones parciales de grupos sobre álgebras asociativas. En una etapa posterior comenzaron a considerarse las acciones parciales de álgebras de Hopf [AB1, AB2, CJ]. El primer ejemplo de esta situación es el de acciones parciales del álgebra de Hopf kG, con k un cuerpo y G un grupo, obtenido a partir de la linearización de una acción parcial del grupo G sobre un k-espacio vectorial. Cuando G es un grupo finito, el dual k^G del álgebra de grupo es también un álgebra de Hopf. Es bien conocido que dar una acción de k^G en un espacio vectorial equivale a dar una G-graduación del espacio. La teoría de acciones parciales de álgebras de Hopf nos permite entonces considerar graduaciones parciales.

A su vez, el estudio de las álgebras graduadas puede generalizarse a las categorías k-lineales, considerando entonces graduaciones de los espacios vectoriales de morfismos entre dos objetos dados de la categoría. Mas aún, las graduaciones de una categoría k-lineal están en correspondencia con los cubrimientos de Galois de la categoría [CM] y por lo tanto el estudio de estas graduaciones permite definir un grupo fundamental intrínseco de la categoría [CRS]. Estos últimos trabajos dan lugar a preguntarse qué información sobre la categoría de partida podría obtenerse mediante el conocimiento de sus graduaciones parciales. Este punto de vista fue el que originó el artículo [AAB], que es explorado en profundidad en esta tesis.

Uno de los principales problemas al trabajar con acciones parciales es exhibir ejemplos en los que la acción parcial no provenga de una acción en el sentido habitual. Por ejemplo, es conocido [ABV] que es imposible encontrar tales ejemplos en el caso en que el álgebra de Hopf es el álgebra envolvente de un álgebra de Lie.

El contenido de esta tesis es el siguiente. En el Capítulo 2 recordamos algunas nociones básicas sobre álgebras de Hopf.

En el Capítulo 3 analizamos la noción de acción parcial de un grupo.

En el Capítulo 4 resumimos las nociones sobre categorías que serán necesarias para el resto de la tesis.

Finalmente, en el Capítulo 5 estudiamos las H-módulo categorías parciales, donde H es un álgebra de Hopf. Damos demostraciones detalladas de los resultados obtenidos en [AAB], analizamos algunos ejemplos y proponemos otros.

A lo largo de toda la tesis, k será un cuerpo. Todos los productos tensoriales son sobre el cuerpo k salvo que se indique lo contrario.

Capítulo 2

Álgebras de Hopf

En este capítulo recordaremos algunas nociones básicas de álgebras de Hopf. Seguiremos la presentación del tema hecha por Susan Montgomery en [M].

2.1. Álgebras y coálgebras

Empezaremos por reescribir la asociatividad del producto y la propiedad del elemento neutro de un álgebra en términos de morfismos para poder dualizarlas.

Definición 2.1.1. Una estructura de k-**álgebra unitaria** es un k-espacio vectorial A junto con dos morfismos k-lineales, la multiplicación $m : A \otimes A \to A$ y la unidad $u : k \to A$, tales que los siguientes diagramas son conmutativos:

1. asociatividad

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"] & A \end{tikzcd}$$

2. unidad

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\ k \otimes A \arrow[ur, "u\otimes id"] \arrow[dr] & & A \otimes k \arrow[ul, "id\otimes u"'] \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Los dos morfismos inferiores en el último diagrama se corresponden con la multiplicación por escalares. Notar que el elemento unidad está dado por $1_A = u(1_k)$.

Definición 2.1.2. Para cualquier par de k-espacios vectoriales V y W, el morfismo **twist** $\tau : V \otimes W \to W \otimes V$ se define sobre los tensores elementales como $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$, $\forall v \in V$, $\forall w \in W$, y se extiende k-linealmente.

Podemos expresar la conmutatividad del álgebra A mediante la fórmula $m \circ \tau = m$. Ahora vamos a dualizar la noción de álgebra.

Definición 2.1.3. Una k-**coálgebra counitaria** es un k-espacio vectorial C junto con dos morfismos k-lineales, la comultiplicación $\Delta : C \to C \otimes C$ y la counidad $\epsilon : C \to k$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

1. coasociatividad

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes id"] \\ C \otimes C \arrow[r, "id\otimes\Delta"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

2. counidad

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\ k \otimes C & & C \otimes k \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\epsilon\otimes id"] \arrow[ur, "id\otimes\epsilon"'] & \end{tikzcd}$$

donde $f(c) = 1 \otimes c$ y $g(c) = c \otimes 1$.

Notemos que por 2.1.3 2. resulta que Δ es inyectiva, de la misma forma que por 2.1.1 2. m resulta suryectiva.

Decimos que C es **coconmutativa** si $\tau \circ \Delta = \Delta$.

Definición 2.1.4. Sean C y D dos coálgebras con sus respectivas comultiplicaciones Δ_C y Δ_D, y counidades ϵ_C y ϵ_D. Decimos que:

1. un morfismo k-lineal $f : C \to D$ es un **morfismo de coálgebras** si $\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C$ y $\epsilon_D \circ f = \epsilon_C$.

2. Un subespacio $I \subseteq C$ es un **coideal** si $\Delta_C I \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ y $\epsilon_C(I) = 0$.

   A partir de un coideal I de la coálgebra C podemos obtener una nueva coálgebra dada por el k-espacio vectorial C/I con la comultiplicación inducida por Δ_C. Recíprocamente, si C/I es una coálgebra con la comultiplicación inducida por Δ_C entonces I resulta un coideal de C.

Ejemplo 2.1.5. Sea X un conjunto de cardinal mayor o igual a dos, y consideremos el k-espacio vectorial C con base X. Definimos $\Delta : C \to C \otimes C$ por $\Delta(c) = c \otimes c$ y $\epsilon : C \to k$ por $\epsilon(c) = 1$ para todo $c \in X$, y extendemos linealmente. De esta forma $(C,\, \Delta,\, \epsilon)$ resulta una k-coálgebra. Sea I el subespacio de C generado por $x - x'$ con $x, x' \in X$ y $x \neq x'$. Podemos ver fácilmente que I es un coideal de C ya que $\epsilon(x - x') = 0$ y $\Delta(x - x') = x \otimes x - x' \otimes x' = x - x' \otimes x + x' \otimes x - x' \in I \otimes C + C \otimes I$.

Observación 2.1.6. Varios resultados sobre álgebras tienen sus correspondientes versiones para coálgebras. Por ejemplo, el núcleo de todo morfismo de coálgebras $f : C \to D$ es un coideal de C, y la imagen es una subcoálgebra de D. También son válidos los teoremas de isomorfismo en coálgebras, en particular, el cociente $C/\mathrm{Ker}\,(f)$ es isomorfo a $\mathrm{Im}(f)$ [DNR, 1.4.11].

2.2. Espacios duales

Veamos ahora cómo se relacionan las estructuras de álgebra y coálgebra por medio de los espacios duales. Dado un k-espacio vectorial V, denotamos por $V^* = Hom_k(V, k)$ al espacio dual de V.

Definición 2.2.1. Dada una transformación k-lineal $\phi : V \to W$, la **transpuesta** de ϕ es una transformación k-lineal $\phi^* : W^* \to V^*$, tal que:

$$\phi^*(f)(v) = f(\phi(v)),$$

$\forall f \in W^*$, $v \in V$.

El siguiente lema muestra cómo obtener un álgebra a partir de una coálgebra.

Lema 2.2.2. *Si C es una coálgebra, entonces C^* es un álgebra, con la multiplicación dada por $m = \Delta^*$ y la unidad $u = \epsilon^*$. Además, si C es coconmutativa, entonces C^* es conmutativa.*

Demostración. La demostración se obtiene dualizando los diagramas y observando que $C^* \otimes C^* \subseteq (C \otimes C)^*$ por lo que podemos restringir Δ^* para obtener un morfismo $m : C^* \otimes C^* \to C^*$ dado por $m(f \otimes g)(c) = \Delta^*(f \otimes g)(c) = (f \otimes g)\Delta c$, $\forall f, g \in C^*, c \in C$. □

En cambio, si partimos de un álgebra A no siempre se obtiene una coálgebra dualizando. Por ejemplo, si A es de dimensión infinita, $A^* \otimes A^*$ es un subespacio propio de $(A \otimes A)^*$ y por lo tanto la imagen de $m^* : A^* \to (A \otimes A)^*$ podría no estar contenida en $A^* \otimes A^*$.

Definición 2.2.3. Sea A una k-álgebra. El **dual finito** de A se define como $A^\circ = \{f \in A^* \mid f(I) = 0$, para algún ideal I de A tal que $dim_k(A/I) < \infty\}$.

Observar que si A es de dimensión finita entonces $A^\circ = A^*$. Basta con notar que cualquier $f \in A^*$ se anula en el ideal $I = \{0\}$ y además $dim_k(A/I) = dim_k(A) < \infty$.

Observación 2.2.4. En [DNR, 1.5.6] se prueba que A° es la mayor coálgebra contenida en A^* que está inducida por m. Notar que puede pasar que $A^\circ = \{0\}$, por ejemplo si A es una k-álgebra simple de dimensión infinita sobre k como ese el caso de una extensión de cuerpos de grado infinito. En particular, esto implica que dualizando no se obtiene una coálgebra.

En [S] se pueden ver los resultados básicos sobre $()^\circ$. Nos interesa en particular la siguiente

Proposición 2.2.5. *(Proposition 6.0.2 de [S]) Si A es una k-álgebra, entonces A° es una k-coálgebra con comultiplicación $\Delta = m^*$ y counidad $\epsilon = u^*$. Además, si A es conmutativa, entonces A° es coconmutativa.*

Notemos que, explícitamente, la comultiplicación está dada por:

$$\Delta f(a \otimes b) = m^* f(a \otimes b) = f(ab),$$

$\forall a, b \in A$.

2.3. Biálgebras

Veamos ahora una estructura que combina las nociones de álgebra y coálgebra.

Definición 2.3.1. Un k-espacio vectorial B es una **biálgebra** si existen morfismos $m : B \otimes B \to B$, $u : k \to B$, $\Delta : B \to B \otimes B$ y $\epsilon : B \to k$ tales que (B, m, u) es un álgebra, (B, Δ, ϵ) es una coálgebra, y Δ y ϵ son morfismos de álgebras.

Pedir que Δ y ϵ sean morfismos de álgebras es equivalente a pedir que m y u sean morfismos de coálgebras. Esto puede observarse directamente de los correspondientes diagramas.

Las nociones de morfismo de biálgebras y biideal se definen de la forma esperada. Dado un subespacio I de B, el cociente B/I es una biálgebra si y sólo si I es un biideal de B.

A continuación presentaremos dos ejemplos clásicos.

Ejemplos 2.3.2.

1. Álgebra de grupo

   Sea G un grupo y $B = kG$ el álgebra de grupo. Si definimos $\Delta : kG \to kG \otimes kG$ como el único morfismo k-lineal tal que $\Delta g = g \otimes g$ y $\epsilon : kG \to k$ como el único morfismo k-lineal tal que $\epsilon(g) = 1$, $\forall g \in G$, entonces $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$ es una biálgebra.

2. Álgebra envolvente universal

   Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie. Sea $B = U(\mathfrak{g})$, el álgebra definida por

   $$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/_{\langle x \otimes y - y \otimes x - [x,y] \rangle_{x,y \in \mathfrak{g}}},$$

   donde notamos con $T(\mathfrak{g})$ al álgebra tensorial sobre k generada por $\mathfrak{g}$.

   Se puede dar a B una estructura de biálgebra definiendo $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ como el único morfismo k-lineal tal que $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ y $\epsilon : U(\mathfrak{g}) \to k$ como el único morfismo k-lineal tal que $\epsilon(x) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$.

Notar que ambos ejemplos son coconmutativos.

A continuación vamos a definir ciertos subconjuntos importantes de una coálgebra que nos serán útiles más adelante.

Definición 2.3.3. Sea C una coálgebra, y sea $c \in C$.

1. c se dice un elemento de **tipo grupo** si $\Delta c = c \otimes c$ y $\epsilon(c) = 1$. El conjunto de elementos de tipo grupo de C se denota por $G(C)$.

2. Dados $g, h \in G(C)$, el elemento c se dice g, h-**primitivo** si $\Delta c = c \otimes g + h \otimes c$. El conjunto de todos los g, h-primitivos se denotará $P_{g,h}(C)$. Si C es una biálgebra, los elementos $1, 1$-primitivos se llaman simplemente primitivos y notaremos $P(B) = P_{1,1}(B)$.

No es difícil probar que un conjunto de elementos de tipo grupo es linealmente independiente sobre k [S, 3.2.1]. En consecuencia, si $B = kG$, entonces $G(B) = G$. En efecto, la inclusión $G \subseteq G(B)$ es clara, mientras que cualquier elemento de $B \setminus G$ es combinación k-lineal de elementos de G y por lo tanto no puede estar en $G(B)$.

En el caso $B = U(\mathfrak{g})$ y $car(k) = 0$, $P(B) = \mathfrak{g}$ [M, 5.5.3].

A continuación daremos otro ejemplo de biálgebra.

Ejemplo 2.3.4. Si B es una biálgebra cualquiera, entonces B° resulta también una biálgebra [M, 9.1] . En particular, si G es un grupo finito y $B = kG$ obtenemos la biálgebra $B^\circ = k^G$ con la siguiente estructura de álgebra

$$(ff')(x) = \Delta^*(f \otimes f')(x) = (f \otimes f')(x \otimes x) = f(x)f'(x), \tag{2.3.1}$$

para $x \in G, f, f' \in k^G$; y la estructura de coálgebra está dada por

$$\Delta f(x \otimes y) = m^* f(x \otimes y) = f(xy), \tag{2.3.2}$$

para $x, y \in B, f \in k^G$. En este caso, podemos dar una descripción explícita de la comultiplicación. Sea $\{p_x \mid x \in G\}$ una base de k^G, dual a la base de los elementos tipo grupo de kG, es decir, $p_x(y) = \delta_{x,y}$, para $x, y \in G$. Es inmediato verificar que

$$\Delta p_x = \sum_{uv=x} p_u \otimes p_v. \tag{2.3.3}$$

2.4. Convolución y notación de Sweedler

Antes de pasar a la definición de álgebra de Hopf, vamos a dar una nueva definición junto con una notación muy útil.

Definición 2.4.1. Sea C una k-coálgebra y A una k-álgebra. El k-espacio vectorial $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ tiene estructura de álgebra unitaria con el **producto de convolución**:

$$(f * g)(c) = m \circ (f \otimes g)(\Delta c), \tag{2.4.1}$$

$\forall f, g \in \mathrm{Hom}_k(C, A), c \in C$. El morfismo $u\epsilon$ resulta la unidad en $Hom_k(C, A)$.

Notemos que ya hemos usado este producto en el Lema 2.1.6 para $\mathrm{Hom}_k(C, k)$. El **producto de anticonvolución** en $Hom_k(C, A)$ está definido por:

$$(f \times g)(c) = m \circ (f \otimes g)(\tau \circ \Delta(c)),$$

$\forall f, g \in Hom_k(C, A)$, $c \in C$.

Vamos ahora a recordar la notación de Sweedler.

Sea C una coálgebra con comultiplicación $\Delta : C \to C \otimes C$. Dado $c \in C$ escribiremos:

$$\Delta c = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Para simplificar aún más, en lo que sigue omitiremos los paréntesis. Esta notación es análoga a la utilizada en la física donde incluso el símbolo $\sum$ suele omitirse. La utilidad de esta notación se hace evidente al representar la aplicación sucesiva de la comultiplicación. Por ejemplo, nos permite escribir la coasociatividad en la forma:

$$\sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} = \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2,$$

y escribiremos este elemento en la forma $\sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$.
En general, iterando este procedimiento escribiremos:

$$\Delta_{n-1}(c) = \sum c_1 \otimes \ldots \otimes c_n.$$

Escribiendo las fórmulas correspondientes a la counidad y a la convolución resulta

$$c = \sum \epsilon(c_1)c_2 = \sum \epsilon(c_2)c_1,$$

y

$$(f * g)(c) = \sum f(c_1)g(c_2).$$

2.5. Álgebras de Hopf

Definición 2.5.1. Una k-álgebra de Hopf es una biálgebra H junto con un elemento $S \in \mathrm{Hom}_k(H, H)$ llamado antípoda , que es un inverso para la id_H con respecto al producto de convolución.

Usando la notación de Sweedler, la propiedad de la antípoda se expresa en la forma:

$$\sum (Sh_1)h_2 = \epsilon(h)1_H = \sum h_1(Sh_2), \tag{2.5.1}$$

$\forall h \in H$.

Un morfismo de álgebras de Hopf $f : H \to K$ es un morfismo de biálgebras tal que $f(S_H h) = S_K f(h), \forall h \in H$. Un **ideal de Hopf** es un subespacio I de H tal que $S(I) \subseteq I$ y tal que, además, los morfismos de estructura inducen una estructura de álgebra de Hopf en H/I.

Ejemplos 2.5.2. 1. El álgebra de grupo kG es un álgebra de Hopf, definiendo la antípoda por la fórmula $Sg = g^{-1}$ para cada $g \in G$. En realidad, ésta es la única forma posible de definirla, ya que en cualquier álgebra de Hopf H y para cualquier $g \in G(H)$, la ecuación (2.5.1) implica $Sg = g^{-1}$. En particular, todos los elementos de tipo grupo son inversibles en H.

2. El álgebra envolvente $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf, donde la antípoda se define por $Sx = -x$ para cada $x \in \mathfrak{g}$. De nuevo, esta fórmula es consecuencia de (2.5.1) ya que, en un álgebra de Hopf H cualquiera , si $x \in P(H)$ debe ser $Sx = -x$. En general, si $x \in P_{g,h}(H)$ entonces $Sx = -h^{-1}xg^{-1}$.

3. Para cualquier álgebra de Hopf H, resulta que H° es también un álgebra de Hopf con antípoda S^* ([M], 9.1.3).

4. El álgebra de Hopf no conmutativa y no coconmutativa de dimensión más chica tiene dimensión 4 sobre k y es única salvo isomorfismo para un cuerpo k dado con $car(k) \neq 2$. Está definida por generadores y relaciones por:

$$T_2 = \langle 1, g, x, xg \mid g^2 = 1, x^2 = 0, gx = -xg \rangle, \tag{2.5.2}$$

donde $\Delta g = g \otimes g,\ \Delta x = x \otimes 1 + g \otimes x,\ \epsilon(g) = 1,\ \epsilon(x) = 0$. Notar que $Sg = g^{-1}$, y $Sx = -gx$ ya que $g \in G(H)$ y $x \in P_{1,g}(H)$. Notar también que S tiene orden 4.

Este ejemplo es el primero de una familia infinita de álgebras de Hopf de dimensión finita con antípodas de orden $2n$ para cada $n > 1$ [T].

La siguiente es una propiedad muy importante para el cálculo de la antípoda.

Proposición 2.5.3. *Sea H un álgebra de Hopf con antípoda S.*

1. S es un anti-morfismo de álgebras; es decir

$$S(hk) = S(k)S(h),\ \forall h, k \in H,\ \text{y}\ S(1) = 1.$$

2. S es un anti-morfismo de coálgebras; es decir

$$\sum (Sh)_1 \otimes (Sh)_2 = \sum S(h_2) \otimes S(h_1),\ \forall h \in H,\ \text{y}\ \epsilon \circ S = \epsilon.$$

Para la demostración puede verse [S, 4.0.1].

2.6. Módulos y comódulos

Nos dedicaremos primero a expresar en términos diagramáticos qué quiere decir tener una estructura de módulos para luego dualizar a comódulos.

Definición 2.6.1. Sea A una k-álgebra, un A-**módulo** a izquierda es un k-espacio vectorial M junto con un morfismo k-lineal $\gamma : A \otimes M \to M$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

1.
$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "m\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\gamma"'] & A \otimes M \arrow[d, "\gamma"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\gamma"] & M \end{tikzcd}$$

2.
$$\begin{tikzcd} k \otimes M \arrow[r, "u\otimes id"] \arrow[dr] & A \otimes M \arrow[d, "\gamma"] \\ & M \end{tikzcd}$$

donde el morfismo inferior está dado por la multiplicación escalar.

Definición 2.6.2. Sea C una k-coálgebra, un C-**comódulo** a derecha es un k-espacio vectorial M junto con un morfismo k-lineal $\rho : M \to M \otimes C$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

1.
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho\otimes id"] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

2.
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\otimes 1"'] & M \otimes C \arrow[d, "id\otimes\epsilon"] \\ & M \otimes k \end{tikzcd}$$

Notaremos ${}_A\mathcal{M}$ la categoría de A-módulos a izquierda, y $\mathcal{M}^C$ la categoría de C-comódulos a derecha.

Sea C una coálgebra. Usando la notación de Sweedler para C-cómodulos a derecha podemos escribir $\rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1 \in M \otimes C$ con la convención de que $m_i \in C$ para $i \neq 0$.

Definición 2.6.3. Sean M y N comódulos a derecha, con los morfismos de estructura ρ_M y ρ_N respectivamente. Un **morfismo de comódulos** es un morfismo k-lineal $f : M \to N$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "f"'] & M \otimes C \arrow[d, "f\otimes id"] \\ N \arrow[r, "\rho_N"] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

es decir,

$$\sum f(m)_0 \otimes f(m)_1 = \sum f(m_0) \otimes m_1, \ \forall m \in M.$$

Ejemplos 2.6.4. 1. La coálgebra C es un C-comódulo a derecha con el morfismo de estructura $\rho = \Delta$.

2. Sea V un k-espacio vectorial y C una k-coálgebra. El k-espacio vectorial $V \otimes C$ tiene estructura de C-comódulo a derecha con el morfismo de estructura inducido por Δ, es decir, $\rho(x \otimes c) = \sum x \otimes c_1 \otimes c_2$ para $x \in V$ y $c \in C$.

3. Si M es un C-comódulo a derecha y $N \subseteq M$ con $\rho(N) \subseteq N \otimes C$, entonces N es un subcomódulo de M. En el caso particular en el que $M = C$, los subcomódulos son los coideales a derecha.

El siguiente lema clásico muestra la estrecha relación entre módulos y comódulos.

Lema 2.6.5. *1. Si M es un C-comódulo a derecha, entonces M es un C^*-módulo a izquierda.*

2. Sea M un A-módulo a izquierda. M es un A°-comódulo si y sólo si $\{A \cdot m\}$ es de dimensión finita, para todo $m \in M$.

Demostración. 1. Basta con definir $f \cdot m = \sum f(m_1)m_0$ para $f \in C^*$ y $m \in M$.

2. ($\Leftarrow$) Sea $m \in M$ y consideremos $\{m_1, \ldots, m_n\}$ una base de $A \cdot m$. Para cada $a \in A$ existen elementos $f_i(a)$ en k $(1 \leq i \leq n)$ tales que $a \cdot m = \sum_{i=1}^n f_i(a)m_i$. Notemos que $I = \mathrm{Ker}\,(A \xrightarrow{\phi} \mathrm{End}_k(A \cdot m))$ es un ideal de A de codimensión finita ya que $A/I \cong \mathrm{Im}(\phi)$ tiene dimensión finita al ser un subespacio de $\mathrm{End}_k(A \cdot m)$. Como además $f_i(I) = 0$, se sigue que $f_i \in A^\circ$, $\forall i = 1, \ldots, n$, y así M resulta un A°-comódulo con estructura dada por $\rho : M \to M \otimes A^\circ$, tal que $\rho(m) = \sum_i m_i \otimes f_i$.

($\Rightarrow$) Se deduce de la fórmula en 1. ya que en este caso $A \cdot m$ está generado por el conjunto $\{m_0\}$.

$\square$

En general, la recíproca de 1. no es cierta. Un C^*-módulo que resulta C-comódulo del modo natural se dice **racional**. En [S] se prueba que todo módulo racional finitamente generado es de dimensión finita. Con esto, podemos ver un ejemplo de módulo no racional:

Ejemplo 2.6.6. Sea C el espacio vectorial con base $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$. Definimos en C la estructura de coálgebra dada por $\Delta(c_n) = \sum_{i=0}^{n} c_i \otimes c_{n-i}$ y $\epsilon(c_n) = \delta_{0,n}$. Consideremos en C^* los elementos X^i dados por $X^i(c_j) = \delta_{i,j}$. Notar que $\epsilon = 1_{C^*} = X^0$ y $X^iX^j(c_n) = \delta_{i+j,n}$, es decir, $X^iX^j = X^{i+j}$. Por lo tanto

$$C^* = \{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i X^i \mid \lambda_i \in k\},$$

y la identificación de X con la variable da un isomorfismo entre C^* y el anillo de series de potencias en una variable.

Resulta que C^* no es un C^*-módulo racional a izquierda ya que el módulo generado por el 1 no es de dimensión finita.

Proposición 2.6.7. *Sea $C = kG$. Un k-espacio vectorial M es un kG-comódulo a derecha si y sólo si M es un k-espacio vectorial G-graduado, es decir, $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Escribamos $\rho(m) = \sum m_g \otimes g$, donde $m \in M$. De 1.6.2 1. se sigue que $(m_g)_h = \delta_{g,h} m_g$ y por lo tanto $\rho(m_g) = m_g \otimes g$. Luego, para $M_g = \{m_g \mid m \in M\}$ se tiene que la suma es directa. Además, por 1.6.2 2., $\sum m_g = m$, y por lo tanto $\bigoplus_{g\in G} M_g = M$.

($\Leftarrow$) Basta con definir $\rho(m) = m \otimes g$, para cada $m \in M_g$.

□

Ahora, si $A = kG$ y M es un A-módulo, entonces por el Lema 1.6.4, M es un $(kG)^\circ$-comódulo si y sólo si $G \cdot m$ genera un espacio de dimensión finita, para todo $m \in M$. Es decir, si y sólo si la acción de G es localmente finita.

Ejemplos 2.6.8.

1. Sea C una coálgebra. Por (2.6.5), a partir de la estructura de C-comódulo a derecha de C obtenemos una estructura de C^*-módulo a izquierda dada por:
$$f \rightharpoonup c = \sum \langle f, c_2\rangle c_1,$$
para $f \in C^*$, $c \in C$.

   Esta acción es la transpuesta de la multiplicación a derecha en C^*, es decir
$$\langle g, f \rightharpoonup c\rangle = \langle gf, c\rangle.$$

   También se tiene una acción a izquierda dada por
$$c \leftharpoonup f = \sum \langle f, c_1\rangle c_2,$$
y es la transpuesta de la multiplicación a izquierda en C^*.

2. De manera análoga al ejemplo anterior, a partir de una k-álgebra A podemos definir una acción a izquierda de A en A^*, que es la transpuesta de la multiplicación a izquierda en A, es decir

$$\langle a \rightharpoonup f, b\rangle = \langle f, ba\rangle,$$

para $f \in A^*$, $a, b \in A$.

De la misma forma se define la acción a derecha $f \leftharpoonup a$ como la transpuesta de la multiplicación a izquierda en A.

Capítulo 3

Acciones parciales de grupos

En este capítulo introduciremos las nociones de acción parcial de un grupo en un conjunto y, más en particular, en una k-álgebra. Veremos que a cada grupo G puede asociarse un semigrupo inverso $S(G)$ de forma que las acciones parciales de G se corresponden con acciones (totales) de $S(G)$ [E4]. También estudiaremos en qué casos las acciones parciales se obtienen como restricción de una acción global [DE]. Por último, daremos un ejemplo de acción del álgebra de grupo kG en un álgebra a partir de una acción parcial del grupo G.

3.1. Definiciones básicas

Definición 3.1.1. Sea S un conjunto con una operación binaria $* : S \times S \to S$. Decimos que $(S, *)$ es un **semigrupo** si se cumple la propiedad asociativa:

$$(s * s') * s'' = s * (s' * s''),$$

para $s, s', s'' \in S$.

Escribiremos entonces xyz para $(x * y) * z = x * (y * z)$, sin aclarar el orden y omitiendo el símbolo $*$.

Definición 3.1.2. Un semigrupo S se dice un **semigrupo inverso** si, para cada $x \in S$, existe un único $x^* \in S$ tal que:

(i) $xx^*x = x$,

(ii) $x^*xx^* = x^*$.

Ejemplos 3.1.3. 1. Todo grupo G es un semigrupo inverso donde, dado $g \in G$, $g^* = g^{-1}$.

2. Sea X un conjunto. Dar una función parcial en X consiste en dar un par de subconjuntos A y B de X y una función $\phi : A \to B$. Sea $\mathcal{I}(X)$ el conjunto de funciones parciales y biyectivas de X. El conjunto $\mathcal{I}(X)$ es un semigrupo inverso con la estructura multiplicativa dada por la composición de funciones parciales en el mayor dominio donde tenga sentido, es decir, si ϕ y ψ son elementos de $\mathcal{I}(X)$ entonces $Dom(\phi\psi) = \psi^{-1}(Im(\psi) \cap Dom(\phi))$ e $Im(\phi\psi) = \phi(Im(\psi) \cap Dom(\phi))$. Es fácil ver que para $f \in \mathcal{I}(X)$, $f^* = f^{-1}$ satisface (i) y (ii) de la definición anterior.

Pueden encontrarse en [H] resultados básicos sobre semigrupos inversos. Por ejemplo, el teorema de representación de Vagner-Preston dice que todo semigrupo inverso es isomorfo a un subsemigrupo de $\mathcal{I}(X)$ para algún conjunto X.

Definición 3.1.4. Una **acción** del semigrupo inverso S en el conjunto X es un morfismo de semigrupos $\pi : S \to \mathcal{I}(X)$.

Ejemplo 3.1.5. Sea S un semigrupo inverso. Definimos la función $\pi : S \to \mathcal{I}(S)$ de la siguiente forma: si $x \in S$, $\pi(x) = \pi_x$ es la función parcial $\pi_x : x^*S \to xx^*S$ dada por $\pi_x(y) = xy$. Notar que $\pi_x^{-1} = \pi_{x^*}$ y que π resulta un morfismo de semigrupos. Por lo tanto, π define una acción de S en S.

Definición 3.1.6. Una **acción parcial** del grupo G en el conjunto X es un par $\Theta = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$, donde, para cada $t \in G$, D_t es un subconjunto de X y $\theta_t : D_{t^{-1}} \to D_t$ es una función biyectiva, que satisface, para cada $r, s \in G$:

(i) $D_e = X$ y $\theta_e = id_X$, donde e denota el elemento neutro de G,

(ii) $\theta_r(D_{r^{-1}} \cap D_s) = D_r \cap D_{rs}$,

(iii) $\theta_r(\theta_s(x)) = \theta_{rs}(x)$, para $x \in D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}r^{-1}}$.

Podemos notar que la ecuación en (iii) tiene sentido ya que por (ii) vale que

$$\theta_s(D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}r^{-1}}) = D_s \cap D_{r^{-1}}.$$

Observar que una acción parcial de G en X es en particular una función $\theta : G \to \mathcal{I}(X)$. Dado $r \in G$, notaremos $\theta_r = \theta(r)$. Notar que la función θ no verifica la igualdad $\theta_r\theta_s = \theta_{rs}$ como uno quisiera, sino que resulta que θ_{rs} es una extensión de $\theta_r\theta_s$, es decir $\theta_r\theta_s \subseteq \theta_{rs}$. Para ver esto, notemos primero que $\theta_{s^{-1}} = \theta_s^{-1}$:

$$\theta_s(\theta_{s^{-1}}(x)) \overset{(iii)}{=} \theta_e(x) \overset{(i)}{=} x,$$

para $x \in D_s \cap D_{ss^{-1}} \overset{(i)}{=} D_s \cap X = D_s$.

De la misma forma, $\theta_{s^{-1}}(\theta_s(x)) = x$, para $x \in D_{s^{-1}}$.

Luego, el dominio de $\theta_r\theta_s$ es

$$\theta_s^{-1}(D_s \cap D_{r^{-1}}) = \theta_{s^{-1}}(D_s \cap D_{r^{-1}}) \overset{(ii)}{=} D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}r^{-1}},$$

que es un subconjunto del dominio de θ_{rs}.

3.2. El semigrupo inverso asociado a un grupo

Vamos a ver que a un grupo G siempre podemos asociarle un semigrupo inverso $S(G)$ de modo canónico, de manera tal que las acciones de $S(G)$ están en correspondencia con las acciones parciales de G [E4].

A lo largo de toda esta sección, G denotará un grupo. La propiedad fundamental de las acciones parciales que nos permitirá construir el semigrupo inverso es que, si bien θ_{rs} es sólo una extensión de $\theta_r\theta_s$, siempre vale que $\theta_r\theta_s\theta_s^{-1} = \theta_{rs}\theta_s^{-1}$. Esto es consecuencia directa de la propiedad (iii) de acción parcial.

Definición 3.2.1. Sea $S(G)$ el semigrupo universal definido a partir de generadores y relaciones de la siguiente manera: por cada elemento $t \in G$ tomamos un generador $[t]$, y por cada par de elementos $t, s \in G$ consideramos las relaciones

(i) $[s^{-1}][s][t] = [s^{-1}][st]$,

(ii) $[s][t][t^{-1}] = [st][t^{-1}]$,

(iii) $[s][e] = [s]$,

(iv) $[e][s] = [s]$.

Vamos a probar que $S(G)$ es un semigrupo inverso. Podemos notar que, como consecuencia de (i) y (iii), $[t][t^{-1}][t] = [t]$ para cualquier $t \in G$. Además, (iv) es consecuencia de los anteriores axiomas ya que

$$[e][s] = [ss^{-1}][s] = [s][s^{-1}][s] = [s].$$

Por la propiedad universal de semigrupos definidos a partir de generadores y relaciones, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.2.2. *Dado un semigrupo S y una función $f : G \to S$ que satisface:*

(i) $f(s^{-1})f(s)f(t) = f(s^{-1})f(st)$,

(ii) $f(s)f(t)f(t^{-1}) = f(st)f(t^{-1})$,

(iii) $f(s)f(e) = f(s)$,

existe un único morfismo de semigrupos $\tilde{f} : S(G) \to S$ tal que $\tilde{f}([t]) = f(t)$.

Proposición 3.2.3. *Existe un antiautomorfismo involutivo $* : S(G) \to S(G)$ tal que, para cada $t \in G$, $[t]^* = [t^{-1}]$.*

Demostración. Consideremos $S(G)^{op}$ el semigrupo opuesto, es decir, el semigrupo cuyo conjunto subyacente coincide con $S(G)$ y cuya multiplicación está dada por $\alpha \bullet \beta := \beta\alpha$ para $\alpha, \beta \in S(G)^{op}$.

Definimos $f : G \to S(G)^{op}$ por $f(t) = [t^{-1}]$. Es inmediato verificar las siguientes relaciones:

(i) $f(s^{-1}) \bullet f(s) \bullet f(t) = f(s^{-1}) \bullet f(st)$,

(ii) $f(s) \bullet f(t) \bullet f(t^{-1}) = f(st) \bullet f(t^{-1})$,

(iii) $f(s) \bullet f(e) = f(s)$,

para todo $s, t \in G$.

Por la proposición anterior, f se extiende a un morfismo $* : S(G) \to S(G)^{op}$, el cual visto como un morfismo de $S(G)$ en sí mismo, resulta un anti-automorfismo que satisface las propiedades deseadas.

$\square$

A continuación vamos a estudiar los idempotentes de $S(G)$ (Proposición 2.2.4) para poder luego, a partir de éstos, caracterizar los elementos de $S(G)$ (Proposición 2.2.5). Esta caracterización nos permitirá probar más adelante que $S(G)$ es un semigrupo inverso.

Recordemos que si S es un semigrupo, un elemento $\epsilon \in S$ se dice idempotente si $\epsilon^2 = \epsilon$.

Dado un grupo G y un elemento $t \in G$, sea $\epsilon_t = [t][t^{-1}]$.

Proposición 3.2.4. *Dados $t, s \in G$ se cumple que:*

(1) ϵ_t es un idempotente tal que $\epsilon_t^* = \epsilon_t$,

(2) $[t]\epsilon_s = \epsilon_{ts}[t]$,

(3) ϵ_t y ϵ_s conmutan.

Demostración. Vamos a usar que $[t][t^{-1}][t] = [t]$. La ecuación

$$\epsilon_t^2 = [t][t^{-1}][t][t^{-1}] = [t][t^{-1}] = \epsilon_t,$$

nos dice que ϵ_t es idempotente. Por otra parte, como $*$ es un antiautomorfismo resulta

$$\epsilon_t^* = [t^{-1}]^*[t]^* \overset{(3,2,3)}{=} [t][t^{-1}] = \epsilon_t,$$

y queda probado (1). (2) es consecuencia de (i) y (ii) de la Proposición 2.2.1:

$$[t]\epsilon_s = [t][s][s^{-1}] \overset{(ii)}{=} [ts][s^{-1}] = [ts][s^{-1}t^{-1}][ts][s^{-1}] \overset{(i)}{=} [ts][s^{-1}t^{-1}][t] = \epsilon_{ts}[t].$$

Finalmente, de (2) se deduce que:

$$\epsilon_t\epsilon_s = [t][t^{-1}]\epsilon_s = [t]\epsilon_{t^{-1}s}[t^{-1}] = \epsilon_s[t][t^{-1}] = \epsilon_s\epsilon_t.$$

$\square$

Proposición 3.2.5. *Todo elemento $\alpha \in S(G)$ admite una descomposición de la forma:*

$$\alpha = \epsilon_{r_1} \dots \epsilon_{r_n}[s],$$

donde $n \geq 0$ y $r_1, \dots, r_n, s$ son elementos de G. Además, podemos elegir los r_i de forma tal que

(i) $r_i \neq r_j$ para $i \neq j$,

(ii) $r_i \neq s$ *y* $r_i \neq e$ *para todo* i.

Demostración. Consideremos el subconjunto S que consiste de aquellos α de $S(G)$ que admiten una descomposición tal como en el enunciado. En particular, para cada $s \in G$ el elemento $[s]$ está en S (notar que en este caso $n = 0$). Como estos elementos forman un conjunto de generadores de $S(G)$, basta ver que S es cerrado para el producto. Para ello, dado $\alpha = \epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_n}[s]$, alcanza con verificar que $\alpha[t]$ está en S, cualquiera sea $t \in G$.

Primero notemos que

$$[s][t] = [s][s^{-1}][s][t] = [s][s^{-1}][st] = \epsilon_s[st],$$

con lo cual

$$\alpha[t] = \epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_n}[s][t] = \epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_n}\epsilon_s[st] \in S.$$

Con respecto a la segunda parte, sea ahora $\alpha = \epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_n}[s]$, es fácil eliminar los idempotentes ϵ_{r_j} repetidos ya que conmutan entre sí. Por otro lado, ϵ_e es el elemento neutro de $S(G)$ por lo que puede eliminarse trivialmente. Por último, veamos que ϵ_s resulta redundante. Si algún $r_i = s$, entonces $\epsilon_{r_i} = [s][s^{-1}]$ y usando la conmutatividad de los idempotentes,

$$\alpha = \epsilon_{r_1} \ldots \widehat{\epsilon_{r_i}}, \ldots \epsilon_{r_n}[s][s^{-1}][s] = \epsilon_{r_1} \ldots \widehat{\epsilon_{r_i}}, \ldots \epsilon_{r_n}[s].$$

□

Definición 3.2.6. Diremos que $\alpha \in S(G)$ está en forma **estándar** si $\alpha = \epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_n}[s]$, donde se verifican las condiciones (i) y (ii) de (3.2.5).

Proposición 3.2.7. *Para cada* $\alpha \in S(G)$*, existe* $\alpha^* \in S(G)$ *que verifica* $\alpha\alpha^*\alpha = \alpha$ *y* $\alpha^*\alpha\alpha^* = \alpha^*$.

Demostración. Escribiendo α en su forma estándar $\alpha = \epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_n}[s]$ vemos que

$$\alpha\alpha^*\alpha = \epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_n}[s][s^{-1}]\epsilon_{r_n} \ldots \epsilon_{r_1}\epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_n}[s] \overset{(3,2,4)}{=} \epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_n}[s][s^{-1}][s] = \alpha.$$

La otra igualdad se deduce de la primera junto con el hecho que $*$ es un antiautomorfismo involutivo de $S(G)$.

□

Para probar que $S(G)$ es un semigrupo inverso queda por ver la unicidad del elemento α^*. Para esto nos será de utilidad estudiar ciertas representaciones de $S(G)$.

3.3. Representaciones de $S(G)$

Usaremos el término **representación** de $S(G)$ para referirnos a cualquier morfismo de $S(G)$ en un semigrupo. Por ejemplo, podemos considerar el morfismo $\delta : S(G) \to G$ que se obtiene por medio de la Proposición 3.2.2, que queda determinado por $\delta([t]) = t$. Dado un $\alpha \in S(G)$, llamaremos **grado** de α al elemento $\delta(\alpha) \in G$. Notar que $\delta(\epsilon_t) = tt^{-1} = e$, cualquiera sea $t \in G$, y por lo tanto $\delta(\epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_n}[s]) = s$.

Consideremos ahora el conjunto $P_e(G)$ formado por todos los subconjuntos finitos de G que contienen al elemento neutro e. Nos va a interesar una representación dada por un morfismo de $S(G)$ en el semigrupo $\mathcal{F}(P_e(G)) = \{\phi | \phi : P_e(G) \to P_e(G)\}$ con la operación de composición.

Dado $t \in G$, vamos a denotar ϕ_t a la función $\phi_t : P_e(G) \to P_e(G)$ dada por $\phi_t(E) = tE \cup \{e\}$, para cada $E \in P_e(G)$, donde $tE = \{ts : s \in E\}$.

Notar que, como $e \in E$, podemos escribir $\phi_t(E) = tE \cup \{t, e\}$.

Proposición 3.3.1. *(Proposition 3.1 de [E4]) Existe una única representación $\Lambda : S(G) \to \mathcal{F}(P_e(G))$ que verifica $\Lambda([t]) = \phi_t$.*

Demostración. Vamos a ver que la función $f : G \to \mathcal{F}(P_e(G))$ dada por $f(t) = \phi_t$ satisface las propiedades de la Proposición 3.2.2 y por lo tanto definiendo $\Lambda := \tilde{f}$ se cumple lo pedido. Para ver la condición (i) de esa proposición, sean $t, s \in G$ y $E \in P_e(G)$. Por un lado

$$\phi_{s^{-1}}\phi_s\phi_t(E) = \phi_{s^{-1}}\phi_s(tE \cup \{t, e\}) = \phi_{s^{-1}}(stE \cup \{st, s, e\}) = tE \cup \{t, e, s^{-1}\},$$

mientras que

$$\phi_{s^{-1}}\phi_{st}(E) = \phi_{s^{-1}}(stE \cup \{st, e\}) = tE \cup \{t, s^{-1}, e\}.$$

La demostración de la condición (ii) es completamente análoga, mientras que la condición(iii) se sigue de que $f(e) = \phi_e$ es la función identidad de $P_e(G)$.

□

Observación 3.3.2. Sea $r \in G$ y consideremos el idempotente $\epsilon_r \in S(G)$. Como dado $E \in P_e(G)$

$$\Lambda(\epsilon_r)(E) = \phi_r(\phi_r^{-1}(E)) = E \cup \{r\},$$

concluimos que, si $\alpha = \epsilon_{r_1} \dots \epsilon_{r_n}[s]$, entonces

$$\Lambda(\alpha)(\{e\}) = \{r_1, \dots, r_n, s, e\}.$$

Veamos ahora la unicidad de la descomposición en forma estándar.

Proposición 3.3.3. *Sea $\alpha \in S(G)$. La representación*

$$\alpha = \epsilon_{r_1} \dots \epsilon_{r_n}[s]$$

es única, salvo por el orden de los ϵ_r.

Demostración. Supongamos que

$$\alpha = \epsilon_{r_1} \dots \epsilon_{r_n}[s] = \epsilon_{t_1} \dots \epsilon_{t_m}[u]$$

son dos descomposiciones en forma estándar.

Tomando grado en cada miembro, obtenemos la igualdad $\delta(\alpha) = s = u$. Ahora, por lo observado anteriormente

$$\{r_1, \ldots, r_n, s, e\} = \{t_1, \ldots, t_m, u, e\}.$$

Luego, como ya vimos que $s = u$,

$$\{r_1, \ldots, r_n, s, e\} \setminus \{s, e\} = \{t_1, \ldots, t_m, u, e\} \setminus \{u, e\},$$

es decir,

$$\{r_1, \ldots, r_n\} = \{t_1, \ldots, t_m\},$$

de donde se sigue que $n = m$.

□

Como aplicación de este resultado podemos calcular el orden de $S(G)$ cuando G es un grupo finito.

Corolario 3.3.4. *Si $|G| = n$, entonces $S(G)$ tiene $2^{n-2}(n+1)$ elementos.*

Demostración. Consideremos los elementos de la forma $\epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_m}[e]$ con $m \in \mathbb{N}$, este conjunto tiene 2^{n-1} ya que cada elección de los ϵ_r se corresponde con un subconjunto de $G \setminus \{e\}$. Además, para las $n-1$ elecciones de $s \neq e$ hay 2^{n-2} elementos de la forma $\epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_m}[s]$ ya que, en este caso, los ϵ_r se corresponden con un subconjunto de $G \setminus \{s, e\}$. Por lo tanto, el total de elementos de $S(G)$ son $2^{n-1} + (n-1)2^{n-2} = 2^{n-2}(n+1)$. □

Notar que el orden de $S(G)$ crece exponencialmente respecto al orden de G.

Teorema 3.3.5. *(Theorem 3.4 [E4]) Para cualquier grupo G, $S(G)$ es un semigrupo inverso.*

Demostración. Sólo queda por ver la unicidad de α^* para $\alpha \in S(G)$. Supongamos que existe $\beta \in S(G)$ tal que $\alpha\beta\alpha = \alpha$ y $\beta\alpha\beta = \beta$. Escribiendo

$$\alpha = \epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_n}[s]$$

y

$$\beta^* = \epsilon_{t_1} \ldots \epsilon_{t_m}[u],$$

concluimos que $\beta = [u^{-1}]\epsilon_{t_1} \ldots \epsilon_{t_m} = \epsilon_{u^{-1}t_1} \ldots \epsilon_{u^{-1}t_m}[u^{-1}]$ y por lo tanto $s = \delta(\alpha) = \delta(\alpha\beta\alpha) = su^{-1}s$, lo que implica $u = s$.

Por otro lado,

$$\alpha\beta\alpha = \epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_n}[s][s^{-1}]\epsilon_{t_1} \ldots \epsilon_{t_m}\epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_n}[s] = \epsilon_{r_1} \ldots \epsilon_{r_n}\epsilon_{t_1} \ldots \epsilon_{t_m}[s] = \alpha,$$

y por la unicidad de la descomposición en forma estándar, se sigue que $\{t_1 \ldots t_m\} \subseteq \{r_1 \ldots r_n\}$.

De la misma forma, a partir de la igualdad $\beta^*\alpha^*\beta^* = \beta^*$, se sigue que $\{r_1 \ldots r_n\} \subseteq \{t_1 \ldots t_m\}$, y por lo tanto $\beta = \alpha^*$.

□

3.4. Correspondencia entre acciones parciales de grupos y acciones del semigrupo inverso asociado

Ya vimos que una acción parcial del grupo G en un conjunto X es una función

$$\theta : G \to \mathcal{I}(X)$$

que satisface ciertas condiciones. En la siguiente proposición vamos a reescribir estas condiciones en términos de la estructura de semigrupo de $\mathcal{I}(X)$.

Proposición 3.4.1. *Sea G un grupo y sea X un conjunto. Una función $\theta : G \to \mathcal{I}(X)$ es una acción parcial de G en X si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $\theta_s \theta_t \theta_{t^{-1}} = \theta_{st} \theta_{t^{-1}}$,
para cualquier $s, t \in G$.

(ii) $\theta_e = id_X$,
Además, en este caso también se satisface la igualdad

(iii) $\theta_{s^{-1}} \theta_s \theta_t = \theta_{s^{-1}} \theta_{st}$.

Demostración. Ya habíamos notado que si tenemos una acción parcial se cumple (i), mientras que (ii) es parte de la definición de acción parcial. Para probar la recíproca, tomemos $s = t^{-1}$ en (i):

$$\theta_{t^{-1}} \theta_t \theta_{t^{-1}} = \theta_e \theta_{t^{-1}} = \theta_{t^{-1}}.$$

Intercambiando los roles de t y t^{-1}, obtenemos $\theta_t \theta_{t^{-1}} \theta_t = \theta_t$. Luego, por la unicidad del inverso, $\theta_t^* = \theta_{t^{-1}}$. Definamos $D_t = Im(\theta_t)$, de esta forma

$$Dom(\theta_t) = Im(\theta_t^*) = Im(\theta_{t^{-1}}) = D_{t^{-1}}.$$

Así, resulta

$$\theta_t : D_{t^{-1}} \to D_t$$

como queríamos.
La condición (i) de acción parcial es trivial ya que

$$Im(\theta_e) = Im(id_X) = X.$$

Dado $x \in D_{r^{-1}} \cap D_s$, existe $y \in D_{s^{-1}}$ tal que $\theta_s(y) = x$. Luego

$$\theta_r(x) = \theta_r(\theta_s(y)) = \theta_r(\theta_s(\theta_{s^{-1}}(x))) = \theta_{rs}(\theta_{s^{-1}}(x)),$$

y por lo tanto, $\theta_r(x) \in D_r \cap D_{rs}$. Esto prueba $\theta_r(D_r^{-1} \cap D_s) \subseteq D_r \cap D_{rs}$. Para ver la otra inclusión, sea $x \in D_{r^{-1}}$ tal que $\theta_r(x) \in D_r \cap D_{rs}$, resulta que

$$\theta_{s^{-1}r^{-1}}(\theta_r(x)) = \theta_{s^{-1}}(\theta_{r^{-1}}(\theta_r(x))) = \theta_{s^{-1}}(x),$$

con lo cual $x \in D_{r^{-1}} \cup D_s$.

Por último, si $x \in D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}r^{-1}}$, de lo probado anteriormente se sigue que $\theta_s(x) \in D_s \cap D_{ss^{-1}r^{-1}} = D_s \cap D_r^{-1}$ y obtenemos

$$\theta_r(\theta_s(x)) = \theta_r(\theta_s(\theta_{s^{-1}}(\theta_s(x)))) = \theta_{rs}(\theta_{s^{-1}}(\theta_s(x))) = \theta_{rs}(x).$$

La última parte del enunciado se deduce de las propiedades de $*$:

$$\theta_{s^{-1}}\theta_s\theta_t = (\theta_{t^{-1}}\theta_{s^{-1}}\theta_s)^* = (\theta_{t^{-1}s^{-1}}\theta_s)^* = \theta_{s^{-1}}\theta_{st}.$$

□

Teorema 3.4.2. *Sean G un grupo y X un conjunto. Hay una correspondencia biunívoca entre las acciones parciales de G en X y las acciones de $S(G)$ en X.*

Demostración. Recordemos que las acciones de $S(G)$ en X son morfismos de semigrupos de $S(G)$ en $\mathcal{I}(X)$. Por la Proposición 3.2.2, estos morfismos se corresponden con funciones de G en $\mathcal{I}(X)$ que satisfacen las propiedades (i)-(iii); a su vez, estas se corresponden, según la Proposición 2.4.2, con acciones parciales de G en X. □

3.5. Acciones envolventes

En esta sección consideraremos acciones parciales de un grupo G en una k-álgebra asociativa no necesariamente unitaria.

En el caso de acciones parciales de G en una k-álgebra A, suponemos que los conjuntos D_g con $g \in G$ son ideales de A y que las funciones $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ son isomorfismos de álgebras.

Una forma natural de obtener acciones parciales es restringiendo acciones globales a ciertos subconjuntos. En efecto, supongamos que tenemos una acción de un grupo G en un álgebra B dada por los automorfismos $\beta_g : B \to B$ y sea $A \subseteq B$ un ideal. Para cada $g \in G$ podemos definir $D_g = A \cap \beta_g(A)$ y consideramos α_g la restricción de β_g a $D_{g^{-1}}$. Puede verificarse fácilmente que la familia $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g\}$ define una acción parcial de G en A. En este caso diremos que la acción parcial es la **restricción** de β a A.

Nos interesa ver bajo qué condiciones una acción parcial puede obtenerse como restricción de una acción global. Observemos que si B' es la subálgebra de B generada por $\bigcup_{g \in G} \beta_g(A)$, entonces B' es invariante respecto a β, por lo que la acción parcial α se obtiene como restricción de la acción de G en B'. En el caso que $B = B'$ diremos que la restricción es **admisible**.

Definición 3.5.1. Diremos que una acción parcial $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g\}$ de un grupo G en un álgebra A es **equivalente** a la acción parcial $\alpha' = \{\alpha'_g : D'_{g^{-1}} \to D'_g\}$ de G en un álgebra A' si existe un isomorfismo de álgebras $\varphi : A \to A'$ tal que:

(i) $\varphi(D_g) = D'_g$,

(ii) $\alpha'_g \circ \varphi(x) = \varphi \circ \alpha_g(x)$,

para cualquier $g \in G$.

Definición 3.5.2. Una acción β de un grupo G en un álgebra B se dice una **acción envolvente** para una acción parcial α de G en un álgebra A si α es equivalente a una restricción admisible de β a un ideal de B.

Es decir, β es una acción envolvente de α si existe un isomorfismo de álgebras $\varphi : A \to A'$ con A' ideal de B, tal que para todo $g \in G$ se cumplen las siguientes propiedades:

(i) $\varphi(D_g) = A' \cap \beta_g(A')$,

(ii) $\varphi \circ \alpha_g(x) = \beta_g \circ \varphi(x)$, $\forall x \in D_{g^{-1}}$,

(iii) B está generado por $\bigcup_{g \in G} \beta_g(A')$

El siguiente resultado, cuya demostración puede verse en [DE], Theorem 4.5, caracteriza las acciones parciales que admiten una acción envolvente.

Teorema 3.5.3. *Sea A un álgebra unitaria. Una acción parcial α de un grupo G en A admite una acción envolvente β si y sólo si para cada $g \in G$, el ideal D_g es un álgebra unitaria. Más aún, si existe β entonces es único salvo equivalencia.*

3.6. Acciones del álgebra de Hopf kG

Definición 3.6.1. Sea H un álgebra de Hopf. Una acción parcial de H en la k-álgebra A es un morfismo k-lineal $\alpha : H \otimes A \to A$, denotado por $\alpha(h \otimes a) = h \cdot a$, tal que

(i) $h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$,

(ii) $1 \cdot a = a$,

(iii) $h \cdot (g \cdot a) = \sum (h_1 \cdot 1_A)((h_2 g) \cdot a)$,

donde $h, \in H$, $a, b \in A$.

Es fácil ver que cualquier acción de H en A es también una acción parcial.

Ejemplo 3.6.2. Consideremos una acción parcial α del grupo G en un álgebra unitaria A tal que cada D_g, con $g \in G$, sea un álgebra unitaria, digamos $D_g = A1_g$. Podemos definir una acción parcial del álgebra de grupo kG en A dada por

$$g \cdot a = \alpha_g(a1_{g^{-1}}),$$

para $g \in G$, $a \in A$ y extendiendo linealmente a kG. Notemos que los elementos $1_g \in D_g$ son idempotentes centrales del álgebra A y están dados por $1_g = g \cdot 1_A$. Además, el elemento unidad del ideal $D_g \cap D_h$ es el producto $1_g 1_h$ y como $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$ vale que $\alpha_g(1_{g^{-1}} 1_h) = 1_g 1_{gh}$. Es claro que se satisface (ii), ya que $\alpha_e = id_A$ y $1_e = 1_A$. Veamos (i):

$$g \cdot (ab) = \alpha_g(ab1_{g^{-1}}) = \alpha_g(a1_{g^{-1}} b1_{g^{-1}}) = \alpha_g(a1_{g^{-1}})\alpha_g(b1_{g^{-1}}) = (g \cdot a)(g \cdot b).$$

Por otro lado, (iii) es consecuencia de la siguiente cadena de igualdades

$$
\begin{aligned}
h \cdot (g \cdot a) &= \alpha_h(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_{h^{-1}}) = \\
&= \alpha_h(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_g 1_{h^{-1}}) = \\
&= \alpha_h(\alpha_g(a1_{g^{-1}})\alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h^{-1}})) = \\
&= \alpha_h(\alpha_g(a1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h^{-1}})) = \\
&= \alpha_{hg}(a1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h^{-1}}) = \\
&= \alpha_{hg}(a1_{g^{-1}h^{-1}})\alpha_{hg}(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h^{-1}}) \\
&= \alpha_{hg}(a1_{g^{-1}h^{-1}})1_{hg}1_h = \\
&= 1_h\alpha_{hg}(a1_{g^{-1}h^{-1}}) = (h \cdot 1_A)(hg \cdot a).
\end{aligned}
$$

Notar que esto también prueba que $h \cdot (g \cdot a) = (hg \cdot a)1_h = (hg \cdot a)(h \cdot 1_A)$.

En el Capítulo 5 veremos, en un contexto más general, la relación entre acciones parciales de un grupo G y acciones parciales del álgebra de grupo kG.

Capítulo 4

Herramientas de categorías

En este capítulo daremos algunas definiciones y conceptos básicos que usaremos en la presente tesis, junto con algunos ejemplos. Nos basaremos en la exposición hecha en [AAB]. Resultados generales sobre la teoría de categorías pueden verse en [ML].

4.1. X-categorías

Definición 4.1.1. Una **categoría** $\mathcal{C}$ está dada por una clase de objetos y una clase de morfismos o flechas que notaremos $\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{C}_1$ respectivamente, junto con una regla de composición $\circ : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_1$ que es una operación binaria parcial. Además hay dos operaciones unarias:

$$s, t : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_0,$$

llamadas dominio y codominio respectivamente; y una tercera operación unaria llamada la flecha identidad:

$$id : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1.$$

Deben verificarse los siguientes axiomas:

(i) dadas $f, g \in \mathcal{C}_1$, la composición $f \circ g$ está definida si y sólo si $t(g) = s(f)$. Además se verifica:

$$s(f \circ g) = s(g),$$
$$t(f \circ g) = t(f).$$

(ii) La composición es asociativa, es decir, para todo $f, g, h \in \mathcal{C}_1$

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

donde el término de la izquierda está definido si y sólo si el término de la derecha lo está.

(iii) Dado $x \in \mathcal{C}_0$, $s(id_x) = t(id_x) = x$, y si $f \in \mathcal{C}_1$ con $s(f) = x$ y $t(f) = y$ entonces:

$$f \circ id_x = f$$
$$id_y \circ f = f.$$

Notamos con $f : x \to y$ una flecha $f \in \mathcal{C}_1$ tal que $s(f) = x$ y $t(f) = y$. Para cada par de objetos $x, y \in \mathcal{C}_0$, el $\mathrm{Hom}(x, y)$ es el conjunto de morfismos de x a y. Si la clase de objetos es un conjunto, la categoría se llama pequeña.

En lo que sigue k denotará un cuerpo.

Nos interesa estudiar categorías con estructura k-lineal, esta noción generaliza la de k-álgebra unitaria.

Definición 4.1.2. Una **categoría k-lineal**, o más brevemente **k-categoría**, $\mathcal{A}$ es una categoría tal que para cada par de objetos $x, y \in \mathcal{A}_0$, el conjunto de morfismos ${}_y\mathcal{A}_x := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y)$ tiene una estructura de k-espacio vectorial de manera que las composiciones resultan k-bilineales.

Notar que si $\mathcal{A}$ es una k-categoría, para cada $x \in \mathcal{A}_0$, el conjunto ${}_x\mathcal{A}_x$ con la composición de morfismos y la identidad de x tiene una estructura de k-álgebra unitaria.

Ejemplos 4.1.3.

1. Sea A una k-álgebra unitaria, tomando $\mathcal{A}_0 = \{*\}$ y $\mathcal{A}_1 = A$ se obtiene una k-categoría donde la composición de morfismos está dada por el producto en el álgebra. De esta forma, el concepto de k-categoría generaliza el de k-álgebra unitaria.

2. Sea Q un carcaj. El **álgebra de caminos** kQ se define como el k-espacio vectorial con base los caminos en Q (incluyendo los vértices de Q). En kQ se define la múltiplicacion por medio de la concatenación de caminos. En el caso que dos caminos no se puedan concatenar, la multiplicación se define por 0. Esto define una k-álgebra asociativa. El álgebra de caminos da una k-categoría que tiene por objetos los vértices de Q, y los morfismos de x a y están dados por las combinaciones lineales de caminos de x a y. En este caso la composición se corresponde con la concatenación de caminos.

Definición 4.1.4. Sea X un conjunto no vacío. Una k-categoría sobre X (o **X-categoría**), es una k-categoría $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}_0 = X$.

Ejemplo 4.1.5. Por lo anterior, toda k-álgebra unitaria es una $\{*\}$-categoría.

Vamos a estar particularmente interesados en funtores entre X-categorías que coincidan con el funtor identidad sobre los objetos.

Definición 4.1.6. Dadas dos X-categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, y un k-funtor $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, diremos que F es un **X-funtor** si $F(x) = x, \forall x \in X = \mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_0$, o equivalentemente, $F({}_y\mathcal{A}_x) \subseteq {}_y\mathcal{B}_x, \forall x, y \in X$ ya que siempre se tiene el morfismo identidad de $x \in \mathcal{A}_0$.

Notar que las X-categorías junto con los X-funtores forman una nueva categoría que denotamos X-cat.

Ejemplo 4.1.7.

Sea $X = \{1, \dots, n\}$ y sea $\mathcal{A}$ una X-categoría. Definimos el **álgebra matricial** de la siguiente manera: como conjunto $a(\mathcal{A}) = \{({}_y f_x)_{y,x} \mid {}_y f_x \in {}_y\mathcal{A}_x,\ x, y \in X\}$ y el producto está dado por: $({}_y f_x)({}_y g_x) = (\sum_z {}_y f_z \circ {}_z g_x)$.

Este álgebra resulta ser unitaria con $1_{a(\mathcal{A})} = \sum_{x \in X} e_x$ donde $e_x = {}_x 1_x^{\mathcal{A}} E_{x,x}$ mientras que $E_{x,x}$ denota la matriz elemental con un 1 en el lugar x, x. Más aún, se tiene que $\{e_x\}_{x \in X}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales de $a(\mathcal{A})$.

Tomemos por ejemplo $X = \{1, 2\}$ y $\mathcal{A}$ la X-categoría dada por ${}_1\mathcal{A}_1 = {}_2\mathcal{A}_2 = k$ y ${}_1\mathcal{A}_2 = {}_2\mathcal{A}_1 = 0$. El álgebra matricial $a(A)$ consiste de las matrices diagonales de 2×2 con coeficientes en k. Más en general, si ${}_x A_x = k$ para todo $x \in X$ y ${}_y\mathcal{A}_x = 0$ para todo $x \neq y$, el álgebra $a(A)$ resulta ser el conjunto de matrices diagonales de $n \times n$ con coeficientes en k.

Ahora, si $\mathcal{B}$ es otra X-categoría, todo X-funtor $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ induce canónicamente el morfismo de álgebras $({}_y f_x) \mapsto (F({}_y f_x))$ que manda el idempotente $e_x = {}_x 1_x^{\mathcal{A}} E_{x,x}$ a ${}_x 1_x^{\mathcal{B}} E_{x,x}$. Así, podemos definir una categoría X-Alg con objetos $(A, \{e_x\}_{x \in X})$ donde A es una k-álgebra y $\{e_x\}_{x \in X}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales, y un morfismo $\varphi \colon (A, \{e_x\}_{x \in X}) \to (B, \{f_x\}_{x \in X})$ en X-Alg es un morfismo $\varphi \colon A \to B$ de k-álgebras tal que $\varphi(e_x) = f_x$ para todo $x \in X$. La definición de $a(A)$ induce un isomorfismo de categorías $\psi \colon X\text{-cat} \to X\text{-Alg}$.

Definición 4.1.8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, en particular es una $\mathcal{C}_0$-categoría. Un **paseo** no nulo $w = (f_n, \epsilon_n), \dots, (f_1, \epsilon_1)$ en $\mathcal{C}$ es una sucesión finita tal que f_i es un morfismo no nulo para cada $i = 1, \dots, n$ y tal que cada ϵ_i es ± 1 y $s(f_i, 1) := s(f_i)$, $t(f_i, 1) := t(f_i)$, $s(f_i, -1) := t(f_i)$ y $t(f_i, -1) := s(f_i)$ de manera tal que $s(f_{i+1}, \epsilon_{i+1}) = t(f_i, \epsilon_i)$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. En esta situación definimos $s(w) := s(f_1, \epsilon_1)$ y $t(w) = t(f_n, \epsilon_n)$. Dados dos objetos $x, y \in \mathcal{C}_0$ decimos que están en la misma componente conexa si existe un paseo no nulo w tal que $s(w) = x$ y $t(w) = y$.

Observación 4.1.9. Sean x, y objetos de una k-categoría C. Un paseo de x a y, es un paseo w tal que $s(w) = x$ y $t(w) = y$. Si existe un paseo de x a y entonces existe uno de y a x que se obtiene invirtiendo los signos de cada término de la sucesión en el paseo original.

Ejemplo 4.1.10. Sea $\mathcal{C}$ una k-categoría con objetos $\mathcal{C}_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ y con morfismos según el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "h"] & 2 \\ 3 \arrow[ur, "g"'] & 4. \end{tikzcd}$$

Hay una sola componente conexa ya que para todo par de objetos existe un paseo no nulo entre ellos. Por ejemplo, el paseo no nulo de 2 a 4 dado por $w = (h, 1), (f, -1), (g, -1)$.

Definición 4.1.11. Una k-categoría $\mathcal{C}$ se dice **conexa** si tiene una sola componente conexa.

Observemos que si $\mathcal{C}$ no es conexa, $\mathcal{C}_0$ es unión disjunta de subconjuntos X_i y ${}_y\mathcal{C}_x = 0$ siempre que x e y pertenezcan a distintas componentes.

4.2. Semicategorías

Definición 4.2.1. Una k-**semicategoría** consiste de una colección de objetos $\mathcal{C}_0$, una colección de k-morfismos $\mathcal{C}_1$ provisto de composición asociativa tal que para cada par de objetos $x, y \in \mathcal{C}_0$ el espacio de morfismos ${}_yC_x$ es un k-espacio vectorial, y dos funciones $s, t\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_0$ como antes. Es decir, tiene todas las propiedades de una k-categoría pero sin pedir la existencia de identidades.

Así como la noción de k-categoría generaliza a las k-álgebras unitarias, la noción de k-semicategorías generaliza a las k-álgebras no unitarias.

Ejemplos 4.2.2.

1. Sea A una k-álgebra no unitaria. Sea $\mathcal{C}$ la categoría con $\mathcal{C}_0 = \{*\}$ y $\mathcal{C}_1 = A$, se verifica que $\mathcal{C}$ es una k-semicategoría.

2. Sean A y B dos k-álgebras idempotentes no unitarias (i.e. $A^2 = A$ y $B^2 = B$). Es posible definir un contexto de Morita entre A y B, esto es una séxtupla $(A, B, M, N, \tau, \sigma)$ donde ${}_AM_B$ y ${}_BN_A$ son bimódulos, y $\tau\colon M \otimes_B N \to A$ y $\sigma\colon N \otimes_A M \to B$ son morfismos de bimódulos tales que

$$\forall m_1, m_2 \in M, n \in N, \qquad m_1\sigma(n \otimes m_2) = \tau(m_1 \otimes n)m_2, \qquad (1)$$
$$\forall n_1, n_2 \in N, m \in M, \qquad n_1\tau(m \otimes n_2) = \sigma(n_1 \otimes m)n_2. \qquad (2)$$

Con estos datos podemos construir un álgebra asociativa: el álgebra de conexión, es decir

$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ con la multiplicación dada por:

$$\begin{pmatrix} a_1 & m_1 \\ n_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & m_2 \\ n_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + \tau(m_1 \otimes n_2) & a_1m_2 + m_1b_2 \\ n_1a_2 + b_1n_2 & \sigma(n_1 \otimes m_2) + b_1b_2 \end{pmatrix}.$$

Está operación resulta asociativa por las igualdades (1) y (2). El álgebra $\mathcal{A}$ puede verse como una k-semicategoría donde $\mathcal{A}_0 = \{A, B\}$ y los morfismos están dados por: ${}_A\mathcal{A}_A = A$, ${}_B\mathcal{A}_B = B$, ${}_A\mathcal{A}_B = M$, ${}_B\mathcal{A}_A = N$ y composiciones compatibles con la multiplicación matricial (e.g. $m \circ n = \tau(m \otimes n)$ y $n \circ m = \sigma(n \otimes m)$).

Definición 4.2.3. Un k-**semifuntor** F de una k-semicategoría $\mathcal{C}$ a una k-semicategoría $\mathcal{D}$ es una función k-lineal que manda cada $x \in \mathcal{C}_0$ a un elemento $F(x) \in \mathcal{D}_0$ y cada morfismo $f\colon x \to y$ perteneciente a ${}_y\mathcal{C}_x$ a un morfismo $F(f)$ en ${}_{F(y)}\mathcal{D}_{F(x)}$ de manera que F preserva composiciones.

Ejemplos 4.2.4.

1. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías k-lineales tal que $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{D}_0$. Sea $F = (F_0, F_1)$ definido de la siguiente manera: $F_0 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$ es la inclusión y dado un objeto $x \in \mathcal{C}_0$, $F_1({}_x1_x)$ es un endomorfismo idempotente distinto de la identidad en ${}_x\mathcal{D}_x$. Entonces F resulta un k-semifuntor que no es funtor.

2. Una situación levemente distinta a la anterior es la siguiente: consideremos una k-álgebra A con un idempotente central e y definamos el ideal $I = eAe$. Sea $\mathcal{C}_A$ la

k-categoría con un objeto y A como k-espacio vectorial de morfismos, y sea $\mathcal{C}_I$ la k-semicategoría con un objeto e I como conjunto de morfismos. La inclusión de $\mathcal{C}_I$ en $\mathcal{C}_A$ es un k-semifuntor.

También necesitaremos considerar equivalencias de semicategorías.

Definición 4.2.5. Dados dos k-semifuntores $F, G \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, una **transformación natural** entre F y G es una familia de morfismos $\{\alpha_x \in {}_{G(x)}\mathcal{B}_{F(x)} \mid x \in \mathcal{A}_0\}$ tal que, para cualquier ${}_y f_x \in {}_y\mathcal{A}_x$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "F({}_y f_x)"] \arrow[d, "\alpha_x"'] & F(y) \arrow[d, "\alpha_y"] \\ G(x) \arrow[r, "G({}_y f_x)"] & G(y). \end{tikzcd}$$

Una transformación natural α entre dos semifuntores F y G es un **isomorfismo natural** si $\alpha_x \in {}_{G(x)}\mathcal{B}_{F(x)}$ es un isomorfismo para todo $x \in \mathcal{A}_0$. Una **semiequivalencia** entre dos k-semicategorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es un k-semifuntor $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que existe un k-semifuntor $G \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ que verifica $F \circ G$ y $G \circ F$ son naturalmente isomorfos a sus respectivos semifuntores identidad.

Las nociones de X-semicategoría y X-semifuntores se definen de manera análoga a lo hecho para k-categorías.

Finalmente, recordamos el concepto de ideal de una k-categoría.

Definición 4.2.6. Un **ideal** I de una k-categoría es una colección de subespacios vectoriales ${}_yI_x$ de cada espacio de morfismos ${}_y\mathcal{C}_x$, tal que la imagen de la composición ${}_z\mathcal{C}_y \otimes {}_yI_x \to {}_z\mathcal{C}_x$ está contenida en ${}_zI_x$ y la imagen de la composición ${}_yI_x \otimes {}_x\mathcal{C}_u \to {}_y\mathcal{C}_u$ está contenida en ${}_yI_u$ para cada elección de objetos.

Capítulo 5

H-módulo categorías parciales

En esta sección vamos a definir nuestro principal objeto de estudio, una acción parcial de un álgebra de Hopf H en una k-categoría $\mathcal{A}$. Esto generaliza las nociones de acción parcial de un álgebra de Hopf H en un álgebra unitaria A y de H-módulo categoría.

5.1. H-módulo categorías parciales

Recordamos primero la definición de H-módulo categoría.

Definición 5.1.1. Una k-categoría $\mathcal{A}$ es una H-módulo categoría si para cada $x, y \in \mathcal{A}_0$ existe un k-morfismo $H \otimes {}_y\mathcal{A}_x \to {}_y\mathcal{A}_x$ que manda $h \otimes f$ en $h \cdot f$, tal que
$\forall x, y, z \in \mathcal{A}_0,\ h, k \in H,$

$$1_H \cdot {}_yf_x = {}_yf_x, \qquad \forall f \in {}_y\mathcal{A}_x \tag{5.1.1}$$

$$h \cdot ({}_zf_y \circ {}_yg_x) = \sum (h_{(1)} \cdot {}_zf_y) \circ (h_{(2)} \cdot {}_yg_x), \qquad \forall f \in {}_z\mathcal{A}_y, \forall g \in {}_y\mathcal{A}_x \tag{5.1.2}$$

$$h \cdot (k \cdot {}_yf_x) = (hk) \cdot {}_yf_x, \qquad \forall f \in {}_y\mathcal{A}_x \tag{5.1.3}$$

$$h \cdot {}_x1_x = \epsilon(h)_x1_x. \tag{5.1.4}$$

Definición 5.1.2. Sea $\mathcal{A}$ una k-categoría y H un álgebra de Hopf. Decimos que existe una **acción parcial** de H en $\mathcal{A}$ si:

1. H actúa trivialmente en los objetos.
2. Para todo par de objetos $x, y \in \mathcal{A}_0$, existe un k-morfismo $\alpha\colon H \otimes {}_y\mathcal{A}_x \to {}_y\mathcal{A}_x$ denotado por $\alpha(h \otimes f) = h \cdot f$, que satisface las condiciones (5.1.1) y (5.1.2) y en lugar de (5.1.3) y (5.1.4) pedimos la siguiente condición:

$$\begin{aligned} h \cdot (k \cdot {}_yf_x) &= \sum (h_{(1)} \cdot {}_y1_y) \circ ((h_{(2)}k) \cdot {}_yf_x) \\ &= \sum ((h_{(1)}k) \cdot {}_yf_x) \circ (h_{(2)} \cdot {}_x1_x), \quad \forall h, k \in H,\ \forall f \in {}_y\mathcal{A}_x. \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

En este caso, diremos que $\mathcal{A}$ es una H**-módulo categoría parcial**.

Notemos que de (5.1.2) y (5.1.5) se sigue que:

$$h \cdot ({}_zf_y \circ (k \cdot {}_yg_x)) = \sum (h_{(1)} \cdot {}_zf_y) \circ ((h_{(2)}k) \cdot {}_yg_x). \tag{5.1.6}$$

De hecho,

$$\begin{aligned} h \cdot ({}_zf_y \circ (k \cdot {}_yg_x)) &\overset{(5,1,2)}{=} \sum (h_{(1)} \cdot {}_zf_y) \circ (h_{(2)} \cdot (k \cdot {}_yg_x)) \\ &\overset{(5,1,5)}{=} \sum (h_{(1)} \cdot {}_zf_y) \circ ((h_{(2)} \cdot {}_y1_y) \circ ((h_{(3)}k) \cdot {}_yg_x)) \\ &\overset{(5,1,2)}{=} \sum (h_{(1)} \cdot ({}_zf_y \circ {}_y1_y)) \circ ((h_{(2)}k) \cdot {}_yg_x) \\ &= \sum (h_{(1)} \cdot {}_zf_y) \circ ((h_{(2)}k) \cdot {}_yg_x). \end{aligned}$$

Análogamente, se tiene que

$$h \cdot ((k \cdot {}_zf_y) \circ {}_yg_x) = \sum ((h_{(1)}k) \cdot {}_zf_y) \circ (h_{(2)} \cdot {}_yg_x).$$

Ejemplos 5.1.3. 1. Sea $\mathcal{A}$ una H-módulo categoría. Entonces $\mathcal{A}$ es una H-módulo categoría parcial. Para esto basta ver que se cumple 5.1.5.

$$\begin{aligned} \sum (h_{(1)} \cdot {}_y1_y) \circ ((h_{(2)}k) \cdot {}_yf_x) &= \sum (\epsilon(h_{(1)})_y1_y) \circ ((h_{(2)}k) \cdot {}_yf_x) \\ &= \sum (\epsilon(h_{(1)})h_{(2)})k \cdot {}_yf_x \\ &= ((\sum \epsilon(h_{(1)})h_{(2)})k) \cdot {}_yf_x \\ &= (hk) \cdot {}_yf_x \\ &= h \cdot (k \cdot {}_yf_x). \end{aligned}$$

Donde la primer igualdad es consecuencia de (5.1.4) y la última se sigue de (5.1.3).

Esta misma cuenta muestra que dada una acción parcial de H en una categoría k-lineal $\mathcal{A}$ que además verifica la condición (5.1.4), la acción resulta total.

2. Un ejemplo central de H-módulo categoría parcial se obtiene a partir de una acción total en una k-categoría por restricción a un ideal asociado a un idempotente central [AAB, 3.4].

Un idempotente central en una k-categoría es una transformación natural idempotente del funtor identidad en sí mismo. Esto es, una colección $e = \{{}_xe_x\}_{x\in\mathcal{C}_0}$ donde para cada $x \in \mathcal{C}_0$, ${}_xe_x \in {}_x\mathcal{C}_x$ es un idempotente tal que, si ${}_yf_x \in {}_y\mathcal{C}_x$, entonces

$${}_ye_y \circ {}_yf_x = {}_yf_x \circ {}_xe_x.$$

El ideal $\mathcal{I}$ asociado al idempotente e se define por

$$ {}_y\mathcal{I}_x = {}_ye_y\ {}_y\mathcal{C}_x\ {}_xe_x = {}_ye_y\ {}_y\mathcal{C}_x = {}_y\mathcal{C}_x\ {}_xe_x, $$

para cada $x, y \in \mathcal{C}_0$.

Dado un idempotente central e en $\mathcal{C}$ no trivial, es decir, distinto de la transformación natural identidad o cero, podemos definir una acción parcial de H en el ideal asociado $\mathcal{I}$ a partir de una acción parcial de H en $\mathcal{C}$ de la siguiente forma:

$$ h \cdot {}_yf_x = {}_ye_y \circ (h \triangleright {}_yf_x) = (h \triangleright {}_yf_x) \circ {}_xe_x, $$

donde ${}_yf_x \in {}_y\mathcal{I}_x$ y $h \in H$.

3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría k-lineal y G un grupo. En [CFM] se generaliza la noción de acción parcial del grupo G en una k-categoría $\mathcal{C}$ de la siguiente forma: G actúa en el conjunto $\mathcal{C}_0$ y para cada $g \in G$, existe un ideal $\mathcal{I}^g$ de $\mathcal{C}$ y un isomorfismo de k-semicategorías

$$ \alpha_g : \mathcal{I}^{g^{-1}} \to \mathcal{I}^g $$

que satisface:

a) $\mathcal{I}^e = \mathcal{C}$ y $\alpha_e = Id_{\mathcal{C}}$,

b) dados $x, y \in \mathcal{C}_0$ y $g, h \in G$,

$$ \alpha_{h^{-1}}({}_{hy}\mathcal{I}^h_{hx} \cap {}_{hy}\mathcal{I}^{g^{-1}}_{hx}) \subset {}_y\mathcal{I}^{(gh)^{-1}}_x, $$

c) si ${}_yf_x \in \alpha_{h^{-1}}({}_{hy}\mathcal{I}^h_{hx} \cap {}_{hy}\mathcal{I}^{g^{-1}}_{hx})$ entonces $\alpha_g \circ \alpha_h({}_yf_x) = \alpha_{gh}({}_yf_x)$.

Hay una biyección entre estructuras de kG-módulo categoría parcial en $\mathcal{C}$ y acciones parciales de G en $\mathcal{C}$ que dejan fijos los objetos tales que los ideales están generados por idempotentes [AAB, 3.5].

Si $\mathcal{C}$ es una kG-módulo categoría parcial, para cada $g \in G$, los idempotentes están dados por

$$ {}_xe^g_x = g \cdot {}_x1_x $$

y generan los ideales $\mathcal{I}^g$, es decir

$$ \begin{aligned} (\mathcal{I}^g)_0 &= \mathcal{C}_0 \\ {}_y\mathcal{I}^g_x &= {}_ye^g_y\ {}_y\mathcal{C}_x\ {}_xe^g_x. \end{aligned} $$

Los isomorfismos $\alpha_g : \mathcal{I}^{g^{-1}} \to \mathcal{I}^g$ se definen por

$$\alpha_g(x) = x,$$
$$\alpha_g({}_yf_x) = g \cdot {}_yf_x,$$

para $x \in (\mathcal{I}^g)_0$ y ${}_yf_x \in {}_y\mathcal{I}_x^{g^{-1}}$.

Recíprocamente, si $(\{\mathcal{I}^g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ define una acción parcial de G en $\mathcal{C}$ en las condiciones anteriores, entonces la ecuación

$$g \cdot {}_yf_x = \alpha_g({}_yf_x \circ {}_xe_x^g)$$

con $g \in G$ y ${}_yf_x \in {}_y\mathcal{C}_x$ define una acción parcial de kG en $\mathcal{C}$.

Observación 5.1.4. Sea H un álgebra de Hopf y $\mathcal{A}$ una H-módulo categoría parcial. Para cada $x \in \mathcal{A}_0$ el espacio de morfismos ${}_x\mathcal{A}_x$ es un H-módulo álgebra parcial. El producto en ${}_x\mathcal{A}_x$ está dado por la composición, dotando a este espacio vectorial de una estructura de álgebra con unidad ${}_x1_x$. Por (5.1.1), se tiene que $1_H \cdot f = f$, para todo $f \in {}_x\mathcal{A}_x$. Sean $f, g \in {}_x\mathcal{A}_x$ y $h, k \in H$. La igualdad (5.1.2) nos dice que:

$$h \cdot (g \circ f) = \sum (h_{(1)} \cdot g) \circ (h_{(2)} \cdot f)$$

y usando (5.1.5) obtenemos:

$$h \cdot (k \cdot f) = \sum (h_{(1)} \cdot {}_x1_x) \circ ((h_{(2)}k) \cdot f).$$

Más aún, la acción parcial es simétrica, pues (5.1.5) también implica que

$$h \cdot (k \cdot f) = \sum ((h_{(1)}k) \cdot f) \circ (h_{(2)} \cdot {}_x1_x).$$

En particular, si $\mathcal{A}$ es una X-categoría, con X un conjunto unitario, la acción parcial del álgebra de Hopf H en $\mathcal{A}$ coincide con la acción parcial de H en el álgebra definida por esta categoría.

Dada un álgebra de Hopf H de dimensión finita, la existencia de una acción parcial de H en una k-categoría $\mathcal{C}$, puede reformularse en términos de morfismos k-lineales para cada par de elementos $x, y \in \mathcal{C}_0$; seguiremos la notación de [AAB]:

$$H \xrightarrow{\Pi} \operatorname{End}_k({}_y\mathcal{C}_x)$$
$$h \mapsto \pi_h$$

definido por $\pi_h({}_yf_x) = h \cdot {}_yf_x$.

Las condiciones (5.1.1), (5.1.2) y (5.1.5) de la definición de acción parcial pueden expresarse en términos de Π. Por ejemplo, la primera condición dice que π_{1_H} es el endomorfismo identidad de ${}_y\mathcal{C}_x$ para todo $x, y \in \mathcal{C}_0$. Para simplificar, notaremos simplemente por Π al morfismo definido anteriormente, si bien éste depende de x y de y. Cuando $x = y$, denotaremos

$$\lambda_h^x = \pi_h({}_x1_x) = h \cdot {}_x1_x.$$

La condición (5.1.5) en la definición de H-acción parcial implica que para todo $h, k \in H$,

$$\pi_h \pi_k = \sum_h \lambda^y_{h_{(1)}} \pi_{(h_{(2)}k)} = \sum_h \pi_{(h_{(1)}k)} \lambda^x_{h_{(2)}}. \tag{5.1.7}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\pi_h \pi_k({}_y f_x) &= h \cdot (k \cdot {}_y f_x) \\
&\overset{(5,1,5)}{=} \sum (h_{(1)} \cdot {}_y 1_y) \circ ((h_{(2)}k) \cdot {}_y f_x) \\
&= \sum \lambda^y_{h_{(1)}} \circ \pi_{(h_{(2)}k)}({}_y f_x) \\
&= (\sum \lambda^y_{h_{(1)}} \pi_{(h_{(2)}k)})({}_y f_x).
\end{aligned}$$

La otra igualdad se deduce de una cuenta análoga.

Notar que la acción es global si y sólo si $\lambda_h^x = \epsilon(h) {}_x1_x$, para todo $h \in H$ y para todo $x \in \mathcal{C}_0$.

Dado $x \in \mathcal{C}_0$, podemos asociarle un morfismo $\Lambda^x \in \operatorname{Hom}_k(H, {}_x\mathcal{C}_x)$ definido por $\Lambda^x(h) = \lambda_h^x$. Recordemos que $\operatorname{Hom}_k(H, {}_x\mathcal{C}_x)$ es un álgebra con el producto de convolución

$$f * g\ (h) = \sum f(h_{(1)}) \circ g(h_{(2)})$$

con $f, g \in \operatorname{Hom}(H, {}_x\mathcal{C}_x)$ y $h \in H$. Es fácil ver que Λ^x es un idempotente y que verifica $\Lambda^x(1_H) = {}_x1_x$:

$$\begin{aligned}
\Lambda^x * \Lambda^x(h) &= \sum \Lambda^x(h_{(1)}) \circ \Lambda^x(h_{(2)}) = \sum \lambda^x_{h_{(1)}} \circ \lambda^x_{h_{(2)}} \\
&= \sum (h_{(1)} \cdot {}_x1_x) \circ (h_{(2)} \cdot {}_x1_x) = h \cdot ({}_x1_x \circ {}_x1_x) \\
&= h \cdot {}_x1_x = \lambda_h^x = \Lambda^x(h),
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\Lambda^x(1_H) = \lambda^x_{1_H} = 1_H \cdot {}_x1_x = {}_x1_x.$$

Para cada $x \in \mathcal{C}_0$, la unidad $\eta^x \colon k \to {}_x\mathcal{C}_x$ es un morfismo de k-álgebras que induce por composición un morfismo de k-espacios vectoriales

$$\eta^x_* \colon \operatorname{Hom}_k(H, k) \to \operatorname{Hom}_k(H, {}_x\mathcal{C}_x).$$

Dado $\tilde{\Lambda} \in \operatorname{Hom}_k(H, k)$, consideremos $\Lambda^x = \eta^x_*(\tilde{\Lambda})$. Evaluando ambos lados de la igualdad (5.1.7) en ${}_x1_x$, obtenemos:

$$\lambda_h^x \lambda_g^x = \sum_h \lambda_{h_{(1)}}^y \lambda_{(h_{(2)}g)}^x = \sum_h \lambda_{(h_{(1)}g)}^x \lambda_{h_{(2)}}^x, \qquad \forall h, g \in H. \tag{5.1.8}$$

Esto es consecuencia de lo siguiente:

$$\begin{aligned} \pi_h \pi_g({}_x1_x) &= \pi_h(\lambda_g^x) = \pi_h(\Lambda^x(g)) = \pi_h(\eta_*^x(\tilde{\Lambda})(g)) \\ &= \pi_h(\eta^x(\tilde{\Lambda}(g))) = \pi_h(\eta^x(1_k)) \circ \tilde{\Lambda}(g)_x 1_x \\ &= \pi_h({}_x1_x) \circ \eta^x(\tilde{\Lambda}(g)) = \lambda_h^x \circ \lambda_g^x. \end{aligned}$$

Notemos que de esta cuenta se deduce que $\lambda_h^x \lambda_g^x = \lambda_g^x \lambda_h^x, \ \forall h, g \in H, \forall x \in \mathcal{C}_0$.

A partir de una acción parcial de un álgebra de Hopf H de dimensión finita sobre una categoría k-lineal $\mathcal{C}$, el morfismo Π definido como antes induce un mofismo k-lineal Λ^x para cada $x \in \mathcal{C}_0$.

Definición 5.1.5. Diremos que la acción parcial de H sobre $\mathcal{C}$ está **inducida por** k si existe algún $\tilde{\Lambda} \in \mathrm{Hom}_k(H, k)$ de manera que $\Lambda^x = \eta_*^x(\tilde{\Lambda})$.

Observemos que dada una H-módulo categoría parcial $\mathcal{C}$ con acción inducida por k, valen las siguiente igualdades para todo $x \in \mathcal{C}_0$:

(1) $\Lambda^x(1_H) = {}_x1_x$,

(2) $\Lambda^x(h) = \sum \Lambda^x(h_{(1)})\Lambda^x(h_{(2)})$,

(3) $\Lambda^x(h)\Lambda^x(k) = \sum \Lambda^x(h_{(1)})\Lambda^x(h_{(2)}k) = \sum \Lambda^x(h_{(1)}k)\Lambda^x(h_{(2)})$.

5.2. Acciones parciales de k^G en k

Recordemos que dado un grupo G, es equivalente tener una k-categoría G-graduada $\mathcal{C}$ que una kG-comódulo categoría y, si G es finito, esto último es lo mismo que tener una k^G-módulo categoría [CS]. Veamos que para todo $x \in \mathcal{C}_0$, el morfismo ${}_x1_x$ es homogéneo de grado e_G. Esto se deduce de la siguiente cadena de igualdades:

$$p_g \cdot {}_x1_x = \epsilon(p_g)_x 1_x \overset{\epsilon = u^*}{=} p_g(e_G)_x 1_x = \delta_g^{e_G}\, {}_x1_x,$$

donde $\{p_g\}_{g \in G}$ es base multiplicativa de k^G.

Por otro lado, si suponemos que ${}_x1_x$ es homogéneo de grado e_G entonces se desprende de la misma cuenta que

$$p_g \cdot {}_x1_x = \epsilon(p_g)_x 1_x, \ \forall g \in G,$$

o equivalentemente, que

$$h \cdot {}_x1_x = \epsilon(h)_x 1_x, \ \forall h \in H.$$

Vimos que si $\mathcal{C}$ es una k^G-módulo categoría parcial tal que para cualquier $h \in k^G$, y para cualquier $x \in \mathcal{C}_0$, vale la igualdad

$$h \cdot {}_x 1_x = \epsilon(h) {}_x 1_x,$$

entonces $\mathcal{C}$ resulta una k^G-módulo categoría. Por lo tanto, la primera condición necesaria para tener una acción parcial de k^G - una graduación parcial- que no sea global es que exista un $x \in \mathcal{C}_0$ tal que ${}_x 1_x$ no es homogéneo de grado e_G.

Dado un grupo finito G y una k^G-módulo categoría parcial inducida por k, el álgebra k^G tiene base multiplicativa $\{p_g\}_{g \in G}$. Si escribimos $\lambda_g^x = \Lambda^x(p_g)$ para cada $x \in \mathcal{C}_0$, las ecuaciones (1), (2) y (3) se traducen como:

(1') $\sum_g \lambda_g^x = {}_x 1_x$,

(2') $\lambda_g^x = \sum_h \lambda_{gh^{-1}}^x \lambda_h^x$,

(3') $\lambda_h^x \lambda_g^x = \lambda_{hg^{-1}}^x \lambda_g^x = \lambda_{g^{-1}h}^x \lambda_g^x$

para todo $g, h \in G$.

Veamos ahora un ejemplo de una H-módulo categoría parcial que no es global.

Ejemplo 5.2.1. Sea k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $car(k)$ no divide a n. Sea C_n el grupo cíclico de orden n: $C_n = \{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}\}$ y $H = k^{C_n}$. Sabemos que H es un álgebra de Hopf con k-base multiplicativa $\{p_{t^i}\}_{0 \le i \le n-1}$, donde la multiplicación en los elementos de la base está dada por $p_{t^i} p_{t^j} = \delta_{i,j} p_{t^j}$ y la comultiplicación por $\Delta(p_{t^i}) = \sum_{j=0}^{n-1} p_{t^{i-j}} \otimes p_{t^j}$. Sea $\mathcal{C}$ la k-categoría con $\mathcal{C}_0 = \{1, 2, 3\}$ y ${}_2\mathcal{C}_1$, ${}_3\mathcal{C}_2$ y ${}_1\mathcal{C}_3$ los k-espacios vectoriales con generadores α, β y γ, respectivamente, tal que $\beta\alpha = 0 = \gamma\beta = \alpha\gamma$. Sea también, ${}_i\mathcal{C}_i$ el k-espacio vectorial con generador ${}_i 1_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Consideremos la siguiente acción parcial de H en $\mathcal{C}$:

$$p_g \cdot a = \frac{1}{n} a, \ \forall a \in {}_y\mathcal{C}_x, \ \forall g \in C_n.$$

Es inmediato verificar que esta fórmula define una acción parcial de H en $\mathcal{C}$. Dado que para todo $x \in \mathcal{C}_0$ y para todo $g \in C_n$, $p_g \cdot {}_x 1_x \neq 0$, es claro que esta acción no es global.

Si bien puede parece que esta acción parcial es muy particular, vamos a deducir que en el caso $H = k^{C_n}$ no son muchas las opciones de acción parcial.

De la ecuación (3') deducimos que dado $\lambda_h^x \neq 0$, resulta $\lambda_h^x \lambda_h^x = \lambda_e^x \lambda_h^x$ y por lo tanto $\lambda_h^x = \lambda_e^x$, pues la acción está inducida por k. Luego, si para todo $h \in H$, $\lambda_h^x \neq 0$, entonces $\lambda_g^x = \lambda_e^x$, para todo $g \in G$, por lo que Λ^x resulta constante. Como consecuencia de la igualdad (1'), obtenemos que ${}_x 1_x = \sum_g \lambda_g^x = |G| \lambda_e^x$, y así $\lambda_g^x = {}_x 1_x / |G|$, para todo $g \in G$.

La siguiente proposición muestra que la acción parcial del ejemplo anterior es la única posible si consideramos aquellas inducidas por acciones parciales que toman valores en k^*.

Proposición 5.2.2. *Dado un grupo finito G y un cuerpo k tal que $char(k)$ no divide a $|G|$, existe una única acción parcial de k^G en la k-categoría $\mathcal{C}$ tal que para cada $x \in \mathcal{C}_0$ la acción parcial inducida de k^G en el álgebra ${}_x\mathcal{C}_x$ toma valores en k^*, y está dada por $p_g \cdot {}_yf_x = \frac{1}{|G|}{}_yf_x$, para todo $g \in G,\ x, y \in \mathcal{C}_0,\ {}_yf_x \in {}_y\mathcal{C}_x$.*

Demostración. Ya vimos que necesariamente debe ser $\lambda^x_g = {}_x1_x/|G|,\ \forall x \in \mathcal{C}_0,\ \forall g \in G$.

Dados $g \in G,\ x, y \in \mathcal{C}_0$ y ${}_yf_x \in {}_y\mathcal{C}_x$,

$$p_g \cdot {}_yf_x = p_g \cdot ({}_y1_y \circ {}_yf_x) = \sum_{h\in G}(p_{gh^{-1}} \cdot {}_y1_y)(p_h \cdot {}_yf_x) = \sum_{h\in G} \frac{1}{|G|}p_h \cdot {}_yf_x = \frac{1}{|G|}{}_yf_x,$$

donde la última igualdad se sigue de que $\sum_{h\in G} p_h = 1_H$ y de la igualdad (5.1.1).

□

El siguiente teorema generaliza este resultado.

Teorema 5.2.3. *([AAB], Theorem 3.6) Sea $\mathcal{C}$ una categoría k-lineal. Denotemos $(\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0)^*$ al conjunto de pares $(x, y) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$ tales que $y \neq x$ y ${}_y\mathcal{C}_x \neq 0$. Sea G un grupo finito y supongamos $char(k)$ no divide a $|G|$. Dada una k^G-acción parcial en $\mathcal{C}$ inducida por acciones parciales de k^G en k, sea $G_x = \{g \in G \mid \lambda^x_g \neq 0\}$. Entonces,*

(i) para todo $x \in \mathcal{C}_0$, G_x es un subgrupo de G.

(ii) Hay una familia $\{{}_yt_x\}_{(x,y)\in(\mathcal{C}_0\times\mathcal{C}_0)^*}$ de elementos de G tal que si ${}_y\mathcal{C}_x \neq 0$, entonces $G_y = {}_yt_x\ G_x\ {}_yt_x^{-1}$.

Más aún, si la acción de k^G en cada ${}_y\mathcal{C}_x$ es también por multiplicación escalar, i.e. si cada morfismo $\pi_g\colon {}_y\mathcal{C}_x \to {}_y\mathcal{C}_x$ es un múltiplo escalar de $Id_{{}_y\mathcal{C}_x}$, entonces

(iii) $({}_zt_{yy}t_x)\ G_x = {}_zt_x\ G_x$ siempre que la composición ${}_z\mathcal{C}_y \otimes {}_y\mathcal{C}_x \to {}_z\mathcal{C}_x$ no sea nula.

Recíprocamente, dado un par $(\{G_x\}_{x\in\mathcal{C}_0}), \{{}_yt_x\}_{(x,y)\in(\mathcal{C}_0\times\mathcal{C}_0)^*})$ que verifique (i), (ii) y (iii), podemos definir una k^G-acción parcial en $\mathcal{C}$.

Demostración. Supongamos que tenemos una k^G-acción parcial inducida por k. Para cada $x \in \mathcal{C}_0$, sea $\Lambda^x \in \mathrm{Hom}_k(k^G, {}_x\mathcal{C}_x)$ el morfismo asociado. Se sigue de la igualdad $\lambda^x_h\lambda^x_g = \lambda^x_h\lambda^x_{gh^{-1}}$ que $\lambda^x_g = \lambda^x_{gh^{-1}}$, para todo $g, h \in G_x$. En particular, $\lambda^x_g = \lambda^x_{gg^{-1}} = \lambda^x_e$. Notemos que la ecuación (1') implica que $G_x \neq \emptyset$ y por lo tanto $e \in G_x$ y Λ^x es constante en G_x. Podemos deducir entonces que G_x es subgrupo de G pues ya vimos que G_x contiene a e y además vale que $gh^{-1} \in G_x$ para todo $g, h \in G_x$. De la igualdad (1'), se sigue que el valor común de λ^x_g para $g \in G_x$ debe ser ${}_x1_x/|G_x|$.

Vamos a ver que si ${}_y\mathcal{C}_x \neq 0$ entonces los grupos G_x y G_y son conjugados. Notemos que dado un morfismo no nulo ${}_yf_x \in {}_y\mathcal{C}_x$, $\sum_g \pi_g({}_yf_x) = \sum p_g \cdot {}_yf_x = 1_{k^G} \cdot {}_yf_x = {}_yf_x$, por lo que existe al menos un $t \in G$ tal que π_t es no nulo. De la ecuación (5.1.7) y usando que $p_rp_t = \delta^t_r p_t$ obtenemos

$$\pi_s\pi_t = \lambda^y_{st^{-1}}\pi_t = \lambda^x_{t^{-1}s}\pi_t, \qquad \forall s, t \in G. \tag{5.2.1}$$

En efecto,

$$\pi_s\pi_t({}_yf_x) = \sum_r \lambda^y_{sr^{-1}}(p_rp_t \cdot {}_yf_x) = \lambda^y_{st^{-1}}(p_t \cdot {}_yf_x) = \lambda^y_{st^{-1}}\pi_t({}_yf_x).$$

Por otro lado,

$$\pi_s\pi_t({}_yf_x) = \sum_r (p_rp_t \cdot {}_yf_x)\lambda^x_{r^{-1}s} = (p_t \cdot {}_yf_x)\lambda^x_{t^{-1}s} = \pi_t({}_yf_x)\lambda^x_{t^{-1}s}.$$

De estas ecuaciones se sigue que si $\pi_t \neq 0$ para algún $t \in G$ y ${}_yf_x \in {}_yC_x$ es tal que $\pi_t({}_yf_x) \neq 0$, evaluando la ecuación (5.2.1) en ${}_yf_x$ concluimos que $\lambda^y_{st^{-1}} = \lambda^x_{t^{-1}s}$, $\forall s \in G$. Esto último implica que $\lambda^y_g = \lambda^x_{t^{-1}gt}$ para todo $g \in G$ y por lo tanto $G_y = tG_xt^{-1}$. Observar que t no está unívocamente determinado. Eligiendo un ${}_yt_x$ para cada par $(x, y) \in (\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0)^*$ obtenemos una familia $\{{}_yt_x\}_{(x,y)\in(\mathcal{C}_0\times\mathcal{C}_0)^*}$ que satisface (ii).

En particular, si G abeliano, la familia $(G_x)_{x\in\mathcal{C}'_0}$, donde $\mathcal{C}'$ es una componente conexa de $\mathcal{C}$, es constante.

Supongamos ahora que la acción parcial en cada ${}_y\mathcal{C}_x$ está también inducida por una acción parcial sobre k. La ecuación (5.2.1) implica que

$$\pi_{tg}\pi_t = \lambda^y_{tgt^{-1}}\pi_t, \qquad \forall t, g \in G. \tag{5.2.2}$$

Así, para $\pi_t \neq 0$: $\pi_{tg} \neq 0$ si y sólo si $tgt^{-1} \in G_y$ y a su vez esto sucede si y sólo si $g \in G_x$. Luego, $\{h \in G \mid \pi_h \neq 0\} = {}_yt_xG_x$. Como π_h es un múltiplo escalar de $Id_{{}_y\mathcal{C}_x}$ para todo $h \in G$ y $(x, y) \in (\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0)^*$, se sigue de la igualdad (5.2.2) que:

$$\pi_h = \begin{cases} \frac{1}{|G_x|}Id_{{}_y\mathcal{C}_x}, & h \in {}_yt_xG_x \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En lo que sigue, dado $(x, y) \in (\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0)^*$ utilizaremos la notación ${}^y\pi^x_g$ para el morfismo $\pi_g \in \operatorname{End}({}_y\mathcal{C}_x)$. Por (5.1.2):

$${}^z\pi^x_g({}_zf_y \circ {}_yh_x) = \sum_l {}^z\pi^y_{gl^{-1}}({}_zf_y) \circ {}^y\pi^x_l({}_yh_x),$$

para todo $g \in G$, ${}_zf_y \in {}_z\mathcal{C}_y$, ${}_yh_x \in {}_y\mathcal{C}_x$ y (x, z), (x, y) y (y, z) en $(\mathcal{C}_0\times\mathcal{C}_0)^*$. Si $g \in {}_zt_xG_x$, entonces ${}^z\pi^x_g = (1/|G_x|)Id_{{}_z\mathcal{C}_x}$, y así:

$$(1/|G_x|)({}_zf_y \circ {}_yh_x) = \sum_l {}^z\pi^y_{gl^{-1}}({}_zf_y) \circ {}^y\pi^x_l({}_yh_x) = \sum_{l\in {}_yt_xG_x} {}^z\pi^y_{gl^{-1}}({}_zf_y) \circ (1/|G_x|)_yh_x.$$

Luego, para que valga la igualdad es necesario que $\sum_{l\in {}_yt_xG_x} {}^z\pi^y_{gl^{-1}} = Id_{{}_z\mathcal{C}_y}$, de donde se sigue que para cada $l \in {}_yt_xG_x$, vale que ${}^z\pi^y_{gl^{-1}} = 1/|G_x|Id_{{}_z\mathcal{C}_y}$. En consecuencia, como $g = {}_zt_xs$ para algún $s \in G_x$, concluimos que:

$$\{gl^{-1} \mid l \in {}_yt_xG_x\} = \{{}_zt_xh_yt_x^{-1} \mid h \in G_x\} = {}_zt_xG_x,$$

lo que implica que ${}_zt_x = {}_zt_{yy}t_xh$ para algún $h \in G_x$, y por lo tanto ${}_zt_xG_x = ({}_zt_{yy}t_x)G_x$.

Consideremos ahora un par $(\{G_x\}_{x\in\mathcal{C}_0}), \{{}_yt_x\}_{(x,y)\in(\mathcal{C}_0\times\mathcal{C}_0)^*})$ satisfaciendo las condiciones (i), (ii) y (iii) y sea n el número en común de elementos de los G_x. Definimos las siguientes familias de escalares:

$$\lambda_g^x = \begin{cases} \frac{1}{n}, & g \in G_x \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad {}^y\tilde{\pi}_g^x = \begin{cases} \frac{1}{n}, & g \in {}_yt_xG_x \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Podemos definir una acción parcial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p_g \cdot {}_xf_x &= \lambda_g^x{}_xf_x, \\ p_g \cdot {}_yf_x &= {}^y\tilde{\pi}_g^x{}_yf_x. \end{aligned}$$

Veamos que esto define una k^G-acción parcial. Por construcción, ya tenemos una acción parcial de k^G en cada álgebra ${}_x\mathcal{C}_x$. Resta ver que los morfismos $\pi_g = {}^y\tilde{\pi}_g^xId_{{}_y\mathcal{C}_x}$, para cada $g \in G$, $(x,y) \in (\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0)^*$, verifican las condiciones:

$$\sum \pi_g = Id_{{}_y\mathcal{C}_x}, \tag{5.2.3}$$

$$\pi_g = \sum_l \lambda_{gl^{-1}}^y \pi_l = \sum_l \lambda_{l^{-1}g}^x \pi_l, \tag{5.2.4}$$

$$\pi_g\pi_h = \lambda_{gh^{-1}}^y \pi_h = \lambda_{h^{-1}g}\pi_h. \tag{5.2.5}$$

La verificación de la ecuación (5.2.3) es inmediata:

$$\sum \pi_g = \sum_{g\in{}_yt_xG_x} \frac{1}{n}Id_{{}_y\mathcal{C}_x} = n\frac{1}{n}Id_{{}_y\mathcal{C}_x} = Id_{{}_y\mathcal{C}_x}.$$

Para la ecuación (5.2.5), si $\pi_h = 0$ es claro que valen las igualdades. Supongamos que $\pi_h \neq 0$, entonces $h \in {}_yt_xG_x$ y para $g \in {}_yt_xG_x$ resulta que $gh^{-1} \in {}_yt_x\ G_x\ {}_yt_x^{-1} = G_y$. En este caso $\pi_g\pi_h = (1/n)\pi_h = \lambda_{gh^{-1}}^y\pi_h$. Análogamente se deduce que si $\pi_g = 0$ entonces $\lambda_{gh^{-1}}^y = 0$. La otra igualdad se prueba de forma similar.

Finalmente, la ecuación (5.2.4) es consecuencia de (5.2.3) y (5.2.5). Por ejemplo:

$$\sum_l \lambda_{gl^{-1}}^y \pi_l = \sum_l \pi_g\pi_l = \pi_g(\sum \pi_l) = \pi_g.$$

Las condiciones que involucran tres o más objetos distintos son consecuencia de las hipótesis en la familia $\{{}_yt_x\}$.

□

Notemos que si la categoría es Schurian (donde todo espacio de morfismos ${}_y\mathcal{C}_x$ es nulo o unidimensional) este resultado describe todas las estructuras de k^G-acciones parciales.

Ejemplo 5.2.4. Sea K_4 el grupo de Klein, esto es

$$K_4 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$$

y sea k un cuerpo cuya característica no divide a 4.

Consideremos la k-categoría $\mathcal{C}$ con objetos $\mathcal{C}_0 = \{1, 2\}$ y morfismos ${}_1\mathcal{C}_1 = {}_2\mathcal{C}_1 = {}_2\mathcal{C}_2 = k$ y ${}_1\mathcal{C}_2 = 0$. Sea $f \in {}_2\mathcal{C}_1$ tal que $f \neq 0$. Vamos a describir acciones parciales de $(kK_4)^*$ en $\mathcal{C}$.

Definimos la acción parcial en ${}_1\mathcal{C}_1$ por

$$\begin{aligned} \lambda_e^1 &= \lambda_a^1 = \frac{1}{2}, \\ \lambda_b^1 &= \lambda_{ab}^1 = 0, \end{aligned}$$

y en ${}_2\mathcal{C}_2$ por

$$\begin{aligned} \lambda_e^2 &= \lambda_a^2 = \frac{1}{2}, \\ \lambda_b^2 &= \lambda_{ab}^2 = 0. \end{aligned}$$

Afirmamos que entonces quedan definidas acciones parciales en $\mathcal{C}$.

Por el teorema anterior, basta mostrar que existen elementos ${}_2t_1$ en $G = K_4$ tal que los conjuntos G_1, G_2 y el elemento ${}_2t_1$ verifican (i) y (ii), ya que (iii) en este caso se verifica trivialmente. Podemos observar que los conjuntos $G_1 = G_2 = \{e, a\}$ son subgrupos de K_4 y para cualquier valor de ${}_2t_1 \in G$ resulta $G_2 = {}_2t_1\ G_1\ {}_2t_1^{-1}$ ya que el grupo $\mathcal{G}$ es abeliano. Además, de la demostración del teorema se sigue que la acción parcial está dada por:

$$p_g \cdot id_1 = \begin{cases} \frac{1}{2} id_1, & \text{si } g \in G_1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$p_g \cdot id_2 = \begin{cases} \frac{1}{2} id_2, & \text{si } g \in G_2 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$p_g \cdot f = \begin{cases} \frac{1}{2} f, & \text{si } g \in {}_2t_1\ G_1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notar que quedan definidas dos acciones parciales distintas según el valor de ${}_2t_1$. Una de ellas corresponde a ${}_2t_1 \in \{e, a\}$ y la otra a ${}_2t_1 \in \{b, ab\}$. Igual que antes las acciones no son totales ya que las identidades no son homogéneas.

Observación 5.2.5. Cuando $|G| \neq 0$ en k, hay una correspondencia entre los posibles idempotentes Λ^x y las representaciones de permutación transitiva de G.

Para ver esto, consideremos un subgrupo H de G, de índice m, y sea

$$\Omega(H) = \{g_1 H, g_2 H, \ldots, g_m H\}$$

el conjunto de coclases a izquierda de H. Tomemos $g_1 = e$. Existe una acción a izquierda canónina de G en $\Omega(H)$ por multiplicación a izquierda:

$$g \triangleright g_i H = g g_i H$$

que resulta transitiva, i.e., la órbita de cualquier elemento de $\Omega(H)$ es todo el conjunto. Es fácil ver que el estabilizador de H:

$$G_H = \{g \in G \mid g \triangleright H = H\}$$

es igual a H.

Una representación de permutación transitiva de G es una acción transitiva a izquierda de G en un conjunto no vacío Ω. Dada tal acción, consideremos $x_0 \in \Omega$ y su estabilizador

$$H = G_{x_0} = \{g \in G \mid g \triangleright x_0 = x_0\}.$$

Si las coclases a izquierda de H son $H, g_2H, \ldots, g_mH$, es fácil ver que los elementos de Ω, que corresponden a la órbita de x_0, son $x_0, g_2x_0, \ldots, g_mx_0$ (y sus respectivos estabilizadores son $H, g_2Hg_2^{-1}, \ldots, g_mHg_m^{-1}$).

La función

$$\varphi \colon \Omega(H) \to \Omega$$

definida por $g_iH \mapsto g_ix_0$ es una equivalencia de acciones a izquierda: es biyectiva y

$$\varphi(g \triangleright x) = g \triangleright \varphi(x)$$

para todo $x \in \Omega(H)$ y todo $g \in G$.

Así, las representaciones de permutación transitiva no equivalentes de G se corresponden con las representaciones de permutación de $\Omega(H)$ asociadas a los subgrupos H de G.

Toda representación de permutación tiene una linearización canónica: en el caso de $\Omega(H)$, podríamos considerar el k-espacio vectorial generado por las coclases a izquierda $\{H, g_2H, \ldots, g_mH\}$, y la acción a izquierda de G en $\Omega(H)$ da lugar a una representación lineal $V_{\Omega(H)}$ de G donde cada $g \in G$ permuta los elementos de la base $\beta = \{H, g_2H, \ldots, g_mH\}$.

Finalmente, como $|G| \neq 0$ en k, podemos considerar el idempotente

$$e_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h$$

de kG; el ideal a izquierda V_H generado por e_H es el subespacio de kG generado por los elementos $v_H, v_{g_2H}, \ldots, v_{g_mH}$, donde

$$v_{g_iH} = \sum_{h \in H} g_ih.$$

Estos elementos son linealmente independientes y por lo tanto forman una base de V_H. La representación lineal asociada a e_H está dada por multiplicación a izquierda en V_H, y la biyección canónica entre las coclases a izquierda de H y los vectores v_{g_iH} determina una equivalencia de representaciones lineales entre $V_{\Omega(H)}$ y V_H. Más aún, G actúa en V_H permutando los elementos v_{g_iH}, y la restricción de la acción de G en la base $\Omega = \{v_H, v_{g_2H}, \dots, v_{g_mH}\}$ es una representación de permutación transitiva que es equivalente a la representación de permutación de $\Omega(H)$. Por lo tanto, cuando $|G| \neq 0$ en k, las acciones parciales de k^G en k están en correspondencia con las representaciones de permutación transitiva de G.

5.3. Ejemplos

A continuación daremos otro tipo de ejemplos.

Ejemplos 5.3.1. 1. Acciones parciales de kG.

Los mismos métodos que usamos para describir acciones parciales de k^G inducidas por k se pueden aplicar para describir las acciones parciales de kG inducidas por k. Sea $\{\delta_g\}_{g\in G}$ una k-base de kG. Escribiendo λ_g para $\Lambda(\delta_g)$, las siguientes ecuaciones definen una acción parcial:

(1) $\lambda_e = 1$,

(2) $\lambda_g = \lambda_g^2$,

(3) $\lambda_g \lambda_h = \lambda_g \lambda_{gh}$.

De manera similar a lo hecho para k^G-acciones parciales, se sigue que el soporte de Λ, i.e $\{g \in G \mid \lambda_g \neq 0\}$, es un subgrupo de G en donde Λ es constante (por (2), si $\lambda_g \neq 0$ entonces $\lambda_g = 1$). Igual que antes, hay una correspondencia entre kG-acciones parciales inducidas por k y subgrupos de G.

2. Acciones parciales de T_2 en k.

Sea T_2 el álgebra de Sweedler de dimensión 4 sobre k:

$$T_2 = \langle 1, g, x, xg \mid g^2 = 1, x^2 = 0, gx = -xg \rangle,$$

donde $car(k) \neq 2$. Notemos que T_2 tiene una base formada por $e_1 = (1+g)/2$, $e_2 = (1-g)/2$, $h_1 = xe_1$ y $h_2 = xe_2$. En efecto,

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 &= 1, \\ e_1 - e_2 &= g, \\ h_1 + h_2 &= x, \\ h_1 - h_2 &= xg. \end{aligned}$$

Además, es claro que $\{e_1, e_2\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales de T_2 y como además $h_1^2 = h_2^2 = 0$, resulta que $\{h_1, h_2\}$ es una base del radical de T_2.

Para los otros productos de elementos de la base, tenemos:

$$\begin{aligned} e_1h_2 &= h_2e_2 = h_2, \\ e_2h_1 &= h_1e_1 = h_1, \end{aligned}$$

y los restantes son nulos.

Veamos cómo es la estructura de álgebra de Hopf. Las expresiones para el coproducto en esta base son:

$$\begin{aligned} \Delta(e_1) &= e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2, \\ \Delta(e_2) &= e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1, \\ \Delta(h_1) &= e_1 \otimes h_1 - e_2 \otimes h_2 + h_1 \otimes e_1 + h_2 \otimes e_2, \\ \Delta(h_2) &= e_1 \otimes h_2 - e_2 \otimes h_1 + h_1 \otimes e_2 + h_2 \otimes e_1. \end{aligned}$$

La counidad se define por $\epsilon(e_1) = 1$ y $\epsilon(e_2) = \epsilon(h_1) = \epsilon(h_2) = 0$. Finalmente, la antípoda está dada por:

$$S(e_1) = e_1,\ S(e_2) = e_2,\ S(h_1) = -h_2,\ S(h_2) = h_1.$$

Consideremos la k-categoría $\mathcal{C}$ con un único objeto $\{*\}$ y un k-espacio vectorial de morfismos de dimensión 1. Es decir, miramos a k como una k-categoría. Para definir una acción parcial de T_2 en $\mathcal{C}$ vamos a utilizar los métodos de la sección anterior.

Como $1_{T_2} = e_1 + e_2$, de la ecuación (5.1.1) se sigue que

$$\lambda_{e_1} + \lambda_{e_2} = 1. \tag{5.3.1}$$

Usando la ecuación (5.1.2) para e_1 y e_2, obtenemos

$$\lambda_{e_1} = \lambda_{e_1}^2 + \lambda_{e_2}^2, \tag{5.3.2}$$
$$\lambda_{e_2} = 2\lambda_{e_1}\lambda_{e_2}. \tag{5.3.3}$$

Por lo tanto, si $\lambda_{e_2} = 0$ entonces $\lambda_{e_1} = 1$, por (5.3.1).

Escribiendo (5.1.2) para h_1 y h_2:

$$\begin{aligned} \lambda_{h_1} &= 2\lambda_{e_1}\lambda_{h_1}, \\ \lambda_{h_2} &= 2\lambda_{e_1}\lambda_{h_2}. \end{aligned}$$

Así, para $\lambda_{e_1} = 1$ se tiene que $\lambda_{h_1} = \lambda_{h_2} = 0$, y la acción es trivial: $\lambda_h = \epsilon(h)$ para todo $h \in T_2$. Si $\lambda_{e_2} \neq 0$ entonces de (5.3.3) se sigue que $\lambda_{e_1} = 1/2$ y ahora por (5.3.1) también debe ser $\lambda_{e_2} = 1/2$. De (5.1.5) obtenemos $\lambda_{h_1}\lambda_{e_1} = 2\lambda_{h_1}\lambda_{e_1}$ y por lo tanto

$\lambda_{h_1} = 0$. Las ecuaciones restantes no ponen restricciones en h_2, y para cualquier $\alpha \in k$ las igualdades

$$\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2} = 1/2,\ \lambda_{h_1} = 0,\ \lambda_{h_2} = \alpha$$

definen una acción parcial de T_2 en k. Esta es la acción parcial obtenida en [AB2] proveniente de la dualización de una coacción parcial de T_2 en k presentada en [CJ]. Por lo tanto, hay esencialmente dos estructuras de T_2-módulo categoría parcial en el álgebra k. No sabemos si para distintos valores de α se obtienen acciones parciales isomorfas o no.

3. Acciones parciales de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

   Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y consideremos el álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

   $H := \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf con

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= x \otimes 1 + 1 \otimes x,\\ \epsilon(x) &= 0,\\ S(x) &= -x,\end{aligned}$$

para todo x en $\mathfrak{g}$.

Recordemos también que cualquier morfismo $H \to A$ de álgebras queda determinado por su valor en $\mathfrak{g}$. Una acción de H en un álgebra A es un morfismo k-lineal

$$H \xrightarrow{\Pi} \operatorname{End}_k(A).$$

Por la condición (5.1.2), dado $x \in \mathfrak{g}$,

$$x \cdot (ab) = (x \cdot a)b + a(x \cdot b),\ \forall a, b \in A, \tag{5.3.4}$$

por lo tanto una acción de H en A es equivalente a tener un morfismo

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\mu} \operatorname{Der}_k A.$$

Además, la acción es total si y sólo si Π es un morfismo de álgebras, o de manera equivalente, μ es un morfismo de álgebras de Lie.

Consideremos ahora un morfismo k-lineal $\Lambda : H \to k$. Por (5.1.5) sabemos que $\Lambda(h)\Lambda(k) = \sum \Lambda(h_1)\Lambda(h_2k)$, $\forall h, k \in H$. Dados $x, y \in \mathfrak{g}$:

$$\Lambda(x)\Lambda(y) = \Lambda(x)\Lambda(y) + \Lambda(1)\Lambda(xy).$$

Luego,

$$\Lambda(1)\Lambda(xy) = 0,$$

y como $\Lambda(1) = 1$,
$$\Lambda(xy) = 0.$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned}
\Lambda(x)\Lambda(yz) &= \Lambda(x)\Lambda(yz) + \Lambda(1)\Lambda(xyz) \\
\Lambda(1)\Lambda(xyz) &= 0 \\
\Lambda(xyz) &= 0.
\end{aligned}$$

En general, inductivamente se puede ver que $\Lambda(x_1 \dots x_r) = 0$, $\forall r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Sea ahora $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$ y consideremos la base de Poincaré-Birkhoff-Witt de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$: $\{x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \mid i_1, \dots i_n \geq 0\}$. Tenemos que

$$\Lambda(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}) = \begin{cases} 1, & i_1 = \dots = i_n = 0 \\ \Lambda(x_j), & i_j = 1,\ i_k = 0\ \forall k \neq j \\ 0, & \sum i_j > 1. \end{cases}$$

Luego, Λ queda determinada por $\Lambda(x)$ para x en la base de $\mathfrak{g}$. Pero por (5.1.2), como $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$:

$$x \cdot 1 = x \cdot (1.1) = (x \cdot 1)1 + 1(x \cdot 1), \forall x \in \mathfrak{g},$$

de donde se sigue que $\Lambda(x) = x \cdot 1 = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$. En este caso $\Lambda = \epsilon$ y por lo tanto la acción es total. Concluimos que en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ no hay acciones parciales inducidas por k que no sean totales.

4. Acciones parciales de $T_n(q)$.

   Sea n un número natural y q una raiz n-ésima primitiva de la unidad. Sea $H := T_n(q)$ la n-ésima álgebra de Taft sobre $\mathbb{C}$:

   $$T_n(q) = \mathbb{C}\langle x, y \mid x^n = 1,\ y^n = 0,\ yx = qxy\rangle.$$

   La estructura de álgebra de Hopf se obtiene análogamente al ejemplo de T_2, definiendo el coproducto por $\Delta(x) = x \otimes x$, $\Delta(y) = y \otimes x + 1 \otimes y$, la counidad por $\epsilon(x) = 1$, $\epsilon(y) = 0$ y la antípoda por $S(x) = x^{-1}$ y $S(y) = -yx^{-1}$.

   Vamos a caracterizar las acciones parciales de H en $\mathbb{C}$. Consideremos como antes un morfismo $\mathbb{C}$-lineal $\Lambda : H \to \mathbb{C}$.

   Por (5.1.5) sabemos que $\Lambda(h)\Lambda(k) = \sum \Lambda(h_1)\Lambda(h_2k), \forall h, k \in H$, por lo tanto $\Lambda(x)\Lambda(1) = \Lambda(x)\Lambda(x)$ y como $\Lambda(1) = 1$ deducimos que $\Lambda(x) = 0$ o $\Lambda(x) = 1$.

   Supongamos primero que $\Lambda(x) = 1$. Dados $0 \leq k \leq n-$, $0 \leq l \leq n-1$, la igualdad (5.1.5) nos dice que $\Lambda(x)\Lambda(x^k y^l) = \Lambda(x)\Lambda(x^{k+1}y^l)$ de donde se sigue que

   $$\Lambda(y^l) = \Lambda(xy^l) = \dots = \Lambda(x^{n-1}y^l), \tag{5.3.5}$$

para cada $0 \leq l \leq n-1$.

Por otro lado, mirando $\Delta(y)$ obtenemos:

$$\Lambda(y)\Lambda(y^l) = \Lambda(y)\Lambda(xy^l) + \Lambda(1)\Lambda(y^{l+1}) \overset{(5,3,5)}{=} \Lambda(y)\Lambda(y^l) + \Lambda(1)\Lambda(y^{l+1}),$$

con $0 \leq l \leq n-2$, y esto implica que $\Lambda(y^l) = 0$, cualquiera sea $1 \leq l \leq n-1$.

Por lo tanto, por la ecuación (5.3.5) se tiene que $\Lambda = \epsilon$ y la acción es total.

Luego, para que la acción parcial no sea total, debe ser $\Lambda(x) = 0$.

Como $\Delta(x^2) = \Delta(x)\Delta(x) = (x \otimes x)(x \otimes x) = x^2 \otimes x^2$ tenemos que:

$$\Lambda(x^2)\Lambda(1) = \Lambda(x^2)\Lambda(x^2),$$

por lo que nuevamente tenemos dos casos: $\Lambda(x^2) = 0$ o bien $\Lambda(x^2) = 1$.

Supongamos que $\Lambda(x^2) = 1$. Para k entero no negativo, tenemos

$$\Lambda(x^2)\Lambda(x^k) = \Lambda(x^2)\Lambda(x^{k+2}),$$

es decir, $\Lambda(x^k) = \Lambda(x^{k+2})$.

Esto implica que

$$1 = \Lambda(x^2) = \Lambda(x^4) = \ldots = \Lambda(x^{2k}),$$

y que

$$0 = \Lambda(x) = \Lambda(x^3) = \ldots = \Lambda(x^{2k+1}),$$

o de manera equivalente, $\Lambda(x^k) = \frac{(-1)^k+1}{2}$.

Notar que en este caso n debe ser par ya que $\Lambda(x^n) = \Lambda(1) = 1$.

Sea $\alpha = \Lambda(y)$, mirando $\Delta(y)$ obtenemos una fórmula recursiva para calcular Λ: para $0 \leq k \leq n-1$, $0 \leq l \leq n-2$,

$$\begin{aligned} \Lambda(y)\Lambda(x^k y^l) &= \Lambda(y)\Lambda(x^{k+1}y^l) + \Lambda(1)\Lambda(yx^k y^l) \\ \alpha\Lambda(x^k y^l) &= \alpha\Lambda(x^{k+1}y^l) + q^k\Lambda(x^k y^{l+1}), \end{aligned}$$

y despejando:

$$\Lambda(x^k y^{l+1}) = \alpha q^{-k}(\Lambda(x^k y^l) - \Lambda(x^{k+1}y^l)). \tag{5.3.6}$$

Además, para $l = n-1$:

$$\Lambda(x^k y^{n-1}) = \Lambda(x^{k+1} y^{n-1}),$$

cualquiera sea $0 \leq k \leq n-2$. Notar que esto ya lo habíamos visto en (5.3.5).

Ahora, como $\Lambda(x^2) = 1$ vemos que

$$\Lambda(x^k y^l) = \Lambda(x^2)\Lambda(x^k y^l) \overset{(5,1,5)}{=} \Lambda(x^2)\Lambda(x^{k+2} y^l) = \Lambda(x^{k+2} y^l),$$

para $0 \leq k, l \leq n-1$, y entonces por (5.3.6):

$$\alpha = \Lambda(y) = \Lambda(x^2 y) = \alpha q^{-2}(\Lambda(x^2) - \Lambda(x^3)) = \alpha q^{-2}.$$

Luego, si $\alpha \neq 0$ se sigue que $q = -1$ y por lo tanto $n = 2$.

Así, para $n > 2$ necesariamente debe ser $\alpha = 0$ y es fácil ver que esto define una acción parcial de H en $\mathbb{C}$ dada por:

$$\Lambda(x^k y^l) = \begin{cases} \frac{(-1)^k+1}{2}, & l = 0 \\ \\ 0, & 1 \leq l \leq n-1. \end{cases}$$

Observar que para $n = 2$ y $q = -1$ (álgebra de Sweedler) se obtiene la acción del ejemplo 2, donde $\Lambda(1) = 1$, $\Lambda(x) = 0$ y $\Lambda(y) = \Lambda(xy) = \alpha$ con α arbitrario.

Siguiendo de esta forma, en el caso en que $\Lambda(x^2) = 0$, podría ser $\Lambda(x^3) = 1$ o $\Lambda(x^3) = 0$. Se puede ver que si $\Lambda(x^3) = 1$, entonces n debe ser múltiplo de 3 y se cumple que $\Lambda(x^k) = 1$ para k múltiplo de 3, y 0 en otro caso. Usando la fórmula recursiva y que $\Lambda(y) = \Lambda(x^3 y)$ (consecuencia de (5.1.5)) obtenemos

$$\alpha = \Lambda(y) = \Lambda(x^3 y) = \alpha q^{-3}(\Lambda(x^3) - \Lambda(x^4)) = \alpha q^{-3}.$$

y por lo tanto si $\alpha \neq 0$ entonces $n = 3$ y se puede ver que esto define una acción parcial para cada α. Además, para $\alpha = 0$ y n múltiplo de 3 se tiene la acción parcial dada por:

$$\Lambda(x^k y^l) = \begin{cases} 1, & k \equiv 0 \pmod{3},\ l = 0 \\ \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En general, para cada d divisor de n queda definida una acción parcial tomando

$$\Lambda(x^k y^l) = \begin{cases} 1, & k \equiv 0 \pmod{d},\ l = 0 \\ \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, si d es un divisor propio de n, esta acción queda determinada por los valores de x^k con $0 \leq k \leq n-1$.

En conclusión, en $T_n(q)$ hay esencialmente tantos tipos de acciones parciales sobre k como divisores de n. Notar que para $d = 1$ se obtiene la acción trivial (total). No sabemos si en el caso general con $d = n$ es cierto que para todo valor de α queda definida una acción parcial por la fórmula (5.3.6).

Bibliografía

[AAB] E.R. Alvares, M.M.S. Alves, E. Batista *Partial Hopf module categories*, Journal of Pure and Applied Algebra, 217(8), (2013), 1517-1534.

[AB1] M. M. S. Alves and E. Batista, Partial Hopf actions, *partial invariants and a Morita context*, Algebra Discrete Math. 3 (2009), 1-19.

[AB2] M. M. S. Alves and E. Batista, *Enveloping actions for partial Hopf actions*, Comm. Algebra 38 (2010), 2872-2902.

[ABV] M. M. S. Alves; E. Batista; J. Vercruysse, *Partial Representations of Hopf Algebras*, `arXiv:1309.1659`.

[CJ] S. Caenepeel y K. Janssen. *Partial (co)actions of Hopf algebras and partial Hopf-Galois theory*, Commm. Algebra **36**,(2008), pp. 2923-2946.

[CFM] W. Cortez, M. Ferrero y E. Marcos. *Partial actions on categories*, arXiv:1107.3850 (2011).

[CM] C. Cibils; E. N. Marcos, *Skew category, Galois covering and smash product of a k-category.* Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), no. 1, 39-50.

[CRS] C. Cibils; M. J. Redondo; A. Solotar, *The intrinsic fundamental group of a linear category.* Algebr. Represent. Theory 15 (2012), no. 4, 735-753.

[CS] C. Cibils y A. Solotar. *Galois coverings, Morita equivalence and smash extensions of categories over a field.* Doc. Math. **11**, (2006), pp. 143-159.

[DE] M. Dokuchaev, R. Exel. *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations*, Trans. Amer. Math. Soc. 357 **5**,(2005), pp. 1931-1952.

[DEP] M. Dokuchaev, R. Exel and P. Piccione, *Partial representations and partial group algebras*, J. Algebra, 226 (2000), 251-268.

[DES] M. Dokuchaev, R. Exel and J. J. Simón, *Crossed products by twisted partial actions and graded algebras*, J. Algebra 320 (2008), 3278-3310.

[DES2] M. Dokuchaev, R. Exel and J. J. Simón, *Globalization of twisted partial actions*, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), 4137-4160.

[DFP] M. Dokuchaev, M. Ferrero and A. Paques, *Partial Actions and Galois Theory*, J. Pure Appl. Alg. 208 (2007), 77-87.

[DNR] S. Dascalescu, C. Nastasescu, S. Raianu. *Hopf Algebras. An Introduction.*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 235, New York, 2001.

[E1] R. Exel, *Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms, and a generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence.* J. Funct. Anal. 122 (1994), no. 2, 361-401.

[E2] R. Exel, *Approximately finite C^*-algebras and partial automorphisms.* Math. Scand. 77 (1995), no. 2, 281-288.

[E3] R. Exel, *Twisted Partial Actions, A Classification of Regular C*-Algebraic Bundles*, Proc. London Math. Soc. 74 (1997), 417-443.

[E4] R. Exel, *Partial actions of groups and actions of inverse semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. 126, No. 12 (1998), 3481-3494.

[H] J. M. Howie. *An introduction to semigroup theory.* Academic Press , (1976).

[M] S. Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings.* Regional conference series in mathematics **82**, American Mathematical Soc. (1993).

[ML] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, Springer (Graduate Texts in Mathematics) 1998 (1972).

[T] E. J. Taft. *The order of the antipode of a finite-dimensional Hopf algebra.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA 68 (1971), 2631-2633.

[S] M. E. Sweedler. *Hopf Algebras.* Benjamin, New York, 1969.