UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

La propiedad del punto fijo para poliedros de dimensión dos

Iván Sadofschi Costa

Director: Jonathan Ariel Barmak

Diciembre de 2015

Agradecimientos

A mis padres.

A Caro, por apoyarme y estar siempre cuando la necesito.

A Jonathan, por guiarme en el camino de la investigación, por aconsejarme y por permitirme investigar junto a él. Por el tiempo que dedicó a esta tesis y las innumerables sugerencias que me hizo.

Al Jurado, por dedicar su tiempo a leer esta tesis.

A la OMA, por haberme hecho descubrir el mundo de la matemática y porque gracias a ella conocí mucha gente maravillosa. A Patricia, Flora, Beto y toda la gente que hace posible la OMA.

A quienes me entrenaron para participar en las Olimpíadas, especialmente a Alan Garbarz, Sergio Yuhjtman, Fede Felguer y Maxi Camporino. También a los innumerables exolímpicos que pasaban a contarnos cosas durante los entrenamientos.

A los amigos que conocí en las Olimpíadas: Matías, Nacho, Prillo, Mariano, Germán, Melanie, Zylber, Dani, Maite, Lupi, Cogo y Carolina Lang.

A los excelentes docentes que tuve durante la carrera. Especialmente a Guillermo Cortiñas y Gabriel Minian por haberme enseñado tantas cosas.

Al Seminario de Problemas, por hacer mucho más divertido el comienzo de la carrera.

A mis compañeros de cursada: Diego, Marce, Facu, Juanma, Maxi, Sofi, Matías Data y Tochi.

A Juampi por las tardes de entrenamiento y al Coach Agustín por todo lo que me enseñó.

A mis amigos de la Tercera: Carlos, Juan, Joaquín, Andrés, Martín, Hernán y Luli.

Índice general

Introducción

El objetivo de esta tesis es estudiar la propiedad del punto fijo para poliedros de dimensión dos y, en particular, responder dos preguntas formuladas por R.H. Bing en 1969. Recordemos que un espacio topológico tiene la propiedad del punto fijo si toda función continua del espacio en sí mismo tiene un punto fijo. El Teorema de Brouwer, por ejemplo, establece que el disco D^n tiene la propiedad del punto fijo para todo entero no negativo n. Por otro lado, la función antipodal muestra que la esfera S^n no tiene la propiedad del punto fijo. En general, es difícil decidir si un espacio dado tiene o no esta propiedad.

Una de las herramientas elementales de Teoría de punto fijo es el Teorema del punto fijo de Lefschetz, que afirma que si una función f de un poliedro compacto en sí mismo tiene número de Lefschetz no nulo, entonces debe tener un punto fijo. El número de Lefschetz $L(f)$ depende exclusivamente de los morfismos inducidos por f en la homología. El hecho de que $L(f)$ sea cero no implica que f no tenga un punto fijo. La teoría de punto fijo de Nielsen asocia a f un segundo entero $N(f)$, cuya nulidad garantiza, junto a otras hipótesis, la existencia de una función g homotópica a f sin puntos fijos.

Si bien la propiedad del punto fijo es un invariante topológico (de hecho todo retracto de un espacio con la propiedad del punto fijo tiene también esta propiedad), no es un invariante homotópico, como muestran los espacios $\mathbb{R}$ y $*$. Aún si nos restringimos a espacios métricos compactos, un ejemplo de Kinoshita [31] prueba que existe un espacio métrico compacto y contráctil que no tiene la propiedad del punto fijo. Sorprendentemente, la propiedad del punto fijo tampoco es un invariante homotópico en la categoría de poliedros compactos. Lopez muestra en [34] que existe un poliedro de dimensión 17 con la propiedad del punto fijo y tal que, al pegarle un disco a lo largo de un arco, se obtiene un poliedro homotópicamente equivalente sin la propiedad del punto fijo. Para conseguir este ejemplo, Lopez necesita construir un poliedro X con característica de Euler par y con la propiedad del punto fijo. El poliedro X hallado por Lopez tiene dimensión 8. En su artículo "The elusive fixed point property" [5], R.H. Bing formula doce preguntas relacionadas con la propiedad del punto fijo. Hasta 2014, ocho de estas preguntas habían sido respondidas. Las siguientes dos preguntas, están motivadas por los ejemplos de Lopez y serán respondidas en esta tesis.

Pregunta (Bing's Question 1). *¿Existe un poliedro compacto y de dimensión dos con la propiedad del punto fijo y característica de Euler par?*

Pregunta (Bing's Question 8). *¿Cuál es el menor entero positivo n tal que existen un poliedro X de dimensión n con la propiedad del punto fijo y un disco D tal que $X \cap D$ es un arco y $X \cup D$ no tiene la propiedad del punto fijo?*

Probaremos los siguientes resultados:

Teorema 3.1.22. *No existe ningún poliedro compacto de dimensión dos con característica de Euler distinta de 1 y grupo fundamental abeliano que tenga la propiedad del punto fijo.*

Corolario 3.2.8. *Hay poliedros compactos de dimensión 2 con la propiedad del punto fijo y característica de Euler igual a cualquier entero positivo n.*

Teorema 3.2.11. *Existe un poliedro compacto Y de dimensión 2, sin la propiedad del punto fijo y tal que el poliedro X, obtenido de Y haciendo un colapso elemental de dimensión 2, tiene la propiedad del punto fijo.*

El Corolario 3.2.8 responde afirmativamente a la primera pregunta de Bing, mientras que el Teorema 3.2.11 prueba que la respuesta a la octava pregunta es 2.

El grupo fundamental juega un rol protagónico en este trabajo. Por un lado, utilizaremos una clasificación obtenida por W. Browning, que describe a todos los tipos homotópicos de poliedros de dimensión dos con grupo fundamental abeliano. Los representantes de estos tipos homotópicos son complejos asociados a ciertas presentaciones. Retomando ideas de Waggoner, hallaremos una condición algebraica equivalente a que S^2 sea retracto (salvo homotopía) de un poliedro dado. Para la demostración del Teorema 3.1.22, bastará analizar el caso de grupo fundamental con dos factores invariantes. Finalmente, para resolver ese caso, utilizaremos herramientas de teoría de Nielsen. Si bien la propiedad del punto fijo no es un invariante homotópico, un resultado de B. Jiang dice que sí lo es al restringirnos a poliedros sin *global separating points*. Este teorema profundo será imprescindible en nuestra demostración. El otro ingrediente que usaremos es un resultado de Borsuk, que dice que todo poliedro con primer grupo de homología racional no trivial tiene a S^1 como retracto y, por lo tanto, no tiene la propiedad del punto fijo.

Para probar el Corolario 3.2.8 y el Teorema 3.2.11, introduciremos el concepto de grupo de Bing y transformaremos el problema en uno algebraico, utilizando el hecho de que toda función continua de un espacio de Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$ en sí mismo es inducida (salvo homotopía) por un endomorfismo de G. Finalmente, utilizando el software GAP [18], encontraremos los grupos de Bing que permiten responder las Preguntas 1 y 8 de Bing.

Los resultados originales de esta tesis aparecen en nuestros artículos [2] y [39].

En el primer capítulo de este trabajo, recordaremos los resultados fundamentales de Teoría de punto fijo que utilizaremos en las secciones principales. El segundo capítulo está dedicado a estudiar los espacios construidos por Lopez. En dicho capítulo, utilizaremos el producto cup y operaciones de Steenrod para calcular algunos números de Lefschetz. En el tercer capítulo, se presentarán los resultados que responden a las preguntas de Bing.

Capítulo 1

Preliminares de teoría de punto fijo

En este capítulo exponemos algunas herramientas clásicas que serán usadas a lo largo de la tesis. En la Sección 1.1 se presentan los resultados más elementales relacionados con la propiedad del punto fijo. En la Sección 1.2, introducimos las nociones de local y global separating point, que cobrarán importancia más adelante. En la Sección 1.3 daremos dos demostraciones de un teorema de Borsuk que caracteriza a los espacios que se retraen a S^1. En la Sección 1.4 enunciaremos el Teorema de Lefschetz, que es la principal herramienta que tenemos para probar que un espacio tiene la propiedad del punto fijo y presentamos los resultados principales de Teoría de Nielsen.

1.1. La propiedad del punto fijo

Definición 1.1.1. Decimos que un espacio topológico X tiene la *propiedad del punto fijo* si toda función continua $f : X \to X$ tiene un punto fijo.

Ejemplo 1.1.2. Por el teorema del punto fijo de Brouwer, D^n tiene la propiedad del punto fijo para todo $n \geq 0$. En cambio, la función antipodal $a : S^n \to S^n$ muestra que S^n no tiene la propiedad del punto fijo para todo $n \geq 0$.

Observación 1.1.3. Un espacio con la propiedad del punto fijo es conexo.

En general, no es fácil decidir si un espacio tiene la propiedad del punto fijo o no. A continuación, veremos algunas construcciones elementales que permiten obtener nuevos espacios con la propiedad del punto fijo, a partir de otros espacios con la misma propiedad.

Lema 1.1.4. *Si X tiene la propiedad del punto fijo y A es un retracto de X, entonces A tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Llamemos $i : A \hookrightarrow X$ a la inclusión y consideremos una retracción $r : X \to A$. Sea $f : A \to A$ una función continua. Dado que X tiene la propiedad del punto fijo, existe $x_0 \in X$ tal que $(i \circ f \circ r)(x_0) = x_0$. Ahora $f(r(x_0)) = r(i(f(r(x_0)))) = r(x_0)$ y por lo tanto f tiene un punto fijo. $\square$

En el siguiente lema omitimos la mención explícita de los puntos base elegidos al formar la unión en un punto.

Lema 1.1.5. *Sean X_1, X_2 espacios topológicos. Entonces $X_1 \vee X_2$ tiene la propiedad del punto fijo si y solamente si X_1 y X_2 tienen la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Tenemos las inclusiones $j_i : X_i \to X_1 \vee X_2$. Llamemos $x_0 \in X_1 \vee X_2$ al punto base del wedge. Hay retracciones $r_i : X_1 \vee X_2 \to X_i$ definidas por

$$r_i(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X_i \\ x_0 & \text{si } x \notin X_i \end{cases}$$

Una implicación es una consecuencia inmediata del Lema 1.1.4. Probemos la otra implicación. Sea $f : X_1 \vee X_2 \to X_1 \vee X_2$ continua y supongamos que f no tiene puntos fijos. Para algún i tenemos que $f(x_0) \in X_i$. Pero entonces la función $r_i \circ f \circ j_i$ no tiene puntos fijos, contradicción. Luego f tiene un punto fijo. $\square$

En el Capítulo 2 probaremos que el producto de dos espacios con la propiedad del punto fijo no siempre tiene la propiedad del punto fijo. También veremos que el join, la suspensión y el producto smash no preservan esta propiedad.

1.2. Separating Points

Definición 1.2.1. Sea X un poliedro conexo. Decimos que $x \in X$ es un *local separating point* si existe un abierto conexo $U \ni x$ tal que $U - \{x\}$ no es conexo. Decimos que $x \in X$ es un *global separating point* si $X - \{x\}$ no es conexo. En particular, todo global separating point es un local separating point.

Notamos Δ^n al n-símplex. Recordemos que si X es un complejo simplicial y $x \in X$ es un vértice, el *link* de x, $\mathrm{lk}(x)$ es el subcomplejo de X formado por los símplices σ tales que $x \notin \sigma$ y $\sigma \cup \{x\}$ es un símplex de X. Las demostraciones de los siguientes resultados son sencillas.

Proposición 1.2.2. *Sean X un complejo simplicial conexo y $x \in |X|$. Son equivalentes:*

(i) x es un local separating point.

(ii) x es un vértice de X tal que $\mathrm{lk}(x)$ no es conexo o x pertenece al interior de un 1-símplex maximal de X.

Proposición 1.2.3. *Si X es un complejo simplicial conexo y $X \neq \Delta^1$ son equivalentes:*

(i) Existe $x \in X$ global (resp. local) separating point.

(ii) Existe un vértice $v \in X$ que es un global (resp. local) separating point.

Si un vértice $v \in X$ es un global separating point, entonces existen subcomplejos X_1 y X_2 de X tales que $X = X_1 \vee_v X_2$.

Proposición 1.2.4. *Sea X un complejo simplicial. Entonces existen subcomplejos $X_1, \ldots, X_n$, con cada X_i sin global separating points o isomorfo a Δ^1 y tales que $X = X_1 \vee_{v_1} \ldots \vee_{v_{n-1}} X_n$.*

Observación 1.2.5. En el lenguaje de la teoría de grafos, los X_i que aparecen en la proposición anterior no son otra cosa que los subcomplejos plenos correspondientes a las componentes biconexas del 1-esqueleto de X. Los puntos donde se hacen los wedge son los puntos de articulación.

A continuación recordamos las nociones de colapso y expansión elemental. El símbolo $\simeq$ será usado para denotar la relación de homotopía de funciones y la relación de equivalencia homotópica de espacios.

Definición 1.2.6. Sea X un complejo simplicial. Sean σ, τ símplices de X tales que τ es el único símplex de X que contiene estrictamente a σ. Entonces $Y = X - \{\sigma, \tau\}$ es un complejo simplicial homotópicamente equivalente a X. Si la dimensión de τ es n, decimos que Y se obtiene a partir de X mediante un *colapso elemental* de dimensión n. También decimos que X se obtiene de Y mediante una *expansión elemental* de dimensión n.

Proposición 1.2.7. *Si $X \neq \Delta^1$ es un complejo simplicial, haciendo expansiones elementales de dimensión 2, se puede obtener un poliedro sin global separating points.*

Demostración. Sea $u \in X$ un vértice que además es un global separating point. Entonces existen dos vértices v y w de X tales que $v, w \in \mathrm{lk}(u)$ y ambos vértices están en componentes conexas distintas de $X - \{u\}$. Esto permite hacer una expansión elemental de dimensión 2, agregando los símplices $\{v, w\}$ y $\{u, v, w\}$. Esta operación disminuye el rango de $\bigoplus_v \widetilde{H}_0(X - \{v\})$. Entonces, repitiendo la operación suficientes veces, se obtiene un poliedro tal que ningún vértice es un global separating point. Como $X \neq \Delta^1$, el poliedro obtenido no tiene global separating points. $\square$

1.3. Un resultado de Borsuk

Karol Borsuk probó que un *continuo de Peano* (un espacio métrico compacto, conexo y localmente conexo) tiene a S^1 como retracto si y solamente si el primer grupo de homología racional es no trivial. Más precisamente, probó que ambas condiciones son equivalentes a que el espacio no sea *unicoherente* [6, 30. Théorème] y

[7, 11. Korollar]. Del resultado de Borsuk se deduce que un continuo de Peano con primer grupo de homología racional no trivial no tiene la propiedad del punto fijo.

En este capítulo probaremos el Teorema de Borsuk para complejos simpliciales. Daremos dos demostraciones. La primera está basada en la que aparece en [33, §57, III, Theorem 4]. La segunda es original y tiene ideas en común con la demostración del Teorema 1.4.27 que enunciaremos más adelante.

1.3.1. Primera demostración

Dados $n > 0$ y un grupo G (abeliano si $n \geq 2$), notamos $K(G, n)$ al espacio de Eilenberg-MacLane.

Teorema 1.3.1 ([25, Theorem 4.57]). *Sean G un grupo abeliano y $n > 0$. Hay biyecciones naturales $[X, K(G, n)] \to H^n(X; G)$ (definidas para todo CW-complejo X) y dadas por $[f] \mapsto f^*(\omega)$, para cierta clase $\omega \in H^n(K(G, n); G)$ que no depende de X.*

Es claro que la clase de la función null-homotópica $X \to K(G, n)$ se corresponde con el $0 \in H^n(X; G)$.

Lema 1.3.2 ([33, §56, VI, Theorem 3]). *Sean X un complejo simplicial y A_1, A_2 subcomplejos tales que $X = A_1 \cup A_2$. Sea $f : X \to S^1$. Si las restricciones $f|_{A_j}$ son null-homotópicas y $A_1 \cap A_2$ es conexo, entonces f es null-homotópica.*

Demostración. Vamos a usar el Teorema 1.3.1 con $S^1 = K(\mathbb{Z}, 1)$. Por Mayer-Vietoris, tenemos una sucesión exacta

$$\widetilde{H}^0(A_1 \cap A_2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}^1(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{(i^*_{A_1}, i^*_{A_2})} \widetilde{H}^1(A_1; \mathbb{Z}) \oplus \widetilde{H}^1(A_2; \mathbb{Z})$$

Tenemos que $i^*_{A_j}(f^*(\omega)) = (f \circ i_{A_j})^*(\omega) = f|^*_{A_j}(\omega) = 0$. Entonces $f^*(\omega) \in \operatorname{Im}(\partial)$, pero $\widetilde{H}^0(A_1 \cap A_2; \mathbb{Z}) = 0$. Entonces $f^*(\omega) = 0$, o sea que f es null-homotópica. □

Lema 1.3.3 ([33, §56, X, Theorem 6]). *Sea X un CW-complejo conexo, $f : X \to Y$ y $B \subset X$ un subcomplejo tal que $f|_B$ es null-homotópica. Entonces existe un subcomplejo conexo $C \subset X$, tal que $B \subset C$ y $f|_C$ es null-homotópica.*

Demostración. Podemos escribir $B = \coprod_\alpha B_\alpha$ con B_α conexo. Consideramos la relación de equivalencia en X dada por $x \sim y$ si $x = y$ o existe α tal que $x, y \in B_\alpha$. Sea $Z = X/\sim$ y llamemos $q : X \to Z$ a la función cociente. Entonces ([17, Theorem 2.3.1]) Z es un CW-complejo, las celdas de Z son las celdas de X que no están en B y además hay una 0-celda por cada B_α. Claramente Z es conexo. Sean T un árbol maximal de Z y $C = q^{-1}(T)$. Entonces C es subcomplejo de X y $B \subset C$.

Veamos que C es conexo. Basta ver que el 1-esqueleto de C es conexo. Tomamos dos 0-celdas x, x' de C y consideramos un camino de $q(x)$ a $q(x')$ formado por 1-celdas de T. Llamemos $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ a las preimágenes por q de las 1-celdas del camino.

Definamos $w_0 = x$ y $v_{k+1} = x'$. Podemos llamar v_i, w_i a los extremos de γ_i de modo que o bien $w_i = v_{i+1}$, o para algún α_i se tenga $w_i, v_{i+1} \in B_{\alpha_i}$. Ahora, para cada $i = 0, \ldots, k$, definimos un camino δ_i de w_i a v_{i+1}. Si $w_i = v_{i+1}$, tomamos el camino constante; si $w_i \neq v_{i+1}$, consideramos un camino δ_i contenido en B_{α_i} con extremos w_i y v_{i+1}. Finalmente

$$\delta_0 * \gamma_1 * \delta_1 * \gamma_2 * \ldots * \delta_{k-1} * \gamma_k * \delta_k$$

es un camino de x a x' en C.

Como $B \hookrightarrow X$ es cofibración ([40, Theorem 7.6.12]) y $f|_B$ es null-homotópica, existe $g \simeq f$ tal que $g|_B = y_0$ para algún $y_0 \in Y$. Ahora g pasa al cociente por q y de ese modo obtenemos $\overline{g} : Z \to Y$. Finalmente si $\iota : C \to X$ es la inclusión, tenemos

$$f|_C = f \circ \iota \simeq g \circ \iota = \overline{g} \circ q \circ \iota$$

que es null-homotópica, ya que $q \circ \iota : C \to T$ y T es contráctil. □

Lema 1.3.4 ([33, §56, X, Theorem 7]). *Sean X un complejo simplicial conexo y $f : X \to S^1$ una función simplicial. Entonces existen subcomplejos conexos $C_1, C_2 \subset X$ tales que $X = C_1 \cup C_2$ y las restricciones $f|_{C_1}$ y $f|_{C_2}$ son null-homotópicas.*

Demostración. Consideramos dos subcomplejos A_1 y A_2 de S^1, homeomorfos al intervalo y tales que $S^1 = A_1 \cup A_2$. Llamamos $B_i = f^{-1}(A_i)$. Como f es simplicial, B_i es subcomplejo de X. Además $B_1 \cup B_2 = X$. Claramente $f|_{B_i}$ es null-homotópica. Aplicando el Lema 1.3.3 a B_1 y B_2 obtenemos los subcomplejos C_1 y C_2. □

Definición 1.3.5. Sea X un complejo simplicial conexo. Decimos que X es *unicoherente* si, para cualesquiera C_1, C_2 subcomplejos conexos tales que $X = C_1 \cup C_2$, se tiene que $C_1 \cap C_2$ es conexo.

Teorema 1.3.6 (Borsuk). *Sea X un complejo simplicial conexo. Son equivalentes:*
(i) $\mathbb{Z}$ es sumando directo de $H_1(X)$.
(ii) X no es unicoherente.
(iii) S^1 es retracto de X.

Demostración. Primero vamos a probar que (i) implica (ii). Existe un epimorfismo $H_1(X) \to \mathbb{Z}$. Entonces $\hom(H_1(X), \mathbb{Z}) \neq 0$. Por coeficientes universales $H^1(X; \mathbb{Z}) \neq 0$. Por Teorema 1.3.1 tenemos $[X, S^1] \approx H^1(X; \mathbb{Z})$ y entonces existe $f : X \to S^1$ que no es null-homotópica. Por el teorema de aproximación simplicial ([36, Theorem 16.5]), subdividiendo X si es necesario, podemos suponer que f es simplicial. Aplicando el Lema 1.3.4 a $f : X \to S^1$, obtenemos subcomplejos conexos C_1 y C_2 tales que $X = C_1 \cup C_2$, $f|_{C_1}$ y $f|_{C_2}$ son null-homotópicas. Además f no es null-homotópica y entonces por el Lema 1.3.2, $A = C_1 \cap C_2$ no es conexo. Luego X no es unicoherente.

Ahora probamos que (ii) implica (iii). Como X es conexo, existen C_1 y C_2 subcomplejos conexos tales que $X = C_1 \cup C_2$ y $A = C_1 \cap C_2$ no es conexo. Luego podemos escribir $A = \coprod_{j\in J} A_j$, donde los A_j son subcomplejos conexos y $\#J \geq 2$. Para cada $j \in J$ consideramos un árbol maximal S_j de A_j. Sea $F = \coprod_{j\in J} S_j$. Dado que C_i es conexo, por el Lema de Zorn existe un árbol maximal T_i de C_i con $F \subset T_i$. Notemos que $F = T_1 \cap T_2$. Consideramos el grafo $G = T_1 \cup T_2$. Claramente G es conexo. Afirmamos que G tiene un ciclo. En efecto, por Mayer-Vietoris, tenemos una sucesión exacta:

$$0 = \widetilde{H}_1(T_1) \oplus \widetilde{H}_1(T_2) \longrightarrow \widetilde{H}_1(G) \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}_0(F) \longrightarrow \widetilde{H}_0(T_1) \oplus \widetilde{H}_0(T_2) = 0$$

Como F no es conexo, $H_1(G)$ es no trivial, o sea que G tiene un ciclo. Ahora vamos a encontrar una retracción $r_X : X \to G$ de la inclusión $G \hookrightarrow X$. Como S_j es contráctil, extendiendo celda por celda podemos definir una retracción $r_{A_j} : A_j \to S_j$. Luego hay una retracción $r_A = \coprod r_j : A \to F$. Ahora, dado que T_i es contráctil, r_A se extiende a una retracción $r_{C_i} : C_i \to T_i$. Pegando r_{C_1} y r_{C_2} obtenemos la retracción $r_X : X \to G$. Finalmente, como G tiene un ciclo, S^1 es retracto de G y por lo tanto S^1 es retracto de X, como queríamos ver.

Es claro que (iii) implica (i). □

Corolario 1.3.7 (Borsuk)**.** *Sea X un complejo simplicial. Son equivalentes:*

(i) S^1 es retracto de X.

(ii) $\mathbb{Z}$ es un sumando directo de $H_1(X)$.

Demostración. Es claro que (i) implica (ii). Para probar que (ii) implica (i) escribimos $X = \coprod X_i$, con X_i conexo. Existe i tal que $H_1(X_i)$ tiene a $\mathbb{Z}$ como sumando directo. Luego, por el Teorema 1.3.6, S^1 es retracto de X_i. Como X_i es retracto de X, tenemos que S^1 es retracto de X. □

Corolario 1.3.8 (Borsuk)**.** *Si X es un poliedro y $\mathbb{Z}$ es sumando directo de $H_1(X)$, entonces X no tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por el Corolario 1.3.7, tenemos que S^1 es retracto de X y por el Lema 1.1.4 X no tiene la propiedad del punto fijo. □

1.3.2. Segunda demostración

Una función $f : X \to S^1$ determina, para cada vértice $x \in X$, un punto $f(x) \in S^1$ y para cada arista (orientada) $[x_0, x_1]$, un número real $f([x_0, x_1])$ que describe la clase de homotopía del camino $\gamma(t) = f((1-t)x_0 + tx_1)$. Este número se calcula levantando γ al revestimiento universal $\mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi it}$ y restando los extremos del camino levantado $\widetilde{\gamma}$. Extendiendo por linealidad, obtenemos un morfismo $f : C_1(X) \to \mathbb{R}$, o sea un elemento de $C^1(X;\mathbb{R})$. Si $\{x_0, x_1, x_2\}$ es un 2-símplex, tenemos $f([x_0, x_1]) + f([x_1, x_2]) + f([x_2, x_0]) = 0$. Esto equivale a que $f \in Z^1(X;\mathbb{R})$. Además, si $x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n$ son tales que $x_0 = x_n$ y $\{x_i, x_{i+1}\}$ es un 1-símplex para $i = 0, \ldots, n-1$, tenemos $\sum_{i=0}^{n-1} f([x_i, x_{i+1}]) \in \mathbb{Z}$. Si $f \in Z^1(X; R)$ cumple esta propiedad, diremos que f es *entero*. De la misma forma, dado $f \in Z^1(X; \mathbb{R})$ entero, podemos construir una función $f : X \to S^1$ que induce dicho cociclo. Esto es un caso particular del Teorema 1.3.1.

Ahora, si $x_0, \ldots, x_{n-1}$ son todos distintos y el cociclo f verifica la condición $\sum_{i=0}^{n-1} f([x_i, x_{i+1}]) = 1$, entonces la función $f : X \to S^1$ es *casi* una retracción (concretamente es homotópica a una retracción). Podemos cambiar f (sumando un coborde) de modo que $f([x_i, x_{i+1}]) > 0$ para todo $i = 0, \ldots, n-1$. En este caso, la f obtenida es una retracción.

La parte fácil de la demostración es conseguir un cociclo f y un ciclo c que cumplan esto. La parte difícil es lograr que el ciclo c sea simple. Para esto vamos a subdividir el poliedro y considerar un ciclo simple en esta subdivisión, homólogo a c. La clave es que el poliedro cumpla ciertas condiciones locales (no tener local separating points y tener una arista que aparezca en al menos tres 2-símplices). Por este motivo deberemos hacer algunas reducciones y mirar el caso en que X es una superficie con borde por separado.

Definición 1.3.9. Decimos que un ciclo $c \in Z_1(X)$ es *simple* si existen $x_0, \ldots, x_n$, distintos dos a dos, tales que $c = [x_0, x_1] + \ldots + [x_{n-1}, x_n] + [x_n, x_0]$.

Recordemos que la evaluación $(-,-) : C^1(X) \times C_1(X) \to \mathbb{Z}$ pasa al cociente y obtenemos $(-,-) : H^1(X) \times H_1(X) \to \mathbb{Z}$. Además, si Y es una subdivisión de un poliedro X, tenemos el operador de subdivisión $\lambda : C_*(X) \to C_*(Y)$ que manda un símplex a la suma de los símplices en los que está subdividido, con la orientación correcta [36, Theorem 17.2].

Teorema 1.3.10. *Sea X un complejo simplicial tal que $H_1(X)$ tiene a $\mathbb{Z}$ como sumando directo. Supongamos que para todo ciclo $\mathbf{x} \in Z_1(X)$ existe una subdivisión Y de X y un ciclo simple $\mathbf{y}$ en $Z_1(Y)$ con $[\mathbf{y}] = \lambda_*([\mathbf{x}])$. Entonces S^1 es retracto de X.*

Demostración. Existe un epimorfismo $H_1(X) \to \mathbb{Z}$. Componiendo con la proyección tenemos un epimorfismo $Z_1(X) \to \mathbb{Z}$. Además, como $C_1(X) \simeq Z_1(X) \oplus B_0(X)$, conseguimos un epimorfismo $f : C_1(X) \to \mathbb{Z}$. Elegimos $\mathbf{x} \in Z_1(X)$ tal que $(f, \mathbf{x}) = 1$.

Ahora sean Y una subdivisión de X e $\mathbf{y} = [y_0, y_1] + \ldots + [y_{n-1}, y_n]$ un ciclo simple en Y tales que $[\mathbf{y}] = \lambda_*([\mathbf{x}])$. Tenemos que $\lambda^* : H^*(Y) \to H^*(X)$ es isomorfismo. Entonces existe $g \in Z^1(Y)$ tal que $\lambda^*([g]) = [f]$. Ahora tenemos

$$(g, \mathbf{y}) = (g, \lambda(\mathbf{x})) = (g \circ \lambda, \mathbf{x}) = (f, \mathbf{x}) = 1$$

El cociclo g tiene coeficientes enteros, pero lo podemos pensar con coeficientes reales (en realidad con racionales alcanza). Vamos a cambiar g, sumándole cobordes de modo que $g([y_i, y_{i+1}]) > 0$ para $i = 0, \ldots, n-1$. La idea es usar los cobordes $d^1([y_i])$ que cumplen

$$d^1([y_i])([v,w]) = \begin{cases} 1 & \text{si } v = y_i \\ -1 & \text{si } w = y_i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Sumando múltiplos adecuados de los $d^1([y_i])$, con $i = 0, \ldots, n-2$, obtenemos un cociclo h tal que $h([y_i, y_{i+1}]) = \frac{1}{n}$ para $i = 0, \ldots, n-2$. Como sumar cobordes no modifica la evaluación, tenemos $(h, \mathbf{y}) = 1$ y entonces $h([y_{n-1}, y_n]) = \frac{1}{n}$. Además, como $(g, c) \in \mathbb{Z}$ para todo $c \in Z_1(X)$, tenemos que $(h, c) \in \mathbb{Z}$ para todo $c \in Z_1(X)$, así que h es entero.

Ahora usando h, definiremos $r : X \to S^1$. Definimos $r(y_0) = 1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Para cada $v \in X^0$ elegimos un camino por aristas $c = [v_0, v_1] + \ldots + [v_{k-1}, v_k]$ con $v_0 = y_0$, $v_k = v$ y definimos $r(v) = e^{2\pi i h(c)}$. Ahora, si $\{v, w\}$ es un 1-símplex, definimos $r((1-t)v + tw) = r(v) \cdot e^{2\pi i t h([v,w])}$.

Como h es un cociclo, $r : X^1 \to S^1$ se extiende al 2-esqueleto. Como $\pi_k(S^1) = 0$ para $k \geq 2$ tenemos que $r : X^2 \to S^1$ se puede extender esqueleto por esqueleto hasta obtener una función $r : X \to S^1$.

Es fácil ver que r es una retracción de la inclusión dada por el ciclo simple $\mathbf{y}$. □

Definición 1.3.11. Sea X un complejo simplicial y e una arista de X. Decimos que e es una *arista triple* si es una cara de al menos tres 2-símplices.

El siguiente teorema, aunque probado independientemente, usa las mismas ideas que utilizó Jiang para probar [29, Lemma 5.1].

Teorema 1.3.12. *Sea X un poliedro conexo con una arista triple y sin local separating points. Si $\mathbf{x} \in Z_1(X)$, entonces existe una subdivisión Y de X y un ciclo simple $\mathbf{y} \in Z_1(Y)$ con $[\mathbf{y}] = \lambda_*([\mathbf{x}])$.*

Demostración. Como X es conexo, podemos suponer que $\mathbf{x} = [x_0, x_1] + \ldots + [x_{n-1}, x_n]$. Subdividiendo apropiadamente el poliedro, podemos conseguir un camino por aristas homólogo a $\mathbf{x}$ y tal que:

- El camino no pasa por ningún vértice de X.
- Ninguna arista del camino está contenida en una arista de X.
- Cada arista del camino aparece una vez.
- El camino interseca a la arista triple.
- Todo punto de intersección está en el interior de un 2-símplex de X (en este paso se usa que X no tiene local separating points).

Por lo anterior, hay finitos puntos de intersección. Finalmente, subdividiendo aún más y usando la arista triple, podemos eliminar uno a uno los puntos de intersección, como se ve en la figura. El ciclo obtenido es simple. □

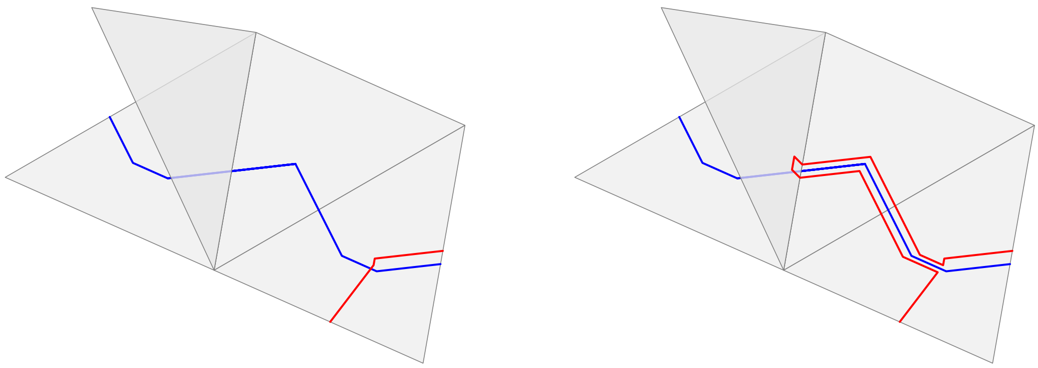


Figura 1.1: Intuitivamente, tenemos un camino que atraviesa un río. Queremos modificarlo para que no lo atraviese. Entonces, inmediatamente antes de cruzar el río nos detenemos y empezamos a caminar a lo largo de la orilla hasta llegar a un puente. A continuación, cruzamos el puente y volvemos caminando a lo largo de la otra orilla, hasta retomar el camino original. La arista triple funciona como puente.

Sean $\mathbb{T}$ el toro, $\mathbb{P}$ el plano proyectivo y $\mathbb{K}$ la botella de Klein.

Teorema 1.3.13 ([35, Chapter 1])**.** *Toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a alguna de las superficies en la siguiente lista:*

(i) S^2.

(ii) $\mathbb{T}\#\ldots\#\mathbb{T}$.

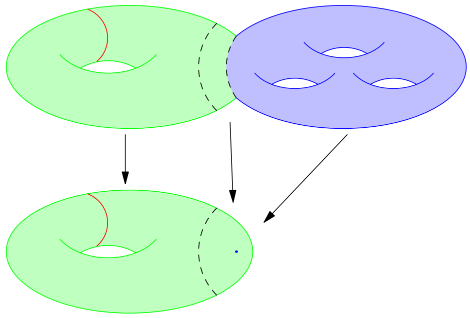
(iii) $\mathbb{P}\#\ldots\#\mathbb{P}$.

Toda superficie compacta y conexa con borde se obtiene recortando finitos discos disjuntos de alguna de las superficies de la lista anterior.

Por ejemplo, se tiene $\mathbb{K} = \mathbb{P}\#\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}\#\mathbb{T} = \mathbb{P}\#\mathbb{P}\#\mathbb{P}$.

Lema 1.3.14. *Sean M y N superficies conexas. Si M es compacto y S^1 es retracto de M, entonces S^1 es retracto de $M\#N$.*

Demostración. Vemos $S^1 \subset M$. Existe un disco $D \subset M$, tal que $S^1 \cap D = \emptyset$. Además, podemos tomar un disco $D' \subset D^\circ$. Sea $M\#N$ la suma conexa obtenida recortando $(D')^\circ$. Existe una función continua $M\#N \to M$ que deja fijo $M - D^\circ$ (ver figura). Componiendo esta función con la retracción $M \to S^1$ conseguimos la retracción $M\#N \to S^1$.



□

Teorema 1.3.15 (Borsuk). *Sea X un complejo simplicial compacto. Son equivalentes:*

(i) S^1 es retracto de X.

(ii) $\mathbb{Z}$ es un sumando directo de $H_1(X)$.

Demostración. Que (i) implica (ii) es claro. Veamos que (ii) implica (i). Hacemos inducción en el número de vértices de X. Podemos suponer que X es conexo y que $\dim(X) \leq 2$. También podemos suponer que no se pueden hacer colapsos elementales.

- Caso 1: *Existe $v \in X^0$ local separating point.*
  - Caso 1.1: *v es global separating point.* En este caso existen complejos simpliciales no triviales X_1 y X_2 tales que $X = X_1 \vee_v X_2$. Luego, para algún i, $H_1(X_i)$ tiene a $\mathbb{Z}$ como sumando directo. Como X_i es retracto de X, usamos la hipótesis inductiva.
  - Caso 1.2: *v no es global separating point.* En este caso, podemos escribir $\mathrm{lk}(v) = L_1 \coprod L_2$. Construimos un complejo simplicial $\widetilde{X}$ con vértices en $X - \{v\} \coprod \{v_1, v_2\}$ y conjunto de símplices

    $$\{\sigma \,:\, \sigma \in X - \{v\}\} \bigcup \{\sigma \cup \{v_1\} \,:\, \sigma \in L_1\} \bigcup \{\sigma \cup \{v_2\} \,:\, \sigma \in L_2\}$$

    Tenemos una función simplicial $\varphi : \widetilde{X} \to X$ definida por

    $$\varphi(w) = \begin{cases} v & \text{si } w = v_1 \text{ o } w = v_2 \\ w & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

    Consideramos un camino simple por aristas de v_1 a v_2. Es claro que $\widetilde{X}$ se retrae a este camino. La retracción pasa al cociente por $|\varphi|$ y se tiene que S^1 es retracto de X.

- Caso 2: *X no tiene local separating points.* Notemos que no hay 1-símplices maximales. Entonces, toda arista está en al menos un 2-símplex y como no se pueden hacer colapsos, toda arista está en al menos dos 2-símplices.
  - Caso 2.1: *Toda arista está en exactamente dos 2-símplices.* Como $\mathrm{lk}(v)$ es conexo para todo v, esto implica que X es una superficie (sin borde). Por la clasificación de superficies compactas (Teorema 1.3.13), se tiene que X es homeomorfo a una suma conexa de $n \geq 1$ toros o de $n \geq 2$ planos proyectivos (como $\mathbb{Z}$ es sumando directo de $H_1(X)$, X no puede ser ni S^2 ni el plano proyectivo $\mathbb{P}$). Es claro que el toro $\mathbb{T}$ y la botella de Klein $\mathbb{K}$ tienen a S^1 como retracto. Si X es suma de $n \geq 2$ toros, usamos el Lema 1.3.14 con $\mathbb{T}$ y $\underbrace{\mathbb{T}\#\ldots\#\mathbb{T}}_{n-1 \text{ veces}}$. Si X es suma de $n \geq 3$ planos proyectivos, usamos el Lema 1.3.14 con $\mathbb{K} \simeq \mathbb{P}\#\mathbb{P}$ y $\underbrace{\mathbb{P}\#\ldots\#\mathbb{P}}_{n-2 \text{ veces}}$.
  - Caso 2.2: *Existe una arista triple.* Por Teorema 1.3.12 y Teorema 1.3.10 estamos.

□

De la demostración anterior, rescatamos el siguiente resultado (que también se puede probar observando que X no es unicoherente):

Lema 1.3.16. *Sean X un poliedro compacto y $x_0 \in X$ un local separating point que no es un global separating point. Entonces X se retrae a S^1.*

En ambas demostraciones del teorema de Borsuk, X se retrae a un subcomplejo de una subdivisión de X, homeomorfo a S^1. No sabemos si es realmente necesario subdividir X. Por otro lado, hay ejemplos de complejos para los que no es necesario subdividir, pero tales que la retracción no puede ser una función simplicial (por ejemplo, una banda de Möbius triangulada con cinco vértices y cinco 2-símplices).

1.4. Teoría de Nielsen

El objetivo principal de la teoría de Nielsen es hallar el mínimo número de puntos fijos que puede tener una función g en la clase de homotopía de una función continua $f : X \to X$. Los primeros resultados, debidos a Jakob Nielsen, se remontan a la década de 1920. Nielsen definió el número de Nielsen $N(f)$ y probó que es una cota inferior para la cantidad de puntos fijos de f. Por ser invariante homotópico, $N(f)$ es una cota inferior para $M(f)$, que se define como el mínimo número de puntos fijos de una función g homotópica a f (Hopf probó que el número $M(f)$ es finito). En esta sección recordaremos las nociones elementales de la teoría de Nielsen, clases de punto fijo e índice; y enunciaremos los resultados clásicos que se usarán más adelante. Veremos un resultado de Jiang que generaliza resultados previos de Wecken y Shi y muestra que, si el poliedro X no tiene local separating points y no es una superficie, entonces vale la igualdad $N(f) = M(f)$. Luego, probaremos el teorema de Jiang que establece que la propiedad del punto fijo es un invariante homotópico de los poliedros compactos sin global separating points.

1.4.1. El teorema de punto fijo de Lefschetz

El teorema de punto fijo de Lefschetz es una de las herramientas más básicas y útiles a la hora de probar que una función continua posee un punto fijo. Una referencia para los resultados que aparecen en esta subsección es [28, Section 2.3].

Definición 1.4.1. Sea R un dominio de ideales principales. Si L es un R-módulo libre de rango finito y $f : L \to L$ es un morfismo de R-módulos, definimos la traza de f, $\mathrm{tr}_R(f, L)$ como la traza de la matriz de f en una base de L.

Más generalmente, si M es un R-módulo finitamente generado y $f : M \to M$ un morfismo de R-módulos, $\mathrm{tr}_R(f, M) = \mathrm{tr}_R(f, M/T)$, donde T es el submódulo de torsión de M. Cuando se sobreentiende R, lo omitimos en la notación para la traza.

Teorema 1.4.2 (Teorema de la traza de Hopf)**.** *Sea R un dominio de ideales principales.*

Sea (C_*, d) un complejo de cadenas acotado de R-módulos libres de rango finito. Sea $\phi : C_* \to C_*$ un morfismo de complejos. Entonces

$$\sum_k (-1)^k \mathrm{tr}_R(\phi, C_k) = \sum_k (-1)^k \mathrm{tr}_R(\phi_*, H_k).$$

Sea (C^*, d) un complejo de cocadenas acotado de R-módulos libres de rango finito. Sea $\phi : C^* \to C^*$ un morfismo de complejos. Entonces

$$\sum_k (-1)^k \mathrm{tr}_R(\phi, C^k) = \sum_k (-1)^k \mathrm{tr}_R(\phi^*, H^k).$$

Definición 1.4.3. Si X es un poliedro compacto y $f : X \to X$ es una función continua, definimos el número de Lefschetz de f por $L(f) = \sum_k (-1)^k \mathrm{tr}_{\mathbb{Z}}(f_*, H_k(X))$. Más generalmente, definimos $L(f_*, R) = \sum_k (-1)^k \mathrm{tr}_R(f_*, H_k(X; R))$ y $L(f^*, R) = \sum_k (-1)^k \mathrm{tr}_R(f^*, H^k(X; R))$.

Teorema 1.4.4 (del punto fijo de Lefschetz)**.** *Sean X un poliedro compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si $L(f) \neq 0$, entonces f tiene un punto fijo.*

Lema 1.4.5. *Sean X un poliedro compacto y $f : X \to X$ una función continua. Sean R un dominio de ideales principales y $j : \mathbb{Z} \to R$ el morfismo canónico. Entonces $L(f_*, R) = L(f^*, R) = j(L(f))$.*

Demostración. Sea $C_*(X)$ el complejo de cadenas simplicial de (una triangulación de) X. Como en la demostración del teorema de Lefschetz, consideramos un morfismo $\phi : C_*(X) \to C_*(X)$ tal que $H_k(f) = H_k(\phi)$ en la homología (acá estamos identificando la homología singular con la simplicial). Tomando una base de $C_k(X)$, se verifica fácilmente que $\mathrm{tr}_R(\phi_*, C_k(X; R)) = \mathrm{tr}_R(\phi^*, C^k(X; R)) = j(\mathrm{tr}_{\mathbb{Z}}(\phi, C_k(X)))$. Para completar la demostración usamos el Teorema 1.4.2. $\square$

Corolario 1.4.6 (Lefschetz)**.** *Sean X un poliedro compacto y $f : X \to X$ una función continua. Sea R un dominio de ideales principales. Si $L(f_*, R) \neq 0$ ó $L(f^*, R) \neq 0$, entonces f tiene un punto fijo.*

Ejemplo 1.4.7. Por el teorema de Lefschetz, todo poliedro compacto y contráctil tiene la propiedad del punto fijo. En cambio $\mathbb{R}$ es un poliedro contráctil sin la propiedad del punto fijo. Existe un espacio métrico compacto y contráctil sin la propiedad del punto fijo [31].

Más generalmente, cualquier poliedro compacto y $\mathbb{Q}$-acíclico tiene la propiedad del punto fijo (por ejemplo el plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$).

1.4.2. Clases de puntos fijos

Las clases de puntos fijos forman una partición del conjunto de puntos fijos de una función continua. En esta sección daremos dos definiciones de clases de puntos fijos. La primera es más concreta. La segunda definición detecta además ciertas clases "vacías" de puntos fijos.

Si X es un espacio topológico, $U \subset X$ un abierto y $f : U \to X$ una función continua, llamaremos $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in U \ : \ f(x) = x\}$. Si X es un poliedro compacto y $f : X \to X$, claramente $\mathrm{Fix}(f)$ es compacto.

Definición 1.4.8 (Clases de puntos fijos no vacías, [30, Theorem 1.10])**.** Sea X un poliedro compacto y conexo. Sea $f : X \to X$ una función continua. Las *clases de puntos fijos no vacías de f* son las clases de equivalencia de la relación de equivalencia en $\mathrm{Fix}(f)$ dada por $x \sim y$ si existe un camino $c : I \to X$ con $c(0) = x$, $c(1) = y$ y tal que $f \circ c \simeq c$.

Definición 1.4.9 (Clases de puntos fijos, [30, I, Definition 1.6])**.** Sean X un poliedro compacto y conexo y $p : \widetilde{X} \to X$ su revestimiento universal. Sea $f : X \to X$ una función continua. Decimos que dos levantados de f al revestimiento universal $\widetilde{X}$ son *equivalentes* si son conjugados por una transformación deck. Si $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ es un levantado de f, notamos $[\widetilde{f}]$ a la clase de equivalencia de $\widetilde{f}$. Es fácil ver que $p(\mathrm{Fix}(\widetilde{f}))$ solamente depende de $[\widetilde{f}]$ y no de $\widetilde{f}$.

A cada clase de equivalencia $[\widetilde{f}]$ de levantados de f le asociamos la *clase de puntos fijos* $p(\mathrm{Fix}(\widetilde{f})) \subset \mathrm{Fix}(f)$. Las clases de punto fijo forman una partición de $\mathrm{Fix}(f)$ indexada por las clases de equivalencia de levantados de f. Algunas de las clases de punto fijo pueden ser vacías y las clases no vacías son exactamente las clases de punto fijo no vacías que aparecen en la definición anterior.

Teorema 1.4.10 ([30, I, Theorem 1.12, Corollary 1.13])**.** *Sea X un poliedro compacto y conexo. Sea $f : X \to X$ una función continua. Entonces f tiene finitas clases de punto fijo no vacías. Las clases de punto fijo de f son compactas y abiertas en* $\mathrm{Fix}(f)$*.*

Definición 1.4.11. Sea X un poliedro compacto y conexo. Sea $f : X \to X$ una función continua. Decimos que un subconjunto $F \subset \mathrm{Fix}(f)$ es un *conjunto aislado de puntos fijos* si es abierto y cerrado. Por el teorema anterior, toda clase de puntos fijos es un conjunto aislado de puntos fijos.

1.4.3. Índice

El objetivo de esta subsección es definir el índice de un conjunto aislado de puntos fijos (en particular el de una clase de puntos fijos) y enunciar sus propiedades. El índice permite contar, con multiplicidad, cuántos puntos fijos hay en un abierto. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces si $f^{-1}(x)$ es compacto, el grado de f sobre x se puede interpretar como el "número" de puntos en $f^{-1}(x)$. Si llamamos $i : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ a la inclusión, el conjunto de puntos fijos de f es $(i - f)^{-1}(0)$. Luego, si $\mathrm{Fix}(f)$ es compacto, el "número" de puntos fijos de f debería estar dado por el grado de $i - f$ sobre el 0. Ésta es la idea de la definición del índice de un conjunto de puntos fijos.

Definición 1.4.12. [14, VII.5.1] Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $K \subset U$ un compacto. Identificamos $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ y fijamos un generador $\alpha \in H_n(S^n) = \mathbb{Z}$. La *clase fundamental* $\alpha_K \in H_n(U, U - K)$ *alrededor de* K es la imagen de α por $H_n(S^n) \to H_n(S^n, S^n - K) \simeq H_n(U, U - K)$ (el isomorfismo es el del teorema de escisión).

Definición 1.4.13 (Índice en $\mathbb{R}^n$ [14, VII.5.2])**.** Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ tal que $F = \mathrm{Fix}(f)$ es compacto. Sea $i : U \to \mathbb{R}^n$ la inclusión. Consideremos el morfismo

$$(i - f)_* : H_n(U, U - F) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$$

Entonces, como $\alpha_{\{0\}} \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$ es un generador, existe un número entero $I(f)$, que llamaremos el *índice de* f, tal que

$$(i - f)_*(\alpha_F) = I(f) \cdot \alpha_{\{0\}}$$

Claramente $I(f)$ no depende del generador $\alpha \in H_n(S^n)$ elegido.

Definición 1.4.14. Decimos que un espacio topológico X es un ENR (*Euclidean Neighborhood Retract*) si X es retracto de un abierto de $\mathbb{R}^n$ para algún n.

Todo poliedro compacto es un ENR. Un abierto de un ENR es un ENR. El producto de dos ENR es un ENR.

Definición 1.4.15 (Índice [14, VII.5.10])**.** Si X es un ENR y $U \subset X$ es un abierto, entonces toda función continua $f : U \to X$ admite una factorización $f = \beta\alpha$, donde $U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} X$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ es abierto. Si $\text{Fix}(f)$ es compacto, definimos el *índice de* f, $I(f) = I(\alpha\beta : \beta^{-1}(U) \to V)$. Se tiene que $I(f)$ no depende de la factorización. Más aún, si $X = \mathbb{R}^n$, esta definición de $I(f)$ coincide con la dada anteriormente. Notemos que el índice no depende del codominio de f en el siguiente sentido: si $X \subset X'$ y X' es un ENR, entonces $i(f : U \to X) = i(f : U \to X')$.

Las siguientes propiedades del índice se deducen de propiedades análogas para el índice en $\mathbb{R}^n$. La propiedad (vi) motiva la definición anterior.

Proposición 1.4.16 (Propiedades del índice [14, VII.5.11-15])**.** *Sean X un ENR y $U \subset X$ un abierto. Sea $f : U \to X$ tal que* $\text{Fix}(f)$ *es compacto. Tenemos*

(i) Si $W \subset U$ es abierto y $\text{Fix}(f) \subset W$*, entonces*

$$I(f) = I(f|_W)$$

(ii) Si f es la función constante x_0, entonces

$$I(f) = \begin{cases} 1 & si\ x_0 \in U \\ 0 & si\ x_0 \notin U \end{cases}$$

(iii) Si $U_1, \dots, U_r$ cubren U y $U_i \cap U_j \cap \text{Fix}(f) = \emptyset$ para cualesquiera $i \neq j$, entonces

$$I(f) = \sum_{i=1}^{r} I(f|_{U_i})$$

(iv) Sean Y otro ENR, $V \subset Y$ un abierto y $g : V \to Y$. Entonces

$$I(f \times g) = I(f)I(g)$$

(v) Si $h_t : U \to X$ es una homotopía y $\bigcup_{t \in I} \text{Fix}(h_t)$ es compacto, entonces

$$I(h_0) = I(h_1)$$

(vi) Si Y es otro ENR, $V \subset Y$ abierto y $f : U \to Y$ y $g : V \to X$ funciones continuas, llamamos $\widetilde{U} = f^{-1}(V)$ y $\widetilde{V} = g^{-1}(U)$. Entonces $\text{Fix}(g \circ f|_{\widetilde{U}})$ *y* $\text{Fix}(f \circ g|_{\widetilde{V}})$ *son homeomorfos y si además son compactos*

$$I(g \circ f|_{\widetilde{U}}) = I(f \circ g|_{\widetilde{V}})$$

Observación 1.4.17. Las propiedades que aparecen en la proposición anterior caracterizan completamente al índice ([28, Theorem 2.2.22]).

El siguiente teorema dice, en el sentido mencionado anteriormente, que el "número" de puntos fijos de f no es otra cosa que el número de Lefschetz de f.

Teorema 1.4.18 (Lefschetz-Hopf, [14, VII, Proposition 6.6])**.** *Sea X un poliedro compacto y conexo. Sea $f : X \to X$ una función continua. Entonces $I(f) = L(f)$.*

La definición de índice dad en [30, I, Definition 3.4] es equivalente a Definición 1.4.15.

Definición 1.4.19 (Índice de un conjunto aislado de puntos fijos [30, I, Definition 3.8])**.** Sea X un poliedro compacto y conexo. Sea $f : X \to X$. Si F es un conjunto aislado de puntos fijos de f, el *índice de F* se define por

$$i(f, F) = I(f|_U)$$

donde U es un abierto de X tal que $F = U \cap \mathrm{Fix}(f)$. De las propiedades del índice se deduce que $i(f, F)$ no depende del abierto U elegido.

El índice $I(f|_U)$ solamente depende de $f|_U$, en cambio el índice de un conjunto aislado de puntos fijos F no depende solamente de $f|_F$, sino de cómo se comporta f en un abierto $U \supset F$.

Por el Teorema 1.4.10 y la Proposición 1.4.16, tenemos la siguiente versión del teorema de Lefschetz-Hopf.

Teorema 1.4.20 (Lefschetz-Hopf)**.** *Sea X un poliedro compacto y conexo. Sea $f : X \to X$ una función continua. Entonces*

$$L(f) = \sum_F i(f, F)$$

donde F recorre las clases de punto fijo de f.

Los siguientes resultados permiten calcular el índice de un punto fijo aislado contenido en el interior de un símplex maximal.

Proposición 1.4.21 ([30, I, Definition 3.1])**.** *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Sean $x_0 \in U$ un punto fijo aislado de f y $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B}(x_0, \epsilon) \subset U$ y $\overline{B}(x_0, \varepsilon) \cap \mathrm{Fix}(f) = \{x_0\}$. Consideramos $\phi : \partial\overline{B}(x_0, \varepsilon) \to \partial\overline{B}(x_0, \varepsilon)$ dada por $\phi(x) = x_0 + \varepsilon\frac{x-f(x)}{|x-f(x)|}$. Entonces $i(f, \{x_0\})$ es el grado de ϕ.*

Proposición 1.4.22 ([30, I, 3.2])**.** *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable y $x_0 \in \mathrm{Fix}(f)$. Si $\det(1 - Df_{x_0}) \neq 0$, entonces x_0 es un punto fijo aislado y además $i(f, \{x_0\}) = \operatorname{sgn} \det(1 - Df_{x_0})$.*

El siguiente lema será usado en la sección 3.1.22. Anteriormente dijimos que el índice no depende solamente de F, pero con hipótesis suficientemente fuertes esto sí ocurre:

Lema 1.4.23 ([2, Lemma 4.7]). *Sea X un poliedro compacto y conexo. Sean $f : X \to X$ y F un conjunto aislado de puntos fijos de f. Supongamos que existe un subespacio K de X que además es un poliedro y tal que*

- $f(K) \subseteq K$.
- *K se retrae por deformación a F.*
- $F \subseteq K^{\circ}$.
- $F = K \cap \operatorname{Fix}(f)$.

Entonces se tiene $i(f, F) = \chi(F)$.

Demostración. Sea $U = K^{\circ}$. Tenemos $i(f, F) = I(f|_U : U \to X)$. Ahora

$$I(f|_U : U \to X) = I(f|_U : U \to K) = I(f|_K : K \to K) = L(f|_K) = L(1_F) = \chi(F).$$

La primera igualdad se deduce de la Definición 1.4.15. La segunda vale por la Proposición 1.4.16, parte (i). La tercera igualdad es el Teorema 1.4.18. La cuarta igualdad vale porque $F \hookrightarrow K$ induce isomorfismos en la homología. $\square$

1.4.4. Número de Nielsen

Definición 1.4.24 (Número de Nielsen, [30, I. Definitions 4.1-2]). Sea X un poliedro compacto y conexo. Sea $f : X \to X$ una función continua. Una clase de punto fijo F se dice *esencial* si $i(f, F) \neq 0$. El *número de Nielsen de f*, $N(f) \in \mathbb{Z}$ es el número de clases de punto fijo esenciales de f (es finito porque hay finitas clases no vacías de punto fijo). Como el índice de una clase de punto fijo vacía es 0, se tiene que $\#\operatorname{Fix}(f) \geq N(f)$. Definimos el *mínimo número de puntos fijos de la clase de homotopía de f* por $M(f) = \min\{\#\operatorname{Fix}(g) \ : \ g \simeq f\}$.

Sea X un poliedro compacto y conexo. Si $f, g : X \to X$ son continuas y H es una homotopía entre f y g, definimos una biyección entre las clases de punto fijo de f y de g. La biyección hace corresponder la clase de punto fijo asociada a un levantado $\widetilde{f}$ con la clase de punto fijo asociada a un levantado $\widetilde{g}$ si y solamente si hay un levantado $\widetilde{H}$ de H tal que $\widetilde{H}_0 = \widetilde{f}$ y $\widetilde{H}_1 = \widetilde{g}$ ([30, I, Definition 3.3]). Equivalentemente, si $F \subset X \times I$ es una clase de punto fijo de $H \times 1_I : X \times I \to X \times I$, la biyección hace corresponder la clase $i_0^{-1}(F)$ de punto fijo de f con la clase $i_1^{-1}(F)$ de punto fijo de g ([30, I, Theorem 2.7]). Usando las propiedades del índice, se puede verificar que esta biyección preserva el índice ([30, I, Theorem 4.5]). Por lo tanto, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.4.25 (Invarianza homotópica [30, I, Theorem 4.6]). *Sea X un poliedro compacto y conexo. Sean $f, g : X \to X$ funciones continuas. Si $f \simeq g$, entonces $N(f) = N(g)$.*

Del teorema anterior, dado que el índice de una clase vacía de puntos fijos es 0, se deduce el teorema fundamental de la teoría de Nielsen:

Teorema 1.4.26 (Nielsen, [30, I, Theorem 4.3])**.** *Sea X un poliedro compacto y conexo. Sea $f : X \to X$ una función continua. Entonces $M(f) \geq N(f)$.*

Es natural preguntarse cuándo vale la igualdad en el teorema anterior. El siguiente teorema fue probado por Jiang, generalizando resultados previos de Shi. La idea de la demostración es cambiar la función por una homotópica que tenga finitos puntos fijos (esto es un resultado de Hopf) y luego combinar los puntos fijos que están en una misma clase de Nielsen. Para esto se usan resultados similares al Teorema 1.3.12.

Teorema 1.4.27 (Jiang, [29, Main Theorem])**.** *Sea X un poliedro compacto y conexo. Sea $f : X \to X$ una función continua. Si X no tiene local separating points y X no es una superficie (con o sin borde), entonces $M(f) = N(f)$.*

Proposición 1.4.28 (Conmutatividad, [30, I, Theorem 5.2])**.** *Sean X, Y poliedros compactos y conexos y $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ funciones continuas. Entonces $N(fg) = N(gf)$.*

Ya sabemos que un espacio con la propiedad del punto fijo es conexo. Luego, en el siguiente teorema no hay pérdida de generalidad al restringirse a espacios conexos.

Teorema 1.4.29 (Jiang, [29, Theorem 7.1])**.** *En la categoría de poliedros compactos, conexos y sin global separating points, la propiedad del punto fijo es un invariante homotópico.*

Más aún, si $X \simeq Y$ son poliedros compactos tales que Y no tiene la propiedad del punto fijo y X no tiene global separating points, entonces X no tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. Podemos suponer que X e Y son conexos.

Supongamos que $X \simeq Y$ son poliedros compactos y conexos tales que Y no tiene la propiedad del punto fijo y X no tiene global separating points. Vamos a probar que X no tiene la propiedad del punto fijo.

Si X es una superficie, usamos la clasificación de superficies compactas (Teorema 1.3.13). Las únicas superficies con la propiedad del punto fijo son D^2 y $\mathbb{RP}^2$, ya que el H_1 de todas las demás superficies tiene a $\mathbb{Z}$ como sumando directo. Pero X no puede ser ni D^2 ni $\mathbb{RP}^2$, ya que por el teorema de punto fijo de Lefschetz, Y tendría la propiedad del punto fijo.

Si X tiene un local separating point x_0, dado que x_0 no es un global separating point, por el Lema 1.3.16 tenemos que S^1 es retracto de X y por lo tanto X no tiene la propiedad del punto fijo.

Ahora sea $g : Y \to Y$ sin puntos fijos. Por el Teorema 1.4.26, se tiene $N(g) = 0$. Ahora sean $\alpha : X \to Y$ y $\beta : Y \to X$ inversas homotópicas. Sea $f = \beta g \alpha$. Por la conmutatividad del número de Nielsen, tenemos $N(f) = N(\beta g\alpha) = N(g\alpha\beta) = N(g) = 0$ y por Teorema 1.4.27, existe una función homotópica a f sin puntos fijos. $\square$

El siguiente teorema fue probado con hipótesis más restrictivas por F. Wecken [44].

Teorema 1.4.30 (Wecken)**.** *Sea X un poliedro compacto, conexo y sin global separating points. Si $\chi(X) = 0$, entonces X no tiene la propiedad del punto fijo. Más aún, si X no tiene local separating points, existe una función sin puntos fijos homotópica a la identidad.*

Demostración. Si X tiene un local separating point que no es un global separating point, entonces S^1 es retracto de X y por lo tanto X no tiene la propiedad del punto fijo, así que podemos asumir que X no tiene local separating points. Por el teorema de clasificación de superficies compactas (Teorema 1.3.13), las únicas superficies con característica de Euler igual a 0 son el toro, $S^1 \times I$, la banda de Moebius y la botella de Klein. En los cuatro casos hay funciones sin puntos fijos homotópicas a la identidad. Entonces también podemos asumir que X no es una superficie.

Ahora usamos el Teorema 1.4.27. Basta ver que $N(1_X) = 0$. Pero la identidad tiene una única clase de punto fijo no vacía y $L(1_X) = \chi(X) = 0$, así que por el Teorema de Lefschetz-Hopf $N(1_X) = 0$. $\square$

1.4.5. Relación con la conjetura de Bass

En [3], Bass enunció una conjetura que aún permanece abierta. En esta subsección veremos la motivación para una conjetura de Geoghegan que es equivalente a la conjetura de Bass.

Sean X, Y poliedros compactos y conexos. Sean $s : Y \to X$ y $r : X \to Y$ funciones continuas tales que $rs \simeq 1_Y$. Entonces, si $f = sr$, tenemos $f \circ f \simeq f$ (decimos que f es un *idempotente homotópico*). Por la conmutatividad del número de Nielsen, tenemos que $N(f) = N(sr) = N(rs) = N(1_Y)$ es 0 ó 1. Dado un idempotente homotópico f, decimos que f *se parte* si existen Y, $s : Y \to X$ y $r : X \to Y$ tales que $sr \simeq f$ y $rs \simeq 1_Y$.

Ahora, sean X un poliedro compacto y conexo y $f : X \to X$ tal que $f \circ f = f$. Entonces hay exactamente una clase no vacía de punto fijo y por lo tanto $N(f)$ es 0 ó 1.

Conjetura 1.4.31 (Geoghegan)**.** *Sea $f : X \to X$ un idempotente homotópico, donde X es un poliedro compacto y conexo. Entonces $N(f)$ es 0 ó 1.*

Si bien todo idempotente homotópico en un poliedro compacto y conexo se parte, no siempre se puede conseguir que Y sea un poliedro compacto, por lo tanto no podemos usar el argumento anterior. La conjetura anterior es equivalente a la siguiente conjetura de Bass ([4, Theorem 4.4]):

Conjetura 1.4.32 (Bass)**.** *Sean G un grupo y $\mathbb{Z}G_1$ el grupo abeliano libre con base las clases de conjugación de elementos de G. Si $A \in M_n(\mathbb{Z}G)$ es una matriz idempotente, entonces la imagen de* $\mathrm{tr}(A)$ *por la proyección $\mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G_1$ es un múltiplo de la clase de conjugación de $1 \in G$.*

Capítulo 2

El ejemplo de Lopez

El objetivo de este capítulo es estudiar el poliedro X_L construido por Lopez en [34], que le permitió probar, entre otras cosas, que la propiedad del punto fijo no es un invariante homotópico de los poliedros compactos. Este resultado, obviamente, precede históricamente al de Jiang, Teorema 1.4.29. La idea que explotó Lopez es la siguiente: alcanza con encontrar un poliedro compacto con la propiedad del punto fijo y característica de Euler igual a 0 ya que, por el resultado de Wecken (Teorema 1.4.30), eliminando los global separating points, se obtiene un poliedro sin la propiedad del punto fijo. A su vez, para encontrar un tal espacio, Fadell señaló a Lopez que alcanzaba con hallar un poliedro compacto con la propiedad del punto fijo y característica de Euler positiva y par, dado que se conocían ejemplos de poliedros compactos con la propiedad del punto fijo y cualquier característica de Euler impar y negativa. Concretamente, $\Sigma\mathbb{CP}^{2n}$ tiene la propiedad del punto fijo y característica de Euler $1-2n$. Para probar que estos espacios tienen la propiedad del punto fijo, utilizaremos los cuadrados de Steenrod. También usaremos las potencias de Steenrod para probar que los espacios proyectivos cuaterniónicos $\mathbb{HP}^{2n}$ tienen la propiedad del punto fijo. Estos ejemplos de poliedros compactos de característica par con la propiedad del punto fijo aparecieron con posterioridad al paper de Lopez. Lopez construyó el espacio X_L para que tenga cierta álgebra de cohomología racional. Mostraremos que cualquier poliedro compacto con ese anillo de cohomología tiene la propiedad del punto fijo. Este resultado es más fuerte que aquel probado por Lopez, ya que para demostrar que X_L tiene la propiedad del punto fijo, éste utiliza ciertas propiedades particulares del espacio que no se desprenden del anillo de cohomología. Luego veremos algunos de los corolarios que se obtienen usando el espacio X_L, por ejemplo, que la propiedad del punto fijo no se preserva por productos, suspensiones, join y producto smash. Finalmente, veremos cómo el ejemplo de Lopez motiva las dos preguntas, formuladas por R.H. Bing, que estudiaremos más adelante en esta tesis.

2.1. Operaciones de Steenrod y aplicaciones

Las potencias de Steenrod son transformaciones naturales que relacionan la cohomología con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$ en distintos grados. Cuando $p = 2$ se llaman cuadrados de Steenrod. En esta sección recordaremos sus propiedades elementales y veremos aplicaciones a la teoría de punto fijo.

Teorema 2.1.1 (Cuadrados de Steenrod, [25, Section 4.L])**.** *Existen funciones* $\mathrm{Sq}^i : H^n(X;\mathbb{Z}_2) \to H^{n+i}(X;\mathbb{Z}_2)$ *definidas para cada espacio topológico* X *y* $n, i \geq 0$ *con las siguientes propiedades:*

(i) Si $f : X \to Y$*, entonces* $\mathrm{Sq}^i \circ f^* = f^* \circ \mathrm{Sq}^i$.

(ii) $\mathrm{Sq}^i(\alpha + \beta) = \mathrm{Sq}^i(\alpha) + \mathrm{Sq}^i(\beta)$.

(iii) $\mathrm{Sq}^i(\alpha \cup \beta) = \sum_{j+k=i} \mathrm{Sq}^j(\alpha) \cup \mathrm{Sq}^k(\beta)$.

(iv) $\mathrm{Sq}^i \circ \sigma = \sigma \circ \mathrm{Sq}^i$ *donde* $\sigma : H^n(X;\mathbb{Z}_2) \to H^{n+1}(\Sigma X;\mathbb{Z}_2)$ *es el isomorfismo de suspensión.*

(v) $\mathrm{Sq}^i(\alpha) = \alpha \cup \alpha$ *si* $i = |\alpha|$ *y* $\mathrm{Sq}^i(\alpha) = 0$ *si* $i > |\alpha|$.

(vi) Sq^0 *es la identidad.*

Por las propiedades anteriores, $\mathrm{Sq} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Sq}^i$ *es un morfismo de anillos* $\mathrm{Sq} : H^*(X;\mathbb{Z}_2) \to H^*(X;\mathbb{Z}_2)$.

Teorema 2.1.2 (Potencias de Steenrod,[25, Section 4.L])**.** *Sea* p *un primo impar. Existen funciones* $P^i : H^n(X;\mathbb{Z}_p) \to H^{n+2i(p-1)}(X;\mathbb{Z}_p)$ *definidas para cada espacio topológico* X *y* $n, i \geq 0$ *con las siguientes propiedades:*

(i) Si $f : X \to Y$*, entonces* $P^i \circ f^* = f^* \circ P^i$.

(ii) $P^i(\alpha + \beta) = P^i(\alpha) + P^i(\beta)$.

(iii) $P^i(\alpha \cup \beta) = \sum_{j+k=i} P^j(\alpha) \cup P^k(\beta)$.

(iv) $P^i \circ \sigma = \sigma \circ P^i$ *donde* $\sigma : H^n(X;\mathbb{Z}_p) \to H^{n+1}(\Sigma X;\mathbb{Z}_p)$ *es el isomorfismo de suspensión.*

(v) $P^i(\alpha) = \alpha^p$ *si* $2i = |\alpha|$ *y* $P^i(\alpha) = 0$ *si* $2i > |\alpha|$.

(vi) P^0 *es la identidad.*

Por las propiedades anteriores, $P = \sum_{i=0}^{\infty} P^i$ *es un morfismo de anillos,* $P : H^*(X;\mathbb{Z}_p) \to H^*(X;\mathbb{Z}_p)$.

El espacio proyectivo complejo de dimensión n, que notamos $\mathbb{CP}^n$, tiene una estructura de CW-complejo con una única celda en dimensión $2i$ para $i = 0, \ldots, n$. Sea F un cuerpo. Por cohomología celular, tenemos que $H^k(\mathbb{CP}^n; F) = F$ si $0 \leq i \leq 2n$ es par y es 0 en caso contrario. Además, el subcomplejo formado por las celdas de dimensión menor o igual que $2k$ es isomorfo a $\mathbb{CP}^k$. Entonces si $l \leq 2k$, tenemos que $H^l(\mathbb{CP}^k; F)$ se identifica con $H^l(\mathbb{CP}^n; F)$. Sea $\alpha \in H^2(\mathbb{CP}^n; F)$ el generador correspondiente a la 2-celda. Por dualidad de Poincaré en $\mathbb{CP}^2$ ([25, Proposition 3.38]), tenemos que $\alpha^2 = \alpha \cup \alpha$ es un generador de $H^4(\mathbb{CP}^2; F) = H^4(\mathbb{CP}^n; F)$. Por dualidad de Poincaré en $\mathbb{CP}^3$, tenemos que $\alpha^3 = \alpha^2 \cup \alpha$ es un generador de $H^6(\mathbb{CP}^3; F) = H^6(\mathbb{CP}^n; F)$. Continuando inductivamente, se tiene que α^i es un generador de $H^{2i}(\mathbb{CP}^n;F)$ para $i=0,\dots,n$. Entonces, hay un isomorfismo de F-álgebras graduadas $H^*(\mathbb{CP}^n;F)\simeq F[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ donde $|\alpha|=2$.

Análogamente, el espacio proyectivo cuaterniónico $\mathbb{HP}^n$ tiene una estructura de CW-complejo con una única celda en dimensión $4i$ para $i=0,\dots,n$. Luego, por cohomología celular, tenemos que $H^i(\mathbb{HP}^n;F)=F$ si $0\leq i\leq 4n$ es múltiplo de 4 y es 0 en caso contrario. Además, si $\gamma\in H^4(\mathbb{HP}^n;F)$ es el generador correspondiente a la 4-celda, usando dualidad de Poincaré igual que en el caso complejo, se obtiene que γ^i es un generador de $H^{4i}(\mathbb{HP}^n;F)$. Entonces, hay un isomorfismo de F-álgebras graduadas $H^*(\mathbb{HP}^n;F)\simeq F[\gamma]/(\gamma^{n+1})$ donde $|\gamma|=4$.

Como la cohomología de $\mathbb{CP}^n$ está concentrada en grado par, se tiene la siguiente descripción de sus cuadrados de Steenrod:

Lema 2.1.3. *Sea α el generador de $H^2(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z}_2)$. Entonces,* $\mathrm{Sq}^{2i}(\alpha^k)=\binom{k}{i}\alpha^{k+i}$.

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{Sq}(\alpha^k)&=\mathrm{Sq}(\alpha)^k\\&=(\mathrm{Sq}^0(\alpha)+\mathrm{Sq}^1(\alpha)+\mathrm{Sq}^2(\alpha))^k\\&=(\alpha+0+\alpha^2)^k\\&=\alpha^k(1+\alpha)^k\\&=\sum\binom{k}{j}\alpha^{k+j}\end{aligned}$$

Usando que Sq^{2i} sube $2i$ el grado y comparando grados, tenemos $\mathrm{Sq}^{2i}(\alpha^k)=\binom{k}{i}\alpha^{k+i}$. $\square$

Teorema 2.1.4. *Si m es par, $\Sigma\mathbb{CP}^m$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Si k es impar, por el Lema 2.1.3 $\mathrm{Sq}^2(\alpha^k)=\binom{k}{1}\alpha^{k+1}=\alpha^{k+1}$, o sea que

$$\mathrm{Sq}^2:H^{2k}(\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2)\to H^{2k+2}(\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2)$$

es isomorfismo. Ahora el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} H^{2k}(\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\mathrm{Sq}^2", "\sim"'] \arrow[d, "\sigma"', "\sim"] & H^{2k+2}(\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\sim"', "\sigma"] \\ H^{2k+1}(\Sigma\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\mathrm{Sq}^2"'] & H^{2k+3}(\Sigma\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2) \end{tikzcd}$$

y como σ es isomorfismo, tenemos que $\mathrm{Sq}^2:H^{2k+1}(\Sigma\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2)\to H^{2k+3}(\Sigma\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2)$ es isomorfismo. Sea $f:\Sigma\mathbb{CP}^m\to\Sigma\mathbb{CP}^m$. En el siguiente diagrama conmutativo, las flechas horizontales son isomorfismos:

$$\begin{array}{ccc} H^{2k+1}(\Sigma\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Sq}^2} & H^{2k+3}(\Sigma\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ H^{2k+1}(\Sigma\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow[\mathrm{Sq}^2]{\sim} & H^{2k+3}(\Sigma\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2) \end{array}$$

y entonces para k impar se tiene

$$\mathrm{tr}(f^*, H^{2k+1}(\Sigma\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2)) = \mathrm{tr}(f^*, H^{2k+3}(\Sigma\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2)).$$

Veamos que $L(f^*, \mathbb{Z}_2) = 1$. La cohomología de este espacio es $\mathbb{Z}_2$ en los lugares $0, 3, 5, 7, \ldots, 2m+1$ y 0 en los demás lugares. Como m es par, $2m+1$ es de la forma $4k+1$. Sabemos que $\mathrm{tr}(f^*, H^{4k-1}(\Sigma\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2)) = \mathrm{tr}(f^*, H^{4k+1}(\Sigma\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}_2))$ y entonces, módulo 2, estos términos se cancelan y sólo queda el término correspondiente al H^0, que es 1. Finalmente, por el teorema de Lefschetz, f tiene un punto fijo. □

Notar que $\chi(\Sigma\mathbb{CP}^n) = 1 - n$. Por lo tanto, existen poliedros compactos con la propiedad del punto fijo y característica de Euler impar negativa arbitraria. Como mencionamos al comienzo del capítulo, Lopez construyó un poliedro con la propiedad del punto fijo y característica de Euler positiva par. Posteriormente al paper de Lopez, Bredon mostró más ejemplos de poliedros compactos con la propiedad del punto fijo y característica de Euler par: los espacios $\mathbb{HP}^{2n+1}$ con $n > 0$ [16]. A continuación probaremos que $\mathbb{HP}^k$ tiene la propiedad del punto fijo si $k \geq 2$. La demostración del siguiente lema es idéntica a la del Lema 2.1.3.

Lema 2.1.5. *Sea α el generador de $H^2(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z}_p)$. Entonces $P^i(\alpha^k) = \binom{k}{i}\alpha^{k+i(p-1)}$.*

Lema 2.1.6. *Sea γ el generador de $H^4(\mathbb{HP}^n;\mathbb{Z}_p)$. Entonces $P^i(\gamma^k) = \binom{2k}{i}\gamma^{k+i\frac{p-1}{2}}$.*

Demostración. Usamos que el cociente $q : \mathbb{CP}^{2n+1} \to \mathbb{HP}^n$, inducido por el morfismo canónico $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{H}^2$, se restringe a un homeomorfismo entre las 4-celdas de ambos espacios y por lo tanto cumple $q^*(\gamma) = \alpha^2$. Entonces, en el siguiente diagrama, las flechas horizontales son isomorfismos:

$$\begin{array}{ccc} H^{4k}(\mathbb{HP}^n;\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow[\sim]{q^*} & H^{4k}(\mathbb{CP}^{2n+1};\mathbb{Z}_p) \\ {\scriptstyle P^i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P^i} \\ H^{4k+2i(p-1)}(\mathbb{HP}^n;\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow[q^*]{\sim} & H^{4k+2i(p-1)}(\mathbb{CP}^{2n+1};\mathbb{Z}_p) \end{array}$$

de esto se deduce lo que queremos probar. □

Definición 2.1.7. Si $f : \mathbb{HP}^n \to \mathbb{HP}^n$ es continua, $f^* : H^4(\mathbb{HP}^n;\mathbb{Z}) \to H^4(\mathbb{HP}^n;\mathbb{Z})$ es multiplicar por cierto número $d \in \mathbb{Z}$, que llamamos el *grado de f*.

Claramente $\mathbb{HP}^1 = S^4$ no tiene la propiedad del punto fijo.

Proposición 2.1.8. *Si $n \geq 2$, $\mathbb{HP}^n$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Si el grado de f es d, tenemos $L(f) = 1 + d + d^2 + \ldots + d^n$. Para aplicar el teorema de Lefschetz basta ver que $d \neq -1$. Fijamos $p = 3$ y calculamos $P^1(f^*(\gamma))$ de dos formas distintas, usando la naturalidad:

$$P^1(f^*(\gamma)) = P^1(d\gamma) = d2\gamma^2$$
$$f^*(P^1(\gamma)) = f^*(2\gamma^2) = 2d^2\gamma^2$$

Como $\gamma^2 \neq 0$, tenemos $2d^2 \equiv 2d \pmod 3$. Luego $d \neq -1$. □

2.2. El espacio de Lopez

En esta sección, seguiremos los pasos de Lopez [34] para construir el espacio X_L, que tiene la propiedad del punto fijo y característica de Euler par. Si bien la herramienta principal utilizada por Lopez para probar que X_L tiene la propiedad del punto fijo es el anillo de cohomología, el autor usa en la demostración cierta propiedad específica del espacio (que $\mathbb{CP}^2$ es un retracto). En esta sección probamos que no sólo X_L tiene la propiedad del punto fijo, sino que cualquier poliedro compacto con la misma cohomología también la tiene.

Proposición 2.2.1 (Lopez). *Sea X un poliedro compacto tal que*

$$H^*(X;\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[\alpha,\beta]/(\alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2, \beta^5)$$

con $|\alpha| = |\beta| = 2$ (el isomorfismo es como $\mathbb{Q}$-álgebras graduadas). Entonces X tiene la propiedad del punto fijo.

Observación 2.2.2. Una descripción más concreta del anillo de cohomología es la siguiente:

$H^0(X;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$	con generador 1
$H^2(X;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$	con generadores α, β
$H^4(X;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$	con generadores $\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2$
$H^6(X;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$	con generador β^3
$H^8(X;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$	con generador β^4
$H^k(X;\mathbb{Q}) = 0$	si $k \neq 0, 2, 4, 6, 8$

y se cumplen las siguientes relaciones:

$$\alpha^3 = \alpha\beta^2 = \alpha^2\beta = 0$$

El anillo es conmutativo porque la cohomología está en los grados pares. Además se tiene $\chi(X) = 8$.

Demostración. Sea $f : X \to X$. Escribamos $|f^*|_{\{\alpha,\beta\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Tenemos

$$0 = f^*(0) = f^*(\alpha^3) = f^*(\alpha)^3 = (a\alpha + c\beta)^3 = a^3\alpha^3 + 3a^2c\alpha^2\beta + 3ac^2\alpha\beta^2 + c^3\beta^3 = c^3\beta^3$$

y luego $c = 0$. Ahora, usando que f^* es morfismo de anillos, podemos calcular las trazas de f en la cohomología:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(f^*, H^0(X;\mathbb{Q})) &= 1 \\
\operatorname{tr}(f^*, H^2(X;\mathbb{Q})) &= a + d \\
\operatorname{tr}(f^*, H^4(X;\mathbb{Q})) &= a^2 + ad + d^2 \\
\operatorname{tr}(f^*, H^6(X;\mathbb{Q})) &= d^3 \\
\operatorname{tr}(f^*, H^8(X;\mathbb{Q})) &= d^4
\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
L(f^*, \mathbb{Q}) &= 1 + a + d + a^2 + ad + d^2 + d^3 + d^4 \\
&= \frac{1}{4}((2a + d + 1)^2 + (2d^2 + d)^2 + d^2 + (d + 1)^2 + 2) \\
&> 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el teorema de Lefschetz, f tiene un punto fijo. □

Antes de construir el ejemplo de Lopez, calculemos la cohomología de $S^2 \times S^2$ con coeficientes en un anillo conmutativo R. Llamamos e_0, e_2 a la 0-celda y a la 2-celda de S^2 respectivamente. Entonces, la estructura celular producto en $S^2 \times S^2$ consta de la 0-celda $e_0 \times e_0$, las 2-celdas $e_2 \times e_0$ y $e_0 \times e_2$ y la 4-celda $e_2 \times e_2$. La cohomología en grado 2-está generada por $\alpha = (e_2 \times e_0)^*$ y $\beta = (e_0 \times e_2)^*$. Sean $p_1, p_2 : S^2 \times S^2 \to S^2$ las proyecciones. Tenemos que $p_1^*(e_2^*) = \alpha$ y $p_2^*(e_2^*) = \beta$. Luego, como $e_2^* \cup e_2^* = 0$, tenemos $\alpha^2 = \beta^2 = 0$. Queremos ver que $\alpha \cup \beta$ genera $H^4(S^2 \times S^2; R)$. Por [25, Theorem 3.15], el producto cruz $\times : H^2(S^2; R) \otimes H^2(S^2; R) \to H^4(S^2 \times S^2; R)$ es isomorfismo. Pero el producto cruz se define por $a \times b = p_1^*(a) \cup p_2^*(b)$, luego $\alpha \cup \beta \in H^4(S^2 \times S^2; R)$ es un generador. Como α y β tienen grado 2, conmutan.

Definición 2.2.3. Vamos a construir el *espacio de Lopez* X_L. Lo definimos mediante una estructura de CW complejo, aunque en realidad admite una triangulación. Empezamos con una 0-celda e_1. Adjuntamos dos 2-celdas, que llamamos e_α y e_β. A continuación, adjuntamos una 4-celda $e_{\alpha\beta}$ para formar un "toro" $S^2 \times S^2$. Pegamos una 4-celda e_{α^2} sobre e_α, de modo que el subcomplejo formado por e_1, e_α y e_{α^2} sea $\mathbb{CP}^2$. Ahora adjuntamos las celdas e_{β^2}, e_{β^3} y e_{β^4} de dimensiones 4, 6 y 8 respectivamente, de modo que el subcomplejo formado por e_1, e_β, e_{β^2}, e_{β^3} y e_{β^4} sea la estructura estándar de $\mathbb{CP}^4$.

Proposición 2.2.4 (Lopez). *La cohomología con coeficientes racionales de X_L está dada por*

$$H^*(X_L;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\alpha,\beta]/(\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^5)$$

con $|\alpha| = |\beta| = 2$. En particular, X_L tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. Llamamos $i_{S^2\times S^2} : S^2\times S^2 \to X_L$, $i_{\mathbb{CP}^2} : \mathbb{CP}^2 \to X_L$, $i_{\mathbb{CP}^4} : \mathbb{CP}^4 \to X_L$ a las inclusiones.

Notemos que todas la celdas tienen dimensión par. Entonces podemos identificar $H^k(X_L;\mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}(C_k(X_L),\mathbb{Q})$. Es fácil ver que, en cada grado, las dimensiones de ambas álgebras coinciden. Definimos $\alpha = e_\alpha^*$, $\beta = e_\beta^*$.

Veamos que $\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2$ es linealmente independiente. Si $p\alpha^2 + q\alpha\beta + r\beta^2 = 0$, entonces $0 = i^*_{S^2\times S^2}(p\alpha^2+q\alpha\beta+r\beta^2) = p\alpha^2+q\alpha\beta+r\beta^2 = q\alpha\beta$ y entonces, como $\alpha\beta$ genera $H^2(S^2 \times S^2;\mathbb{Q})$, tenemos $q = 0$. Además, $0 = i^*_{\mathbb{CP}^2}(p\alpha^2 + q\alpha\beta + r\beta^2) = p\alpha^2$ y entonces $p = 0$. La misma cuenta, con $i^*_{\mathbb{CP}^4}$, nos dice que $r = 0$. Para ver que $\beta^3 \in H^6(X_L;\mathbb{Q})$ y $\beta^4 \in H^8(X_L;\mathbb{Q})$ son generadores, usamos la misma idea.

Para probar que $\alpha^3 = \alpha\beta^2 = \alpha^2\beta = 0$, notamos que $i^*_{\mathbb{CP}^4} : H^6(X_L;\mathbb{Q}) \to H^6(\mathbb{CP}^4;\mathbb{Q})$ es isomorfismo y que $i^*_{\mathbb{CP}^4}(\alpha) = 0$. Esto completa el cálculo de la cohomología de X_L. □

2.3. Resultados de Lopez

A continuación veremos las consecuencias más relevantes que se obtienen utilizando el espacio X_L, entre ellas que la propiedad del punto fijo no es un invariante homotópico.

Teorema 2.3.1 (Lopez). *La propiedad del punto fijo no es un invariante homotópico en la categoría de poliedros compactos.*

Demostración. Consideremos $X = X_L \vee \Sigma\mathbb{CP}^8$. Por ser un wedge de espacios con la propiedad del punto fijo (Proposición 2.2.4 y Teorema 2.1.4), X tiene la propiedad del punto fijo. Además, tenemos $\chi(X) = \chi(X_L) + \chi(\Sigma\mathbb{CP}^8) - 1 = 8 + (-7) - 1 = 0$. Por la Proposición 1.2.7, existe un poliedro compacto $Y \simeq X$ sin global separating points (en efecto, como X_L y $\Sigma\mathbb{CP}^8$ no tienen global separating points, una única expansión elemental alcanza para eliminar los global separating points). Finalmente, por el Teorema 1.4.30, concluimos que Y no tiene la propiedad del punto fijo. □

Para que $A \times B$ tenga la propiedad del punto fijo es necesario que A y B la tengan. En 1930, Kuratowski se preguntó si la recíproca de esta afirmación es cierta [32]. Usando el espacio X_L, Lopez probó que la respuesta es negativa:

Teorema 2.3.2 (Lopez). *Existe un poliedro compacto X con la propiedad del punto fijo y tal que $X \times I$ y $X \times X$ no tienen la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Basta tomar $X = X_L \vee \Sigma\mathbb{CP}^8$. Tenemos $\chi(X) = 0$ y entonces $\chi(X \times I) = \chi(X \times X) = 0$. Además, $X \times I$ y $X \times X$ no tienen global separating points. Luego se puede aplicar el Teorema 1.4.30. □

Teorema 2.3.3 (Lopez)**.** *Existe un poliedro X con la propiedad del punto fijo tal que ΣX no tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. El espacio $X = X_L \vee \Sigma\mathbb{CP}^6$ tiene la propiedad del punto fijo y $\chi(X) = 2$. Luego $\chi(\Sigma X) = 0$ y además ΣX no tiene global separating points. Luego, por el Teorema 1.4.30, ΣX no tiene la propiedad del punto fijo. □

Teorema 2.3.4 ([16, Corollary 4.6])**.** *Existe un poliedro compacto X con la propiedad del punto fijo y tal que el join $X * X$ no tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Consideramos $X = X_L \vee \Sigma\mathbb{CP}^8$. Sabemos que X tiene la propiedad del punto fijo y que $\chi(X) = 0$. Ahora, $\chi(X * X) = \chi(X) + \chi(X) - \chi(X)\chi(X) = 0$. Además $X * X$ no tiene global separating points y entonces por el Teorema 1.4.30, $X * X$ no tiene la propiedad del punto fijo. □

Teorema 2.3.5 ([16, Corollary 4.6])**.** *Existen poliedros compactos X, Y con la propiedad del punto fijo y tales que el smash product $X \wedge Y$ no tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean $X = X_L \vee \Sigma\mathbb{CP}^8$ e $Y = X_L \vee \Sigma\mathbb{CP}^6$. Ya sabemos que X e Y tienen la propiedad del punto fijo. Además $\chi(X \wedge Y) = \chi(X)\chi(Y) - \chi(X) - \chi(Y) + 2 = 0$. Como $X \wedge Y$ no tiene global separating points, por el Teorema 1.4.30, tenemos que $X \wedge Y$ no tiene la propiedad del punto fijo. □

2.4. Las preguntas de Bing

En su artículo "The elusive fixed point property" de 1969, R. H. Bing formuló 12 preguntas relacionadas con la propiedad del punto fijo [5]. Hasta el año 2014 habían sido respondidas 8 de ellas. Las preguntas 1 y 8, estudiadas en esta tesis, fueron respondidas recientemente en [39]. A continuación, recordamos la formulación de estas dos preguntas. La respuesta será desarrollada a lo largo del próximo capítulo. Como estudiamos en la última sección, los resultados de Lopez y Fadell sobre la invarianza homotópica de la propiedad del punto fijo y su comportamiento frente a las construcciones clásicas, se apoyan fuertemente en la existencia del espacio X_L. Además de tener la propiedad del punto fijo, X_L tiene la propiedad fundamental de poseer característica de Euler par. El espacio X_L tiene dimensión 8. La primera pregunta de Bing concierne a la existencia de un ejemplo similar con dimensión mínima.

Pregunta 2.4.1 (Bing's Question 1)**.** *¿Existe un poliedro compacto y de dimensión dos con la propiedad del punto fijo y característica de Euler par?*

Notemos que -incluso si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa- no se deduce inmediatamente que la propiedad del punto fijo no es un invariante homotópico de los poliedros de dimensión 2, ya que por el teorema de Borsuk, no hay poliedros de dimensión 2 con característica de Euler negativa y con la propiedad del punto fijo. Si bien la Pregunta 2.4.1 habla de poliedros con característica de Euler par, tampoco se conocían ejemplos con característica de Euler distinta de 1. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.4.2. Diremos que un poliedro compacto X de dimensión 2 es un *espacio de Bing* si tiene la propiedad del punto fijo y $\chi(X) \neq 1$.

Por el Corolario 1.3.8, si existe un ejemplo $H_1(X)$ debe ser de torsión. En este caso, el producto cup y los cuadrados de Steenrod no dan información. La Pregunta 2.4.1 fue estudiada en [43]. Dicho artículo analiza el caso en que el grupo fundamental es trivial. En el capítulo siguiente, encontraremos algunas condiciones necesarias para que un espacio sea de Bing; en particular veremos que la respuesta a la Pregunta 2.4.1 es negativa si nos restringimos a espacios con grupo fundamental abeliano. Finalmente, presentaremos una idea que nos permitirá hallar un ejemplo que muestra que la respuesta es afirmativa.

La demostración del Teorema 2.3.1 motiva la siguiente pregunta:

Pregunta 2.4.3 (Bing's Question 8)**.** *¿Cuál es el menor n tal que existen un poliedro X de dimensión n con la propiedad del punto fijo y un disco D tal que $X \cap D$ es un arco y $X \cup D$ no tiene la propiedad del punto fijo?*

La respuesta es un número mayor que 1, ya que un poliedro de dimensión 1 con la propiedad del punto fijo es un árbol y entonces cualquier espacio obtenido adjuntando un disco a lo largo de un arco es un poliedro contráctil. Si consideramos una pregunta análoga para espacios más generales, la respuesta es 1 [5, Theorem 15].

La Pregunta 2.4.3 se relaciona con la invarianza homotópica de la propiedad del punto fijo de un modo preciso. Por el Teorema 1.4.29, el menor n tal que la propiedad del punto fijo no es un invariante homotópico de los poliedros de dimensión n, coincide con el menor n tal que existe un poliedro compacto de dimensión n, con la propiedad del punto fijo y tal que, haciendo una expansión elemental de dimensión 2, se obtiene un poliedro sin la propiedad del punto fijo. En Teorema 3.2.11, mostraremos que este número es 2. Concluimos entonces que la respuesta a la Pregunta 2.4.3 es 2, tal como conjeturó Bing [23].

De las demás preguntas de Bing, mencionamos la pregunta 11, que está relacionada con el ejemplo de Lopez y fue respondida por la negativa por G. E. Bredon [8] en 1971.

Pregunta 2.4.4 (Bing's Question 11)**.** *¿Es cierto que si P y Q son poliedros con la propiedad del punto fijo y sin local separating points, entonces $P \times Q$ tiene la propiedad del punto fijo?*

La pregunta de si el producto de dos variedades con la propiedad del punto fijo necesariamente tiene la propiedad del punto fijo fue respondida negativamente por Husseini [27]. Una exposición detallada sobre el producto de espacios y la propiedad del punto fijo es [10].

Capítulo 3

La propiedad del punto fijo en dimensión dos

En este capítulo se presentan resultados originales que dan respuesta a las preguntas 1 y 8 de Bing formuladas al final del capítulo anterior. El grupo fundamental del espacio jugará un rol central y lo que haremos será estudiar los CW-complejos asociados a presentaciones de grupo. En la Sección 3.1, siguiendo [2], probaremos que un espacio de Bing no puede tener grupo fundamental abeliano. En el camino, obtendremos algunas condiciones necesarias para que un espacio sea de Bing, por ejemplo veremos que el segundo grupo de homología del grupo fundamental no puede ser trivial y que la característica de Euler del espacio debe ser la mínima posible para ese grupo. Usando ideas similares, demostraremos que el grupo fundamental de un espacio de Bing no puede ser un subgrupo finito de SO(3). En la Sección 3.2, siguiendo [39], responderemos las preguntas de Bing. Más precisamente, construiremos poliedros de dimensión 2 con la propiedad del punto fijo y característica de Euler positiva arbitraria. Luego mostraremos que la propiedad del punto fijo no es invariante homotópico de los poliedros de dimensión 2.

3.1. Grupo fundamental abeliano

En esta sección expondremos los resultados más relevantes de nuestro artículo [2]. Para comenzar, recordamos la construcción clásica que a una presentación de un grupo G le hace corresponder un CW-complejo de dimensión 2 con grupo fundamental G.

Definición 3.1.1 (complejo asociado a una presentación)**.** Sea $\mathcal{P} = \langle a_1, \ldots, a_n \mid r_1, \ldots, r_k \rangle$ una presentación de un grupo G. El CW-complejo $X_{\mathcal{P}}$ *asociado a la presentación* $\mathcal{P}$ tiene una estructura celular estándar con una única 0-celda, una 1-celda por cada generador a_i y una 2-celda por cada relación r_j. La función de adjunción de la 2-celda correspondiente a r_j es el lazo que recorre las 1-celdas correspondientes a las letras de r_j en el orden en que ocurren y con la dirección dada por el exponente ($+1$ ó -1) de cada letra. El grupo fundamental de $X_{\mathcal{P}}$ es G. La segunda subdivisión baricéntrica de este complejo es una triangulación de $X_{\mathcal{P}}$, por lo tanto todo complejo asociado a una presentación es un poliedro.

Recíprocamente, todo CW-complejo X compacto, conexo y de dimensión 2 es homotópicamente equivalente al complejo asociado a una presentación $\mathcal{P}$ de $\pi_1(X)$. Para ver esto, basta cocientar por un árbol maximal T del 1-esqueleto de X. El CW-complejo $Y = X/T$ obtenido tiene una única 0-celda. El grupo fundamental del 1-esqueleto de Y es libre con base las 1-celdas de Y y las funciones de adjunción de las 2-celdas de Y determinan palabras en este grupo libre. Así obtenemos una presentación y el complejo asociado es homotópicamente equivalente a X.

Ejemplo 3.1.2. Si $\mathcal{P} = \langle a_1, \dots, a_n \mid \rangle$, entonces $K_{\mathcal{P}} = \bigvee_{i=1}^{n} S^1$. Si $\mathcal{P} = \langle a_1 \mid 1 \rangle$, entonces $K_{\mathcal{P}} = S^1 \vee S^2$. Si $\mathcal{P} = \langle a_1 \mid a_1^2 \rangle$, entonces $K_{\mathcal{P}} = \mathbb{RP}^2$. Si $\mathcal{P} = \langle a_1, a_2 \mid [a_1, a_2] \rangle$, entonces $K_{\mathcal{P}}$ es el toro. Si $\mathcal{P} = \langle a_1, a_2 \mid a_1 a_2 a_1^{-1} a_2 \rangle$, entonces $K_{\mathcal{P}}$ es la botella de Klein.

Si G es un grupo abeliano finito con factores invariantes $m_1 \mid m_2 \mid \dots \mid m_n$ y $(d, m_1) = 1$, la presentación

$$\mathcal{T}_d = \langle a_1, \dots, a_n | a_1^{m_1}, \dots, a_n^{m_n}, [a_1^d, a_2], [a_i, a_j], i < j, (i,j) \neq (1,2) \rangle$$

es una presentación de G. Los complejos $K_{\mathcal{T}_d}$ aparecerán a lo largo de la sección.

Definición 3.1.3 (Deficiencia)**.** La *deficiencia* de una presentación $\mathcal{P} = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$ está dada por $\operatorname{def}(\mathcal{P}) = k - n$. Entonces $\chi(X_{\mathcal{P}}) = \operatorname{def}(\mathcal{P}) + 1$. Si G es un grupo finitamente presentado, la *deficiencia* de G, $\operatorname{def}(G)$, es la mínima deficiencia posible de una presentación de G. Luego, para todo CW-complejo X compacto, conexo y de dimensión 2 con grupo fundamental G, se tiene $\chi(X) \geq \operatorname{def}(G) + 1$. Si se da la igualdad, decimos que X tiene *característica de Euler mínima.*

Ejemplo 3.1.4. Si $H_1(G)$ es de torsión, entonces $\operatorname{def}(G) \geq 0$. La presentación $\langle a \mid a^m \rangle$ muestra que $\mathbb{Z}_m$ tiene deficiencia 0. La presentación $\mathcal{P} = \langle a, b \mid a^2, b^4, [a,b] \rangle$ muestra que $\operatorname{def}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4) \leq 1$. Enseguida veremos que esta presentación realiza la deficiencia, o sea que $K_{\mathcal{P}}$ tiene característica de Euler mínima.

Dado un espacio arcoconexo X, denotaremos $\Sigma_2(X)$ a la imagen del morfismo de Hurewicz $h : \pi_2(X, x_0) \to H_2(X)$.

Teorema 3.1.5 (Hopf, [9, II, Theorem 5.2])**.** *Sea X un espacio arcoconexo. Entonces hay una sucesión exacta corta*

$$0 \to \Sigma_2(X) \to H_2(X) \to H_2(K(\pi_1(X, x_0), 1)) \to 0$$

El morfismo $i : \Sigma_2(X) \to H_2(X)$ es la inclusión. Adjuntando a X celdas de dimensión mayor o igual que tres, se puede construir un espacio de tipo $K(\pi_1(X, x_0), 1)$.

El morfismo $j_* : H_2(X) \to H_2(K(\pi_1(X, x_0)))$ que aparece en el teorema anterior es el inducido por la inclusión $j : X \to K(\pi_1(X, x_0), 1)$. La exactitud en los extremos es inmediata. Como el morfismo de Hurewicz es natural, se sigue que $j_* \circ i = 0$. Omitimos la demostración de la exactitud en el medio.

En lo que sigue, utilizaremos algunas propiedades básicas de la homología de grupos que se explican en el Apéndice A. La sucesión exacta corta del Teorema 3.1.5 puede usarse para obtener una cota inferior para la deficiencia de un grupo finitamente presentado. Concretamente, si $\mathcal{P} = \langle a_1, \ldots, a_n \mid r_1, \ldots, r_k \rangle$ es una presentación de G con deficiencia mínima, entonces el hecho de que exista un epimorfismo $H_2(X_\mathcal{P}) \to H_2(G) = H_2(K(G, 1))$ implica que $\mathrm{rk}(H_2(X_\mathcal{P}))$ es mayor o igual que la cantidad de factores invariantes de $H_2(G)$. Ahora

$$\begin{aligned} \mathrm{def}(G) &= k - n \\ &= \chi(X_\mathcal{P}) - 1 \\ &= \mathrm{rk}(H_2(X_\mathcal{P})) - \mathrm{rk}(H_1(X_\mathcal{P})) \\ &= \mathrm{rk}(H_2(X_\mathcal{P})) - \mathrm{rk}(H_1(G)) \end{aligned}$$

donde $H_1(G)$ es, por supuesto, la abelianización de G. Entonces tenemos

$$\mathrm{def}(G) \geq \text{número de factores invariantes de } H_2(G) - \mathrm{rk}(H_1(G)).$$

Si además $H_1(G)$ es de torsión, se tiene

$$\mathrm{def}(G) \geq \text{número de factores invariantes de } H_2(G).$$

Definición 3.1.6. Sea G un grupo finitamente presentable. Si se da la igualdad en la cota anterior, decimos que G es *eficiente*. Si $\mathcal{P}$ es una presentación que realiza la igualdad, decimos que $\mathcal{P}$ es *eficiente*.

Ejemplo 3.1.7. En el Apéndice A, probamos que el multiplicador de Schur $H_2(G)$ de un grupo abeliano finito $G = \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{d_n}$ con $d_1 \mid \ldots \mid d_n$ tiene $\binom{n}{2}$ factores invariantes. Las presentaciones $\mathcal{T}_d$ tienen deficiencia $\binom{n}{2}$, así que son eficientes.

B. H. Neumann se preguntó si todo grupo con multiplicador de Schur trivial es eficiente [37]. Usando desigualdades análogas a las de Morse, R.G. Swan probó que la respuesta es negativa [41]. Los ejemplos que construyó Swan son de la forma $(\mathbb{Z}_7)^n \rtimes \mathbb{Z}_3$, donde $1 \in \mathbb{Z}_3$ actúa en $(\mathbb{Z}_7)^n$ multiplicando por 2. Estos grupos tienen multiplicador de Schur trivial y no son eficientes si n es suficientemente grande.

3.1.1. Elementos esféricos primitivos

Una estrategia para probar que un espacio X no tiene la propiedad del punto fijo, es encontrar un espacio $Y \simeq X$ que tenga a S^n como retracto. Waggoner usó esa idea para probar el Teorema 3.1.10. Necesitaremos el siguiente resultado de teoría de obstrucción.

Teorema 3.1.8 ([40, Theorem 8.4.1])**.** *Sea (Y, y_0) un espacio punteado $(n-1)$-conexo con $n \geq 1$. Sea (X, A) un CW-par tal que $H^{q+1}(X, A; \pi_q(Y, yo)) = 0$ si $q > n$. Sea $f : A \to Y$ una función continua. Si $\delta f^* : H^n(Y; \pi_n(Y, y_0)) \to H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y, y_0))$ es el morfismo 0, entonces f se extiende a X.*

Si bien el siguiente lema fue probado por Waggoner en [42], la demostración que damos es más simple que la original.

Lema 3.1.9 (Waggoner)**.** *Sea (X, S^n) un CW-par con $\dim(X) \leq n+1$, $n \geq 1$. Si $i_* : H_n(S^n) \to H_n(X)$ es sección, entonces S^n es retracto de X.*

Demostración. Por el teorema de coeficientes universales, tenemos un diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X), \pi_n(S^n)) & \longrightarrow & H^n(X; \pi_n(S^n)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(H_n(X), \pi_n(S^n)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle i^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (i_*)^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (i_*)^*} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(S^n), \pi_n(S^n)) & \to & H^n(S^n; \pi_n(S^n)) & \to & \mathrm{Hom}(H_n(S^n), \pi_n(S^n)) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Como $H_n(i)$ y $H_{n-1}(i)$ son secciones, los morfismos verticales de los extremos son epimorfismos. Por el lema de los cinco ([45, Exercise 1.3.3]), tenemos que $i^* : H^n(X; \pi_n(S^n)) \to H^n(S^n; \pi_n(S^n))$ es epimorfismo. Por lo tanto, el morfismo de conexión

$$\delta : H^n(S^n; \pi_n(S^n)) \to H^{n+1}(X, S^n; \pi_n(S^n))$$

es trivial. Además si $q > n$, tenemos que $H^q(S^n; \pi_q(S^n)) = 0$ y $H^{q+1}(X; \pi_q(S^n)) = 0$. Luego, por la sucesión exacta larga de cohomología del par (X, S^n), tenemos que, si $q > n$, entonces $H^{q+1}(X, S^n; \pi_q(S^n)) = 0$. Ahora, por el Teorema 3.1.8, $1_{S^n} : S^n \to S^n$ se extiende a X. □

El caso $n = 3$ del siguiente teorema fue probado por Jiang [29].

Teorema 3.1.10 (Waggoner [42])**.** *Sea X un poliedro compacto de dimensión $n \neq 2$ y $(n-2)$-conexo. Si $\widetilde{H}_*(X; \mathbb{Q}) \neq 0$, entonces X no tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Los casos $n = 0$ y $n = 1$ son evidentes. Supongamos que $n \geq 3$. Primero veamos que se puede suponer que X no tiene global separating points. Escribimos $X = X_1 \vee \ldots \vee X_k$, donde cada X_i es un 1-símplex o un poliedro sin global separating points. Para algún i debe valer $\widetilde{H}_*(X; \mathbb{Q}) \neq 0$ y además X_i es $(n-2)$-conexo (esto último vale porque X_i es retracto de X). Luego basta ver que X_i no tiene la propiedad del punto fijo.

Por el Teorema de Hurewicz, tenemos que $\widetilde{H}_k(X) = 0$ para $0 \leq k \leq n-2$, que $h_{n-1} : \pi_{n-1}(X) \to H_{n-1}(X)$ es isomorfismo y que $h_n : \pi_n(X) \to H_n(X)$ es epimorfismo. Luego, dado que $\widetilde{H}_*(X; \mathbb{Q}) \neq 0$ para j igual a $n-1$ ó n, existe una sección $\mathbb{Z} \hookrightarrow H_j(X)$ y como $h_j : \pi_j(X) \to H_j(X)$ es epimorfismo, por la definición del morfismo de Hurewicz, existe $f : S^j \to X$ tal que $f_* : H_j(S^j) \to H_j(X)$ es sección. Subdividiendo si es necesario, podemos suponer que f es simplicial. Ahora, aplicando el Lema 3.1.9 al par $(M(f), S^j)$, concluimos que $M(f)$ no tiene la propiedad del punto fijo. Además $M(f)$ es un poliedro [13, Proposition 9.8] y entonces por el Teorema 1.4.29, X no tiene la propiedad del punto fijo. □

El teorema anterior no vale para $n = 2$, como veremos en la Sección 3.2. A continuación, estudiaremos hasta qué punto se puede aplicar la estrategia de Waggoner para un 2-complejo. Deduciremos que el multiplicador de Schur del grupo fundamental de un espacio de Bing no puede ser trivial. Además, probaremos que, si el grupo fundamental G de un espacio de Bing X es libremente indescomponible, entonces G debe ser eficiente y X debe tener característica de Euler mínima.

Sea F un grupo abeliano libre. Decimos que $a \in F$ es *primitivo en F* si el morfismo $\mathbb{Z} \to F$ dado por $1 \mapsto a$ es sección. Esto es equivalente a decir que $\{a\}$ se extiende a una base de F.

Lema 3.1.11. *Sea*

$$0 \to S \to \mathbb{Z}^k \to A \to 0$$

una sucesión exacta corta de grupos abelianos. Son equivalentes:

(i) El número de factores invariantes de A es estrictamente menor que k.

(ii) Existe $a \in S$ primitivo en $\mathbb{Z}^k$.

Demostración. Supongamos que A tiene $n < k$ factores invariantes. Hay un epimorfismo $\mathbb{Z}^n \to A$. Como $\mathbb{Z}^k$ es proyectivo, existe f tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & & & \mathbb{Z}^n \arrow[d, two heads] & \\ 0 \arrow[r] & S \arrow[r] & \mathbb{Z}^k \arrow[r] \arrow[ur, "f"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Luego basta encontrar un elemento $a \in \ker(f)$ primitivo en $\mathbb{Z}^k$. Por forma normal de Smith, existen bases $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ y $B' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ de $\mathbb{Z}^k$ y $\mathbb{Z}^n$ respectivamente, tales que la matriz de f en esas bases es diagonal. Las últimas $k - n$ columnas de esa matriz son 0 y entonces $b_k \in \ker(f) \subset S$ es primitivo en $\mathbb{Z}^k$.

Recíprocamente, supongamos que $b_1 \in S$ es primitivo en $\mathbb{Z}^k$. Podemos extender a una base $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ de $\mathbb{Z}^k$. Ahora, si llamamos $[x]$ a la clase en A de $x \in \mathbb{Z}^k$, tenemos que $\{[b_2], \ldots, [b_k]\}$ generan A, por lo tanto el número de factores invariantes de A es a lo sumo $k - 1$. □

Proposición 3.1.12. *Sea X un poliedro compacto, conexo y de dimensión 2. Son equivalentes:*

(i) X es homotópicamente equivalente a un poliedro Y que tiene a S^2 como retracto.

(ii) Existe $f : S^2 \to X$ *tal que* $H_2(f)$ *es sección.*
(iii) Existe $a \in \Sigma_2(X)$ *primitivo en* $H_2(X)$.
(iv) El número de factores invariantes de $H_2(\pi_1(X))$ *es estrictamente menor que el rango de* $H_2(X)$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) es claro. Para (ii) $\Rightarrow$ (i) aplicamos el Lema 3.1.9 al par $(M(f), S^2)$, donde $M(f)$ es el mapping cylinder de f.

(ii) $\iff$ (iii) se sigue de la definición del morfismo de Hurewicz.

(iii) $\iff$ (iv) vale por el Lema 3.1.11. □

Teorema 3.1.13. *Si* $H_2(G) = 0$*, entonces no hay espacios de Bing con grupo fundamental* G.

Demostración. Supongamos que existe un espacio de Bing X con $\pi_1(X) = G$. Escribimos $X = X_1 \vee \ldots \vee X_m$, donde cada X_i es un poliedro sin global separating points o un 1-símplex (permitimos que los wedges tengan distinto punto base). Como $H_2(X) \neq 0$, para algún i tenemos $H_2(X_i) \neq 0$. Por ser retracto de X, X_i tiene la propiedad del punto fijo. Por el Teorema de van Kampen, $\pi_1(X_i)$ es factor libre de G y entonces, dado que $H_2(G) = 0$, se obtiene $H_2(\pi_1(X_i)) = 0$ (ver Lema A.6). Por la Proposición 3.1.12 y el Teorema 1.4.29, X_i no tiene la propiedad del punto fijo. □

El caso $G = 0$ en el Teorema 3.1.13 fue estudiado por Waggoner [43].

Corolario 3.1.14. *No hay espacios de Bing con grupo fundamental trivial; cíclico; diedral de orden* 2 (mód 4)*;* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_q)$*, salvo las posibles excepciones* $(n, q) \neq (2, 4)$, $(2, 9)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$*; de deficiencia cero (e.g. los cuaterniones); de orden libre de cuadrados (más generalmente, tal que todo subgrupo de Sylow tiene multiplicador de Schur trivial);* 13 *de los* 26 *grupos simples esporádicos; varias familias infinitas de grupos simples de tipo Lie.*

Demostración. Todos estos grupos tienen multiplicador de Schur trivial. Para los cíclicos, diedrales y $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_q)$, esto aparece en [45]. Si la deficiencia es 0 es claro. Para los grupos tales que todo subgrupo de Sylow tiene multiplicador de Schur trivial, se sigue de [9, Chapter III, Corollary 10.2 and Theorem 10.3]. Para la afirmación sobre los grupos finitos simples, ver [19, Section 6.1]. □

Definición 3.1.15. Un grupo G se dice *libremente indescomponible* si $G \simeq H * K$ implica $H \simeq 1$ o $K \simeq 1$.

Claramente, los grupos finitos y los grupos abelianos son libremente indescomponibles. La siguiente reducción será útil en la sección Sección 3.1.2.

Proposición 3.1.16. *Sea* X *un espacio de Bing con grupo fundamental* G *libremente indescomponible. Entonces hay un espacio de Bing* $Y \simeq X$ *sin global separating points.*

Demostración. Fijemos una triangulación de X. Si X tiene un global separating point y X no es un 1-símplex, entonces X es un wedge de dos poliedros X_1, X_2 con menos vértices que X. Por el teorema de van Kampen, $G \simeq \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$ y como G es libremente indescomponible, alguno de estos poliedros, digamos X_2, es simplemente conexo. Por el Teorema 3.1.13 no hay espacios de Bing simplemente conexos. Luego $\widetilde{H}_*(X_2) = 0$. Por lo tanto, X_2 es contráctil y $X = X_1 \vee X_2 \simeq X_1$. Por inducción, existe un espacio de Bing $Y \simeq X$ sin global separating points. □

Proposición 3.1.17. *Sea X un espacio de Bing con grupo fundamental G. Si G es libremente indescomponible, entonces G es eficiente y X tiene característica de Euler mínima.*

Demostración. Por la Proposición 3.1.16, podemos asumir que X no tiene global separating points. Si el rango de $H_2(X)$ es estrictamente mayor que el número de factores invariantes de $H_2(G)$, por la Proposición 3.1.12 y el Teorema 1.4.29, tenemos una contradicción. □

Ya vimos que los grupos abelianos finitos son eficientes y, exceptuando a los cíclicos, tienen multiplicador de Schur no trivial. Para probar que esos grupos no son el grupo fundamental de un espacio de Bing, necesitaremos otros métodos.

3.1.2. Espacios de Bing con grupo fundamental abeliano

A continuación probamos el resultado principal de la sección, que no hay espacios de Bing con grupo fundamental abeliano. Empezamos estudiando el caso de dos factores invariantes, que jugará un rol esencial en la demostración.

Lema 3.1.18. *Sea $\mathcal{P} = \langle a, b \mid a^m, b^n, [a,b] \rangle$. Entonces $X_{\mathcal{P}}$ no tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por el Teorema 1.4.27, alcanza con encontrar $f : X_{\mathcal{P}} \to X_{\mathcal{P}}$ tal que $N(f) = 0$. Sea $T = S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Podemos identificar $X_{\mathcal{P}}$ con el siguiente pushout:

$$\begin{tikzcd} S^1_a \coprod S^1_b \arrow[r, "(z^m,1)\coprod(1,z^n)"] \arrow[d] & T \arrow[d, "i_T"] \\ D^2_a \coprod D^2_b \arrow[r, "i_a \coprod i_b"'] & X_{\mathcal{P}} \end{tikzcd}$$

donde $S^1_a, S^1_b, D^2_a, D^2_b \subseteq \mathbb{C}$ son copias de S^1 y D^2 respectivamente.

Definimos $f_T : T \to X_{\mathcal{P}}$, $f_a : D_a^2 \to X_{\mathcal{P}}$ y $f_b : D_b^2 \to X_{\mathcal{P}}$ por

$$f_T(z, w) = i_T(-z, -\overline{w})$$
$$f_a(z) = \begin{cases} i_a(2z) & \text{si } 0 \le |z| \le \frac{1}{2} \\ i_T\left(\frac{z^m}{|z|^m}\exp(i\pi(2|z|-1)), \exp(i\pi(2|z|-1))\right) & \text{si } \frac{1}{2} \le |z| \le 1 \end{cases}$$
$$f_b(z) = \begin{cases} i_b(2\overline{z}) & \text{si } 0 \le |z| \le \frac{1}{2} \\ i_T\left(\exp(i\pi(2|z|-1)), \frac{\overline{z}^n}{|z|^n}\exp(i\pi(2|z|-1))\right) & \text{si } \frac{1}{2} \le |z| \le 1 \end{cases}$$

Es fácil verificar que f_T, f_a y f_b están bien definidas y son continuas; y que definen una función continua $f : X_{\mathcal{P}} \to X_{\mathcal{P}}$.

Se puede ver que los únicos puntos fijos de f son $i_a(0)$ y $i_b(0)$. Vamos a probar que están en la misma clase de punto fijo. Consideremos los caminos $\gamma_a, \delta_a, \delta_b, \gamma_b : [0, 1] \to X_{\mathcal{P}}$ definidos por

$$\begin{aligned} \gamma_a(t) &= i_a(t/2) \\ \delta_a(t) &= i_a(1/2 + t/2) \\ \delta_b(t) &= i_b(1 - t/2) \\ \gamma_b(t) &= i_b(1/2 - t/2) \end{aligned}$$

La concatenación $\gamma_a * \delta_a * \delta_b * \gamma_b$ está bien definida y es un camino de $i_a(0)$ a $i_b(0)$. Para probar

$$\gamma_a * \delta_a * \delta_b * \gamma_b \simeq f \circ (\gamma_a * \delta_a * \delta_b * \gamma_b)$$

alcanza con ver que

$$\gamma_a * \delta_a = f \circ \gamma_a \tag{3.1}$$
$$\delta_b * \gamma_b = f \circ \gamma_b \tag{3.2}$$
$$e_{i_T(1,1)} \simeq (f \circ \delta_a) * (f \circ \delta_b), \tag{3.3}$$

donde $e_{i_T(1,1)}$ es el lazo constante en $i_T(1, 1)$. Las igualdades 3.1 y 3.2 son claras y 3.3 se sigue de

$$(f \circ \delta_a)(t) = i_T(\exp(i\pi t), \exp(i\pi t)) = (f \circ \delta_b)(1 - t).$$

Entonces hay una sola clase de puntos fijos no vacía. Deberemos probar que esta clase no es esencial. Una forma de ver esto es notando que los índices de punto fijo de $i_a(0)$ y $i_b(0)$ son 1 y -1 respectivamente (por la Proposición 1.4.22). Otra forma es probando que $L(f) = 0$ y usando Teorema 1.4.20. □

Si G es un grupo finito, dos CW-complejos de dimensión 2 con grupo fundamental G e igual característica de Euler no mínima son homotópicamente equivalentes. Este hecho, junto al Teorema 3.1.19, constituye la clasificación de tipos homotópicos de CW-complejos compactos y conexos de dimensión 2 con grupo fundamental abeliano finito. Para una exposición detallada de este tema ver [26, Chapter III] y [22].

Teorema 3.1.19 (Browning, [26, Chapter III, Theorem 2.11]). *Sea G un grupo abeliano finito con factores invariantes $m_1 \mid m_2 \mid \ldots \mid m_n$. El número de tipos homotópicos de CW-complejos compactos conexos de dimensión 2 con grupo fundamental G y característica de Euler mínima es $\left|\mathbb{Z}_{m_1}^*/\pm(\mathbb{Z}_{m_1}^*)^{n-1}\right|$. Un tal complejo es homotópicamente equivalente al complejo asociado a una presentación*

$$\mathcal{T}_d = \langle a_1, \ldots, a_n \mid a_1^{m_1}, \ldots, a_n^{m_n}, [a_1^d, a_2], [a_i, a_j], i < j, (i,j) \neq (1,2) \rangle$$

con $(d, m_1) = 1$.

En el teorema anterior, tenemos que $\mathcal{T}_d \simeq \mathcal{T}_{d'}$ si y solamente si $[d] = [d']$ en $\left|\mathbb{Z}_{m_1}^*/\pm(\mathbb{Z}_{m_1}^*)^{n-1}\right|$.

Corolario 3.1.20. *Sea G un grupo abeliano finito con factores invariantes $m_1 \mid m_2$ y sea X un CW-complejo compacto conexo y de dimensión 2 con $\pi_1(X) = G$. Si X tiene característica de Euler mínima, entonces $X \simeq X_{\mathcal{P}}$, donde $\mathcal{P} = \langle a_1, a_2 \mid a_1^{m_1}, a_2^{m_2}, [a_1, a_2] \rangle$.*

El último ingrediente en la demostración del Teorema 3.1.22 es el siguiente

Lema 3.1.21. *Sean*

$$\mathcal{T}_d = \langle a_1, \ldots, a_n \mid a_1^{m_1}, \ldots, a_n^{m_n}, [a_1^d, a_2], [a_i, a_j], i < j, (i,j) \neq (1,2) \rangle$$

con $n \geq 2$ y

$$\mathcal{R}_d = \langle a_1, a_2 \mid a_1^{m_1}, a_2^{m_2}, [a_1^d, a_2] \rangle.$$

Entonces $X_{\mathcal{R}_d}$ es retracto de $X_{\mathcal{T}_d}$.

Demostración. Claramente, $X_{\mathcal{R}_d}$ es subcomplejo de $X_{\mathcal{T}_d}$. Vamos a definir una retracción celular $r : X_{\mathcal{T}_d} \to X_{\mathcal{R}_d}$. La 0-celda de $X_{\mathcal{T}_d}$ y las 1-celdas a_1, a_2 quedan fijas por r. El resto de las 1-celdas $a_3, \ldots, a_n$ van a la 0-celda. En el 2-esqueleto, r fija las 2-celdas $a_1^{m_1}$, $a_2^{m_2}$ y $[a_1^d, a_2]$. Deberemos extender r a las demás 2-celdas. Esto es posible porque la composición de r con la función de adjunción de cada una de esas celdas es null homotópica. □

Teorema 3.1.22. *Un espacio de Bing no puede tener grupo fundamental abeliano.*

Demostración. Supongamos que existe un espacio de Bing X con grupo fundamental abeliano G. Por Corolario 1.3.7, $H_1(X)$ es de torsión. Como $H_1(X) = G$ es finitamente generado y de torsión, G es abeliano finito. Sean $m_1 \mid m_2 \mid \ldots \mid m_n$ sus factores invariantes.

Como G es libremente indescomponible, por la Proposición 3.1.16 podemos asumir que X no tiene global separating points. Por la Proposición 3.1.17, sabemos que X tiene característica de Euler mínima. Por el Teorema 3.1.13, G no es cíclico y entonces $n \geq 2$. Por el Teorema 3.1.19, hay una presentación

$$\mathcal{T}_d = \langle a_1, \ldots, a_n \mid a_1^{m_1}, \ldots, a_n^{m_n}, [a_1^d, a_2], [a_i, a_j], i < j, (i,j) \neq (1,2) \rangle$$

con $(d, m_1) = 1$ tal que $X \simeq X_{\mathcal{T}_d}$. Por el Teorema 1.4.29, $X_{\mathcal{T}_d}$ tiene la propiedad del punto fijo. Sea

$$\mathcal{R}_d = \langle a_1, a_2 \mid a_1^{m_1}, a_2^{m_2}, [a_1^d, a_2] \rangle.$$

Por el Lema 3.1.21, $X_{\mathcal{R}_d}$ es retracto de $X_{\mathcal{T}_d}$; luego por el Lema 1.1.4, $X_{\mathcal{R}_d}$ tiene la propiedad del punto fijo. Finalmente consideremos

$$\mathcal{R}_1 = \langle a_1, a_2 \mid a_1^{m_1}, a_2^{m_2}, [a_1, a_2] \rangle.$$

Por el Corolario 3.1.20, $X_{\mathcal{R}_1} \simeq X_{\mathcal{R}_d}$, luego por el Teorema 1.4.29, $X_{\mathcal{R}_1}$ tiene la propiedad del punto fijo, contradiciendo el Lema 3.1.18. □

Las ideas utilizadas en la demostración del resultado anterior se aplican cuando hay un resultado análogo al Teorema 3.1.19. En la demostración del siguiente teorema, usaremos un resultado de clasificación de Hambleton y Kreck que concierne a los subgrupos finitos de $SO(3)$.

Teorema 3.1.23. *Un espacio de Bing no puede tener grupo fundamental A_4, S_4, A_5 ni D_n.*

Demostración. Por [24, Theorem 2.1], para cualquiera de estos grupos el tipo homotópico de un 2-complejo está determinado por la característica de Euler. Tenemos las siguientes presentaciones con deficiencia 1:

$$\begin{aligned} A_4 &= \langle a, b, c \mid a^2, b^3, c^3, abc \rangle, \\ S_4 &= \langle a, b, c \mid a^2, b^3, c^4, abc \rangle, \\ A_5 &= \langle a, b, c \mid a^2, b^3, c^5, abc \rangle, \\ D_{2n} &= \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^n, abc \rangle. \end{aligned}$$

Solamente tenemos que probar que los complejos asociados a estas presentaciones carecen de la propiedad del punto fijo (notemos que no es necesario saber si estas presentaciones tienen característica de Euler mínima o no).

Sea $\mathcal{P} = \langle a, b, c \mid a^l, b^m, c^n, abc \rangle$. Consideremos el espacio $X = X(l, m, n)$ obtenido quitando tres discos disjuntos de S^2 y luego pegando tres 2-celdas en los bordes de estos discos, con funciones de adjunción de grados l, m y n (Figura 3.1). Notando que $X_{\mathcal{P}}$ es un cociente de X por un subcomplejo contráctil, obtenemos $X_{\mathcal{P}} \simeq X$. Vamos a probar que X no tiene la propiedad del punto fijo.

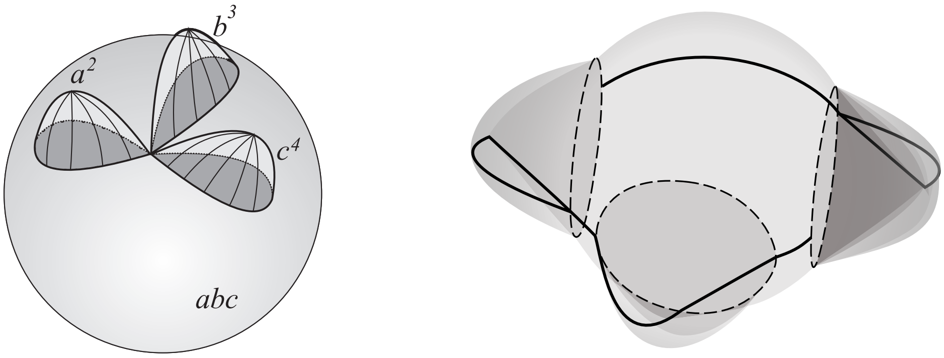


Figura 3.1: A la izquierda, el espacio $X_{\mathcal{P}}$. A la derecha, el espacio $X(2,3,4)$, junto con los puntos fijos de f.

Concretamente, $X = X(l,m,n)$ se obtiene de la superficie

$$S = \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ y } x \leq \frac{4}{5} \text{ y } -\frac{4}{5} \leq y \leq \frac{4}{5}\}$$

adjuntando tres 2-celdas con funciones de adjunción $\phi_a, \phi_b, \phi_c : S^1 \to S$ dadas por

$$\begin{aligned}
\phi_a(z) &= \left(\frac{3}{5}\mathrm{Re}(z^l), -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\mathrm{Im}(z^l)\right)\\
\phi_b(z) &= \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\mathrm{Re}(z^m), \frac{3}{5}\mathrm{Im}(z^m)\right)\\
\phi_c(z) &= \left(-\frac{3}{5}\mathrm{Re}(z^n), \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\mathrm{Im}(z^n)\right)
\end{aligned}$$

Sean $i_a, i_b, i_c : D^2 \to X$ las funciones características de las celdas y llamemos $i_S : S \hookrightarrow X$ a la inclusión.

Las funciones $f_S : S \to X$, $f_a, f_b, f_c : D^2 \to X$ dadas por

$$\begin{aligned}
f_S(x,y,z) &= i_S(x,y,-z)\\
f_a(w) &= i_a(\overline{w})\\
f_b(w) &= i_b(\overline{w})\\
f_c(w) &= i_c(\overline{w})
\end{aligned}$$

determinan una función continua $f : X \to X$.

Cada componente conexa de $\mathrm{Fix}(f)$ es homotópicamente equivalente a S^1, como se ve en la Figura 3.1. Una clase de puntos fijos F es una unión de algunas componentes conexas de $\mathrm{Fix}(f)$. Luego $\chi(F) = 0$ para toda clase de puntos fijos F de f. Aplicando el Lema 1.4.23, tenemos $i(f,F) = 0$. Luego $N(f) = 0$ y estamos. $\square$

3.2. Respuesta a las preguntas de Bing

En esta sección, siguiendo [39], responderemos las Preguntas 2.4.1 y 2.4.3. Para esto, utilizaremos algunos resultados básicos de homología de grupos y consideraremos ciertos grupos, que llamaremos *de Bing*. De este modo, el problema se reducirá a encontrar un grupo de Bing con ciertas propiedades.

3.2.1. Grupos de Bing

Definición 3.2.1. Sea G un grupo finitamente presentable tal que $H_1(G)$ es finito y sean $d_1, | \dots | d_k$ los factores invariantes de $H_2(G)$. Decimos que G es un *grupo de Bing* si, para todo endomorfismo $\phi : G \to G$, se tiene $\mathrm{tr}(H_2(\phi) \otimes 1_{\mathbb{Z}_{d_1}}) \neq -1$ en $\mathbb{Z}_{d_1}$.

La definición anterior tiene sentido siempre que $H_2(G) \neq 0$, ya que incluimos a los ceros entre los factores invariantes. Si G es finitamente presentable, $H_1(G)$ es finito y $H_2(G) = 0$, convenimos que G es de Bing.

Teorema 3.2.2. *Si $\mathcal{P}$ es una presentación eficiente de un grupo de Bing G, entonces $X_{\mathcal{P}}$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Escribamos $X = X_{\mathcal{P}}$ y consideremos una función continua $f : X \to X$. Si $H_2(G) = 0$, entonces X es $\mathbb{Q}$-acíclico, luego f tiene un punto fijo, así que podemos suponer que $H_2(G) \neq 0$. Sean $d_1 \mid \dots \mid d_k$ los factores invariantes de $H_2(G)$. Existe un espacio Y de tipo $K(G, 1)$ cuyo 2-esqueleto es X. Sea $i : X \hookrightarrow Y$ la inclusión. Como $\pi_n(Y) = 0$ para $n \geq 2$, existe $\overline{f} : Y \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{i}{\hookrightarrow} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}} \\ X & \underset{i}{\hookrightarrow} & Y \end{array}$$

Dado que X es el 2-esqueleto de Y, las flechas horizontales en el siguiente diagrama son epimorfismos:

$$\begin{array}{ccc} H_2(X) & \overset{i_*}{\twoheadrightarrow} & H_2(Y) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}_*} \\ H_2(X) & \underset{i_*}{\twoheadrightarrow} & H_2(Y) \end{array}$$

Como $\mathcal{P}$ es eficiente, el rango de $H_2(X)$ es igual al número de factores invariantes de $H_2(Y)$ y entonces $H_2(X) \otimes \mathbb{Z}_{d_1} \simeq H_2(Y) \otimes \mathbb{Z}_{d_1}$. Ahora, como el producto tensorial es exacto a derecha, las flechas horizontales en el siguiente diagrama conmutativo son epimorfismos y entonces son isomorfismos:

$$\begin{tikzcd}
H_2(X)\otimes\mathbb{Z}_{d_1} \arrow[r, "i_*\otimes 1_{\mathbb{Z}_{d_1}}", "\simeq"'] \arrow[d, "f_*\otimes 1_{\mathbb{Z}_{d_1}}"'] & H_2(Y)\otimes\mathbb{Z}_{d_1} \arrow[d, "\overline{f}_*\otimes 1_{\mathbb{Z}_{d_1}}"] \\
H_2(X)\otimes\mathbb{Z}_{d_1} \arrow[r, "\simeq", "i_*\otimes 1_{\mathbb{Z}_{d_1}}"'] & H_2(Y)\otimes\mathbb{Z}_{d_1}
\end{tikzcd}$$

Luego $\mathrm{tr}(f_*\otimes 1_{\mathbb{Z}_{d_1}}) = \mathrm{tr}(\overline{f}_*\otimes 1_{\mathbb{Z}_{d_1}}) \neq -1$ en $\mathbb{Z}_{d_1}$, ya que G es un grupo de Bing. En este paso usamos el isomorfismo natural $H_2(BG)\approx H_2(G)$ (ver Teorema A.1) y que toda función continua $BG\to BG$ está inducida, salvo homotopía, por un endomorfismo de G.

Finalmente, obtenemos $\mathrm{tr}(f_* : H_2(X)\to H_2(X)) \neq -1$ en $\mathbb{Z}$, ya que $H_2(X)$ es abeliano libre y por lo tanto tensorizar con $\mathbb{Z}_{d_1}$ reduce la traza módulo d_1. Como $H_1(X)$ es de torsión, $L(f)\neq 0$ y por el teorema de Lefschetz, f tiene un punto fijo. $\square$

Ejemplo 3.2.3. Si G es un grupo finito con deficiencia 0, entonces G es de Bing y es eficiente. Pero dado que $H_2(G)=0$, los poliedros obtenidos usando el teorema anterior son $\mathbb{Q}$-acíclicos y luego tienen característica de Euler igual a 1. Por lo tanto, para responder la Pregunta 2.4.1, deberemos obtener un grupo de Bing con multiplicador de Schur no trivial.

Ejemplo 3.2.4. Los grupos abelianos son eficientes. Luego, por el Teorema 3.1.22, no son de Bing (exceptuando los grupos cíclicos, que tienen multiplicador de Schur trivial).

Ejemplo 3.2.5. Si G es un grupo finito simple, todo endomorfismo es trivial o es un automorfismo. Si ϕ es el endomorfismo trivial entonces $\mathrm{tr}(H_2(\phi)\otimes 1_{\mathbb{Z}_{d_1}}) = 0$, luego basta entender las trazas para los automorfismos de G. En general si G es un grupo, $\mathrm{Aut}(G)$ actúa en $H_2(G)$. Además, si $\phi : G\to G$ es un automorfismo interior, $B\phi : BG\to BG$ es (libremente) homotópica a la identidad. Luego $H_2(\phi) = 1_{H_2(G)}$. Por lo tanto, la acción pasa al cociente y obtenemos una acción de $\mathrm{Out}(G)$ en $H_2(G)$. Entendiendo esta acción, podemos saber si un grupo finito simple es de Bing. En el Apéndice B, usando la clasificación de los grupos finitos simples, probamos que los únicos grupos finitos simples de Bing con multiplicador de Schur no trivial son los grupos $D_{2n}(q)$, con q impar y $n>2$. El más chico de estos grupos es $D_6(3)$, que tiene orden 6762844700608770238252960972800. Se sabe que los grupos simples de orden a lo sumo 5000000 son eficientes, salvo quizás $C_2(4)$ [11, 12]. Sin embargo, no se sabe si A_n es eficiente para todo n [11]. En el caso de los $D_{2n}(q)$, se sabe que tienen deficiencia a lo sumo 24 [21, Theorem 10.1]. Si estos grupos fueran eficientes, dado que tienen multiplicador de Schur $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$, darían ejemplos de poliedros compactos de dimensión 2 con la propiedad del punto fijo y característica de Euler 3. Para responder la Pregunta 2.4.1 deberemos encontrar grupos de Bing de otra naturaleza.

3.2.2. Espacios de Bing con característica arbitraria

En esta sección construiremos ejemplos concretos de espacios de Bing con característica de Euler (positiva) arbitraria. Esto responde afirmativamente a la Pregunta 2.4.1. Luego utilizamos dos espacios de Bing diferentes para dar respuesta a la Pregunta 2.4.3. Para un grupo G finito, es claro que existe un algoritmo para decidir si es de Bing o no. En esta subsección, utilizaremos el software GAP para demostrar que ciertos grupos son de Bing. En el Apéndice C aparecen algunos programas más, que fueron utilizados para encontrar los grupos de Bing que estudiados a continuación.

Proposición 3.2.6. *El grupo G presentado por*

$$\mathcal{P} = \langle x, y \mid x^3,\, xyx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1},\, x^{-1}y^{-4}x^{-1}y^2x^{-1}y^{-1} \rangle$$

es finito de orden 243*. Se tiene $H_2(G) = \mathbb{Z}_3$, por lo tanto $\mathcal{P}$ es eficiente. Más aún, G es un grupo de Bing.*

Demostración. Vamos a demostrarlo usando un programa escrito en el lenguaje GAP [18]. Usaremos los paquetes HAP [15] y SONATA [1].

```
LoadPackage("HAP");;
LoadPackage("SONATA");;
F:=FreeGroup(2);;
G:= F/[F.1^3, F.1*F.2*F.1^-1*F.2*F.1*F.2^-1*F.1^-1*F.2^-1,
F.1^-1*F.2^-4*F.1^-1*F.2^2*F.1^-1*F.2^-1];;
Order(G);
G:=SmallGroup(IdGroup(G));;
R:=ResolutionFiniteGroup(G,3);;
Homology(TensorWithIntegers(R),2);
Set(List(Endomorphisms(G),
f->Homology(TensorWithIntegers(EquivariantChainMap(R,R,f)),2)));
```

El programa imprime el orden de G, una lista con los factores invariantes de $H_2(G)$ y una lista con los endomorfismos de $H_2(G)$ que son inducidos por un endomorfismo de G. La salida del programa es

```
243
[ 3 ]
[ [ f1 ] -> [ <identity ...> ], [ f1 ] -> [ f1 ] ]
```

Luego $|G| = 243$ y $H_2(G) = \mathbb{Z}_3$. Dado que, para todo endomorfismo $\phi : G \to G$, tenemos que $H_2(\phi)$ es o bien el morfismo cero o la identidad, se concluye que G es un grupo de Bing. □

Del Teorema 3.2.2 y de la Proposición 3.2.6 se deduce:

Corolario 3.2.7. *El complejo $X_{\mathcal{P}}$ asociado a la presentación*

$$\mathcal{P} = \langle x, y \mid x^3,\, xyx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1},\, x^{-1}y^{-4}x^{-1}y^2x^{-1}y^{-1}\rangle$$

tiene la propiedad del punto fijo. Más aún, $\chi(X_{\mathcal{P}}) = 2$.

Por Corolario 1.3.8, un poliedro de dimensión 2 con característica de Euler menor o igual que 0 no puede tener la propiedad del punto fijo.

Corolario 3.2.8. *Hay poliedros compactos de dimensión 2 con la propiedad del punto fijo y característica de Euler igual a cualquier entero positivo n.*

Demostración. Si $n = 1$ es inmediato. Si $n > 1$, consideramos el wedge de $n - 1$ copias del espacio $X_{\mathcal{P}}$ que aparece en el Corolario 3.2.7. □

Corolario 3.2.9. *Existe un poliedro K compacto, de dimensión 2 y con la propiedad del punto fijo tal que ΣK no tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Basta tomar $K = X_{\mathcal{P}}$. Luego $\chi(\Sigma K) = 0$ y como ΣK no tiene global separating points, podemos usar el Teorema 1.4.30. □

Para responder la Pregunta 2.4.3 necesitaremos otro grupo de Bing.

Proposición 3.2.10. *El grupo H presentado por*

$$\mathcal{Q} = \langle x, y \mid x^4, y^4, (xy)^2, (x^{-1}y)^2\rangle$$

es finito de orden 16. Se tiene $H_2(H) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, luego $\mathcal{Q}$ es eficiente. Más aún, H es un grupo de Bing.

Demostración. Al igual que antes, vamos a usar un programa en GAP.

```
LoadPackage("HAP");;
LoadPackage("SONATA");;
F:=FreeGroup(2);;
H:= F/[F.1^4, F.2^4, (F.1*F.2)^2, (F.1^-1*F.2)^2];;
Order(H);
H:=SmallGroup(IdGroup(H));;
R:=ResolutionFiniteGroup(H,3);;
Homology(TensorWithIntegers(R),2);
Set(List(Endomorphisms(H),
f->Homology(TensorWithIntegers(EquivariantChainMap(R,R,f)),2)));
```

La salida es:

```
16
[ 2, 2 ]
[ [ f1, f2 ] -> [ <identity ...>, <identity ...> ],
[ f1, f2 ] -> [ f1, f2 ],[ f1, f2 ] -> [ f1^-1*f2^-1, f2^-1 ] ]
```

Luego $|H| = 16$, $H_2(H) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ y H es un grupo de Bing. □

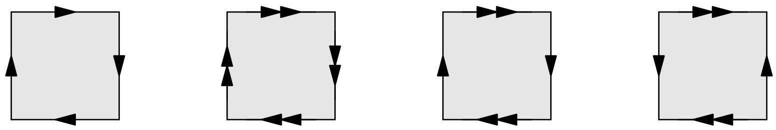


Figura 3.2: El espacio asociado a la presentación de la Proposición 3.2.10.

A continuación, probaremos que la respuesta a la Pregunta 2.4.3 es 2:

Teorema 3.2.11. *Existe un poliedro compacto Y de dimensión 2, sin la propiedad del punto fijo y tal que el poliedro X, obtenido de Y haciendo un colapso elemental de dimensión 2, tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ las presentaciones de las Proposiciones 3.2.6 y 3.2.10. Por el Teorema 3.2.2, $X_{\mathcal{P}}$ y $X_{\mathcal{Q}}$ tienen la propiedad del punto fijo, por lo tanto $X = X_{\mathcal{P}} \vee X_{\mathcal{Q}}$ también tiene la propiedad del punto fijo. Dado que ni $X_{\mathcal{P}}$ ni $X_{\mathcal{Q}}$ tienen global separating points (si los tuvieran igual podríamos usar la Proposición 3.1.16), haciendo una expansión elemental de dimensión 2, podemos obtener un poliedro Y, sin global separating points. Por Lema A.6 tenemos

$$H_2(\pi_1(Y)) = H_2(\pi_1(X_{\mathcal{P}}) * \pi_1(X_{\mathcal{Q}})) = H_2(\pi_1(X_{\mathcal{P}})) \oplus H_2(\pi_1(X_{\mathcal{Q}})) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$$

Además, $\mathrm{rk}(H_2(Y)) = \mathrm{rk}(H_2(X_{\mathcal{P}})) + \mathrm{rk}(H_2(X_{\mathcal{Q}})) = 3$. Por la Proposición 3.1.12, existe $Z \simeq Y$ tal que S^2 es un retracto de Z y entonces por el Teorema 1.4.29, se concluye que Y no tiene la propiedad del punto fijo. □

3.2.3. Hacia una recíproca del Teorema 3.2.2

A continuación, probamos un resultado que es un primer paso en el intento de demostrar una vuelta del Teorema 3.2.2. Luego, usando el mismo tipo de ideas, daremos una demostración alternativa de la Proposición 3.1.17.

Lema 3.2.12 ([26, III, Lemma 1.4])**.** *Sean K y L CW-complejos compactos, conexos y de dimensión 2. Sean $\delta : H_2(K) \to \Sigma_2(L)$ un morfismo y $f : K \to L$ una función continua. Entonces existe $g : K \to L$ tal que $f_* = g_* : \pi_1(K) \to \pi_1(L)$ y $H_d(g) = H_d(f) + \delta$.*

Teorema 3.2.13. *Sean X un poliedro compacto, conexo y de dimensión 2 y sea $G = \pi_1(X)$. Si G no es de Bing o G no es eficiente o X no tiene característica de Euler mínima, entonces hay una función continua $f : X \to X$ con número de Lefschetz 0.*

Demostración. Si $H_1(G)$ no es finito, entonces X se retrae a S^1, luego existe $f : X \to X$ con $L(f) = 0$. Por lo tanto, podemos suponer que $H_1(X)$ es finito y bastará con mirar la traza en el segundo grupo de homología.

Supongamos que G no es de Bing. Entonces, dado que $H_2(G) \neq 0$, existe un endomorfismo $\phi : G \to G$ tal que $\operatorname{tr}(H_2(\phi) \otimes 1_{\mathbb{Z}_{d_1}}) = -1$ en $\mathbb{Z}_{d_1}$ (al igual que antes, llamamos $d_1 \mid \ldots \mid d_k$ a los factores invariantes de $H_2(G)$). Sea $\tilde{f} : X \to X$ una función continua que induce ϕ en π_1. Tenemos $\operatorname{tr}(\tilde{f}_* : H_2(X) \to H_2(X)) \equiv -1$ (mód d_1), pero si $d_1 \neq 0$, no necesariamente tenemos $\operatorname{tr}(\tilde{f}_* : H_2(X) \to H_2(X)) = -1$. Veremos que, usando el Lema 3.2.12, podemos encontrar $f : X \to X$ con $\operatorname{tr}(f_* : H_2(X) \to H_2(X)) = -1$ y entonces tendremos $L(f) = 0$. Miramos la forma normal de Smith de la inclusión $\Sigma_2(X) \hookrightarrow H_2(X)$. Si $e_1, \ldots, e_l$ es la base de $H_2(X)$, tenemos que $d_1 e_1 \in \Sigma_2(X)$. Luego, podemos definir $\delta : H_2(X) \to \Sigma_2(X)$ por $\delta(e_i) = 0$ si $i > 1$ y $\delta(e_1) = \alpha d_1 e_1$, eligiendo α de modo que la traza de $\tilde{f}_* + \delta$ sea -1 en $\mathbb{Z}$.

Ahora supongamos que G no es eficiente o X no tiene característica de Euler mínima. Entonces, el número de factores invariantes de $H_2(G)$ es estrictamente menor que el rango de $H_2(X)$. Luego, por la Proposición 3.1.12 (o por el Lema 3.2.12), conseguimos $f : X \to X$ tal que $L(f) = 0$. □

Pregunta 3.2.14. *¿Es cierto que el Teorema 3.2.13 sigue valiendo si cambiamos "número de Lefschetz" por "número de Nielsen"?*

Si G no es eficiente o la característica de Euler de X no es mínima, la respuesta a la pregunta anterior claramente es sí. Si G no es de Bing, parece una pregunta difícil. Finalmente, damos nuevas demostraciones de algunos resultados previos usando las ideas de esta sección.

Lema 3.2.15. *Sean X un poliedro conexo, $f : X \to X$ y $x_0 \in \operatorname{Fix}(f)$. Si $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es nilpotente entonces f tiene una única clase de Nielsen no vacía.*

Demostración. Sea n tal que f_*^n es el morfismo trivial. Sea $x_1 \in \operatorname{Fix}(f)$. Veamos que x_0 y x_1 son puntos fijos equivalentes. Sean γ un camino de x_0 a x_1 y $c = f^n \circ \gamma$. Entonces

$$[f \circ c * c^{-1}] = [f \circ (f^n \circ \gamma) * (f^n \circ \gamma)^{-1}] = f_*^n([f \circ \gamma * \gamma^{-1}]) = 1$$

Luego x_0 y x_1 son equivalentes, como queríamos ver. □

Proposición 3.2.16 (cf. Proposición 3.1.17)**.** *Sea X un espacio de Bing con grupo fundamental G. Supongamos que X no tiene global separating points. Entonces G es eficiente y X tiene característica de Euler mínima.*

Demostración. Supongamos que G no es eficiente o que X no tiene característica de Euler mínima. Entonces el rango de $H_2(X)$ es estrictamente mayor que el número de factores invariantes de $H_2(G)$. Sea $\tilde{f} : X \to X$ tal que $\tilde{f}_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$

es el morfismo trivial. Ahora, usando el Lema 3.2.12 como antes, podemos conseguir $f : X \to X$ tal que $\pi_1(f)$ es el morfismo trivial y $L(f) = 0$. Como $\pi_1(f)$ es nilpotente, por el lema anterior se tiene $N(f) = 0$. Entonces, por el Teorema 1.4.29, X no tiene la propiedad del punto fijo, contradicción. $\square$

De la proposición anterior se deduce el Teorema 3.1.13, luego se puede probar la Proposición 3.1.16 y usando nuevamente la proposición podemos probar la Proposición 3.1.17, sin usar la Proposición 3.1.12.

Apéndice A

Homología de Grupos

El objetivo de este apéndice es recordar la definición de la homología de grupos y enunciar las propiedades que se usan a lo largo del Capítulo 3.

Para cada grupo G fijamos una resolución proyectiva

$$\ldots \to P_2(G) \to P_1(G) \to P_0(G) \to \mathbb{Z}$$

del $\mathbb{Z}G$-módulo $\mathbb{Z}$ (la acción de G en $\mathbb{Z}$ es la trivial). El n-ésimo grupo de homología de G, $H_n(G)$ se define como el n-ésimo grupo de homología del complejo

$$\ldots \to P_2(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \to P_1(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \to P_0(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \to 0$$

Si $f : G \to H$ un morfismo de grupos, vemos los $\mathbb{Z}H$-módulos como $\mathbb{Z}G$-módulos mediante restricción de escalares. Existen morfismos de $\mathbb{Z}G$-módulos $f_i : P_i(G) \to P_i(H)$, tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & P_2(G) \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & P_1(G) \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0(G) \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "1_{\mathbb{Z}}"] \\
\ldots \arrow[r] & P_2(H) \arrow[r] & P_1(H) \arrow[r] & P_0(H) \arrow[r] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Al aplicar $- \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}$, se obtiene un morfismo de complejos y al tomar homología, obtenemos $f_* : H_n(G) \to H_n(H)$. Los morfismos f_* están bien definidos porque, para dos elecciones distintas de los f_i, se obtienen morfismos homotópicos de complejos de cadenas. De este modo se definen los funtores $H_n : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$. Para otra elección de las resoluciones proyectivas, los funtores obtenidos son naturalmente isomorfos.

A continuación veremos una definición topológica de la homología de grupos. Si G es un grupo, consideramos a G con la topología discreta y definimos el CW-complejo $EG = \operatorname{colim}_n(G * \ldots * G)$ (acá $G * \ldots * G$ es el join de n copias de G). Dado que EG es contráctil y que G actúa en EG de manera libre y celular, el cociente

$BG = EG/G$, que se llama el *espacio clasificante de* G, es un CW-complejo de tipo $K(G,1)$. Entonces $p : EG \to BG$ es el revestimiento universal. Estas construcciones son funtoriales. Una exposición detallada de este tópico se puede encontrar en [38, Section 5.1].

Como EG es contráctil,

$$\ldots \to C_2(EG) \to C_1(EG) \to C_0(EG) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

es una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo. Esta resolución proyectiva es funtorial. Finalmente, $C_*(EG) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \approx C_*(BG)$ y entonces obtenemos el siguiente resultado.

Teorema A.1 ([38, Theorem 5.1.27])**.** *Hay un isomorfismo natural* $H_*(G) \approx H_*(BG)$*.*

Mencionamos algunas consecuencias de la definición topológica.

Proposición A.2. *Sea* G *un grupo. Entonces* $H_0(G) = \mathbb{Z}$ *y* $H_1(G) = G/[G,G]$*.*

Proposición A.3. *Si* $n > 1$*, entonces* $H_n(\mathbb{Z}) = 0$*.*

Demostración. Es inmediato, dado que S^1 es un $K(\mathbb{Z},1)$. □

Proposición A.4. *Se tiene* $H_2(\mathbb{Z}_n) = 0$*.*

Demostración. Sea X el espacio obtenido a partir de S^1 adjuntando una 2-celda con una función de adjunción de grado n. Por el Teorema 3.1.5, hay un epimorfismo $H_2(X) \to H_2(\mathbb{Z}_n)$. Pero por homología celular $H_2(X) = 0$ y estamos. □

Ahora calcularemos la homología del coproducto y del producto de grupos.

Lema A.5. *Sean* G, H *grupos. Entonces* $B(G * H) \simeq BG \vee BH$*.*

Demostración. Por el teorema de van Kampen $\pi_1(BG \vee BH) = G * H$. Veamos que $E = \widetilde{BG \vee BH}$ es n-conexo para todo n. Por cómo es el revestimiento universal de un wedge, la imagen de cualquier función continua $f : S^n \to E$ está contenida en un wedge de finitas copias de EG y EH, que es contráctil. Entonces $\pi_n(E) = 0$ para todo n.

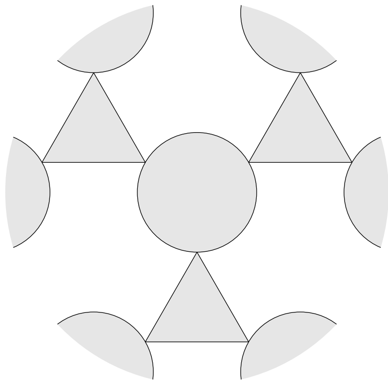


Figura A.1: El revestimiento universal de un wedge de dos espacios. El círculo y el triángulo representan los revestimientos universales de los dos espacios.

□

Lema A.6 ([45, Corollary 6.2.10])**.** *Sean G, H grupos y $n \geq 1$. Entonces $H_n(G * H) = H_n(G) \oplus H_n(H)$.*

Demostración. Usando el lema anterior y la definición topológica de la homología de grupos tenemos:

$$H_n(G) \oplus H_n(H) = H_n(BG) \oplus H_n(BH) = H_n(BG \vee BH) = H_n(B(G*H)) = H_n(G*H)$$

□

Como $BG \times BH \simeq B(G \times H)$, la fórmula de Künneth topológica nos da una fórmula de Künneth para homología de grupos:

$$H_n(G \times H) = \left(\bigoplus_{k+l=n} H_k(G) \otimes H_l(H) \right) \oplus \left(\bigoplus_{k+l=n-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_k(G), H_l(H)) \right)$$

El grupo $H_2(G)$ se conoce con el nombre de *multiplicador de Schur* de G.

Proposición A.7. *Sea G un grupo abeliano finito con n factores invariantes. Entonces $H_2(G)$ tiene $\binom{n}{2}$ factores invariantes.*

Demostración. Si A y B son abelianos, por Künneth tenemos

$$H_2(A \times B) = H_2(A) \oplus H_2(B) \oplus A \otimes B$$

Por lo tanto, el multiplicador de Schur de G es la suma de los multiplicadores de Schur de las partes de p-torsión de G. Ahora, sean $a_1 \leq \ldots \leq a_n$. Entonces

$$\begin{aligned} H_2(\mathbb{Z}_{p^{a_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{a_n}}) &= H_2(\mathbb{Z}_{p^{a_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{a_{n-1}}}) \oplus (\mathbb{Z}_{p^{a_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{a_{n-1}}}) \otimes \mathbb{Z}_{p^{a_n}} \\ &= H_2(\mathbb{Z}_{p^{a_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{a_{n-1}}}) \oplus (\mathbb{Z}_{p^{a_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{a_{n-1}}}) \end{aligned}$$

Luego, $H_2(\mathbb{Z}_{p^{a_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{a_n}})$ es la suma de una copia de $\mathbb{Z}_{p^{a_{n-1}}}$, dos copias de $\mathbb{Z}_{p^{a_{n-2}}}$, ... , $n-1$ copias de $\mathbb{Z}_{p^{a_1}}$. O sea que tiene $\binom{n}{2}$ factores invariantes. De esto se sigue lo que queremos probar. □

Apéndice B

Grupos finitos simples

El objetivo de este apéndice es probar que los únicos grupos finitos simples, de Bing y con multiplicador de Schur no trivial son los grupos $D_{2m}(q)$ con q impar y $m > 2$, como se afirma en el Ejemplo 3.2.5. La herramienta fundamental es, por supuesto, la clasificación de los grupos finitos simples [20, Table I]. Nuestro objetivo es, en cada caso, entender la acción de $\mathrm{Out}(G)$ en $H_2(G)$. Los resultados que describen completamente esta acción se encuentran en [19]. A continuación damos más detalles sobre esto. Hay una factorización $H_2(G) = M_c(G) \times M_e(G)$ [19, Definition 6.1.1, Definition 6.1.3, Theorem 6.1.4]. Los subgrupos $M_c(G)$ y $M_e(G)$ son estables por la acción de $\mathrm{Out}(G)$ y por lo tanto alcanza con entender la acción en cada uno de estos grupos. Esto es el contenido de [19, Theorem 6.3.1], que describe explícitamente la acción de $\mathrm{Out}(G)$ en $M_e(G)$ y dice que $M_c(G)$ se identifica con cierto subgrupo $\mathrm{Outdiag}(G) \triangleleft \mathrm{Out}(G)$, de modo que la acción de $\mathrm{Out}(G)$ en $M_c(G)$ es la acción por conjugación de $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Outdiag}(G) \rtimes \Phi_G\Gamma_G$ en $\mathrm{Outdiag}(G)$. Finalmente, esta acción se describe completamente en [19, Theorem 2.5.12].

B. Z_p

Tienen multiplicador de Schur trivial.

B. A_n

- Si $n = 5$ o $n > 7$, el multiplicador de Schur es $\mathbb{Z}_2$ (la identidad de $\mathbb{Z}_2$ tiene traza -1, así que no es de Bing).

- Si $n = 6$ o $n = 7$, el multiplicador de Schur es $\mathbb{Z}_6$ y hay un automorfismo exterior que actúa multiplicando por -1.

B. Grupos de tipo Lie

$A_n(q)$

El multiplicador de Schur es $\mathbb{Z}_{(n+1,q-1)}$, salvo por las siguientes excepciones:

- El multiplicador de Schur de $A_1(4)$ es $\mathbb{Z}_2$
- El multiplicador de Schur de $A_1(9)$ es $\mathbb{Z}_6$
- El multiplicador de Schur de $A_2(2)$ es $\mathbb{Z}_2$
- El multiplicador de Schur de $A_2(4)$ es $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$
- El multiplicador de Schur de $A_3(2)$ es $\mathbb{Z}_2$

En el caso general, por [19, Theorem 2.5.12 (i)], hay un automorfismo exterior que actúa multiplicando por -1. Cuando el multiplicador de Schur es $\mathbb{Z}_2$, no hace falta decir nada. El caso $A_1(9) = A_6$ ya lo vimos. En el caso $A_2(4)$, se tiene $M_c = \mathbb{Z}_3$ y $M_e = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$. Además, $\mathrm{Out} = S_3 \times \mathbb{Z}_2$ y la acción en M_e es fiel. Los automorfismos de orden 3 de $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ tienen traza -1 (no es necesario entender la acción en M_c).

${}^2A_n(q)$

El multiplicador de Schur es $\mathbb{Z}_{(n+1,q+1)}$, salvo por las siguientes excepciones:

- El multiplicador de Schur de ${}^2A_3(2)$ es $\mathbb{Z}_2$.
- El multiplicador de Schur de ${}^2A_3(3)$ es $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$.
- El multiplicador de Schur de ${}^2A_5(2)$ es $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

Veamos primero el caso general. Sea $k = (n+1, q+1)$.

- Si $k = 1$ o $k = 2$ no hay nada que decir.
- Si $k > 2$ y q es una potencia de un primo p, dado que $q \equiv -1 \pmod{k}$, no puede ocurrir que $p \equiv 1 \pmod{k}$. Tenemos $M_c = \mathbb{Z}_k$ y $M_e = 0$. Usamos extensivamente [19, Theorem 2.5.12]. En este caso, $d = 2$. Como $k \nmid p - 1$, las raíces k-ésimas primitivas de la unidad no están en $\mathbb{F}_p$ (pero sí en $\mathbb{F}_{q^2}$). Luego, hay un automorfismo de $\mathbb{F}_{q^2}$ que permuta de forma no trivial las raíces k-ésimas de la unidad. Por lo tanto, por la parte (g), la acción de Φ en M_c es no trivial. Entonces estos grupos no son de Bing.

Para ${}^2A_3(3)$, la identidad tiene traza -1. En el caso ${}^2A_5(2)$, $\mathrm{Out} = S_3$ actúa fielmente en $M_e = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Los automorfismos de orden 3 de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ tienen traza -1 (no hace falta entender la acción en $M_c = \mathbb{Z}_3$).

$B_n(q)$

El multiplicador de Schur es trivial o $\mathbb{Z}_2$, salvo por el caso $B_3(3)$. En ese caso, el multiplicador de Schur es $\mathbb{Z}_6$, $M_c = \mathbb{Z}_2$ y hay un automorfismo exterior que actúa en $M_e = \mathbb{Z}_3$ multiplicando por -1.

${}^2B_2(q)$

El multiplicador de Schur es trivial, salvo por el caso ${}^2B_2(8)$. En ese caso, el multiplicador de Schur es $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ y hay un automorfismo exterior con traza -1.

$C_n(q)$

El multiplicador de Schur es trivial o $\mathbb{Z}_2$.

$D_n(q)$

- Si n es impar, el multiplicador de Schur es $\mathbb{Z}_{(4,q-1)}$. Por [19, Theorem 2.5.12 (i)], hay un automorfismo exterior que actúa multiplicando por -1.

- Si n es par y q es par, el multiplicador de Schur es trivial, salvo en el caso $D_4(2)$. En este caso, el multiplicador de Schur es $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, el grupo de automorfismos exteriores es isomorfo a S_3 y actúa fielmente, por lo tanto hay un automorfismo de traza -1.

- Si n es par y q es impar, el multiplicador de Schur es $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. En el caso $n = 4$, por [19, Theorem 2.5.12 (j)] S_3 es subgrupo de $\mathrm{Out}(G)$ y actúa fielmente, por lo tanto hay automorfismos de traza -1.

  El caso $n > 4$ lo veremos con cuidado, usando [19, Theorem 2.5.12]. Tenemos $M_e = 0$ y $M_c = \mathrm{Outdiag} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Además $\mathrm{Out} \simeq \mathrm{Outdiag} \rtimes \Phi\Gamma$. La acción de Out en M_c es la acción de Out en Outdiag por conjugación. Claramente la acción de Outdiag en Outdiag es trivial. Por (h), Φ centraliza Outdiag, luego la acción de Φ también es trivial. Finalmente, por (j) tenemos que $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ actúa fielmente en M_c. Pero los automorfismos de orden 2 de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ tienen traza 0. Luego estos grupos son de Bing.

${}^2D_n(q)$

- Si n es par, el multiplicador de Schur es trivial o $\mathbb{Z}_2$.

- Si n es impar, el multiplicador de Schur es $\mathbb{Z}_{(4,q+1)}$.

  - Si $4 \nmid q + 1$, el multiplicador de Schur es trivial o $\mathbb{Z}_2$.

- Si $4 \mid q+1$, el multiplicador de Schur es $M_c = \mathrm{Outdiag} = \mathbb{Z}_4$. Si q es una potencia de un primo p, dado que $q \equiv 3 \pmod 4$, tenemos $p \equiv 3 \pmod 4$. Usamos [19, Theorem 2.5.12]. En este caso $d = 2$. Como $4 \nmid p-1$, las raíces 4-ésimas primitivas de la unidad no están en $\mathbb{F}_p$ (pero sí en $\mathbb{F}_{q^2}$). Luego, hay un automorfismo de $\mathbb{F}_{q^2}$ que permuta de forma no trivial las raíces 4-ésimas de la unidad. Por lo tanto, por la parte (g), la acción de Φ en M_c es no trivial. Entonces estos grupos no son de Bing.

${}^3D_4(q)$

Tiene multiplicador de Schur trivial.

$G_2(q)$

El multiplicador de Schur es trivial o $\mathbb{Z}_2$, salvo por el caso $G_2(3)$. En ese caso, el multiplicador de Schur es $\mathbb{Z}_3$. Hay un automorfismo exterior que actúa multiplicando por -1.

${}^2G_2(q)$

Tienen multiplicador de Schur trivial.

$F_4(q)$

El multiplicador de Schur es trivial o $\mathbb{Z}_2$.

${}^2F_4(q)$ y ${}^2F_4(2)'$

Tienen multiplicador de Schur trivial.

$E_6(q)$

El multiplicador de Schur es trivial o $\mathbb{Z}_3$. Cuando es $\mathbb{Z}_3$, por [19, Theorem 2.5.12 (i)] hay un automorfismo exterior que actúa multiplicando por -1.

${}^2E_6(q)$

El multiplicador de Schur es $\mathbb{Z}_{(3,q+1)}$, salvo por el caso ${}^2E_6(2)$.
Veamos primero el caso general:

- Si $3 \nmid q+1$, el multiplicador de Schur es trivial.

- Si $3 \mid q+1$ y q es una potencia de un primo p, tenemos $p \equiv 2 \pmod 3$. Usamos [19, Theorem 2.5.12]. En este caso $d = 2$. Como $3 \nmid p-1$, las raíces cúbicas primitivas de la unidad no están en $\mathbb{F}_p$ (pero sí en $\mathbb{F}_{q^2}$). Luego, hay un automorfismo de $\mathbb{F}_{q^2}$ que permuta de forma no trivial las raíces cúbicas de la unidad. Por lo tanto, por la parte (g), la acción de Φ en M_c es no trivial. Entonces estos grupos no son de Bing.

En el caso ${}^2E_6(2)$, se tiene $M_c = \mathbb{Z}_3$, $M_e = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ y la acción de $\mathrm{Out} = S_3$ en M_e es fiel. Los automorfismos de orden 3 de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ tienen traza -1 (no necesitamos entender la acción en M_c).

$E_7(q)$

El multiplicador de Schur es trivial o $\mathbb{Z}_2$.

$E_8(q)$

Tienen multiplicador de Schur trivial.

B. Grupos esporádicos

M_{11}

Tiene multiplicador de Schur trivial.

M_{12}

Tiene multiplicador de Schur de orden 2.

M_{22}

Tiene multiplicador de Schur cíclico de orden 12. Hay un automorfismo exterior que actúa multiplicando por -1.

M_{23}

Tiene multiplicador de Schur trivial.

M_{24}

Tiene multiplicador de Schur trivial.

J_1

Tiene multiplicador de Schur trivial.

J_2

Tiene multiplicador de Schur de orden 2.

J_3

Tiene multiplicador de Schur de orden 3. Hay un automorfismo exterior que actúa multiplicando por -1.

J_4

Tiene multiplicador de Schur trivial.

HS

Tiene multiplicador de Schur de orden 2.

He

Tiene multiplicador de Schur trivial.

Mc

Tiene multiplicador de Schur de orden 3. Hay un automorfismo exterior que actúa multiplicando por -1.

Suz

Tiene multiplicador de Schur de orden 6. Hay un automorfismo exterior que actúa multiplicando por -1.

Ly

Tiene multiplicador de Schur trivial.

Ru

Tiene multiplicador de Schur de orden 2.

$O'N$

Tiene multiplicador de Schur de orden 3. Hay un automorfismo exterior que actúa multiplicando por -1.

Co_1

Tiene multiplicador de Schur de orden 2.

Co_2

Tiene multiplicador de Schur trivial.

Co_3

Tiene multiplicador de Schur trivial.

Fi_{22}

Tiene multiplicador de Schur de orden 6. Hay un automorfismo exterior que actúa multiplicando por -1.

Fi_{23}

Tiene multiplicador de Schur trivial.

Fi'_{24}

Tiene multiplicador de Schur de orden 3. Hay un automorfismo exterior que actúa multiplicando por -1.

F_5

Tiene multiplicador de Schur trivial.

F_3

Tiene multiplicador de Schur trivial.

F_2

Tiene multiplicador de Schur de orden 2.

F_1

Tiene multiplicador de Schur trivial.

Apéndice C

Algunos programas en GAP

Estas funciones en GAP fueron usadas para encontrar los grupos de Bing de la Sección 3.2. Los resultados de dicha sección no dependen de que estos programas sean correctos.

```
LoadPackage("HAP");
LoadPackage("SONATA");

H2:=function(G)
#Devuelve una lista con los factores invariantes de H2(G)
    local R;
    R:=ResolutionFiniteGroup(G,3);
    return Homology(TensorWithIntegers(R),2);
end;;

PresentacionEficiente:=function(G)
# Devuelve una presentacion eficiente o fail si no encuentra una
    local H,P,d;
    H:=Image(IsomorphismFpGroup(G));
    H:=SimplifiedFpGroup(H);
    d:=Size(RelatorsOfFpGroup(H))-Size(GeneratorsOfGroup(H));
    if d=Size(H2(G)) then
        return PresentationFpGroup(H);
    fi;
    P:=PresentationViaCosetTable(H);
    H:=FpGroupPresentation(P);
    d:=Size(RelatorsOfFpGroup(H))-Size(GeneratorsOfGroup(H));
    if d=Size(H2(G)) then
        return P;
    fi;
    return fail;
```

```
end;;

BingTest:=function(G)
# Devuelve true si G es un grupo de Bing con H2 no trivial
# false en caso contrario
    local D, endG, R, f, festrella,
    A,B,generadores,fg,aux,i,e,t,l,Migrupo,w,fun,
    phi,psi,Mifuncion,Mifuncioninversa,
    inducidos, tr, g, di;

    D:=H2(G);
    # Si el H2 es trivial devuelve false:
    if D=[] then
        return false;
    fi;

    # Si la traza de la identidad es -1 devuelve false:
    if RemInt(Size(D),D[1]) = D[1]-1 then
        return false;
    fi;

    endG:=Endomorphisms(G);

    # Es necesario usar la misma resolucion para todas las cuentas
    R:=ResolutionFiniteGroup(G,3);

    # Cuentas para poder calcular trazas:
    f:=endG[1];
    festrella:=TensorWithIntegers(EquivariantChainMap(R,R,f));
    festrella:=Homology(festrella,2);
    A:=Source(festrella);
    Migrupo:=[[]];
    for i in [1..Size(D)] do
        di:=D[i];
        aux:=Migrupo;
        Migrupo:=[];
        for e in aux do
            for t in [0.. D[i]-1] do
                l:=StructuralCopy(e);
                Add(l,t);
                Add(Migrupo, l);
            od;
```

```
        od;
    od;
    B:=AbelianGroup(D);
    generadores:=GeneratorsOfGroup(B);
    fun:=[];
    for e in Migrupo do
        w:=generadores[1]^e[1];
        for i in [2..Size(D)] do
            w:=w*generadores[i]^e[i];
        od;
        Add(fun,DirectProductElement([e,w]));
    od;
    Migrupo:=Domain(Migrupo);
    Mifuncion:=GeneralMappingByElements(Migrupo,B,fun);
    Mifuncioninversa:=InverseGeneralMapping(Mifuncion);
    phi:=IsomorphismGroups(B,A);
    psi:=InverseGeneralMapping(phi);

    # Calculamos las trazas, sin calcular lo mismo dos veces:
    inducidos:=[];
    for f in endG do
        festrella:=TensorWithIntegers(EquivariantChainMap(R,R,f));
        festrella:=Homology(festrella,2);
        if not festrella in inducidos then
            Add(inducidos,festrella);
            inducidos:=Set(inducidos);
            tr:=0;
            festrella:=phi*festrella*psi*Mifuncioninversa;
            for i in [1..Size(D)] do
                g:=generadores[i];
                tr:=tr+Image(festrella,g)[i];
            od;
            if RemInt(RemInt(tr,D[1])+D[1],D[1]) = D[1]-1 then
                return false;
            fi;
        fi;
    od;
    return true;
end;;
```

La siguiente función encuentra todos los grupos de Bing de orden menor a m con multiplicador de Schur no trivial:

```
gruposchicos:=function(m)
    local l,o,n,k,G;
    l:=[];
    for o in [1..m] do
        n:=NumberSmallGroups(o);
        for k in [1..n] do
            G:=SmallGroup(o,k);
            if not IsAbelian(G) then
                if (BingTest(G)) then
                    Add(l,[o,k]);
                fi;
            fi;
        od;
    od;
    return l;
end;;
```

Por ejemplo, podemos hallar todos los grupos de Bing con H_2 no trivial y orden menor o igual a 50:

```
gap> gruposchicos(50);
[ [ 16, 3 ], [ 32, 5 ], [ 32, 6 ], [ 32, 9 ], [ 32, 24 ],
  [ 32, 29 ], [ 32, 30 ], [ 32, 31 ], [ 32, 35 ], [ 32, 41 ],
  [ 32, 42 ], [ 32, 44 ], [ 48, 14 ], [ 48, 19 ], [ 48, 21 ] ]
```

Usando la función PresentacionEficiente, se puede ver que los grupos de la siguiente lista, además de ser de Bing, son eficientes:

```
[ [ 16, 3 ], [ 32, 5 ], [ 32, 6 ],
  [ 32, 9 ], [ 32, 29 ], [ 32, 35 ] ]
```

Bibliografía

[1] E. Aichinger, F. Binder, J. Ecker, P. Mayr, and C. Nöbauer. SONATA, system of nearrings and their applications, Version 2.6. `http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Sonata/`, Nov 2012. Refereed GAP package.

[2] J. A. Barmak and I. Sadofschi Costa. On a question of R.H. Bing concerning the fixed point property for two-dimensional polyhedra. *arXiv:1412.8737*, 2014.

[3] H. Bass. Euler characteristics and characters of discrete groups. *Invent. Math.*, 35:155–196, 1976.

[4] A. J. Berrick, I. Chatterji, and G. Mislin. Homotopy idempotents on manifolds and Bass' conjectures. In *Proceedings of the Nishida Fest (Kinosaki 2003)*, volume 10 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 41–62. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2007.

[5] R. H. Bing. The elusive fixed point property. *Amer. Math. Monthly*, 76:119–132, 1969.

[6] K. Borsuk. Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents. *Fund. Math.*, 17(1):171–209, 1931.

[7] K. Borsuk. Über die Abbildungen der metrischen kompakten Räume auf die Kreislinie. *Fund. Math.*, 20(1):224–231, 1933.

[8] G. E. Bredon. Some examples for the fixed point property. *Pacific J. Math.*, 38:571–575, 1971.

[9] K. S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1982 original.

[10] R. F. Brown. The fixed point property and Cartesian products. *Amer. Math. Monthly*, 89(9):654–678, 1982.

[11] C. M. Campbell, G. Havas, C. Ramsay, and E. F. Robertson. On the efficiency of the simple groups of order less than a million and their covers. *Experiment. Math.*, 16(3):347–358, 2007.

[12] C. M. Campbell, G. Havas, C. Ramsay, and E. F. Robertson. All simple groups with order from 1 million to 5 million are efficient. *Int. J. Group Theory*, 3(1):17–30, 2014.

[13] M. M. Cohen. Simplicial structures and transverse cellularity. *Ann. of Math. (2)*, 85:218–245, 1967.

[14] A. Dold. *Lectures on algebraic topology*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1972 edition.

[15] G. Ellis. HAP, homological algebra programming, Version 1.10.15. `http://hamilton.nuigalway.ie/Hap/www`, Dec 2013. Refereed GAP package.

[16] E. Fadell. Recent results in the fixed point theory of continuous maps. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76:10–29, 1970.

[17] R. Fritsch and R. A. Piccinini. *Cellular structures in topology*, volume 19 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[18] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.7*, 2015.

[19] D. Gorenstein, R. Lyons, and R. Solomon. *The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Chapter A*, volume 40 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. Almost simple K-groups.

[20] D. Gorenstein, R. Lyons, and R. Solomon. *The classification of the finite simple groups. Number 1. Part I. Chapter 1*, volume 40 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[21] R. M. Guralnick, W. M. Kantor, M. Kassabov, and A. Lubotzky. Presentations of finite simple groups: a computational approach. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 13(2):391–458, 2011.

[22] M. Gutierrez and M. P. Latiolais. Partial homotopy type of finite two-complexes. *Math. Z.*, 207(3):359–378, 1991.

[23] C. L. Hagopian. An update on the elusive fixed-point property. In E. Pearl, editor, *Open Problems in Topology. II*, pages 263–277. Elsevier B. V., 2007.

[24] I. Hambleton and M. Kreck. Cancellation of lattices and finite two-complexes. *J. Reine Angew. Math.*, 442:91–109, 1993.

[25] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[26] C. Hog-Angeloni, W. Metzler, and A. J. Sieradski, editors. *Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory*, volume 197 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[27] S. Y. Husseini. The products of manifolds with the f.p.p. need not have the f.p.p. *Amer. J. Math.*, 99(5):919–931, 1977.

[28] J. Jezierski and W. Marzantowicz. *Homotopy methods in topological fixed and periodic points theory*, volume 3 of *Topological Fixed Point Theory and Its Applications.* Springer, Dordrecht, 2006.

[29] B. J. Jiang. On the least number of fixed points. *Amer. J. Math.*, 102(4):749–763, 1980.

[30] B. J. Jiang. *Lectures on Nielsen fixed point theory*, volume 14 of *Contemporary Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1983.

[31] S. Kinoshita. On some contractible continua without fixed point property. *Fund. Math.*, 40:96–98, 1953.

[32] K. Kuratowski. Problem 49. *Fund. Math.*, 15:356, 1930.

[33] K. Kuratowski. *Topology Vol. II.* Academic Press, 1968.

[34] W. Lopez. An example in the fixed point theory of polyhedra. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73(6):922–924, 1967.

[35] W. S. Massey. *Algebraic topology: an introduction.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56.

[36] J. R. Munkres. *Elements of algebraic topology.* Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[37] B. H. Neumann. On some finite groups with trivial multiplicator. *Publ. Math. Debrecen*, 4:190–194, 1956.

[38] J. Rosenberg. *Algebraic K-theory and its applications*, volume 147 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[39] I. Sadofschi Costa. Presentation complexes with the fixed point property. *arXiv:1502.02350*, 2015.

[40] E. H. Spanier. *Algebraic topology.* Springer-Verlag, New York, 1966. Corrected reprint of the 1966 original.

[41] R. G. Swan. Minimal resolutions for finite groups. *Topology*, 4:193–208, 1965.

[42] R. Waggoner. A fixed point theorem for $(n-2)$-connected n-polyhedra. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 33:143–145, 1972.

[43] R. Waggoner. A method of combining fixed points. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 51:191–197, 1975.

[44] F. Wecken. Fixpunktklassen. III. Mindestzahlen von Fixpunkten. *Math. Ann.*, 118:544–577, 1942.

[45] C. A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.