UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Grupos con la propiedad (T) de Kazdhan: Criterio espectral y grupos aleatorios

Facundo Sebastian Poggi

Director: Román Sasyk

12/02/2015

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecerle a Román Sasyk por su generosidad, por brindarnos a sus alumnos una visión global sobre la matemática, por la formación que me brindó durantes estos años y por todo el esfuerzo y la dedicación que tuvo para con esta tesis.

También quiero agradecerles a aquellas personas que desde su lugar fueron importantes para mi formación, tanto desde su lugar de docentes o simplemente, a través de comentarios, observaciones, charlas de café, entre otras. Julian Hadad, Quimey Vivas, Charly di Fiore, Nico Siroli, Ariel Paceti, Maxi Camporino, Marcelo Valdetaro, Jose Luis Romero, Lucas Bali, Gaby Carvajal, Marcos Cosarini, Matías del Hoyo, Xime Fernández, Dani Kohen, Jonathan Barmak, Mariano Suárez-Álvarez, Daniel Galicer, Nicolás Saintier, Marco Farinati, Fernando Cukierman, Roberto Miatello.

A aquellos compañeros de estudio, Aye, Bruno, Dani Mejail, Dani Grimaldi, Dani Cuesta, Diego, Diana, Eli, Euge, Fede Mascia, Germán Sborgini,, Germán Stefanich, Iván, Jaz, Javi Brude, Juanma, Juli Campos, Kari, Lucila, Lara, Lucho Escudero, Lucho Pantazis, Martin, Melisa, Maca, Marce, Mati Saucedo, Maxi Valle, Maxi Altamirano, Nachito, Nami, Nati, Rocha, Rafa, Sofi, Santi, Yami.

A los alumnos que tuve, muchos de los cuales no supe, o no recuerdo sus nombres, pero de los cuales uno también aprende mucho más de lo que nos imaginamos.

A mi familia. A mis viejos, por bancarme. A mi hermano por su apoyo. Y a mis abuelos también, porque cuando necesite de ellos no dudaron en darme una mano.

Y a Claudio Hauscarriague, a quien le debo la pasión por la matemática.

Índice

Introducción

La propiedad (T) de Kazhdan es una propiedad de representaciones de grupos localmente compactos y Hausdorff. Fue introducida por Kazhdan en [**15**] para mostrar que ciertos retículos en grupos de Lie son finitamente generados. A partir de ese entonces, los grupos con propiedad (T) comenzaron a ser importantes en distintas áreas de la matemática, que van desde el álgebra abstracta y la teoría combinatoria de grupos, hasta el estudio de factores en Álgebras de von Neumann y el cálculo de normas de operadores de convolución.

Entre otras aplicaciones, podemos señalar:

- Construcción de grafos expanders. A mediados de la década del 70, Margulis fue el primero en construir de manera explícita esta familia de grafos [**18**].

- Existencia de factores de tipo II_1 con grupo fundamental numerable. En 1980, Connes demostró que si Γ es un grupo discreto infinito con propiedad (T) tal que todas las clases por conjugación son infinitas, entonces el álgebra de von Neumann de Γ es un factor de tipo II_1 con grupo fundamental numerable [**4**].

- El problema de Ruziewicz. Durante años estuvo abierta la pregunta si la única medida definida sobre los conjuntos medibles Lebesgue de la esfera S^n, $n \geq 2$ es la medida de Lebesgue. Para dar la respuesta por la afirmativa, la propiedad (T) juega un rol fundamental en este trabajo cuando $n \geq 4$. Entre otros autores que trabajaron este problema, se destacan Margulis, Rosenblatt y Sullivan [**19**], [**23**], [**25**].

Sin embargo, los ejemplos de grupos con propiedad (T) que se conocían hasta entonces provenían de la teoría de grupos de Lie. Recién en 1994, Cartwright, Młotkowski y Steger en [**2**] dieron los primeros ejemplos de grupos discretos con propiedad (T) fuera de la teoría de grupos de Lie. A su vez, a finales de la década del 90, Shalom en [**24**] mostró propiedad (T) para $SL(n, \mathbb{Z})$ sin pasar por la condición de ser retículo en un grupo de Lie. Ambos trabajos se destacan por dar constantes de Kazhdan explícitas, algo que hasta ese entonces no se conocía.

Para los propósitos de esta tesis cabe destacar al de Zuk [**26**], que da condiciones suficientes para que un grupo discreto tenga propiedad (T), exhibe constantes de Kazhdan y vincula la propiedad (T) con la teoría de grupos aleatorios.

La teoría de grupos aleatorios tiene como finalidad estudiar cuáles propiedades de grupos finitamente generados y finitamente presentados son genéricas. Introducida por Gromov en [**9**], ganó muchísima popularidad no solo por los avances que brindó en el estudio de la teoría de grupos, si no también porque permitió dar ejemplos de grupos con propiedades exóticas. Esencialmente, se trata de dar un conjunto de reglas, que llamamos modelo, y estudiar cuáles propiedades, o cuáles elementos, o qué tipo de comportamiento tienen casi todos los grupos. El modelo más famoso es el modelo de Densidad de Gromov, introducido en el trabajo previamente citado. En este modelo se cumple que casi todo grupo es hiperbólico [**20**] (en consecuecia, casi todo grupo en ese modelo resuelve el problema de la palabra). En [**22**] y [**26**], se estudia cómo se comporta la propiedad (T) como propiedad genérica en el modelo de densidad de Gromov.

A lo largo de este trabajo estudiaremos dos criterios espectrales que brindarán condiciones suficientes para que un grupo tenga propiedad (T). El primero, tiene como ventaja que permite obtener constantes de Kazhdan explícitas para cierto conjunto de generadores. El segundo, tiene como principal aplicación el estudio de la propiedad (T) como una propiedad genérica del modelo de densidad de Gromov.

La presente tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 1 daremos una introducción a la propiedad (T), incluyendo los principales resultados y exhibiendo algunos ejemplos. En los capítulos 2 y 3, estudiaremos los dos criterios espectrales que enuncia Zuk en [**26**]. El capítulo 4 brinda una introducción a la teoría de grupos aleatorios. Allí veremos los modelos de grupos que utilizaremos en lo que resta de esta tesis. Además incluiremos una breve introducción a la teoría de grupos hiperbólicos. En el capítulo 5, estudiaremos la propiedad (T) como propiedad genérica tanto en el modelo de densidad de Gromov, como en el modelo triangular.

CAPÍTULO 1

Propiedad (T) de Kazhdan

La propiedad (T) de Kazhdan estudia la existencia de puntos fijos en representaciones unitarias. Existen varias definiciones equivalentes de la propiedad (T), ya sea dada por la existencia de conjuntos de Kazhdan compactos, condiciones en términos de cohomologías de acciones de grupos o también se puede definir a partir de la topología de Fell en el dual unitario.

Comenzaremos dando los resultados que utilizaremos a lo largo del presente trabajo, luego, daremos una serie de ejemplos de grupos tanto con propiedad (T), como aquellos que no la tienen. Finalizaremos mencionando teoremas importantes relacionados a la propiedad (T). No se darán demostraciones en este capítulo, ya que todo el contenido aquí mencionado ha sido visto en la materia Grupos, Dinámica y Geometría. Como referencia, citamos al libro de Bekka, de la Harpe y Valette [**1**], que brinda una excelente introducción a esta teoría.

A lo largo de todo este capítulo, por un grupo topológico entenderemos un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff, y por un espacio de Hilbert, un espacio de Hilbert sobre los complejos.

Definición 1.1. *Sea G un grupo topológico. Una representación unitaria de G sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un morfismo de grupos continuo $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ denota al conjunto de los operadores unitarios sobre $\mathcal{H}$. La topología en $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es la topología fuerte de operadores, es decir, aquella tal que $\forall \xi \in \mathcal{H}$, la función $f : G \to \mathcal{H}$, $f(g) = \pi(g)\xi$ es continua.*

A una representación unitaria la notamos $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ o $(\pi, \mathcal{H})$ en el caso de que no se preste a confusión.

Todo grupo localmente compacto y Hausdorff G tiene una representación unitaria. Consideremos μ la medida de Haar a izquierda de G y sea $L^2(G, \mu)$, que es un espacio de Hilbert. G actúa en $L^2(G, \mu)$ vía $gF(x) = F(g^{-1}x)$. Como la medida de Haar a izquierda es G invariante, tenemos que $\|gF\| = \|F\|$ por lo tanto, la acción de G es una representación unitaria. Esta se llama la representación regular a izquierda.

Definición 1.2. *Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de G.*

(1) *Para un conjunto $Q \subset G$ y un número $\epsilon > 0$, decimos que un vector $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \neq 0$ es (Q, ϵ)-invariante si*
$$\sup_{x \in Q} \|\pi(x)\xi - \xi\| < \epsilon \|\xi\|.$$

(2) *Decimos que la representación $(\pi, \mathcal{H})$ tiene vectores casi invariantes si para todo conjunto compacto Q y para todo real $\epsilon > 0$, existe un vector (Q, ϵ)-invariante.*

(3) *Decimos que la representación tiene un vector G invariante no nulo si existe $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \neq 0$ tal que $\forall g \in G$, $\pi(g)\xi = \xi$.*

Observación 1.1. *Supongamos que ξ es un vector (Q, ϵ)-invariante. Si $Q^{'} \subset Q$ y $\epsilon^{'} \geq \epsilon$, entonces ξ es $(Q^{'}, \epsilon^{'})$-invariante.*

Definición 1.3. *Sea G un grupo topológico. Un subconjunto $Q \subset G$ es un conjunto de Kazhdan si existe un $\epsilon > 0$ con la siguiente propiedad: para toda representación unitaria $(\pi, \mathcal{H})$ que posee un vector (Q, ϵ)-invariante, entonces posee un vector G invariante no nulo.*

En este caso, se dice que ϵ es una constante de Kazhdan de G para Q, y se dice que el par (Q, ϵ) es un par de Kazhdan.

Cabe destacar que tener un par de Kazhdan (Q, ϵ) y un vector ξ que es (Q, ϵ)-invariante no implica que ξ sea invariante. Solamente afirma la existencia de vectores invariantes.

Definición 1.4. *Decimos que un grupo topológico G tiene la propiedad (T) de Kazhdan si G tiene un conjunto de Kazhdan compacto.*

Podemos pensar a la propiedad (T) como una propiedad de rigidez. Cada vez que tenemos un vector que se "mueve" poco por cierto conjunto compacto, entonces, tenemos un vector que queda fijo por todo el grupo. En muchas aplicaciones es importante tratar de conseguir conjuntos de Kazhdan lo más chicos posibles, y conseguir constantes de Kazhdan lo más grandes posibles.

Con esta definición, no parece sencillo exhibir conjuntos que tengan la propiedad (T). Sin embargo tenemos el siguiente resultado ([**1**], Proposición 1.1.5).

Proposición 1.1. *Sea G un grupo topológico. Entonces el par $(G, \sqrt{2})$ es un par de Kazhdan. En consecuencia los grupos topológicos compactos tienen propiedad (T).*

Este resultado también suele ser utilizado de la siguiente manera. Se exhibe un par de Kazhdan con la propiedad que, si tenemos vector casi invariante para ese par, entonces ese vector es $(G, \sqrt{2})$-invariante, luego el grupo tiene propiedad (T).

Si tenemos un grupo topológico G con propiedad (T), podemos preguntarnos cómo es el comportamiento de los cocientes y los subgrupos de G con respecto a la propiedad (T). Los siguientes resultados van en esa dirección ([**1**], Teorema 1.3.4).

Proposición 1.2. *Sea G un grupo topológico con propiedad (T), y sea H un grupo topológico tal que existe un morfismo $\phi : G \to H$ continuo cuya imagen de G por ϕ es densa en H. Entonces H tiene propiedad (T) y además, si (Q, ϵ) es un par de Kazhdan para G, entonces $(\phi(Q), \epsilon)$ es un par de Kazhdan para H.*

Corolario 1.1. *Todo cociente de un grupo topológico con propiedad (T) tiene propiedad (T).*

Con respecto a subgrupos de grupos con propiedad (T), veremos que existen grupos con propiedad (T) que tienen subgrupos que no tienen (T) (Ejemplo 1.3). En consecuencia, esta propiedad no se preserva por subgrupos.

De la misma manera, existen grupos con propiedad (T) que son subgrupos de grupos sin propiedad (T), como por ejemplo $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ que tiene propiedad (T) por ser compacto y es subgrupo de $\mathbb{C}^*$ que veremos más adelante que no tiene propiedad (T).

Sin embargo, existe un resultado que relaciona el comportamiento de grupos y subgrupos en términos de esta popiedad. Comenzamos con una definición.

Definición 1.5. *Si G es un grupo topológico y $H \subset G$ un subgrupo cerrado. Decimos que H tiene covolumen finito en G, si el conjunto G/H admite una medida de borel G-invariante μ tal que $\mu(G/H) < \infty$.*

Teorema 1.1. *Si G es un grupo topológico localmente compacto y H un subgrupo de G que tiene covolumen finito. Son equivalentes:*

(1) *G tiene propiedad (T).*

(2) *H tiene propiedad (T).*

Una demostración de este hecho se puede encontrar en [**1**], Teorema 1.7.1. Como consecuencia de este teorema tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.2. *Sea G es un grupo topológico, y H un subgrupo de índice finito. Entonces G tiene propiedad (T) si y sólo si H tiene propiedad (T).*

Cabe destacar que durante mucho tiempo la única forma de demostrar la existencia de grupos discretos infinitos con propiedad (T) fue a partir de la condición de ser retículos (y en consecuencia, subgrupos con covolumen finito) en grupos de Lie con propiedad (T).

A continuación, daremos algunos ejemplos. Ya vimos que tienen propiedad (T) los grupos topológicos compactos. Veamos algunos grupos no compactos no propiedad (T).

Ejemplo 1.1. *Los grupos $SL(n,\mathbb{R})$ y $SL(n,\mathbb{Z})$, $n \geq 3$ tienen propiedad (T). Básicamente, esto es lo que mostró Kazhdan en* [**15**].

Shalom demostró en [**24**] *que $SL(n,\mathbb{Z})$ tiene propiedad (T) sin pasar por la propiedad de ser retículo de $SL(n,\mathbb{R})$ abriendo nuevos horizontes en el estudio de esta teoría.*

Ejemplo 1.2. *En la misma linea que el ejemplo anterior se encuentran los grupos $Sp(2n,\mathbb{R})$ y $Sp(2n,\mathbb{Z})$, $n \geq 2$ que también tienen propiedad (T).*

Para encontrar grupos que no tengan propiedad (T), introducimos el concepto de amenabilidad. La teoría de grupos amenables fue introducida por von Neumann y a partir de entonces tuvo un fuerte desarrollo. Veremos que, en el caso de grupos no compactos, la propiedad (T) se comporta de manera opuesta a la amenabilidad ([**1**], Teorema 1.1.6).

Definición 1.6. *Un grupo topológico G es amenable si toda acción afin de G sobre un espacio convexo, compacto, no vacío $\mathbb{X}$ de un espacio vectorial topológico tiene un punto fijo.*

Teorema 1.2. *Si G es un grupo topológico, entonces son equivalentes:*

(1) *G tiene propiedad (T) y es amenable.*

(2) *G es un grupo compacto.*

Ejemplos de grupos amenables son los grupos abelianos, los grupos nilpotentes, los grupos solubles, los grupos compactos, entre otros. Como consecuencia, $\mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{R}^n$ no tienen propiedad (T). Además se desprende de la definición que la amenabilidad es heredada por subgrupos.

Como corolario de este último teorema y de la proposición 2, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.3. *Si G tiene propiedad (T) y $\phi : G \to H$ es un morfismo de grupos continuo donde $H = \mathbb{Z}^n$, $H = \mathbb{R}^n$ o $H = \mathbb{R}^*$, entonces $\phi(G) = \{Id_H\}$. En particular, todo grupo con la propiedad (T) es unimodular*[1].

Ejemplo 1.3. *Sea $\phi : \mathbb{R} \to Sl(3,\mathbb{R})$,*

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ϕ es un morfismo de grupos que es monomorfismo, luego, $\mathbb{R}$ es un grupo amenable que es subgrupo de un grupo con la propiedad (T). Esto prueba que la propiedad (T) no se preserva por subgrupos.

Tampoco vale que si tenemos un subgrupo H con propiedad (T) de un grupo G este último tenga (T). Notemos que $SL(n,\mathbb{R}) \hookrightarrow GL(n,\mathbb{R})$. Pero $GL(n,\mathbb{R})$ no tiene propiedad (T), ya que tomar determinante da un morfismo sobreyectivo de $GL(n,\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.

[1] Recordemos que un grupo es unimodular si la medida de Haar a izquierda coincide con la medida de Haar a derecha.

Ejemplo 1.4. *Los grupos libres no tienen la propiedad (T). Esto se debe a que* $\mathbb{Z}^n$ *es cociente del grupo libre* $\mathbb{F}_n$. *De tener* $\mathbb{F}_n$ *propiedad (T), entonces* $\mathbb{Z}^n$ *tiene propiedad (T). Pero* $\mathbb{Z}$ *resulta amenable no compacto, contradiciendo el teorema 2.*[2]

A modo de corolario del ejemplo anterior, se desprende que el grupo $Sl(2,\mathbb{Z})$ no tiene (T). Esto se debe a que el grupo $\mathbb{F}_2$ es un subgrupo de índice finito en $Sl(2,\mathbb{Z})$. Luego tampoco tiene propiedad (T) el grupo $Sl(2,\mathbb{R})$.

Finalizaremos este apartado dando una serie de resultados conocidos y algunas equivalencias de propiedad (T). Comenzaremos por uno de los resultados más importantes, esencialmente atribuído a Kazhdan.

Teorema 1.3. *Sea* G *es un grupo topológico, con propiedad (T), entonces* G *es compactamente generado. En particular si el grupo es discreto, es finitamente generado.*

Además, si Q *es un conjunto de Kazhdan con interior no vacío, entonces* Q *es un generador de* G.

La propiedad (T) de Kazhdan se puede describir en términos de lo que se conoce como la 1-cohología de isometrías afines. En lineas generales, una acción por isometrías afines es un morfismo de grupos continuo $\Phi : G \to Isom(H)$ donde H es un espacio de Hilbert *real* e $Isom$ representa al grupo de isometrías de H dotado de la topología fuerte. Como corolario del teorema de Mazur-Ulam, se tiene que $Isom(H) = \mathcal{O}(H) \ltimes (H)$, donde $\mathcal{O}(H)$ representa al grupo de operadores ortogonales de H. Entonces podemos escribir a $\phi(g) = (\pi(g), b(g))$ donde $\pi(g) \in \mathcal{O}(H)$. La asignación $g \in G \to \pi(g)$ define un morfismo de grupos, que llamamos representación ortogonal y la asignación $g \in G \to b(g)$ cumple que $b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h)$.

Definición 1.7. *Sea* π *una representación ortogonal de* G *sobre un espacio de Hilbert real* H.

(1) *Una función* $b : G \to H$ *continua tal que* $\forall g, h \in G$, $b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h)$ *se llama un 1-cociclo asociado a* π. *Al conjunto de 1-cociclos asociados a* π *lo notamos* $Z^1(G,\pi)$.

(2) *Un 1-cociclo* b *para el cual existe un* $\xi \in H$ *tal que* $\forall g \in G$, $b(g) = \pi(g)\xi - \xi$ *se llama un 1-coborde asociado a* π. *Al conjunto de 1-cobordes asociados a* π *lo notamos* $B^1(G,\pi)$.

(3) *Se define* $H^1(G,\pi) = Z^1(G,\pi)/B^1(G,\pi)$, *la 1-cohomología con coeficientes en* π.

(4) *Dado un 1-cociclo* b *asociado a* π, *se define* $\alpha(g) = \pi(g) + b(g)$. *Vale que* α *es una acción por isometrías afines de* G.

La condición de que un 1-cociclo sea un 1-coborde quiere decir que la acción por isometrías α asociada tiene un vector invariante por G. Además, se puede ver que un 1-coborde cumple que es acotado, o lo que es lo mismo, que todas las órbitas de la acción α asociada son acotadas ([**1**], Teorema 2.12.4).

Teorema 1.4 (Delorme-Guichardet). *Sea* G *un grupo topológico. Entonces:*

(1) *Si* G *tiene propiedad (T), entonces para toda* π *representación ortogonal,* $H^1(G,\pi) = 0$.

(2) *Si* G *es además* σ*-compacto tal que* $H^1(G,\pi) = 0$ *para toda representación ortogonal* π, *entonces* G *tiene propiedad (T).*

Para finalizar, se dará un breve comentario de la propiedad (T) en términos de la topología de Fell. Detalles técnicos serán omitidos en su totalidad, pero el interesado puede encontrarlos en el

[2]Los grupos libres poseen lo que se conoce como propiedad de Haagerup, que es una generalización de amenabilidad. Al igual que lo que ocurría con amenabilidad, si un grupo tiene propiedad (T) y la propiedad de Haagerup, entonces es compacto [**3**].

libro de Bekka, de la Harpe y Valette, [**1**], secciones 1.2 y apéndice F. La topología de Fell permite construir un espacio topológico en un conjunto de representaciones unitarias de un grupo topológico G. Como la familia de todas las representaciones unitarias no es un conjunto, uno debe tomar una subfamilia propia de la familia anterior de manera tal que esa familia sea un conjunto. Por ejemplo, uno puede tomar el conjunto de las representaciones irreducibles de G, o también el conjunto de las representaciones de dimensión finita de G. Una vez fijado un conjunto de representaciones, la topología de Fell brinda una estructura de espacio topológico a dicho conjunto.

TEOREMA 1.5. *Sea G un grupo topológico. Entonces son equivalentes:*

(1) *G tiene propiedad (T).*

(2) *La representación trivial es aislada en el conjunto de las representaciones irreducibles de G con la topología de Fell.*

La topología de Fell brinda un marco conceptual que permite mostrar de manera sencilla el teorema 1.2. Por un lado, tenemos que que amenabilidad implica que la representación trivial es un punto de acumulación de la representación regular a izquierda [**11**]. Por otro lado, propiedad (T) afirma que cada vez que la representación trivial es punto de acumulación de una representación $(\pi, \mathcal{H})$, entonces la representación trivial es subrepresentación de $(\pi, \mathcal{H})$. De esta manera, obtenemos que la representación trivial es subrepresentación de la representación regular a izquierda. Pero la única forma de que esto ocurra es que esta última contenga a las funciones constantes, lo que implica que el grupo es compacto. Además, a este teorema le debemos la notación (T), que simplemente significa que la representación trivial esta aislada.

CAPÍTULO 2

Criterio espectral para grupos finitamente generados

En este capítulo, estudiaremos el primero de los criterios espectrales que permiten determinar si un grupo tiene la propiedad (T) y que además provee constantes de Kazhdan explícitas. Este criterio le corresponde a Zuk, quien lo enunció y probó en [**26**]. Para ello, a partir de un grupo finitamente generado Γ y un conjunto de generadores S, definiremos un grafo $\mathbb{G}$ con la propiedad de que si el primer autovalor no nulo $\lambda_1(\mathbb{G})$ del laplaciano de $\mathbb{G}$ es mayor que $\frac{1}{2}$, entonces Γ tiene (T). Además, la cota es óptima, ya que veremos en el ejemplo 2.1 que si consideramos los enteros en los generadores $\{\pm1, \pm2\}$, entonces $\lambda(\mathbb{G}) = \frac{1}{2}$, pero los enteros no tienen propiedad (T).

El capítulo está organizado de la siguiente manera. La primera sección esta dedicada a introducir conceptos básicos de análisis armónico en grafos. Luego, estudiaremos el criterio espectral de Zuk y finalmente concluímos con dos ejemplos.

En lo que sigue, Γ denotará un grupo discreto, finitamente generado.

1. Análisis Armónico en grafos

En esta sección daremos algunas nociones de análisis armónico en grafos. Repasaremos las definiciones de grafos pertinentes a nuestro problema, y espacios de Hilbert asociados a ellos. Además, presentaremos un estudio abreviado de las propiedades del Laplaciano de $\mathbb{G}$ que utilizaremos a lo largo del trabajo.

Definición 2.1. *Un par $(V, \mathbb{E})$, con V un conjunto y $\mathbb{E} \subset V \times V$, se dice un grafo. Los elementos de V se dicen vértices, mientras que los elementos de $\mathbb{E}$ se llaman aristas. Al par lo notamos $\mathbb{G}$.*

Decimos que $\mathbb{G}$ es un grafo no dirigido si para cada $e = (x, y) \in \mathbb{E}$, entonces $\overline{e} = (y, x) \in \mathbb{E}$. Cuando V es finito, decimos que el grafo es finito. En un principio, $\mathbb{G}$ no es necesariamente finito, pero el criterio espectral de Zuk y sus aplicaciones no utilizan grafos infinitos.

Si dos vértices estan conectados por una arista, decimos que esos vértices son adyacentes. Dado $x \in V$, defnimos el grado de s como $gr(s) = \#\{y \in V : y \text{ es adyacente a } s\}$.

Decimos que $\mathbb{G}$ es conexo si para cada par $x, y \in V$, existe una sucesión finita de aristas adyacentes que conectan el vértice x con y.

Dado un grafo $\mathbb{G}$, definimos los siguientes espacios de Hilbert:

- $\mathcal{E}^0 = \{f : V \to \mathbb{C} : \sum_{x \in V} |f(x)|^2 gr(x) < \infty\}$,

  $\langle f, g\rangle = \sum_{x \in V} f(x)\overline{g(x)} gr(x)$.
- $\mathcal{E}^1 = \{F : \mathbb{E} \to \mathbb{C} : F(e) = -F(\overline{e}); \sum_{e \in \mathbb{E}} |F(e)|^2\}$,

  $\langle F, G\rangle = \sum_{e \in \mathbb{E}} F(e)\overline{G(e)}$.

Al par $(\mathcal{E}^0, \langle , \rangle)$ lo notamos $\ell^2(\mathbb{G}, gr)$.

En el caso de tener un grafo no dirigido $\mathbb{G}$ definimos $D : \mathcal{E}^0 \to \mathcal{E}^1$, $Df(e) = f(x) - f(y)$, donde $e = (x, y)$.

Proposición 2.1. *D esta bien definida.*

Demostración. Clarmente, $Df(\overline{e}) = -Df(e)$. Veamos que $\langle Df, Df\rangle \leq c\|f\|^2$.

$$\langle Df, Df\rangle = \sum_{e\in\mathbb{E}} Df(e)\overline{Df(e)} = \sum_{(x,y)\in\mathbb{E}} (f(x)-f(y))(\overline{f(x)-f(y)}) =$$

$$= \sum_{(x,y)\in\mathbb{E}} f(x)\overline{f(x)} + f(y)\overline{f(y)} - 2Re(f(x)f(y)).$$

Entonces,

$$|\langle Df, Df\rangle| \leq \sum_{(x,y)\in\mathbb{E}} \big(|f(x)|^2 + |f(y)|^2 + 2|f(x)||f(y)|\big).$$

Por Hölder, $\sum_{(x,y)\in\mathbb{E}} |f(x)||f(y)| \leq \left(\sum_{(x,y)\in\mathbb{E}} |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{(x,y)\in\mathbb{E}} |f(y)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Ahora, como el grafo no es dirigido, cada término se repite tantas veces como el grado del vértice, por lo tanto la desigualdad queda:

$$\sum_{(x,y)\in\mathbb{E}} |f(y)|^2 = \sum_{y\in V} |f(y)|^2 gr(y) = \|f\|^2.$$

Entonces,

$$|\langle Df, Df\rangle| \leq \sum_{x\in V} |f(x)|^2 gr(x) + \sum_{y\in V} |f(y)|^2 gr(y) + 2\|f\|^2 = 4\|f\|^2.$$

□

Estamos en condiciones de definir el operador de Laplace de un grafo $\mathbb{G}$.

Definición 2.2. *Sea $\mathbb{G}$ un grafo tal que todo vértice tiene grado finito. Se define Δf como*

$$\Delta f(s) = \frac{1}{gr(s)} \sum_{t:(s,t)\in\mathbb{E}} (f(s) - f(t)).$$

Hay diferentes definiciones del operador de Laplace en la literatura. Esta que utilizamos es la versión normalizada del Laplaciano, pues en la definición puntual aparece el grado de cada vértice dividiendo.

Veamos algunas propiedades de Δ.

Proposición 2.2 (Fórmula de Green). *Si $f, g \in \ell^2(\mathbb{G}, gr)$, entonces*

$$\sum_{x\in V} \Delta f(x) g(x) gr(x) = \frac{1}{2} \sum_{e\in\mathbb{E}} Df(e)Dg(e).$$

Demostración. Primero, notemos que

$$\sum_{e\in\mathbb{E}} Df(e)Dg(e) = \sum_{(x,y)\in\mathbb{E}} (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) =$$

$$\sum_{(x,y)\in\mathbb{E}} f(x)g(x) + f(y)g(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x).$$

Como $(x,y)\in\mathbb{E} \Leftrightarrow (y,x)\in\mathbb{E}$, tenemos que

$$\sum_{(x,y)\in\mathbb{E}} f(x)g(y)+f(y)g(x) = 2\left(\sum_{(x,y)\in\mathbb{E}} f(x)g(y)\right).$$

Además, $\sum_{(x,y)\in\mathbb{E}} f(x)g(x)+f(y)g(y) = 2\sum_{x\in V} f(x)g(x)gr(x)$.
Por lo tanto,

$$\sum_{(x,y)\in\mathbb{E}} (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) = 2\sum_{x\in V} f(x)g(x)gr(x) - 2\left(\sum_{(x,y)\in\mathbb{E}} f(x)g(y)\right).$$

Por otra parte

$$\sum_{x\in V} \Delta f(x)g(x)gr(x) = \sum_{x\in V}\frac{1}{gr(x)}\left(\sum_{y:(x,y)\in\mathbb{E}} f(x)-f(y)\right)g(x)gr(x) =$$

$$\sum_{x\in V} f(x)g(x)gr(x) - \sum_{(x,y)\in\mathbb{E}} f(x)g(y).$$

Lo que concluye la prueba de la Fórmula de Green. □

Corolario 2.1. (1) $\Delta = \frac{1}{\sqrt{2}}D^*\frac{1}{\sqrt{2}}D$, *luego es un operador positivo.*

(2) Δ *es diagonalizable y cuando el grafo es conexo, 0 es autovalor simple.*

Demostración. (1) Se desprende de que

$$\langle \Delta f, g\rangle = \sum_{x\in V}\Delta f(x)\overline{g(x)}gr(x) = \frac{1}{2}\sum_{e\in\mathbb{E}} Df(e)\overline{Dg(e)} = \frac{1}{2}\langle Df, Dg\rangle.$$

(2) Δ es positivo, luego es diagonalizable con todos sus autovalores positivos.

Una cuenta directa muestra que si f es constante, $\Delta f = 0$. Por otra parte, si f es autovector de autovalor 0,

$$0 = \langle \Delta f, f\rangle = \frac{1}{2}\sum_{e\in\mathbb{E}}|Df(e)|^2 = \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in\mathbb{E}}|f(x)-f(y)|^2.$$

Luego, es constante en cada cada componente conexa. En particular, si el grafo es conexo, 0 es autovalor simple.

□

Observación 2.1. Δ *es un operador positivo, sus autovalores son numeros reales no negativos. Luego, como corolario de la proposición 2.1, tenemos que los autovalores del laplaciano están contenidos en el intervalo [0,2].*

2. Propiedad (T) y espectro de Δ

Esta sección está dedicada a demostrar uno de los resultados centrales de [**26**]. En primera instancia, definiremos el grafo $\mathbb{G}$ y daremos sus principales propiedades. Luego, definiremos una nueva familia de espacios de Hilbert que vincularán representaciones unitarias de Γ con el grafo $\mathbb{G}$, y que serán el puente para demostrar el resultado principal de este capítulo.

A lo largo de esta sección, S será un conjunto de generadores simétrico de Γ.

Definición 2.3. *Sea Γ un grupo numerable y S un conjunto de generadores simétrico, definimos el grafo de Γ asociado a S al grafo $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ cuyos vértices son los elementos de S y un par $(s,t) \in \mathbb{E}$ si $s, t, s^{-1}t \in S$. Lo notamos $\mathbb{G}_S$.*

Observación 2.2. *El grafo $\mathbb{G}_S$ es no dirigido, pues si $(s,t) \in \mathbb{E}$, entonces $s^{-1}t \in S$ y luego por simetría $t^{-1}s \in S$, entonces $(t,s) \in \mathbb{E}$.*

En un principio $\mathbb{G}_S$ no tiene por qué ser conexo. Pero cambiando el conjunto de generadores por otro más grande podemos obtener un grafo $\mathbb{G}_S$ conexo.

Lema 2.1. *Sea $S' = S \cup S^2 - \{e\}$, entonces el grafo $\mathbb{G}_{S'}$ es conexo.*

Demostración. Primero notemos que dos elementos de S están conectados en $\mathbb{G}_{S'}$. Observemos que si $s, t \in S$, entonces $s^{-1}t, t^{-1}s \in S^2$, luego, si $t \neq s^{-1}$ entonces $(s,t), (t,s) \in \mathbb{E}$.

Sea $x \in S^2$, veamos que lo podemos conectar a un elemento de S. Como $s \in S^2$, $x = st$. Entonces, $(x,s) \in \mathbb{E}$ pues $x^{-1}s = t^{-1}s^{-1}s = t^{-1} \in S$. □

Lema 2.2. *Dado un vértice s, $gr(s) = gr(s^{-1})$.*

Demostración. Sea s un vértice, entonces $gr(s) = \#\{t \in S \text{ tales que } s^{-1}t \in S\}$. Como S es simétrico, $gr(s) = \#\{t \in S \text{ tales que } t^{-1}s \in S\}$. Para cada t, tenemos r tal que $r = r(t) = t^{-1}s$, entonces, el par (s^{-1}, r) es una arista del grafo. Luego, $gr(s) \leq gr(s^{-1})$. Aplicando la desigualdad para s^{-1} obtenemos que $gr(s^{-1}) \leq gr(s)$. Luego, son iguales. □

Definición 2.4. *Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de Γ y sea $\mathbb{G}_S$. Definimos los siguientes espacios de Hilbert.*

(1) $C^0 = \{u : u \in \mathcal{H}\}$, *donde* $\langle u, v\rangle_{C^0} = \langle u, v\rangle_{\mathcal{H}} |\mathbb{E}|$.

(2) $C^1 = \{f : S \to \mathcal{H} \text{ tal que } f(s^{-1}) = \pi(s)f(s) \quad \forall s \in S\}$,

$$\langle f, g\rangle_{C^1} = \sum_{s\in S} \langle f(s), g(s)\rangle_{\mathcal{H}} gr(s)$$

(3) $C^2 = \{g : \mathbb{E} \to \mathcal{H}\}$, *con* $\langle \alpha, \beta\rangle_{C^2} = \sum_{e\in\mathbb{E}} \langle \alpha(e), \beta(e)\rangle_{\mathcal{H}}$.

Ademas, tenemos los siguientes operadores diferenciales asociados

(1) $d_0 : C^0 \to C^1$, $d_0(u)(s) = \pi(s)u - u$.

(2) $d_1 : C^1 \to C^2$, $d_1(f)(s,t) = f(s) - f(t) + \pi(s)f(s^{-1}t)$.

Para no recargar de notación, obviaremos los subíndices cuando este claro por contexto cuales son las aplicaciones o espacios que estamos considerando.

Los espacios $(C^i, \langle,\rangle_{C^i})$ son espacios de Hilbert. Veamos que d_0 esta bien definida. Primero, notemos que al ser π representación, tenemos que:

$$d_0u(s^{-1}) = \pi(s^{-1})u - u = \pi(s^{-1})(u - \pi(s)u) = -\pi(s^{-1})d_0u(s).$$

Luego, se sigue la buena definición. Además $d_1 d_0 = 0$, pues

$$d_1d_0u(s,t) = d_0u(s) - d_0u(t) + \pi(s)d_0(s^{-1}t) =$$

$$\pi(s)u - u - (\pi(t)u - u) + \pi(s)(\pi(s^{-1}t)u - u) =$$

$$\pi(s)u - \pi(t)u + (\pi(t)u - \pi(s)u).$$

Sean d_0^*, d_1^* los operadores adjuntos de d_0, d_1 respectivamente. Estudiemos la relación entre estos operadores y la propiedad (T). Para eso, necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 2.3. *Si $f \in C^1$ entonces $d_0^* f = -2 \sum_{s\in S} \frac{1}{|\mathbb{E}|} f(s)gr(s)$*

Demostración.

$$\langle d_0u, f\rangle_{C^1} = \sum_{s\in S} \langle d_0u(s), f(s)\rangle gr(s) = \sum_{s\in S} \langle \pi(s)u - u, f(s)\rangle gr(s) =$$

$$\sum_{s\in S} \langle u, \pi(s^{-1})f(s)\rangle gr(s) - \sum_{s\in S} \langle u, f(s)\rangle gr(s) =$$

$$-\sum_{s\in S} \langle u, f(s^{-1})\rangle gr(s^{-1}) - \sum_{s\in S} \langle u, f(s^{-1})\rangle gr(s) =$$

$$-2\sum_{s\in S} \langle u, f(s)\rangle gr(s) = \left\langle u, -2\sum_{s\in S} \frac{1}{|\mathbb{E}|} f(s)gr(s)\right\rangle |\mathbb{E}| = \left\langle u, -2\sum_{s\in S} \frac{1}{|\mathbb{E}|} f(s)gr(s)\right\rangle_{C^0}.$$

Luego, $d_0^* f = -2 \sum_{s\in S} \frac{1}{|\mathbb{E}|} f(s)gr(s)$. □

Lema 2.4. $\|d_0^*\| \leq 2$.

Demostración. Sea $f \in C^1$ tal que $\|f\| = 1$.

$$\|d_0^* f\|^2 = \left\| -2\sum_{s\in S} \frac{1}{|\mathbb{E}|} f(s)gr(s)\right\|_{C^0}^2 = \left\| -2\sum_{s\in S} \frac{1}{|\mathbb{E}|} f(s)gr(s)\right\|_{\mathcal{H}}^2 |\mathbb{E}| \leq$$

$$4|\mathbb{E}| \left(-2\sum_{s\in S} \frac{gr(s)}{|\mathbb{E}|} \|f(s)\|\right)^2.$$

Donde la última desigualdad se deduce de haber aplicado desigualdad triangular. Aplicando Hölder a la suma, con $f_1(s) = \|f(s)\|\sqrt{gr(s)}$, $f_2(s) = \frac{\sqrt{gr(s)}}{|\mathbb{E}|}$ obtenemos

$$\leq 4|\mathbb{E}| \left(-2\sum_{s\in S} \frac{gr(s)}{|\mathbb{E}|} \|f(s)\|\right)^2 \leq 4|\mathbb{E}| \left(\sum_{s\in S} \|f(s)\|_{\mathcal{H}}^2 gr(s)\right) \left(\sum_{s\in S} \left(\frac{\sqrt{gr(s)}}{|\mathbb{E}|}\right)^2\right) =$$

$$4\left(\sum_{s\in S} \|f(s)\|_{\mathcal{H}}^2 gr(s)\right) \sum_{s\in S} \frac{gr(s)}{|\mathbb{E}|} = 4\|f\|_{C^1}^2.$$

□

Veamos algunas propiedades concernientes a d_1.

LEMA 2.5. *Si $f \in C^1$, entonces*

(1) $\langle f, f\rangle_{C^1} = \sum_{(s,t)\in\mathbb{E}} \langle f(s^{-1}t), f(s^{-1}t)\rangle$.

(2) $df(s,t) = -df(t,s)$.

(3) $df(s,t) = -\pi(s)df(s^{-1}, s^{-1}t) = \pi(t)df(t^{-1}, t^{-1}s)$.

(4) $\frac{1}{3}\langle df, df\rangle_{C^2} = \sum_{(s,t)\in\mathbb{E}} \langle df(s,t), \pi(s)f(s^{-1}t)\rangle$.

OBSERVACIÓN 2.3. *Notemos que si $(s,t) \in S$ entonces, por la simetría de S, $s^{-1}, t^{-1} \in S$ y por definición de $\mathbb{E}$, $s^{-1}t \in S$. Luego, $t^{-1}s \in S$ debido a a la simetría de S. En consecuencia están bien definidas todas las expresiones involucradas.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Primero, observemos que para cada $f \in C^1$, tenemos que $gr(s)$ es la cantidad de elementos $t \in S$ tal que $s^{-1}t \in S$. Luego, para cada $s \in S$ tenemos

$$\langle f(s), f(s)\rangle gr(s) = \sum_{u,v\in S: u^{-1}v=s} \langle f(u^{-1}v), f(u^{-1}v)\rangle.$$

Entonces, como $u^{-1}v \in S$ implica que $(u,v) \in \mathbb{E}$, reordenando la sumatoria obtenemos.

$$\langle f, f\rangle_{C^1} = \sum_{(s,t)\in\mathbb{E}} \langle f(s^{-1}t), f(s^{-1}t)\rangle.$$

(2)

$$df(s,t) = f(s) - f(t) + \pi(s)f(s^{-1}t) =$$

$$-(f(t) - f(s)) + \pi(s)\pi(s^{-1}s)f(t^{-1}s) = -df(t,s).$$

(3) Como $f(s^{-1}) = -\pi(s^{-1})f(s)$ tenemos que

$$df(s,t) = f(s) - f(t) + \pi(s)f(s^{-1}t) =$$

$$-\pi(s)\left(-\pi(s^{-1})f(s) + \pi(s^{-1})f(t) - f(s^{-1}t)\right) =$$

$$-\pi(s)\left(f(s^{-1}) - f(s^{-1}t) + \pi(s^{-1})f(ss^{-1}t)\right) =$$

$$-\pi(s)df(s^{-1}, s^{-1}t)).$$

Y como $df(s,t) = -df(t,s)$ entonces $df(t,s) = \pi(t)df(t^{-1}, t^{-1}s)$.

(4) Miremos la parte derecha de la igualdad

$$\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}} \langle df(s,t), \pi(s)f(s^{-1}t)\rangle =$$

$$\frac{1}{3}\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}} \Big(\langle df(s,t), \pi(s)f(s^{-1}t)\rangle + \langle -\pi(s)df(s^{-1}, s^{-1}t), \pi(s)f(s^{-1}t)\rangle +$$

$$\langle \pi(t)df(t^{-1},t^{-1}s),\pi(s)f(s^{-1}t)\rangle\Big) =$$

$$\frac{1}{3}\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\Big(\langle df(s,t),\pi(s)f(s^{-1}t)\rangle + \langle df(s^{-1},s^{-1}t),-f(s^{-1}t)\rangle +$$

$$\langle df(t^{-1},t^{-1}s,\pi(t^{-1}s)f(s^{-1}t)\rangle\Big).$$

Acá la primera igualdad vale por la parte (3) del lema, y la segunda igualdad se debe a que π es unitaria. Ahora, por (2) y la definición de f, tenemos que $df(t^{-1},t^{-1}s) = -df(t^{-1}s,t^{-1})$ y $\pi(t^{-1}s)f(s^{-1}t) = -f(t^{-1}s)$. Luego la igualdad anterior queda

$$\frac{1}{3}\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle df(s,t),\pi(s)f(s^{-1}t)\rangle + \frac{1}{3}\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}} -\langle df(s^{-1},s^{-1}t),f(s^{-1}t)\rangle +$$

$$\frac{1}{3}\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle d(t^{-1}s,t^{-1}),f(t^{-1}s)\rangle.$$

Afirmamos que $\mathbb{E} = \{(s,t)\in\mathbb{E} : (s^{-1},s^{-1}t)\in\mathbb{E}\} = \{(s,t)\in\mathbb{E} : (t^{-1}s,t^{-1})\in\mathbb{E}\}$.

Es claro que $\{(s,t)\in\mathbb{E} : (s^{-1},s^{-1}t)\in\mathbb{E}\}\subset\mathbb{E}$. Veamos la otra inclusión. Si $(s,t)\in\mathbb{E}$, entonces $s^{-1},s^{-1}t\in S$ y para ver que el par está en $\mathbb{E}$, observemos que $(s^{-1})^{-1}s^{-1}t = ss^{-1}t = t\in S$. Luego, vale la otra contención. La demostración del otro caso es análoga.

Luego, reordenando las sumas obtenemos,

$$\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle df(s^{-1},s^{-1}t),f(s^{-1}t)\rangle = \sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle df(s,t)f(t)\rangle,$$

$$\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle df(t^{-1}s,t^{-1}),f(t^{-1}s)\rangle = \sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle df(s,t),f(s)\rangle.$$

Entonces, reemplazando y agrupando todo en una sola suma queda

$$\frac{1}{3}\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle df(s,t),\pi(s)f(s^{-1}t)-f(t)+f(s)\rangle =$$

$$\frac{1}{3}\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle df(s,t),df(s,t)\rangle = \frac{1}{3}\langle df,df\rangle_{C^2}.$$

□

Sea $B^1 = \{f\in C^1 : d_1 f = 0\}$. A continuación estudiaremos el operador d_0^* restringido al espacio B^1.

Lema 2.6. *Sea $d_0^* : B^1\to C^0$. Entonces $\|d_0^*\|\leq\sqrt{3}$.*

Demostración. Primero, notemos que por (1) del lema 2.5 y dado que $d_0 f = 0$ tenemos

$$\langle f,f\rangle_{C^1} = \sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle f(s^{-1}t),f(s^{-1}t)\rangle = \sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle f(s)-f(t),f(s)-f(t)\rangle$$

$$\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\Big(\langle f(s),f(s)\rangle + \langle f(t),f(t)\rangle - 2Re\langle f(s),f(t)\rangle\Big) =$$

$$\sum_{s\in S}2\langle f(s),f(s)\rangle gr(s) - 2Re\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle f(s),f(t)\rangle =$$

$$2\langle f,f\rangle_{C^1} - 2Re\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle f(s),f(t)\rangle.$$

Luego, $2Re\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle f(s),f(t)\rangle = \langle f,f\rangle_{C^1}$. Veamos ahora la norma del operador

$$\|d_0^*f\|^2 = \left\|-2\sum_{s\in S} f(s)\frac{gr(s)}{|\mathbb{E}|}\right\|^2|\mathbb{E}| = \left\|2\sum_{s\in S} f(s)gr(s)\right\|^2\frac{1}{|\mathbb{E}|}.$$

Podemos reordenar la suma de a pares, agrupando cada vértice de salida con el correspondiente vértice de llegada de cada arista, quedando asi,

$$\left\|\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}(f(s)+f(t))\right\|^2\frac{1}{|\mathbb{E}|} \leq \sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\|f(s)+f(t)\|^2.$$

Donde la desigualdad se desprende de la desigualdad triangular, en primer lugar, y luego aplicando Hölder con $f_1(s,t) = \|f(s)+f(t)\|$ y $f_2(s,t) = 1$. Entonces,

$$\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\|f(s)+f(t)\|^2 \leq \sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle f(s)+f(t), f(s)+f(t)\rangle =$$

$$\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\Big(\|f(s)\|^2+\|f(t)\|^2+2Re\langle f(s),f(t)\rangle\Big) =$$

$$2\langle f,f\rangle_{C^1} + 2Re\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle f(s),f(t)\rangle = 3\langle f,f\rangle_{C^1}.$$

Ya que por lo visto al principio $2Re\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle f(s),f(t)\rangle = \langle f,f\rangle_{C^1}$. □

Veamos ahora el primer resultado que involucra fuertemente los operadores d_0 y d_1, definidos anteriormente, con la Propiedad (T).

Teorema 2.1. *Si existe $C>0$ tal que $\langle d_0d_0^*f,f\rangle \geq C\langle f,f\rangle$ $\forall f\in B^1$. Entonces $\frac{C}{\sqrt{3}}$ es una constante de Kazhdan para S.*

Demostración. Observemos que como $d_1d_0 = 0$, entonces $\forall v\in B^1, d_0d_0^*v\in B^1$. De ahora en más, solo notaremos d, d^* cuando tratemos operadores d_0, d_0^*. Primero veamos que bajo estas hipótesis, $dd^*: B^1\to B^1$ es inversible.

Primero, como dd^* es positiva, es diagonalizable y todos los autovalores son estrictamente mayores que 0. Luego, es inyectiva.

Si no fuera sobreyectiva, entonces existe $u\in B^1$ tal que $u\perp Im(dd^*)$. Luego, $0 = \langle u, dd^*v\rangle\forall v\in B^1$. En particular, tomando $v=u$, $0=\langle u,dd^*u\rangle \geq c\|u\|^2$. Luego, dd^* es sobreyectiva.

Sea $(dd^*)^{-1}$ su inversa. Afirmamos que $\|(dd^*)^{-1}\| \leq C^{-1}$. Si no, existiría un vector $w\in B^1$ unitario tal que $\|(dd^*)^{-1}w\| > C^{-1}$. Luego

$$C^{-1} \geq \|w\|\|(dd^*)^{-1}w\| = \|dd^*(dd^*)^{-1}w\|\|(dd^*)^{-1}w\| \geq \langle dd^*(dd^*)^{-1}w,(dd^*)^{-1}w\rangle \geq$$

$$C\langle (dd^*)^{-1}w,(dd^*)^{-1}w\rangle > C(C^{-1})^2\|w\|^2 = C^{-1}.$$

Lo cual es absurdo.

Sea $(\pi,\mathcal{H})$ representación unitaria que no tenga vectores invariantes y tal que exista un ϵ con $0<\epsilon<\frac{C}{\sqrt{3}}$ y exista un vector unitario $v\in\mathcal{H}_\pi$ tal que $\|\pi(s)v-v\|\leq\epsilon$ $\forall s\in S$. Veamos el comportamiento del operador d respecto al vector v.

$$\|dv\|^2 = \sum_{s\in S}\|dv(s)\|^2 gr(s) = \sum_{s\in S}\|\pi(s)v - v\|^2 gr(s) \leq \epsilon^2|\mathbb{E}|.$$

Luego, $\|dv\| \leq \epsilon\sqrt{|\mathbb{E}|}$. Sea $u = d^*(dd^*)^{-1}dv \in C^0$. Entonces tenemos que:

$$\|u\|_{C^0} \leq \|d^0\|\|(dd^*)^{-1}\|\|dv\| \leq \sqrt{3}C^{-1}\epsilon\sqrt{|\mathbb{E}|} < \sqrt{|\mathbb{E}|}.$$

En consecuencia $\|u\|_{\mathcal{H}} < 1$, pues $\|u\|_{C^0} = (\sum_{s\in S}\|u\|^2_{\mathcal{H}}gr(s))^{\frac{1}{2}}$.
Entonces $v - u \neq 0$. Pero reemplazando,

$$dv - du = dv - d(d^*(dd^*)^{-1}dv = dv - dv = 0.$$

Entonces, $\forall s \in S$,

$$0 = dv(s) - du(s) = \pi(s)(v-u) - (v-u).$$

Luego, $v - u$ es invariante por S. Entonces, es invariante por todo Γ. Absurdo, porque asumimos que $(\pi, \mathcal{H})$ no tenía vectores Γ invariantes. Luego, $\frac{C}{\sqrt{3}}$ es constante de Kazhdan para S. □

Volviendo al estudio de la Propiedad (T) y de su análisis espectral, hasta ahora solo nos hemos basado en el estudio de cierta derivación d_0. Para estudiar la relación entre el operador de Laplace de $\mathbb{G}_S$ y la propiedad (T), necesitaremos relacionar los operadores d_0, d_1 y Δ. El siguiente lema va en esa dirección.

Reccordemos que si $f \in \ell^2(\mathbb{G}_S)$, tenemos $Df(e) = f(s) - f(t)$ si $e = (s,t)$.

Lema 2.7. *Si $f \in C^1$, entonces $\frac{1}{3}\langle d_1 f, d_1 f\rangle_{C^2} = \langle Df, Df\rangle_{C^2} - \langle f, f\rangle_{C^1}$. Ademas, $2\langle\Delta f, f\rangle_{\mathbb{G}_S} = \langle Df, Df\rangle_{C^2}$.*

Demostración. Primero, $df(s,t) = f(s) - f(t) + \pi(s)f(s^{-1}t) = Df(s,t) + \pi(s)f(s^{-1}t)$. Entonces,

$$\langle Df, Df\rangle_{C^2} = \sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle df(s,t) - \pi(s)f(s^{-1}t), df(s,t) - \pi(s)f(s^{-1}t)\rangle =$$

$$\langle df, df\rangle + \sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle\pi(s)f(s^{-1}t), \pi s f(s^{-1}t)\rangle - 2Re\left(\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle df(s,t), \pi(s)f(s^{-1}t)\rangle\right).$$

Por el lema 2.5, apartado (4),

$$2Re\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}\langle df(s,t), \pi(s)f(s^{-1}t)\rangle = 2Re\left(\frac{1}{3}\langle df, df\rangle_{C^2}\right).$$

Entonces la igualdad anterior queda:

$$\langle df, df\rangle_{C^2} + \langle f, f\rangle_{C^1} - 2\left(\frac{1}{3}\langle df, df\rangle_{C^2}\right) = \frac{1}{3}\langle df, df\rangle_{C^2} + \langle f, f\rangle.$$

Esto demuestra la primera afirmación. Para probar que $2\langle\Delta f, f\rangle_{\mathbb{G}_S} = \langle Df, Df\rangle_{C^2}$, notemos que

$$2\langle\Delta f, f\rangle_{\mathbb{G}_S} = 2\sum_{s\in S}\langle\Delta f(s), f(s)\rangle gr(s) = 2\sum_{s\in S}\Delta f(s)\langle 1, f(s)\rangle gr(s).$$

Aplicando la fórmula de Green para el laplaciano, obtenemos que

$$2\sum_{s\in S}\Delta f(s)\langle 1, f(s)\rangle gr(s) = 2\left(\frac{1}{2}\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}}(f(s) - f(t))\langle 1, f(s) - f(t)\rangle\right) =$$

$$\sum_{(s,t)\in\mathbb{E}} \langle f(s)-f(t), f(s)-f(t)\rangle.$$

Lo cual concluye la demostración. $\square$

LEMA 2.8. *Para toda $f \in C^1$, $F(s) = f(s) + \frac{d_0^* f}{2}$ es ortogonal a las constantes.*

DEMOSTRACIÓN. Si U es una función constante en $\mathbb{G}_S$, entonces

$$\langle F, U\rangle = \sum_{s\in S}\left\langle f(s) + \frac{d_0^* f}{2}, U\right\rangle_{\mathcal{H}} gr(s) =$$

$$\sum_{s\in S}\langle f(s), U\rangle gr(s) + \sum_{s\in S}\left\langle \frac{d_0^* f}{2}, U\right\rangle gr(s) =$$

$$\left\langle \sum_{s\in S} f(s)gr(s), U\right\rangle + \left\langle \sum_{s\in S} gr(s)\frac{d_0^* f}{2}, U\right\rangle =$$

$$\left\langle \sum_{s\in S} f(s)gr(s), U\right\rangle + \left\langle \sum_{s\in S} -gr(s)\sum_{t\in S}\frac{gr(t)}{\mathbb{E}} f(t), U\right\rangle =$$

$$\left\langle \sum_{s\in S} f(s)gr(s), U\right\rangle - \left\langle \sum_{s\in S}\frac{gr(s)}{\mathbb{E}}\left(\sum_{t\in S} f(t)gr(t)\right), U\right\rangle =$$

$$\left\langle \sum_{s\in S} f(s)gr(s) - \sum_{t\in S} f(t)gr(t), U\right\rangle = 0.$$

$\square$

PROPOSICIÓN 2.3. *Para cada $f \in C^1$ tenemos que*

$$\frac{1}{3}\langle d_1 f, d_1 f\rangle + \frac{1}{2}\lambda_1(\mathbb{G}_S)\langle d_0^* f, d_0^* f\rangle \geq 2\left(\lambda_1(\mathbb{G}_S) - \frac{1}{2}\right)\langle f, f\rangle.$$

DEMOSTRACIÓN. Afirmamos que $\langle \Delta f, f\rangle_{C^1} = \left\langle \Delta\left(f + \frac{d_0^* f}{2}\right), f + \frac{d_0^* f}{2}\right\rangle$. Esto ocurre pues como $\frac{d_0^* f}{2}$ es constante $\Delta\left(f + \frac{d_0^* f}{2}\right) = \Delta f$. Y como Δ es positivo tenemos que

$$\left\langle \Delta f, f + \frac{d_0^* f}{2}\right\rangle = \left\langle f, \Delta\left(f + \frac{d_0^* f}{2}\right)\right\rangle = \langle f, \Delta f\rangle.$$

Ahora, por el lema 2.8, $f + \frac{d_0^* f}{2}$ esta en el complemento ortogonal a las constantes, y como $\lambda_1(\mathbb{G}_S)$ es autovalor no nulo, entonces se tiene que

$$\left\langle \Delta\left(f + \frac{d_0^* f}{2}\right), f + \frac{d_0^* f}{2}\right\rangle \geq \lambda_1(\mathbb{G}_S)\left\langle f + \frac{d_0^* f}{2}, f + \frac{d_0^* f}{2}\right\rangle =$$

$$\lambda_1(\mathbb{G}_S)\left\langle f, f + \frac{d_0^* f}{2}\right\rangle + \lambda_1(\mathbb{G}_S)\left\langle \frac{d_0^* f}{2}, f + \frac{d_0^* f}{2}\right\rangle =$$

$$\lambda_1(\mathbb{G}_S)\langle f, f\rangle + \lambda_1(\mathbb{G}_S)\left\langle f, \frac{d_0^* f}{2}\right\rangle =$$

$$\lambda_1(\mathbb{G}_S)\langle f, f\rangle + \lambda_1(\mathbb{G}_S)\sum_{s\in S}\left\langle f, \frac{d_0^* f}{2}\right\rangle_{\mathcal{H}} gr(s) =$$

$$\lambda_1(\mathbb{G}_S)\langle f, f\rangle + \frac{\lambda_1(\mathbb{G}_S)}{2}\left\langle \sum_{s\in S} f(s)\frac{gr(s)}{|\mathbb{E}|}, d_0^* f\right\rangle |\mathbb{E}| =$$

$$\lambda_1(\mathbb{G}_S)\langle f, f\rangle - \frac{\lambda_1(\mathbb{G}_S)}{4}\langle d_0^* f, d_0^* f\rangle_{C^0}.$$

Donde la última igualdad se desprende de la definición de $d_0^* f$. Entonces,

$$2\lambda_1(\mathbb{G}_S)\langle f, f\rangle_{C^1} - \langle f, f\rangle_{C^1} \leq$$

$$2\langle \Delta f, f\rangle_{C^1} + \frac{\lambda_1(\mathbb{G}_S)}{2}\langle d_0^* f, d_0^* f\rangle_{C^0} - \langle f, f\rangle_{C^1}.$$

Por el lema 2.7 tenemos,

$$\langle Df, Df\rangle_{C^2} - \langle f, f\rangle_{C^1} + \frac{\lambda_1(\mathbb{G}_S)}{2}\langle d_0^* f, d_0^* f\rangle_{C^0} =$$

$$\frac{1}{3}\langle d_1 f, d_1 f\rangle_{C^2} + \frac{\lambda_1(\mathbb{G}_S)}{2}\langle d_0^* f, d_0^* f\rangle_{C^0}.$$

De lo que concluímos que

$$\frac{1}{3}\langle d_1 f, d_1 f\rangle_{C^2} + \frac{\lambda_1(\mathbb{G}_S)}{2}\langle d_0^* f, d_0^* f\rangle_{C^0} \geq \left(2\lambda_1(\mathbb{G}_S) - \frac{1}{2}\right)\langle f, f\rangle_{C^1}.$$

□

Finalmente, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 2.2. *Sea Γ grupo discreto. Sea S un conjunto de generadores finito, simétrico tal que $e \notin S$. Si $\mathbb{G}_S$ es conexo y $\lambda_1(\mathbb{G}_S) > \frac{1}{2}$, entonces Γ tiene Propiedad (T) y $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2 - \frac{1}{\lambda_1(\mathbb{G}_S)}\right)$ es una constante de Kazhdan para S.*

DEMOSTRACIÓN. Si $f \in B^1$, entonces $d_1 f = 0$. Tenemos entonces que

$$\frac{\lambda_1(\mathbb{G}_S)}{2}\langle d_0^* f, d_0^* f\rangle_{C^0} \geq \left(2\lambda_1(\mathbb{G}_S) - \frac{1}{2}\right)\langle f, f\rangle_{C^1}.$$

Luego, por el Teorema 2.1, $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2 - \frac{1}{\lambda_1(\mathbb{G}_S)}\right)$ es constante de Kazhdan para S. □

La condición $\lambda_1(\mathbb{G}_S) > \frac{1}{2}$ no se puede mejorar, en el sentido de que puede pasar que exista un grupo Γ sin propiedad (T) con un subconjunto generador S tal que $\lambda_1(\mathbb{G}_S) = \frac{1}{2}$ pero Γ no tenga propiedad (T) como lo ilustra el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2.1. *Consideremos $\mathbb{Z}$ el grupo de los enteros y $S = \{\pm 1, \pm 2\}$. Por ser un grupo abeliano no compacto, $\mathbb{Z}$ no posee la propiedad (T).*

El grafo $\mathbb{G}_S$ posee 4 vértices con aristas $\{(-2,-1),(-1,1)(1,2)\}$. Consideramos $\mathbb{B} = \{\delta_s\}_{s\in S}$, luego resulta base de $\ell^2(\mathbb{G}_S)$ (isomorfo a $\mathbb{C}^4$). La matriz de Δ en $\mathbb{B}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, el polinomio característico de Δ queda

$$P(x) = \left((x-1)^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-2\right).$$

Por lo tanto $\lambda_1(\mathbb{G}_S) = \frac{1}{2}$.

3. $\tilde{A}_2$-Grupos

A continuación, daremos un ejemplo de aplicación del criterio anteriormente visto, que aparece en la sección 5 de [**26**]. Se trata de grupos que actúan sobre ciertos complejos simpliciales. Comenzaremos dando algunas definiciones previas y luego daremos el resultado principal.

Definición 2.5. *Un plano proyectivo es un conjunto de puntos $\mathcal{P}$ y rectas $\mathcal{L}$ junto con una relación de incidencia entre puntos y rectas, que notaremos $\sim$, tal que:*

(1) *dados $p, q \in \mathcal{P}$, existe una única recta $L \in \mathcal{L}$ incidente a p y q,*

(2) *Dadas $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, existe un único p que sea incidente a ambas rectas,*

(3) *Cada recta es incidente con al menos 3 puntos, y cada punto es incidente con al menos 3 rectas.*

A un plano proyectivo lo notamos $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$.

Ejemplo 2.2. *Sea $\mathbb{F}_q$ un cuerpo finito de q elementos. El plano proyectivo asociado a $\mathbb{F}_q$ es el conjunto $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ en donde:*

$\mathcal{P} = \{$*subespacios de dimensión 1 de* $\mathbb{F}_q^3\}$,

$\mathcal{L} = \{$*subespacios de dimensión 2 de* $\mathbb{F}_q^3\}$.

La relación de incidencia está dada por la contención.

Como $\mathbb{F}_q^3$ es un conjunto finito, los conjuntos $\mathcal{P}, \mathcal{L}$ son finitos y vale que tienen el mismo cardinal. Además, cada punto es incidente a exactamente $q+1$ rectas y cada recta es incidente a exactamente $q+1$ puntos.

La última propiedad es inherente a los planos proyectivos y no solo a aquellos planos proyectivos dados asociados a cuerpos finitos. En un plano proyectivo $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ existe un único $q \in \mathbb{N}$, $q > 2$ tal que todo punto p es incidente a exactamente $q+1$ rectas y cada recta L es incidente a exactamente $q+1$ puntos. Al número q se lo llama el orden del plano proyectivo.

Definición 2.6. *Dado $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, definimos el grafo de incidencia del plano proyectivo $\mathbb{G}'$ de la siguiente manera. El conjunto de vértices está dado por $\mathcal{P} \sqcup \mathcal{L}$, y las aristas son las dadas por la relación de incidencia, es decir, $(p, L), (L, p) \in \mathbb{E}$ si y sólo si $p \sim L$.*

Observación 2.4. *$\mathbb{G}'$ es un grafo regular, de grado $q+1$ y bipartito.*

Definición 2.7. *Sea $\mathbb{X}$ un 2-complejo simplicial. Si v es un vértice de $\mathbb{X}$ definimos el link de v, notado $Lk(v, \mathbb{X})$, al grafo cuyos vértices son las 1-celdas de $\mathbb{X}$ que contienen a v, y cuyas aristas están dadas por aquellas 1-celdas que son bordes de una misma 2-celda.*

Definición 2.8. *Un $\tilde{A}_2$-building es un 2-complejo simplicial conexo contráctil $\mathbb{X}$ tal que el link de cada vértice tiene estructura de grafo de incidencia de un plano proyectivo finito.*

En un $\tilde{A}_2$-building no pueden haber 2 vértices cuyos links tengan estructuras de plano proyectivos distintos.

Definición 2.9. *Un grupo discreto Γ se dice un $\tilde{A}_2$-grupo si actúa libre y transitivamente en los vértices de un $\tilde{A}_2$-building y que induce una permutación cíclica de los vértices de cada 2-celda.*

Vale que un $\tilde{A}_2$-grupo admite una presentación $\Gamma = \langle S|R\rangle$ tal que, el grafo $\mathbb{G}_S$ sea el grafo de incidencia de un plano proyectivo. El siguiente resultado corresponde a Feit y Higman [**5**] da un cómputo explícito de los autovalores del laplaciano para el grafo de incidencia de un plano proyectivo.

Proposición 2.4. *Sea $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ un plano proyectivo finito de orden q. Entonces el conjunto de autova- lores del operador de Laplace del grafo de incidencia de $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es* $\left\{0, 1-\frac{\sqrt{q}}{q+1}, 1+\frac{\sqrt{q}}{q+1}, 2\right\}$.

Corolario 2.2. *Un $\tilde{A}_2$-grupo tiene propiedad (T).*

Este ejemplo tiene mucha importancia a nivel histórico. En 1994 Cartwright Młotkowski y Steger en [**2**] mostraron que los $\tilde{A}_2$-grupos tiene propiedad (T), utilizando otros argumentos. Pero la principal razón por la cual son importantes estos grupos es que fueron los primeros ejemplos de grupos con propiedad (T) sin utilizar la propiedad de retículo en grupos de Lie. Además, en la misma demostración los autores consiguieron constantes de Kazhdan óptimas para una familia de generadores.

CAPÍTULO 3

Criterio Espectral para grupos triangulares

En el capítulo que iniciamos a continuación, estudiaremos el segundo criterio espectral enunciado por Zuk en [**26**]. Este criterio se aplica a una cierta familia de grupos finitamente generados que tienen por conjunto de relaciones, palabras de longitud 3. Si bien en un principio parece una condición muy débil, veremos que tiene fuertes aplicaciones sobre todo a la teoría de grupos aleatorios.

Todo el capítulo esta dedicado a probar que un grupo que posee cierta presentación, tiene propiedad (T). Para eso, definiremos un criterio espectral similar al enunciado en el capítulo anterior, en este caso con grafos que son dirigidos y que pueden tener aristas múltiples. Comenzaremos dando algunas propiedades de grafos dirigidos y del laplaciano en dicho clase de grafos.

1. Criterio espectral asociado a presentaciones ternarias de grupos

Sea $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, y sea $w = a_1 a_2 \dots a_l$ una palabra en $S \cup S^{-1}$. Decimos que la palabra es *reducida* si $a_i \neq a_{i+1}^{-1}$ para todo i. Diremos que la palabra es *cíclicamente reducida* si, además, $a_l \neq a_1^{-1}$. Además, si w es una palabra reducida, l es su longitud.

A lo largo de este apartado, $\Gamma = \langle S | R \rangle$ es un grupo finitamente generado y finitamente presentado, en donde toda $w \in R$ es una palabra cíclicamente reducida de longitud 3 y el conjunto R tiene cardinal m. A partir de un grupo Γ con con tal presentación, definimos el siguente grafo:

Definición 3.1. *Sea $\mathbb{G}' = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$, donde el conjunto de vértices $\mathbb{V} = S \cup S^{-1}$ y el conjunto de aristas $\mathbb{E}$ esta conformado de la siguiente manera. Si $R_i = xyz$ es una relación en R, entonces $(x^{-1}, y), (y^{-1}, z), (z^{-1}, x) \in \mathbb{E}$. Admitimos aristas múltiples.*

Observación 3.1.

(1) *$\mathbb{G}'$ es un grafo dirigido y en consecuencia, puede ocurrir que esté una arista e y no $\overline{e}$.*

(2) *Como cada R_i es una palabra reducida, $\mathbb{G}'$ no tiene aristas que comiencen y terminen en el mismo vértice.*

Dado que trabajaremos con grafos dirigidos, es conveniente introducir la siguiente notación. Si tenemos una arista $e = (s, t)$, notamos como $e^- = s$, llamado origen, y notamos $e^+ = t$, llamado rango.

Dado un vértice s, entendemos por el grado de s a la cantidad de aristas $e \in \mathbb{E}$ que tiene por origen o rango a s. Se define entonces el grado del grafo como $DEG(\mathbb{G}') = \sum_{s \in \mathbb{V}} gr(s)$.

A continuación defniniremos los espacios de Hilbert $\mathcal{E}^0$ y $\mathcal{E}^1$, que presentan un comportamiento similar a los definidos en el capítulo 2. También definiremos la derivación D para este tipo de grafos.

- $\mathcal{E}^0 = \{f : \mathbb{V} \to \mathbb{C} : \sum_{s \in \mathbb{V}} |f(s)|^2 gr(s) < \infty\}$,

  $\langle f, g \rangle_{\mathbb{V}} = \sum_{s \in \mathbb{V}} f(s)\overline{g(s)} gr(s)$.
- $\mathcal{E}^1 = \{F : \mathbb{E} \to \mathbb{C} : \sum_{e \in \mathbb{E}} |F(e)|^2 < \infty\}$,

  $\langle F, G \rangle_{\mathbb{E}} = \sum_{e \in \mathbb{E}} F(e)\overline{G(e)}$.

$D : \mathcal{E}^0 \to \mathcal{E}^1$, $Df(e) = f(s) - f(t)$ si $e = (s,t)$.

A continuación definimos el operador de Laplace asociado a esta familia de grafos.

DEFINICIÓN 3.2. *Si* $f \in \mathcal{E}^0$*, definimos* $\Delta(f)(s) = \frac{1}{gr(s)} \sum_{t\sim s} (f(s) - f(t))$ *donde* $t \sim s$ *significa que existe una arista* $e = (s,t)$ *o existe una arista* $e = (t,s)$*. En el caso de que las aristas sean múltiples, sumamos la expresión tantas veces como la multiplicidad de* e*.*

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea* D *la derivación anterior. Entonces,* $\Delta = D^*D$*.*

DEMOSTRACIÓN. Necesitaremos primero una expresión concreta de la adjunta de D. Para eso, dado un vértice s y una arista e, definimos la siguiente función auxiliar:

$$\gamma(s,e) = \begin{cases} 1 \text{ si } s = e^- \\ -1 \text{ si } s = e^+ \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Entonces, $Df(e) = \sum_{s\in\mathbb{V}} \gamma(s,e)f(s)$
Entonces, si $g \in \mathbb{E}$, tenemos que:

$$\langle Df, g\rangle_{\mathbb{E}} = \sum_{e\in\mathbb{E}} Df(e)\overline{g(e)} =$$

$$\sum_{e\in\mathbb{E}}\sum_{s\in\mathbb{V}} \gamma(s,e)f(s)\overline{g(e)} = \sum_{s\in\mathbb{V}}\sum_{e\in\mathbb{E}} \gamma(s,e)f(s)\overline{g(e)} =$$

$$\sum_{s\in\mathbb{V}} f(s)gr(s)\left(\frac{1}{gr(s)}\sum_{e\in\mathbb{E}}\gamma(s,e)\overline{g(e)}\right) =$$

$$\sum_{s\in\mathbb{V}} f(s)gr(s)\overline{\left(\frac{1}{gr(s)}\sum_{e\in\mathbb{E}}\gamma(s,e)g(e)\right)}.$$

Entonces, si $D^*(g)(s) = \frac{1}{gr(s)} \sum\limits_{e\in\mathbb{E}} \gamma(s,e)g(e)$, entonces la suma anterior queda

$$\sum_{s\in\mathbb{V}} f(s)gr(s)\overline{D^*g(s)} = \langle f, D^*g\rangle_{\mathbb{G}'}.$$

Demostremos ahora el lema:

$$D^*D(f)(s) = \frac{1}{gr(s)}\sum_{e\in\mathbb{E}}\gamma(s,e)Df(e) = \frac{1}{gr(s)}\sum_{e\in\mathbb{E}}\gamma(s,e)(f(e^-) - f(e^+)).$$

Por la definición de γ tenemos que

$$\frac{1}{gr(s)}\left(\sum_{e:e^-=s} f(s) - f(e^+) + \sum_{e:e^+=s} -(f(e^-) - f(s))\right) =$$

$$\frac{1}{gr(s)}\sum_{s\sim t} f(s) - f(t) = \Delta(f)(s).$$

Lo que concluye la demostración. $\square$

Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de Γ. Definiremos un operador auxiliar que nos permitirá demostrar el teorema principal de este capítulo. Sea $M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$,

$$M(v) = \frac{1}{DEG(\mathbb{G}')} \sum_{s \in \mathbb{V}} gr(s)\pi(s)v.$$

Es claro que M es un operador lineal y continuo. Además, cumple el siguiente lema.

LEMA 3.1. *Si π posee vectores casi invariantes pero no tiene vectores invariantes por Γ, entonces, para todo $\epsilon > 0$ existen $\lambda > 0$, y vectores u, u_λ tales que:*

$$Mu = \lambda u + u_\lambda, \|u_\lambda\| < \frac{1}{2}(1-\lambda) \text{ y } 1 - \epsilon < \lambda < 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que no existen tales vectores y tales números, entonces existe un ϵ_0 tal que $\forall \lambda, 1 > \lambda > 1 - \epsilon_0$ y $\forall u, u_\lambda \in \mathcal{H}$ tales que $Mu = \lambda u + u_\lambda$, entonces $\|u_\lambda\| \geq \frac{1}{2}(1-\lambda)$. Como la representación tiene vectores casi invariantes, para todo $\delta > 0$ existe un u tal que $\delta\|u\| \geq \|\pi(s)u - u\|, \forall s \in V$. Sea $s_0 \in V$ tal que $\|\pi(s_0)u - u\|$ sea máxima entre los $s \in V$. Entonces,

$$\delta\|u\| \geq \|\pi(s_0)u - u\| \geq \|Mu - u\|.$$

Si llamo $w = Mu - u$, entonces $u_\lambda = Mu - \lambda u = w - (1-\lambda)u$. Luego

$$\|Mu - u\| = \|u_\lambda + (1-\lambda)u\| \geq |\|u_\lambda\| - (1-\lambda)\|u\|| \geq$$

$$\left| \frac{1}{2}(1-\lambda)\|u\| - (1-\lambda)\|u\| \right| = \frac{1-\lambda}{2}\|u\|.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que u es unitario. Entonces, haciendo λ tender a $1-\epsilon_0$, obtenemos que $\delta \geq \frac{\epsilon_0}{2}$, lo que resulta absurdo porque a δ lo puedo tomar tan chico como quiero, por tener vectores casi invariantes. □

Sean ϵ, λ, u y u_λ como en el lema 3.1. Definimos $f : \mathbb{V} \to \mathcal{H}$,

$$f(s_i^{\pm}) = \pi(s_i^{\pm})u - u.$$

Los siguientes tres lemas vinculan a f con el operador M y los valores ϵ y λ.

LEMA 3.2. *La función f definida previamente cumple que $\langle \Delta f, f \rangle_{\mathbb{V}} = \frac{1}{2}\langle f, f \rangle_{\mathbb{V}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición del grafo $\mathbb{G}'$ y como R es un conjunto de palabras w de longitud 3 y de cardinal m, tenemos que

$$\langle \Delta f, f \rangle_{\mathbb{V}} = \langle D^* Df, f \rangle_{\mathbb{V}} = \langle Df, Df \rangle_{\mathbb{E}} = \sum_{e=(s,t) \in \mathbb{E}} \langle f(s) - f(t), f(s) - f(t) \rangle =$$

$$= \sum_{i=1; R_i = x_i y_i z_i}^{m} \Big(\langle f(x_i^{-1}) - f(y_i), f(x_i^{-1}) - f(y_i) \rangle +$$

$$\langle f(y_i^{-1}) - f(z_i), f(y_i^{-1}) - f(z_i) \rangle + \langle f(z_i^{-1}) - f(x_i), f(z_i^{-1}) - f(x_i) \rangle \Big).$$

Por como definimos f, esta expresión es igual a

$$\sum_{i=1; R_i = x_i y_i z_i}^{m} \Big(\langle \pi(x_i^{-1})u - \pi(y_i)u, \pi(x_i^{-1})u - \pi(y_i)u \rangle$$

$$\langle \pi(y_i^{-1})u - \pi(z_i)u, \pi(y_i^{-1})u - \pi(z_i)u \rangle + \langle \pi(z_i^{-1})u - \pi(x_i)u, \pi(z_i^{-1})u - \pi(x_i)u \rangle \Big) =$$

$$\sum_{i=1;R_i=x_iy_iz_i}^{m} \Big(\langle \pi(y_i^{-1}x_i^{-1})u-u, \pi(y_i^{-1}x_i^{-1})u-u\rangle +$$

$$\langle \pi(z_i^{-1}y_i^{-1})u-u, \pi(z_i^{-1}y_i^{-1})u-u\rangle + \langle \pi(x_i^{-1}z_i^{-1})u-u, \pi(x_i^{-1}z_i^{-1})u-u\rangle\Big).$$

Ahora, como $xyz = Id$, entonces $y^{-1}x^{-1} = z$, lo mismo ocurre con x y con y, entonces la igualdad queda

$$\sum_{i=1;R_i=x_iy_iz_i}^{m} \Big(\langle \pi(z_i)u-u, \pi(z_i)u-u\rangle + \langle \pi(y_i)u-u, \pi(y_i)u-u\rangle + \langle \pi(x_i)u-u, \pi(x_i)u-u\rangle\Big) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \Big(\langle f(z_i), f(z_i)\rangle + \langle f(y_i), f(y_i)\rangle + \langle f(x_i), f(x_i)\rangle\Big).$$

Ahora, $\langle \pi(z_i)u-u, \pi(z_i)u-u\rangle = \langle u-\pi(z_i^{-1})u, u-\pi(z_i^{-1})u\rangle$, podemos reescribir la igualdad anterior de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \Big(\langle f(z_i), f(z_i)\rangle + \langle f(z_i^{-1}), f(z_i^{-1})\rangle +$$

$$\langle f(y_i), f(y_i)\rangle + \langle f(y_i^{-1}), f(y_i^{-1})\rangle + \langle f(x_i), f(x_i)\rangle + \langle f(x_i^{-1}), f(x_i^{-1})\rangle\Big) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{s\in\mathbb{V}} \langle f(s), f(s)\rangle gr(s) = \frac{1}{2}\langle f, f\rangle_{\mathbb{V}}.$$

Esto último vale ya que cada término $\langle f(s), f(s)\rangle$ aparece tantas veces como aristas tengan a s como origen o rango, o sea, tantas veces como el grado de s. $\square$

LEMA 3.3. *Sea* $\overline{1} = \frac{1}{DEG(\mathbb{G}')}$. *Entonces*

$$|\langle f, \overline{1}\rangle_{\mathbb{V}}| \geq \frac{1}{2}DEG(\mathbb{G}')|1-\lambda|\|u\|.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\big|\langle f, \overline{1}\rangle_{\mathbb{V}}\big| = \left|\sum_{s\in V} \langle \pi(s)u-u, \overline{1}\rangle gr(s)\right| = \left|\sum_{s\in V} \langle \pi(s)gr(s)u - gr(s)u, \overline{1}\rangle\right| =$$

$$\left|DEG(\mathbb{G}')\left\langle \sum_{s\in V} \frac{gr(s)}{DEG(\mathbb{G}')}\pi(s)u-u, \overline{1}\right\rangle\right|.$$

Por definición de M y por las propiedades que cumplen u y u_λ tenemos que,

$$|DEG(\mathbb{G}')\langle Mu-u, \overline{1}\rangle| = |DEG(\mathbb{G}')\langle (1-\lambda)u-u_\lambda, \overline{1}\rangle| \leq$$

$$DEG(\mathbb{G}')\|(1-\lambda)u-u_\lambda\| \leq$$

$$DEG(\mathbb{G}')(|1-\lambda|\|u\| + \|u_\lambda\|) \leq \frac{3}{2}DEG(\mathbb{G}')|1-\lambda|\|u\|.$$

En este caso la primer desigualdad se desprende de Cauchy-Schwartz, la segunda es desigualdad triangular, y la tercera es por las propiedades que cumplen u y u_λ. $\square$

Lema 3.4. *La norma de f cumple la siguiente desigualdad:*

$$\|f\|_{\mathbb{G}'} \geq \frac{2}{3}\left|\langle f, \overline{1}\rangle\right| \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{DEG(\mathbb{G}')}}.$$

Demostración.

$$\|f\|^2_{\mathbb{G}'} = \sum_{s\in V}\langle f(s), f(s)\rangle gr(s) = \sum_{s\in V}\langle \pi(s)u - u, \pi(s)u - u\rangle gr(s) =$$

$$\sum_{s\in V}\Big(\langle \pi(s)u, \pi(s)u\rangle + \langle u,u\rangle - 2Re(\langle u, \pi(s)u\rangle)\Big) gr(s) =$$

$$Re\left(\sum_{s\in V} 2\langle u,u\rangle gr(s) - 2\langle u, \pi(s)u\rangle gr(s)\right).$$

Por definición de M, tenemos que

$$2Re\Big(\langle u, u - Mu\rangle DEG(\mathbb{G}')\Big) = 2Re\Big(\langle u, (1-\lambda)u + u_\lambda\rangle DEG(\mathbb{G}')\Big) =$$

$$2(1-\lambda)\langle u,u\rangle DEG(\mathbb{G}') + 2Re(\langle u, u_\lambda\rangle DEG(\mathbb{G}')) \geq$$

$$2(1-\lambda)\langle u,u\rangle DEG(\mathbb{G}') - (1-\lambda)\langle u,u\rangle DEG(\mathbb{G}').$$

Donde la última desigualdad se desprende de que $|\langle u, u_\lambda\rangle| \leq \|u\|\|u_\lambda\| \leq \frac{1}{2}(1-\lambda)\|u\|^2$, entonces por lo visto anteriormente obtenemos que

$$\|f\|_{\mathbb{G}'} \geq \sqrt{1-\lambda}\sqrt{DEG(\mathbb{G}')}\|u\| \geq \sqrt{1-\lambda}\sqrt{DEG(\mathbb{G}')}\frac{|\langle f, \overline{1}\rangle|}{DEG(\mathbb{G}')\frac{3}{2}(1-\lambda)} =$$

$$\frac{2}{3}\left|\langle f, \overline{1}\rangle\right| \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{DEG(\mathbb{G}')}}.$$

En donde la última desigualdad, en este caso, se desprende del lema previo. Esto concluye la demostación. □

Estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema principal de este capítulo.

Teorema 3.1. *Sea $\Gamma = \langle s_1, \ldots, s_n | R_1, \ldots, R_m\rangle$, donde cada relación R_i es una palabra reducida de longitud 3. Sea $\mathbb{G}'$ el grafo asociado a esta presentación. Si $\mathbb{G}'$ es conexo y $\lambda_1(\mathbb{G}') > \frac{1}{2}$, entonces Γ tiene propiedad (T).*

Demostración. Supongamos que existe una representación $(\pi, \mathcal{H})$ de Γ que tenga vectores casi invariantes pero sin vectores invariantes. Veamos que, si el grafo es conexo, entonces $\lambda_1(\mathbb{G}') \leq \frac{1}{2}$.

Primero, como por hipótesis el grafo es conexo, entonces $f - \langle f, \overline{1}\rangle\overline{1}$ es ortogonal a las constantes. Luego,

$$\Big\langle \Delta\Big(f - \langle f, \overline{1}\rangle 1\Big), f - \langle f, \overline{1}\rangle 1\Big\rangle \geq \lambda_1(\mathbb{G}')\Big\langle f - \langle f, \overline{1}\rangle 1, f - \langle f, \overline{1}\rangle 1\Big\rangle.$$

Donde 1 representa la función constantemente 1 en el grafo.

Como $\Delta\Big(f - \langle f, \overline{1}\rangle 1\Big) = \Delta(f) - \Delta\Big(\langle f, \overline{1}\rangle 1\Big) = \Delta(f)$, tenemos que la parte izquierda de la desigualdad queda

$$\Big\langle \Delta\Big(f - \langle f, \overline{1}\rangle 1\Big), f - \langle f, \overline{1}\rangle 1\Big\rangle = \Big\langle \Delta f, f - \langle f, \overline{1}\rangle 1\Big\rangle.$$

Y como Δ es positivo, en particular es autoadjunto, en consecuencia la igualdad queda

$$\Big\langle \Delta f, f-\langle f,\bar{1}\rangle 1\Big\rangle = \Big\langle f, \Delta\Big(f-\langle f,\bar{1}\rangle 1\Big)\Big\rangle = \langle f,\Delta f\rangle = \langle \Delta f, f\rangle.$$

En consecuencia,

$$\lambda_1(\mathbb{G}') \leq \frac{\langle \Delta f, f\rangle}{\Big\langle f-\langle f,\bar{1}\rangle 1, f-\langle f,\bar{1}\rangle 1\Big\rangle}. \tag{3.1}$$

Acotemos el denominador.

$$\Big\langle f-\langle f,\bar{1}\rangle 1, f-\langle f,\bar{1}\rangle 1\Big\rangle = \Big\langle f-\frac{\langle f,1\rangle}{DEG(\mathbb{G}')}1, f-\frac{\langle f,1\rangle}{DEG(\mathbb{G}')}1\Big\rangle =$$

$$\langle f,f\rangle - \frac{2}{DEG(\mathbb{G}')}(\langle f,1\rangle)^2 + \frac{1}{DEG(\mathbb{G}')^2}(\langle f,1\rangle)^2\langle 1,1\rangle = \langle f,f\rangle - \frac{1}{DEG(\mathbb{G}')}\langle f,1\rangle,$$

ya que el producto interno es en el espacio de funciones del grafo, y ahi vale que $\langle 1,1\rangle = DEG(\mathbb{G}')$. Además, podemos reescribir $\frac{1}{DEG(\mathbb{G}')}\langle f,1\rangle$ de la siguiente manera:

$$\frac{1}{DEG(\mathbb{G}')^2}\langle f,1\rangle DEG(\mathbb{G}') = \frac{1}{DEG(\mathbb{G}')^2}\sum_{s\in\mathbb{V}}\langle f,1\rangle gr(s) = \left\|\frac{\langle f,1\rangle}{DEG(\mathbb{G}')}\right\|^2.$$

En consecuencia, la desigualdad 3.1 queda

$$\lambda_1(\mathbb{G}') \leq \frac{\langle \Delta f, f\rangle}{\|f\|^2 - \left\|\frac{\langle f,1\rangle}{DEG(\mathbb{G}')}\right\|^2} \leq \frac{\langle \Delta f, f\rangle}{\left(\|f\| - \left\|\langle f,\bar{1}\rangle\right\|\right)^2}.$$

donde la última desigualdad de desprende de que si $a,b\in\mathbb{R} : a,b>0$ y supongamos $a>b$, entonces $a^2-b^2 > (a-b)^2$. Notemos que por la desigualdad de Bessel, $\|f\| \geq \left\|\langle f,\bar{1}\rangle\right\|$.

Luego, la desigualdad queda,

$$\lambda_1(\mathbb{G}') \leq \frac{\langle \Delta f, f\rangle}{\left(\|f\| - \left\|\langle f,\bar{1}\rangle\right\|\right)^2} = \frac{\langle \Delta f, f\rangle}{\left(\|f\| - |\langle f,\bar{1}\rangle|\right)^2}.$$

Recordemos que por el lema 3.2, $\langle \Delta f, f\rangle = \frac{1}{2}\langle f,f\rangle$ y por lema 3.4, $|\langle f,\bar{1}\rangle| \leq \|f\|\frac{3}{2}\sqrt{(1-\lambda)DEG(\mathbb{G}')}$. Entonces

$$\lambda_1(\mathbb{G}') \leq \frac{\frac{1}{2}\langle f,f\rangle}{\left(\|f\| - \frac{3}{2}\sqrt{(1-\lambda)DEG(\mathbb{G}')}\|f\|\right)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}\sqrt{(1-\lambda)DEG(\mathbb{G}')}\right)^2} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\sqrt{\epsilon}\frac{3}{2}\sqrt{DEG(\mathbb{G}')}\right)^2}.$$

Haciendo ϵ tender a cero, tenemos que $\lambda_1(\mathbb{G}') \leq \frac{1}{2}$, lo que contradice lo que asumimos. □

Dado $\mathbb{G}'$ como en la defineión 3.1, definimos los subgrafos $\mathbb{G}_1^{'}$, $\mathbb{G}_2^{'}$ y $\mathbb{G}_3^{'}$ de la siguiente manera. Si $\mathbb{G}_i^{'} = (\mathbb{V}_i, \mathbb{E}_i)$, los vértices de cada grafo son los elementos $\mathbb{V} = S\cup S^{-1}$. Y para cada palabra $w = xyz$, la arista $(x^{-1},y)\in\mathbb{E}_1$, $(y^{-1},z)\in\mathbb{E}_2$ y $(z^{-1},x)\in\mathbb{E}_3$. Notemos que, si $\mathbb{E}'$ es el conjunto de aristas de $\mathbb{G}$, entonces $\cup_{1,2,3}\mathbb{E}_i = \mathbb{E}'$.

El siguiente lema tiene principalmente dos aplicaciones. En primer lugar, brinda una manera de mostrar que el grafo $\mathbb{G}'$ tiene el primer autovalor no nulo mayor a $\frac{1}{2}$. Pero además, sirve como nexo entre los grupos aleatorios en un cierto modelo (que definiremos en el siguiente capítulo) y la teoría espectral de grafos aleatorios para cierta familia de grafos. Esto nos permitirá ver, más adelante, que muchos grupos tienen propiedad (T).

LEMA 3.5. *Sean* $\mathbb{G}_i^{'}$, $i = 1, 2, 3$ *como antes. Si* $\lambda_1(\mathbb{G}_i^{'}) > \frac{1}{2} \forall i$. *Entonces* $\lambda_1(\mathbb{G}') > \frac{1}{2}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\lambda_1(\mathbb{G}') \leq \frac{1}{2}$. Entonces existe una función $f \in \ell^2(\mathbb{G}')$ tal que $\langle f, 1\rangle = 0$ y $\langle \Delta f, f\rangle \leq \frac{1}{2}\langle f, f\rangle$.

Sean, para $i = 1, 2, 3$, $f_i = f|_{\mathbb{G}_i^{'}}$ (notemos que lo único que cambia es el grado de cada vértice, pues el valor de cada f_i es el mismo). Luego

$$\sum_{i=1}^{3} \langle \Delta f_i, f_i\rangle = \sum_{i=1}^{3} \langle D f_i, D f_i\rangle = \langle \Delta f, f\rangle \leq \frac{1}{2}\langle f, f\rangle = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}\langle f_i, f_i\rangle.$$

Luego, existe un i tal que $\langle \Delta f_i, f_i\rangle \leq \frac{1}{2}\langle f_i . f_i\rangle$. Luego $\lambda_1(\mathbb{G}_i^{'}) \leq \frac{1}{2}$, lo cual es absurdo. $\square$

CAPÍTULO 4

Grupos hiperbólicos y grupos aleatorios

En este capítulo, daremos una breve introducción a dos conceptos que están estrechamente relacionados con el problema estudiado en esta tesis, la teoría de grupos hiperbólicos y la teoría de grupos aleatorios.

Los grupos hiperbólicos fueron introducidos y analizados por Gromov en los artículos [**8**], [**10**], y a partir de entonces han ganado un gran interés. Su nombre se debe a que estos objetos admiten una desigualdad isoperimétrica lineal, característica propia de los espacios de curvatura negativa.

La teoría de grupos aleatorios también fue introducida por Gromov [**9**]. Esta rama de estudio se focaliza en analizar las propiedades de un grupo genérico, con el objetivo de determinar cuáles de estas propiedades son típicas, en el sentido de que aparecen en una gran cantidad de grupos. Esta clase de análisis se realiza dentro de un marco específico, que se conoce como modelo.

El capítulo está ordenado de la siguiente manera. En la primera sección, daremos las nociones básicas necesarias para hablar de grupos hiperbólicos, comenzando con diagramas de van Kampen. En la siguiente, definiremos los modelos de grupos que utilizaremos durante esta tesis, que entendemos por propiedades típicas en cada modelo y mencionaremos algunas propiedades que cumplen los grupos en estos modelos.

1. Grupos hiperbólicos

Como mencionamos, los grupos hiperbólicos son aquellos que cumplen una desigualdad isoperimétrica lineal. Para ello, necesitaremos dar nociones de área y perímetro. En ese marco, introduciremos los diagramas de van Kampen, que son 2-complejos simpliciales asociados a palabras del grupo. Una vez introducidos los grupos hiperbólicos, daremos algunos de los resultados que son destacables, y finalizaremos con el concepto de cancelación pequeña, una condición suficiente para que haya hiperbolicidad. El libro de Lyndon y Schupp,[**17**], es la referencia estandar sobre diagramas de van Kampen. En cuanto a lo relacionado con grupos hiperbólicos y cancelación pequeña, el trabajo de Ollivier [**21**] brinda una buena introducción a esta temática de estudio.

En lo que sigue, $\Gamma = \langle S|R\rangle$ es un grupo finitamente generado y presentado. Los conceptos de palabra reducida y cíclicamente reducida son los mismo del capítulo anterior, al igual que la noción de longitud de una palabra.

Definición 4.1 (Diagramas de van Kampen). *Sea $\Gamma = \langle S|R\rangle$ y sea $\mathbb{X} = S \cup S^{-1}$. Un diagrama de van Kampen asociado a la presentación $\langle S|R\rangle$ es un 2-complejo simplicial conexo contráctil $\mathcal{D}$ junto con un embedding de $\mathcal{D}$ en $\mathbb{R}^2$, que cumple las siguientes propiedades:*

(1) *Existe una 0-celda distinguida v_0 que se encuentra en la frontera de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$.*

(2) *Cada 1-celda está dotada de una orientación y etiquetada por un elemento de $\mathbb{X}$.*

(3) *Cada palabra que se define recorriendo cada borde de una 2-celda es una permutación cíclica de un elemento de R.*

Podemos pensar que un diagrama de van Kampen es una serie de polígonos dibujados el plano euclídeo, cuyas aristas están etiquetadas en $\mathbb{X}$, que se conectan entre sí a través de aquellos caminos que definen la misma palabra, o a través de aristas. En consecuencia, un diagrama divide al plano euclídeo en una serie de regiones. Cuando el diagrama tiene finitas celdas (en nuestro caso siempre será así), este divide al plano euclídeo en n regiones, todas acotadas, a excepción de una. Además, el vértice distinguido toca la región no acotada.

Supongamos que $\mathcal{D}$ es un diagrama de van Kampen que tiene solo una región no acotada. Luego tenemos la palabra w que se describe recorriendo las aristas de la frontera de $\mathcal{D}$ comenzando por v_0 en dirección opuesta a las agujas del reloj. En este caso decimos que $\mathcal{D}$ es un diagrama de van Kampen de w.

Veamos algunos conceptos vinculados a palabras en $S \cup S^{-1}$. Comenzaremos recordando la definición de longitud de una palabra reducida.

Definición 4.2. *Sea w una palabra reducida en $S \cup S^{-1}$, $w = s_1 \dots s_n$. Se define la longitud de w como $|w| = n$.*

Supongamos que w es una palabra que representa el elemento trivial en nuestro grupo Γ. Entonces, $w = \prod_{i=1}^{k} u_i r_i^{\pm} u_i^{-1}$ donde u_i son palabras en los generadores. Esta escritura no tiene por que ser única.

Definición 4.3. *Sea w una palabra que representa el elemento trivial en Γ. Definimos el área de w como*

$$a(w) = \min\{k \in \mathbb{N} : w = \prod_{i=1}^{k} u_i r_i^{\pm} u_i^{-1}\}.$$

La relación entre la existencia de un diagrama de van Kampen de w y que una palabra sea la identidad en Γ está dada por el siguiente teorema ([**17**], Capítulo 9, Lema 1.2).

Teorema 4.1. *Son equivalentes:*

(1) *w define el elemento trivial en Γ.*

(2) *Existe un diagrama de van Kampen de w.*

Más aún, w es producto de k conjugaciones de R si y sólo si existe un diagrama de van Kampen que posee exactamente k regiones.

Como consecuencia, el área de w es la cantidad de regiones acotadas que tiene el diagrama de van Kampen más chico que podemos construir de w. Su longitud es entonces la cantidad de 1-celdas de la frontera de $\mathcal{D}$, lo que podríamos pensar como el perímetro del diagrama.

Definición 4.4. *Sea $\langle S|R\rangle$ una presentación finita de Γ. Si existe una constante C tal que para toda palabra w igual a la identidad en Γ entonces $a(w) \leq C|w|$, decimos que la presentación es hiperbólica.*

Definición 4.5 (Grupos Hiperbólicos). *Decimos que un grupo Γ es hiperbólico si admite una presentación hiperbólica.*

Observación 4.1. *Si un grupo admite una presentación hiperbolica, entonces toda presentación finita es hiperbólica, cambiando si es necesario la constante.*

La desigualdad de la definición se conoce como desigualdad isoperimétrica lineal, y es un fenómeno de las variedades de curvatura negativa. En geometría euclídea, la relación entre el perímetro y el área de un poligono regular es cuadrática, es decir, si P es un polígono regular, $a(P) \sim (p(P))^2$.

Ejemplo 4.1.

(1) *El grupo* $\mathbb{Z}^2$ *no es hiperbólico. Si consideramos las palabras* $w(n) = a^n b^n a^{-n} b^{-n}$. *Es claro que* $w(n)$ *es la palabra trivial, además* $|w(n)| = 4n$. *Por otro lado, vale que* $a(w(n)) = n^2$, *con lo cual nunca cumple la desigualdad pedida.*

(2) *Los grupos finitos y los grupos libres son hiperbólicos.*

Existe una condición suficiente para ver si un grupo es hiperbólico o no, relacionada con los diagramas de van Kampen, que es la cancelación pequeña. Consideremos una presentación $\langle S|R\rangle$, notamos R^* al conjunto dado por la unión de todas las permutaciones cíclicas de palabras $w \in R \cup R^{-1}$.

DEFINICIÓN 4.6. (1) *Una palabra* u *se dice pasaje (piece) si existen* $r_1, r_2 \in R^*$ *distintos tal que* $r_1 = uv_1$ *y* $r_2 = uv_2$.

(2) *Decimos que una presentación tiene la condición* $C^{'}(\frac{1}{\lambda})$ *si para todo pasaje* u *y para toda relación* $r \in R^*$ *que tiene a* u *como subpalabra inicial, entonces* $|u| < \frac{1}{\lambda}|r|$.

(3) *Decimos que un grupo tiene cancelación pequeña si tiene la condición* $C^{'}(\frac{1}{6})$.

Una observación importante es que un grupo cancelación pequeña si tiene condición $C^{'}(\eta), \forall \eta \leq \frac{1}{6}$.

Los pasajes cumplen el rol de ser las fronteras admisibles entre 2 regiones acotadas dentro de un diagrama de van Kampen.

PROPOSICIÓN 4.1. *Si* Γ *tiene cancelación pequeña, entonces es hiperbólico.*

Los grupos que tienen cancelación pequeña son importantes en la teoría de grupos porque admiten algoritmos que resuelven el problema de la palabra. En término de los diagramas de van Kampen, esta propiedad se puede interpretar de la siguiente manera. En un diagrama de van Kampen de una palabra w que da la identidad, 2 regiones acotadas tienen forzosamente frontera chica. En consecuencia, para tener palabras de área grande, necesariamente van a tener longitud grande. Esta es la idea detrás de la proposición.

EJEMPLO 4.2. *Sea* $\Gamma =< a, b, c, d | aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} >$. *Afirmamos que* Γ *tiene cancelación pequeña. Notemos que, como tiene sólo una relación, no podrá tener condición* $C^{'}(\eta)$ *con* $\eta \leq \frac{1}{8}$, *ya que los pasajes de una sola letra están admitidos. Veamos que son los únicos pasajes que hay.*

Si tenemos la palabra ab *es un pasaje (los restantes casos son análogos). Entonces, la única posibilidad de encontrar una palabra que comience con* ab *es mirar* r^{-1}, *donde* r *es la relación dada en el grupo.* $r^{-1} = dcd^{-1}c^{-1}bab^{-1}a^{-1}$, *notemos que no se conjuntan 2 palabras* ab *en la relación, en consecuencia,* ab *no es un pasaje de la presentación.*

2. Modelos de grupos aleatorios

Como habíamos mencionado al comienzo de este capítulo, un modelo de grupo es el contexto en el que se estudian los grupos aleatorios, es decir, el conjunto de reglas que definen lo que entendemos por aleatoriedad. Dar un modelo de grupo es dar una indexación de grupos y un marco probabilístico que los ordene. Algunos modelos están parametrizados por un valor d que ajusta el comportamiento de los grupos. Generalmente, este valor presenta lo que se conoce como transición de fase, es decir que exite cierto d_0 tal que para valores menores a d_0 los grupos son típicamente de una manera, mientras que para valores mayores a d_0 son típicamente de otra. En esta tesis utilizaremos tres modelos distintos, íntimamente relacionados. Estos son modelos de grupos finitamente presentados, y en consecuencia, a lo largo de toda esta sección, entenderemos por Γ a un grupo $\Gamma = \langle S|R\rangle$ donde S es un conjunto finito de generadores y R es un conjunto finito relaciones.

El primero modelo que veremos, y quizás el más importante, es el modelo de Densidad de Gromov [**9**]. En este modelo, un grupo es típicamente hiperbólico de cardinal infinito, o es $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. También definiremos el modelo triangular, definido por Zuk en [**26**] y en cuyo modelo vale que casi todo grupo tiene propiedad (T) siempre y cuando tenga suficientes relaciones. El tercer modelo, también introducido por Zuk, es el modelo de permutación, se trata de un modelo Ad Hoc que nuevamente tiene propiedad (T), en donde todas las relaciones que lo definen tienen longitud 3 y está vinculado con cierto modelo de grafos aleatorios, en donde casi todo grafo tiene el primer autovalor no nulo mayor a $\frac{1}{2}$. También existen otros modelos, como los modelos de pocas relaciones, estudiados por Gromov, Champetier y Ol'shanski, que no veremos aquí.

Todos los modelos mencionados tiene una particularidad. Los grupos están indexados por un cierto parámetro $l \in \mathbb{N}$. Diremos que una propiedad ocurre con probabilidad abrumadora en un modelo, si la probabilidad de que un grupo G en ese modelo tenga tal propiedad tiende a 1 cuando l tiende a infinito.

Definición 4.7 (Modelo de densidad de Gromov).

(1) *Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ y sea $l \in \mathbb{N}$. Si $|S| = m$. Sea S_l es conjunto de palabras reducidas de longitud exactamente l. Dado $0 \leq d \leq 1$, un conjunto de relaciones de longitud l con densidad d es una $(2m-1)^{dl}$ familia de elementos elegidos de forma aleatoria de S_l, es decir, de manera uniforme e independientemente.*

(2) *Un grupo aleatorio de longitud l, con densidad d, es un grupo $G = \langle S|R\rangle$ donde $|S| = m$, y R es un conjunto de relaciones de longitud l con densidad d.*

(3) *El modelo de densidad de Gromov es el modelo de todos los grupos con m generadores, aleatorios de longitud l con densidad d. Se lo nota $\mathcal{G}(m,l,d)$.*

Observación 4.2.

(1) *Notemos que pueden existir dos grupos G_1, G_2 que tengan la misma longitud, la misma densidad y los mismos generadores, pero ser no isomorfos.*

(2) *Pueden aparecer en R_l palabras repetidas.*

(3) *Notemos que, dado $l \in \mathbb{N}$, $|S_l| = (2m-1)^l$. Entonces, d modera la cantidad de relaciones que estamos tomando. Cuando d está cerca de 1, estamos tomando casi todas las relaciones posibles que se pueden definir, por lo que el grupo es esperable que sea "chico".*

Definición 4.8. *Decimos que una propiedad P ocurre con probabilidad abrumadora en el modelo de densidad de Gromov si*

$$\lim_{l\to\infty} \mathbb{P}\left(\Gamma \in \mathcal{G}(m,l,d) : \Gamma \text{ tiene } P\right) = 1.$$

Aquí $\mathbb{P}\left(\Gamma \in \mathcal{G}(m,l,d) : \Gamma \text{ tiene } P\ \right) = \frac{|\{\Gamma \in \mathcal{G}(m,l,d) : \Gamma \text{ tiene } P\}|}{|\mathcal{G}(m,l,d)|}$.

El estudio de propiedades típicas es, en definitiva, el estudio del comportamiento asintótico de la validez de una propiedad en relación a determinado parámetro. Es de acuerdo a esta condición que varios de los cuantificadores existentes se pueden relajar. Podemos tomar relaciones del conjunto B_l, el conjunto de palabras reducidas de longitud a lo sumo l, o tomar el conjunto de relaciones con palabras de longitud entre l y $l + o(1)$. También se puede relajar la condición de tomar exactamente $(2m-1)^{dl}$ palabras, por la de tomar $f(l)$ palabras, con $f(l)$ que se mueva entre $C_1(2m-1)^{dl} \leq f(l) \leq C_2(2m-1)^{dl}$. Muchas veces se elige relajar estas condiciones para no hacer tan restrictiva la definición, que así como la dimos deja fuera muchos grupos que uno puede querer considerar.

Observación 4.3. *Cuando $d < \frac{1}{2}$, con probabilidad abrumadora, las $(2m-1)^{dl}$ relaciones que tomamos son todas distintas. Esto es consecuencia del "principio probabilístico del palomar", que* *afirma que si uno tiene N palomares y $S(N)$ palomas, con $S(N)$ de orden menor a $\sqrt{N}$, entonces la probabilidad de poner 2 pichones en el mismo palomar tiende a cero cuando N tiende a infinito. Cuando $d > \frac{1}{2}$, con probabilidad abrumadora ocurre el fenomeno contrario. Luego, $\frac{1}{2}$ es la transición de fase para la propiedad "las palabras que aparecen en el conjunto de relaciones son todas distintas".*

A modo de convención, se considera que $\mathcal{G}(m, l, 0)$ es aquel en el cual el crecimiento del conjunto de relaciones es subexponencial en l, ya que asintóticamente, la cantidad de relaciones es ínfima en términos de las palabras a tomar.

La riqueza del modelo de densidad de Gromov yace en el siguiente resultado, postulado por Gromov en [**9**] y demostrado por Olliver en [**20**], siguiendo las ideas del primero, para todos los $d \neq \frac{1}{2}$.

Teorema 4.2.

(1) *Si $d < \frac{1}{2}$, entonces con probabilidad abrumadora, un grupo G en el modelo de densidad de Gromov es Hiperbólico, infinito, sin torsión y de dimensión geométrica 2.*

(2) *Si $d > \frac{1}{2}$ entonces un grupo G en el modelo de densidad es trivial o $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

En lo que resta de esta tesis, el objetivo es probar el siguiente teorema, enunciado por Zuk y demostrado por Kotowski y Kotowski en [**16**].

Teorema 4.3. *Si $d > \frac{1}{3}$ entonces con probabilidad abrumadora, un grupo tiene propiedad (T) en el modelo de densidad de Gromov.*

Es un problema abierto saber la densidad crítica para la propiedad (T) en este modelo. Se sabe que si $d < \frac{1}{5}$, entonces con probabilidad abrumadora un grupo en este modelo no tiene (T) [**22**]. Sin embargo, la transición de fase (si es que existe) aún es desconocida.

Una de las herramientas que utilizaremos para mostrar el teorema previo es que, informalmente, un grupo en el modelo de densidad de Gromov es casi cociente de un grupo en el siguiente modelo.

Definición 4.9 (Modelo Triangular de Zuk).

(1) *Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, y sean $s_1 \dots s_n$ generadores de un grupo G. Sea $W_{n,3}$ el conjunto de palabras de longitud 3 cíclicamente reducidas en los generadores y sus inversos.*

(2) *Dado $0 < d < 1$, un grupo aleatorio triangular con densidad d y m generadores es un grupo $G = \langle S|R \rangle$ finitamente presentado con $|S| = n$, R un conjunto de $(|W_{n,3}|)^d$ palabras tomadas de forma aleatoria, o sea, uniforme e independientemente en $W_{n,3}$.*

(3) *El modelo triangular en m generadores con densidad d es el conjunto de todos los grupos aleatorios triangulares con densidad d y m generadores. Se lo nota $\mathcal{M}(n, d)$.*

Definición 4.10. *Decimos que una propiedad P ocurre con probabilidad abrumadora si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\Gamma \in \mathcal{M}(n, d) : \Gamma \textit{ tiene } P\right) = 1$$

donde $\mathbb{P}\left(\Gamma \in \mathcal{M}(n, d) : \Gamma \textit{ tiene } P\ \right) = \frac{|\{\Gamma \in \mathcal{M}(n,d) : \Gamma tiene P\}|}{|\mathcal{M}(n,d)|}$.

Al igual que para el modelo de densidad, cuando $d < \frac{1}{2}$ con probabilidad abrumadora, un presentación en este modelo tiene todas palabras distintas.

Intuitivamente, un grupo en el modelo de densidad de Gromov con m generadores y densidad d, de longitud l, esta relacionado con un grupo aleatorio triangular con la misma densidad, y n generadores, en donde $2n \sim (2m)^{\frac{l}{3}}$.

A diferencia del modelo de densidad, en este modelo sí tenemos una transición de fase para la propiedad (T). Este teorema fue enunciado por Zuk en [**26**] y demostrado por Kotowski y Kotowski en [**16**]. En el capítulo 5 daremos una demostración del mismo.

TEOREMA 4.4. *Para* $\mathcal{M}(n,d)$ *tenemos que:*

(1) *Si* $d < \frac{1}{3}$ *entonces con probabilidad abrumadora, un grupo en este modelo no tiene propiedad (T).*

(2) *Si* $d > \frac{1}{3}$ *entonces con probabilidad abrumadora un grupo en este modelo tiene propiedad (T).*

Existen otras propiedades que cumplen los grupos en este modelo, que no demostraremos, pero que listamos a continuación.

PROPOSICIÓN 4.2. *Para* $\mathcal{M}(n,d)$ *vale que*

(1) *Si* $d < \frac{1}{2}$ *entonces con probabilidad abrumadora, un grupo en este modelo es infinito, hiperbólico y libre de torsión.*

(2) *Si* $d > \frac{1}{2}$ *entonces con probabilidad abrumadora, un grupo en este modelo es trivial, o* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Además, tenemos el siguiente resultado que permitirá demostrar la transición de fase para propiedad (T). Este resultado también le corresponde a Zuk [**26**].

PROPOSICIÓN 4.3. *Si* $d < \frac{1}{3}$*, con probabilidad abrumadora, un grupo en el modelo triangular* $\mathcal{M}(n.d)$ *tiene un cociente isomorfo a un grupo libre.*

Finalizamos esta sección definiendo el modelo de permutación, cuya principal ventaja yace en que los grupos en este modelo tienen grafos $\mathbb{G}'$ que estan relacionados con lo que se conoce como el modelo de configuración de grafos aleatorios, en donde se sabe que para gran parte de los casos, estos grafos tienen el primer autovalor no nulo muy cerca de 1 (en particular, son mayores a $\frac{1}{2}$). Además, veremos que cada grupo en el modelo triangular es cociente de un grupo en el modelo de permutación.

DEFINICIÓN 4.11 (Modelo de permutación). *Sean* $n, v \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *y sea* $S = \{s_1 \dots s_n\}$ *un conjunto de generadores. Tomemos de manera uniforme e independiente* v *pares de permutaciones* $\{\pi_1^1, \pi_1^2\} \dots \{\pi_v^1, \pi_v^2\}$ *del conjunto* $S \cup S^{-1}$. *Un grupo aleatorio* $\Gamma = \langle S|R \rangle$ *forma parte del modelo de permutación en* n *generadores asociado a* v *permutaciones, si el conjunto* R *esta dado por* $\{s_i^{\pm}\pi_j^1(s_i^{\pm})\pi_j^2(s_i^{\pm})\}_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq v}$. *Al modelo de permutación se lo nota* $\mathcal{F}(n,v)$.

DEFINICIÓN 4.12. *Decimos que una propiedad* P *ocurre con probabilidad abrumadora en* $\mathcal{F}(n,v)$ *si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\Gamma \in \mathcal{F}(n,v) : \Gamma \textit{ tiene } P\right) = 1.$$

Nuevamente, aquí $\mathbb{P}\left(\Gamma \in \mathcal{F}(n,v) : \Gamma \textit{ tiene } P\ \right) = \frac{|\{\Gamma\in\mathcal{F}(n,v):\Gamma \textit{ tiene } P\ \}|}{|\mathcal{F}(n,v)|}$.

Cabe aclarar que el hecho de que una propiedad ocurra en un modelo con probabilidad abrumadora, cualquiera sea el modelo, no brinda información sobre la cantidad de grupos no isomorfos que cumplan la misma. Por ejemplo, en el caso del modelo de densidad, tenemos que existen grupos infinitos, hiperbólicos y con propiedad (T). Estos métodos, sin embargo, no proveen una forma de distinguir grupos no isomorfos entre sí. Sin embargo, tenemos que existe a lo sumo un grupo que cumple ambas cosas. Es una pregunta interesante saber la cantidad de grupos hipérbolicos, infinitos que tienen (T) no isomorfos que aparecen en el modelo de densidad.

CAPÍTULO 5

Propiedad (T) para el modelo de Densidad de Gromov

Uno de los principales teoremas que enuncia Zuk en [**26**] es que, en el modelo triangular, $\frac{1}{3}$ es transición de fase para la propiedad (T). Más precisamente, se tiene que cuando $d < \frac{1}{3}$, los grupos en este modelo no tienen (T) con probabilidad abrumadora, mientras que cuando $d > \frac{1}{3}$, estos grupos tienen (T) con probabilidad abrumadora. De este resultado se desprende que el modelo de densidad de Gromov tiene (T) cuando $d > \frac{1}{3}$. El objetivo central de este capítulo es demostrar estos resultados, basandonos en los trabajos de Kotowski y Kotowski en [**16**], y en la publicación de Zuk previamente mencionada.

Para demostrar que $d = \frac{1}{3}$ es transición de fase para la propiedad (T) en el modelo triangular utilizaremos el modelo de permutación. Este modelo cumple dos propiedades fundamentales para nuestro propósito. En principio, los grupos en este modelo tienen relación con el modelo de cofiguración de grafos aleatorios. La ventaja de estos grafos es que el comportamiento del primer autovalor no nulo es conocida gracias al trabajo de Friedman [**6**]. Por otro lado un grupo en el modelo triangular es cociente de un modelo de permutación, y como la propiedad (T) se preserva por cocientes, luego se sigue el resultado.

Para concluir que el modelo de densidad de Gromov tiene propiedad (T) cuando $d > \frac{1}{3}$, veremos que para cada grupo aleatorio en este modelo existe un grupo aleatorio en el modelo triangular que es subgrupo de índice finito del grupo aleatorio en el modelo de Gromov. Luego, aplicando el Corolario 1.2 del capítulo 1, obtendremos el resultado deseado.

Este capítulo esta organizado de la siguiente manera. En la primera sección daremos las definiciones básicas de grafos e hipergrafos que utilizaremos a lo largo del capítulo. En la siguiente sección, mostraremos que en el modelo triangular $d = \frac{1}{3}$ es transición de fase para la propiedad (T). Finalmente, en la tercer sección, mostraremos que en el modelo de densidad de Gromov, casi todo grupo tiene propiedad (T) con probabilidad abrumadora.

1. Hipergrafos y Grafos aleatorios

En este apartado, daremos las principales definiciones y propiedades pertinentes a la teoría de hipergrafos y grafos aleatorios. Un hipergrafo es una generalización de un grafo, que aumenta la dimensión de las aristas. En tanto, la teoría de grafos aleatorios es similar a la de grupos aleatorios, cambiando el objeto de estudio.

Definición 5.1. *Un k-hipergrafo es un par $(V, \mathbb{E})$ de vértices V e k-hiperaristas $\mathbb{E}$. Por una k-hiperarista entendemos una k-upla $(v_1, \ldots, v_k)$ de vértices distintos. El conjunto $\mathbb{E}$ puede tener hiperaristas repetidas.*

Hablaremos simplemente de hipergrafos cuando esté en claro cual es el k involucrado. Cuando $k = 2$ tenemos un grafo usual.

Definición 5.2. *Decimos que un k-hipergrafo es k-partito si existen k conjuntos de vértices $V_1, \ldots, V_k$ disjuntos no vacíos que particionan al conjunto de vértices V tales que, para toda hiperarista $e = (v(e)_1, \ldots, v(e)_k)$, $v(e)_i \in V_i$.*

Definición 5.3. *Un apareamiento perfecto en un grafo k-partito es un conjunto de aristas que no comparten vértices en común y tal que la unión de vértices sus cubre al conjunto V.*

En lo que sigue trataremos grafos e hipergrafos aleatorios. Esta teoría es similar a la teoría de grupos aleatorios en varios aspectos. Por ejemplo, el marco teórico de trabajo, que son los modelos, se define a partir de dar reglas de probabilidad que definan cuando una arista, o hiperarista, este en el grafo. Las propiedades que nos importarán serán en la mayoría de los casos propiedades que ocurren con probabilidad abrumadora en ese modelo. En consecuencia, hay un paralelismo entre ambas teorías.

Definición 5.4 (Modelo de Configuración). *Sea $\mathbb{V}$ un conjunto de n vértices y sean $\pi_1 \dots \pi_v$ permutaciones elegidas con probabilidad uniforme dentro del conjunto de permutaciones de V. Definimos el conjunto de aristas como $\mathbb{E} = \{(i, \pi_j(i)); 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq v\}$. Decimos que el grafo $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ esta en el modelo de configuración, que notaremos $\mathcal{L}(n, v)$.*

Definición 5.5. *Diremos que una propiedad P ocurre con probabilidad abrumadora en el modelo de configuración si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathbb{G} \in \mathcal{L}(n, v) : \mathbb{G} \text{ tiene } P\ ) = 1.$$

Observación 5.1.

(1) *Un grafo en el modelo de configuración puede tener aristas múltiples y aristas que comienzen y terminen en el mismo elemento.*

(2) *Cada grafo en el modelo de configuración es un grafo regular de grado $2v$. Efectivamente si fijamos un vértices i, entonces, por construcción, seguro tiene v aristas adyacentes, asociadas a $(i, \pi_j(i))$. A su vez, para cada permutación π, existe un valor k tal que $\pi(k) = i$, y como tomamos todas las permutaciones y todos los vértices en la definición de $\mathbb{E}$, tenemos todos los $(k, \pi(k)) = (k, i)$, entonces tenemos así las otras v aristas.*

Una de las propiedades más importantes que tienen los grafos en este modelo es la siguiente propiedad espectral, demostrada por Friedman en [**6**].

Teorema 5.1. *Si $\mathbb{G}$ es un grafo en el modelo de configuración $\mathcal{L}(n, v)$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\lambda_1(\mathbb{G}) > 1 - \left(\frac{\sqrt{2v-1}}{v} + \frac{\log v}{v} + \frac{C}{v}\right)\right) = 1$$

con C independiente de v.

En particular, tomando v suficientemente grande, podemos afirmar que casi todo grafo en este modelo tiene primer autovalor no nulo.

Definición 5.6. *Sean $n, M \in \mathbb{N}$. Sea V un conjunto de vértices de $2n$ elementos indexados por letras $s_1, \dots, s_n, s_1^{-1}, \dots, s_n^{-1}$. Definimos el modelo $G_3(n, M)$ que esta dado por los 3-hipergrafos tripartitos $\mathbb{G} = (\overline{V}, \mathbb{E})$ donde $\overline{V}$ es la unión de 3 copias disjuntas de V, y $\mathbb{E}$ es un conjunto de M hiperaristas tales que $\forall e \in \mathbb{E}$, $e = (s_1, s_2, s_3)$ entonces $s_1 \in V_1$, $s_2 \in V_2$, $s_3 \in V_3$.*

Definición 5.7. *Decimos que una propiedad P ocurre con probabilidad abrumadora para el modelo $G_3(n, M)$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathbb{G} \in G_3(n, M) : \mathbb{G} \text{ tiene } P\ ) = 1.$$

Dado que tenemos grafos con vértices indexados con letras, es conveniente establecer las siguientes definiciones:

(1) Diremos que una palabra en $S \cup S^{-1}$ es *reducida* si es cíclicamente reducida.

(2) Una hiperarista $e = (v_1, \dots, v_k)$ es reducida si la palabra $v_1 \dots v_k$ es reducida.

(3) Un apareamiento perfecto es reducido si todas sus aristas son reducidas.

Asociado este modelo, tenemos el siguiente modelo.

Definición 5.8. *Sean $n, M \in \mathbb{N}$. Sea V un conjunto de vértices de $2n$ elementos indexados por letras $s_1, \dots, s_n, s_1^{-1}, \dots, s_n^{-1}$. Definimos el modelo $G_3^{red}(n, M)$ que esta dado por los 3-hipergrafos tripartitos $\mathbb{G} = (\overline{V}, \mathbb{E})$ donde $\overline{V}$ es la unión de 3 copias disjuntas de V, y $\mathbb{E}$ es un conjunto de M hiperaristas* **reducidas** *tales que $\forall e \in \mathbb{E}$, $e = (s_1, s_2, s_3)$ entonces $s_1 \in V_1$, $s_2 \in V_2$, $s_3 \in V_3$.*

Definición 5.9. *Decimos que una propiedad P ocurre con probabilidad abrumadora para el modelo $G_3^{red}(n, M)$ si*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(\mathbb{G} \in G_3^{red}(n, M) : \mathbb{G} \text{ tiene } P\ ) = 1.$$

2. Propiedad (T) para grupos en el modelo triangular

El objetivo de esta sección es mostrar que el modelo triangular tiene como transición de fase a $d = \frac{1}{3}$. Para ello, estudiaremos que ocurre cuando $d < \frac{1}{3}$ por un lado, y cuando $d > \frac{1}{3}$ por otro.

Cuando $d < \frac{1}{3}$, mostraremos que un grupo en el modelo triangular tiene con probabilidad abrumadora, un cociente que es un grupo libre de dos generadores. Este resultado, que es el más sencillo, lo daremos al final de este apartado.

En cambio. cuando $d > \frac{1}{3}$, necesitaremos realizar un trabajo más técnico. En lineas generales, mostraremos que un grupo en este modelo es un cociente de un grupo en el modelo de permutación. Para ello, veremos que alcanza con encontrar un apareamiento perfecto en cierto hipergrafo asociado un grupo en el modelo triangular. Luego, probaremos que un grupo en el modelo de permutación tiene propiedad (T) con probabilidad abrumadora utilizando el teorema 3.1.

A lo largo de esta sección, utilizaremos modelos que acarrean pequeñas modificaciones respecto de los anteriormente listados.

Definición 5.10. *Sea $\Gamma \in M(n, d)$, $\Gamma = \langle S | R \rangle$ donde $|S| = n$, $|R| = (2n-1)^{3d}$ y $\forall w \in R$, $w = s_1 s_2 s_3$ es una palabra cíclicamente reducida. Definimos el hipergrafo $\mathbb{L}_3(\Gamma) = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ de la siguiente manera. El conjunto de vértices esta dado por $\mathbb{V} = V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3$, con $V_i = S \cup S^{-1}$. Para cada palabra en R definimos la arista $e = (s_1, s_2, s_3)$ con $s_i \in V_i$, $i = 1, 2, 3$. Como pueden aparecer palabras repetidas en R, con nuestra definición pueden aparecer hiperaristas múltiples. En estos casos, consideraremos que son hiperaristas simples.*

Observación 5.2. *Por definición, $\mathbb{L}_3(\Gamma)$ es un grafo en el modelo $\mathbb{G}_3^{red}(n, M)$, para algún M menor que $(2n-1)^{3d}$. Sin embargo, por la observación 4.3, cuando $d < \frac{1}{2}$, con probabiliad abrumadora un grupo $\Gamma \in \mathcal{M}(n, d)$ no tiene palabras repetidas. En consecuencia, con probabilidad abrumadora, el grafo $\mathbb{L}_3(\Gamma)$ tendrá tantas aristas como relaciones tiene Γ.*

Observación 5.3. *Sea $\Gamma \in \mathcal{M}(n, d)$ y sea $\mathbb{L}_3(\Gamma)$ el hipergrafo asociado. Supongamos que $\mathbb{L}_3(\Gamma)$ tiene un apareamiento perfecto. Entonces, existen hiperaristas $e_1, \dots, e_{2n}$ tales que la unión de sus vértices es disjunta y cubre todo el conjunto de vértices $\mathbb{V}$.*

Sea $e_i = (s_i, x_i, y_i)$, luego, el apareamiento perfecto induce permutaciones aleatorias π_1, π_2 del conjunto $S \cup S^{-1}$, donde $e_i = (s_i, \pi_1(s_i), \pi_2(s_i))$.

El siguiente teorema [**13**] da una condición necesaria para que un hipergrafo en $G_3(n, M)$ tenga un apareamiento perfecto con probabilidad abrumadora.

Teorema 5.2. *Existe una constante $C > 0$ tal que si $p(n) > C\frac{\log n}{n^2}$. Entonces, con probabilidad abrumadora, un 3-hipergrafo aleatorio tripartito en $G_3(n, M)$, con $M \geq n^3 p(n)$ contiene un apareamiento perfecto.*

En nuestro caso, $M \approx (2n-1)^{3d} = (2n-1)^{1+\epsilon}$ pues la densidad es mayor que $\frac{1}{3}$. Luego, el comportamiento asintótico de las hiperaristas está en las hipótesis del teorema, de donde se desprende, el siguiente resultado.

Corolario 5.1. *Si $M = (2n-1)^{1+\epsilon}$ entonces un hipergrafo aleatorio en $G_3(n, M)$ tiene un apareamiento perfecto con probabilidad abrumadora.*

Observación 5.4. *Como el grafo $\mathbb{L}_3(\Gamma)$ está en $G_3^{red}(n, M)$, necesitamos un resultado similar para grafos en este modelo pues, a diferencia de lo que se puede intuir, con probabilidad abrumadora, un hipergrafo aleatorio en $G_3(n, M)$ no pertenece a $G_3^{red}(n, M)$.*

Esto se debe a que, dado un n fijo, la probabilidad de que una hiperarista $e = (s_1, s_2, s_3)$ sea reducida es $\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{(2n)^3}$. Para que un hipergrafo esté en $G_3^{red}(n, M)$, todas sus hiperaristas tienen que ser reducidas. La probabilidad de que estos ocurra es $\left(\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{(2n)^3}\right)^M$. Como $M = (2n-1)^{1+\epsilon}$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{(2n)^3}\right)^M = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{(2n)^3}\right)^{(2n-1)^{1+\epsilon}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{6n-4}{(2n)^2}\right)^{(2n-1)^{1+\epsilon}}.$$

Un cálculo directo muestra que este límite es 0 cuando n tiende a infinito. En consecuencia, no podemos aplicar el corolario anterior de manera directa para grafos en $G_3^{red}(n, M)$.

Los siguientes dos lemas tienen como objetivo mostrar que $G_3^{red}(n, M)$ tiene un apareamiento perfecto con probabilidad abrumadora. Notemos que un apareamiento perfecto en $G_3^{red}(n, M)$ será necesariamente un apareamiento perfecto reducido.

Lema 5.1. *Si $M = (2n-1)^{1+\epsilon}$ entonces un grafo aleatorio en $G_3(n, M)$ tiene un apareamiento perfecto reducido con probabilidad abrumadora.*

Demostración. Primero, por el Corolario 5.1, tenemos un apareamiento perfecto con probabilidad abrumadora. Luego, por la Observación 5.3, tenemos permutaciones aleatorias π_1, π_2 de $S \cup S^{-1}$ tales que cada arista del apareamiento es de la forma $e = (s, \pi_1(s), \pi_2(s))$, $s \in S \cup S^{-1}$. Para que un un apareamiento perfecto sea reducido, se tiene que cumplir que para todo $s \in S \cup S^{-1}$, $s \neq (\pi_1(s))^{-1}$, $\pi_1(s) \neq (\pi_2(s))^{-1}$, $\pi_2(s) \neq s^{-1}$.

La condición $s \neq (\pi_1(s))^{-1}$ implica que la permutación $s \to (\pi_1(s))^{-1}$ no tiene puntos fijos. Por otro lado, fijada π_1, tenemos que π_2 debe cumplir que $\pi_2(s) \neq s^{-1}$ y que $\pi_1(s) \neq (\pi_2(s))^{-1}$. Mirando a π_2 como una permutación del conjunto $\{1, \ldots, 2n\}$, esta condición es equivalente a decir que la permutación $\pi_2(j) \neq j, j+1$ para todo j.

Se sabe que la probabilidad de que una permutación aleatoria del conjunto de n elementos no tenga puntos fijos tiende a $\frac{1}{e}$ cuando n tiende a infinito. A su vez, en [**14**] se puede ver que la probabilidad de que una permutación aleatoria del conjunto de n elementos cumple que $\pi(j) \neq j, j+1$ para todo j tiende a $\frac{1}{e^2}$ cuando n tiende a infinito. Luego, la probabilidad de que π_1, π_2 cumplan las condiciones necesarias para que el apareamiento perfecto sea reducido tiende a $\frac{1}{e^3}$ cuando n tiende a infinito, ya que π_1. π_2 son independientes. Luego, existe un $\eta > 0$ y un valor $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ la probabilidad de que un apareamiento perfecto no sea reduido está acotada inferiormente por η. independientemente de n.

Como $M = (2n-1)^{1+\epsilon}$ entonces la cantidad de hiperaristas es asintóticamente mayor que la condición pedida por el teorema 5.2, particionando al conjunto de hiperaristas en $f(n) = C\frac{n^\epsilon}{\log n}$ subconjuntos de tamaño $n \log n$, tenemos que cuando n tiende a infinito, $f(n)$ tiende a infinito. En cada subconjunto tenemos un apareamiento perfecto con probabilidad abrumadora, y la probabilidad de que ese apareamiento perfecto no sea reducido es menor que $(1-\eta)^{f(n)}$, y este valor tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Luego, con probabilidad abrumadora, un grafo en $G_3(n, M)$ tiene un apareamiento perfecto reducido con probabilidad abrumadora. $\square$

Lema 5.2. *Un hipergrafo aleatorio en $G_3^{red}(n, M)$, con $M = (2n-1)^{1+\epsilon}$ contiene un apareamiento perfecto reducido con probabilidad abrumadora.*

Demostración. Consideremos las probabilidades de los siguientes eventos

- $F_M = \{\mathbb{L}_3(\Gamma) \in G_3(n, M)$ tiene un apareamiento perfecto reducido$\}$,
- $F_M^{red} = \{\mathbb{L}_3(\Gamma) \in G_3^{red}(n, M)$ tiene un apareamiento perfecto$\}$,
- $E_{M'} = \{\mathbb{L}_3(\Gamma) \in G_3(n, M)$ tiene exactamente $M^{'}$ aristas reducidas$\}$.

Tomemos un hipergrafo $\mathbb{L}_3(\Gamma) \in G_3(n, M)$ y saquemos las hiperaristas no reducidas, obtenemos un hipergrafo $\mathbb{L}'_3(\Gamma) \in G_3^{red}(n, M')$ con $M' \leq M$. Fijemos $M' \leq M$ y supongamos que $\mathbb{L}_3(\Gamma)$ tiene exactamente M' hiperaristas reducidas. Entonces $\mathbb{L}_3(\Gamma)$ contiene un apareamiento perfecto reducido si y sólo si $\mathbb{L}'_3(\Gamma)$ contiene un apareamiento perfecto, de lo que sigue que la existencia de apareamientos perfectos reducidos es independiente de la distribución de las hiperaristas no reducidas. Luego $\mathbb{P}(F_{M'}^{red}) = \mathbb{P}(F_M | E_{M'})$. Por otro lado, como $M^{'} \leq M$, $\mathbb{P}(F_{M'}^{red}) \leq \mathbb{P}(F_M^{red})$, de lo que sigue que $\mathbb{P}(F_M | E_{M'}) \leq \mathbb{P}(F_M^{red})$ y como esto vale para todo $M' \leq M$, tenemos que

$$\mathbb{P}(F_M) = \sum_{M' \leq M} \mathbb{P}(F_M | E_{M'}) \mathbb{P}(E_{M'}) \leq \sum_{M' \leq M} \mathbb{P}(F_M^{red}) \mathbb{P}(E_{M'}) = \mathbb{P}(F_M^{red}).$$

En consecuencia, un hipergrafo en $G_3^{red}(n, M)$ tiene un apareamiento perfecto reducido.

$\square$

A continuación, introduciremos modelos levemente modificados del modelo de permutación de grupos aleatorios y del modelo de configuración de grafos aleatorios.

Definición 5.11 (Modelo de permutación reducido). *El modelo de permutacion reducido, que notaremos $\mathcal{F}^{red}(n, v)$, es el modelo de grupos aleatorios definido de la misma manera que el modelo de permutación $\mathcal{F}(n, v)$, pero con la salvedad de que sólo consideramos palabras cíclicamente reducidas, en decir, que las permutaciones $\{\pi_1^1, \pi_1^2\}, \ldots, \{\pi_v^1, \pi_v^2\}$ deben cumplir que $\pi_k^1(s) \neq s^{-1}$, $\pi_k^2(s) \neq (\pi_k^1(s))^{-1}$ y $\pi_k^2(s) \neq s^{-1}$ para todo $1 \leq k \leq v$ y todo $s \in S \cup S^{-1}$.*

Definición 5.12 (Modelo de configuración reducido). *Decimos que un grafo $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ pertenece al modelo $\mathcal{L}^{red}(n, v)$ si el conjunto de vértices $\mathbb{V}$ tiene $2n$ elementos, indexados por letras $s_1, \ldots, s_n$, $s_1^{-1}, \ldots, s_n^{-1}$ y el conjunto de aristas $\mathbb{E} = \{(s, \pi_k(s)) : s \in V, 1 \leq k \leq v\}$ donde π_k son permutaciones del conjunto V que cumplen que $\pi_k(s) \neq s^{-1}$ para todo k y para todo $s \in V$, elegidas de manera uniforme e independiente dentro del conjunto de permutacióñes que cumplen tal propiedad.*

Lema 5.3. *Existe un $v' \in \mathbb{N}$ tal que, si $v \geq v'$ entonces con probabilidad abrumadora, un grafo $\mathbb{G} \in \mathcal{L}^{red}(n, v)$ es conexo y cumple que $\lambda_1(\mathbb{G}) > \frac{1}{2}$.*

Demostración. Recordemos que por el teorema 5.1 el modelo de configuración cumple que existe un C independiente de v tal que con probabilidad abrumadora:

$$\lambda(\mathbb{G}) > 1 - \left(\frac{\sqrt{2v-1}}{v} + \frac{\log v}{v} + \frac{C}{v}\right).$$

Consideremos v_0 tal que $1 - \left(\frac{\sqrt{2v-1}}{v} + \frac{\log v}{v} + \frac{C}{v}\right) > \frac{1}{2}$ y sea $v \geq v_0$. Para este v, calculemos la probabilidad de que un grafo $\mathbb{G} \in \mathcal{L}(n,v)$ pertenezca a $\mathcal{L}^{red}(n,v)$. Sabemos que la probabilidad de que una permutación aleatoria no tenga puntos fijos tiende a $\frac{1}{e}$ cuando n tiende a infinito. Sea n_0 tal que si $n \geq n_0$,

$\mathbb{P}(\{\pi \in \mathbb{S}_n$ no tenga puntos fijos$\}) \geq \frac{1}{2e}$, con $n \geq n_0$. Luego:

$$\mathbb{P}\left(\{\pi_1, \ldots, \pi_v \text{ no tienen puntos fijos}\}\right) \geq \left(\frac{1}{2e}\right)^v > 0,$$

independiente de n

Y como el modelo de configuración toma de manera uniforme e independiente v permutaciones del conjunto de n elementos, entonces:

$$\mathbb{P}(\{\mathbb{G} \in \mathcal{L}^{red}(n,v)\}) \geq \mathbb{P}\left(\{\pi_1, \ldots, \pi_v \text{ no tienen puntos fijos}\}\right) > 0,$$

si $n \geq n_0$.

Entonces, el conjunto de grafos que están en $\mathcal{L}^{red}(n,v)$ visto como subconjunto de $\mathcal{L}(n,v)$ es un conjunto de probabilidad acotada por debajo por una constante mayor que cero. En consecuencia, como la probabilidad de que un grafo en $\mathcal{L}(n,v)$ tenga $\lambda_1(\mathbb{G}) \leq \frac{1}{2}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, entonces lo mismo ocurre con grafos en $\mathcal{L}^{red}(n,v)$. Luego, con probabilidad abrumadora, un grafo en $\mathcal{L}^{red}(n,v)$ cumple que $\lambda_1(\mathbb{G}) > \frac{1}{2}$.

Además, se tiene que un grafo en el modelo de configuración es conexo con probabilidad abrumadora ([**12**], Teorema 9.20). De hecho, se puede probar que un grafo aleatorio en este modelo tiene con probabilidad abrumadora un ciclo hamiltoniano, es decir, un camino que recorre todos los vértices del grafo pasando por cada uno de ellos a lo sumo una vez. Y como el conjunto $\mathcal{L}^{red}(n,v)$ tiene probabilidad mayor que cero en $\mathcal{L}(n,v)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que un grafo en $\mathcal{L}^{red}(n,v)$ es conexo con probabilidad abrumadora. □

Corolario 5.2. *Para $v \geq v'$, un grupo aleatorio en $\mathcal{F}^{red}(n,v)$ tiene propiedad (T) con probabilidad abrumadora.*

Demostración. Sea $\Gamma \in \mathcal{F}^{red}(n,v)$, $\Gamma = \langle S|R\rangle$ y sea $\mathbb{G}'$ el grafo definido de acuerdo a la definición 3.1. Sean $\mathbb{G}_i'$, $i = 1,2,3$ los grafos que particionan a $\mathbb{G}'$. Entonces, $\mathbb{G}_i'$ es un grafo con vértices en $S \cup S^{-1}$ y aristas $\{(s, \pi_k(s))\}$ con $s \in S \cup S^{-1}$ y con $1 \leq k \leq v$. Luego, los grafos $\mathbb{G}_i'$ son grafos aleatorios pertenecientes al modelo $\mathcal{L}^{red}(n,v)$. Por el lema 5.3, con probabilidad abrumadora, estos grafos son conexos y primer autovalor no nulo mayor a $\frac{1}{2}$. Luego, por el lema 3.5, $\lambda_1(\mathbb{G}') > \frac{1}{2}$ con probabilidad abrumadora. Finalmente, aplicando el criterio espectral para presentaciones triangulares, con probabilidad abrumadora, un grupo en $\mathcal{F}^{red}(n,v)$ tiene propiedad (T). □

Teorema 5.3. *Para $d > \frac{1}{3}$, un grupo en el modelo triangular $\mathcal{M}(m,d)$ tiene propiedad (T) con probabilidad abrumadora.*

Demostración. Recordemos que un grupo $\Gamma \in \mathcal{M}(n,d)$ esta presentado por $\langle S|R\rangle$ con $|S| = n$ y con $|R| = (2n-1)^{3d} = (2n-1)^{1+\epsilon}$. Particionemos a R en v subconjuntos $R_1, \ldots, R_v$ de igual cardinal, con v tal que un grupo aleatorio en $\mathcal{F}^{red}(n,v)$ tenga propiedad (T) con probabilidad abrumadora.

Definimos el grafo $\mathbb{L}_3(\Gamma_i) \in G_3^{red}(n,M)$ de manera similar a la definición 5.10, con la salvedad de que en vez de tomar relaciones en el conjunto R, las relaciones las tomamos en el subconjunto R_i. Como $|R_i| = \frac{1}{v}(2n-1)^{1+\epsilon}$, por el lema 5.2, con probabilidad abrumadora cada grafo $\mathbb{L}_3(\Gamma_i)$ tiene una familia de relaciones de la forma $\{s\pi_i^1(s)\pi_i^2\}_{s \in S \cup S^{-1}}$.

Sea $\Gamma' = \langle S|R'\rangle$, con $R' = \bigcup_{1\leq i\leq v} \{s\pi_i^1(s)\pi_i^2(s)\}_{s\in S\cup S^{-1}}$ es un grupo aleatorio perteneciente a $\mathcal{F}^{red}(n, v)$ y Γ es cociente de Γ'. Luego, como la propiedad (T) se preserva por cocientes, Γ tiene propiedad (T) con probabilidad abrumadora. □

De esta manera, tenemos que con probabilidad abrumadora, un grupo en el modelo triangular tiene propiedad (T) con probabilidad abrumadora cuando $d > \frac{1}{3}$. Para ver que d es transición de fase, necesitamos mostrar que con probabilidad abrumadora, un grupo en este modelo no tiene propiedad (T) con probabilidad abrumadora cuando $d < \frac{1}{3}$. Para eso, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.1. *Sea $d < \frac{1}{3}$, entonces con probabilidad abrumadora, un grupo en el modelo triangular tiene un cociente isomorfo a $\mathbb{F}_2$. Luego, con probabilidad abrumadora, un grupo en este modelo no tiene propiedad (T).*

Demostración. Para ver que hay un cociente que es un grupo libre, alcanza con ver que, con probabilidad abrumadora, existen dos generadores que no aparecen en ninguna relación de la presentación. El cardinal de relaciones que no toma los últimos 2 generadores es $(2m - 5)^3$, mientras que todas las palabras de longitud 3 que podemos escribir es $(2m - 1)^3$. En consecuencia, la probabilidad de tomar una de estas palabras que olvidan los últimos 2 generadores es $\frac{(2m-5)^3}{(2m-1)^3}$. Calculemos la probabilidad de que en una presentación, todas las relaciones no consideren los últimos 2 generadores.

Como elegimos $(2m - 1)^{3d}$ palabras de $W_{m,3}$ de forma uniforme e independiente, con reposición, entonces la probabilidad anterior queda:

$$\left(\frac{(2m-5)^3}{(2m-1)^3}\right)^{(2m-1)^{3d}} = \left(\frac{2m-5}{2m-1}\right)^{3(2m-1)^{3d}}.$$

Entonces, tomando límite sobre la cantidad de generadores

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2m-5}{2m-1}\right)^{3(2m-1)^{3d}} = \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{4}{2m-1}\right)^{3(2m-1)^{3d}}.$$

Este límite es igual a 1 cuando $d < \frac{1}{3}$, mientras que cuando $d > \frac{1}{3}$ este límite es 0.

Luego, cada grupo que tiene como cociente un grupo libre no tiene propiedad (T), puesto que propiedad se preserva por cocientes y mencionamos en el primer capítulo que los grupos libres no tienen propiedad (T) (Ejemplo 1.4). □

3. Propiedad (T) para el modelo de densidad de Gromov

A lo largo de este apartado, daremos una demostración completa de propiedad (T) para el modelo de densidad de Gromov. Este resultado aparece en el trabajo de Ollivier [**21**], asumiendo propiedad (T) para el modelo triangular cuando la densidad es mayor que $\frac{1}{3}$. Sin embargo, en [**21**] algunos detalles técnicos están ausentes y nuevamente son Kotowski y Kotowski, en [**16**], quienes los proveen.

Para probar el resultado, veremos que cada grupo aleatorio en el modelo de densidad tiene un subgrupo de índice finito que es isomorfo a un cociente de un grupo que tiene propiedad (T). Tal grupo será un grupo aleatorio de un modelo triangular levemente modificado, en donde los grupos este nuevo modelo tendrán propiedad (T) con probabilidad abrumadora. Luego, como tenemos propiedad (T) para este modelo triangular, tendremos propiedad (T) para el modelo de densidad.

Una de las observaciones más importantes que debemos hacer es que necesitaremos tomar una definición que flexibilice al modelo de densidad de Gromov. Esto se debe a que la existencia del subgrupo asociado a un grupo en el modelo triangular está supeditada a que las letras del conjunto de relaciones tengan longitud divisible por 3.

Cabe aclarar también que, a diferencia de lo que ocurre con el modelo triangular, no podemos afirmar nada respecto a la existencia de transición de fase para la propiedad (T). Se sabe que cuando

$d < \frac{1}{5}$ un grupo en el modelo de densidad de Gromov no tiene propiedad (T) con probabilidad abrumadora (Ollivier y Wise [**22**]). Sin embargo, hasta el momento no se sabe hasta el momento como el es comportamiento de los grupos en el modelo de denidad para los valores $d \in [\frac{1}{5}, \frac{1}{3}]$.

Comenzaremos dando una demostración informal de cómo hallar el subgrupo de índice finito isomorfo a un grupo en el modelo triangular de un grupo aleatorio en el modelo de densidad de Gromov $\mathcal{G}(m, l, d)$.

Fijemos m, l, d, donde l es divisible por 3, y sea W el conjunto de palabras reducidas en los generadores $\{a_1^{\pm}, \ldots, a_m^{\pm}\}$ de longitud $\frac{l}{3}$. Notemos que W admite una partición en subconjuntos W^+, W^- tales que $(W^+)^{-1} = W^-$ y $(W^-)^{-1} = W^+$.

Esta partición puede construirse de la siguiente manera. Tomemos $w \in W$, luego $w^{-1} \in W$ y además $w \neq w^{-1}$, de lo contrario w^2 sería la identidad en el grupo libre de m generadores. En este caso, pueden ocurrir dos cosas. Si la longitud de w es par, entonces verifica que $w = a_1 \ldots a_{\frac{l}{2}} a_{\frac{l}{2}}^{-1} a_1^{-1}$ de lo que sigue que w no es reducida. En cambio, si la longitud de w es impar, podemos escribir $w = v\overline{a}u$ donde $\overline{a}$ es la letra media de w y u, v son palabras en el grupo libre. Como w^2 es la identidad, tenemos que $u = v^{-1}$, de lo que sigue que $\overline{a}^2$ es la identidad, lo cual es absurdo. Entonces determinamos que $w \in W^+$ y $w^{-1} \in W^-$, e iteramos el proceso con $W' = W \setminus \{w, w^{-1}\}$. Como el conjunto W es finito, el proceso se termina.

Sea $n = |W^+|$, y enumeremos de manera arbitraria las palabras del conjunto W^+. Definimos el morfismo $\phi : \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \to \langle a_1, \ldots, a_m\rangle$, $\phi(b_i) = w_i$, donde w_i es la i-ésima palabra de W^+ y donde $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle$, $\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$ son los grupos libres de m y n generadores respectivamente. Si tenemos $\Gamma \in \mathcal{M}(n, d)$, $\Gamma = \langle b_1, \ldots, b_n | R\rangle$, entonces el morfismo ϕ manda una relación $b_1b_2b_3$ en una relación $\phi(b_1)\phi(b_2)\phi(b_3)$. En consecuencia ϕ se factoriza por un morfismo ψ, $\psi : \langle b_1, \ldots, b_n|R\rangle \to \langle a_1, \ldots, a_m|\phi(R)\rangle$

Si las relaciones de $\phi(R)$ tienen todas longitud l, entonces $\langle a_1, \ldots, a_m|\phi(R)\rangle$ es un grupo aleatorio en $\mathcal{G}(m, l, d)$ (con la misma densidad d). El problema radica en que la palabra $\phi(b_1)\phi(b_2)\phi(b_3)$ puede tener cancelaciones entre sí, dando lugar que su longitud sea menor que l.

En vistas a salvar esta problemática, definimos la siguiente variante al modelo triangular:

Definición 5.13 (Modelo triangular positivo). *Sea $d \in (0, 1)$. Un grupo $\Gamma \in \mathcal{M}^+(n, d)$ si admite una presentación $\Gamma = \langle S|R\rangle$, con $|S| = n$ y R un conjunto de $(2n-1)^{3d}$ relaciones tomadas de forma independiente y uniforme dentro del conjunto de relaciones de longitud 3, de manera tal que las letras de cada palabra sean letras pertenecientes a S.*

Diremos que una propiedad P ocurre con probabilidad abrumadora en este modelo si

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\Gamma \in \mathcal{M}^+(m, d) : \Gamma \textit{ tiene } P\right) = 1.$$

Observación 5.5. *Por definición, tenemos que $\mathcal{M}^+(n, d) \subset \mathcal{M}(n, d)$. Por otro lado, un grupo aleatorio $\Gamma \in \mathcal{M}(n, d)$, con probabilidad abrumadora no pertenece a $\mathcal{M}^+(n, d)$. Esto se debe a que la probabilidad de que una palabra reducida en un conjunto de n generadores es $\frac{n^3}{2n(2n-1)(2n-2)}$ que tiende a $\frac{1}{6}$ cuando n tiende a infinito. Luego, la probabilidad de que un grupo en $\mathcal{M}(n, d)$ pertenezca a $\mathcal{M}^+(n, d)$ es aproximadamente $\left(\frac{1}{6}\right)^{(2n-1)^{3d}}$, que tiende a cero cuando n tiende a infinito.*

Como consecuencia no podemos aplicar de manera directa el Teorema 5.3 para afirmar que con probabilidad abrumadora, un grupo en el modelo triangular positivo tiene propiedad (T) cuando $d > \frac{1}{3}$.

Para mostrar propiedad (T) en el modelo triangular positivo, nuevamente utilizaremos que un grupo en este modelo es cociente de un grupo aleatorio en la siguiente variante del modelo de permutación.

Definición 5.14 (Modelo de permutación positivo). *Sean $n, v \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Un grupo $\Gamma \in \mathcal{F}^+(n, v)$ si admite una presentación $\Gamma = \langle S|R\rangle$, con $|S| = n$ y R un conjunto de relaciones determinado por*

v pares de permutaciones $\{\pi_1^1, \pi_1^2\} \dots \{\pi_v^1, \pi_v^2\}$ del conjunto de permutaciones de S elegidas de manera de manera uniforme e independiente, de manera tal que $R = \bigcup_{s \in S} \{s\pi_k^1(s)\pi_k^2(s)\}_{1 \leq k \leq v}$.

Decimos que una propiedad P ocurre con probabilidad abrumadora en $\mathcal{F}^+(m, v)$ si

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\big(\Gamma \in \mathcal{F}^+(n, v) : \Gamma \text{ tiene } P\big) = 1.$$

Veamos que un grupo en este modelo tiene propiedad (T) con probabilidad abrumadora.

Proposición 5.2. *Existe un $v_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $v \geq v_0$, entonces con probabilidad abrumadora, un grupo en el modelo $\mathcal{F}^+(n, v)$ tiene propiedad (T).*

Demostración. Sea $\Gamma' \in \mathcal{F}^+(n, v)$, $\Gamma' = \langle S|R \rangle$ un grupo aleatorio y consideremos el grafo asociado $\mathbb{G}'(\Gamma')$ de acuerdo a la definición 3.1. Por definición de Γ', tal grafo tiene por conjunto de vértices a $S \cup S^{-1}$ y por conjunto de aristas a $\mathbb{E} = \bigcup_{k=1}^{v} \{(s^{-1}, \pi_k^1(s)), (\pi_k^1(s)^{-1}, \pi_k^2(s)), (\pi_k^2(s)^{-1}, s)\}_{s \in S}$. Este grafo, en este caso, es un grafo bipartito.

Descomponiendo a $\mathbb{G}'(\Gamma')$ en grafos $\mathbb{G}'_i$, $i = 1, 2, 3$ obtenemos tres grafos bipartitos v-regulares. Recordemos que cada grafo $\mathbb{G}'_i = (\mathbb{V}_i, \mathbb{E}_i)$, $i = 1, 2, 3$, se construye de la siguiente manera. El conjunto de vértices está dado por $S \cup S^{-1}$ para todo i. Por otro lado, para cada palabra $w \in R$, $w = s_1 s_2 s_3$, tenemos que $(s_1^{-1}, s_2) \in \mathbb{E}_1$, $(s_2^{-1}, s_3) \in \mathbb{E}_2$ y $(s_3^{-1}, s_1) \in \mathbb{E}_3$. Queremos ver que el primer autovalor no nulo de estos grafos es mayor a $\frac{1}{2}$. Para eso necesitamos el siguiente teorema correspondiente a Friedman [**7**]:

Teorema 5.4. *Consideremos un conjunto de vértices está dado por dos copias disjuntas del conjunto $\{1, \dots, n\}$. Sea $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un grafo bipartito, v-regular obtenido de manera tal que su conjunto de aristas $\mathbb{E} = \{(i, \pi_k(i))\}_{1 \leq k \leq v, 1 \leq i \leq n}$, donde π_k son permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ elegidas uniforme e independientemente. Entonces, dado $\epsilon > 0$*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\lambda_1(\mathbb{G}) \geq 1 - \left(\frac{\sqrt{2v}(v-1)^{\frac{1}{4}}}{v} + \frac{\epsilon}{v}\right)\right) = 1.$$

Tomando v_0 tal que $1 - \left(\frac{\sqrt{2v}(v-1)^{\frac{1}{4}}}{v} + \frac{\epsilon}{v}\right) > \frac{1}{2}$, tenemos que con probabilidad abrumadora, cada grafo $\mathbb{G}'_i$ tiene primer autovalor no nulo mayor a $\frac{1}{2}$. Aplicando Lema 3.5 tenemos que $\mathbb{G}'(\Gamma')$ tiene primer autovalor no nulo mayor a $\frac{1}{2}$.

Además tenemos que el grafo $\mathbb{G}'(\Gamma')$ es conexo (Observación 9.11 [**12**]). Luego, por el teorema 3.1, los grupos en este modelo tienen propiedad (T) con probabilidad abrumadora. □

Queremos ver que dado $\Gamma \in \mathcal{M}^+(n, d)$ existe $\Gamma' \in \mathcal{F}^+(n, v)$ tal que $\Gamma = \Gamma'/N$. Para eso, definiremos un hipergrafo $\mathbb{L}_3(\Gamma)$ y buscaremos un apareamiento perfecto en dicho hipergrafo.

Definición 5.15. *Sea $\Gamma \in \mathcal{M}^+(n, d)$, definimos un hipergrafo $\mathbb{L}_3(\Gamma)$, $\mathbb{L}_3(\Gamma) = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$, donde el conjunto $\mathbb{V} = V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3$, donde nuevamente, cada $V_i = S$. Para cada relación $w = s_1 s_2 s_3$ tenemos la hiperarista $e = (s_1, s_2, s_3)$, $s_i \in V_i$*

Observación 5.6. *Notemos que $\mathbb{L}_3(\Gamma)$ no pertenece a $G_3(n.M)$, ya que la manera de definir su conjunto de vértices no considera palabras en S^{-1}. Sin embargo, una variante del teorema 5.2 es válida para $\mathbb{L}_3(\Gamma)$. En consecuencia, si $d > \frac{1}{3}$, entonces $G_3(n.M)$ tiene un apareamiento perfecto con probabilidad abrumadora.*

Por otro lado, todas las hiperaristas de $\mathbb{L}_3(\Gamma)$ son reducidas. En consecuencia, si conseguimos un apareamiento perfecto, será necesariamente reducido.

Observación 5.7. *Si $\Gamma \in \mathcal{M}^+(n,d)$, $\Gamma = \langle S|R\rangle$ entonces con probabilidad abrumadora el conjunto R admite una subconjunto de relaciones de la forma $\{s\pi_1(s)\pi_2(s)\}_{s\in S}$ donde π_i son permutaciones del conjunto S. Por la observación 5.6, cuando $d > \frac{1}{3}$, un grafo es este modelo admite un apareamiento perfecto con probabilidad abrumadora. Luego tenemos una familia de relaciones de la forma $\{s\pi_1(s)\pi_2(s)\}_{s\in S}$.*

Observación 5.8. *Supongamos que queremos hallar v familias de relaciones $\{s\pi_1(s)\pi_2(s)\}_{s\in S}$. Entonces particionando el conjunto R en v subconjuntos R_i de igual cardinal. Luego en cada subconjunto R_i tendremos con probabilidad abrumadora un apareamiento perfecto, luego tenemos relaciones $\{s\pi_i^1(s)\pi_i^2(s)\}_{s\in S}$.*

Consideremos el grupo $\Gamma' = \langle S|R'\rangle$ donde $R' = \bigcup_{1\le i\le v} \{s\pi_i^1(s)\pi_i^2(s)\}_{s\in S}$. Luego Γ es cociente de Γ' y $\Gamma' \in \mathcal{F}^+(n,v)$.

Corolario 5.3. *Si $d > \frac{1}{3}$, entonces un grupo aleatorio en el modelo triangular positivo $\mathcal{M}^+(m,d)$ tiene propiedad (T) con probabilidad abrumadora.*

A continuación, estudiaremos las condiciones necesarias para la existencia de un morfismo que vaya del modelo triangular positivo a una variante del modelo de densidad, respetando la d. Para eso, asumiremos en un principio, que la longitud l es divisible por 3. Comenzaremos con algunas definciones:

Sean $\mathcal{A} = \{a_1,\dots,a_m\}$ un conjunto de generadores. Llamamos letras positivas a los elementos de $\mathcal{A}$. Sea $W_{\frac{l}{3}}$ el conjunto de palabras reducidas sobre $\mathcal{A}\cup\mathcal{A}^{-1}$ de longitud $\frac{l}{3}$ que comienzan y terminan con una letra positiva. Por $W_l^{'}$ notamos al conjunto de palabras $w = w_1w_2w_3$, con $w_i \in W_{\frac{l}{3}}$

Definición 5.16 (Modelo de densidad especial). *Sean $d \in (0,1)$ y l divisible por 3. Diremos que un grupo $\Gamma = \langle S|R\rangle$, $\Gamma \in \mathcal{G}^*(m,l,d)$ si $|S| = m$ y R es un conjunto de $(2n-1)^{3d}$ relaciones elegidas de forma uniforme e independiente de $W_l^{'}$, donde $n = \left|W_{\frac{l}{3}}\right|$. Una propiedad P ocurre con probabilidad abrumadora en este model si $\lim_{l\to\infty} \mathbb{P}(\Gamma \in \mathcal{G}^*(m,l,d) : \Gamma$ tiene $P\,) = 1$.*

Lema 5.4. *Con las notaciones anteriores, si $d \in (0,1)$ y $G \in \mathcal{G}^*(m,l,d)$, entonces existe un $\Gamma \in \mathcal{M}^+(n,d)$, donde $n = |W_{\frac{l}{3}}|$, y un morfismo de grupos $\phi : \Gamma \to G$ tal que $\phi(\Gamma)$ es un subgrupo de índice finito de G.*

Demostración. Fijemos m, l, d y enumeremos de manera arbitraria los elementos en $W_{\frac{l}{3}}$. Sea $\{s_1,\dots,s_n\}$ un conjunto de generadores. Definimos el morfismo $\phi : \langle s_1,\dots,s_n\rangle \to \langle a_1,\dots,a_m\rangle$, $\phi(s_i) = w_i$ donde w_i es la i-ésima palabra de $W_{\frac{l}{3}}$ y por $\langle s_1,\dots,s_n\rangle$ entendemos el grupo libre de n elementos.

Si $\Gamma = \langle S|R\rangle \in \mathcal{M}^+(n,d)$, entonces ϕ se factoriza vía $\psi : \Gamma \to \langle a_1,\dots,a_m|\phi(R)\rangle$, donde $|\phi(R)| = |R| = (2n-1)^{3d}$ y $\langle a_1,\dots,a_m|\phi(R)\rangle \in \mathcal{G}^*(m,l,d)$. Luego, el morfismo ψ manda un grupo en el modelo triangular con densidad d en un grupo en el modelo de densidad especial, con la misma densidad d. A medida que tomamos todos los grupos en el modelo triangular positivo, recuperamos todos los grupos del modelo de densidad especial.

Veamos que este morfismo tiene índice finito. Primero, notemos que por definición de nuestro morfismo ψ, $\psi(\Gamma)$ está generado por las palabras de longitud $\frac{l}{3}$ que son de la forma avb con $a,b \in \mathcal{A}$. Para probar la finitud del índce, veremos que toda palabra en $\mathcal{A}\cup\mathcal{A}^{-1}$ se puede escribir (en el grupo libre) como una palabra de la forma u,su,stu, donde s,t son palabras en $\mathcal{A}\cup\mathcal{A}^{-1}$ y $v \in \psi(\Gamma)$. Luego, la cantidad de coclases es menor o igual que $|\mathcal{A}\cup\mathcal{A}^{-1}| + |\mathcal{A}\cup\mathcal{A}^{-1}|^2$ que es finito.

Supongamos que tenemos una palabra de la forma avb^{-1} con v de longitud par, y $a,b \in \mathcal{A}$. Veamos que estén $\psi(\Gamma)$. Sea $k = \frac{l}{3} - 2$, y supongamos que la longitud de v es menor que $2k$. Entonces podemos escribir a $v = v'v''$ donde $|v'| = |v''|$, luego, $avb^{-1} = (av'ut)(bv''ut)^{-1}$ donde $t \in \mathcal{A}$ y u es una palabra arbitraria de manera tal que cada factor sea reducida. Supongamos ahora que la $|v| > 2k$. entonces podemos escribir $v = v_1 \dots v_j v' v''$ donde $|v_i| = 2k$, entonces podemos escribir $avb^{-1} = (av_1 t_1^{-1})(t_2 v_2 t_3^{-1}) \dots (av'ut)(bv''ut)^{-1}$ con t_i palabras positivas. Analogamente, podemos construir una descomposición similar si tenemos una palabra de la forma $a^{-1}vb$.

Supongamos que tenemos una palabra reducida w en $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$. Separamos en casos. Si tiene longitud impar, supongamos que w termina en una letra positiva, digamos a, consideremos una letra positiva $c \neq a$. Entonces $c^{-1}w = c^{-1}va \in \psi(\Gamma)$. Procedemos análogamente si w termina con una letra negativa. Esto termina el primer caso. Si w tiene longitud par, entonces puede pasar que $w = avb^{-1}$ o $w = a^{-1}vb$, casos que ya han sido considerados. De lo contrario, puede pasar que $w = avb$, $a, b \in \mathcal{A}$, entonces tomando $c \in \mathcal{A}$, $c \neq a$, tenemos que $c^{-1}a^{-1}vb = c^{-1}w = c^{-1}vb$ y estamos en el caso anterior. Si $w = a^{-1}vb^{-1}$, entonces tomando nuevamente $c \in \mathcal{A}$, $c \neq a$, $caw = cvb^{-1}$. Como todas estan en $\psi(\Gamma)$, concluímos la demostración. $\square$

Corolario 5.4. *Con probabilidad abrumadora, un grupo aleatorio en $\mathcal{G}^*(m, l, d)$ tiene propiedad (T) cuando $d > \frac{1}{3}$.*

Esto se desprende simplemente de notar que cuando l tiende a infinito, n tiende a infinito. En consecuencia como en $\mathcal{M}^+(n, d)$ un grupo aleatorio tiene propiedad (T) con probabilidad abrumadora, y tales grupos se mapean como subgrupos de índice finito en un grupos aleatorios en $\mathcal{G}^*(m, l, d)$, estos últimos tiene propiedad (T).

Proposición 5.3. *Sea $d > \frac{1}{3}$. Entonces, con probabilidad abrumadora, un grupo en el modelo de densidad de Gromov tiene propiedad (T) siempre y cuando l sea divisible por 3.*

Demostración. Sea $\Gamma \in \mathcal{G}(m, l, d)$, $\Gamma = \langle S | R \rangle$, entonces $|R| = (2m-1)^{ld}$. Veremos que, con probabilidad abrubadora, exise un subconjunto de relaciones $R' \subset R$ tal que $R' \subset W_l^{'}$ y $|R'| = (2n-1)^{3d'}$ con $\frac{1}{3} < d' < d$ y $n = \left| W_{\frac{l}{3}} \right|$. Luego, el grupo Γ es cociente de $\Gamma' = \langle S | R' \rangle$, $\Gamma' \in \mathcal{G}^*(m, l, d')$ y por el corolario previo, Γ' tiene propiedad (T), de lo que sigue que Γ tiene propiedad (T) con probabilidad abrumadora.

Veamos que tal $|R'|$ existe. Por definición $n = \left| W_{\frac{l}{3}} \right| = m^2(2m-1)^{\frac{l}{3}-2}$. Sea d' tal que $\frac{1}{3} < d' < d$ fijo (por ejemplo, el punto medio). Entonces,

$$|R'| = (2n-1)^{3d'} = (2m^2(2m-1)^{\frac{l}{3}-2} - 1)^{3d'} \approx \left(\frac{2m^2}{(2m-1)^2} \right)^{3d'} (2m-1)^{ld'}.$$

Calculemos la probabilidad de tener un conjunto como este. En primer lugar calculemos la probabilidad de tener una relación en $W_l^{'}$:

$$|W_l^{'}| = m(2m-1)^{l-6} \left(\frac{m}{2} + \frac{m-1}{2} \right)^3 (m-1)^2 = (2m-1)^{l-6} m(m-1)^2 \left(m - \frac{1}{2} \right)^3.$$

Por otra parte, la cantidad de palabras redicidas de longitud l es $2m(2m-1)^{l-1}$.
Luego, la probabilidad de que una palabra reducida w de longitud l esté en $W_l^{'}$ es

$$\frac{(2m-1)^{l-6} m(m-1)^2 \left(m - \frac{1}{2}\right)^3}{2m(2m-1)^{l-1}} = \frac{(m-1)^2 \left(m - \frac{1}{2}\right)^3}{2(2m-1)^5} \approx \frac{1}{6}.$$

Sean los eventos:
$A_i = \{\Gamma \text{ tiene exactamente } i \text{ relaciones en } W_l^{'}\}$
$A = \{\Gamma \text{ tiene menos de } \left(\frac{2m^2}{(2m-1)^2}\right)^{3d'} (2m-1)^{ld'} \text{ relaciones en } W_l^{'}\}$
Veamos que $\mathbb{P}(A) \longrightarrow 0$ cuando l tiende a infinito.

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{(2n-1)^{3d'}} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=0}^{(2n-1)^{3d'}} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{(2m-1)^{ld}-i} \leq$$

$$\sum_{i=0}^{(2n-1)^{3d'}} \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{(2m-1)^{ld} - \left(\frac{2m^2}{(2m-1)^2}\right)^{3d'}(2m-1)^{ld'}}.$$

Aquí usamos que $(2n-1)^{3d'} = \left(\frac{2m^2}{(2m-1)^2}\right)^{3d'} (2m-1)^{ld'}$. Luego la suma queda

$$\frac{1}{6}\left(\frac{2m^2}{(2m-1)^2}\right)^{3d'} (2m-1)^{ld'} \left(1-\frac{1}{6}\right)^{(2m-1)^{ld} - \left(\frac{2m^2}{(2m-1)^2}\right)^{3d'}(2m-1)^{ld'}} \leq$$

$$C(m,d)(2m-1)^{ld'}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{(2m-1)^{ld'}\left((2m-1)^{l(d-d')}-\omega(m,d)\right)}.$$

Donde $C(m,d)$ y $\omega(m,d)$ son constantes que no dependen de l. Un cálculo directo muestra que esta expresión tiende a 0 cuando l tiende a infinito. Luego, tenemos tal $|R'|$ con probabilidad abrumadora. □

Finalmente, lo que tenemos hasta entonces es lo siguiente

$$\lim_{l\to\infty} \mathbb{P}(\Gamma \in \mathcal{G}(m, 3l, d) : \Gamma \text{ tiene (T)}) = 1$$

si $d > \frac{1}{3}$.

Para probar el resultado para un aleatorio arbitrario, es necesario flexibilizar la condicion de tener relaciones de longitud exactamente l, por la condición levemente más débil de tener relaciones de longitudes l,$l+1$,$l+2$.

Finalizamos este apartado mostrando propiedad (T) para esta variante del modelo de densidad de Gromov, que considera relaciones de longitudes l,$l+1$,$l+2$.

Teorema 5.5. *Si consideramos $\mathcal{G}(m,l,d)$ el modelo de densidad de Gromov definido por la condición de considerar relaciones de longitudes l,$l+1$,$l+2$. Sea $d > \frac{1}{3}$, entonces un grupo aleatorio en este modelo tiene propiedad (T) con probabilidad abrumadora.*

Demostración. Sea Γ un grupo aleatorio en ese modelo. Veremos que Γ es cociente de un grupo aleatorio $\Gamma' \in \mathcal{M}(m, l_0, d')$, donde $\frac{1}{3} < d' < d$ fijo, y $l_0 \in \{l, l+1, l+2\}$ de manera tal que sea divisible por tres. Queremos ver que un grupo aleatorio Γ tiene al menos $(2m-1)^{ld'}$, relaciones de longitud divisible por 3. Notemos que el conjunto en donde tomamos las relaciones tiene cardinal $(2m-1)^l + (2m-1)^{l+1} + (2m-1)^{l+2} = (2m-1)^l(3+6m+4m^2)$. En consecuencia, la probabilidad de tomar una relación de longitud divisible por 3 siempre es mayor a $\frac{1}{(3+6m+4m^2)}$. Veamos que la probabilidad de que no tengamos tal cantidad de relaciones tiende a cero cuando l tiende a infinito.

Sean los eventos:

(1) $A_i = \{\Gamma \in \mathcal{G}(m,l,d) :$ tiene exactamente i relaciones de longitud divisible por 3$\}$,

(2) $A = \{\Gamma \in \mathcal{G}(m,l,d) :$ tiene menos de $c(2m-1)^{ld}$ relaciones divisible por 3$\}$.

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{(2m-1)^{ld'}} \mathbb{P}(A_i) \leq \sum_{i=0}^{(2m-1)^{ld'}} \left(\frac{1}{3+6m+4m^2}\right)^i \left(1-\frac{1}{3+6m+4m^2}\right)^{(2m-1)^{ld}-i} \leq$$

$$(2m-1)^{ld'}\left(1-\frac{1}{3+6m+4m^2}\right)^{(2m-1)^{ld}-(2m-1)^{ld'}} =$$

$$(2m-1)^{ld'}\left(1-\frac{1}{3+6m+4m^2}\right)^{\left((2m-1)^{l(d-d')}-1\right)(2m-1)^{ld'}}.$$

Y esta expresión tiende a 0 cuando l tiende a infinito. Aquí acotamos cada factor que aparecía en la suma por los correspondientes valor más chicos de cada uno.

Como consecuencia, con probabilidad abrumadora tenemos $(2m-1)^{ld'}$ relaciones de longitud divisible por 3. Consideremos el grupo aleatorio Υ generado por los m generadores y que tiene esas relaciones divisibles por 3, entonces Γ es un cociente de Υ y por la proposición anterior, Υ tiene propiedad (T) con probabilidad abrumadora. Luego Γ tiene propiedad (T) con probabilidad abrumadora. $\square$

Bibliografía

[1] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette. *Kazhdan's property (T)*, volume 11 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[2] D. I. Cartwright, W. Młotkowski, and T. Steger. Property (T) and $\tilde{A}_2$ groups. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 44(1):213–248, 1994.

[3] Pierre-Alain Cherix, Michael Cowling, Paul Jolissaint, Pierre Julg, and Alain Valette. *Groups with the Haagerup property*, volume 197 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. Gromov's a-T-menability.

[4] A. Connes. A factor of type II_1 with countable fundamental group. *J. Operator Theory*, 4(1):151–153, 1980.

[5] Walter Feit and Graham Higman. The nonexistence of certain generalized polygons. *J. Algebra*, 1:114–131, 1964.

[6] Joel Friedman. On the second eigenvalue and random walks in random d-regular graphs. *Combinatorica*, 11(4):331–362, 1991.

[7] Joel Friedman. Relative expanders or weakly relatively Ramanujan graphs. *Duke Math. J.*, 118(1):19–35, 2003.

[8] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

[9] M. Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, volume 182 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[10] Mikhael Gromov. Infinite groups as geometric objects. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983)*, pages 385–392. PWN, Warsaw, 1984.

[11] A. Hulanicki. Means and Følner condition on locally compact groups. *Studia Math.*, 27:87–104, 1966.

[12] Svante Janson, Tomasz Łuczak, and Andrzej Rucinski. *Random graphs*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, New York, 2000.

[13] Anders Johansson, Jeff Kahn, and Van Vu. Factors in random graphs. *Random Structures Algorithms*, 33(1):1–28, 2008.

[14] Irving Kaplansky. Solution of the "problème des ménages.". *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49:784–785, 1943.

[15] D. A. Kazhdan. On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 1:71–74, 1967.

[16] Marcin Kotowski and Michał Kotowski. Random groups and property (T): Żuk's theorem revisited. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 88(2):396–416, 2013.

[17] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial group theory*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1977 edition.

[18] G. A. Margulis. Explicit constructions of expanders. *Problemy Peredači Informacii*, 9(4):71–80, 1973.

[19] G. A. Margulis. Some remarks on invariant means. *Monatsh. Math.*, 90(3):233–235, 1980.

[20] Yann Ollivier. Critical densities for random quotients of hyperbolic groups. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(5):391–394, 2003.

[21] Yann Ollivier. *A January 2005 invitation to random groups*, volume 10 of *Ensaios Matemáticos [Mathematical Surveys]*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005.

[22] Yann Ollivier and Daniel T. Wise. Cubulating random groups at density less than 1/6. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(9):4701–4733, 2011.

[23] Joseph Rosenblatt. Uniqueness of invariant means for measure-preserving transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 265(2):623–636, 1981.

[24] Yehuda Shalom. Bounded generation and Kazhdan's property (T). *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (90):145–168 (2001), 1999.

[25] Dennis Sullivan. For $n > 3$ there is only one finitely additive rotationally invariant measure on the n-sphere defined on all Lebesgue measurable subsets. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 4(1):121–123, 1981.

[26] A. Żuk. Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups. *Geom. Funct. Anal.*, 13(3):643–670, 2003.