



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Sistemas Hamiltonianos: Integrabilidad y Simetrías

Francisco Kordon

Director: Sergio Grillo

27 de marzo de 2014

Agradecimientos

Para empezar, quiero agradecer a Sergio Grillo y a Javier Fernandez por su paciencia, colaboración y predisposición durante mi estadía en Bariloche, tanto en el proceso de confección de esta tesis como en momentos de distensión.

Han pasado muchos años desde que empecé el CBC en 2007. Me gustaría no olvidarme de los primeros años, y honestamente agradecerles a todos los docentes que me han ayudado a entender algo desde esa época. Desde 2010 que decididamente estudio matemática, y quiero destacar a Mariano Suárez-Alvarez por sus consejos y acompañamiento desde entonces.

En el plano afectivo, les agradezco a mis padres y a mi hermana por el apoyo durante toda la carrera, y a mis amigos de siempre y a los que he conocido en estos años por los buenos momentos que hemos pasado, y el aguante cuando ha sido necesario.

Finalmente, les agradezco a Daniela y a Igor. A ella, por ser mi compañera de vida, y, a él, por tener siempre la delicadeza de tirar la notebook al piso sin destruirla del todo.

Índice

1	Sistemas Hamiltonianos	3
1.1	Motivaciones desde la mecánica	3
1.2	Variedades simplécticas	6
1.3	Sistemas hamiltonianos	10
1.4	Variedades de Poisson	14
2	Integrabilidad	19
2.1	Integrabilidad Liouville	19
2.2	Integrabilidad no conmutativa	31
3	Simetrías	39
3.1	La aplicación momento	39
3.2	Equivariancia	46
3.3	Órbitas en M y órbitas en \mathfrak{g}^*	50
4	Integrabilidad y Simetrías	57
4.1	Hamiltoniano colectivo	57
4.2	Álgebras completas originadas por simetrías	59
A	Distribuciones	63
	Bibliografía	65

Introducción

Los sistemas hamiltonianos definidos en variedades son sistemas dinámicos que nacen para formalizar la descripción de problemas mecánicos, pero su definición es lo suficientemente amplia como para que resulten útiles en otros contextos. Integrar un sistema hamiltoniano es, moralmente, conseguir ecuaciones no diferenciales para sus trayectorias. En este trabajo se darán condiciones suficientes para integrar sistemas hamiltonianos y dar descripciones geométricas cualitativas de su dinámica. También, se presenta una herramienta, la aplicación momento, que generaliza los momentos de la mecánica clásica explotando simetrías y que de por sí posee importantes propiedades. Finalmente, se intenta dar una vinculación entre simetrías e integrabilidad. Se asumirá cierta familiaridad con elementos de geometría diferencial; el libro [Lee] es una excelente referencia en ese sentido.

En el capítulo primero se motiva el estudio de sistemas hamiltonianos recordando algunas ideas de mecánica clásica. Después, se presentan las variedades simplécticas y se precisa qué es un sistema hamiltoniano en una variedad simpléctica. Se concluye el capítulo con nociones de variedades de Poisson.

En el segundo capítulo se presentan dos nociones de integrabilidad. La primera, más conocida, es la integrabilidad Liouville, que asume la existencia de una determinada cantidad de constantes de movimiento en involución y nos proporciona cierta descripción geométrica de la dinámica. La segunda, la no conmutativa o superintegrabilidad, no pide que las constantes estén en involución, pero, a cambio, exige más constantes y cierta condición un tanto técnica; nos brinda otra descripción geométrica. Del prefijo «super» se puede inferir que la superintegrabilidad implica integrabilidad Liouville, cosa que a la postre resulta cierta, y además las descripciones geométricas se relacionan convenientemente.

En el tercer capítulo se presenta la aplicación momento asociada a la acción de un grupo de Lie sobre una variedad simpléctica, se estudia cuándo ésta es equivariante y se dan condiciones necesarias y suficientes para que una acción hamiltoniana admita una aplicación momento equivariante. También se le presta atención a las órbitas coadjuntas de la acción de un grupo de Lie sobre el dual de su álgebra, que resultan ser variedades sim-

plécticas, y se prueba que, bajo ciertas hipótesis, la aplicación momento es simpléctica y es además un revestimiento.

En el capítulo final se intentan vincular los anteriores. Para empezar, se estudia el caso del hamiltoniano colectivo, que traduce el sistema hamiltoniano en la variedad original a otro en las órbitas coadjuntas sirviéndose de la aplicación momento. Finalmente, se establece un teorema que en algún punto generaliza el de Noether: da condiciones suficientes en cuanto a las aplicaciones invariantes por la acción de un grupo y las que son composiciones con la aplicación momento para tener integrabilidad. Como consecuencia, se da una relación entre constantes de movimiento en la dinámica en las órbitas coadjuntas y constantes en el sistema original.

1 | Sistemas Hamiltonianos

1.1. Motivaciones desde la mecánica

En esta sección intentaremos motivar, de manera resumida y omitiendo algunos detalles, el uso de sistemas hamiltonianos en la mecánica clásica. Esto se hará sólo como motivación; para una explicación más apropiada del tema se recomienda recurrir, por ejemplo, a [Gri], [HSS], [Arn] o [AbMa], o incluso a [Gol] como referencia clásica en la física.

Consideremos un sistema de N partículas. La posición de cada partícula puede pensarse como un elemento de \mathbb{R}^3 , así que la posición del sistema se asocia a un punto de \mathbb{R}^{3N} . Las trayectorias de este sistema satisfarán las ecuaciones de Newton, esto es, la aceleración de cada partícula multiplicada por su masa coincidirá con la suma de las fuerzas que actúan sobre ella. Las fuerzas en cuestión pueden ser de todo tipo; pueden depender de las posiciones, de las velocidades. Supondremos aquí que no son sino conservativas o de vínculo. Por fuerza conservativa entenderemos aquélla que es derivada de un potencial que sólo depende de la posición, esto es, que se escribe

$$F = -\nabla V.$$

Aquí, como estamos en \mathbb{R}^{3N} , no nos preocupamos por la definición de gradiente o si conviene o no pensar las fuerzas como vectores o covectores.

Diremos que el sistema está sujeto a un vínculo —trataremos aquí sólo a los holónomos— si las trayectorias de las partículas deben vivir en la preimagen de 0 por una aplicación diferenciable $v : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$. En caso de tener varios vínculos v_1, \dots, v_k , (que suponemos independientes; sus diferenciales en cada punto son linealmente independientes), el sistema se moverá en $Q = \bigcap_{i=1}^n v_i^{-1}(0)$. Decimos que Q es el espacio de configuraciones del sistema; bajo ciertas hipótesis de regularidad, es una subvariedad de \mathbb{R}^{3N} . En este caso, $3N - k$ es el número de grados de libertad del sistema.

A los sistemas de partículas con vínculos se les puede asociar una aplicación de TQ a valores reales llamada lagrangiano. La energía cinética del sistema $T : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ se puede escribir como $T(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$, donde g es una métrica riemanniana en TQ . Si $V : Q \rightarrow \mathbb{R}$ es el potencial mecánico

del sistema, el lagrangiano se define por, para $v \in T_q Q$,

$$L(v) = T(v) - V \circ p(v) = \frac{1}{2}g(v, v) - V(q). \quad (1.1)$$

Aún en presencia de vínculos, utilizando el principio de D'Alembert, puede deducirse que las trayectorias del sistema son aquellas que cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange: en cada carta $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ inducida en TQ por una carta (q^1, \dots, q^n) en Q se satisfará que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad (1.2)$$

para cada $1 \leq i \leq n$, donde $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ es el definido en (1.1).

Definición 1.1. Llamaremos sistema lagrangiano a un par (Q, L) donde Q es una variedad y $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable. Las trayectorias del sistema son las curvas $t \mapsto \gamma(t) \in Q$ tales que en cada carta $(U, (q^1, \dots, q^n))$ se satisfacen las ecuaciones (1.2), las de Euler-Lagrange.

Hay gran cantidad de bibliografía sobre sistemas lagrangianos, y de hecho puede atacarse la mecánica desde este ángulo. Alternativamente, se puede considerar otra formulación, la hamiltoniana, que es la que nos interesa en este trabajo.

Para esto, hay que pasar por la transformada de Legendre. Si (Q, L) es un sistema lagrangiano, aquélla consiste en una aplicación $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$ definida por

$$\langle \mathbb{F}L(v), w \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(v + tw),$$

donde $v, w \in T_q Q$. A esta aplicación también se la denomina derivada a lo largo de la fibra de L . La expresión local es

$$\langle \mathbb{F}L(q, \dot{q}_1), (q, \dot{q}_2) \rangle = \left(q, \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(q, \dot{q}_1 + t\dot{q}_2) \right) = \left(q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}_1) \cdot \dot{q}_2 \right).$$

Definición 1.2. El lagrangiano L se dice hiperregular si $\mathbb{F}L$ es un difeomorfismo.

Si L es hiperregular, podemos definir la función hamiltoniana. Primero, definimos la energía $E : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ por, para $v \in TQ$,

$$E(v) := \langle \mathbb{F}L(v), v \rangle - L(v).$$

Y ahora el hamiltoniano correspondiente al lagrangiano L se define por

$$H := E \circ (\mathbb{F}L)^{-1}.$$

En coordenadas locales, si $(q, p) = \mathbb{F}L(q, \dot{q})$, es

$$H(q, p) = p \cdot \dot{q}(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p))$$

En el caso en que L es un lagrangiano mecánico —es decir, uno como el de la ecuación (1.1)—, la transformada de Legendre se ve como

$$\mathbb{F}L(v) = g(v, -).$$

La aplicación $g^\flat : TQ \ni v \mapsto g(v, -) \in T^*Q$ es inversible por la no degeneración de la métrica; notemos su inversa por g^\sharp . Así, $(\mathbb{F}L)^{-1} = g^\sharp$ y el hamiltoniano es, para $\sigma \in T_q^*Q$,

$$H(\sigma) = \frac{1}{2}g(g^\sharp(\sigma), g^\sharp(\sigma)) + V(q)$$

La siguiente proposición, que no demostraremos, dice cómo se ven las ecuaciones de movimiento sobre T^*Q .

Proposición 1.3. *Sean L un lagrangiano hiperregular y H la función hamiltoniana que recién definimos. Entonces $t \mapsto \gamma(t)$ es una trayectoria en Q del sistema lagrangiano si y sólo si se satisfacen localmente en T^*Q las ecuaciones*

$$\frac{dq^i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)), \quad \frac{dp^i}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t), p(t)). \quad (1.3)$$

para $1 \leq i \leq n$.

Las (1.3) se conocen como las ecuaciones canónicas de Hamilton, y a H se la llama función hamiltoniana del sistema. Observemos que las trayectorias del sistema en T^*Q son soluciones de ecuaciones de primer orden, así que pueden entenderse como curvas integrales de un cierto campo vectorial.

La moraleja que se quiere dejar es, precisamente, que el problema de encontrar las trayectorias de un sistema mecánico de partículas se puede traducir a otro, que consiste en encontrar las curvas integrales de un campo definido en el fibrado cotangente al espacio de configuraciones.

Ejemplo 1.4. Consideremos una partícula de masa m moviéndose en \mathbb{R}^3 sujeta a una fuerza conservativa con potencial V , definida en algún abierto de \mathbb{R}^3 ; para fijar ideas, digamos que ese abierto es todo \mathbb{R}^3 . Según la segunda ley de Newton, si $q = (q^1, q^2, q^3)$ denota un punto genérico de \mathbb{R}^3 y $t \mapsto q(t)$ la trayectoria de la partícula, ésta cumplirá las ecuaciones diferenciales, para cada i ,

$$m \frac{d^2 q^i}{dt^2}(t) = -\frac{\partial V}{\partial q^i}(q(t)). \quad (1.4)$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, es decir, aparece una derivada segunda. Para hacer de él un sistema de primer orden podemos considerar una nueva «variable»: ponemos, para cada i , $p_i = m\dot{q}^i$;

se suele llamar a estas nuevas variables momentos. Las ecuaciones de Newton se dejan reescribir entonces como

$$\frac{dq^i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)), \quad \frac{dp^i}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t), p(t)), \quad (1.5)$$

con

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q). \quad (1.6)$$

Dado que las ecuaciones que tenemos que resolver son de primer orden, podemos entenderlas como las ecuaciones para las curvas integrales de cierto campo vectorial. Efectivamente, si notamos

$$\begin{aligned} X_H : \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3) &\mapsto \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \frac{\partial H}{\partial p_3}, -\frac{\partial H}{\partial q^1}, -\frac{\partial H}{\partial q^2}, -\frac{\partial H}{\partial q^3} \right)(q, p) \\ &= \left(\frac{p_1}{m}, \frac{p_2}{m}, \frac{p_3}{m}, -\frac{\partial V}{\partial q^1}, -\frac{\partial V}{\partial q^2}, -\frac{\partial V}{\partial q^3} \right)(q, p), \end{aligned}$$

tendremos que $t \mapsto (q(t), p(t))$ es una curva integral de X_H si y sólo si se cumplen las ecuaciones (1.3), y las q 's satisfacen las (1.4). ▲

1.2. Variedades simplécticas

Hablamos en la sección anterior de que podemos pensar al espacio de configuraciones de un sistema mecánico como una variedad; su fibrado cotangente es el lugar natural para desarrollar la mecánica hamiltoniana. Ocurre que éste es una variedad simpléctica, y este hecho nos da pie para considerar sistemas hamiltonianos definidos directamente en variedades simplécticas. Resulta así conveniente estudiar algunas propiedades de ellas; recordemos primero de álgebra lineal un resultado elemental, para cuya prueba puede recurrirse a la sección de álgebra simpléctica del tercer capítulo de [AbMa].

Proposición 1.5. *Si V es un \mathbb{R} -espacio vectorial y $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal antisimétrica de rango r , entonces r es par. Además, poniendo $r = 2n$ se tiene que existe una base ordenada (v_i) de V en la que la matriz de a es*

$$\begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, si (ψ_i) es la base dual a la anterior, es $a = \sum_{i=1}^n \psi_{i+n} \wedge \psi_i$.

También, si $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal, tenemos definido su núcleo $\ker a = \{v \in V \mid a(v, w) = 0 \forall w \in V\}$. Decimos que a es no degenerada si $\ker a = 0$, es decir, si cada vez que $a(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ debe ser $v = 0$.

Sean M una variedad y ω una sección diferenciable de

$$\coprod_{x \in M} \text{Bil}(T_x M, \mathbb{R}) \rightarrow M,$$

donde, si V es un \mathbb{R} -espacio vectorial, $\text{Bil}(V, \mathbb{R})$ denota las formas bilineales de V en \mathbb{R} . Diremos que ω es no degenerada si para cada $x \in M$, ω_x , que es una forma bilineal definida en $T_x M$, es no degenerada. En tal caso, podemos construir un difeomorfismo entre las secciones diferenciables del fibrado tangente y las del cotangente de M como sigue.

Definición 1.6. Si M y ω son los de recién, definimos $\omega^\flat : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ por

$$X \mapsto X^\flat = -\iota_X \omega = \omega(-, X).$$

Cuando ω es no degenerada, la aplicación que acabamos de definir es inversible y notamos su inversa por $\omega^\sharp : \alpha \mapsto \alpha^\sharp$.

Si M admite una 2-forma no degenerada ω , por la proposición 1.5 obtenemos que $\dim M$ es par, digamos $\dim M = 2n$. A partir de ω podemos construir una $2n$ -forma, poniendo $\nu = \omega^n$. Ésta resulta una forma de volumen en M : si $x \in M$, por la misma proposición podemos considerar (ψ_i) una base dual a $T_x M$ tal que $\omega_x = \sum_{i=1}^n \psi_{i+n} \wedge \psi_i$ y en consecuencia $\nu = n!(-1)^{\frac{n}{2}} \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_{2n}$. Hemos probado, pues, lo siguiente.

Proposición 1.7. Si una variedad M admite una 2-forma no degenerada, es de dimensión par. En tal caso, M es orientable y si ω es una tal forma y $\dim M = 2n$, ω^n es una forma de volumen.

Estableceremos ahora un poco de notación. Si F es una distribución (ver Apéndice A), definimos la distribución ortogonal simpléctica F^ω poniendo, para cada $x \in M$,

$$F_x^\omega = \{v \in T_x M \mid \omega(v, w) = 0 \text{ si } w \in F_x M\}. \quad (1.7)$$

Definición 1.8. Diremos que F es isotrópica si $F \subset F^\omega$ y coisotrópica si vale la otra inclusión.

El siguiente teorema, que data de 1882, establece que si M admite una 2-forma no degenerada que además es cerrada, se le puede conocer una expresión local. La prueba es la que aparece en [AbMa], y es atribuida a Moser y Weinstein.

Teorema 1.9 (Darboux). *Sea ω una 2-forma no degenerada en M , una variedad de dimensión $2n$. Entonces $d\omega = 0$ si y sólo si para cada $x \in M$ existe una carta (U, φ) tal que $\varphi(x) = 0$ y si $\varphi(x) = (x_1(x), \dots, x_n(x), y_1(x), \dots, y_n(x))$, es*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i. \quad (1.8)$$

Demostración. Si ω se escribe localmente como en (1.8), es evidentemente cerrada. Recíprocamente, supongamos que es cerrada y busquemos una carta en la que tiene esa expresión. Para esto, podemos suponer que $M = \mathbb{R}^{2n}$; fijemos $x = 0$. Sea ω_1 una forma constantemente igual a $\omega(0)$ y pongamos $\tilde{\omega} = \omega_1 - \omega$, para cada $0 \leq t \leq 1$, $\omega_t = \omega + t\tilde{\omega}$. Para cada t , $\omega_t(0) = \omega(0)$ es no degenerada, y entonces existe un entorno de 0 —digamos una bola— en que ω_t es no degenerada para todo t . Por el lema de Poincaré, $\omega = d\alpha$ allí; podemos suponer que $\alpha(0) = 0$. Sea $X_t = \omega^\sharp(\alpha)$. Tenemos localmente definido el flujo de X_t , llamémoslo g_t , con $g_0 = Id$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_t^*\omega_t) &= g_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t) + g_t^*\frac{d}{dt}\omega_t = g_t^*d_{X_t}\omega - g_t^*\tilde{\omega} = \\ &= g_t^*(-d\alpha - \tilde{\omega}) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $g_1^*\omega_1 = g_0^*\omega_0 = \omega$, así que g_1 da el cambio de coordenadas que transforma ω en la forma constante ω_1 . \square

Las cartas del teorema de Darboux serán llamadas cartas simplécticas, las funciones x_i, y_i coordenadas canónicas. Estamos en condiciones de hablar de variedades simplécticas.

Definición 1.10. *Una forma simpléctica en una variedad M es una 2-forma cerrada no degenerada ω . Una variedad simpléctica (M, ω) es una variedad M junto con una forma simpléctica ω .*

Ejemplo 1.11. En $\mathbb{R}^{2n} = \{(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)\}$ puede ponerse una estructura simpléctica ω . La definimos dando su matriz en la base «canónica» $[\omega]$:

$$[\omega] = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

donde I_n denota la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Si $(dq^1, \dots, dq^n, dp_1, \dots, dp_n)$ es la base dual a la canónica, se escribe $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$.

▲

Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Si ponemos $\nu_\omega = \frac{(-1)^{n/2}}{n!}\omega^n$, razonando como antes de la Proposición 1.7, ésta resulta una forma de volumen y, en virtud del teorema de Darboux, se tiene que en cartas simplécticas es

$$\nu_\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge x_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n. \quad (1.9)$$

Definición 1.12. Sean (M, ω) y (N, ρ) variedades simplécticas. Una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ es simpléctica o transformación canónica si $f^*\rho = \omega$.

Observemos que si $f : (M^{2n}, \omega) \rightarrow (N^{2n}, \rho)$ es simpléctica, como los elementos de volumen ν_ω y ν_ρ se obtienen a partir de las formas simplécticas, se tendrá que f conserva la forma de volumen. También, para cada x en M se pueden tomar coordenadas simplécticas y lo propio puede hacerse en $f(x)$. En estas coordenadas, f es la identidad, y en particular f es un difeomorfismo local.

En mecánica, típicamente el planteo del problema sucede en el fibrado cotangente del espacio de configuraciones Q . Allí puede ponerse una 2-forma diferencial no degenerada y exacta, y de esta manera hacer de T^*Q una variedad simpléctica. Para una demostración del siguiente teorema, se sugiere recurrir a [AbMa].

Teorema 1.13. Sea Q una variedad, escribamos $M = T^*Q$ y llamemos $\pi : M \rightarrow Q$ a la proyección. Si $\alpha \in M$, definimos

$$\begin{aligned} \theta_\alpha : T_\alpha M &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto \langle \alpha, d\pi_\alpha(w) \rangle. \end{aligned}$$

Entonces $\theta : \alpha \mapsto \theta_\alpha$ es una 1-forma en M y su diferencial es una forma simpléctica en M , con lo que $(M, d\theta)$ resulta una variedad simpléctica.

Puede recuperarse del Teorema 1.13 que los fibrados cotangentes son orientables. Como ω es no degenerada, la aplicación definida en la Definición 1.6 induce un difeomorfismo entre TQ y T^*Q , y de esta manera también recuperamos que los fibrados tangentes son orientables.

Llamemos $\omega = d\theta$. Si notamos (q^1, \dots, q^n) a las coordenadas en Q y $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ las de M , obtenemos las siguientes expresiones locales:

$$\theta = \sum_{i=1}^n p_i dq^i, \quad (1.10)$$

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i. \quad (1.11)$$

La 1-forma canónica tiene una propiedad que la caracteriza: $\beta^*\theta = \beta$ para todas las 1-formas β de Q . En efecto, si $\beta \in \Omega^1(Q)$ y $v \in T_q Q$,

$$\begin{aligned} \langle \beta^*\theta(q), v \rangle &= \langle \theta(\beta(q)), d\beta_q(v) \rangle = \langle \beta(q), d\pi_{\beta(q)} d\beta_q(v) \rangle \\ &= \langle \beta(q), d(\pi \circ \beta)_q(v) \rangle = \langle \beta(q), v \rangle, \end{aligned}$$

en virtud de la regla de la cadena y que $\pi \circ \beta = 1_Q$.

La siguiente proposición nos será útil para levantar acciones de un grupo en una variedad a acciones a su cotangente; en particular esto servirá

para levantar acciones al espacio de configuraciones a otras al espacio de fases.

Proposición 1.14. *Sea Q una variedad y $f : Q \rightarrow Q$ un difeomorfismo. Entonces f^* preserva la 1-forma canónica: $(f^*)^*\theta = \theta$.*

Demostración. Sea $w \in T_{\alpha_q}^*Q$. Es, en virtud de la regla de la cadena y que $f \circ \pi \circ f^* = d\pi$,

$$\begin{aligned} (f^*)^*\theta(w) &= \theta(d(f^*)w) = \langle f^*(\alpha_q), d\pi d(f^*)w \rangle \\ &= \langle \alpha_q, df d\pi d(f^*)w \rangle = \langle \alpha_q, d(f \circ \pi \circ f^*)w \rangle \\ &= \langle \alpha_q, d\pi(w) \rangle = \theta_{\alpha_q}(w). \end{aligned}$$

Concluimos así que $(f^*)^*\theta = \theta$. □

1.3. Sistemas hamiltonianos

Una familia bastante amplia de sistemas dinámicos es la de aquellos que se describen mediante una variedad y un campo vectorial en ella; las trayectorias del sistema son las curvas integrales de este campo. En muchos casos, este campo es un campo gradiente: si f es una función a valores reales definida en la variedad y g es una métrica riemanniana, el campo vectorial que define el sistema dinámico es el único X tal que $g(X, -) = df$.

Algo muy similar puede hacerse cuando, en vez de considerar una variedad riemanniana, se considera una variedad simpléctica. El campo hamiltoniano asociado a una función f será aquél que al contraer a la forma simpléctica coincide con (menos) la diferencial de f . La antisimetría de la forma simpléctica llevará a propiedades conservativas de los campos hamiltonianos, esto no sucede típicamente con los campos gradientes, donde la simetría de la métrica induce más bien propiedades disipativas.

Definición 1.15. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos el campo vectorial hamiltoniano asociado a H , X_H , como el único campo vectorial que cumple*

$$\omega(Y, X_H) = \langle dH, Y \rangle \tag{1.12}$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, o, equivalentemente, $-\iota_{X_H}\omega = dH$. La existencia de este campo está garantizada por la no degeneración de ω .

Llamamos a la terna (M, ω, H) sistema hamiltoniano; las trayectorias del sistema son las curvas integrales de X_H .

Observemos que $X_H = \omega^\sharp(dH)$; esta concisa escritura de el campo hamiltoniano nos será útil en varios cálculos en lo sucesivo.

Ejemplo 1.16. Sea (M, ω, H) un sistema hamiltoniano. Sean $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ coordenadas canónicas para ω . Encontremos una expresión local de X_H en

estas coordenadas. Pongamos, omitiendo el símbolo de sumatoria, $X_H = a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i}$. Como $\omega = dp_i \wedge dq^i$, es $-\iota_{X_H} \omega = a^i dp_i - b_i dq^i$. Ahora, como queremos que esto sea igual a $dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$, debe ser $a^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ y también $b_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$. Por lo tanto, en estas coordenadas, se escribe

$$X_H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}. \quad (1.13)$$

En particular, $(q^1(t), \dots, q^n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ es una trayectoria del sistema si y solo si, para todo $1 \leq i \leq n$, es

$$\frac{dq^i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)), \quad \frac{dp^i}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t), p(t)).$$

Las ecuaciones de recién son las llamadas ecuaciones de Hamilton o ecuaciones canónicas: son las mismas que (1.3). Si pensamos que H es el hamiltoniano (sin dependencia explícita en el tiempo) de un sistema mecánico en el sentido clásico, recuperamos la formulación hamiltoniana más conocida de los problemas de mecánica, como aparecen por ejemplo en el libro de Goldstein [Gol] o en el de Landau, o en el apunte [Min]. ▲

Proposición 1.17. Si (M, ω, H) es un sistema hamiltoniano, y $t \mapsto c(t)$ es una curva integral de X_H , entonces H es constante a lo largo de c .

Demostración. Para ver que $H(c(t))$ es constante en t , veremos que su derivada se anula:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(c(t)) &= dH_{c(t)} \dot{c}(t) = \langle dH_{c(t)}, X_H(c(t)) \rangle \\ &= -\omega(X_H(c(t)), X_H(c(t))) = 0, \end{aligned}$$

en virtud de la antisimetría de ω . □

Observemos, continuando el paralelismo entre campos hamiltonianos y gradientes introducido al principio de esta sección, que la reciente proposición no es cierta en caso de tener campos gradientes: de hecho, las curvas integrales del gradiente son, en cada punto, las direcciones de máximo crecimiento de la función.

Ejemplo 1.18. La proposición anterior también puede probarse usando las expresiones locales encontradas en el Ejemplo 1.16:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(c(t)) = \langle dH_{c(t)}, \dot{c}(t) \rangle = \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial h}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q^i} \right) = 0,$$

con $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ coordenadas canónicas. ▲

Otro hecho para destacar es que los flujos de los campos hamiltonianos son transformaciones canónicas, y en particular preservan el volumen. En el caso en que nuestra variedad simpléctica viene de la mecánica clásica, recuperamos el llamado Teorema de Liouville que aparece en textos clásicos como [Min] o [Gol].

Proposición 1.19. Sean (M, ω, H) un sistema hamiltoniano y ϕ_t el flujo del campo. Entonces, para cada t , $\phi_t^* \omega = \omega$.

Demostración. Veremos que $\phi_t^* \omega$ es constante en t . En efecto, usando la conocida relación entre flujos y derivadas de Lie, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* \omega &= \phi_t^* \mathcal{L}_{X_H} \omega = \phi_t^* (\iota_{X_H} d\omega + d\iota_{X_H} \omega) \\ &= \phi_t^* (0 - ddH) = 0, \end{aligned}$$

puesto que ω es cerrada. Ahora, como $\phi_0 = 1_M$, resulta que $\phi_t^* \omega = \phi_0^* \omega = \omega$ cualquiera sea t . \square

En general, no todos los campos vectoriales son campos hamiltonianos; es decir, no es cierto que para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ exista una función $f \in C^\infty(M)$ tal que $X = X_f$. Ciertamente, se requiere es que $\omega(-, X)$ sea exacta para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y esto no es para nada cierto en general, ni siquiera localmente. En virtud de la igualdad $\mathcal{L}_X \omega = d\iota_X \omega$ (ω es cerrada) y del Lema de Poincaré, que un campo X sea localmente hamiltoniano es equivalente a que la derivada de Lie de la forma simpléctica respecto de X se anule.

Por supuesto, un campo hamiltoniano es localmente hamiltoniano, así que una condición necesaria para que un campo X sea hamiltoniano es que $\mathcal{L}_X \omega = 0$. Ahora, para que efectivamente lo sea se necesita que además $\iota_X \omega$ sea exacta. En particular, si el primer grupo de cohomología de De Rham de M es nulo, los campos hamiltonianos son exactamente los localmente hamiltonianos.

Ejemplo 1.20. Si en el toro T^2 identificamos las coordenadas angulares x, y ; $\omega = dy \wedge dx$ es una forma simpléctica. Si $a, b \in \mathbb{R}$, consideramos el campo vectorial definido por $X(x, y) = (a, b)$. Es $\iota_X \omega = a dy - b dx$, que es evidentemente cerrada, y por lo tanto X es localmente hamiltoniano. Sin embargo, X no es hamiltoniano globalmente: si $X = X_H$, de la compacidad de T^2 se sigue que H tiene, por ejemplo, un máximo local y allí se anula su diferencial, mientras que $\iota_X \omega$ nunca es cero. \blacktriangle

Si (M, ω) es una variedad simpléctica, puede definirse en ella lo que llamaremos corchetes de Poisson. Éstos ya aparecían en los textos clásicos de mecánica y resultaban de gran utilidad; el concepto se ha generalizado bastante desde entonces y en la Subsección 1.4 se abordará un poco más el tema.

Definición 1.21. Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Si $f, g \in C^\infty(M)$, el corchete de Poisson entre f y g es, por definición, el elemento de $C^\infty(M)$ dado por

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g). \quad (1.14)$$

Notemos que esto es igual a $-\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega$ y también a $X_f(g)$.

Observemos que de la antisimetría de ω sigue que $\{f, g\} = -\{g, f\}$ cualesquiera sean $f, g \in C^\infty(M)$. La siguiente propiedad ilustra la utilidad de los corchetes de Poisson en la consideración de constantes de movimiento, esto es, en las funciones a valores reales que son constantes en las trayectorias del sistema.

Proposición 1.22. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $f, g \in C^\infty(M)$.

- (i) Es $\{f, g\} = \mathcal{L}_{X_f}g = -\mathcal{L}_{X_g}f$.
- (ii) Si $h \in C^\infty(M)$, la aplicación $g \mapsto \{h, g\}$ es una derivación en $C^\infty(M)$.
- (iii) Como consecuencia de lo anterior, f es constante en las curvas integrales de X_g si y sólo si $\{f, g\} = 0$.

Demostración. Para el primer inciso, observemos que $\mathcal{L}_{X_f}g = \iota_{X_f}dg = -\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega$, esto último es el corchete entre f y g . El segundo es consecuencia directa del primero.

Para el último, sea ϕ_t el flujo del campo X_f . Se tiene

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g \circ \phi_t) = \phi_t^* \mathcal{L}_{X_f}g = \phi_t^* \{f, g\}.$$

El lado derecho se anula sólo cuando $\{f, g\}$, y el lado izquierdo se anula si y solo si $g \circ \phi_t$ es constante en t , i.e., si g es constante en las trayectorias de X_f . \square

Debido a la antisimetría del corchete de Poisson, se tiene que f es constante en las curvas integrales de X_g si y sólo si g lo es en las de X_f . Se deduce, también de la antisimetría, que en un sistema hamiltoniano el hamiltoniano es constante en las trayectorias del sistema.

Ejemplo 1.23. Si $f, g \in C^\infty(M)$, escribamos la expresión de su corchete de Poisson en coordenadas canónicas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$. Era $\{f, g\} = X_f(g)$ y usando la expresión (1.13) obtenemos

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i},$$

lo que coincide con la expresión usual del corchete de Poisson que aparece en los textos clásicos de mecánica —a menos, depende de las convenciones, de un signo—. \blacktriangle

El corchete de Poisson puede utilizarse también para escribir las ecuaciones de movimiento sin mencionar explícitamente a la forma simpléctica. En algún punto, esto es una motivación para considerar sistemas dinámicos cuyas ecuaciones de movimiento estén dadas por expresiones como las que siguen, pero que el corchete de Poisson no provenga de una forma simpléctica. Estas ideas se desarrollarán, como decíamos antes, en la Sección 1.4.

Proposición 1.24. Sean (M, ω, H) un sistema hamiltoniano, y ϕ_t el flujo del campo X_H . Entonces, si $f \in C^\infty(M)$, es

$$\frac{d}{dt}(f \circ \phi_t) = \{H, f \circ \phi_t\}. \quad (1.15)$$

Demostración. Es, en virtud de la relación entre el flujo de un campo y la derivada de Lie respecto de él,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \phi_t) &= \frac{d}{dt}\phi_t^* f = \phi_t^* \mathcal{L}_{X_H} f = \\ &= \mathcal{L}_{X_H}(f \circ \phi_t) = \{H, f \circ \phi_t\}, \end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

Para terminar la sección, observemos que el corchete que definimos satisface la llamada *identidad de Jacobi*: es, si $f, g, h \in C^\infty(M)$,

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0.$$

Puede encontrarse en [LiMa], [Arn] o [AbMa] una prueba de esta afirmación. Como consecuencia, se tiene que $C^\infty(M)$ junto con el corchete es un álgebra de Lie.

1.4. Variedades de Poisson

Al trabajar en variedades simplécticas, encontramos que los corchetes de Poisson definidos en (1.14) cumplen un rol importante. Sin embargo, aún en variedades no simplécticas pueden definirse corchetes parecidos a estos. Los llamaremos corchetes de Poisson; por supuesto que los definidos en variedades simplécticas serán un caso particular. En [LiMa, III.8.1] se hace una breve reseña histórica.

Definición 1.25. Una estructura de Poisson en una variedad diferenciable M consiste en una forma \mathbb{R} -bilineal $C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, que denotaremos por $\{, \}$ y llamaremos el corchete de Poisson, que es antisimétrica, satisface la identidad de Jacobi y es una derivación en cada argumento. Una variedad equipada con esta estructura se llama variedad de Poisson.

El \mathbb{R} -espacio vectorial $C^\infty(M)$ está entonces equipado con dos estructuras: el producto usual hace de ella un álgebra, y el corchete de Poisson la hace un álgebra de Lie. Ambas estructuras están relacionadas por la última condición, que se puede expresar diciendo que $\text{ad}_f : C^\infty(M) \ni g \mapsto \{f, g\} \in C^\infty(M)$ es una derivación de $C^\infty(M)$ pensada como álgebra con el producto usual, cualquiera sea $f \in C^\infty(M)$.

Un *álgebra de Poisson* es un espacio vectorial real equipado con una estructura de álgebra asociativa y otra de álgebra de Lie que se acoplan según la propiedad del párrafo anterior.

Ejemplo 1.26. Si (M, ω) es una variedad simpléctica, ya hemos visto que ω nos permite definir un corchete de Poisson. Ésta, por supuesto, satisface las propiedades de la Definición 1.25. En este caso decimos que la estructura de Poisson está asociada con la estructura simpléctica definida por ω . ▲

Ejemplo 1.27. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie sobre \mathbb{R} de dimensión finita; denotemos el corchete aquí por $[-, -]$. Si f y g son dos funciones en $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, en cada punto $x \in \mathfrak{g}^*$ tenemos que $df(x)$ y $dg(x)$ son dos formas lineales en \mathfrak{g}^* , y podemos por lo tanto mirarlas como elementos de \mathfrak{g} . Podemos entonces definir una aplicación $\{f, g\} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ poniendo para cada $x \in \mathfrak{g}^*$

$$\{f, g\}(x) = \langle x, [df(x), dg(x)] \rangle. \quad (1.16)$$

El corchete recién definido hace de \mathfrak{g}^* una variedad de Poisson. La \mathbb{R} -bilinealidad es evidente, fijado $x \in \mathfrak{g}^*$, a partir de las linealidades de la diferencial de de Rham, del corchete en \mathfrak{g} y de x . La antisimetría está heredada de la del corchete en \mathfrak{g} . La identidad de Jacobi es consecuencia de la de \mathfrak{g} y de que $d\{f, g\}(x) = [df(x), dg(x)]$ si $x \in \mathfrak{g}$, $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Finalmente, cualquiera sea $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, ad_f es una derivación: basta reemplazar en la definición de $\{f, gh\}$ —dadas $g, h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ — $d(gh)$ por $hdg + gdh$. ▲

Proposición 1.28. Sean M una variedad de Poisson y $f \in C^\infty(M)$. Asociamos a f el campo $X_f \in \mathfrak{X}(M)$ definido por

$$X_f(g) = \{f, g\} \quad \forall g \in C^\infty(M);$$

este campo se llama el campo hamiltoniano asociado a f . La aplicación $f \mapsto X_f$ es un morfismo de álgebras de Lie.

Demostración. Evidentemente, como ad_f es una derivación en $C^\infty(M)$, es un campo vectorial. Si $f, g, h \in C^\infty \mathfrak{g}^*$, se tiene

$$\begin{aligned} [X_f, X_g]h &= X_f(X_g h) - X_g(X_f h) = \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = \{\{f, g\}, h\}, \end{aligned}$$

en virtud de la identidad de Jacobi. Concluimos entonces que $[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}$. □

La estructura que hace de M una variedad de Poisson puede verse «infinitesimalmente». Para eso introducimos la siguiente herramienta.

Definición 1.29. *Puede probarse que en cada variedad de Poisson M , existe una sección diferenciable Λ de la proyección $\coprod_{x \in M} \text{Alt}^2(T_x^*M, \mathbb{R}) \rightarrow M$ que cumple*

$$\Lambda_x(df(x), dg(x)) = \{f, g\}(x).$$

Λ se llama el bivector de Poisson; la variedad junto con esta estructura se nota (M, Λ) .

Es de observar que si partimos de una variedad junto con una sección diferenciable Λ de $\coprod_{x \in M} \text{Alt}^2(T_x^*M, \mathbb{R}) \rightarrow M$, se tiene automáticamente un corchete para funciones; en efecto, es $\{f, g\}(x) = \Lambda_x(df(x), dg(x))$ para $f, g \in C^\infty(M)$, $x \in M$.

Ejemplo 1.30. Si (M, ω) es una variedad simpléctica, es también una variedad de Poisson. Su bivector cumple

$$\Lambda(df, dg) = \{f, g\} = \omega(X_f, X_g).$$

Como esto último es igual a $\langle dg, X_f \rangle = X_f(g)$, se tiene que, en particular, la definición de campo hamiltoniano en variedades simplécticas es consistente con la que se dió para variedades de Poisson. ▲

Por supuesto que una variedad de Poisson no es necesariamente simpléctica; esto es equivalente a que lo que un par de párrafos más adelante llamaremos el rango de la estructura sea siempre maximal. Sin embargo, también más adelante, veremos que puede ponerse una estructura simpléctica «de a pedacitos».

Morfismos de Poisson. Sean (M_1, M_2) dos variedades de Poisson y sea $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ una función diferenciable.

Definición 1.31. φ es un morfismo de Poisson si cada vez que $f, g \in C^\infty(M_2)$, se tiene que $\varphi^*\{f, g\} = \{\varphi^*f, \varphi^*g\}$.

Si $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ y $\psi : M_2 \rightarrow M_3$ son morfismos de Poisson, evidentemente también lo es $\psi \circ \varphi$. También, si ϕ y $\psi \circ \varphi$ son morfismos de Poisson, y además φ es sobreyectiva, entonces ψ es un morfismo de Poisson. En particular, si φ es un morfismo de Poisson y un difeomorfismo, φ^{-1} es también morfismo de Poisson. Decimos en tal caso que φ es un difeomorfismo de Poisson.

Estructura local de las variedades de Poisson. Dado (M, Λ) , podemos poner, para cada $x \in M$, $\Lambda_x^\sharp : T_x^*M \ni \alpha \mapsto \Lambda(\alpha, -) \in T_xM$; la aplicación $\Lambda^\sharp : T^*M \rightarrow TM$ es entonces un morfismo de fibrados. La distribución característica de (M, Λ) se define por

$$C = \Lambda^\sharp(T^*M).$$

La dimensión de $C_x = \Lambda_x^\sharp(T_x^*M)$ se llama el rango de la estructura de Poisson en x . Razonando como en la Proposición 1.5 puede observarse que el rango de la estructura de Poisson en siempre un número par.

El siguiente teorema, cuya demostración puede verse en la sección once del tercer capítulo de [LiMa], será útil en la segunda parte de este trabajo.

Teorema 1.32. *Sea (M, Λ) una variedad de Poisson de dimensión m . Sea $x \in M$ tal que el rango de la estructura de Poisson es $2r \in \{1, \dots, m\}$ en un entorno de x . Entonces existe una carta (U, φ) alrededor de x tal que las funciones coordenadas, que denotaremos $q_1, \dots, q_r, p_1, \dots, p_r, k_1, \dots, k_{m-2r}$, cumplen que*

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, k_s\} = \{p_i, k_s\} = 0, \quad \{k_s, k_t\} = 0; \quad (1.17)$$

cualesquiera sean $1 \leq i, j \leq r, 1 \leq s, t \leq m - 2r$.

A continuación concretaremos la idea que antes anticipábamos de ver en qué manera una estructura de Poisson nos puede dar una estructura simpléctica en alguna variedad inmersa en M .

Teorema 1.33. *Sea (M, Λ) una variedad de Poisson. Entonces su distribución característica $C = \Lambda^\sharp(T^*M)$ es una distribución diferenciable y completamente integrable. En cada hoja de la foliación definida por C existe una única estructura simpléctica tal que la inyección de la hoja en M es un morfismo de Poisson.*

Las hojas del teorema previo se llaman las *hojas simplécticas de (M, Λ)* .

Demostración. La distribución característica C es diferenciable porque está generada por campos vectoriales hamiltonianos. Sea $x \in M$. Si $\Lambda_x = 0$, la variedad integral de C que pasa por x es $\{x\}$. Asumamos ahora que el rango es $2p$, con $p > 0$. Sea $q_1, \dots, q_r, p_1, \dots, p_r, k_1, \dots, k_{m-2p}$ un sistema de coordenadas definido en un entorno de x que cumplen (1.17), como en el Teorema 1.32. Las ecuaciones $k_i = k_i(x)$ ($1 \leq i \leq m - 2p$) definen una subvariedad N de M de dimensión $2p$; eventualmente achicando el entorno de x , podemos asegurar que N es conexa.

El espacio tangente a N en x es el generado por los ∂_q 's y los ∂_p 's, que coincide con C : en efecto, C está generado por los $\Lambda(dq_i, -)$ y los $\Lambda(dp_j, -)$, que se anulan al contraerlos con cualquier dk_s . Por lo tanto, deben estar en el generado por ∂_q 's y los ∂_p 's, es decir el tangente a N . Las condiciones de dimensionalidad garantizan la igualdad: C es completamente integrable y N es una variedad integral.

La expresión $\Omega_N = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ define una 2-forma simpléctica en N ; la inyección de N en M es un morfismo de Poisson. Ahora, por el Teorema del Apéndice A, N es un abierto de la foliación generalizada en M definida por C . Por la arbitrariedad del x de antes y la unicidad de Ω_N , existe una única forma simpléctica en toda la hoja que se restringe a las Ω_N . \square

2 | Integrabilidad

2.1. Integrabilidad Liouville

Daremos en lo siguiente una definición de integrabilidad de sistemas hamiltonianos. Es cierto que cuanto más constantes de movimiento moralmente independientes tenga un sistema hamiltoniano, más condicionada estará su dinámica y ciertamente será más accesible encontrar sus trayectorias. El teorema clave de esta sección, el de Liouville-Arnold, da condiciones necesarias para encontrar las trayectorias del sistema a menos de cuadraturas; un sistema hamiltoniano que esté en las hipótesis del teorema se dirá integrable Liouville. Según comenta Arnold, «el teorema cubre todos los problemas de dinámica que han sido integrados hasta el presente día» [Arn, pág 273]. Por supuesto no daremos una demostración de esta altisonante afirmación; sí algunos ejemplos donde se aplica el teorema, ni bien lo hayamos formulado.

Sean (M, ω) una $2n$ -variedad simpléctica, $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave y X_H su campo hamiltoniano asociado; notemos al sistema hamiltoniano así determinado (M^{2n}, ω, H) .

Definición 2.1 (Integrabilidad Liouville). *El sistema hamiltoniano es integrable Liouville si existen funciones $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M)$ tales que*

1. f_1, \dots, f_n son integrales de X_H , es decir, son constantes a lo largo de sus curvas integrales;
2. f_1, \dots, f_n son independientes: $\{df_i(x)\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente para todo x en M ;
3. $\{f_i, f_j\} = 0$ para cualesquiera i, j ; y, por último,
4. Los campos $X_i := \omega^\sharp(df_i) \in \mathfrak{X}(M)$ son completos: sus curvas integrales tienen dominio \mathbb{R} .

La descomposición de M^{2n} en componentes conexas de las superficies de nivel de $f = (f_1, \dots, f_n)$ se llama la foliación de Liouville correspondiente al sistema integrable X_H , y a la postre resulta no depender de f . En efecto,

esto sigue de que cada una de estas componentes conexas puede obtenerse como la clausura de la unión de las imágenes de las trayectorias que allí empiezan. El teorema de Liouville describe la estructura de la foliación de Liouville cerca de hojas regulares, que son la preimagen de valores regulares. Vale aclarar o recordar que $c \in \mathbb{R}^n$ es un valor regular de f si $\{df_i(x)\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente para cada $x \in M_c = f^{-1}(c)$.

Teorema 2.2 (Liouville-Arnold). *Fijemos (M^{2n}, ω, H) un sistema hamiltoniano integrable Liouville y sea M_c una hoja de $f = (f_1, \dots, f_n)$. Entonces*

1. M_c es una variedad de dimensión n , Lagrangiana ($\omega = 0$ allí) e invariante respecto a X_i para todo i ;
2. y si M_c es conexo y compacto, entonces es difeomorfo a T^n , el llamado toro de Liouville.
3. La foliación de Liouville es trivial en un entorno del toro de Liouville: existe un entorno U de M_c que es difeomorfo a $T^n \times D^n$ por un difeomorfismo que preserva las hojas, y más aún:
4. en $U = T^n \times D^n$ hay un sistema de coordenadas, las variables ángulo-acción $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, donde las primeras son coordenadas en el disco y las últimas en el toro, tales que
 - a) $\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$,
 - b) las variables de acción dependen exclusivamente de f , y
 - c) el flujo de X_H en las coordenadas ángulo-acción se endereza: las derivadas de s_i y de φ_i son nulas y constantes, respectivamente.

Ejemplo 2.3. Consideremos el caso de una partícula que se puede mover en una sola dirección sujeta a la acción de un potencial $V = V(x)$, que depende sólo de la distancia a un punto fijo. El espacio de configuraciones es de dimensión 1, el fibrado cotangente de dimensión 2, y se tiene una constante de movimiento, la energía. Supongamos que V tiene la pinta de la Figura 2.1.

A energía constante, el movimiento será oscilatorio: las hojas M_c son difeomorfas al toro de dimensión 1.

Consideremos ahora el caso de la Figura 2.2.

Aquí, si la energía tiene valores no negativos, M_{E_1} será difeomorfo a \mathbb{R} y si no, M_{E_2} lo será al toro de dimensión 1.

Por último, miremos el potencial de la Figura 2.3.

Las hojas aquí no son todas conexas, y, dependiendo de cuál es el valor de la energía, algunas componentes conexas son difeomorfas al toro y otras a \mathbb{R} . ▲

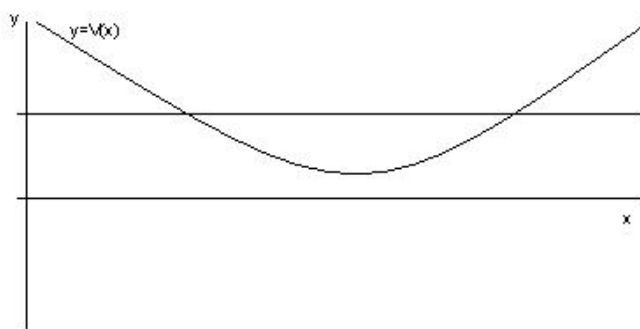


Figura 2.1: Primer potencial

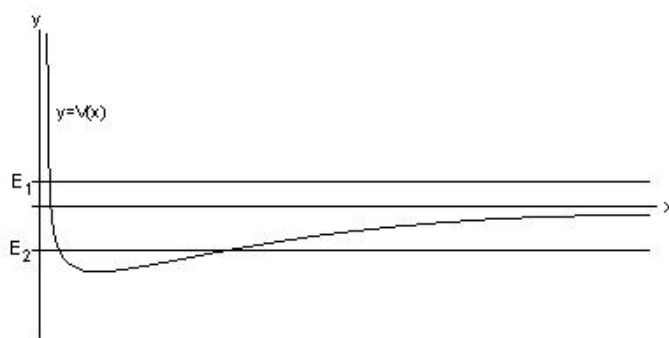


Figura 2.2: Segundo potencial

Ejemplo 2.4. Si en un sistema hamiltoniano (M^{2n}, ω, h) con $n = 2$ —que en el caso mecánico corresponde a un sistema con espacio de configuraciones de dimensión 2, *i.e.*, de dos grados de libertad— se tiene una constante de movimiento independiente del hamiltoniano, entonces el sistema es integrable por cuadraturas. Por ejemplo, los problemas de fuerzas centrales, que consisten en dos partículas interactuando entre sí con fuerzas en la dirección que las une, la posición del sistema se describe dando la posición del centro de masa y el vector que une a las dos partículas; se conservan el momento angular y la energía: son entonces integrables. Famosos son los casos en que la fuerza es de gravedad o elástica. La coordenada angular se moverá en un toro de dimensión 1 y, de hecho, puede verse que pasando al potencial efectivo, la coordenada radial puede estudiarse mirando gráficos de potencial como en el ejemplo anterior. ▲

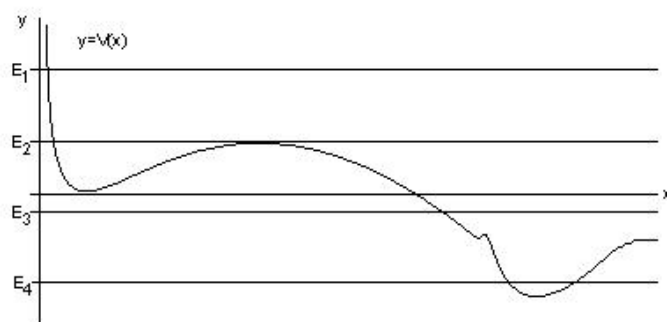


Figura 2.3: Tercer potencial

Ejemplo 2.5. El conocido *trompo de Lagrange* es un trompo simétrico fijado en O , y sujeto a la acción de la fuerza de gravedad mg , como muestra la Figura 2.4.

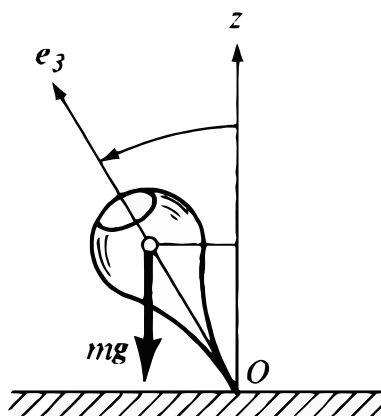


Figura 2.4: El trompo de Lagrange

Se tienen tres constantes de movimiento: primero, el hamiltoniano, que es la energía; segundo y tercero, las proyecciones del momento angular en los ejes z y e_3 , que llamaremos M_z y M_3 —esto se debe a la simetría de rotación del trompo alrededor de cada eje, como podrá verse con el Teorema 3.14, el de Noether, pero también puede verificarse haciendo la cuenta a mano—. Puede verificarse que estas constantes de movimiento están en involución. Más aún, las superficies de nivel del hamiltoniano H son compactas. Se tiene entonces, por el Teorema 2.2, que para todas las condiciones iniciales que no degeneran (h, M_z, M_3) —que son, según Arnold, «la mayoría»— el movimiento del trompo es periódico en las tres coordenadas

angulares: las trayectorias en el espacio de fases suceden en el toro tridimensional dado por $(H, M_z, M_3) = cte$; las correspondientes tres frecuencias se llaman frecuencias de revolución, precesión y nutación. ▲

Demostración del Teorema 2.2. Probaremos el teorema paso a paso. Fijemos una hoja regular M_c , con $c \in \text{Im}(f)$.

1. Tenemos que $\{f_i, f_j\} = 0$, o, equivalentemente, $df_i(X_j) = 0$. Así, podemos concluir que $X_j(x) \in \bigcap_i \ker(df_i(x)) = T_x M_c$ cualquiera sea $x \in M_c$, donde X_j es el campo hamiltoniano asociado a f_j . De la independencia de las f 's se deduce la independencia lineal de $B_x = \{X_i(x)\}_i$ en cada $x \in M_c$, y entonces B_x es base de $T_x M_c$. Ahora, $\omega(X_i, X_j) = \{f_i, f_j\} = 0$, de donde $\omega_x = 0$ cualquiera sea $x \in M_c$, como queríamos.

2. Esta segunda parte es un poco más larga. La idea es hacer actuar \mathbb{R} sobre M_c ; sea, para cada i , g_i^t el flujo de X_i , definido en \mathbb{R} . Podemos, por el inciso anterior, definir la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^n \times M_c &\longrightarrow M_c \\ ((t_1, \dots, t_n), x) &\mapsto g_1^{t_1} \circ \dots \circ g_n^{t_n}(x). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Lema 2.6. *La aplicación (2.1) define una acción de \mathbb{R}^n en M_c , que es transitiva si M_c es conexo.*

Demostración. Veamos que fijado $x_0 \in M_c$, $g = \Phi(-, x_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow M_c$ es sobreyectiva. Habíamos visto en la Proposición 1.28 que $f \mapsto X_f$ es un morfismo de álgebras de Lie; en particular, los campos hamiltonianos asociados a dos funciones en involución deben conmutar. Aquí, debido a la involutividad de las f 's, los campos conmutan y concluimos que sus flujos también. Así, para cada $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$, es

$$\begin{aligned} dg_{\mathbf{t}}(e_i) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_i} g_i^t(g_1^{t_1} \dots \hat{g}_i^{t_i} \dots g_n^{t_n}(x_0)) = \\ &= X_i(g_i^{t_i} g_1^{t_1} \dots \hat{g}_i^{t_i} \dots g_n^{t_n}(x_0)) = X_i(g(\mathbf{t})), \end{aligned}$$

y por el teorema de la función inversa g es un difeomorfismo local alrededor de cada \mathbf{t} . En particular, los difeomorfismos locales son abiertos, y es abierta entonces la imagen de g , que coincide con la órbita de x_0 . Como esta cuenta es independiente de la elección de x_0 , escribiendo M_c como unión disjunta de las órbitas, y en virtud de la conexión de M_c , concluimos que sólo puede haber una órbita. □

Lema 2.7. *Si Γ es un subgrupo discreto de \mathbb{R}^n , entonces existe un conjunto \mathbb{R} -linealmente independiente $\{v_1, \dots, v_k\}$, con $k \leq n$, tal que $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}v_i$.*

Demostración. Supongamos que $\{h_1, \dots, h_m\} \subset \Gamma$ es linealmente dependiente sobre \mathbb{R} . Existirán $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_i r_i h_i = 0$; sin pérdida de generalidad podemos asumir que r_1 no es nulo.

Sea $N \in \mathbb{N}$. Existen $a_1^{(N)}, \dots, a_m^{(N)} \in \mathbb{Z}$ tales que $|r_i - a_i^{(N)}/N| < 1/N$ para todo i ; será entonces

$$\sum_i a_i^{(N)} h_i = N \sum_i \left(\frac{a_i^{(N)}}{N} - r_i \right) h_i + \sum_i r_i h_i = N \sum_i \left(\frac{a_i^{(N)}}{N} - r_i \right) h_i,$$

por lo tanto

$$\left| \sum_i a_i^{(N)} h_i \right| < \sum_i |h_i|,$$

y $\sum_i a_i^{(N)} h_i$ está en la bola de centro 0 y radio $\sum_i |h_i|$ a la vez que en Γ . Como éste es discreto, hay solo finitos puntos en esta intersección. A su vez, al ser r_1 no nulo y valer $|Nr_1 - a_1^{(N)}| < 1$ para todo N , debe haber infinitos de los $a_1^{(N)}$. Podemos asegurar así que existen dos naturales distintos N y N' tales que $\sum_i a_i^{(N)} h_i = \sum_i a_i^{(N')} h_i$ y además $a_1^{(N)}$ es distinto de $a_1^{(N')}$: los h_i 's son linealmente dependientes sobre \mathbb{Z} .

Sea ahora $\{v_1, \dots, v_k\} \subset \Gamma$ una base de $\text{span}_{\mathbb{R}} \Gamma$ (en particular $k \leq n$): veamos que es un sistema de generadores de Γ como \mathbb{Z} -módulo. Sea $v \in \Gamma$. Por ser $\{v_1, \dots, v_k\}$ linealmente independiente sobre \mathbb{R} , lo es también sobre \mathbb{Z} . Más aún, mirando el párrafo anterior, pueden elegirse coeficientes enteros de manera que en la combinación lineal no trivial $av + a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$ es $a = 1$, que es lo que queríamos demostrar. \square

El estabilizador de x_0 $\Gamma = g^{-1}(0)$ es un subgrupo discreto de \mathbb{R}^n debido a que g es un diffeo local. Deberá ser entonces

$$\Gamma = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z} v_i,$$

para ciertos $v_i \in \mathbb{R}^n$, con $k \leq n$. En consecuencia, g se factoriza por \mathbb{R}^n/Γ , y de hecho $\hat{g} : \mathbb{R}^n/\Gamma \rightarrow M_c$ es biyectiva. Como es un difeomorfismo local por ser composición de difeomorfismos locales, resulta un difeomorfismo global:

$$T^k \times \mathbb{R}^{n-k} \cong M_c,$$

donde T^k denota el toro de dimensión k . En el caso de que M_c sea compacto, $k = n$, y es diffeo al toro n -ésimo. Esto completa la prueba del segundo punto.

3. Este hecho es consecuencia de la siguiente —y más general— propiedad, clásica en los textos de geometría diferencial.

Proposición 2.8. *Sea $f : M^n \rightarrow N^k$ un morfismo de variedades, y sea $y \in N$ un valor regular. Supongamos también que $f^{-1}(y)$ es compacto. Entonces existe D un entorno de y tal que su preimagen es difeomorfa al rectángulo $D \times f^{-1}(y)$; más aún, la restricción de f al rectángulo coincide con la proyección a la primera coordenada. En particular, la preimagen de cualquier elemento de D es difeomorfa a $f^{-1}(y)$.*

4. *Construcción de las variables ángulo-acción.* Elijamos un entorno $U = M_c \times D^n$ de M_c . Para cada x allí es $\mathbb{R}^n / St(x) \simeq T$, si $St(x)$ es el estabilizador de x en la acción definida en la ecuación (2.1) y T es el toro de dimensión n . Podemos elegir $\{e_i\}$ una base de $St(x)$ que varíe suavemente con x . En efecto, las coordenadas de e_i , $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$, son soluciones de $\Phi(\mathbf{t}, x) = x$, y debido al teorema de la función implícita —cuya aplicabilidad está asegurada por la independencia lineal de $X_i(\Phi(\mathbf{t}, x)) = d(\Phi(-, x))_{\mathbf{t}}(e_i)$ — dependen de x suavemente.

Definamos ahora las coordenadas ángulo (ψ_1, \dots, ψ_n) en el toro $M_c = \mathcal{O}(x_0)$. Si $y = \Phi(a, x_0)$, con $a = \sum a_i e_i$, ponemos

$$\psi_i = 2\pi a_i \pmod{2\pi}. \quad (2.2)$$

Tomamos ahora coordenadas en M con las f 's, que dicen en qué hoja estamos, y las ψ , que son coordenadas de cada toro. Observemos que el cambio de base de cada tangente a un toro, de $\{\partial/\partial\psi_i\}$ a $\{X_i\}$, se escribe con coeficientes constantes. Esto sigue de que si $\partial/\partial\psi_i = \sum_k c_{ik} X_k$, tenemos

$$\begin{aligned} \omega(\partial/\partial f_i, \partial/\partial\psi_j) &= \omega(\partial/\partial f_i, \sum_k c_{jk} X_k) = \sum_k c_{jk} \omega(\partial/\partial f_i, X_k) = \\ &= \sum_k c_{jk} df_k(\partial/\partial f_i) = c_{ji} \end{aligned}$$

y de la independencia de ω de las variables ángulo: cada hoja es una subvariedad lagrangiana, como probamos en el primer inciso.

Escribamos ahora ω en coordenadas:

$$\omega = \sum_{ij} c_{ij} df_i \wedge d\psi_j + \sum_{ij} b_{ij} df_i \wedge df_j. \quad (2.3)$$

Veremos a continuación que b_{ij} no depende de las variables ángulo. Al ser ω cerrada, mirando en la componente $df_i \wedge df_j \wedge d\psi_k$, se tiene que

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial\psi_k} = \frac{\partial c_{kj}}{\partial f_i} - \frac{\partial c_{ki}}{\partial f_j}.$$

Ahora, el lado derecho de la igualdad no depende de ψ y entonces el lado izquierdo tampoco; debe ser entonces que b_{ij} es lineal en ψ . Pero b_{ij} es 2π -periódica, y concluimos que no puede depender de ψ .

Como consecuencia de esto, podemos escribir $\omega = \sum_i \omega_i \wedge d\psi_i + \beta$, con ω_i y β independientes de ψ ; están definidas en el disco D . Esto se debe a que en (2.3) ni c_{ij} ni b_{ij} ni df_i dependen de las variables ángulo.

Tenemos además que, al ser ω cerrada, también deben serlo ω_i y β .

Lema 2.9. ω es exacta en $U(M_c)$.

Demostración. ω_i y β son cerradas en el disco, y por lo tanto son exactas. Si $ds_i = \omega_i$ y $d\chi = \beta$, poniendo $\alpha = \sum s_i \wedge d\psi_i + \chi$ se tiene que $d\alpha = \omega$. \square

Veamos ahora que las s_i son independientes. Esto se debe a que la matriz de $\omega = \sum ds_i \wedge d\psi_i + \beta$ en la base formada por los ganchos respecto a f y a ψ tiene determinante $\det(C)^2$ si C es la matriz de cambio de base, i.e., $C_{ij} = \partial s_i / \partial f_j$. Como ω no es degenerada, C tampoco puede serlo.

Para terminar con la construcción, pongamos, si $\chi = \sum g_i ds_i$, $\varphi_i = \psi_i - g_i(s_1, \dots, s_n)$; veamos que el sistema de coordenadas construido es canónico.

$$\begin{aligned} \sum ds_i \wedge d\varphi_i &= \sum ds_i \wedge d\psi_i + \sum ds_i \wedge (-dg_i(g_i(s_1, \dots, s_n))) \\ &= \sum ds_i \wedge d\psi_i + d\chi = \omega \end{aligned}$$

Ahora sí, y por último, veamos que el flujo de X_H se endereza en coordenadas (s, φ) . Ya sabíamos, por el primer inciso, que las derivadas de H respecto a las coordenadas ángulo eran nulas, y

$$X_H = \sum \frac{\partial H}{\partial s_i} X_{s_i} = \sum \frac{\partial H}{\partial s_i} \frac{\partial}{\partial \varphi_i}.$$

Cabe destacar que $\frac{\partial H}{\partial s_i}$ no depende de las coordenadas ángulo, por lo que el flujo de X_H será constante en coordenadas acción y lineal en coordenadas ángulo.

Esto termina la demostración del Teorema 2.2. \square

Cuadraturas. Arnold, en [Arn, p. 272], asegura que el Teorema 2.2 tiene como consecuencia que se pueden encontrar las trayectorias del sistema por cuadraturas. Ahora, esta es una idea que no tiene una definición tan precisa. Entenderemos aquí que encontrar las curvas integrales de un campo vectorial por cuadraturas quiere decir dar ecuaciones no diferenciales de las que éstas se pueden despejar, al menos localmente, de manera que el proceso que lleva las ecuaciones diferenciales a las que no lo son requiere el cómputo de ciertas integrales. Ciertamente, no parece evidente de la demostración del Teorema 2.2 que esto suceda. Sin embargo, veremos a continuación que

los flujos de los campos hamiltonianos asociados a las constantes de movimiento sí se pueden encontrar por cuadraturas. Es de observar que el flujo correspondiente a la primera constante no es otra cosa que la trayectoria del sistema, puesto que la primera constante de movimiento es el hamiltoniano. Esto le da una gran importancia a la siguiente proposición.

Proposición 2.10. *Sea (M, ω, H) un sistema hamiltoniano integrable Liouville con constantes de movimiento f_1, \dots, f_n . Entonces los flujos de los campos X_{f_1}, \dots, X_{f_n} se pueden encontrar por cuadraturas. En particular, poniendo $f_1 = H$, las trayectorias del sistemas se encuentran por cuadraturas.*

Esta proposición puede, digamos, generalizarse. Concretamente, pueden pedirse menos condiciones que la conmutatividad de los campos para garantizar la integrabilidad por cuadraturas, aunque sin tener la descripción geométrica del Teorema de Liouville–Arnold. El resultado que probaremos luego de un par de lemas es el siguiente.

Teorema 2.11. *Sea U un abierto de \mathbb{R}^n , y sean X_1, \dots, X_n campos vectoriales en U de manera que $\text{span}_{\mathbb{R}}\{X_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{X}(U)$ es una subálgebra de Lie resoluble. Entonces, si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $[X_i, X_1] = \lambda_i X_1$, las curvas integrales de X_1 pueden encontrarse por cuadraturas.*

La Proposición 2.10 saldrá como consecuencia de unos lemas precisados para probar este teorema, y en algún punto será un ejemplo.

Lema 2.12. *Supongamos que \mathfrak{g} es un álgebra de Lie resoluble, y que se tiene una base de \mathfrak{g} $\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s\}$ tal que $\mathfrak{h} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{x_1, \dots, x_r\}$ es un ideal. Entonces existe $1 \leq i \leq s$ tal que $y_i \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, y el generado (como \mathbb{R} -espacio vectorial) por*

$$\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_s\}$$

es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} , es resoluble y \mathfrak{h} es un ideal.

Demostración. En efecto, como $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es resoluble, es $[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}] \neq \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Si para todo i entre 1 y s fuera $y_i \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, se tendría que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]/\mathfrak{h} \simeq [\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}]$, que contradice la afirmación anterior. Llamemos ahora

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_s\};$$

se trata de un ideal puesto que $[\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \tilde{\mathfrak{g}}$, así que en particular es resoluble y una subálgebra. La última contención también dice que \mathfrak{h} es un ideal de $\tilde{\mathfrak{g}}$. \square

Lema 2.13. *Sean $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ linealmente independientes en cada punto y $c_{ij}^k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que*

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^m c_{ij}^k X_k. \quad (2.4)$$

Entonces

(i) existen $n - m$ funciones definidas localmente, cuyos diferenciales son linealmente independientes en cada punto, que son anuladas por todos los campos.

(ii) Si $h_1, \dots, h_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$X_i f = h_i, \quad i \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.5)$$

Este sistema admite solución local si y sólo si se satisface que

$$X_i h_j - X_j h_i = \sum_{k=1}^m c_{ij} h_k. \quad (2.6)$$

Demostración. En virtud de (2.4) y el Teorema de Frobenius, la distribución definida por los campos nos asegura la existencia de una subvariedad cuyo espacio tangente en cada punto es el generado por los campos; existe una carta $(x_1, \dots, x_m, y_{m+1}, \dots, y_n)$ alrededor de cada punto $(x_1, \dots, x_m, y_{m+1}, \dots, y_n)$ tal que las hojas vienen dadas por $\{y_l = cte\}$, y los campos vectoriales se escriben (si notamos $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$)

$$X_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j. \quad (2.7)$$

donde a_{ij} son funciones definidas en el dominio de la carta a valores reales; la matriz que configuran es inversible debido a la independencia lineal de los campos. Observemos que las y_{m+1}, \dots, y_n satisfacen las condiciones de (i).

Las ecuaciones (2.5) se pueden reescribir localmente como

$$\partial_i f = f_i, \quad (2.8)$$

simplemente usando que la matriz de antes era inversible: $h_k = \sum a_{ki} f_i$. Ahora, las ecuaciones (2.8) tienen solución local, recordando el lema de Poincaré, si y solo si

$$\partial_i f_j - \partial_j f_i = 0. \quad (2.9)$$

Como $[X_i, X_j] = \sum_{r,l} (a_{il} \partial_l a_{jr} - a_{jl} \partial_l a_{ir}) \partial_r$, se obtiene, mirando (2.4), que los c_{ij}^k deben cumplir localmente

$$\sum_l c_{ij}^l a_{lr} = \sum_l a_{il} \partial_l a_{jr} - a_{jl} \partial_l a_{ir}.$$

Multiplicamos ahora por f_r y sumamos sobre r :

$$\sum_{l,r} c_{ij}^l a_{lr} f_r = \sum_{l,r} a_{il} \partial_l a_{jr} f_r - a_{jl} \partial_l a_{ir} f_r.$$

Por la fórmula de Leibniz se tiene que

$$\sum_{l,r} c_{ij}^l a_{lr} f_r = \sum_{l,r} a_{il} \partial_l (a_{jr} f_r) - a_{jl} a_{il} \partial_l f_r - a_{jl} \partial_l (a_{ir} f_r) + a_{jl} a_{ir} \partial_l f_r.$$

Y como $h_j = \sum_r a_{jr} f_r$, es también $\partial_j h_k = \sum \partial_j a_{ki} f_i + a_{ki} \partial_j f_i$, así que la condición que recién escribimos es exactamente

$$\sum_l c_{ij}^l h_l = X_i h_j - X_j h_i + \sum_{lr} a_{il} a_{jr} (\partial_l f_r - \partial_r f_l).$$

Mirando (2.9), las ecuaciones (2.5) tienen solución si y solo si se satisface

$$\sum_l c_{ij}^l h_l = X_i h_j - X_j h_i,$$

como queríamos probar. \square

Antes de demostrar el Teorema 2.11, veamos cómo se puede probar la Proposición 2.10.

Demostración de la Proposición 2.10. Notemos, abusando un poco de notación, para cada i , $X_i \in \mathfrak{X}(M_c)$; encontraremos sus flujos localmente. Pongamos también $X_i = a_i^j \partial_j$, donde, si $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una carta, $\partial_j = \partial/\partial\varphi_j$ y $a_i^j : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Se tiene que $[X_i, X_j] = 0$ cualesquiera sean i, j : en virtud del Lema 2.13, el sistema

$$X_i(P^l) = \delta_i^l \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.10)$$

tiene solución para cada l entre 1 y n . Llamemos a cada una de estas, respectivamente, P^l . Encontraremos ahora una expresión para cada P^l : fijemos l . Al ser equivalentes que haya solución de (2.10) y que para todo i valga $a_i^j \partial_j P^l = \delta_i^l$, tiene que suceder que para todo j ,

$$\partial_j P^l = (a^{-1})_j^l.$$

Y en virtud de la igualdad de las derivadas cruzadas, tendrá que suceder que

$$\partial_j (a^{-1})_i^l = \partial_i (a^{-1})_j^l. \quad (2.11)$$

El cómputo de cada P^l es ahora fácil. Para ahorrar notación, omitamos la l y escribamos $P^l = g$ y $h_i = (a^{-1})_i^l$. Asumiendo que U es una bola, es

$$g(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{x_1} h_1(t, 0, \dots, 0) dt + \dots + \int_0^{x_n} h_n(x_1, \dots, x_{n-1}, t) dt.$$

Al derivar g respecto de x_j , obtenemos

$$\partial_j g(x_1, \dots, x_n) = h_j(x_1, \dots, x_j, 0, \dots, 0) + \dots + \int_0^{x_n} \partial_j h_n(x_1, \dots, x_{n-1}, t) dt. \quad (2.12)$$

Pero para cada i es, en virtud de (2.11),

$$\begin{aligned} \int_0^{x_i} \partial_j h_i(x_1, \dots, x_{i-1}, t, 0, \dots, 0) dt &= \int_0^{x_i} \partial_i h_j(x_1, \dots, x_{i-1}, t, 0, \dots, 0) dt \\ &= h_j(x_1, \dots, x_{i-1}, t, 0, \dots, 0) \Big|_0^{x_i} \end{aligned}$$

y entonces en (2.12) se cancelan todos los términos consecutivos, y nos queda $\partial_j g = h_j$, como queríamos.

Finalmente, fijemos $i \in \{1, \dots, n\}$. Como P^l es constante sobre las curvas integrales de X_i , se tienen $n - 1$ ecuaciones algebraicas para las trayectorias de cada X_i . Éstas pueden ser despejadas en virtud del teorema de la función implícita puesto que

$$dP^1 \wedge \dots \wedge d\hat{P}^i \wedge \dots \wedge dP_n(X_1 \otimes \dots \otimes \hat{X}_i \otimes \dots \otimes X_n) = 1.$$

Hemos así despejado localmente los flujos a menos de cuadraturas. \square

Terminemos esta sección dando una prueba del teorema que generaliza la proposición que recién demostramos.

Demostración del Teorema 2.11. Llamemos $\mathfrak{g} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{X_i\}_{i=1}^n$ y $\mathfrak{h} = \mathbb{R} \cdot X_1$: \mathfrak{g} y \mathfrak{h} están en las hipótesis del Lema 2.12. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $X_n \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Entonces, las ecuaciones para $f \in C^\infty(U)$

$$\begin{cases} X_i(f) = 0, & 1 \leq i \leq n-1 \\ X_n(f) = 1 \end{cases}$$

pueden resolverse; las coeficientes de estructura (2.4) del Lema 2.13 son tales que se satisface (2.6): c_{ij}^n es siempre nulo. Notando localmente como en (2.7), y poniendo, también como antes $h_j = \sum_r a_{jr} f_r$, resolvemos el sistema

$$\partial_i f = f_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

lo que puede hacerse por cuadraturas, como en la Proposición 2.10. A la solución del sistema llamémosla P_n y también llamemos $z_n = P_n(x_1, \dots, x_n)$; se tiene que $(x_1, \dots, x_{n-1}, z_n)$ es un nuevo sistema de coordenadas. Ahora, las expresiones para los campos vectoriales en estas coordenadas son, si $1 \leq i \leq n-1$,

$$X_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}(x_1, \dots, x_{n-1}, z_n) \partial_j.$$

Los campos X_1, \dots, X_{n-1} generan una subálgebra resoluble. Iterando lo anterior se obtienen nuevas coordenadas $z_i = P_i(x_1, \dots, x_i, z_{i+1}, \dots, z_n)$ (con posibles reordenamientos de los x_i 's), que salen de la solución del sistema

$$\begin{cases} X_j(P_i) = 0, & 1 \leq j \leq i-1 \\ X_i(P_i) = 1, \end{cases}$$

para cada i entre 1 y n . En términos de z_1, \dots, z_n , las ecuaciones de movimiento resultan

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 1 \\ \dot{z}_i = 0, & 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Éstas se resuelven inmediatamente e, invirtiendo el cambio de variables, se obtiene la solución de las ecuaciones de movimiento. \square

2.2. Integrabilidad no conmutativa

Muchos sistemas mecánicos importantes tienen más constantes de movimiento independientes que la mitad de la dimensión del espacio de fases, pero éstas no están en involución. En esta sección estudiaremos sistemas de este tipo, y contaremos con un teorema que nos dará la integrabilidad de los mismos. Bajo ciertas hipótesis de regularidad y compacidad, la dinámica sucederá en toros pero de dimensión menor a los de Liouville-Arnold. Los sistemas de este tipo se llamarán superintegrables o integrables en el sentido no conmutativo. Los siguientes ejemplos pueden encontrarse mejor explicados en [Fa].

Ejemplo 2.14. Pensemos en una partícula sometida a una fuerza central. Son tres los grados de libertad y cuatro constantes de movimiento: las tres componentes del momento angular y la energía. El movimiento sucede (bajo la hipótesis de compacidad) en un toro de dimensión dos: hay oscilación en ambas coordenadas polares (r, θ) . \blacktriangle

Ejemplo 2.15. El trompo de Euler es como el de Lagrange pero sin la acción de la gravedad. El espacio de fases tiene dimensión tres, y las tres componentes del momento angular y la energía nos dan cuatro constantes de movimiento. El movimiento es oscilatorio: revolución y precesión. A diferencia del Ejemplo 2.2.5, aquí no hay nutación. \blacktriangle

Empezaremos probando algunas proposiciones un tanto técnicas, pero que serán de utilidad para clarificar las consideraciones subsiguientes.

Sean (M, ω) una variedad simpléctica y $F : M \rightarrow B$ una submersión con F sobreyectiva. Tomando sistemas de coordenadas adaptados podemos asegurar que para todo x en M existe un entorno abierto V de x tal que las hojas de $F|_V$ son conexas.

Lema 2.16. Sean (M, ω) una variedad simpléctica, $F : M \rightarrow B$ una submersión sobreyectiva con hojas conexas. Entonces, un campo vectorial X tiene imagen en $(\ker dF)^\omega$ si y sólo si existe una única 1-forma cerrada $\alpha \in \Omega^1(B)$ tal que $X = \omega^\sharp \circ F^* \alpha$.

Demostración. Dado un campo vectorial hamiltoniano X_G , es claro que toma valores en $(\ker dF)^\omega$ si y sólo si $\langle dG; v \rangle = 0$ para todo $v \in \ker dF$; en virtud de la conexión de las hojas, si y sólo si G es constante en cada hoja de F : esto ocurre exactamente cuando $G = g \circ F$, para $g \in C^\infty(B)$.

Sean $x \in M$ y X un campo localmente hamiltoniano. Sea V un entorno abierto de x y $G : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $X_G = X|_V$. Si X toma valores en $(\ker dF)^\omega$, aplicando lo anterior a $F|_V : V \rightarrow F(V)$ obtenemos que $G = g \circ F$, para $g : V \rightarrow \mathbb{R}$. Así, $-\iota_X \omega|_V = F^* g$.

Considerando un cubrimiento de M por estos abiertos V 's, y en virtud de la inyectividad de F_x^* para todo x , puede verse que las g 's definen una única 1-forma cerrada $\alpha \in \Omega^1(B)$ tal que $\omega^\sharp F^* \alpha = X$. \square

En particular, un campo vectorial hamiltoniano X_G tiene imagen en $(\ker dF)^\omega$ si y sólo si existe una función $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G = g \circ F$. La siguiente proposición nos será de enorme utilidad en lo sucesivo.

Proposición 2.17. Sean (M, ω) una variedad simpléctica, $F : M \rightarrow B$ una submersión sobreyectiva con hojas conexas. Entonces, si $(\ker dF)^\omega$ es integrable, existe una única estructura de Poisson en B que hace de F un morfismo de Poisson.

Demostración. Dadas $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos del lema anterior que tanto $X_{f \circ F}$ como $X_{g \circ F}$ tienen imagen contenida en $(\ker dF)^\omega$. Pero como este último es integrable, se tiene que $[X_{f \circ F}, X_{g \circ F}] = X_{\{f, g\} \circ F}$ debe caer en $(\ker dF)^\omega$. De nuevo por el lema —o más bien por las consideraciones posteriores— existe una única $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\{f \circ F, g \circ F\} = h \circ F$. Definimos pues

$$\{f, g\} = h.$$

Esto dota a B de una estructura de Poisson para la cual F es un morfismo de Poisson. \square

Añadamos también que puede probarse (ver [Fa]) que si F induce en B una estructura de Poisson, entonces el ortogonal *debe* ser integrable.

Fijemos un sistema hamiltoniano (M^{2n}, ω, H) . Llamemos Λ al bivector de Poisson, definido en la Definición 1.29. Recordemos que si f_1 y f_2 son integrales del sistema, es decir, son constantes a lo largo de las curvas integrales de X_H , también lo es $\{f_1, f_2\}$. En efecto, si γ es una tal curva integral, $\frac{d}{dt} \{f_1, f_2\} \circ \gamma(t) = \{h, \{f_1, f_2\}\} \circ \gamma = 0$, en virtud de la identidad de Jacobi y la Proposición 1.24. Tenemos entonces que

$$\mathcal{F} = \{\text{integrales de } X_h\}$$

es un álgebra de Poisson en el sentido que se dió apenas después de la Definición 1.25. Supongamos que $\{f_1, \dots, f_l\}$ es un sistema de generadores de \mathcal{F} como $C^\infty(M)$ -módulo. También, supongamos que son constantes en x las dimensiones de $F_x \text{span}\{df_i(x)\}_{i=1}^l$ y de $\ker \Lambda_x|_{F_x}$, de manera que el primero tiene dimensión l —los diferenciales son linealmente independientes en todo punto—. Llamemos r a la dimensión de $\ker \Lambda_x|_{F_x}$, y pongamos $f = (f_1, \dots, f_l) : M \rightarrow \mathbb{R}^l$. En tal caso, $f : M \rightarrow f(M) = B$ es submersiva, obviamente sobreyectiva, y como $(\ker df)^\omega$ consiste en los campos hamiltonianos, esta distribución es integrable en virtud de la Proposición 1.28.

Se tiene entonces el siguiente teorema de integración, que fue presentado por primera vez en el abstruso artículo [MiFo]. La demostración que aquí aparece es la que se sugiere en [Jo].

Teorema 2.18 (Mischenko-Fomenko). *Supongamos que $l + r = 2n$ y sea c un valor regular de F en $F(M)$. Entonces $M_c = F^{-1}(c)$ es una subvariedad isotrópica de M y se pueden encontrar localmente por cuadraturas las curvas integrales de X_H . Además, las componentes conexas compactas T_c^r de M_c son difeomorfas al toro r -dimensional.*

Demostración. Introduzcamos primero en $f(M) \subset \mathbb{R}^l$ un corchete utilizando la Proposición 2.17. Llamemos ahora, para cada $b \in f(M)$,

$$D_b = \ker \tilde{\Lambda}_b.$$

Como el anulador de D_b es $\tilde{\Lambda}^\sharp(T^*\mathbb{R}^l)$, que es integrable por el Teorema 1.33, D_b resulta una codistribución integrable. También, como por la misma definición de Λ se tiene que $df \circ \omega^\sharp \circ f^* = \tilde{\Lambda}^\sharp$ (ver diagrama), y por hipótesis f^* es inyectiva (pues f es submersiva), se tiene que $\ker df \simeq D_b$, así que $\dim D = r$.

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xleftarrow{f^*} & T^*f(M) \\ \omega^\sharp \downarrow & & \downarrow \tilde{\Lambda}^\sharp \\ TM & \xrightarrow{df} & Tf(M) \end{array}$$

Sean V un abierto de $f(M)$ que posee a c y $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \Omega^1(V)$ cerradas tales que $\{\alpha_i(c)\}_{i=1}^l$ es una base de D_c . A partir de ellos, construimos los campos en $f^{-1}(V)$ dados por $X_i = \omega^\sharp \circ f^*(\alpha_i)$, $1 \leq i \leq r$. Veamos que estos campos conmutan; para ello, usando la no degeneración de ω , contraigamos

ésta con $[X_i, X_j]$ para cada i, j . Es

$$\begin{aligned} \iota_{[X_i, X_j]}\omega &= (\mathcal{L}_{X_i}\iota_{X_j} - \iota_{X_j}\mathcal{L}_{X_i})\omega = \mathcal{L}_{X_i}f^*(\alpha_j) - \iota_{X_j}(d\iota_{X_i} + \iota_{X_i}d)\omega \\ &= (d\iota_{X_i} + \iota_{X_i}d)f^*(\alpha_j) - \iota_{X_j}df^*(\alpha_i) \\ &= d\iota_{X_i}(f^*(\alpha_j)) + \iota_{X_i}f^*(d\alpha_j) - \iota_{X_j}f^*(d\alpha_i) = 0; \end{aligned}$$

la última igualdad sigue de que las α 's eran cerradas y de que $\iota_{X_i}f^*(\alpha_j) = \langle f^*(\alpha_j), X_i \rangle = \langle \alpha_j, df X_i \rangle$ pues por construcción $df X_i = 0$.

Siempre podemos elegir los campos de manera que $X_1 = X_h$, así que la conmutatividad de los campos implica, en virtud del Teorema 2.11, que las trayectorias del sistema pueden despejarse localmente por cuadraturas. También, como los campos conmutativos son una base del tangente a M_c , éste es isotrópico.

Supongamos que M_c es conexo y compacto. Consideraremos una acción muy parecida a la definida en (2.1); si g_i es el flujo –completo, por la compacidad– del campo X_i , ponemos

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^r \times M_c &\longrightarrow M_c \\ ((t_1, \dots, t_r), x) &\mapsto g_1^{t_1} \circ \dots \circ g_r^{t_r}(x). \end{aligned}$$

Esta acción está bien definida justamente por la conmutatividad de los campos, razonando exactamente igual que en la prueba del Teorema de Liouville-Arnold. En virtud de los Lemas 2.6 y 2.7, podemos concluir que T_c^r es difeomorfo al toro de dimensión r . \square

Observemos que si $l = \frac{1}{2} \dim M =: n$, y $\{f_i, f_j\} = 0$ cualesquiera sean $1 \leq i, j \leq n$, obtenemos el teorema de Liouville-Arnold. Veremos que, de hecho, el teorema que acabamos de formular es más fuerte que el de Liouville-Arnold: aún si \mathcal{F} no está generada por funciones que conmuten, podemos construir n que sí conmutan. Esto se hace localmente, usando el Teorema 1.32 y luego pegando las conseguidas.

Teorema 2.19. *Bajo las hipótesis y notación del teorema anterior, se tiene integrabilidad Liouville en un abierto denso.*

Demostración. Pongamos, como antes, una estructura de Poisson en $f(M)$. Evidentemente, si G y H están en involución en $f(M)$, también lo están sus levantados $G \circ \phi$ y $H \circ \phi$.

Sea ahora $z \in f(M)$. Por el teorema 1.32 sobre la estructura local de las variedades de Poisson, existe un entorno $U(z)$ de z y funciones independientes, que denotaremos $q_1, \dots, q_v, p_1, \dots, p_v, k_1, \dots, k_{l-2v}$, ($v = n - r$ pues $l - r = 2v$ y $l + r = 2n$) tales que anulan a z y sus corchetes de Poisson cumplen

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} &= 0, & \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij}, \\ \{q_i, k_s\} = \{p_i, k_s\} &= 0, & \{k_s, k_t\} &= 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

cualesquiera sean $1 \leq i, j \leq v, 1 \leq s, t \leq l - 2v$.

Sea, para cada ϵ , $B(\epsilon) = \{y \in U(z) \mid \sum_i p_i^2 + q_i^2 + \sum_s k_s^2 < \epsilon\}$.

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación suave y no negativa, tal que $g(x) = 0$ si $|x| > \epsilon$, es creciente en $[-\epsilon, 0]$ y decreciente en $[0, \epsilon]$.

Definamos ahora las funciones $h_1 = q_1^2 + p_1^2, \dots, h_v = q_v^2 + p_v^2$, y $h_{v+1} = k_1^2, \dots, k_{l-2v}^2$, y pongamos $h(y) = g(h_1(y) + \dots + h_n(y))$, extendida a cero en el resto de la variedad. Es $\{h_i, h_j\} = 0$ para todos los i, j en virtud de (2.13) y de que el corchete es una derivación en cada coordenada. También resulta $\{h_i, h\} = 0$ para todo i :

$$\{h_i, h\} = \{h_i, g(h_1 + \dots + h_n)\} = g'\{h_i, h_1 + \dots + h_n\} = 0$$

Ahora, escribamos $F_i^\epsilon = hh_i$. Veamos que también están en involución:

$$\begin{aligned} \{F_i^\epsilon, F_j^\epsilon\} &= \{hh_i, hh_j\} = \\ &= h(\{h_i, h\}h_j + \{h_i, h_j\}h_j) + h_i(\{h, h\}h_j + \{h, h_j\}h_j) = 0. \end{aligned}$$

Así, $F_1^\epsilon, \dots, F_l^\epsilon$ son independientes en $B(\epsilon)$ e igual a cero afuera de esa bola; están en involución y satisfacen las desigualdades $F_i^\epsilon < e^{-\epsilon}$ y sus derivadas también.

Consideremos ahora una familia numerable de bolas abiertas $B^\alpha(\epsilon_\alpha)$, con intersección disjunta dos a dos y funciones $\{F_i^{\epsilon_\alpha} = F_i^\alpha\}_{i=1}^l$ con las propiedades de recién de manera que $B = \bigcup B^\alpha(\epsilon_\alpha)$ es un abierto denso en $f(M)$. Definamos finalmente $F_1, \dots, F_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F_i(y) = \begin{cases} F_i^\alpha(y), & y \in B^\alpha \subset B \\ 0, & y \in \mathbb{R}^l \setminus B \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq l$. Así, $g_1 = F_1 \circ F, \dots, g_n = F_n \circ F$ tienen las propiedades deseadas. \square

Según el teorema de recién, los toros r -dimensionales del Teorema 2.18 se pueden organizar en otros toros de dimensión n . Como estos toros están fibrados por los anteriores, las trayectorias del sistema no son densas en T^n . En ese sentido, la integrabilidad no conmutativa nos da más información sobre las trayectorias que la conmutativa.

A continuación, se darán los resultados análogos a los últimos dos incisos del Teorema de Liouville-Arnold, pero para el caso no conmutativo. Siguiendo con las notaciones del teorema 2.18, sea T_c^r una componente conexa compacta de M_c .

Teorema 2.20 (Nekoroshev). *En un entorno $\mathcal{O} = T^r\{\varphi\} \times B_\sigma\{I, p, q\}$ de T_c^r se tienen definidas variables ángulo acción generalizadas $p, q, I, \varphi \bmod 2\pi$, de manera que*

$$B_\sigma\{I, p, q\} = \{(I_1, \dots, I_r, p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{i=1}^r I_i^2 + \sum_{j=1}^k q_j^2 + p_j^2 \leq \sigma^2\},$$

y la forma simpléctica se escribe $\omega = \sum_{i=1}^r dI_i \wedge d\varphi_i + \sum_{j=1}^k dp_j \wedge dq_j$. La función hamiltoniana H depende sólo de las I ; en estas coordenadas es

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i(I), \quad \dot{I} = \dot{p} = \dot{q} = 0.$$

Álgebras de funciones completas. Sea \mathcal{F} un álgebra de funciones cerrada bajo el corchete de Poisson en la variedad de Poisson $(M, \{, \})$. Pongamos, para cada x , $F_x = \{df(x) \mid f \in \mathcal{F}\}_{i=1}^l$ y $K_x = \ker \Lambda|_{F_x}$.

Supongamos que $\dim F_x = l$ y $\dim K_x = r$ para x en M . Los números l y r son denotados $\text{ddim } \mathcal{F}$ y $\text{dind } \mathcal{F}$, se llaman la dimensión diferencial e índice diferencial de \mathcal{F} .

Definición 2.21. \mathcal{F} se dice completa si $\text{ddim } \mathcal{F} + \text{dind } \mathcal{F} = \dim M$.

Un álgebra completa de integrales \mathcal{F} no necesariamente debe estar generada por l funciones independientes, pero localmente sí: si $x \in M$, se tienen $f_1, \dots, f_l \in \mathcal{F}$ que en un entorno de x sí son independientes.

Definición 2.22. Un sistema hamiltoniano en una variedad simpléctica es completamente integrable en el sentido no conmutativo si posee un álgebra completa de integrales.

Supongamos que \mathcal{F} es un álgebra completa de integrales del sistema hamiltoniano (M, ω, h) . Sea x_0 un punto regular y sean f_1, \dots, f_l funciones a valores reales definidas en un entorno de x_0 tales que $\tilde{F}_{x_0} = \text{span}\{df_x\}_{i=1}^l$ es de dimensión l . Entonces también es de dimensión l en un entorno de x_0 , probablemente más chico que el anterior, llamémoslo V . Ciertamente, no estamos en las hipótesis del Teorema 2.18, el de Mishenko y Fomenko, pero sí podemos conseguir integrabilidad en el sentido de que las trayectorias del sistema hamiltoniano pueden encontrarse por cuadraturas: para ello, si $c \in f(V)$, construimos r campos conmutativos en M_c de la misma manera que en la demostración de este teorema. El Teorema 2.11 aplicado a los campos conmutativos de aquí nos asegura la integrabilidad por cuadraturas.

Caracterizaremos ahora las álgebras completas: daremos un par de afirmaciones que son equivalentes a la completitud. Sea primero (M^m, ω) una variedad de Poisson, $F \subset T^*M$ un subfibrado de rango constante. Tenemos definido, como en el Ejemplo 1.1.30, un bivector de Poisson que denotaremos Λ . Llamemos F^Λ a los elementos σ de T^*M tales que $\Lambda(\sigma, \beta) = 0$ cualquiera sea $\beta \in F$. Por la misma definición de Λ , F^Λ coincide con el conjunto de σ 's que anulan a quienes se escriben como ω^\sharp de algún elemento de F , es decir con $\omega^\sharp(F)^\circ$. Como ω^\sharp es un isomorfismo de espacios vectoriales, tomando dimensión se ve que

$$\dim F^\Lambda = \text{codim } F. \quad (2.14)$$

Recordemos por otra parte que si tenemos una forma bilineal $\varphi : V \times V \rightarrow k$, su núcleo está definido por $\ker \varphi = \{v \in V \mid \varphi(v, w) = 0 \forall w \in V\}$. Volviendo a lo anterior, supongamos que $\Lambda_x|_{F_x}$ tiene núcleo de dimensión constante en x .

Proposición 2.23. $\dim \ker \Lambda|_F = \text{codim } F$ si y sólo si $F^\Lambda \subset F$ (i.e., F es coisotrópico).

Demostración. Los elementos de $\ker \Lambda|_F$ son los $\sigma \in F$ tales que $\Lambda(\sigma, \beta) = 0 \forall \beta \in F$, lo cual coincide evidentemente con $F \cap F^\Lambda$. Si la dimensión de esto coincide con la codimensión de F , que a su vez coincide con la dimensión de F^Λ , entonces deben ser iguales $F \cap F^\Lambda$ y F^Λ : este último debe estar contenido en F . Recíprocamente, si $F^\Lambda \subset F$, entonces $\ker \Lambda|_F = F \cap F^\Lambda = F^\Lambda$ y lo que buscamos sigue de (2.14). \square

La primera observación de la demostración es que $\ker \Lambda|_F = F \cap F^\Lambda$. Sigue de allí que $\dim \ker \Lambda|_F = \text{codim } F$ si y sólo si $\ker \Lambda|_F = F^\Lambda$.

Se puede también explicitar lo anterior en términos de la estructura simpléctica ω . En efecto, pongamos, para cada x en M ,

$$\begin{aligned} W_x &= \{\Lambda_x(\sigma, -) = \omega^\sharp(\sigma) \mid \sigma \in F\} \subset T_x M \quad \text{y} \\ D_x &= \{X \in T_x M \mid \sigma(X) = 0 \forall \sigma \in F\}, \end{aligned}$$

el anulador de F_x . Que F_x sea coisotrópico quiere decir, aplicando ω^\sharp a ambos lados de $F_x^\Lambda \subset F_x$, que $W_x^\omega \subset W_x$, i.e. W_x es coisotrópica. También, que D_x es isotrópico; esto se ve tomando anulador a la misma igualdad que antes.

De estas consideraciones se desprende la siguiente proposición, que nos será útil más adelante.

Proposición 2.24. Sea \mathcal{F} un álgebra de funciones cerrada bajo el corchete de Poisson en una variedad simpléctica (M, ω) ; fijemos $x \in M$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- (i) Es $\dim F_x + \dim \ker \Lambda_x|_{F_x} = \dim M$.
- (ii) $W_x = \text{span}\{X_f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ es coisotrópico.
- (iii) $D_x = \text{span}\{X \in T_x M \mid \langle df, X \rangle = 0 \forall f \in \mathcal{F}\}$ es isotrópico.

Si para todo x en M alguna afirmación de las anteriores es verdadera, todas lo serán y mirando (i), tendremos que \mathcal{F} es un álgebra completa de integrales.

3 | Simetrías

3.1. La aplicación momento

Sean (M, ω) una variedad simpléctica y $\Phi : G \times M \rightarrow M$ una acción de un grupo de Lie G en M . Ésta induce un campo vectorial para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ llamado campo fundamental o acción infinitesimal, que se define, para cada $x \in M$, como

$$\xi_M(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(\exp(-t\xi), x). \quad (3.1)$$

La siguiente proposición asegura que la asignación $\mathfrak{g} \ni \xi \mapsto \xi_M \in \mathfrak{X}(M)$ es un morfismo de álgebras de Lie; este hecho será de utilidad en futuras consideraciones.

Proposición 3.1. *Si M, G, ω y Φ son los de recién, es*

(i) $(\Phi_g)_* \xi_M = (\text{Ad}_g \xi)_M$, y también

(ii) $[\xi_M, \eta_M] = [\xi, \eta]_M$,

cualesquiera sean $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, $g \in G$.

Demostración. Sean $g \in G$, $\xi \in \mathfrak{g}$. Para cada $x \in M$, $\text{Ad}_g \xi$ está relacionada con ξ por la famosa naturalidad de la exponencial:

$$\exp(t \text{Ad}_g \xi) = dc_g(\exp(t\xi)) = g \exp(t\xi) g^{-1},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, donde $c_g : G \ni h \mapsto ghg^{-1} \in G$. Si $x \in M$,

$$\begin{aligned} (\text{Ad}_g \xi)_M(x) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(-t \text{Ad}_g \xi) x = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g \exp(-t\xi) g^{-1} x \\ &= g \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(-t\xi) g^{-1} x = (\Phi_g)_* \xi_M(x). \end{aligned}$$

Esto prueba el primer inciso. Para el segundo, pongamos $g = \exp(-s\eta)$; derivando e igualando a cero es, del lado izquierdo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\text{Ad}_{\exp(-s\eta)})_M(x) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(-t \text{Ad}_{\exp(-s\eta)} \xi)x \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp(-t \text{Ad}_{\exp(-s\eta)} \xi)x \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(-t[\xi, \eta])x = [\xi, \eta]_M(x). \end{aligned}$$

Y del lado derecho, como $\exp(-s\eta)$ es curva integral de η_M , se tiene que

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\Phi_{\exp(-s\eta)})_* \xi_M(x) = \mathcal{L}_{\xi_M} \eta_M(x) = [\xi_M, \eta_M](x),$$

como queríamos probar. \square

Diremos que la acción Φ es simpléctica si $\Phi(g, -) : M \rightarrow M$ es simpléctica para todo $g \in G$. En términos de los campos que recién definimos, que la acción sea simpléctica quiere decir que la derivada de Lie de la forma simpléctica respecto de campos fundamentales es nula. Por las consideraciones de la Sección 1.3, los campos en cuestión son localmente hamiltonianos. El caso en que son globalmente hamiltonianos se describe luego de la próxima proposición.

Definición 3.2. Una acción de un grupo de Lie G en una variedad simpléctica (M, ω) se dice hamiltoniana si es simpléctica y, además, dado cualquier $\xi \in \mathfrak{g}$, es globalmente hamiltoniano ξ_M , es decir, es exacta $\omega^\flat(\xi_M)$.

Supongamos que tenemos una acción hamiltoniana de G en M , y sea $\xi \in \mathfrak{g}$. Podemos conseguir entonces $h_\xi \in C^\infty(M)$ tal que $dh_\xi = \omega^\flat(\xi_M)$: esto nos da una asociación entre elementos de \mathfrak{g} y de $C^\infty(M)$, que se puede traducir a otra entre M y \mathfrak{g}^* . Como esta construcción es evidentemente recíproca, tenemos lo siguiente.

Proposición 3.3. Una acción simpléctica de un grupo de Lie G en una variedad simpléctica (M, ω) es hamiltoniana si y sólo si existe una aplicación diferenciable $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ que cumple que

$$(*) \text{ si para cada } \xi \in \mathfrak{g} \text{ ponemos } J_\xi : M \ni x \mapsto \langle J(x), \xi \rangle \in \mathbb{R}, \text{ tenemos que } X_{J_\xi} = \xi_M.$$

Definición 3.4. Toda aplicación diferenciable $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ que cumpla la propiedad $(*)$ será llamada aplicación momento para la acción hamiltoniana Φ .

Especificar, entonces, una aplicación momento es equivalente a dar, para cada $\xi \in \mathfrak{g}$, una función en $C^\infty(M)$ que sea hamiltoniana para la acción infinitesimal ξ_M . La correspondencia $\tilde{J} : \mathfrak{g} \ni \xi \mapsto \langle J(-), \xi \rangle \in C^\infty(M)$ es a veces denominada hamiltoniano generalizado, y es tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{(-)_M} & \mathfrak{X}(M) \\
\tilde{J} \downarrow & & \uparrow \omega^\sharp \\
C^\infty(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M)
\end{array}$$

conmuta. El siguiente ejemplo motivará la denominación.

Ejemplo 3.5. Sea (M, ω, H) un sistema hamiltoniano, con X_H completo. Su flujo φ define una acción de \mathbb{R} en M , que manda a cada (t, x) al punto por el que pasa a tiempo t la trayectoria del sistema que arranca en x . Esta acción es hamiltoniana: el álgebra de Lie de \mathbb{R} es \mathbb{R} , la exponencial es la identidad, y por lo tanto la acción infinitesimal de 1 es $\omega^\sharp(dH)$:

$$1_M(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} t.x = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_x^{-t} = -X_H(x)$$

Sigue de aquí que la aplicación lineal de \mathbb{R} en $C^\infty(M)$ que manda al 1 en $-H$ es un hamiltoniano generalizado para esta acción. Suena razonable identificar esta aplicación con H , lo que justifica la terminología y, más aún, la aplicación momento asociada a este hamiltoniano generalizado, si identificamos \mathbb{R} con su dual, es $-H$. ▲

Ejemplo 3.6. Sean (M, ω, H) un sistema hamiltoniano integrable Liouville y f_1, \dots, f_n constantes de movimiento como en la Definición 2.1. La acción que aquí consideraremos será entonces de \mathbb{R}^n en M : si $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \in M$, el producto de ambos lo definimos por $g_1^{t_1} \circ \dots \circ g_n^{t_n}(x)$, donde g_i^t es el flujo de X_{f_i} . El álgebra de Lie de este grupo es \mathbb{R}^n , y la aplicación momento es exactamente $-f$: en efecto, para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que

$$\langle f, e_i \rangle = f_i$$

y el campo fundamental de e_i es (considerando que la exponencial es la identidad)

$$e_{iM}(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_i^{-t}(x) = -X_{f_i}(x).$$

Concluimos que cualquiera sea $\xi \in \mathbb{R}^n$, el campo hamiltoniano asociado a $\langle f, \xi \rangle$ es $-\xi_M$: la acción es hamiltoniana, en particular simpléctica, y, como anticipábamos, la aplicación momento es $-f$. ▲

Supongamos que $\xi \mapsto J^\xi$ es un hamiltoniano generalizado para la acción hamiltoniana Φ . En virtud de la Proposición 1.28, si $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, $[\xi_M, \eta_M]$ es un campo hamiltoniano con función asociada $\{J_\xi, J_\eta\}$. Ahora, $[\xi_M, \eta_M] =$

$[\xi, \eta]_M$, y este último es un campo hamiltoniano pero con función asociada $J_{[\xi, \eta]}$. Por lo tanto $J_{[\xi, \eta]}$ y $\{J_\xi, J_\eta\}$ tienen la misma diferencial y entonces la diferencia debe ser constante en cada componente conexa de M . Que esta diferencia sea nula equivale a que $\xi \mapsto J_\xi$ sea un morfismo de álgebras de Lie.

Definición 3.7. Una acción como las de antes se dice fuertemente hamiltoniana si tiene un hamiltoniano generalizado $\tilde{J} : \mathfrak{g} \ni \xi \mapsto J_\xi \in C^\infty(M)$ que es un morfismo de álgebras de Lie.

Observemos que dada una acción hamiltoniana, su aplicación momento no es única (ni, obviamente, su hamiltoniano generalizado): si tenemos otra, digamos J' , como lo único que pedimos es que $\iota_{\xi_M}\omega = d\langle J(-), \xi \rangle$, $J - J'$ deberá tener diferencial nulo.

La siguiente proposición establece condiciones sobre M o sobre G para asegurar que una acción sea hamiltoniana.

Proposición 3.8. Una acción simpléctica de G en M es hamiltoniana si $H_{dR}^1(M) = 0$ o si \mathfrak{g} es perfecta.

Demostración. Si $\xi \in \mathfrak{g}$, como $\omega^\flat(\xi_M)$ es cerrada, será exacta en virtud de que $H_{dR}^1(M) = 0$.

Por otro lado, si \mathfrak{g} es perfecta, coincide con su derivada. Basta entonces ver que si $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, $[\xi, \eta]_M = [\xi_M, \eta_M]$ es globalmente hamiltoniano. En efecto,

$$\begin{aligned} \iota_{[\xi_M, \eta_M]}\omega &= \mathcal{L}_{\xi_M}\iota_{\eta_M}\omega - \iota_{\xi_M}\mathcal{L}_{\eta_M}\omega \\ &= d\iota_{\xi_M}\iota_{\eta_M}\omega = d(-\omega(\xi_M, \eta_M)), \end{aligned}$$

como queríamos. □

Un caso que conviene mirar con más detenimiento es cuando la forma simpléctica es exacta. Una motivación puede encontrarse en que cuando nuestra variedad simpléctica es un fibrado cotangente, la forma simpléctica es la diferencial de la 1-forma canónica: este es el caso en los sistemas mecánicos, como se vió en la primera sección. Suelen aparecer en estos casos acciones simplécticas de la siguiente manera: si G actúa a izquierda en una variedad Q , la acción se levanta a T^*Q , y preserva la 1-forma canónica.

Proposición 3.9. Sea (M, ω) una variedad simpléctica en que $\omega = d\beta$, y tenemos una acción $\Phi : G \times M \rightarrow M$ que conserva β , i.e.

$$\Phi_g^*\beta = \beta.$$

Entonces la acción es fuertemente hamiltoniana y el hamiltoniano generalizado viene dado por

$$\mathfrak{g} \ni \xi \mapsto \iota_{\xi_M}\beta \in C^\infty(M). \quad (3.2)$$

Demostración. Como β es invariante por la acción, la derivada de Lie de β respecto a la acción infinitesimal tiene que ser nula. Pero entonces, si $\xi \in \mathfrak{g}$, se tiene que

$$d\iota_{\xi_M}\beta = -\iota_{\xi_M}d\beta = -\iota_{\xi_M}\omega,$$

de donde la acción es hamiltoniana. Veamos ahora que la aplicación definida por (3.2) es un morfismo de álgebras de Lie. Es

$$\begin{aligned} \{\iota_{\xi_M}\beta, \iota_{\eta_M}\beta\} &= \iota_{\xi_M}d\iota_{\eta_M}\beta = \mathcal{L}_{\xi_M}\iota_{\eta_M}\beta \\ &= \iota_{[\xi_M, \eta_M]}\beta + \iota_{\eta_M}\mathcal{L}_{\xi_M}\beta = \iota_{[\xi, \eta]_M}\beta, \end{aligned}$$

cualquiera sean $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. □

Especifiquemos ahora la motivación de la proposición anterior, que esbozamos antes de enunciarla. Sea $\Psi : G \times Q \rightarrow Q$ una acción; levantémosla a T^*Q . Esto se hace de la siguiente manera: ponemos

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} : G \times T^*Q &\rightarrow T^*Q \\ (g, \alpha) &\mapsto \Psi_{g^{-1}}^*(\alpha) \end{aligned}$$

donde $\langle \Psi_{g^{-1}}^*(\alpha), v \rangle = \langle \alpha, d\Psi_{g^{-1}}(v) \rangle$. Lo que acabamos de definir es una acción a izquierda puesto que «levantar al cotangente» es un funtor contravariante. También, por la Proposición 1.14, la acción levantada es simpléctica.

Por la proposición anterior, esta acción levantada es fuertemente hamiltoniana. Se tiene además una expresión explícita de la aplicación momento.

Proposición 3.10. *Sea Ψ una acción a izquierda de G sobre una variedad Q . Entonces el levantado $\hat{\Psi}_g$ de Ψ_g al fibrado cotangente T^*Q satisface que $\hat{\Psi}_g^*\theta = \theta$; se trata en consecuencia de una acción simpléctica que es fuertemente hamiltoniana.*

*Su aplicación momento $J : T^*Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$ viene dada por*

$$\langle J(\alpha), \xi \rangle = \langle \alpha, \xi_Q(\pi(\alpha)) \rangle, \quad (3.3)$$

donde $\pi : T^*Q \rightarrow Q$ es la proyección usual.

Demostración. Por la proposición anterior, la acción $\hat{\Psi}$ es fuertemente hamiltoniana y admite, siguiendo (3.2), como aplicación momento a

$$\begin{aligned} J : T^*Q &\rightarrow \mathfrak{g}^* \\ \alpha &\mapsto \left(\xi \in \mathfrak{g} \mapsto \iota_{\xi_{T^*Q}}\theta(\alpha) \right), \end{aligned}$$

donde θ es la 1-forma canónica en T^*Q definida en el Teorema 1.13.

Por otro lado, para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ se tienen los campos vectoriales fundamentales asociados a las acciones en Q y en T^*Q , respectivamente ξ_Q y ξ_{T^*Q} . Como una acción es la levantada de la otra, suena razonable que estos campos estén relacionados. Es, en efecto,

$$d\pi(\xi_{T^*Q}) = \xi_Q \circ \pi, \quad (3.4)$$

como se puede ver derivando la igualdad $\Psi_{\exp(-t\xi)}(q) = \pi \circ \hat{\Psi}_{\exp(t\xi)}(\alpha)$, donde $\alpha \in T_q^*Q$.

Ahora, por la definición misma de θ , se tiene que

$$\iota_{\xi_{T^*Q}}\theta(\alpha) = \langle \alpha, d\pi_\alpha(\xi_{T^*Q}(\alpha)) \rangle = \langle \alpha, \xi_Q(\pi(\alpha)) \rangle,$$

debido a la igualdad (3.4). Esto termina la demostración. \square

Los siguientes dos ejemplos ilustrarán la relación entre la aplicación momento definida en esta sección y los momentos de la mecánica clásica; el tercero será, además de ilustrativo, útil más adelante.

Ejemplo 3.11. Sean $Q = \mathbb{R}^n$ y $G = \mathbb{R}^n$; G actúa en Q por traslaciones:

$$G \times Q \ni (s, q) \mapsto s + q \in Q.$$

Si $\xi \in \mathbb{R}^n$, el generador infinitesimal de la acción definido por (3.1) es $\xi_Q(q) = \xi \forall q \in Q$. Usando entonces (3.3) y denotando por (q, p) a un elemento genérico de T^*Q , obtenemos la siguiente expresión:

$$J(q, p)(\xi) = \langle (q, p), \xi_Q(\pi(q, p)) \rangle = p \cdot \xi,$$

es decir que J es el viejo y conocido momento o impulso lineal que aparece en los textos de mecánica clásica. \blacktriangle

Ejemplo 3.12. Sean $Q = \mathbb{R}^n$ y G un subgrupo de Lie de $Gl(n, \mathbb{R})$; consideremos la acción

$$\Phi : G \times Q \ni (T, q) \mapsto Tq.$$

Si $B \in \mathfrak{g} \subset \{\text{endomorfismos de } \mathbb{R}^n\}$, el generador infinitesimal de la acción es $B_Q(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(-tB)q = Bq$, para $q \in Q$. De nuevo por (3.3) se tiene que

$$J(q, p)(B) = p \cdot (Bq),$$

donde $(q, p) \in T^*Q$.

Miremos el caso especial en que $n = 3$ y $G = SO(3, \mathbb{R})$. El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ se puede identificar con \mathbb{R}^3 , donde el corchete de Lie es el producto vectorial; esto se ve poniendo

$$\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) = x \mapsto \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}). \quad (3.5)$$

Así, si $x \in \mathbb{R}^3$ es tal que $B = \tilde{x}$, es

$$J(q, p)(B) = p \cdot (Bq) = p \cdot (x \times q) = \det(p, x, q) = (q \times p) \cdot x,$$

y entonces $J(q, p) = q \times p$: se trata del momento angular, mejor conocido como \vec{L} en los textos de mecánica. ▲

Ejemplo 3.13. Consideremos ahora el caso en que G es un grupo de Lie y $Q = G$; la acción es multiplicar a izquierda: $(g, h) \mapsto L_g(h)$. Si $R_g : G \rightarrow G$ denota la multiplicación a derecha por g y e es el neutro de G , el campo fundamental de $\xi \in \mathfrak{g}$ consiste en $\xi_G(g) = dR_{g_e}(\xi)$: en efecto, es

$$\xi_G(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_{\exp(-t\xi)}(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_g(\exp(-t\xi)).$$

En consecuencia, la aplicación momento en T^*G viene dada por la expresión

$$J(\alpha)(\xi) = \langle \alpha, dR_{g_e}(\xi) \rangle = \langle R_g^*(\alpha), \xi \rangle,$$

para $\alpha \in T_g^*G$, $\xi \in \mathfrak{g}$. Así, $J(\alpha) = R_g^*(\alpha) = R_{\pi(\alpha)}^*(\alpha)$, donde $\pi : T^*G \rightarrow G$ es la proyección usual. ▲

El teorema de Noether. La siguiente versión del teorema de Noether es la que aparece en 2.6 del cuarto capítulo de [LiMa].

Teorema 3.14 (Noether). Sean (M, ω, H) un sistema hamiltoniano en el que H es invariante ante una acción hamiltoniana de un grupo de Lie G , y sea $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ una aplicación momento. Entonces, J es constante a la largo de las trayectorias del sistema.

Demostración. Sea $t \mapsto \gamma(t)$ una curva integral e X_H . Entonces, para cada $\xi \in \mathfrak{g}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle J(\gamma(t)), \xi \rangle &= d\langle J, \xi \rangle(X_H(\gamma(t))) = \omega(X_H, \xi_M)(\gamma(t)) = \\ &= -dH(\xi_M)(\gamma(t)) = -\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} H(\exp(-s\xi) \cdot \gamma(t)) = 0. \end{aligned}$$

Concluimos así que $\frac{d}{dt} J(\gamma(t)) = 0$, como queríamos ver. □

Las cantidades conservadas clásicas pueden derivarse del teorema de Noether. El grupo G , en este caso, será el grupo de isometrías del espacio euclideo E que preservan orientación. Sea (M, ω, H) un sistema mecánico compuesto por cierto número de partículas situadas en el espacio euclideo. Decimos que el sistema es *libre* si sus propiedades son invariantes ante el desplazamiento del sistema en el espacio. En tal caso, el grupo G actúa sobre el espacio de fases M del sistema por una acción simpléctica Φ que deja H invariante; la acción es necesariamente hamiltoniana por la proposición 3.10. Existe entonces una aplicación momento $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ para esta acción que es constante en cada curva integral del sistema.

Ahora, G puede escribirse como producto semidirecto entre traslaciones y rotaciones que preservan orientación. Podemos asociar las traslaciones a E y las rotaciones a $SO(3)$. Su álgebra de Lie \mathfrak{g} será, entonces, producto semidirecto de $\mathfrak{so}(3)$ y \mathfrak{e} . También \mathfrak{g}^* será producto semidirecto de $\mathfrak{so}(3)^*$ y \mathfrak{e}^* .

Componiendo la aplicación momento J con las proyecciones de \mathfrak{g}^* en cada uno de sus factores, podemos expresar $J = (J_p, J_l)$, con $J_p : M \rightarrow \mathfrak{e}$ y $J_l : M \rightarrow \mathfrak{so}(3)$. Éstos no son otros que el momento o impulso lineal y el momento angular del sistema.

3.2. Equivariancia

Recordemos que, si G es un grupo de Lie, tenemos definida la acción adjunta de G en \mathfrak{g} , el álgebra de Lie que como espacio vectorial es el tangente en el neutro de G con el corchete usual. La acción adjunta, decíamos, viene dada por la derivada de conjugar en el neutro; esto es, si $g \in G$, ponemos:

$$\begin{aligned} \text{Ad}_g : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ \xi &\longmapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g \exp(t\xi) g^{-1}. \end{aligned}$$

Ahora, yendo sólo un poco más lejos se puede construir la llamada acción coadjunta de G en \mathfrak{g}^* . Ponemos, para cada $g \in G$,

$$\begin{aligned} \text{Ad}_g^* : \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \eta &\longmapsto (\xi \longmapsto \eta(\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)), \end{aligned}$$

o más claramente, $\langle \text{Ad}_g^* \eta, \xi \rangle = \langle \eta, \text{Ad}_{g^{-1}} \xi \rangle$. No hay que confundir esto con la aplicación transpuesta de Ad_g : el hecho es que definiendo así las cosas se obtiene una acción a izquierda.

Puede generalizarse la definición de aplicación momento a variedades de Poisson. En efecto, si (M, Λ) es una variedad de Poisson y Φ es una acción por difeomorfismos de Poisson, para $f \in C^\infty(M)$ se puede considerar X_f , su campo hamiltoniano (ver Proposición 1.28). Ahora, $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ es una aplicación momento para esta acción si para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, el campo hamiltoniano asociado a $\langle J, \xi \rangle$ es exactamente el campo fundamental ξ_M .

Ejemplo 3.15. En \mathfrak{g}^* se tiene la estructura canónica de Poisson dada por (1.16). Consideremos en \mathfrak{g}^* la acción coadjunta. Si $\xi \in \mathfrak{g}^*$, el campo fundamental asociado a ξ es

$$\begin{aligned} \xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(-t\xi)}^* \mu = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mu \circ \text{Ad}_{\exp(t\xi)} = \\ &= \text{ad}_\xi^*(\mu) = \langle \mu, [\xi, -] \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado, el campo hamiltoniano asociado a $ev_\xi : \mathfrak{g}^* \ni \mu \mapsto \langle \mu, \xi \rangle \in \mathbb{R}$ es

$$X_{ev_\xi}(\mu) = \{ev_\xi, -\}(\mu) = \langle \mu, [\xi, -] \rangle.$$

Se tiene así que la identidad $1_{\mathfrak{g}^*} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ es una aplicación momento: para cada $\xi \in \mathfrak{g}$, el campo hamiltoniano asociado a $\langle 1_{\mathfrak{g}^*}, \xi \rangle = ev_\xi$ es el fundamental de ξ . ▲

Hasta el resto de esta sección, fijemos $\Phi : G \times M \rightarrow M$ una acción hamiltoniana de un grupo de Lie conexo en una variedad simpléctica (M, ω) , y sea J una aplicación momento.

El siguiente teorema establece una importante relación entre las acciones de G en \mathfrak{g}^* y lo que llamaremos la equivariancia de la aplicación momento.

Teorema 3.16. *Supongamos que M es conexo. Entonces existe una única acción a izquierda $a : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ para la que la aplicación momento J es equivariante, esto es, satisface que*

$$a_g \circ J = J \circ \Phi_g \tag{3.6}$$

cualquiera sea $g \in G$. La acción se expresa como

$$a(g, \xi) = \text{Ad}_g^* \xi + \theta(g), \tag{3.7}$$

donde $g \in G$, $\xi \in \mathfrak{g}^*$ y $\theta : G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ es un 1-cociclo en la cohomología de grupos de G para la representación coadjunta. Concretamente, la expresión $J(g \cdot x) - \text{Ad}_g^*(J(x))$ es constante para $x \in M$ y vale $\theta(g) = J(gx) - \text{Ad}_g^*(J(x))$.

Aclaremos que cuando hablamos de que θ es un cociclo para la representación coadjunta nos ponemos en el contexto de la cohomología de grupos, que puede verse (por ejemplo) el quinto apéndice de [LiMa].

Demostración. Sean $\xi \in \mathfrak{g}$, $g \in G$. Por la definición de J , $\omega^b(\xi_M) = J_\xi$. Como $\Phi_{g^{-1}}$ es simpléctica, $(\Phi_{g^{-1}})_* \xi_M$ es también un campo vectorial hamiltoniano, y su hamiltoniano es $J_\xi \circ (\Phi_{g^{-1}})^{-1} = \langle J \circ \Phi_g(-), \xi \rangle$. Por otro lado, dado que J es una aplicación momento, $\langle J(-), \text{Ad}_{g^{-1}} \xi \rangle$ es un hamiltoniano para $(\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)_M$.

Ahora bien, ocurre que $(\Phi_{g^{-1}})_* \xi_M = (\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)_M$, en virtud de la Proposición 3.1. Concluimos que los hamiltonianos de los susodichos campos vectoriales deben tener la misma diferencial. Omitiendo los «(-)», se tiene $\langle J, \text{Ad}_{g^{-1}} \xi \rangle = \langle \text{Ad}_g^* \circ J, \xi \rangle$; puesto que M es conexo, la siguiente expresión es constante:

$$\langle J \circ \Phi_g - \text{Ad}_g^* \circ J, \xi \rangle.$$

Como esto vale cualquiera sea $\xi \in \mathfrak{g}$, tenemos definida una aplicación (diferenciable) $\theta : G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ de manera que para todo $(g, x) \in G \times M$, es

$$\theta(g) = J(gx) - \text{Ad}_g^*(J(x)).$$

Veamos ahora que θ es un 1-cociclo para la representación coadjunta. Sean $g, h \in G$. Es

$$\begin{aligned}\theta(gh) &= J(ghx) - \text{Ad}_{gh}^*(J(x)) = J(g(hx)) - \text{Ad}_g^* \text{Ad}_h^*(J(x)) = \\ &= \theta(g) + \text{Ad}_g^* J(hx) - \text{Ad}_g^* \text{Ad}_h^*(J(x)) = \theta(g) + \text{Ad}_g^* \theta(h).\end{aligned}$$

Resulta evidente que $a : G \times \mathfrak{g}^* \ni (g, \zeta) \mapsto \text{Ad}_g^* \zeta + \theta(g) \in \mathfrak{g}^*$ es una acción a izquierda de G en \mathfrak{g}^* ; ya hemos visto que satisface la igualdad (3.6), así que aquí termina la demostración. \square

Diremos que $\sigma : G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ es simpléctico si $d_e \sigma$ cumple que $\langle d_e \sigma(\xi), \eta \rangle + \langle d_e \sigma(\eta), \xi \rangle = 0$, cualesquiera sean $\forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}$.

Recordemos de los comentarios previos a la definición 3.7 que $J_{[\xi, \eta]} - \{J_\xi, J_\eta\}$ es constante en cada componente conexa de M (que aquí es conexo). Por lo tanto, la expresión de recién define una aplicación $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, que está relacionada con θ como dice la siguiente proposición.

Proposición 3.17. *El cociclo que encontramos en la proposición anterior $\theta(g) : G \ni x \mapsto J(gx) - \text{Ad}_g^*(J(x)) \in \mathfrak{g}^*$ es simpléctico y es, para todos los $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$,*

$$\{J_\xi, J_\eta\} = J_{[\xi, \eta]} - \langle d_e \theta(\xi), \eta \rangle;$$

es decir, $\Theta = \langle d_e \theta, - \rangle$.

Es claro que si $\Theta = 0$, la acción será fuertemente hamiltoniana.

Demostración. Si $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, observemos primero que $\{J_\xi, J_\eta\} = \omega(\xi_M, \eta_M)$. Y ahora

$$\begin{aligned}\omega(\xi_M, \eta_M)(x) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle J(\exp(-t\xi)x), \eta \rangle \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \text{Ad}_{\exp(-t\xi)}^* J(x) + \theta(\exp(-t\xi)), \eta \rangle = \\ &= \langle J(x), [\xi, \eta] \rangle - \langle d_e \theta(\xi), \eta \rangle.\end{aligned}$$

Esto prueba la identidad que buscábamos y la relación con ω nos asegura que θ es simpléctica. \square

Con Θ nos vamos a referir tanto a $d_e \theta$ como a $\langle d_e \theta, - \rangle$. Pensada como forma bilineal en \mathfrak{g} , Θ es un 2-cociclo del álgebra de Lie \mathfrak{g} , que está asociado con J .

Veamos ahora una proposición que trata sobre cuán distintas pueden ser dos aplicaciones momento para una misma acción hamiltoniana. Ya discutimos algo inmediatamente después de la definición 3.7.

Proposición 3.18. *Si J, J' son dos aplicaciones momento para la acción hamiltoniana Φ , ya sabemos que existe $\mu \in \mathfrak{g}^*$ tal que $J = J' + \mu$. Sean θ, Θ y θ', Θ' los cociclos de G y \mathfrak{g} asociados con J y J' , respectivamente. Entonces θ y θ' están en la misma clase de cohomología, y lo mismo vale para Θ y Θ' : la relación explícita viene dada por*

$$\begin{aligned}\theta(g)' &= \theta(g) + \mu - \text{Ad}_g^* \mu, \\ \Theta'(\xi, \eta) &= \Theta(\xi, \eta) + \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle,\end{aligned}$$

con $g \in G$ y $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$.

Demostración. Sean primero $g \in G, x \in M$. Es

$$\begin{aligned}\theta'(g) &= J'(gx) - \text{Ad}_g^* J'(x) \\ &= J(gx) + \mu - \text{Ad}_g^*(J(x) + \mu) = \theta(g) + \mu - \text{Ad}_g^* \mu.\end{aligned}$$

Por otro lado, si $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}\Theta'(\xi, \eta) &= \langle d_e \theta'(\xi), \eta \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \theta(\exp(tx) + \mu - \text{Ad}_{\exp(tx)}^* \mu), \eta \rangle \\ &= \Theta(\xi, \eta) + \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle.\end{aligned}$$

Esto es precisamente lo que queríamos ver. \square

Las expresiones que encontramos recién muestran que fijada una acción hamiltoniana Φ de un grupo de Lie G en una variedad simpléctica (M, ω) , queda determinada una clase de cohomología $[\theta]$ en $H^1(G, \mathfrak{g}^*)$ y asociada a ella $[\Theta] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$. Éstas dependen exclusivamente de Φ y no de la aplicación momento J elegida.

Fijemos J una aplicación momento. Si la acción es fuertemente hamiltoniana, *i.e.*, $\xi \mapsto J_\xi$ es un morfismo de álgebras de Lie, $\Theta = 0$. Ahora, si $[\Theta] = 0$, podemos construir otra aplicación momento J' que haga de J'^* un morfismo de álgebras de Lie: ponemos $J' = J - \mu$, y μ es tal que $\Theta = 0$, como se observa usando la proposición anterior. Concluimos que la acción es fuertemente hamiltoniana si y sólo si $[\Theta] = 0$.

Observemos que son equivalentes la anulación de $[\theta]$ y la de $[\Theta]$. En efecto, que se anule la primera implica que se puede elegir una aplicación momento cuyo hamiltoniano generalizado se morfismo de álgebra de Lie. Recíprocamente, si $[\Theta] = 0$, podemos elegir J tal que su cociclo en \mathfrak{g} asociado sea nulo. Entonces θ , su cociclo en G , debe ser constante en cada componente conexa en virtud de la proposición 3.17. Pero como $\theta(e) = 0$, debe ser $\theta = 0$ y $[\theta] = 0$.

3.3. Órbitas en M y órbitas en \mathfrak{g}^*

El libro [Ki] brinda un amplio panorama sobre las órbitas coadjuntas; aquí observaremos sólo algunas propiedades. Sea G un grupo de Lie, y fijemos una órbita coadjunta \mathcal{O}_ζ en \mathfrak{g}^* . Ocurre que ésta es una variedad simpléctica; más aún, posee una estructura simpléctica canónica que es G -invariante. Hay varias explicaciones de este fenómeno; nombraremos aquí algunas.

Primero, consideremos el dual del álgebra de Lie de G , \mathfrak{g}^* , con la estructura de Poisson definida en (1.16). Por el Teorema 1.33, la distribución característica de \mathfrak{g}^* define una foliación cuyas hojas tienen una estructura simpléctica tal que la inclusión es un morfismo de Poisson.

Proposición 3.19. *Las hojas simplécticas de la variedad de Poisson \mathfrak{g}^* con la estructura recién recordada son exactamente las órbitas coadjuntas.*

Una prueba de la última proposición puede encontrarse en [Ki, Pág 2]. La proposición de recién da además una fórmula explícita para la forma simpléctica, puesto que la inclusión debe ser un morfismo de Poisson. Llamémosla $\Omega_{\mathcal{O}}$; si $\xi_{\mathfrak{g}^*}, \eta_{\mathfrak{g}^*} \in T_\zeta \mathcal{O}_\zeta$, con $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, es

$$\Omega_{\mathcal{O}}(\xi_{\mathfrak{g}^*}, \eta_{\mathfrak{g}^*})(\zeta) = \Lambda(d\text{ev}_\xi, d\text{ev}_\eta)(\zeta) = \langle \zeta, [\xi, \eta] \rangle. \quad (3.8)$$

En efecto, como se vio en el Ejemplo 3.15, para cada ξ en \mathfrak{g} , ev_ξ tiene como campo hamiltoniano a $\xi_{\mathfrak{g}^*}$, e identificamos $d\text{ev}_\xi(\zeta)$ con ξ (respectivamente η).

Una segunda manera de ver este fenómeno consiste en recurrir a la reducción de Marsden y Weinstein, brillantemente explicada en su artículo original [MaWe].

Supongamos que (M, ω) es una variedad simpléctica conexa y sea $\Phi : G \times M \rightarrow M$ una acción de un grupo de Lie G por difeomorfismos simplécticos sobre M . Sea J una aplicación momento; a su vez tiene asociado un cociclo θ , como en el Teorema 3.16. Si $\mu \in \mathfrak{g}^*$, sea G_μ el grupo de isotropía de μ con respecto a la acción a_θ de G en \mathfrak{g}^* . Por la equivariancia probada en este teorema, $J^{-1}(\mu)$ es invariante por la acción de G_μ . Llamamos ahora

$$M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu, \quad (3.9)$$

el espacio de fases reducido, y denotamos por $\pi : J^{-1}(\mu) \rightarrow M_\mu$ a la proyección.

Teorema 3.20. *Sea G un grupo de Lie actuando de manera simpléctica en la variedad simpléctica (M, ω) ; sea J una aplicación momento para esta acción. Sea $\mu \in \mathfrak{g}^*$ un valor regular débil¹ de J . Supongamos que G_μ (el grupo de isotropía de la ac-*

¹Al menos en este artículo, si $f : M \rightarrow N$ es diferenciable, $n \in N$ es un valor regular débil de f si $f^{-1}(n)$ es una subvariedad de M y para todo $m \in f^{-1}(n)$ la inclusión $T_m f^{-1}(n) \subset \ker df_m$ es una igualdad.

ción coadjunta) actúa de manera libre y propia² en la variedad $J^{-1}(\mu)$. Entonces si $\iota : J^{-1}(\mu) \rightarrow M$ es la inclusión, existe una única estructura simpléctica Ω_μ en el espacio reducido M_{μ} tal que $\pi^*\Omega_\mu = \iota^*\omega$.

Este teorema tiene profundas y variadas implicaciones; aquí sólo nos quedaremos con la que se refiere a la estructura simpléctica de las órbitas coadjuntas. Fijemos G un grupo de Lie y hagámoslo actuar sobre sí mismo por multiplicación a izquierda; levantemos esta acción al cotangente como en los comentarios previos a la Proposición 3.10. Una aplicación momento $J : T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ que hace fuertemente hamiltoniana esta acción, como ya hemos visto en el Ejemplo 3.13, viene dada por

$$T_g G \ni \alpha \mapsto J(\alpha) = R_g^* \alpha \in T_e^* G = \mathfrak{g}^*,$$

donde R_g denota la multiplicación a derecha. Así, cada $\mu \in \mathfrak{g}^*$ es regular y $J^{-1}(\mu)$ es el gráfico de la 1-forma invariante a derecha cuyo valor en el neutro es μ . Puesto que $G_\mu = \{g \in G \mid L_g^* \omega = \omega\}$, la acción de G_μ en $J^{-1}(\mu)$ consiste en la traslación a izquierda del punto base. Se tiene entonces que

$$J^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq G/G_\mu \simeq \mathcal{O}_\mu \subset \mathfrak{g}^*.$$

En consecuencia el espacio reducido del teorema anterior es la órbita coadjunta de μ ; que esta variedad es simpléctica sigue del teorema anterior. Puede probarse que esta estructura coincide con la encontrada antes.

A continuación establecemos algunas propiedades que cumple la diferencial de la aplicación momento.

Proposición 3.21. Sean $x \in M$ y $G_x = \{g \in G \mid \Phi(g, x) = x\}$ el grupo de isotropía; denotemos por \mathfrak{g}_x su álgebra de Lie. Entonces

(i) la aplicación transpuesta de $d_x J : T_x M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ es

$$\mathfrak{g} \ni \xi \mapsto \omega^\flat(\xi_M)(x) \in T_x^* M;$$

(ii) la imagen de $d_x J$ es el anulador de \mathfrak{g}_x ; y por último

(iii) $\ker d_x J$ es el ortogonal simpléctico de $T_x(G \cdot x)$.

Demostración. Sean $v \in T_x M$, $\xi \in \mathfrak{g}$. Es

$$\langle d_x J(v), \xi \rangle = \iota_v d \langle J, \xi \rangle(x) = -\iota_v d J_\xi(x) = \langle \omega^\flat(\xi_M)(x), v \rangle.$$

Esto prueba la primera afirmación. Para la segunda, recordamos que la imagen de $d_x J$ es el anulador del núcleo de su transpuesta, que consiste en los $\xi \in \mathfrak{g}$ tales que $\omega^\sharp(\xi_M) = 0$, i.e. $\xi_M = 0$: esto coincide con \mathfrak{g}_x .

²Una acción $\Phi : G \times M \rightarrow M$ se dice libre si Φ_g no tiene puntos fijos a menos que g sea el neutro; se dice propia si la aplicación $G \times M \ni (g, x) \mapsto (g \cdot x, x) \in X \times X$ es propia. Finalmente, una función continua es propia si la preimagen de compactos es siempre compacta.

El anulador del núcleo de $J(x)$ es la imagen de su transpuesta. Por otro lado, $T_x G = \{\xi_M(x) \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$, así que

$$(\ker dJ(x))^0 = \{\omega^b(\xi_M) \mid \xi \in \mathfrak{g}\}. \quad (3.10)$$

En consecuencia, si $v \in \ker dJ(x)$ y $\xi_M(x) \in T_x(G \cdot x)$ se tiene que $\omega(\xi_M, v) = \omega^\sharp(\xi_M)(v) = 0$, es decir que $\ker dJ(x) \subset \left(T_x(G \cdot x)\right)^\omega$. La igualdad (3.10) da las condiciones de dimensionalidad suficientes para que valga la igualdad. \square

Fijemos, como antes, una acción $\Phi : G \times M \rightarrow M$ hamiltoniana en una variedad simpléctica (M, ω) , y denotemos por J una aplicación momento. Asociada a ella tenemos el 1-cociclo θ de G y el correspondiente cociclo en \mathfrak{g}^* que denotamos, como antes, por Θ . La siguiente proposición emula las que ya obtuvimos cuando $\Theta = 0$; una demostración puede encontrarse en [LiMa].

Proposición 3.22. *El corchete*

$$\{f, g\}_\theta(\zeta) = \langle \zeta, [df(\zeta), dh(\zeta)] \rangle - \Theta(df(\zeta), dh(\zeta)) \quad (3.11)$$

define una estructura de Poisson en \mathfrak{g}^* , asociada a θ .

Las hojas simplécticas de la estructura de Poisson de \mathfrak{g}^* son las órbitas de la restricción de la acción a_θ a la componente conexa de la identidad de G . Pongamos en \mathfrak{g}^* la estructura de Poisson asociada a θ , y llamemos a_θ a la acción dada por (3.7).

Sea $\xi \in \mathfrak{g}$. Entonces el campo vectorial X_{ev_ξ} coincide con

$$\xi_{\mathfrak{g}^*}(\eta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Ad}_{\exp(-t\xi)}^* \eta + \theta(\exp(-t\xi))) = -\text{ad}_\xi^* \eta - \Theta(\xi),$$

el campo vectorial fundamental asociado a la acción a_θ . Así, ésta es hamiltoniana y admite a la identidad de \mathfrak{g}^* como aplicación momento, de manera análoga al Ejemplo 3.15.

Se tiene entonces que, para cada $\zeta \in \mathfrak{g}^*$, la órbita \mathcal{O}_ζ puede dotarse de una estructura simpléctica. Puede ponerse, en efecto,

$$\Omega_{\mathcal{O}}(\mu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)) = \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle - \Theta(\xi, \eta), \quad (3.12)$$

donde $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ y $\xi_{\mathfrak{g}^*}, \eta_{\mathfrak{g}^*}$ son sus campos fundamentales asociados para la acción a_θ , y $\mu \in \mathcal{O}_\zeta$. La restricción de a_θ a $G \times \mathcal{O}_\zeta$ es una acción hamiltoniana de G en \mathcal{O}_ζ que admite a $\mathcal{O}_\zeta \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ como aplicación momento.

Proposición 3.23. *Si dotamos a \mathfrak{g}^* de la estructura de Poisson definida por (3.11), $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ es un morfismo de Poisson.*

Demostración. Veamos que J es un morfismo de Poisson viendo que respeta el bivector. En efecto, si $x \in M$ y $\xi, \eta \in \mathfrak{g} = (T_{J(x)}\mathfrak{g}^*)^*$, es

$$\begin{aligned}\Lambda_{J(x)}(\xi, \eta) &= \{dev_\xi, dev_\eta\}(J(x)) = \langle J(x), [\xi, \eta] \rangle - \Theta(\xi, \eta) = \\ &= J_{[\xi, \eta]}(x) - \langle d_e\theta(\xi), \eta \rangle = \{J_\xi, J_\eta\}(x) \\ &= \Lambda(\xi \circ dJ, \eta \circ dJ)(x),\end{aligned}$$

en virtud de la Proposición 3.17. \square

Miremos ahora algunas consecuencias. Sean $\xi \in \mathfrak{g}$ y $f = ev_\xi : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Sean $\xi_{\mathfrak{g}^*}$ y ξ_M los campos vectoriales fundamentales para las acciones a_θ y Φ asociados a ξ . Entonces ambos son hamiltonianos, y admiten como hamiltoniano a f (como en el Ejemplo 3.15) y a $f \circ J = J_\xi$.

Proposición 3.24. *Sea $x \in M$. La aplicación tangente $dJ_x : T_x M \rightarrow T_{J(x)}\mathfrak{g}^*$ manda campos fundamentales en campos fundamentales: si $\xi \in \mathfrak{g}$, es*

$$\xi_{\mathfrak{g}^*}(J(x)) = dJ_x \xi_M(x). \quad (3.13)$$

Demostración. En virtud de la equivariancia de J para la acción a_θ , es

$$\xi_{\mathfrak{g}^*}(J(x)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(-t\xi)J(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} J(\exp(-t\xi)x) = dJ_x \xi_M(x),$$

donde $\xi \in \mathfrak{g}$ y $x \in M$ \square

Sean ahora $\eta \in \mathfrak{g}$, y $\eta_{\mathfrak{g}^*}$ y η_M como antes. Sean $x \in M$ y $\mathcal{O}_{J(x)}$ la órbita de $J(x)$ bajo la acción a_θ , y $\omega_{\mathcal{O}}$ la 2-forma que define la estructura simpléctica de la órbita asociada a θ , como en (3.12).

Como J es un morfismo de Poisson, respeta el bivector; como las variedades en cuestión (las órbitas y M) no sólo son de Poisson sino que además son simplécticas, obtenemos una relación entre las formas simplécticas y campos fundamentales de ambas:

$$\Omega(\xi_M, \eta_M)(x) = \Omega_{\mathcal{O}}(\xi_{\mathfrak{g}^*}, \eta_{\mathfrak{g}^*})(J(x)) = \langle J(x), [\xi, \eta] \rangle - \Theta(\xi, \eta), \quad (3.14)$$

donde $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ y $x \in M$.

La idea en lo siguiente es explicitar las relaciones entre las propiedades de la órbita de un punto x de M bajo la acción Φ y la órbita de $J(x)$ bajo la acción de a_θ . Notaremos $G \cdot x$ y \mathcal{O}_ζ a las órbitas y G_x y G_ζ los grupos de isotropía, para $x \in M$ y $\zeta \in \mathfrak{g}^*$. Puede observarse que las álgebras de Lie de los grupos de isotropía resultan $\mathfrak{g}_x = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \xi_M = 0\}$ y $\mathfrak{g}_\zeta = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \xi_{\mathfrak{g}^*} = 0\}$.

Como J es equivariante para la acción a_θ , $G_x \subset G_{J(x)}$ (en efecto, si $g \in G_x$, $J(x) = J\Phi_g(x) = a_{\theta_g}J(x)$).

Proposición 3.25. *Sea $\zeta \in J(M) \subset \mathfrak{g}^*$. Entonces*

(i) $M_\zeta = J^{-1}(\zeta)$ es invariante bajo la acción de G_ζ y si $x \in M_\zeta$,

$$\ker dJ_x = (T_x(G \cdot x))^\omega, \quad \ker dJ_x \cap T_x(G \cdot x) = T_x(G_\zeta \cdot x).$$

(ii) Sea $x \in M_\zeta$, llamemos $N = G \cdot x$ a su órbita. Sea ω_N la 2-forma inducida por la forma simpléctica ω de M . Entonces $J(N) \subset \mathcal{O}_\zeta$ y, si $\hat{J} = J|_N : N \rightarrow \mathcal{O}_\zeta$, se tiene que

$$\hat{J}^* \Omega_{\mathcal{O}} = \omega_N,$$

$$\text{y si } y \in N, \ker \Omega_N(y) = \ker d\hat{J}_y = T_y(G_{J(y)} \cdot y).$$

Demostración. Debido a la equivariancia de J , Φ manda $G_\zeta \times M_\zeta$ en M_ζ : en efecto, si $g \in G_\zeta$, $x \in M_\zeta$, $J(g \cdot x) = a_\theta J(x) \in G_\zeta$. Además, si $x \in M_\zeta$, se tiene que $\ker d_x J = (T_x(G \cdot x))^\omega$ por la Proposición 3.21. Por otro lado, los vectores tangentes a la órbita $G \cdot x$ en x son los $\xi_M(x)$ con $\xi \in \mathfrak{g}$. Ahora, los que también están en $\ker dJ_x$ son exactamente aquellos que cumplen $0 = dJ_x(\xi_M(x)) = \xi_{\mathfrak{g}}^*(J(x))$, es decir los $\xi_M(x)$ con $\xi \in \mathfrak{g}_\zeta$: el conjunto de estos es $T_x(G_\zeta \cdot x)$.

Por la igualdad (3.13), la aplicación tangente a J conserva campos fundamentales, así que \hat{J} también lo hace. En consecuencia, la ecuación (3.14) dice que $\hat{J}^* \Omega_{\mathcal{O}} = \omega_N$. Por último, si $y \in N$, $\ker d\hat{J}_y = \ker dJ_y \cap T_y(G \cdot y)$; del párrafo anterior sigue la consecuencia que buscamos. \square

Tenemos así que las órbitas $N = G \cdot x$ y \mathcal{O}_ζ son subvariedades embebidas de M y \mathfrak{g}^* respectivamente. Podemos identificarlas con G/G_x y G/G_ζ . Como G_x es un subgrupo cerrado de G_ζ , tenemos definida una proyección $\pi : G/G_x \rightarrow G/G_\zeta$, que, para pensarlo concretamente, manda a cada clase de G/G_x a la clase de G/G_ζ que la contiene. Mediante estas identificaciones, π se puede asociar a \hat{J} .

El siguiente resultado puede encontrarse en [Ki], y en [LiMa] hay una generalización interesante aunque intrincada. Llamemos simplectomorfismo a un difeomorfismo simpléctico.

Teorema 3.26. Si $\Phi : G \times M \rightarrow M$ es una acción hamiltoniana transitiva de un grupo de Lie G en una variedad simpléctica (M, ω) , la imagen de la aplicación momento J es la órbita de la acción a_θ de G en \mathfrak{g}^* , para la que J es equivariante. La correstricción $J : M \rightarrow \mathcal{O}$ es un simplectomorfismo local, y un revestimiento.

Demostración. Sean $x \in M$ y pongamos $\zeta = J(x)$. La acción es transitiva, así que $G \cdot x = M$. Al ser J equivariante, $J(M) = \mathcal{O}_\zeta =: \mathcal{O}$; la submersión $J : M \rightarrow \mathcal{O}$ es un difeomorfismo local mirando la proposición anterior y también un simplectomorfismo local. Como J es propia, resulta un revestimiento. \square

En el caso en que la acción es fuertemente hamiltoniana y la variedad M es simplemente conexa, vemos que M es el revestimiento universal de

la órbita coadjunta; en el caso de no ser simplemente conexa, admite como revestimiento al universal de la órbita coadjunta: los revestimientos universales de órbitas coadjuntas de duales de álgebras de Lie son, a su vez, cosa bien estudiada.

4 | Integrabilidad y Simetrías

4.1. Hamiltoniano colectivo

A continuación consideraremos el caso en que se tiene un hamiltoniano definido en M que se factoriza por \mathfrak{g}^* ¹. Supongamos que $\Phi : G \times M \rightarrow M$ es una acción fuertemente hamiltoniana y sea J una aplicación momento Ad^* -equivariante.

Definición 4.1. *El hamiltoniano $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ se dice colectivo si es de la forma $H = u \circ J$.*

En nuestro caso, sea $u \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, y $H = u \circ J$ un hamiltoniano colectivo. Tenemos definido un campo vectorial en M , X_H , que se construye a partir de la estructura simpléctica de M . Podemos también hacer lo siguiente: para cada $x \in M$, aplicamos J y obtenemos un punto de \mathfrak{g}^* ; si ahora tomamos la diferencial de u particularizada en $J(x)$ obtenemos un elemento de $\mathfrak{g}^{**} = \mathfrak{g}$, llamémoslo momentáneamente ξ . Asociado a él tenemos el campo vectorial en M ξ_M ; podemos evaluarlo en x y obtener el vector tangente $(du_{J(x)})_M(x) \in T_x M$.

Proposición 4.2. *Es, para todo x en M , $X_H(x) = (du_{J(x)})_M(x) \in T_x M$.*

Demostración. En efecto, si $v \in T_x M$, por la regla de la cadena y la definición de aplicación momento se tiene que

$$\begin{aligned} \omega(X_H(x), v) &= \langle d(u \circ J)_x, v \rangle = \langle du_{J(x)}, dJ_x(v) \rangle \\ &= d\langle J, du_{J(x)} \rangle_x(v) = \omega((du_{J(x)})_M(x), v); \end{aligned}$$

la tesis del enunciado sigue de la no degeneración de ω . □

De la proposición anterior y de la equivariancia de J (la acción en \mathfrak{g}^* es la coadjunta) se desprende que $dJ_x(X_h(x)) = (du_{J(x)})_{\mathfrak{g}^*}(J(x))$: es, en efecto,

$$\begin{aligned} (du_{J(x)})_{\mathfrak{g}^*}(J(x)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(-tdu_{J(x)}) \cdot J(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} J(\exp(-tdu_{J(x)}) \cdot x) = \\ &= dJ_x \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(-tdu_{J(x)}) \cdot x \right) = dJ_x \left((du_{J(x)})_M(x) \right) = \\ &= dJ_x(X_h(x)). \end{aligned}$$

¹Esta situación es estudiada en [GiSt], para más detalles se puede recurrir allí

Ahora, en las órbitas coadjuntas tenemos definida una estructura simpléctica dada por (3.12); hemos visto ya que la aplicación momento es la identidad. Se tiene entonces, por la proposición anterior, que $(du_\mu)_{\mathfrak{g}^*}(\mu)$ coincide con $X_u(\mu)$, cualquiera sea $\mu \in \mathfrak{g}^*$.

Si, para cierto $x \in M$, $t \mapsto c(t)$ es la trayectoria de X_h con $c(0) = x$, se tendrá que $\gamma(t) = J \circ c(t)$ vive siempre en la órbita de $J(x)$ y de hecho es la trayectoria del sistema hamiltoniano $(\mathcal{O}_{J(x)}, \Omega_{\mathcal{O}}, u|_{\mathcal{O}})$ que a tiempo cero pasa por $J(x)$:

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= dJ_x(c'(t)) = dJ_x(X_h(c(t))) = \\ &= (du_{J(c(t))})_{\mathfrak{g}^*}(J(c(t))) = X_u(J(c(t))) = X_u(\gamma(t)),\end{aligned}$$

en virtud de las identidades que encontramos en los dos párrafos anteriores.

En la misma cuenta que escribimos recién se observa que $\gamma'(t) = (du_{\gamma(t)})_{\mathfrak{g}^*}(\gamma(t))$; esto nos facilita el siguiente algoritmo para encontrar las trayectorias del sistema (M, ω, h) que pasan por x a tiempo 0:

1. Encontrar la órbita \mathcal{O} que pasa por $J(x)$
2. Encontrar la solución del sistema $(\mathcal{O}_{J(x)}, \Omega_{\mathcal{O}}, u|_{\mathcal{O}})$; llamémosla $\gamma(t)$
3. Encontrar la curva $a(t)$ en G que cumple $a'(t) = dL_{du_{\gamma(t)}} a(t)$ y $a(0) = e$ (el neutro de G).

Entonces $a(t).x$ es la solución buscada.

El primer paso no involucra al hamiltoniano, depende sólo de la acción coadjunta. El segundo paso consiste en la solución de un sistema hamiltoniano pero típicamente de menor dimensión que el original.

Ejemplo 4.3. Miremos el ejemplo mecánico en que tratamos con un cuerpo rígido. El espacio de configuraciones es $SO(3)$ y el grupo que actúa por rotaciones es también $G = SO(3)$. El espacio de fases del sistema en cuestión es la variedad simpléctica $T^*G \simeq G \times \mathfrak{g}^*$. La aplicación momento, pensando $M = G \times \mathfrak{g}^*$, es exactamente la proyección en la segunda coordenada. Supongamos que tenemos un hamiltoniano colectivo: $h = u \circ J$, donde — si identificamos $\mathfrak{so}(3)^*$ con $(\mathbb{R}^3)^*$ mediante la dual a (3.5) y luego con \mathbb{R}^3 mediante el producto interno canónico— es

$$u(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \frac{1}{2}(I_1\mu_1^2 + I_2\mu_2^2 + I_3\mu_3^2).$$

Fijemos $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathfrak{so}(3)^*$. La órbita \mathcal{O}_μ de la acción coadjunta allí es exactamente la esfera de radio $\|\mu\| = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2$.

Observemos que si $I_1 = I_2 = I_3$, u es constante sobre la órbita \mathcal{O}_μ y la trayectoria en la órbita será constante, digamos $\gamma(t) = \gamma$ para todo t . La ecuación del tercer paso entonces se resuelve fácilmente y la trayectoria en M viene dada por $c(t) = \exp(t\gamma).x$ para la condición inicial $c(0) = x$. Como

γ es una rotación infinitesimal, esto consiste precisamente en las rotaciones con momento constante.

Para obtener una expresión de las ecuaciones de movimiento, miremos la parametrización

$$D = \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 \mid s_1^2 + s_2^2 < 1\} \ni (s_1, s_2) \mapsto (s_1, s_2, \sqrt{1 - s_1^2 - s_2^2}) \in U$$

donde, por supuesto, $U = \mathcal{O}_\mu \cap \{\mu_3 > 0\}$. La forma simpléctica definida en (3.12) se ve en U como

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{1 - s_1^2 - s_2^2}} ds_1 \wedge ds_2.$$

Como las derivadas de u respecto a las s 's son

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = s_1(I_1 - I_3) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial s_2} = s_2(I_2 - I_3)$$

el campo hamiltoniano X_u vendrá dado por

$$X_u = \sqrt{1 - s_1^2 - s_2^2} \left(s_2(I_3 - I_2) \frac{\partial}{\partial s_1} + s_1(I_1 - I_3) \frac{\partial}{\partial s_2} \right).$$

En consecuencia, las ecuaciones de movimiento serán

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = s_2 \sqrt{1 - s_1^2 - s_2^2} (I_3 - I_2), \\ \dot{s}_2 = s_1 \sqrt{1 - s_1^2 - s_2^2} (I_1 - I_3). \end{cases}$$

Estas ecuaciones son las famosas ecuaciones de Euler, pero con un término que tiene que ver con la carta tomada. Supongamos que $I_1 = I_3$: en tal caso, s_2 es constante y es fácil obtener una expresión cerrada para s_1 :

$$s_1(t) = \sqrt{1 - s_2^2} \sin \left((1 - s_2^2) s_2 (I_3 - I_2) t + cte \right).$$

En el caso en que los momentos de inercia son todos distintos no es problema. Por tratarse de un sistema de dimensión dos y tener como constante de movimiento a u , la Proposición 2.10 nos asegura integrabilidad por cuadraturas. ▲

4.2. Álgebras completas originadas por simetrías

Las consideraciones de esta sección están fundamentadas en los interesantes pero telegráficos artículos [BoJo] y [Jo].

Sea $\Phi : G \times M \rightarrow M$ una acción fuertemente hamiltoniana de un grupo de Lie G sobre una variedad simpléctica M , y sea $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ su aplicación momento Ad^* -equivariante. Llamemos \mathcal{F}_1 al conjunto de funciones de M

en \mathbb{R} que se obtiene componiendo con Φ las de $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, y \mathcal{F}_2 al de las funciones de $C^\infty(M)$ que son G -invariantes:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &:= J^*C^\infty(\mathfrak{g}^*) = \{u \circ J \mid u \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)\}, \\ \mathcal{F}_2 &:= \{f \in C^\infty(M) \mid f \circ \Phi_g = f \forall g \in G\}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Como ya hemos visto en la Proposición 3.23, $C^\infty(M) \ni f \mapsto f \circ \Phi \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ es un morfismo de Poisson, donde la estructura de Poisson en el dominio es la inducida por la estructura simpléctica y en el codominio es la canónica, definida en (1.16). En particular, se tiene que \mathcal{F}_1 debe ser cerrada bajo el corchete de Poisson.

También \mathcal{F}_2 debe ser cerrada bajo el corchete de Poisson: si $f, h \in \mathcal{F}_2$, es

$$\begin{aligned}\{f \circ \Phi_g, h \circ \Phi_g\} &= \langle d(h \circ \Phi_g), X_{f \circ \Phi_g} \rangle = \langle dh, X_{f \circ \Phi_g} \rangle = \\ &= \langle d(f \circ \Phi_g), X_h \rangle = \langle df, X_h \rangle = \{f, h\}.\end{aligned}$$

Por el Teorema de Noether (el 3.14), si tenemos una aplicación f en $C^\infty(M)$ que es G -invariante, la aplicación momento es constante a lo largo de las trayectorias del sistema definido por $X_f = \dot{x}$. Esto equivale a decir que $\{f, u \circ J\} = 0$, si $u \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Concluimos que es $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\} = 0$.

Llamemos, en consonancia con la Proposición 2.24,

$$W_{i,x} = W_i = \text{span}\{X_f(x) \mid f \in \mathcal{F}_i\},\tag{4.2}$$

para $i = 1, 2$ y $x \in M$. En lo siguiente, y bajo las hipótesis necesarias, veremos que el álgebra $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ es completa; para ello nos bastará con probar que $W_1 + W_2$ es coisotrópica en un abierto denso de M , como nos indica la proposición recién mencionada.

Hipótesis ♣. Supongamos que, si $x \in M$, $W_{2,x} = (T_x(G \cdot x))^\omega$.

Observemos que, en virtud de la Proposición 3.21, $\ker dJ_x = (T_x(G \cdot x))^\omega$ para cada $x \in M$. Como antes, por el Teorema de Noether, J es constante a lo largo de las curvas integrales de cada función G -invariante, y así si $f \in \mathcal{F}_2$, $dJ_x(X_f(x)) = 0$: siempre vale $W_{2,x} \subset (T_x(G \cdot x))^\omega$. Lo que la hipótesis verdaderamente dice es que vale la inclusión recíproca.

Es también destacable que la hipótesis es equivalente a que valga la igualdad

$$\text{span}\{df(x) \mid f \in \mathcal{F}_2\} = (T_x(G \cdot x))^\circ,\tag{4.3}$$

como puede verse tomando ω^b en aquella.

Lema 4.4. *Bajo la hipótesis ♣, es $W_1^\omega = W_2$.*

Demostración. En efecto, como decíamos antes de Proposición 2.24, W_1^ω es el anulador de \mathcal{F}_1 . Ahora, para $v \in T_x M$ son equivalentes que $\langle df_x, v \rangle$ se

anule para toda $f \in \mathcal{F}_1$ y que $du(dJ_x(v)) = 0$ para toda $u \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$: esta última condición dice que $dJ_x(v) = 0$ puesto que si vale, para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ se tendrá que $\langle dJ_x(v), \xi \rangle = \text{dev}_\xi(dJ_x(v)) = 0$. Concluimos que $W_1^\omega = \ker dJ_x$. Como decíamos antes, $\ker dJ_x = (T_x(G \cdot x))^\omega$ por la Proposición 3.21; la Hipótesis \clubsuit nos asegura entonces que $(T_x(G \cdot x))^\omega = W_2$ y queda probado el lema. \square

Ya estamos en condiciones de probar el teorema clave de esta sección, el cual afirma que el álgebra de funciones $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ es completa.

Teorema 4.5. *Sea G es un grupo de Lie conexo que actúa de manera fuertemente hamiltoniana sobre una variedad simpléctica (M, ω) y supongamos que vale la hipótesis \clubsuit . Entonces el álgebra $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ es completa.*

Demostración. Veremos que para cada $x \in M$, $W_x = \text{span}\{X_f(x) \mid f \in \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2\}$ es coisotrópico. Para eso, y siguiendo la notación de (4.2), observemos que $W_1 + W_2 = W$; en virtud de la Proposición 2.24 bastará probar que $W^\omega \subset W$. Pero, por el Lema 4.4, se tiene que

$$W^\omega = (W_1 + W_2)^\omega = W_1^\omega \cap W_2^\omega = W_2 \cap W_1 \subset W_1 + W_2 = W.$$

Esto completa la demostración. \square

La demostración del Teorema 4.5 se apoya en el Lema 4.4. Una pieza clave en la prueba de este lema es que la condición $du(dJ_x(v)) = 0 \forall u \in \mathcal{A}$ implica $dJ_x(v) = 0$, donde $\mathcal{A} = C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Una pregunta posible es si se puede obtener una prueba de la misma implicación –y así del mismo lema– si \mathcal{A} no es todo $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$; la siguiente proposición dice exactamente cómo debe ser \mathcal{A} .

Proposición 4.6. *Supongamos que se satisface la Hipótesis \clubsuit . Sea $\mathcal{A} \subset C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ una subálgebra de Lie; es $J^*\mathcal{A} = \{h \circ J : h \in \mathcal{A}\}$. Entonces $J^*\mathcal{A} + \mathcal{F}_2$ es un álgebra completa en M si y sólo si \mathcal{A} lo es en cualquier órbita coadjunta \mathcal{O}_ζ , $\zeta \in J(M)$.*

La proposición de recién nos obliga a estudiar el caso del hamiltoniano colectivo de la sección anterior. Supongamos que queremos estudiar las trayectorias del sistema hamiltoniano definido en M por $h = u \circ J$, con $u \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. La integrabilidad en cada órbita coadjunta implicará la integrabilidad del sistema original, y además las constantes de movimiento se «preservan». Los detalles, en el siguiente teorema.

Teorema 4.7. *Asumamos que vale la hipótesis \clubsuit ; sea $h = u \circ J$ un hamiltoniano colectivo con $u \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Supongamos que en cada órbita es integrable el sistema hamiltoniano $(\mathcal{O}_\mu^{2l}, \Omega_\mu, u|_{\mathcal{O}})$, con integrales que conmutan*

$$f_1, \dots, f_l : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Entonces el sistema hamiltoniano (M, ω, h) es completamente integrable y un álgebra completa de integrales es

$$\{f_1 \circ J, \dots, f_l \circ J\} + \mathcal{F}_2.$$

Demostraciones de este teorema y de la última proposición pueden encontrarse en los artículos citados al principio de esta sección.

A | Distribuciones

Una distribución en una variedad diferencial M es un subconjunto $F \subset TM$ tal que para cada x en M , la fibra $F_x = F \cap T_xM$ es un subespacio vectorial de T_xM ; la dimensión de F_x se llama el rango de la distribución F en x .

Una sección diferenciable de una distribución F consiste en un campo vectorial X definida en un abierto U de M de manera que para cada y en U , $X(y) \in F_y$.

Una distribución F es diferenciable si para cada $x \in M$ y para cada $v \in F_x$, existe una sección diferenciable X de F tal que $X(x) = v$.

Una integral de una distribución F en una variedad M es un par (N, h) consistente en una variedad conexa N y una inmersión $h : N \hookrightarrow M$ que satisface $dh_x(T_xN) \subset F_{h(x)}$ cualquiera sea $x \in N$. Una integral así se dirá de dimensión maximal en x si la contención anterior es una igualdad. Una variedad integral de la distribución F es una subvariedad inmersa $N \subset M$ tal que $(N, \iota : N \hookrightarrow M)$ es una integral. No se pide que N sea una subvariedad embebida, i.e. que cumpla la definición de *las cartas buenas*.

Una distribución F en una variedad M es completamente integrable si para cada x en M existe una variedad integral de F de dimensión maximal que contiene a x .

Teorema A.1. *Sea F una distribución diferenciable y completamente integrable. Entonces*

- (i) *Para cada x en M existe una única variedad integral S de F que contiene a x y que es maximal en el siguiente sentido: es siempre de dimensión maximal, y más aún, cualquier otra variedad integral N de F de que sea siempre de dimensión maximal y contiene a S debe ser S . Las variedades integrales maximales de F forman una partición de M , llamada la foliación generalizada de M definida por F : las hojas de la foliación son estas variedades integrales.*
- (ii) *Sea (N, h) una integral de F siempre de dimensión maximal. Entonces h es un difeomorfismo local de la variedad conexa N en subconjunto abierto y conexo $h(N)$ de una hoja de la foliación generalizada definida por F .*

Bibliografía

- [AbMa] R. ABRAHAM Y J. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*, Addison–Wesley, 1978.
- [Arn] V. I. ARNOLD, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 1989.
- [BoJo] A.V. BOLSINOV Y B. JOVANOVIĆ, *Non-commutative integrability, moment map and geodesic flows*, *Annals of Global Analysis and Geometry*, **23** (4) (2003): 305-322.
- [Fa] F. FASSÒ, *Superintegrable Hamiltonian Systems: Geometry and Perturbations*, *Acta Applicandæ Mathematicæ* **87** (2005): 93-121.
- [GiSt] V. GUILLEMIN Y S. STENBERG, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge University Press, 1984.
- [Gol] H. GOLDSTEIN, *Classical mechanics*, Addison–Wesley, 1980.
- [Gri] S. GRILLO, *Introducción a la Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana*, III Encuentro de Geometría Diferencial, La Falda, Agosto 06–11, 2007.
- [HSS] D.D. HOLM, T. SCHMAH Y C. STOICA, *Geometric Mechanics and Symmetry: From Finite to Infinite Dimensions*, Oxford University Press, 2009.
- [Jo] B. JOVANOVIĆ, *Symmetries and integrability*, *Publ. Inst. Math. (Beograd)* (NS) **84.98** (2008): 1-36.
- [Ki] A. A. KIRILLOV, *Lectures on the Orbit Method*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 64, American Mathematical Society, 2004.
- [Lee] J. M. LEE, *Manifolds and Differential Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 107, American Mathematical Society, 2009.
- [LiMa] P. LIBERMANN Y C.M. MARLE, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, Springer, 1987.
- [MaWe] J. E. MARSDEN AND A. WEINSTEIN, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, *Reports on Mathematical Physics* **5** (1974), 121–130.

[MiFo] A. S. MISHCHENKO Y A. T. FOMENKO, *Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systems*, Funkts. Anal. Prilozh. **12(2)** (1978), 46–56 (en ruso); traducción al inglés: Funct. Anal. Appl. **12** (1978), 113–121.

[Min] F. O. MINOTTI, *Apuntes de Mecánica Clásica*, disponible en <http://www.lfp.uba.ar/minotti/mecanica/cursomec.pdf>.