UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Principio de Reflexividad Local y complementación local en espacios de Banach

Diego Javier Zabaljauregui

Directora: Verónica Dimant

Junio de 2014

Agradecimientos

A Vero, mi directora, por guiarme y explicarme, por sus correcciones, por estar inmediatamente cada vez que la necesité, por el aliento, por darme el privilegio de ser su alumno.

A mis docentes del área, Silvia Lassalle, Santiago Muro y Daniel Carando, por sus enseñanzas y por transmitirme esa pasión que tienen por lo que hacen.

A mis compañeros de Exactas y la gente con la que tuve el placer de trabajar allí, por los consejos y la buena onda. Particularmente a “los Pablos”, por todo lo que compartimos.

A mis viejos, Javier y Gabriela, por educarme y enseñarme, por darme todo, por orientarme cuando lo necesité. Porque cualquier logro mío es en realidad de ellos.

A mi novia Agos, por acompañarme como nadie más a lo largo de este trayecto. Por escucharme, aconsejarme, por bancarse mis jornadas de estudio. Y sobre todo, por alentarme y confiar siempre en mí.

Por último, pero no menos importante, quiero agradecerle a “la banda”, “los pibes”, mis amigos de la vida. Por el aliento, por el festejo con cada examen, por nunca dudar de mí; aún sin tener bien en claro en qué consiste mi carrera.

A todas estas personas quiero agradecerles y dedicarles este trabajo.

Introducción

El Principio de Reflexividad Local (PRL) establece esencialmente que, para cualquier espacio de Banach Y, la estructura finito dimensional o "local" de su bidual Y^{**} se asemeja mucho a la de Y. La versión orginal del PRL, debida a Lindenstrauss y Rosenthal [24], data del año 1969. Conocido en su momento como el Lema de Lindenstrauss-Rosenthal, fue mejorado tan solo dos años más tarde por el mismo Rosenthal junto a Johnson y Zippin [19]. La versión obtenida en aquel momento es la más ampliamente difundida y utilizada en la actualidad. Muchas demostraciones se han presentado a lo largo de los años (ver e.g. [5], [9], [22], [35]). Una de las más clásicas puede encontrarse con todos los detalles en [34]. *Grosso modo*, el argumento comienza basándose en el hecho de que los espacios de Banach de dimensión finita tienen la propiedad de Radon-Nikodým, para de ahí deducir la ecuación $\mathcal{L}(E, Y^{**}) = \mathcal{L}(E, Y)^{**}$ con E de dimensión finita. Posteriormente se prueba para E, un subespacio de dimensión finita de Y^{**}, que $\mathcal{L}_0(E, Y^{**}) = \mathcal{L}_0(E, Y)^{**}$ (donde $\mathcal{L}_0(E, Y^{**})$ y $\mathcal{L}_0(E, Y)$ denotan los operadores continuos que fijan puntos de $E \cap Y$) y por último, se deduce el PRL.

Muchos autores coinciden en que las demostraciones citadas difícilmente ponen en evidencia por qué "las cosas funcionan", o por qué sería esperable un resultado como este. Oja y Põldvere [28] presentan en 2007 una demostración alternativa del PRL, que se fundamenta principalmente en la descripción de Grothendieck del dual del espacio de operadores débil*-débil continuos de rango finito, y en un argumento de perturbación de operadores. Para ello, prueban varios lemas que muestran que en general los operadores débil*-débil continuos de rango finito a valores en Y^{**} pueden aproximarse de manera conveniente por operadores débil*-débil continuos de rango finito a valores en Y. Como corolario, deducen la versión de Johnson, Rosenthal y Zippin del PRL, simplemente particularizando lo anterior al contexto indicado. Más aún, el enfoque de Oja y Põldvere permite probar también una versión más general del PRL debida a Behrends [3] (ver e.g. [17, pág. 217]).

En este trabajo veremos en detalle las demostraciones de Oja y Põldvere de ambas versiones del PRL, junto con los lemas de aproximación que probaron con el mencionado fin. Para ello, comenzaremos estableciendo en el primer capítulo las notaciones, definiciones y resultados preliminares necesarios para poder encarar el problema en cuestión.

El segundo capítulo estará abocado casi en su totalidad al PRL, salvo por un teorema de “adjunción local” de operadores continuos de rango finito entre espacios duales. Si bien este último ya había sido establecido por Johnson, Rosenthal y Zippin en [19] (año 1971), Oja y Põldvere obtienen una demostración mucho más directa a partir de sus lemas.

En el tercer capítulo, desarrollaremos teoría general referente a la complementación local de un subespacio cerrado Y en un espacio de Banach Z. En particular, estudiaremos los ideales (llamados así por Godefroy, Kalton y Saphar [16] en el año 1993) y, más en particular, los ideales casi isométricos. Estos últimos fueron definidos y estudiados por Abrahamsen, Lima y Nygaard [1] en un artículo publicado en el presente año, como resultado de una búsqueda de condiciones naturales sobre Y, que garantizaran la herencia de la propiedad de Daugavet y la propiedad de diámetro 2, en caso de poseerlas Z. También veremos algo breve sobre ideales estrictos y M-ideales. De forma paralela (y equivalente) estudiaremos los operadores de extensión y los operadores de extensión de Hahn-Banach. Para poder probar las clásicas equivalencias entre complementación local, existencia de operadores de extensión, existencia de extensión de J_Y y complementación de ${}^{\perp}Y$ en Z^*, usaremos como herramientas más fuertes: una versión generalizada de uno de los lemas de aproximación de Oja y Põldvere (que ellos mismos dan en su trabajo) y un clásico argumento de compacidad de Lindenstrauss [23].

En el cuarto y último capítulo, damos una serie de aplicaciones del PRL a inclusiones en espacios tensoriales, o relacionadas con transferencias de propiedades entre un operador y su adjunto o su doble adjunto. También establecemos algunos resultados más sobre ideales casi isométricos.

En el Apéndice, enunciamos algunos resultados conocidos del Análisis Funcional y la Topología general que se utilizan a lo largo del trabajo.

Índice general

1. Preliminares **9**
- 1.1. Primeras notaciones, terminología y convenciones 9
- 1.2. Los espacios $\mathcal{F}(X,Y)$ y $\mathcal{F}_{w^*}(X^*,Y)$ 10
- 1.3. Operadores Integrales y el dual de $\mathcal{F}_{w^*}(X^*,Y)$ 14

2. El Principio de Reflexividad Local **19**
- 2.1. Aproximación de operadores en $\mathcal{F}_{w^*}(X^*,Y^{**})$ 19
- 2.2. Reflexividad local 26

3. Complementación local **31**
- 3.1. Subespacios localmente complementados 31
- 3.2. Ideales casi isométricos 39

4. Aplicaciones **47**
- 4.1. R-acotación en espacios biduales 47
- 4.2. $\mathcal{L}_p$-espacios 50
- 4.3. Operadores aproximables 52
- 4.4. Normas tensoriales 53

A. Algunos resultados **57**

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Primeras notaciones, terminología y convenciones

Todos los espacios vectoriales considerados en este trabajo tienen por cuerpo de escalares a un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, que podrá pensarse como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ indistintamente.

Si X es un espacio vectorial y $A \subseteq X$ un subconjunto, denotaremos por $[A]$ al subespacio de X generado por A, y por $Co(A)$ a su cápsula convexa (i.e., el menor convexo de X que contiene a A).

Si T es un operador lineal entre espacios vectoriales, su rango se denotará $R(T)$.

Un *espacio vectorial topológico* es un espacio vectorial dotado de una topología Hausdorff que hace continuas a la suma y el producto por escalar del espacio. Decimos que un tal espacio es *localmente convexo* cuando existe una base de abiertos convexos para su topología.

Supongamos que X es un espacio vectorial topológico. Entonces X^* denotará su dual. Si X es normado, salvo que se indique lo contrario, la topología considerada en X^* será la inducida por la norma dual. Mientras que si X no está provisto de una norma, X^* estará dotado de la topología débil* (denotada de aquí en adelante, como es usual, por w^*).

El operador identidad en X será denotado I_X o simplemente I, si fuese suficientemente claro a partir del contexto cuál es el espacio X en cuestión.

Recurrentemente pensaremos a X como subespacio de X^{**}, identificando a la inclusión canónica $J_X : X \hookrightarrow X^{**}$ con la inclusión de subespacios. Solo haremos la distinción cuando consideremos que esto aporta a la claridad y comprensión del texto. A su vez, si $x \in X$, muchas veces escribiremos $\widehat{x}$ en lugar de $J_X(x)$ (nuevamente, si fuese claro qué espacio es X).

Supongamos ahora que X e Y son espacios vectoriales normados. En este caso B_X denotará la bola unidad cerrada de X y S_X la correspondiente esfera unidad. Dados $x \in X$

y $r > 0$, la bola cerrada de X de centro en x y radio r será denotada por $B_X[x, r]$. $\mathcal{L}(X, Y)$ será el espacio de todos los operadores lineales continuos de X en Y provisto según se indique, de la *topología débil de operadores* (*weak operator topology*, o simplemente *wot*), la *topología fuerte de operadores* (*strong operator topology*, o simplemente *sot*) o, de no mencionarse nada, la norma usual de operadores (y su topología, la *topología uniforme de operadores*). Lo mismo para cualquier subespacio. Recordemos que la topología débil de operadores en $\mathcal{L}(X, Y)$ es la topología heredada de $Y^X = \prod_{x\in X} Y$, donde este último espacio tiene la topología producto de la topología débil (denotada de aquí en adelante, como es usual, por w) en Y, en cada una de sus coordenadas. En otras palabras, si (T_α) es una red en $\mathcal{L}(X, Y)$ y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$,

$$T_\alpha \xrightarrow{wot} T \quad \text{si y solo si} \quad y^*(T_\alpha x) \to y^*(Tx) \text{ para cada } x \in X \text{ e } y^* \in Y^*.$$

Por otra parte, la topología fuerte de operadores es la topología heredada de $Y^X = \prod_{x\in X} Y$, donde este último tiene la topología producto de la topología fuerte en Y (i.e., la inducida por la norma), en cada una de sus coordenadas. En otras palabras, si (T_α) es una red en $\mathcal{L}(X, Y)$ y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$,

$$T_\alpha \xrightarrow{sot} T \quad \text{si y solo si} \quad T_\alpha x \to Tx \text{ para cada } x \in X.$$

Consideremos ahora M y N subespacios de X e Y respectivamente, $(T_\alpha) \subseteq \mathcal{L}(X, N)$ una red y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ con $T(M) \subseteq N$. Si τ es alguna de las tres topologías mencionadas en $\mathcal{L}(M, N)$, y $T|_M^N$ denota al operador T restringido a M y correstringido a N, entonces

$$T_\alpha \xrightarrow{\tau} T \text{ en } \mathcal{L}(M, N)$$

querrá decir

$$T_\alpha|_M \xrightarrow{\tau} T|_M^N.$$

La notación que empleamos recién para la correstricción de un operador será adoptada para el resto del trabajo.

Es fácil ver que tanto *sot* como *wot* son no solo topologías vectoriales, sino también localmente convexas (hecho que será utilizado de manera fundamental más adelante).

De aquí en adelante, X, Y y Z denotarán siempre espacios de Banach, salvo que se indique explícitamente lo contrario.

1.2. Los espacios $\mathcal{F}(X, Y)$ y $\mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)$

Denotamos por $\mathcal{F}(X, Y)$ al subespacio de $\mathcal{L}(X, Y)$ formado por los operadores de rango finito, y por $\mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)$ al espacio de operadores de rango finito de X^* en Y que son $w^* - w$ continuos. Lo primero que debemos mencionar es que este último es un subespacio de $\mathcal{F}(X^*, Y)$, ya que al ser la topología débil más fina que la débil*, un operador

$T : X^* \to Y$ $w^* - w$ continuo será en particular $w - w$ continuo, o equivalentemente, $\|\cdot\| - \|\cdot\|$ continuo.

Observemos que $\mathcal{F}_{w^*}(X^*,Y) = \{T \in \mathcal{F}(X^*,Y) : T \text{ es } w^*{-}\tau \text{ continuo}\}$, para cualquier τ topología vectorial en Y. En efecto, dado $T : (X^*, w^*) \to Y$ de rango finito, con Y dotado de alguna topología, la continuidad de T es equivalente a la continuidad de $T|^{R(T)}$ donde $R(T)$ posee la topología de subespacio. Pero al ser $\dim(R(T)) < \infty$, cualquier topología vectorial sobre Y inducirá la misma topología (vectorial) de subespacio en $R(T)$ (ver Apéndice). En particular, cualquier operador en $\mathcal{F}_{w^*}(X,Y)$ podrá pensarse como $w^* - w$ continuo o $w^* - \|\cdot\|$ continuo, según convenga. Este hecho motiva que usemos esta notación para estos espacios, en lugar de $\mathcal{F}_{w^*-w}(X^*,Y)$, por ejemplo. Por la misma razón, muchas veces nos referiremos a estos operadores como "w^*-continuos", sin hacer alusión a la topología en el codominio.

En lo siguiente queremos dar caracterizaciones de los operadores en $\mathcal{F}(X,Y)$ y $\mathcal{F}_{w^*}(X^*,Y)$ y de sus adjuntos, que nos serán de utilidad más adelante. Para ello, introduzcamos primero la siguiente notación: si $x^* \in X^*$ e $y \in Y$, $x^* \otimes y : X \to Y$ será el operador que a cada $x \in X$ le asigna $(x^* \otimes y)(x) = x^*(x)y$.

Comentario 1.2.1. Este operador no es otra cosa que una de las posibles interpretaciones del *producto tensorial* entre x^* e y que definiremos en la próxima sección (ver [34, pág. 8]).

Lema 1.2.2 (Caracterización de $\mathcal{F}(X,Y)$)**.** *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(i) $T \in \mathcal{F}(X,Y)$.

(ii) Existen $x_1^*, \dots, x_k^* \in X^*$ *e* $y_1, \dots, y_k \in Y$ *tales que* $T = \sum_{j=1}^k x_j^* \otimes y_j$.

(iii) $T^* \in \mathcal{F}(Y^*, X^*)$.

En tal caso, $T^* = \sum_{j=1}^k \widehat{y_j} \otimes x_j^*$.

Demostración. Supongamos primero que vale *(ii)*. Entonces claramente $R(T) \subseteq [y_1, \dots, y_k]$. Esto implica *(i)*.

Por otra parte, si $T \in \mathcal{F}(X,Y)$, tomemos $\{y_1, \dots, y_k\}$ base de $R(T)$. Sea $\{y_1^*, \dots, y_k^*\}$ su base dual en $R(T)^*$. Definiendo $x_j^* = y_j^* \circ T|^{R(T)}$ para cada $1 \leq j \leq k$, chequeamos inmediatamente que $T = \sum_{j=1}^k x_j^* \otimes y_j$. Es fácil ver que en este caso $T^* = \sum_{j=1}^k \widehat{y_j} \otimes x_j^*$. Y por lo visto recién, esto a su vez implica *(iii)*.

Para finalizar la demostración, nos alcanza con probar que *(iii)* implica *(i)*. Equivalentemente, veamos que si el rango de T es de dimensión infinita, entonces el de T^* también lo es. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R(T)$ una familia linealmente independiente, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $Tx_n = y_n$ para todo n. Para cada n natural definamos la funcional $y_n^* : [y_1, \dots, y_n] \to \mathbb{K}$ como la única tal que $y_n^*(y_i) = \delta_{in}$, con δ la función Delta de Kronecker. Cada y_n^* es continua por estar definida sobre un espacio de dimensión finita, y puede extenderse por Teorema de Hahn-Banach a una funcional continua sobre todo el espacio Y. Haciendo abuso de notación, llamemos ahora y_n^* a una tal extensión. Afirmamos que $(T^*y_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R(T^*)$ es una familia linealmente independiente. En efecto, si

$$\alpha_{i_1}T^*y_{i_1}^* + \cdots + \alpha_{i_N}T^*y_{i_N}^* = 0$$

con $i_1 < i_2 < \cdots < i_N$ en $\mathbb{N}$ y $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_N} \in \mathbb{K}$; evaluando sucesivamente en $x_{i_N}, \ldots, x_{i_1}$ (en este orden) obtenemos que $\alpha_{i_N} = \cdots = \alpha_{i_1} = 0$. □

Notemos, por ejemplo a partir de la demostración anterior, que dado T como en este lema, siempre podemos elegir $\{y_1, \ldots, y_k\}$ linealmente independientes.

Pasemos ahora a otro resultado elemental.

Lema 1.2.3. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces:*

(i) *T^* es $w^* - w^*$ continuo.*

(ii) *Si $T \in \mathcal{F}(X, Y)$, entonces $T^* \in \mathcal{F}_{w^*}(Y^*, X^*)$.*

Demostración. *(i)* Si $(y_\gamma^*)_\gamma$ es una red en Y^* w^*-nula, entonces $T^*(y_\gamma^*)(x) = y_\gamma^*(Tx) \to 0$ para todo $x \in X$. O sea, $T^*(y_\gamma^*) \xrightarrow{w^*} 0$.

(ii) Es consecuencia inmediata del item anterior y el Lema 1.2.2, solo recordando una vez más que en un espacio de dimensión finita existe una única topología vectorial (en este caso, las topologías w y w^* coinciden sobre $R(T^*)$).

□

Comentario 1.2.4. Puede probarse de hecho que

$$\{S \in \mathcal{L}(Y^*, X^*) : S \text{ es } w^* - w^* \text{ continuo}\} = \{T^* : T \in \mathcal{L}(X, Y)\}.$$

A continuación queremos dar una caracterización para los operadores en $\mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)$ y sus adjuntos, análoga a la del Lema 1.2.2. Dados $x \in X$ e $y \in Y$, denotaremos por $x \otimes y : X^* \to Y$ al operador que a cada $x^* \in X^*$ le asigna $(x \otimes y)(x^*) = x^*(x)y$. Cabe aclarar que estamos haciendo aquí un abuso de notación, pues llegado el caso en que el espacio X sea el dual de algún otro espacio, la notación $x \otimes y$ admitirá dos posibles interpretaciones. Aunque formalmente distintas, estas interpretaciones están estrechamente ligadas como puede verse en [34, pág. 8]. Lamentablemente, este abuso es tan usual como necesario. De hecho, esta no será la última vez que debamos asignarle un nuevo significado a la simbología $x \otimes y$. De aquí en adelante el lector deberá intuir en qué sentido se está utilizando, según el contexto. Aclararlo constantemente, creemos, resultaría contraproducente o incluso inviable.

Lema 1.2.5 (Caracterización de $\mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)$)**.** *Sea $T \in \mathcal{L}(X^*, Y)$. Entonces, $T \in \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)$ si y solo si existen $x_1, \ldots, x_k \in X$ e $y_1, \ldots, y_k \in Y$ tales que $T = \sum_{j=1}^k x_j \otimes y_j$. En tal caso, $R(T^*) \subseteq X$ y $T^*|^X = \sum_{j=1}^k y_j \otimes x_j \ \in \mathcal{F}_{w^*}(Y^*, X)$.*

Demostración. Recordemos que $(X^*,w^*)^* = J_X(X)$ (ver Apéndice). Observemos que si $x \in X$ e $y \in Y$, entonces $x \otimes y = \widehat{x} \otimes y \in \mathcal{F}_{w^*}(X^*,Y)$. Por lo tanto, si $T = \sum_{j=1}^k x_j \otimes y_j$ para algunos $x_1,\ldots,x_k \in X$ e $y_1,\ldots,y_k \in Y$, claramente estará en $\mathcal{F}_{w^*}(X^*,Y)$.

Supongamos ahora que $T \in \mathcal{F}_{w^*}(X^*,Y)$. De la misma forma que en la demostración del Lema 1.2.2, podemos escribir $T = \sum_{j=1}^k x_j^{**} \otimes y_j$, donde $\{y_1,\ldots,y_k\}$ es una base de $R(T)$, y si $\{y_1^*,\ldots,y_k^*\}$ es su base dual en $R(T)^*$, $x_j^{**} = y_j^* \circ T|^{R(T)}$ para cada $1 \leq j \leq k$. Dado j, siendo T $w^* - w$ continuo e y_j^* w-continuo, x_j^{**} resulta ser una funcional w^* continua sobre X^*. Luego, deberá existir $x_j \in X$ tal que $\widehat{x_j} = x_j^{**}$. Así, $T = \sum_{j=1}^k x_j \otimes y_j$.

Por último, sabemos por el Lema 1.2.2 que si

$$T = \sum_{j=1}^k x_j \otimes y_j = \sum_{j=1}^k \widehat{x_j} \otimes y_j,$$

entonces

$$T^* = \sum_{j=1}^k \widehat{y_j} \otimes \widehat{x_j} = \sum_{j=1}^k y_j \otimes \widehat{x_j}.$$

Identificando $X \overset{1}{=} J_X(X)$ y correstringiendo a T^* concluimos lo que queríamos. □

En adelante, siempre que tengamos $T \in \mathcal{F}_{w^*}(X^*,Y)$ identificaremos a T^* con $T^*|^X$.

Finalizamos la sección estableciendo una relación entre operadores continuos de rango finito y operadores de rango finito w^*-continuos.

Lema 1.2.6. *$\mathcal{F}_{w^*}(X^{**},Y) \overset{1}{=} \mathcal{F}(X,Y)$. Más aún,*

$$\Theta : \mathcal{F}_{w^*}(X^{**},Y) \to \mathcal{F}(X,Y) \text{ definido por } \Theta(T) = T|_X,$$

es un isomorfismo isométrico tal que $\Theta(T)^* = T^*$ (i.e., $J_{X^*} \circ \Theta(T)^* = T^*$) para todo $T \in \mathcal{F}_{w^*}(X^{**},Y)$.

Demostración. Es claro que Θ es lineal. El que sea una isometría se debe a que si $T : X^{**} \to Y$ es un operador $w^* - \|\cdot\|$ continuo, por el Teorema de Goldstine, $\|T\| = \|T|_X\|$. Inmediatamente esto nos dice que se trata de un monomorfismo.

Veamos que Θ es un operador suryectivo. Tomemos $S \in \mathcal{F}(X,Y)$ y escribámoslo como $S = \sum_{j=1}^k x_j^* \otimes y_j$ con $x_1^*,\ldots,x_k^* \in X^*$ e $y_1,\ldots,y_k \in Y$. Por verificación directa se ve que $\Theta(\sum_{j=1}^k x_j^* \otimes y_j) = S$.

Por último, sean $T \in \mathcal{F}_{w^*}(X^{**},Y)$ e $y^* \in Y^*$. Queremos ver que

$$T^* y^* = (J_{X^*} \circ \Theta(T)^*) y^*.$$

O lo mismo, que

$$y^* \circ T = \widehat{y^* \circ T|_X}.$$

Tanto $y^* \circ T$ como $\widehat{y^* \circ T|_X}$ son funcionales w^*-continuas. □

1.3. Operadores Integrales y el dual de $\mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)$

En esta sección enunciaremos un conocido resultado debido a Grothendieck, el cual caracteriza el espacio $\mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)^*$. Para ello necesitamos algunas definiciones y resultados previos que nombraremos sin sus demostraciones. Las mismas pueden encontrarse en la bibliografía. Denotaremos por $\mathcal{B}(X \times Y)$ al espacio formado todas las formas bilineales de $X \times Y$ en $\mathbb{K}$ y por $\mathcal{B}(X \times Y)'$ a su dual algebraico.

Definiciones 1.3.1. Llamamos *producto tensorial* de X con Y, y lo notamos $X \otimes Y$, al subespacio de $\mathcal{B}(X \times Y)'$ generado por las evaluaciones (i.e., las funcionales $\epsilon_{x,y}$, con $x \in X$ e $y \in Y$, que en cada forma bilineal B valen $\epsilon_{x,y}(B) = B(x, y)$). Los elementos de $X \otimes Y$ se llamarán *tensores* y las evaluaciones *tensores elementales*, denotando por $x \otimes y$ a $\epsilon_{x,y}$.

Comentario 1.3.2. He aquí otra interpretación de la notación $x \otimes y$. Para entender mejor su relación con las anteriores ver [34, pág. 1-8].

La siguiente proposición, cuya demostración es sencilla, puede verse en [34, pág. 2 y 5].

Proposición 1.3.3. *Sean $u \in X \otimes Y$ y $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$. Entonces:*

(i) u puede escribirse (de manera no única) como suma de tensores elementales.

(ii) Existe una única funcional lineal $\widetilde{B} : X \otimes Y \to \mathbb{K}$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\otimes"'] & \mathbb{K} \\ X \otimes Y \arrow[ur, "\widetilde{B}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\otimes((x, y)) = x \otimes y$, para cada $(x, y) \in X \times Y$.

Definición 1.3.4. A $\widetilde{B}$ la llamaremos la *linealización de B*.

La linealización de formas bilineales es lo que motiva la definición del producto tensorial.

Ahora bien, hemos contruido a partir de los espacios X e Y un nuevo espacio vectorial $X \otimes Y$. Una pregunta que surge naturalmente es si podremos darle a este último una estructura - digamos, una norma - a partir de las estructuras de X e Y, de manera tal que tenga propiedades "deseables" en algún sentido. Existen muchas formas "razonables" de dotar a $X \otimes Y$ de una norma. Una de las más importantes es la que sigue.

Definición 1.3.5. Llamamos *norma epsilon* o *norma inyectiva* de $X \otimes Y$ a la función $\| \cdot \|_\varepsilon : X \otimes Y \to \mathbb{R}$,

$$\|u\|_\varepsilon = \sup_{\substack{x^* \in B_{X^*} \\ y^* \in B_{Y^*}}} \Big| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y^*(y_i) \Big|$$

si $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$.

Puede verse que $\|\cdot\|_\varepsilon$ está bien definida y es, efectivamente, una norma sobre $X \otimes Y$ (ver [34, pág. 45]). Denotaremos por $X \otimes_\varepsilon Y$ al espacio normado $(X \otimes Y, \|\cdot\|_\varepsilon)$.

A continuación, una proposición elemental que nos será de utilidad.

Proposición 1.3.6. *Sean $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$ y sea $B : X \times Y \to \mathbb{K}$ tal que $B(x, y) = x^*(x)y^*(y)$. Entonces,*

(i) B es una forma bilineal.

(ii) Si $\widetilde{B} : X \otimes_\varepsilon Y \to \mathbb{K}$ es la linealización de B, entonces $\|\widetilde{B}\| = \|x^*\|\|y^*\|$.

Definición 1.3.7. Una forma bilineal $B : X \times Y \to \mathbb{K}$ se dirá una *forma integral* si su linealización $\widetilde{B} : X \otimes_\varepsilon Y \to \mathbb{K}$ es acotada.

El por qué de este nombre puede entenderse a partir de la siguiente equivalencia (ver [34, pág. 57-58]).

Proposición 1.3.8. *Sea $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ y consideremos en $B_{X^*} \times B_{Y^*}$ la topología producto de las topologías débil*. Entonces B es una forma integral si y solo si existe una medida regular boreliana μ sobre $B_{X^*} \times B_{Y^*}$ tal que*

$$B(x, y) = \int_{(x^*, y^*) \in B_{X^*} \times B_{Y^*}} x^*(x)y^*(y)d\mu, \tag{1.3.8.1}$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

Las formas integrales sobre $X \times Y$ forman un subespacio de $\mathcal{B}(X \times Y)$ que puede normarse como se indica a continuación.

Definición 1.3.9. Si B es una forma integral sobre $X \times Y$, definimos su *norma integral* como $\|B\|_I = \text{ínf } \|\mu\|$, donde el ínfimo se toma sobre todas las medidas regulares borelianas μ sobre $B_{X^*} \times B_{Y^*}$ que satisfacen (1.3.1) de la proposición anterior.

Estamos ahora en condiciones de definir la noción de *operador integral*. Consideremos un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y notemos B_T a la forma bilineal sobre $X \times Y^*$ dada por $B_T(x, y^*) = y^*(Tx),\ x \in X,\ y^* \in Y^*$.

Definiciones 1.3.10. Diremos que T es un *operador integral* si B_T es una forma integral. En tal caso, definimos la *norma integral* de T como $\|T\|_I = \|B_T\|_I$.

Los operadores integrales de X en Y, provistos de las operaciones usuales y la norma $\|\cdot\|_I$, forman un espacio vectorial normado que notaremos $\mathcal{I}(X, Y)$. Más aún (ver [34, pág. 62]):

Proposición 1.3.11. *$\mathcal{I}(X, Y)$ es un espacio de Banach.*

No es difícil probar a partir de las definiciones la siguiente proposición:

Proposición 1.3.12. *Si* $T \in \mathcal{I}(X,Y)$ *y* $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$*, entonces* $S \circ T \in \mathcal{I}(X,Z)$*.*

Estamos finalmente en condiciones de dar la caracterización de Grothendieck [15, pág. 124-125] de $\mathcal{F}_{w^*}(X^*,Y)^*$ (ver [11, pág. 231-232]).

Teorema 1.3.13. $\mathcal{F}_{w^*}(X^*,Y)^* \stackrel{1}{=} \mathcal{I}(X,Y^*)$*, donde la identifición se da vía la dualidad*

$$\langle T, A\rangle = \sum_{j=1}^{k}(Ax_j)(y_j),$$

si $A \in \mathcal{I}(X,Y^*)$ *y* $T = \sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j \in \mathcal{F}_{w^*}(X^*,Y)$*, con* $x_1,\dots,x_k \in X$ *e* $y_1,\dots,y_k \in Y$*.*

Notación 1.3.14. Al igual que en el teorema anterior, utilizaremos en general la notación $\langle z,\varphi\rangle$ para decir que un elemento φ de un cierto espacio, actúa por dualidad sobre un elemento z de algún otro espacio.

El teorema anterior nos dice en particular que la acción de A sobre T puede calcularse a partir de cualquier escritura de T de la forma $T = \sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j$. Ahora veamos un tipo particular de operadores integrales.

Proposición 1.3.15. *Si* $x^* \in X^*$ *e* $y^* \in Y^*$*, entonces* $x^* \otimes y^* : X \to Y^*$ *es un operador integral.*

Demostración. $x^* \otimes y^*$ es un operador en $\mathcal{L}(X,Y^*)$ tal que si $x \in X$, entonces $(x^* \otimes y^*)(x) = x^*(x)y^*$. Para ver que es un operador integral debemos verificar que la bilineal $B \in \mathcal{B}(X \times Y^{**})$ definida por $B(x,y^{**}) = y^{**}((x^* \otimes y^*)(x))$ es una forma integral. Tenemos

$$B(x,y^{**}) = y^{**}((x^* \otimes y^*)(x)) = x^*(x)y^{**}(y^*) = x^*(x)\widehat{y^*}(y^{**}).$$

Si $\widetilde{B} : X \otimes_\varepsilon Y^{**} \to \mathbb{K}$ es la linealización de B, entonces por la Proposición 1.3.6, $\|\widetilde{B}\| = \|x^*\|\|\widehat{y^*}\| < \infty$; quedando probado el lema. □

Por último, veamos otra forma de calcular la acción de los operadores de este tipo sobre los operadores w^*-continuos de rango finito.

Lema 1.3.16. *Si* $x^* \in X^*$*,* $y^* \in Y^*$ *y* $T \in \mathcal{F}_{w^*}(X^*,Y)$*, entonces* $\langle T, x^* \otimes y^*\rangle = x^*(T^*y^*)$*.*

Demostración. Escribamos a T como $T = \sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j$, para ciertos $x_1,\dots,x_k \in X$ e $y_1,\dots,y_k \in Y$. Entonces, por el Lema 1.2.5, $T^* = \sum_{j=1}^{k} y_j \otimes x_j$. Tenemos así que, por un lado

$$\langle T, x^* \otimes y^*\rangle = \sum_{j=1}^{k}((x^* \otimes y^*)(x_j))(y_j) = \sum_{j=1}^{k} x^*(x_j)y^*(y_j),$$

y por otro

$$x^*(T^*(y^*)) = x^*\Big(\sum_{j=1}^{k} y^*(y_j)x_j\Big) = \sum_{j=1}^{k} y^*(y_j)x^*(x_j).$$

$\square$

Capítulo 2

El Principio de Reflexividad Local

2.1. Aproximación de operadores en $\mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y^{**})$

Comenzamos esta sección dando dos lemas probados por Oja y Põldvere [28] que de alguna manera dicen que los operadores w^*-continuos de rango finito de X^* en el bidual de Y pueden "aproximarse" (en algún sentido que habrá que especificar) por operadores w^*-continuos de rango finito pero que van de X^* en Y. De hecho el segundo lema (Lema Principal "fijando puntos") es una versión mejorada del primero (Lema Principal).

Antes de enunciar el primer lema, preguntémonos lo siguiente: dado un operador $T \in \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y^{**})$, ¿qué tan grande puede ser un subconjunto $A \subseteq X^*$ si existe alguna red $(T_\alpha) \subseteq \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)$ que converge puntualmente a T sobre A? Lo que es inmediato, es que necesariamente $A \subseteq T^{-1}(Y)$. En efecto, si $x^* \in X^*$ es tal que $Tx^* \notin Y$, entonces la distancia de Tx^* a Y será positiva, ya que Y es un subespacio cerrado de su bidual. Por lo tanto, $T_\alpha x^* \not\to Tx^*$.

El siguiente lema garantiza la existencia de una red para la cual puede tomarse A de forma óptima (i.e., $A = T^{-1}(Y)$) y se obtiene además la aproximación de los adjuntos y de las normas.

Lema 2.1.1 (Lema Principal)**.** *Si $T \in \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y^{**})$, entonces existe una red $(T_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \subseteq \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)$ que satisface:*

I $\|T_\alpha\| \to \|T\|$.

II $T_\alpha \xrightarrow{sot} T$ *en* $\mathcal{L}(T^{-1}(Y), Y)$.

III $T_\alpha^* \xrightarrow{sot} T^*$ *en* $\mathcal{L}(Y^*, X)$.

Demostración. Usando las identificaciones canónicas

$$\mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)^* \stackrel{1}{=} \mathcal{I}(X, Y^*) \text{ y } \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y^{**})^* \stackrel{1}{=} \mathcal{I}(X, Y^{***})$$

definamos $\Psi : \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)^* \to \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y^{**})^*$ por $\Psi(A) = J_{Y^*} \circ A$, para $A \in \mathcal{I}(X, Y^*)$.

Ψ está bien definida por la Proposición 1.3.12. Por otra parte, siendo las identificaciones isomorfismos isométricos y J_{Y^*} una isometría compuesta a izquierda, es claro que $\|\Psi\| = 1$.

Como el operador T está en $\mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y^{**})$, podemos verlo como $\widehat{T}$ en el bidual $\mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y^{**})^{**}$. Aplicándole Ψ^* obtenemos un elemento de $\mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)^{**}$. Además $\|\Psi^*(\widehat{T})\| \leq \|\Psi^*\|\|\widehat{T}\| = \|\Psi\|\|T\| = \|T\|$. Luego, $\Psi^*(\widehat{T}) \in \|T\| B_{\mathcal{F}_{w^*}(X^*,Y)^{**}}$. Por el Teorema de Goldstine, existe una red $(T_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \subseteq \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)$ que converge w^* a $\Psi^*(\widehat{T})$, tal que $\|T_\alpha\| \leq \|T\|$ para todo α. Más formalmente, es $\widehat{T_\alpha}(\varphi) \to \Psi^*(\widehat{T})(\varphi)$ para cada $\varphi \in \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)^*$. Veamos que esto implica que $T_\alpha^* \xrightarrow{wot} T^*$ en $\mathcal{L}(Y^*, X)$.

Si x^* e y^* son elementos de X^* e Y^* respectivamente, por la Proposición 1.3.15 tenemos $x^* \otimes y^* \in \mathcal{I}(X, Y^*)$. Por verificación directa obtenemos $\Psi(x^* \otimes y^*) = x^* \otimes J_{Y^*}(y^*)$. Luego,

$$x^*(T_\alpha^* y^*) = \langle T_\alpha, x^* \otimes y^* \rangle = \langle x^* \otimes y^*, \widehat{T_\alpha} \rangle \to \langle x^* \otimes y^*, \Psi^*(\widehat{T}) \rangle.$$

A su vez,

$$\langle x^* \otimes y^*, \Psi^*(\widehat{T}) \rangle = \Psi(x^* \otimes y^*)(T) = \langle T, x^* \otimes J_{Y^*}(y^*) \rangle = x^*(T^* y^*).$$

O sea que

$$x^*(T_\alpha^* y^*) \to x^*(T^* y^*),$$

como queríamos ver.

Queremos ahora, eventualmente cambiando la red original, conseguir convergencia en la topología fuerte de operadores (probando así III). Como $T^*|_{Y^*} \in \overline{Co(T_\alpha^*)_{\alpha\in\Gamma}}^{wot} = \overline{Co(T_\alpha^*)_{\alpha\in\Gamma}}^{sot}$ existe una red formada por combinaciones convexas de (T_α) que verifica lo que queríamos. Además es claro que estas combinaciones convexas siguen teniendo norma menor o igual que la norma de T. Podemos suponer entonces, sin pérdida de generalidad, que $T_\alpha^* \xrightarrow{sot} T^*$ en $\mathcal{L}(Y^*, X)$.

Esto a su vez implica que $T_\alpha \xrightarrow{wot} T$ en $\mathcal{L}(T^{-1}(Y), Y)$. En efecto, si $y^* \in Y^*$,

$$y^* \circ T_\alpha = T_\alpha^* y^* \xrightarrow[en\ X^{**}]{} T^* y^* = y^* \circ T.$$

En particular, para cada $x^* \in T^{-1}(Y)$,

$$y^*(T_\alpha x^*) \to y^*(T x^*).$$

Nuevamente queremos mejorar la convergencia pasando a combinaciones convexas de la red para obtener II, pero debemos ser un poco más cuidadosos que antes si queremos que se preserve I.

Sea $\mathcal{B}$ una base de entornos de T en la topología fuerte de operadores de $\mathcal{L}(T^{-1}(Y), Y)$. Consideramos el conjunto de índices

$$\Lambda = \{(U, \gamma) : U \in \mathcal{B},\ \gamma \in \Gamma\}.$$

Este conjunto está dirigido de manera natural por el orden producto entre la inclusión decreciente de entornos y el orden de Γ. Es decir:

$$(U_1, \gamma_1) \preceq (U_2, \gamma_2) \iff U_1 \supseteq U_2 \text{ y } \gamma_1 \leq \gamma_2.$$

Como $T \in \overline{Co(T_\alpha)_{\alpha \succ \gamma}}^{wot} = \overline{Co(T_\alpha)_{\alpha \succ \gamma}}^{sot}$, para todo $\gamma \in \Gamma$, tenemos que para cada $(U, \gamma) \in \Lambda$, existe $\widetilde{T}_{(U,\gamma)} \in Co(T_\alpha)_{\alpha \succ \gamma}$ tal que $\widetilde{T}_{(U,\gamma)} \in U$.
Entonces

$$\widetilde{T}_{(U,\gamma)} \xrightarrow{sot} T.$$

Notar que $\|\widetilde{T}_{(U,\gamma)}\| \leq \|T\|$ y que dado V un entorno convexo de T^* en $(\mathcal{L}(Y^*, X), sot)$ y α_0 tal que $T^*_\alpha \in V$ para todo $\alpha \succeq \alpha_0$, vale $\widetilde{T}^*_{(U,\gamma)} \in V$ para todo $(U, \gamma) \succeq (\mathcal{L}(Y^*, X), \alpha_0)$.
Por lo tanto podemos suponer que (T_α) verifica II y III. Solo resta verificar I.
Sabemos que $\limsup \|T_\alpha\| \leq \|T\|$. Por otra parte, por III,

$$\|T^* y^*\| = \lim \|T^*_\alpha y^*\| \leq \liminf \|T^*_\alpha\| \|y^*\| \text{ para todo } y^* \in Y^*,$$

lo cual implica

$$\|T\| = \|T^*\| = \|T^*|_{Y^*}\| \leq \liminf \|T^*_\alpha\| = \liminf \|T_\alpha\|.$$

Donde la segunda igualdad se debe al Teorema de Goldstine y que T^* es $w^* - \| \cdot \|$ continuo. □

De aquí en adelante, cuando queramos "construir" una red $(\widetilde{T}_{(U,\gamma)})$ a partir de otra (T_α), tal y como se hizo en la demostración anterior, nos referiremos a esto como *pasar a combinaciones convexas de las colas de* (T_α).

Ahora pasemos a una versión mucho más fuerte del Lema Principal. Vía un *argumento de perturbación* debido a Oja y Põldvere, e inspirado a su vez por otro de Johnson, Rosenthal y Zippin (ver [7, Lema 3.2]), puede modificarse a la red (T_α) de manera tal que todos los operadores coincidan con T sobre $T^{-1}(Y)$ y que sus adjuntos coincidan con T^* sobre un espacio de dimensión finita prefijado.

Lema 2.1.2 (Lema Principal "fijando puntos")**.** *Sea $F \subseteq Y^*$ un subespacio de dimensión finita. Si $T \in \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y^{**})$, entonces existe una red $(T_\alpha) \subseteq \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)$ que satisface I y III del Lema 2.1.1, y además:*

II' *$T_\alpha x^* = T x^*$ para todo $x^* \in T^{-1}(Y)$ y para todo α.*

III' *$T^*_\alpha y^* = T^* y^*$ para todo $y^* \in F$ y para todo α.*

Demostración. (a) Probemos primero el caso particular en el que X es de dimensión finita. Tenemos entonces que $T^{-1}(Y)$ también lo es.

Sean $B = \{x_1^*, \dots, x_m^*\} \subseteq X^*$ y $B' = \{y_1^*, \dots, y_n^*\} \subseteq Y^*$ bases de $T^{-1}(Y)$ y F respectivamente. Podemos elegir $x_1, \dots, x_m \in X$ e $y_1, \dots, y_n \in Y$ que formen sistemas biortogonales con B y B' respectivamente. Es decir, $x_j^*(x_i) = \delta_{ij}$ para todo i, j; y lo mismo con B'. En efecto, para cada $k = 1, \dots, m$,

$$A_k = \bigcap_{i \neq k} \ker x_i^* \setminus \ker x_k^* \neq \emptyset$$

ya que sino tendríamos $x_k^* \in [x_i^*]_{i \neq k}$. Tomando $\tilde{x_k} \in A_k$ y definiendo $x_k = \tilde{x_k}/x_k^*(\tilde{x_k})$ conseguimos elementos como los que queríamos.

Apliquemos ahora el argumento de perturbación. Definamos los operadores

$$P = \sum_{i=1}^{m} x_i \otimes x_i^* \in \mathcal{F}_{w^*}(X^*, X^*) \text{ y } Q = \sum_{j=1}^{n} y_j \otimes y_j^* \in \mathcal{F}_{w^*}(Y^*, Y^*)$$

Observemos que $R(P) \subseteq T^{-1}(Y)$ y evaluando en los elementos de la base B,

$$P(x_k^*) = \sum_{i=1}^{m} x_k^*(x_i) x_i^* = x_k^*,$$

vemos que también vale la otra inclusión. Más aún, P es un proyector de rango $T^{-1}(Y)$. Análogamente, Q es un proyector de rango F.

Vamos a construir ahora la red deseada *perturbando* una como la del Lema 2.1.1.

Sea $(T_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ como en el Lema 2.1.1. Definimos para cada α,

$$\begin{aligned} S_\alpha &:= TP + T_\alpha(I - P) - Q^*(T_\alpha - T)(I - P) \\ &= TP + T_\alpha - T_\alpha P - Q^*(T_\alpha - T) + Q^*(T_\alpha - T)P \\ &= T + (I - Q^*)(T_\alpha - T)(I - P) \end{aligned}$$

A partir de la segunda igualdad es claro que estos operadores son $w^* - w$ continuos, ya que T, T_α y P lo son, y componemos a izquierda con operadores continuos (o $w - w$ continuos). Además, de la definición y por ser $R(TP) \subseteq Y$ y $R(Q^*) \subseteq Y$, correstringiendo, podemos decir que $S_\alpha \in \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)$ para todo α.

De la tercera igualdad obtenemos que la red (S_α) cumple II' y III'. En efecto, dado $x^* \in T^{-1}(Y)$ vemos que

$$S_\alpha x^* = Tx^* + (I - Q^*)(T_\alpha - T)(0) = Tx^* \text{ para todo } \alpha.$$

Y dado $y^* \in F$, tomando adjunto tenemos

$$\begin{aligned} S_\alpha^* y^* &= T^* y^* + (I - P^*)(T_\alpha^* - T^*)(I - Q)y^* \\ &= T^* y^* + (I - P^*)(T_\alpha^* - T^*)(0) \\ &= T^* y^* \text{ para todo } \alpha. \end{aligned}$$

Finalmente, para ver que la nueva red verifica I y III, debemos observar que los operadores S_α y T_α se acercan arbitrariamente cuando $\alpha \to \infty$. De la definición de S_α,

$$S_\alpha - T_\alpha = (T - T_\alpha)P - Q^*(T_\alpha - T)(I - P)$$

y

$$\begin{aligned} \|S_\alpha - T_\alpha\| &\le \|(T - T_\alpha)P\| + \|Q^*(T_\alpha - T)(I - P)\| \\ &\le \|(T - T_\alpha)P\| + \|I - P\| \|(T_\alpha^* - T^*)Q\| \\ &\le \sup_{\substack{x^* \in T^{-1}(Y) \\ \|x^*\| \le \|P\|}} \|(T - T_\alpha)x^*\| + \|I - P\| \sup_{\substack{y^* \in F \\ \|y^*\| \le \|Q\|}} \|(T_\alpha^* - T^*)y^*\|. \end{aligned}$$

Siendo la convergencia puntual equivalente a la uniforme sobre compactos (para operadores continuos entre espacios de Banach) y siendo $T^{-1}(Y)$ y F espacios de dimensión finita, deducimos que

$$\|S_\alpha - T_\alpha\| \to 0.$$

Así,

$$|\|S_\alpha\| - \|T\|| \le \|S_\alpha - T_\alpha\| + |\|T_\alpha\| - \|T\|| \to 0$$

y

$$\|S_\alpha^* y^* - T^* y^*\| \le \|S_\alpha^* - T_\alpha^*\| \|y^*\| + \|T_\alpha^* y^* - T^* y^*\| = \|S_\alpha - T_\alpha\| \|y^*\| + \|T_\alpha^* y^* - T^* y^*\| \to 0.$$

Solo resta renombrar a la red (S_α) como (T_α).

(b) En el caso general, factoricemos a T vía la proyección al cociente $\kappa : X^* \to X^*/\ker T$. En otras palabras, consideremos el siguiente diagrama conmutativo de espacios de Banach y morfismos:

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\kappa"'] & Y^{**} \\ X^*/\ker T \arrow[ur, "\tilde{T}"'] & \end{tikzcd}.$$

Siendo $\dim(X^*/\ker T) = \dim(R(T)) < \infty$, podemos aplicar la parte (a) para obtener $(\tilde{T}_\alpha) \subseteq \mathcal{F}(X^*/\ker T, Y)$ con las propiedades deseadas. Definamos la red (T_α) como

$T_\alpha := \tilde{T}_\alpha \kappa$ para cada α. Es decir,

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "T_\alpha"] \arrow[d, "\kappa"'] & Y \\ X^*/\ker T \arrow[ur, "\tilde{T}_\alpha"'] & \end{tikzcd} .$$

Es claro que se trata de operadores de rango finito. Para ver que son $w^* - w$ continuos alcanza con ver que κ lo es. Escribamos

$$T = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i^{**},$$

con $x_i \in X$, $y_i^{**} \in Y^{**}$ para todo i, e $y_1^{**}, \ldots, y_n^{**}$ linealmente independientes.

Llamando S al subespacio $[x_i : i = 1, \ldots, n]$, de la escritura anterior obtenemos $\ker T = S^\perp$ (el anulador de S). Por lo tanto

$$X^*/\ker T \overset{1}{=} S^* \qquad \text{y} \qquad (X^*/\ker T)^* \overset{1}{=} S^{**} \overset{1}{=} S,$$

vía los isomorfismos canónicos $\Psi : X^*/\ker T \to S^*$ tal que $\Psi(\kappa(x^*)) = x^*|_S$, $\Psi^* : S^{**} \to (X^*/\ker T)^*$ y $J_S : S \to S^{**}$.

Sea (x_γ^*) una red en X^* tal que $x_\gamma^* \xrightarrow{w^*} 0$, entonces

$$\langle \kappa(x_\gamma^*), x_i \rangle = \langle \kappa(x_\gamma^*), \widehat{x}_i \rangle = \Psi^*(\widehat{x}_i)(\kappa(x_\gamma^*)) = \widehat{x}_i(\Psi(\kappa(x_\gamma^*))) = x_\gamma^*(x_i) \to 0$$

O sea, κ es $w^* - w$-continua.

La verificación de I, III, II' y III' es ahora inmediata. En efecto, I resulta de $\|T_\alpha\| = \|\tilde{T}_\alpha\| \to \|T\|$, III de $T_\alpha^* y^* = \kappa^*(\tilde{T}_\alpha^* y^*) \to \kappa^*(\tilde{T}^* y^*) = T^* y^*$ para todo $y^* \in Y^*$, II' de $T^{-1}(Y) = \kappa^{-1}(\tilde{T}^{-1}(Y))$ y por lo tanto $T_\alpha x^* = \tilde{T}_\alpha(\kappa(x^*)) = \tilde{T}(\kappa(x^*)) = Tx^*$ para todo $x^* \in T^{-1}(Y)$, y III' es análogo a III.

□

Queremos ahora particularizar este lema al contexto del Principio de Reflexividad Local. Consideremos $E \subseteq Y^{**}$ un subespacio de dimensión finita. El Lema 1.2.6 nos dice que $\mathcal{F}_{w^*}(E^{**}, Y) \overset{1}{=} \mathcal{F}(E, Y)$ y $\mathcal{F}_{w^*}(E^{**}, Y^{**}) \overset{1}{=} \mathcal{F}(E, Y^{**})$. Vía los correspondientes isomorfismos canónicos y tomando a $T \in \mathcal{F}_{w^*}(E^{**}, Y^{**})$ como el operador que se identifica con la inclusión $E \hookrightarrow Y^{**}$, rápidamente el Lema 2.1.2 se convierte en:

Corolario 2.1.3. *Sean $E \subseteq Y^{**}$ y $F \subseteq Y^*$ subespacios de dimensión finita. Entonces existe una red $(T_\alpha)_{\alpha \in \Gamma} \subseteq \mathcal{F}(E, Y)$ tal que:*

I $\|T_\alpha\| \to 1$,

II $T_\alpha y = y$ *para todo* $y \in E \cap Y$,

III $T_\alpha^* y^* \to \widehat{y^*}|_E$ *para todo* $y^* \in Y^*$*. Además,* $T_\alpha^* y^* = \widehat{y^*}|_E$ *si* $y^* \in F$*.*

Definiciones 2.1.4. Dado un operador $T : X \to Y$, diremos que T es una *casi-isometría (lineal)* si existe algún $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{\|x\|}{1+\varepsilon} \leq \|Tx\| \leq (1+\varepsilon)\|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

Para un tal ε, decimos además que T es una *ε-isometría (lineal).*

Fijado $\varepsilon > 0$, es claro que un operador T es una ε-isometría si y solo si T es un monomorfismo y valen las acotaciones $\|T\|, \|(T|^{R(T)})^{-1}\| \leq 1+\varepsilon$.

Es posible mejorar el resultado del Corolario 2.1.3 eligiendo la red (T_α) de forma tal que todos los operadores sean ε-isometrías.

Lema 2.1.5. *Sean* $E \subseteq Y^{**}$*,* $F \subseteq Y^*$ *subespacios de dimensión finita y sea* $\varepsilon > 0$*. Entonces existe una red* $(T_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \subseteq \mathcal{F}(E, Y)$ *de* ε*-isometrías que satisfacen I, II y III del Corolario 2.1.3.*

Demostración. La idea de la demostración es agrandar el subespacio F de manera conveniente de forma tal que al aplicar el Corolario 2.1.3, los operadores de la red (a partir de un cierto término) resulten automáticamente ε-isometrías.

Sea $\delta > 0$ tal que $(1+\varepsilon)^{-1} < 1 - 2\delta$. Como E es de dimensión finita, S_E es totalmente acotado. Tomemos $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq S_E$ una δ-red. Para cada $i = 1, \ldots, n$ podemos elegir $f_i \in S_{Y^*}$ lo suficientemente cerca de realizar $\|e_i\| = 1$, de manera que $|e_i(f_i)| > 1 - \delta$. Tomemos el "agrandado" de F como $\tilde{F} = F + [f_1, \ldots, f_n]$ y apliquemos el Corolario 2.1.3 con este subespacio en lugar de F, para obtener la red (T_α). Claramente, como esta red verifica III del Corolario para $\tilde{F}$, también lo verificará para F.

Observemos que si $e \in S_E$ deberá existir un cierto i para el cual $\|e - e_i\| < \delta$. Luego,

$$|e(f_i)| \geq |e_i(f_i)| - |e_i(f_i) - e(f_i)| \geq 1 - \delta - \delta\|f_i\| = 1 - 2\delta.$$

Por lo tanto,

$$\tfrac{1}{1+\varepsilon} < 1 - 2\delta < |e(f_i)| = |\widehat{f_i}|_E(e)| = |T_\alpha^*(f_i)(e)| = |f_i(T_\alpha(e))| \leq \|f_i\|\|T_\alpha e\| = \|T_\alpha e\|.$$

Solo resta tomar α_0 suficientemente grande tal que $\|T_\alpha\| < 1 + \varepsilon$ para $\alpha \geq \alpha_0$ y cambiar la red (T_α) por $(T_\alpha)_{\alpha\geq\alpha_0}$. $\square$

2.2. Reflexividad local

Comenzamos esta sección delineando qué entendemos por *reflexividad local.* En el contexto del Análisis Funcional, las nociones *locales* son aquellas que dependen de los subespacios de dimensión finita. Queremos dar una versión local del concepto de reflexividad. Recordemos que un espacio de Banach Y es reflexivo si la inclusión canónica $J_Y : Y \to Y^{**}$ es un isomorfismo. Es decir, si existe un operador $T : Y^{**} \to Y$ tal que:

(i) T es inversa a izquierda de J_Y. O sea, $T(J_Y y) = y$ para todo $y \in Y$, o bajo nuestra identificación de J_Y con la inclusión de subespacios, $T(y) = y$ para todo $y \in Y$.

(ii) T es inversa a derecha de J_Y. O sea, $J_Y(Ty^{**}) = y^{**}$ para todo $y^{**} \in Y^{**}$, o lo mismo, $y^*(Ty^{**}) = y^{**}(y^*)$ para todo $y^{**} \in Y^{**}$ e $y^* \in Y^*$.

Además, en tal caso el operador T es necesariamente una isometría. Una versión local "razonable" de la idea de reflexividad debería decir que para cada $E \subseteq Y^{**}$ subespacio de dimensión finita, existe algún operador $T : E \to Y$ (necesariamente de rango finito) que emula de alguna manera las propiedades que nombramos recién. La propiedad *(i)* se traduce inmediatamente en "$T(y) = y$ para todo $y \in E \cap Y$". La ambiciosa pretensión de que T sea una isometría será reemplazada por que T sea una casi-isometría. En cuanto a la propiedad *(ii)*, debemos ser cuidadosos, en tanto si pidiéramos (como uno podría pensar en una primera instancia) que $y^*(Ty^{**}) = y^{**}(y^*)$ para todo $y^{**} \in E$ e $y^* \in Y^*$; siendo E arbitrario, concluiríamos que en este caso J_Y es suryectiva y por lo tanto el espacio Y es "globalmente" reflexivo. Por este motivo, vamos a considerar un subespacio de dimensión finita $F \subseteq Y^*$ prefijado, y la condición *(ii)* tomará la forma "$y^*(Ty^{**}) = y^{**}(y^*)$ para todo $y^{**} \in E$ e $y^* \in F$". En otras palabras, para cada $y^{**} \in E$, la igualdad $\widehat{Ty^{**}} = y^{**}$ valdrá solo al restringir a F.

La forma más conocida y usada en la actualidad del Principio de Reflexividad Local fue obtenida por Johnson, Rosenthal y Zippin, quienes mejoraron la versión original de Lindenstrauss y el mismo Rosenthal. Básicamente esta dice que todo espacio de Banach es *localmente reflexivo* en el sentido que definimos recién.

Teorema 2.2.1 (PRL, versión JRZ)**.** *Sean $E \subseteq Y^{**}$ y $F \subseteq Y^*$ subespacios de dimensión finita, y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe una ε-isometría $T \in \mathcal{F}(E, Y)$ tal que:*

(i) $Ty = y$ para todo $y \in E \cap Y$,

(ii) $y^*(Ty^{**}) = y^{**}(y^*)$ para todo $y^{**} \in E$ e $y^* \in F$.

Demostración. Es consecuencia inmediata del Lema 2.1.5, tomando como T cualquier operador de la red (T_α). □

Pasemos ahora a una forma más fuerte del Principio de Reflexividad Local, obtenida por Behrends [3] (ver, por ejemplo, [17, pág. 217]).

Teorema 2.2.2 (PRL, versión Beh). *Sean $E \subseteq Y^{**}$, $F \subseteq Y^*$ y $H \subseteq \mathcal{L}(Y,Y)$ subespacios de dimensión finita, y sea $\varepsilon > 0$. Denotemos*

$$E_H = E + [A^{**}y^{**} : A \in H,\ y^{**} \in E] \subseteq Y^{**}.$$

Entonces existe una ε-isometría $T \in \mathcal{F}(E_H, Y)$ tal que:

(i) $Ty = y$ *para todo* $y \in E_H \cap Y$,

(ii) $y^*(Ty^{**}) = y^{**}(y^*)$ *para todo* $y^{**} \in E_H$ *e* $y^* \in F$,

(iii) $\|(AT - TA^{**})|_E\| < \varepsilon$ *para todo* $A \in S_H$.

Observación 2.2.3. Lo novedoso en esta versión es el hecho de que T pueda tomarse de forma tal que satisfaga *(iii)*, en tanto *(i)* y *(ii)* pueden obtenerse a partir de la versión JRZ, cambiando E por E_H.

Demostración. Notemos que si $H = [B_1, \ldots, B_m]$ entonces $E_H = E + \sum_{i=1}^m R(B_i^{**}|_E)$ y por ende es de dimensión finita. Apliquemos el Corolario 2.1.3 a E_H, F y ε para obtener $(T_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \subseteq \mathcal{F}(E_H, Y)$. Como $\|T_\alpha\| \to 1$ podemos asumir que $\|T_\alpha\| < 1+\varepsilon$ para todo α. Tomemos $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq S_H$ una $\varepsilon/5$-red para S_H. Afirmamos que

$$(A_1 T_\alpha - T_\alpha A_1^{**})|_E \xrightarrow{wot} 0 \text{ en } \mathcal{L}(E,Y).$$

En efecto, si $y^{**} \in E$ e $y^* \in Y^*$,

$$\begin{aligned}
y^*((A_1 \circ T_\alpha - T_\alpha \circ A_1^{**})(y^{**})) &= y^*((A_1 \circ T_\alpha)(y^{**})) - y^*((T_\alpha \circ A_1^{**})(y^{**})) \\
&= (y^* \circ (A_1 \circ T_\alpha))(y^{**}) - (y^* \circ T_\alpha)(A_1^{**}y^{**}) \\
&= \underbrace{T_\alpha^*(A_1^*(y^*))}_{\xrightarrow[en\ E_H^*]{} \widehat{A_1^*y^*}|_{E_H}} (y^{**}) - \underbrace{(T_\alpha^* y^*)}_{\xrightarrow[en\ E_H^*]{} \widehat{y^*}|_{E_H}} (A_1^{**}y^{**}) \\
&\longrightarrow \widehat{A_1^*y^*}|_{E_H}(y^{**}) - \widehat{y^*}|_{E_H}(A_1^{**}y^{**}) \\
&= A_1^{**}(y^{**})(y^*) - A_1^{**}(y^{**})(y^*) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pasando a combinaciones convexas de las colas de $(A_1 \circ T_\alpha - T_\alpha \circ A_1^{**})$, podemos mejorar esta convergencia, sin perder la convergencia de los adjuntos de (T_α). Conseguimos así una red $(T_\alpha^{(1)})_{\alpha\in\Gamma^{(1)}}$ que cumple II y III del Corolario 2.1.3, $\|T_\alpha^{(1)}\| < 1+\varepsilon$ para todo α, y ahora

$$(A_1 T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(1)} A_1^{**})|_E \xrightarrow{sot} 0 \text{ en } \mathcal{L}(E,Y).$$

Observemos que la convergencia de los adjuntos (propiedad III) nos garantiza, con la misma cuenta que antes, que $(A_2 T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(1)} A_2^{**})|_E \xrightarrow{wot} 0$ en $\mathcal{L}(E,Y)$. Pasando nuevamente a combinaciones convexas de las colas, obtenemos una red $(T_\alpha^{(2)})_{\alpha\in\Gamma^{(2)}}$ que cumple II y III del Corolario 2.1.3, $\|T_\alpha^{(2)}\| < 1+\varepsilon$ para todo α, y

$$(A_i T_\alpha^{(2)} - T_\alpha^{(2)} A_i^{**})|_E \xrightarrow{sot} 0 \text{ en } \mathcal{L}(E,Y) \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Iterando este procedimiento para $i = 3, \dots, n$ llegamos a una red $(T_\alpha^{(n)})_{\alpha\in\Gamma^{(n)}}$ que verifica II y III del Corolario 2.1.3, $\|T_\alpha^{(n)}\| < 1+\varepsilon$ para todo α, y

$$(A_i T_\alpha^{(n)} - T_\alpha^{(n)} A_i^{**})|_E \xrightarrow{sot} 0 \text{ en } \mathcal{L}(E,Y) \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

O equivalentemente, con convergencia en norma en lugar de convergencia *sot*, por ser E de dimensión finita.

Observemos que la “construcción” anterior puede hacerse cambiando a F por cualquier $\tilde{F} \subseteq Y^*$ de dimensión finita. En particular, podemos tomar $\tilde{F}$ como el “agrandado” de F a partir de E_H y ε tal y como se hizo en la demostración del Lema 2.1.5. Vemos, con la misma cuenta que en aquella demostración, que ahora los operadores de la red resultan ε-isometrías.

Finalmente, tomemos $\alpha_0 \in \Gamma^{(n)}$ tal que $T := T_{\alpha_0}^{(n)}$ cumpla

$$\|(A_i T - T A_i^{**})|_E\| < \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\varepsilon < 1$. Hemos hallado entonces un operador T que cumple todo lo que queríamos. En efecto, T es una ε-isometría que claramente verifica *(i)* y *(ii)*. Para ver que también cumple *(iii)*:

Sean $A \in S_H$ e i tal que $\|A - A_i\| < \varepsilon/5$, entonces

$$\begin{aligned}
\|(AT - TA^{**})|_E\| &\le \|AT|_E - A_iT|_E\| + \|A_iT|_E - TA_i^{**}|_E\| + \|TA_i^{**}|_E - TA^{**}|_E\| \\
&\le \|A_i - A\|\|T\| + \|(A_iT - TA_i^{**})|_E\| + \|T\|\|A_i - A\| \\
&< \frac{\varepsilon}{5}(1+\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{5} + (1+\varepsilon)\frac{\varepsilon}{5} \\
&< \frac{\varepsilon}{5}2 + \frac{\varepsilon}{5} + 2\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.
\end{aligned}$$ □

Por último, concluimos este capítulo dando una aplicación más del Lema 2.1.2. Para ello necesitaremos la siguiente proposición elemental.

Proposición 2.2.4. *Si $T \in \mathcal{L}(X,X)$, entonces T es un proyector si y solo si T^* es un proyector.*

Demostración. Dado que X^* separa puntos, es fácil ver que si Z es un espacio vectorial topológico y $U, V \in \mathcal{L}(Z,X)$, entonces

$$U = V \iff U^* = V^*.$$

Por lo tanto,
$$T^2 = T \iff (T^2)^* = T^* \iff (T^*)^2 = T^*.$$

□

Comentario 2.2.5. La proposición anterior vale para cualquier X espacio vectorial topológico localmente convexo, con exactamente la misma demostración.

La pregunta de cuándo un operador S entre espacios duales puede pensarse como el adjunto de otro, tiene su respuesta en el Comentario 1.2.4. Allí mencionamos que es condición necesaria y suficiente que S sea $w^* - w^*$ continuo. Nos preguntamos ahora si podrá haber una respuesta menos restrictiva si solo aspiramos a que S sea un adjunto "localmente". De la misma forma en que no todo Banach es reflexivo, pero todos lo son localmente. El siguiente teorema nos dice que si el operador es de rango finito, efectivamente será un adjunto a nivel local, sin pedir ninguna hipótesis adicional. Más aún, podremos elegir un "preadjunto" también de rango finito (en congruencia con el resultado "global" del Lema 1.2.2) y que sea un proyector si S lo es (en congruencia con el resultado "global" de la Proposición 2.2.4). Esto ya había sido probado por Johnson, Rosenthal y Zippin con la restricción adicional de que X fuese de dimensión finita. Si bien su argumento implicaría también el caso general, Oja y Põldvere [28] obtienen una demostración mucho más rápida a partir del Lema 2.1.2.

Teorema 2.2.6 ("Adjunción Local"). *Sea $F \subseteq Y^*$ un subespacio de dimensión finita, y sea $\varepsilon > 0$. Si $S \in \mathcal{F}(Y^*, X^*)$, entonces existe un operador $T \in \mathcal{F}(X, Y)$ tal que:*

(i) $|\|T\| - \|S\|| < \varepsilon$,

(ii) $R(T^*) = R(S)$,

(iii) $T^* y^* = S y^*$ *para todo* $y^* \in F$,

(iv) $T^{**} x^{**} = S^* x^{**}$ *para todo* $x^{**} \in (S^*)^{-1}(Y)$.

Además, si $X = Y$ y S es un proyector, entonces T también puede tomarse como un proyector.

Demostración. Escribamos $R(S) = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ y elijamos $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ tales que $S y_i^* = x_i^*$ para todo $i = 1, \dots, n$. Eventualmente cambiando a F por $F + [y_1^*, \dots, y_n^*]$, podemos suponer que $R(S) = S(F)$. Probando el teorema para este F "agrandado" quedará probado en particular para el original.

Por el Lema 1.2.3, $S^* \in \mathcal{F}_{w^*}(X^{**}, Y^{**})$. El Lema 2.1.2 produce una red $(T_\alpha) \subseteq \mathcal{F}_{w^*}(X^{**}, Y)$ tal que:

I' $\|T_\alpha\| \to \|S^*\| = \|S\|$,

II' $T_\alpha x^{**} = S^* x^{**}$ si $x^{**} \in (S^*)^{-1}(Y)$, III' $T_\alpha^* y^* = S^{**}\widehat{y^*} = \widehat{Sy^*}$ si $y^* \in F$.

Elijamos α_0 lo suficientemente grande como para que $|\|T_{\alpha_0}\| - \|S\|| < \varepsilon$, y definamos $T := T_{\alpha_0}|_X$. La primera observación es que $T^{**} = T_{\alpha_0}$, o más formalmente, $T^{**} = J_Y \circ T_{\alpha_0}$. En efecto,

$$T^{**}|_X = J_Y \circ T = J_Y \circ T_{\alpha_0}|_X = (J_Y \circ T_{\alpha_0})|_X.$$

Siendo los operadores T^{**} y $J_Y \circ T_{\alpha_0}$ w^*-continuos, por Teorema de Goldstine y linealidad deberán coincidir sobre todo X^{**}. Esto prueba que T cumple *(iv)*.

Para ver *(iii)*, tomemos $y^* \in F$ y calculemos

$$T^* y^* = J_X^*(T_{\alpha_0}^* y^*) = J_X^*(\widehat{Sy^*}) = (\underbrace{J_X^* \circ J_{X^*}}_{=I_{X^*}})(Sy^*) = Sy^*.$$

El item *(i)* es inmediato, solo recordando que $\|T\| = \|T_{\alpha_0}\|$ por ser T_{α_0} $w^* - \|\cdot\|$ continuo y por Teorema de Goldstine.

En cuanto a *(ii)*, sabemos por *(iii)* que

$$R(S) = S(F) = T^*(F) \subseteq R(T^*).$$

Para la otra inclusión, por *(iv)*:

$$\ker S^* \subseteq \ker T^{**}.$$

Y siendo $R(S)$ y $R(T^*)$ cerrados en X^*(son de dimensión finita), queda

$$R(S) =^{\perp} \ker S^* \supseteq^{\perp} \ker T^{**} = R(T^*),$$

donde $^\perp \ker S^*$ y $^\perp \ker T^{**}$ denotan a los preanuladores de $\ker S^*$ y $\ker T^{**}$ respectivamente.

Por último, probemos el "Además". Supongamos entonces que $X = Y$ y $S \in \mathcal{F}(X^*, X^*)$ es un proyector. Eventualmente cambiando a F por $F + R(S)$, podemos asumir que $F \supseteq R(S)$. Nuevamente, probando el Teorema para este F "agrandado" quedará probado en particular para el original. Por lo demostrado recién, debe existir un operador $T \in \mathcal{F}(X, X)$ que satisface *(i)*-*(iv)*. Veamos que bajo estas condiciones T resulta ser un proyector. Equivalentemente, por la Proposición 2.2.4 podemos ver que T^* lo es. Tomemos $x^* \in R(T^*)$ y verifiquemos que T^* lo fija. Dado que, por *(ii)*, $R(T^*) = R(S) \subseteq F$, *(iii)* nos dice que $T^* x^* = Sx^*$. Y siendo S un proyector, $Sx^* = x^*$. Por lo tanto, $T^* x^* = x^*$ como queríamos ver. □

Capítulo 3

Complementación local

3.1. Subespacios localmente complementados e ideales

A partir de aquí supondremos que Y es un subespacio no trivial de Z. Siendo Y y Z espacios de Banach, Y será cerrado en Z.

El Teorema de Hahn-Banach, uno de los resultados fundamentales del Análisis Funcional, nos dice en particular que cualquier funcional continua definida sobre Y puede extenderse a otra definida sobre todo Z. Más aún, esta extensión puede hacerse de forma *isométrica*. Esto es, preservando la norma de la funcional. Existe entonces, por el Axioma de elección, una función $\phi : Y^* \to Z^*$ que a cada $y^* \in Y^*$ le asigna una extensión $\widetilde{y^*} \in Z^*$. Una pregunta que surge naturalmente es si será posible encontrar una tal ϕ con "propiedades buenas", como linealidad, continuidad y otras. La respuesta es que no siempre. Nos abocaremos ahora a estudiar mejor este problema.

Definiciones 3.1.1. Un *operador de extensión* de Y^* en Z^* es un operador continuo $\phi : Y^* \to Z^*$ tal que $\phi(y^*)(y) = y^*(y)$ para todo $y^* \in Y^*,\ y \in Y$. Es decir, $\phi(y^*)$ es una extensión de y^*, para cada $y^* \in Y^*$. Si además ϕ es isométrico, decimos que es un *operador de extensión de Hahn-Banach* y que Y es un *ideal* en Z.

Proposición 3.1.2. *Si $\phi : Y^* \to Z^*$ es un operador de extensión, entonces:*

(i) $\|\phi(y^*)\| \geq \|y^*\|$ *para todo* $y^* \in Y^*$.

(ii) ϕ *es un monomorfismo.*

(iii) $\|\phi\| \geq 1$.

(iv) ϕ *es un operador de extensión de Hahn-Banach si y solo si* $\|\phi\| = 1$.

Demostración. *(i)* Es consecuencia inmediata del hecho de que para cada $y^* \in Y^*$, $\phi(y^*)$ es una extensión de y^*.

(ii) Si $\phi(y^*) = 0$, por el item *(i)* deberá ser $y^* = 0$.

(iii) Se deduce inmediatamente a partir del item *(i)* (recordar que supusimos que Y es no trivial).

(iv) Es claro que si ϕ es un operador de extensión de Hahn-Banach, debe tener norma 1.

Por otra parte, si ϕ es de norma 1, entonces para cada $y^* \in Y^*$ tenemos

$$\|y^*\| \leq \|\phi(y^*)\| \leq \|\phi\|\|y^*\| = \|y^*\|.$$

De donde $\|\phi(y^*)\| = \|y^*\|$.

□

Si existe $\phi : Y^* \to Z^*$ operador de extensión, la proposición anterior nos dice que ϕ necesariamente es un monomorfismo. Por lo tanto Y^* puede pensarse como subespacio algebraico de Z^*, extendiendo a las funcionales de Y^* vía ϕ. Más aún, si ϕ fuese un operador de extensión de Hahn-Banach, Y^* podrá pensarse como subespacio normado de Z^* vía ϕ.

Fakhoury [13] y Kalton [20] estudiaron sistemáticamente los pares de espacios de Banach (Y, Z) tales que Y es un subespacio de Z y existe un operador de extensión $\phi : Y^* \to Z^*$. Varios ejemplos pueden encontrarse en [27, Sección 5.5]. Un ejemplo paradigmático (o mejor dicho una familia de ejemplos paradigmáticos) es sin duda el del ideal $Y \hookrightarrow Y^{**}$ donde $J_{Y^*} : Y^* \to Y^{***}$ cumple el rol de operador de extensión de Hahn-Banach. En efecto, para cada $y^* \in Y^*$ se puede ver por verificación directa que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "y^*"] \arrow[d, "J_Y"'] & \mathbb{K} \\
Y^{**} \arrow[ur, "J_{Y^*}(y^*)"'] &
\end{tikzcd}.$$

Pasemos ahora a analizar otro concepto que aunque en primera instancia no lo parezca, está muy fuertemente relacionado con el de los operadores de extensión. Recordemos primero que Y se dice *complementado* en Z si existe algún W subespacio cerrado de Z tal que $Z = Y \oplus W$. Equivalentemente, Y está complementado en Z si existe un proyector continuo en Z de rango Y. O lo mismo, si existe un operador continuo $T : Z \to Y$ tal que $Ty = y$ para cada $y \in Y$. Nos interesa formular una versión local del concepto de "subespacio complementado". Pediremos entonces (para decir que Y está *localmente complementado* en Z) que para cada E subespacio de Z de dimensión finita, exista alguna *proyección local* $T : E \to Y$ que fije a los puntos de E que están en Y. El único aditamento faltante para que este concepto resulte realmente útil, es la condición de que haya un cierto control sobre las normas de las proyecciones locales.

Definiciones 3.1.3. Dado $\lambda \geq 1$, decimos que Y está *localmente λ-complementado* en Z si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $E \subseteq Z$ subespacio de dimensión finita, existe un operador $T : E \to Y$ (necesariamente continuo) tal que $Ty = y$ si $y \in E \cap Y$ y $\|T\| \leq \lambda + \varepsilon$. A su vez, decimos que Y está *localmente complementado* en Z si está localmente λ-complementado para algún $\lambda \geq 1$.

En las definiciones anteriores solo consideramos los $\lambda \geq 1$ pues, salvo los casos triviales en que $E \cap Y = 0$, las proyecciones locales tendrán norma mayor o igual a 1. De la misma manera en que un proyector no trivial tiene norma mayor o igual a 1.

Es un corolario inmediato del Principio de Reflexividad Local que Y está localmente 1-complementado en Y^{**}. También es claro que si Y está complementado en Z, en particular estará localmente complementado. En efecto, dado $P : Z \to Z$ proyector continuo de rango Y, para cada subespacio $E \subseteq Z$ de dimensión finita podemos tomar como proyección local a $T = P|_E^Y$. Así, $Ty = y$ para todo $y \in E \cap Y$ y $\|T\| \leq \|P\| \leq \|P\| + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.

Nuestro objetivo ahora será probar que la complementación local (resp. 1-complementación local) de Y en Z y la existencia de un operador de extensión (resp. operador de extensión de Hahn-Banach) $\phi : Y^* \to Z^*$ son, de hecho, equivalentes. A su vez daremos otras formulaciones también equivalentes. Con esto en mente, comenzaremos por establecer una generalización del Lema 2.1.2 en la que Y^{**} es reemplazado por Z y $J_{Y^*} : Y^* \to Y^{**}$ por un operador de extensión arbitrario $\phi : Y^* \to Z^*$.

Teorema 3.1.4 (Lema Principal "fijando puntos" extendido)**.** *Sea $F \subseteq Y^*$ un subespacio de dimensión finita. Si existe $\phi : Y^* \to Z^*$ operador de extensión y si $T \in \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Z)$, entonces existe una red $(T_\alpha)_{\alpha \in \Gamma} \subseteq \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)$ que satisface:*

I $\|T_\alpha\| \to \|T^* \circ \phi\|$.

II $T_\alpha x^* = Tx^*$ *para todo* $x^* \in T^{-1}(Y)$ *y para todo* α.

III $T_\alpha^* \xrightarrow{sot} T^* \circ \phi$ *en* $\mathcal{L}(Y^*, X)$. *Además,* $T_\alpha^* y^* = T^*(\phi(y^*))$ *para todo* $y^* \in F$ *y para todo* α.

Demostración. Basta con cambiar Y^{**} por Z y J_{Y^*} por ϕ en las demostraciones de los Lemas 2.1.1 y 2.1.2 para probar esta generalización, de forma prácticamente idéntica. Consideramos por lo tanto que no se justifica repetir todo el argumento. Únicamente nos detendremos sobre un punto que en aquel caso particular era realmente más sencillo. Comenzando igual que en de la demostración del Lema 2.1.1, usamos las identificaciones canónicas

$$\mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)^* \stackrel{1}{=} \mathcal{I}(X, Y^*) \ \text{ y } \ \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Z)^* \stackrel{1}{=} \mathcal{I}(X, Z^*)$$

para definir $\Psi : \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Y)^* \to \mathcal{F}_{w^*}(X^*, Z)^*$ por $\Psi(A) = \phi \circ A$, para $A \in \mathcal{I}(X, Y^*)$. Para poder seguir como en aquel caso, debemos probar que $\|\Psi^*(\widehat{T})\| \leq \|T_\alpha^* \circ \phi\|$.

Notemos primero que para cada $A \in \mathcal{I}(X, Y^*)$,

$$\langle A, \Psi^*(\widehat{T})\rangle = \langle \Psi(A), \widehat{T}\rangle = \langle T, \phi \circ A\rangle.$$

Por otra parte, puede probarse que al ser A un operador integral, su adjunto A^* también lo es y vale $\|A\|_I = \|A^*\|_I$ (ver [34, pág. 65-66]). Teniendo en cuenta además que

$$T^* \circ \phi \in \mathcal{F}(Y^*, X) \stackrel{1}{=} \mathcal{F}_{w^*}(Y^{***}, X) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}_{w^*}(Y^{***}, X)^* \stackrel{1}{=} \mathcal{I}(Y^{**}, X^*),$$

se puede deducir que

$$\langle T, \phi \circ A\rangle = \langle T^* \circ \phi, A^*\rangle.$$

En efecto, escribiendo al operador T como $T = \sum_{j=1}^k x_j \otimes z_j$ para ciertos $x_1, \dots, x_k \in X$ y $z_1, \dots, z_k \in Z$, valdrá $T^* \circ \phi = \sum_{j=1}^k (\widehat{z_j} \circ \phi) \otimes x_j$. Por lo tanto,

$$\langle T^* \circ \phi, A^*\rangle = \sum_{j=1}^k A^*(\widehat{z_j} \circ \phi)(x_j) = \sum_{j=1}^k \phi(Ax_j)(z_j) = \langle T, \phi \circ A\rangle.$$

Tenemos entonces que

$$|\langle A, \Psi^*(\widehat{T})\rangle| = |\langle T^* \circ \phi, A^*\rangle| \leq \|T^* \circ \phi\| \|A^*\|_I.$$

Y como A era arbitrario, concluimos que $\|\Psi^*(\widehat{T})\| \leq \|T^* \circ \phi\|$.

Como ya mencionamos, el resto de la demostración sigue tal y como se hizo antes. □

Este teorema, junto con el Lema 1.2.6, nos permiten derivar:

Corolario 3.1.5. *Sea $F \subseteq Y^*$ un subespacio de dimensión finita. Si existe $\phi : Y^* \to Z^*$ operador de extensión y si $T \in \mathcal{F}(X, Z)$, entonces existe una red $(T_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \subseteq \mathcal{F}(X, Y)$ que satisface:*

- I $\|T_\alpha\| \to \|T^* \circ \phi\|$.
- II $T_\alpha x = Tx$ *para todo* $x \in T^{-1}(Y)$ *y para todo* α.
- III $T_\alpha^* \xrightarrow{sot} T^* \circ \phi$ *en* $\mathcal{L}(Y^*, X)$. *Además,* $T_\alpha^* y^* = T^*(\phi(y^*))$ *para todo* $y^* \in F$ *y para todo* α.

Pongamos en el corolario anterior $X = E \subseteq Z$ subespacio de dimensión finita y T la inclusión $E \hookrightarrow Z$. Notando que en este caso $\|T^* \circ \phi\| \leq \|\phi\|$ y llamando $\tilde{T}$ a T_α para algún α suficientemente grande, obtenemos:

Corolario 3.1.6. *Sean $E \subseteq Z, F \subseteq Y^*$ subespacios de dimensión finita y sea $\varepsilon > 0$. Si existe $\phi : Y^* \to Z^*$ operador de extensión, entonces existe un operador $\tilde{T} : E \to Y$ tal que:*

I $\|\tilde{T}\| \leq \|\phi\| + \varepsilon$.

II $\tilde{T}y = y$ *para todo* $y \in E \cap Y$.

III $y^*(\tilde{T}z) = \phi(y^*)(z)$ *para todo* $z \in E$, $y^* \in F$.

En particular, Y *está localmente* $\|\phi\|$*-complementado en* Z.

Ya estamos en condiciones de probar las equivalencias que anticipamos. Demostraciones de las mismas han sido expuestas por Fakhoury [13] y por Kalton [20] de forma independiente. Oja y Põldvere [28] prueban una de las implicaciones en [28, pág. 1086].

Denotamos por $Y^\perp$ al anulador de Y en Z^*.

Teorema 3.1.7. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Existe un operador de extensión (resp. operador de extensión de Hahn-Banach) $\phi : Y^* \to Z^*$.

(ii) Y *está localmente complementado (resp. localmente 1-complementado) en* Z.

(iii) J_Y *admite una extensión lineal y continua (resp. lineal y de norma 1)* $S : Z \to Y^{**}$.

(iv) $Y^\perp$ *está complementado en* Z^* *(resp. existe un proyector* $P : Z^* \to Z^*$ *de norma 1 con* $\ker P = Y^\perp$*).*

Demostración. (i) $\implies$ *(ii)*: Ya se vio en el Corolario 3.1.6. En particular, si existe una tal ϕ de norma 1, Y estará localmente 1-complementado.

(ii) $\implies$ *(iii)*: Sea $\lambda \geq 1$ tal que Y está localmente λ-complementado en Z. Vamos a "construir" un operador $S : Z \to Y^{**}$ vía lo que se conoce como un *argumento de compacidad de Lindenstrauss* [23].

Consideremos el conjunto de índices

$$\Lambda = \{(E, \varepsilon) : E \subseteq Z \text{ es un subespacio de dimensión finita y } 0 < \varepsilon \leq 1\}$$

dirigido por el orden producto entre la inclusión de conjuntos y la desigualdad opuesta de los números reales. Es decir,

$$(E_1, \varepsilon_1) \preceq (E_2, \varepsilon_2) \iff E_1 \subseteq E_2 \text{ y } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2.$$

Para cada $\alpha = (E, \varepsilon) \in \Lambda$ existe $T_\alpha : E \to Y$ tal que $T_\alpha y = y$ si $y \in E \cap Y$ y $\|T_\alpha\| \leq \lambda + \varepsilon$. Definamos la función $L_\alpha : Z \to Y^{**}$ según:

$$L_\alpha(z) = \begin{cases} \widehat{T_\alpha z} & \text{si } z \in E \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Observemos que para cada $z \in Z$ debe existir algún índice $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $L_\alpha(z) = \widehat{T_\alpha z}$ para todo $\alpha \succeq \alpha_0$. En efecto, basta tomar $\alpha_0 = ([z], 1)$.

Ahora bien, $\|L_\alpha(z)\| \leq \|\widehat{T_\alpha z}\| = \|T_\alpha z\| \leq (\lambda + \varepsilon)\|z\| \leq (\lambda + 1)\|z\|$. Por lo tanto, tenemos la red

$$(L_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{P} := \prod_{z \in Z} B_{Y^{**}}[0, (\lambda + 1)\|z\|].$$

Por el Teorema de Alaoglu, cada una de las bolas anteriores es compacta para la topología w^* y, por el Teorema de Tychonoff, $\mathcal{P}$ resulta compacto para la topología producto de las anteriores (ver Apéndice). Por lo tanto deberán existir $S : Z \to Y^{**}$ en $\mathcal{P}$ y alguna subred $(L_{\alpha_\beta})_\beta$ tal que $L_{\alpha_\beta} \to S$ en $\mathcal{P}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $L_\alpha \to S$ en $\mathcal{P}$. El lector podrá verificar que salvo por una simplificación en la notación, esta suposición no tiene ninguna otra repercusión en la demostración. Por lo tanto, en definitiva tenemos que

$$L_\alpha(z)(y^*) \to Sz(y^*) \quad \text{para todo } z \in Z,\ y^* \in Y^*.$$

Veamos primero que S es lineal. Tomemos $a, b \in \mathbb{K}$, $z_1, z_2 \in Z$ y $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que si $\alpha \succeq \alpha_0$, entonces

$$L_\alpha(z_1) = T_\alpha z_1, \quad L_\alpha(z_2) = T_\alpha z_2 \quad \text{y} \quad L_\alpha(az_1 + bz_2) = T_\alpha(az_1 + bz_2)$$

(todos pensados en Y^{**}). Luego,

$$L_\alpha(az_1 + bz_2) = aL_\alpha(z_1) + bL_\alpha(z_2) \quad \text{para todo } \alpha \succeq \alpha_0.$$

Evaluando en $y^* \in Y^*$ y haciendo $\alpha \to \infty$, resulta

$$S(az_1 + az_2)(y^*) = aS(z_1)(y^*) + bS(z_2)(y^*).$$

Como y^* era arbitrario, esto nos dice que $S(az_1 + az_2) = aS(z_1) + bS(z_2)$.

Ahora probemos que $\|S\| \leq \lambda$. Fijemos $z \in Z$ y tomemos un $y^* \in Y^*$ cualquiera. Para todo α suficientemente grande tenemos que

$$|L_\alpha(z)(y^*)| = |\widehat{T_\alpha z}(y^*)| \leq \|T_\alpha z\|\|y^*\| \leq (\lambda + \varepsilon)\|z\|\|y^*\|.$$

Dado que cuando $\alpha = (E, \varepsilon) \to \infty$ necesariamente $\varepsilon \to 0$, tomando límite resulta

$$|Sz(y^*)| \leq \lambda\|z\|\|y^*\|.$$

Esto nos dice que $\|Sz\| \leq \lambda\|z\|$. Siendo z arbitrario, concluimos que $\|S\| \leq \lambda$.

Que S extiende a J_Y es claro, pues si $y \in Y$, para todo α suficientemente grande valdrá $L_\alpha(y) = \widehat{T_\alpha y} = \widehat{y}$. Basta evaluar en y^* y tomar límite igual que antes.

En el caso particular en que $\lambda = 1$, recordando que $Y \neq 0$,

$$1 = \|J_Y\| \leq \|S\| \leq 1$$

y la extensión S resulta de norma 1.

(iii) $\Longrightarrow$ *(i)*: Definamos $\phi := S^*|_{Y^*} : Y^* \to Z^*$.
ϕ es un operador lineal con $\|\phi\| \leq \|S^*\| = \|S\|$.
Si $y^* \in Y^*$ e $y \in Y$,

$$\phi(y^*)(y) = S^*\widehat{y^*}(y) = Sy(y^*) = \widehat{y}(y^*) = y^*(y).$$

Queda probado entonces que se trata de un operador de extensión.

Si $\|S\| = 1$, la desigualdad $\|\phi\| \leq \|S\|$ junto con la Proposición 3.1.2 nos dicen que ϕ es de Hahn-Banach.

(i) $\Longrightarrow$ *(iv)*: Definamos $P : Z^* \to Z^*$ según $Pz^* = \phi(z^*|_Y)$ y veamos que es un proyector continuo en Z^* con $\ker P = Y^\perp$ (probando así que $Y^\perp$ está complementado en Z^*).

Es claro que P es lineal y continuo. De hecho, $P = \phi \circ i^*$ con $i : Y \hookrightarrow Z$ la inclusión. Además $\|P\| \leq \|\phi\|$.

Como todo operador de extensión es mono, dado $z^* \in Z^*$,

$$z^* \in Y^\perp \iff z^*|_Y = 0 \iff \phi(z^*|_Y) = 0 \iff z^* \in \ker P.$$

Para ver que es un proyector:

$$P^2 z^* = P(\phi(z^*|_Y)) = \phi(\phi(z^*|_Y)|_Y) = \phi(z^*|_Y) = Pz^*.$$

En el supuesto de que ϕ fuese de Hahn-Banach, la desigualdad $\|P\| \leq \|\phi\|$ junto con el hecho de que todo proyector no trivial tiene norma mayor o igual a 1, nos dicen que $\|P\| = 1$.

(iv) $\Longrightarrow$ *(i)*: Sabemos que existe un proyector continuo $P : Z^* \to Z^*$ con $\ker P = Y^\perp$. Definamos $\phi : Y^* \to Z^*$ según $\phi(y^*) = P(\widetilde{y^*})$ con $\widetilde{y^*} \in Z^*$ alguna extensión de y^*, cuya existencia está garantizada por el Teorema de Hahn-Banach.

Lo primero que debemos ver es que ϕ está bien definida. Si $z_1^*, z_2^* \in Z^*$ son dos extensiones de $y^* \in Y^*$, entonces $(z_1^* - z_2^*)|_Y = y^* - y^* = 0$. De donde $z_1^* - z_2^* \in Y^\perp = \ker P$ y por lo tanto $P(z_1^*) = P(z_2^*)$.

Es fácil verificar que ϕ es lineal, solo notando que dadas dos funcionales $y_1^*, y_2^* \in Y^*$ y dadas extensiones $z_1^*, z_2^* \in Z^*$ de las mismas, una combinación lineal de z_1^*, z_2^* será extensión de la correspondiente combinación lineal de y_1^*, y_2^*.

Para ver que se trata de un operador acotado, dada $y^* \in Y^*$ el Teorema de Hahn-Banach nos permite elegir para una extensión isométrica $\widetilde{y^*} \in Z^*$. Podemos calcular entonces

$$\|\phi(y^*)\| = \|P(\widetilde{y^*})\| \leq \|P\|\|\widetilde{y^*}\| = \|P\|\|y^*\|.$$

Queda probado que ϕ es acotado y $\|\phi\| \leq \|P\|$.

Usando ahora que $P - I_{Z^*}$ tiene rango $R(P - I_{Z^*}) = \ker P = Y^{\perp}$,

$$\begin{aligned}((P - I_{Z^*})\widetilde{y^*})(y) &= 0\\ P\widetilde{y^*}(y) - \widetilde{y^*}(y) &= 0\\ \phi(y^*)(y) &= y^*(y), \qquad \text{para todo } y \in Y.\end{aligned}$$

Esto nos dice que ϕ es operador de extensión.

En el caso particular en que $\|P\| = 1$, la desigualdad $\|\phi\| \leq \|P\|$ junto con la Proposición 3.1.2 nos dicen que ϕ es de Hahn-Banach. □

Algunos puntos de la demostración anterior merecen particular atención:

1. Vimos como definir a partir de un operador de extensión ϕ, un proyector acotado $P : Z^* \to Z^*$ con $\ker P = Y^{\perp}$.

2. Recíprocamente, vimos como definir ϕ a partir de P.

3. Dado S como en el item *(iii)*, vimos como definir un operador de extensión ϕ.

También podríamos haber probado la implicación "*(i)* $\Longrightarrow$ *(iii)*" definiendo $S := \phi^*|_Z$. Es fácil ver que S es efectivamente una extensión de J_Y y que tiene norma 1 si ϕ es de Hahn-Banach. Todas estas construcciones son mutuamente recíprocas y definen biyecciones entre los conjuntos de operadores de extensión ϕ como en *(i)*, operadores S como en *(iii)* y proyectores P como en *(iv)*. Además:

a) Todas preservan norma 1.

b) Si $\phi \leftrightarrow P$, entonces $R(\phi) = R(P)$.

Por último consideremos a c_0, el espacio de sucesiones en $\mathbb{K}$ que convergen a 0. Como ya mencionamos, el PRL nos dice en particular que este espacio está localmente 1-complementado en su bidual. Si denotamos por $G : \ell_\infty \to c_0^{**}$ al isomorfismo canónico entre estos espacios y por $i : c_0 \hookrightarrow \ell_\infty$ a la inclusión, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} c_0 \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "J_{c_0}"] & \\ \ell_\infty \arrow[r, "G"'] & c_0^{**} \end{tikzcd}$$

nos permite probar que c_0 está localmente 1-complementado como subespacio de ℓ_∞. Por otra parte, es sabido que c_0 no está ("globalmente") complementado en ℓ_∞. Esto último fue probado por Phillips [32] y luego refinado, generalizado y vuelto a probar por muchos matemáticos como Grothendieck, Pelczynski, Rosenthal, Nakamura y Kakutani, entre otros.

El concepto de la complementación local es entonces, como era de esperarse, realmente distinto y mucho más abarcativo que el de la complementación. No obstante, a diferencia de lo que ocurre con el par "reflexividad / reflexividad local", no es cierto que todo subespacio de un espacio de Banach esté localmente complementado. De hecho, puede probarse que todo subespacio de Z está localmente complementado si y solo si Z es isomorfo a un espacio de Hilbert (ver [14, Teorema 2.1] o [8, Teorema 3]).

3.2. Ideales casi isométricos

Diferentes subclases de ideales han sido extensivamente estudiadas por muchos autores (para referencias ver [26, Sección 4]). En este capítulo nos centraremos en una clase en particular: la de los *ideales casi isométricos*. Esta fue definida y estudiada por Abrahamsen, Lima y Nygaard [1]. También veremos algo breve sobre los llamados *ideales estrictos* y algo aún más breve sobre los *M-ideales*.

Seguimos suponiendo que Y es un subespacio (necesariamente cerrado) no trivial de Z.

Definición 3.2.1. Decimos que Y es un *ideal casi isométrico* en Z si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $E \subseteq Z$ subespacio de dimensión finita, existe una ε-isometría $T : E \to Y$ tal que $Ty = y$ si $y \in E \cap Y$.

Remarquemos que Abrahamsen, Lima y Nygaard [1] no piden que Y sea subespacio cerrado de Z (o lo mismo, que sea Banach). Comentan además que Y es un ideal casi isométrico en Z si y solo si su clausura lo es.

Dicho de otra forma, Y es un ideal casi isométrico en Z si está localmente 1-complementado y además para cada $\varepsilon > 0$ pueden elegirse proyecciones locales que sean ε-isometrías. Por lo probado en el Teorema 3.1.7, la clase de los ideales casi-isométricos es efectivamente una subclase de la de los ideales. Lógicamente, para que los ideales que verifican esto merezcan recibir un nombre especial, debemos constatar que no todo ideal es casi isométrico. Si bien no expondremos la demostración aquí, nos gustaría mencionar que Abrahamsen, Lima y Nygaard dan en [1], como ejemplo de ideal que no es casi isométrico, a $\ell_1 \hookrightarrow L_1[0,1]$, donde se está identificando a una cierta isometría en particular con la inclusión. O lo mismo, hay un cierto subespacio cerrado de $L_1[0,1]$, isométricamente isomorfo a ℓ_1, que es un ideal pero no un ideal casi isométrico en $L_1[0,1]$. Por otra parte, como ejemplo de ideal casi isométrico (o mejor dicho, familia de ejemplos), tenemos que Y es un ideal casi isométrico en Y^{**}. Esto es consecuencia inmediata del Principio de Reflexividad Local.

Como motivación del estudio de los ideales casi isométricos, Abrahamsen, Lima y Nygaard prueban en [1] que las llamadas *propiedades de diámetro 2* y la *propiedad de Daugavet* de un espacio de Banach Z son heredadas por sus ideales casi isométricos. Asimismo, dan una caracterización de la clase de espacios conocidos como *espacios de*

Gurariy en términos de estos ideales: un espacio de Banach Y es un espacio de Gurariy si y solo si es un ideal casi isométrico en todo superespacio $Z \supseteq Y$.

El Corolario 3.1.6 nos dice en particular que si Y es un ideal en Z, dado cualquier operador de Hahn-Banach $\phi : Y^* \to Z^*$ existen proyecciones locales sobre Y "compatibles", en algún sentido, con ϕ. Nos preguntamos ahora si en el caso de los ideales casi isométricos valdrá algún resultado análogo pero preservando el carácter de ε-isometría de las proyecciones locales. La respuesta es que sí, pero debemos cambiar "cualquier ϕ" por "algún ϕ".

Teorema 3.2.2. *Supongamos que Y es un ideal casi isométrico en Z. Entonces existe un operador de extensión de Hahn-Banach $\phi : Y^* \to Z^*$ tal que para todo $E \subseteq Z$, $F \subseteq Y^*$ subespacios de dimensión finita y todo $\varepsilon > 0$, existe una ε-isometría $T : E \to Y$ tal que:*

I *$Ty = y$ para todo $y \in E \cap Y$.*

II *$y^*(Te) = \phi(y^*)(e)$ para todo $e \in E$, $y^* \in F$.*

Demostración. Comenzamos con el argumento de compacidad de Lindenstrauss empleado en la demostración del Teorema 3.1.7, con la diferencia de que en este caso podemos asumir también que para cada $\alpha = (E, \varepsilon)$ la correspondiente proyección local $T_\alpha : E \to Y$ es una ε-isometría. Referimos al lector a esa demostración para ver en qué consiste el argumento y cuáles son las notaciones empleadas. Igual que en ese caso tenemos que el operador $\phi = S^*|_{Y^*}$ es un operador de extensión de Hahn-Banach (esto se vió al probar la implicación "*(iii)* $\Longrightarrow$ *(i)*" de aquel teorema), donde S es el límite en $\mathcal{P}$ de la red $(L_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Fijemos ahora E y ε y notemos $\alpha = (\tilde{E}, \tilde{\varepsilon})$. Consideremos también un subespacio de dimensión finita $F \subseteq Y^*$. Las proyecciones locales T_α no son compatibles, en principio, con ϕ. Debemos corregir esto para poder dar por concluida la demostración. Recurrimos entonces al argumento de perturbación de Oja y Põldvere empleado en la prueba del Lema 2.1.2. De forma análoga a lo hecho en aquella oportunidad, teniendo presente la identificación del Lema 1.2.6, podemos definir proyectores $P \in \mathcal{F}(E, E)$ y $Q \in \mathcal{F}(Z^*, Z^*)$ tales que $R(Q) = \phi(F)$, $R(P) = E \cap Y$ y $R(Q^*) \subseteq Y$. De hecho, Q puede definirse en este caso como

$$Q = \sum_{j=1}^{n} y_j \otimes \phi(y_j^*),$$

con $(y_j, y_j^*)_{j=1}^n$ un sistema biortogonal completo para F (i.e., $\{y_1^*, \dots, y_n^*\}$ base de F e $y_1, \dots, y_n \in Y$ tales que $y_j^*(y_i) = \delta_{ij}$). Para cada α definimos $S_\alpha : E \to Y$ análogamente a cómo se hizo en esa demostración, cambiando el operador T de aquella oportunidad por la inclusión $i_E : E \hookrightarrow Z$. Es decir,

$$\begin{aligned} S_\alpha &:= i_E P + T_\alpha(I - P) - Q^* J_Z (T_\alpha - i_E)(I - P) \\ &= i_E P + T_\alpha - T_\alpha P - Q^* J_Z (T_\alpha - i_E) + Q^* J_Z (T_\alpha - i_E) P \\ &= i_E + (I - Q^*) J_Z (T_\alpha - i_E)(I - P). \end{aligned}$$

Se verifica igual que antes que $S_\alpha y = y$ para todo $y \in E \cap Y$. Además,

$$S_\alpha - T_\alpha = (i_E - T_\alpha)P - Q^* J_Z(T_\alpha - i_E)(I-P) = -Q^* J_Z(T_\alpha - i_E)(I-P),$$

pues $T_\alpha y = y$ para $y \in E \cap Y = R(P)$. Queremos ver que $\|S_\alpha - T_\alpha\| \to 0$. Siendo E de dimensión finita, nos alcanza con ver que $S_\alpha - T_\alpha \to 0$ puntualmente. Sean $e \in E$ y $\delta > 0$. Dado que $Q^* = \sum_{j=1}^n \phi(y_j^*) \otimes y_j$,

$$Q^* J_Z(T_\alpha - i_E)e = Q^*\big(\widehat{T_\alpha e} - \widehat{e}\big) = \sum_{j=1}^n \Big(\widehat{T_\alpha e}(\phi(y_j^*)) - \widehat{e}(\phi(y_j^*))\Big) y_j = \sum_{j=1}^n \Big(\widehat{T_\alpha e}(y_j^*) - \widehat{e}(\phi(y_j^*))\Big) y_j.$$

De donde

$$\|S_\alpha e - T_\alpha e\| \leq \sum_{j=1}^n \|\widehat{T_\alpha e}(y_j^*) - \widehat{e}(\phi(y_j^*))\| \|y_j\|.$$

Sea $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $\widehat{T_\alpha e} = L_\alpha(e)$ y $\|L_\alpha(e)(y_j^*) - Se(y_j^*)\| \leq \delta$ si $\alpha \geq \alpha_0$. Notando que $\widehat{e}(\phi(y_j^*)) = \widehat{e}(S^* \widehat{y^*}) = Se(y^*) = \widehat{e}(S)(y^*)$, podemos concluir que

$$\|S_\alpha e - T_\alpha e\| \leq \Big(\sum_{j=1}^n \|y_j\|\Big)\delta \quad \text{ si } \alpha \geq \alpha_0.$$

Como δ era arbitrario, $\|S_\alpha e - T_\alpha e\| \to 0$. Resulta como dijimos que $\|S_\alpha - T_\alpha\| \to 0$. A partir de esto, vemos que los operadores perturbados S_α son también ε-isometrías para α suficientemente grande. En efecto, dado $e \in S_E$,

$$\|S_\alpha e\| \leq \|T_\alpha e\| + \|T_\alpha - S_\alpha\| \|e\| < 1 + \tilde{\varepsilon} + \|T_\alpha - S_\alpha\| \xrightarrow[\alpha \to \infty]{} 1$$

y

$$\|S_\alpha e\| \geq \|T_\alpha e\| - \|T_\alpha - S_\alpha\| \|e\| \geq \frac{1}{1+\tilde{\varepsilon}} - \|T_\alpha - S_\alpha\| \xrightarrow[\alpha \to \infty]{} 1.$$

Ambas convergencias independientes de e. Probando, por último, que todos los operadores S_α son compatibles con ϕ, el operador T del teorema podrá elegirse como S_α para algún índice α grande. Sean entonces $e \in E$ e $y^* \in F$. A partir de la escritura

$$S_\alpha = i_E + (I - Q^*) J_Z (T_\alpha - i_E)(I - P)$$

y recordando que S_α toma valores en Y, calculamos

$$\begin{aligned}
\langle S_\alpha e, y^* \rangle &= \langle S_\alpha e, \phi(y^*) \rangle \\
&= \langle e, \phi(y^*) \rangle + \langle (I - Q^*) J_Z (T_\alpha - i_E)(I-P)e, \phi(y^*) \rangle \\
&= \langle e, \phi(y^*) \rangle + \langle (T_\alpha - i_E)(I-P)e, \underbrace{(I-Q)\phi(y^*)}_{=0} \rangle \\
&= \langle e, \phi(y^*) \rangle.
\end{aligned}$$

□

Antes de pasar a la siguiente definición, recordemos que la norma del espacio Z siempre puede caracterizarse a partir de su dual Z^*, según

$$\|z\| = \sup_{z^* \in B_{Z^*}} |z^*(z)| \quad \text{para todo } z \in Z.$$

En general, dado un subespacio $H \subseteq Z^*$, siempre podemos considerar la seminorma $p : Z \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(z) = \sup_{h \in B_H} |h(z)|.$$

Y si además el subespacio H separa puntos de Z, p resulta ser una norma. En general, dicha norma no tiene por qué ser equivalente a la original de Z. Los subespacios H para los que sí ocurre esto reciben un nombre particular.

Definiciones 3.2.3. Un subespacio $H \subseteq Z^*$ se dice *normante* para Z si $p(z) = \sup_{h \in B_H} |h(z)|$ define una norma sobre Z equivalente a la original. Si más aún, ambas normas coinciden, decimos que H es *1-normante* para Z.

Definición 3.2.4. Y se dice un *ideal estricto* en Z si existe un operador de extensión de Hahn-Banach $\phi : Y^* \to Z^*$ de rango 1-normante para Z.

Como ejemplo (o mejor dicho familia de ejemplos) de ideal estricto, tenemos que Y es un ideal estricto en Y^{**}, ya que es fácil ver que el rango del operador de extensión de Hahn-Banach $J_{Y^*} : Y^* \to Y^{***}$ es 1-normante para Y^{**}. Más en general, dado cualquier espacio de Banach X, el rango de J_X es 1-normante para X^*. En efecto, si $x^* \in X^*$,

$$\|x^*\| = \sup_{x \in B_X} |x^*(x)| = \sup_{x \in B_X} |\widehat{x}(x^*)| = \sup_{x^{**} \in B_{R(J_X)}} |x^{**}(x)|.$$

A continuación damos otras definiciones equivalentes de ideal estricto.

Proposición 3.2.5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Y es un ideal estricto en Z.*

(ii) *Existe un proyector $P : Z^* \to Z^*$ con $\ker P = Y^\perp$, de norma 1 y de rango 1-normante para Z.*

(iii) *Existe una isometría lineal $S : Z \hookrightarrow Y^{**}$ que extiende a J_Y.*

Demostración. Recordemos primero que en la demostración del Teorema 3.1.7 y en la discusión posterior, establecimos ciertas biyecciones entre los operadores de extensión de Hahn-Banach $\phi : Y^* \to Z^*$, los proyectores $P : Z^* \to Z^*$ de norma 1 con $\ker P = Y^\perp$ y las extensiones lineales de J_Y, $S : Z \to Y^{**}$, de norma 1. Consideremos ϕ, P y S como los que nombramos recién.

(i) $\Longleftrightarrow$ *(ii):* Es consecuencia de que si $\phi \leftrightarrow P$, entonces $R(P) = R(\phi)$.

(i) $\iff$ *(iii):* Observemos que si $\phi \leftrightarrow S$, entonces para cada $z \in Z$ valdrá

$$\|Sz\| = \|\phi^*|_Z(z)\| = \|\widehat{z} \circ \phi\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} |\phi(y^*)(z)| = \sup_{z^* \in B_{R(\phi)}} |z^*(z)|.$$

Por lo tanto, en tal caso:

$$\begin{aligned} R(\phi) \text{ es 1-normante } &\iff \sup_{z^* \in B_{R(\phi)}} |z^*(z)| = \|z\| \text{ para todo } z \in Z \\ &\iff \|Sz\| = \|z\| \text{ para todo } z \in Z \\ &\iff S \text{ es una isometría.} \end{aligned}$$

Como consecuencia de esto tenemos que las afirmaciones *(i)* y *(iii)* son equivalentes. □

Veamos ahora que esta nueva subclase de ideales está incluida en la de los ideales casi isométricos.

Proposición 3.2.6. *Si Y es un ideal estricto en Z, entonces Y es un ideal casi isométrico en Z.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $E \subseteq Z$ un subespacio de dimensión finita. Por la proposición anterior debe existir una isometría lineal $S : Z \to Y^{**}$ que extiende a J_Y. Como $\tilde{E} := S(E) \subseteq Y^{**}$ es un subespacio de dimensión finita e Y es un ideal casi isométrico en Y^{**}, existe una ε-isometría $\tilde{T} : \tilde{E} \to Y$ tal que $\tilde{T}(y) = y$ si $y \in \tilde{E} \cap Y$. Definamos $T := \tilde{T} \circ S|_E^{\tilde{E}} : E \to Y$. Al ser S una isometría y $\tilde{T}$ una ε-isometría, es claro que T resulta una ε-isometría. Además, si $y \in E \cap Y$, entonces $y = Sy \in \tilde{E} \cap Y$. Luego, $Ty = \tilde{T}Sy = \tilde{T}y = y$. □

Nuestro siguiente objetivo es ver que no vale la implicación recíproca de la proposición anterior. Es decir, no todo ideal casi isométrico es un ideal estricto. Antes de poder exhibir un contraejemplo, necesitaremos un poco más de teoría sobre ideales.

Definiciones 3.2.7. Y se dice un *M-ideal* en Z si existe un proyector $P : Z^* \to Z^*$ de norma 1 con $\ker P = Y^\perp$, tal que

$$\|z^*\| = \|Pz^*\| + \|z^* - Pz^*\| \quad \text{para todo } z^* \in Z^*.$$

Al verificar esto último se dice que P es una *L-proyección.*

En otras palabras, Y es un M-ideal en Z si es un ideal y si existe algún proyector P en Z^* de norma 1 con $\ker P = Y^\perp$, tal que $Z^* \stackrel{1}{=} (R(P) \oplus \ker P, \|\cdot\|_1)$ vía la factorización de la suma directa. Se puede probar que de existir un tal P este es único. Por ello, podemos referirnos a P como *la* proyección de Y como M-ideal en Z.

Definiciones 3.2.8. Y se dice un M-*sumando* en Z si existe un proyector continuo $Q : Z \to Z$ de rango Y, tal que

$$\|z\| = \text{máx}\{\|Qz\|, \|z - Qz\|\} \quad \text{para todo } z \in Z.$$

Al verificar esto último se dice que Q es una M-*proyección*.

En otras palabras, Y es un M-sumando en Z si existe algún proyector continuo Q en Z con $R(Q) = Y$, tal que $Z \overset{1}{=} (Y \oplus \ker Q, \|\cdot\|_\infty)$ vía la factorización de la suma directa. Se puede probar que de existir un tal Q este es único. Por ello, podemos referirnos a Q como *la* proyección de Y como M-sumando en Z.

Es fácil ver que si Y es un M-sumando en Z, en particular es un M-ideal. Más aún, si Q es la proyección de Y como M-sumando en Z, entonces Q^* es la proyección de Y como M-ideal en Z.

Pasemos ahora a verificar un sencillo resultado auxiliar de carácter general.

Proposición 3.2.9. *Sea $Q : X \to X$ un proyector. Entonces $R(Q^*)$ es w^*-cerrado.*

Demostración. Sean (x_γ^*) una red en X^* y $\varphi \in X^*$ tales que $Q^* x_\gamma^* \xrightarrow{w^*} \varphi$. En otras palabras, $x_\gamma^*(Qx) \to \varphi(x)$ para todo $x \in X$. Queremos ver que $\varphi \in R(Q^*)$. Por ser Q^* un proyector (ver Proposición 2.2.4), basta con verificar que $Q^*\varphi = \varphi$. O lo mismo, que $\varphi(Qx) = \varphi(x)$ para todo $x \in X$.

Sea $x \in X$. Siendo Q un proyector, tenemos que

$$x_\gamma^*(Q(Qx)) = x_\gamma^*(Qx) \quad \text{para todo } \gamma.$$

Tomando límite resulta $\varphi(Qx) = \varphi(x)$, como queríamos ver. □

La siguiente proposición será la que nos permitirá encontrar un ideal casi isométrico que no es ideal estricto.

Proposición 3.2.10. *Si $Y \subsetneq Z$ es un M-sumando en Z, entonces Y no es un ideal estricto en Z.*

Demostración. Supongamos que sí. Sea Q la proyección de Y como M-sumando en Z. Como mencionamos antes, Q^* es en este caso la proyección de Y como M-ideal en Z. Siendo $Z = Y \oplus \ker Q$ e $Y \subsetneq Z$, existe $0 \neq z \in \ker Q$. Por otra parte, como $R(Q^*)$ es w^*-cerrado por la Proposición 3.2.9, vale la igualdad $R(Q^*) = \ker Q^\perp$ (ver Apéndice). Por lo tanto, valiéndonos de las equivalencias de la Proposición 3.2.5, tenemos que

$$\|z\| = \sup_{z^* \in B_{R(Q^*)}} |z^*(z)| = \sup_{z^* \in B_{\ker Q^\perp}} |z^*(z)| = 0,$$

lo cual es absurdo. □

Estamos finalmente en condiciones de exponer el contraejemplo que anticipamos. Denotemos por V al subespacio de c_0 formado por las sucesiones cuya primera coordenada es 0. Es decir, $V = \ker e_1^*$ con $e_1^* \in c_0^*$ la proyección sobre la primera coordenada. V es un subespacio cerrado propio de c_0. Denotamos por $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ a los vectores canónicos de c_0.

Proposición 3.2.11. *V es un M-sumando y un ideal casi isométrico en c_0. En particular, V es un ideal casi isométrico que no es ideal estricto.*

Demostración. Definamos $Q : c_0 \to c_0$ como $Q(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots)$. Es fácil ver que Q es la proyección de V como M-sumando en c_0. Resta probar que V es un ideal casi isométrico en c_0.

Sean $E \subseteq c_0$ un subespacio de dimensión finita y $\varepsilon > 0$. Consideremos además $0 < \tilde{\varepsilon} < 1/3$ y $x^1, x^2, \dots, x^n \in S_E$ una $\tilde{\varepsilon}$-red para S_E. Elijamos $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, tal que $|x_N^i| < \tilde{\varepsilon}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Definamos el operador $T : E \to V$ según

$$Tx = Qx + e_1^*(x)e_N = (0, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N + x_1, x_{N+1}, \dots).$$

Si $x \in E \cap V$,

$$Tx = Qx + e_1^*(x)e_N = x + 0.e_N = x.$$

Por otra parte, para cada $x \in \{x^1, \dots, x^n\}$, es fácil verificar que

$$1 - \tilde{\varepsilon} < \|Tx\| < 1 + \tilde{\varepsilon}.$$

Veamos que esto implica que

$$\frac{1}{h(\tilde{\varepsilon})}\|x\| \leq \|Tx\| \leq h(\tilde{\varepsilon})\|x\| \quad \text{para todo } x \in E, \tag{3.2.11.1}$$

con h la homografía

$$h(u) = \frac{1-u}{1-3u}.$$

Como $h\big((0, 1/3)\big) = (1, +\infty)$, eligiendo $\tilde{\varepsilon}$ de forma tal que $h(\tilde{\varepsilon}) < 1 + \varepsilon$, T resultará ser una ε-isometría y quedará demostrada la proposición.

Alcanza con verificar las desigualdades en 3.2.11.1 para $x \in S_E$. Por lo tanto, tomemos $x \in S_E$ e $1 \leq i \leq n$ tal que $\|x - x^i\| < \tilde{\varepsilon}$. Entonces,

$$\|Tx\| \leq \|Tx - Tx^i\| + \|Tx^i\| \leq \|T\|\tilde{\varepsilon} + 1 + \tilde{\varepsilon},$$

y despejando obtenemos

$$\|T\| \leq \frac{1+\tilde{\varepsilon}}{1-\tilde{\varepsilon}} \leq h(\tilde{\varepsilon}).$$

Por otro lado,

$$\|Tx\| \geq \|Tx^i\| - \|Tx^i - Tx\| \geq 1 - \tilde{\varepsilon} - \|T\|\tilde{\varepsilon} \geq 1 - \tilde{\varepsilon} - \frac{1+\tilde{\varepsilon}}{1-\tilde{\varepsilon}}\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{h(\tilde{\varepsilon})}.$$

□

Capítulo 4

Aplicaciones

Concluimos este trabajo dando algunas aplicaciones del Principio de Reflexividad Local. En algunos casos, las mismas estarán generalizadas vía la noción de ideales casi isométricos definida en el Capítulo 3.

4.1. R-acotación en espacios biduales

Definición 4.1.1. Para cada $j \in \mathbb{N}$ definimos la *j-ésima función de Rademacher* como $r_j : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $r_j(t) = sg(sen(2j\pi t))$, donde sg denota a la función signo. Es decir,

$$sg(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Notemos que la j-ésima función de Rademacher se consigue, en definitiva, dividiendo el intervalo $[0,1]$ en 2^j subintervalos diádicos de longitud $1/2^j$ y definiéndola en cada uno como 1 o -1 de forma alternada. Por el contexto en el que se utilizan estas funciones, los valores que toman en los extremos de los subintervalos carecen de importancia (el conjunto de dichos extremos es de medida cero).

Si bien las funciones de Rademacher no son funcionales lineales (ni el intervalo $[0,1]$ un espacio vectorial), dado $x \in X$, continuaremos utilizando la notación $r_j \otimes x$ para representar a la función $r_j \otimes x : [0,1] \to X$ tal que $(r_j \otimes x)(t) = r_j(t)x$.

Consideremos ahora una familia de endomorfismos $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}(X)$. $\mathcal{T}^{**}$ será la familia $\mathcal{T}^{**} := \{T^{**} : T \in \mathcal{T}\}$.

En lo que sigue, $\|\cdot\|_2$ denotará la norma del espacio de Bochner $L_2([0,1], Y)$ con Y el espacio que corresponda en cada caso. Es decir,

$$\|f\|_2 = \Big(\int_0^1 \|f(t)\|^2 dt \Big)^{1/2}.$$

Remitimos al lector que no esté familiarizado con la integración en espacios de Banach a [11]. Muy brevemente, dado un espacio de medida positiva finita $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, decimos que

$f : \Omega \to Y$ es *μ-medible* si es el límite en casi todo punto de una sucesión de *funciones simples μ-medibles*, donde estas últimas se definen de la misma forma que en el contexto de integración de funciones a valores en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Para una tal f, la función $\|f\|^2 : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible en el sentido usual y podemos entonces calcular su integral usual con respecto a μ. El *espacio de Bochner* $L^2(\mu, Y)$ es un espacio de Banach formado por todas las funciones $f : \Omega \to Y$ μ-medibles tales que $I_f := \int_\Omega \|f(\omega)\|^2 d\mu < +\infty$, con las operaciones usuales y la norma $\|f\|_2 = I_f^{1/2}$. Así, el espacio que notamos $L^2([0,1], Y)$ no es otro que el espacio $L^2(\mu, Y)$ con $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \{A \subseteq [0,1] : A \text{ es medible Lebesgue}\}$ y μ la medida de Lebesgue definida sobre $\mathcal{F}$.

Definición 4.1.2. La familia $\mathcal{T}$ se dice R-acotada si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} r_j \otimes T_j x_j \Big\|_2 \leq M \Big\| \sum_{j=1}^{n} r_j \otimes x_j \Big\|_2, \tag{4.1.2.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$.

La noción de la R-acotación de familias de operadores se debe a Berkson y Gillespie [4], quienes la denominaron originalmente como la R-propiedad. También puede encontrarse implícita en el trabajo (anterior al de Berkson y Gillespie) de Bourgain [6]. En 2004, Hoffman, Kalton y Kucherenko [18, Lemma 2.4] prueban que la R-acotación de la familia $\mathcal{T}$ es equivalente a la de $\mathcal{T}^{**}$. A su vez dan aplicaciones de este resultado al estudio de semigrupos de operadores. Otros autores deducen implicaciones en los contextos del cálculo funcional (ver [21]) y de la teoría espectral de operadores en espacios biduales (ver [29] y [30]). La demostración dada en [18] se basa en propiedades del subespacio Rad$(X) \subseteq L_2([0,1], X)$, generado por funciones de la la forma $r_j \otimes x_j$ con $x_j \in X$ y $j \in \mathbb{N}$. En 2009, Pagter y Ricker dan una demostración alternativa (ver [31]), la cual expondremos aquí, que se basa en el Principio de Reflexividad Local. En la misma se hace uso del siguiente resultado, que puede encontrarse en [11, pág. 97-98]:

Teorema 4.1.3. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva finita. Entonces,*

$$L^2(\mu, Y^*) \overset{1}{\hookrightarrow} L^2(\mu, Y)^*$$

vía

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega \langle f(\omega), g(\omega) \rangle d\mu,$$

para cada $f \in L^2(\mu, Y)$, $g \in L^2(\mu, Y^*)$.

En el teorema anterior estamos diciendo de forma implícita que la función $h : \Omega \to \mathbb{K}$ tal que $h(\omega) = \langle f(\omega), g(\omega) \rangle$, es integrable con respecto a μ para cada $f \in L^2(\mu, Y)$, $g \in L^2(\mu, Y^*)$.

Teorema 4.1.4. *$\mathcal{T}$ es R-acotada si y solo si $\mathcal{T}^{**}$ es R-acotada.*

Demostración. Supongamos primero que $\mathcal{T}$ es R-acotada con $M \geq 0$ satisfaciendo la desigualdad 4.1.2.1 para todo $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$. Tomemos $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}$ y $x_1^{**}, \ldots, x_n^{**} \in X^{**}$. Sea $\mathcal{F}$ la σ-álgebra sobre $[0,1]$ generada por $r_1, \ldots, r_n$ (i.e., $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra generada por todos los subintervalos diádicos del $[0,1]$ de longitud $1/2^n$). Denotemos por μ a la medida de Lebesgue definida únicamente sobre $\mathcal{F}$. La función $\sum_{j=1}^n r_j \otimes T_j^{**} x_j^{**}$ es una función simple μ-medible y por lo tanto está en $L^2(\mu, X^{**})$. Por el Teorema 4.1.3 con $Y = X^*$, podemos calcular

$$\Big\| \sum_{j=1}^n r_j \otimes T_j^{**} x_j^{**} \Big\|_2 = \sup_{f \in B_{L^2(\mu, X^*)}} \Big| \Big\langle f, \sum_{j=1}^n r_j \otimes T_j^{**} x_j^{**} \Big\rangle \Big|.$$

Tomemos $f \in B_{L^2(\mu, X^*)}$. Por ser μ-medible, cada fibra (i.e, preimagen de un conjunto unitario) no vacía de f debe ser alguno de los finitos medibles en $\mathcal{F}$. Luego, la imagen de f es un conjunto finito. Definamos

$$E := [x_1^{**}, \ldots, x_n^{**}] \quad \text{y} \quad F := \big[T_j^* f(t) : 1 \leq j \leq n,\ t \in [0,1]\big].$$

$E \subseteq X^{**}$ y $F \subseteq X^*$ son ambos subespacios de dimensión finita. Por el Principio de Reflexividad Local, dado $\varepsilon > 0$, existe una ε-isometría $S : E \to X$ tal que $\langle Sx^{**}, x^* \rangle = \langle x^*, x^{**} \rangle$ para todo $x^{**} \in E,\ x^* \in F$. El operador S nos permite calcular

$$\langle f(t), T_j^{**} x_j^{**} \rangle = \langle T_j^* f(t), x_j^{**} \rangle = \langle S x_j^{**}, T_j^* f(t) \rangle = \langle T_j S x_j^{**}, f(t) \rangle,$$

para cada $t \in [0,1]$ y $1 \leq j \leq n$. Valiéndonos nuevamente del Teorema 4.1.3, ahora con $Y = X$, deducimos que

$$\Big\langle f, \sum_{j=1}^n r_j \otimes T_j^{**} x_j^{**} \Big\rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^n r_j \otimes T S x_j^{**}, f \Big\rangle.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\Big| \Big\langle f, \sum_{j=1}^n r_j \otimes T_j^{**} x_j^{**} \Big\rangle \Big| &\leq \Big\| \sum_{j=1}^n r_j \otimes T S x_j^{**} \Big\|_2 \|f\|_2 \\
&\leq M \Big\| \sum_{j=1}^n r_j \otimes S x_j^{**} \Big\|_2 \\
&= M \Big\| S\Big(\sum_{j=1}^n r_j \otimes x_j^{**} \Big) \Big\|_2 \\
&\leq M(1+\varepsilon) \Big\| \sum_{j=1}^n r_j \otimes x_j^{**} \Big\|_2 .
\end{aligned}$$

Como ε era arbitrario, concluimos que

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} r_j \otimes T_j^{**} x_j^{**}\Big\|_2 \leq M \Big\|\sum_{j=1}^{n} r_j \otimes x_j^{**}\Big\|_2. \qquad (4.1.4.1)$$

Por lo tanto, $\mathcal{T}^{**}$ es R-acotada.

Para la otra implicación, supongamos $\mathcal{T}^{**}$ R-acotada y sea $M \geq 0$ una constante que satisface la desigualdad 4.1.4.1 para todo $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}$, $x_1^{**}, \ldots, x_n^{**} \in X^{**}$. Tomemos $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{j=1}^{n} r_j \otimes T_j x_j\Big\|_2^2 &= \int_0^1 \Big\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) T_j x_j\Big\|^2 dt = \int_0^1 \Big\|J_X\Big(\sum_{j=1}^{n} r_j(t) T_j x_j\Big)\Big\|^2 dt \\
&= \int_0^1 \Big\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) J_X T_j x_j\Big\|^2 dt = \int_0^1 \Big\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) T_j^{**} \widehat{x_j}\Big\|^2 dt \\
&\leq M^2 \int_0^1 \Big\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) \widehat{x_j}\Big\|^2 dt = M^2 \int_0^1 \Big\|J_X\Big(\sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j\Big)\Big\|^2 dt \\
&= M^2 \int_0^1 \Big\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j\Big\|^2 dt = M^2 \Big\|\sum_{j=1}^{n} r_j \otimes x_j\Big\|_2^2.
\end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada concluimos que $\mathcal{T}$ es R-acotada. □

Remarquemos que en la demostración anterior también probamos que las constantes $M \geq 0$ que satisfacen las desigualdades 4.1.2.1 y 4.1.4.1 son las mismas. De hecho, si no nos hubiese interesado ver esto, habría bastado con tomar por ejemplo $\varepsilon = 1$ en lugar de $\varepsilon > 0$ arbitrario.

4.2. $\mathcal{L}_p$-espacios

Consideremos $1 \leq p \leq \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\ell_p^{(n)}$ al espacio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$.

Lindenstrauss y Pelczynski [25] introdujeron los $\mathcal{L}_p$-espacios como espacios de Banach cuya estructura local se asemeja a la de los espacios ℓ_p. Más formalmente:

Definiciones 4.2.1. Dado $\lambda \geq 1$, decimos que un espacio de Banach Z es un $\mathcal{L}_{p,\lambda}$-*espacio* si para todo subespacio de dimensión finita $H \subseteq Z$ existen $n \in \mathbb{N}$, un subespacio de dimensión finita $H \subseteq E \subseteq Z$ y un isomorfismo $T : E \to \ell_p^{(n)}$ tal que $\|T\|\|T^{-1}\| \leq \lambda$. A su vez, decimos que Z es un $\mathcal{L}_p$-*espacio* si es un $\mathcal{L}_{p,\lambda}$-espacio para algún $\lambda \geq 1$.

Algunos comentarios sobre las definiciones anteriores:

1. El número $\|T\|\|T^{-1}\|$ es lo que se conoce en el contexto del Análisis Numérico como el *número de condición* del operador T y se denota $\mathrm{Cond}(T)$. Este mide de alguna manera qué tan grande o tan chica puede llegar a ser la variación relativa en Tx de acuerdo a la variación relativa en x (suponiendo $x \neq 0$). Por lo tanto, la condición $\mathrm{Cond}(T) \leq \lambda$ garantiza cierto control sobre estas variaciones, independiente del subespacio H que elijamos.

2. Solo consideramos $\lambda \geq 1$ debido a que $1 = \|I_E\| = \|TT^{-1}\| \leq \|T\|\|T^{-1}\|$.

3. Para el lector familiarizado con la distancia de Banach-Mazur, la definición anterior puede formularse de forma equivalente en términos de esta.

4. Notemos que dados λ, H, E y T como en la definición y dado un isomorfismo $G : T(H) \to \ell_p^{(m)}$ (con $m = \dim T(H)$), $\mathrm{Cond}(G \circ T|_H^{T(H)})$ podría ser más grande que λ. Por lo tanto, la parte de "agrandar" el subespacio H a un subespacio E no puede omitirse en la definición sin perder el control sobre los números de condición.

Una de las razones por las que el estudio de estos espacios resulta de interés, es que los $\mathcal{L}_p$-espacios con $p = 1$ y $p = \infty$ tienen algunas propiedades deseables a la hora de considerar su producto tensorial normado con otros espacios. Remitimos al lector interesado a [34].

Al igual que en el capítulo anterior, supongamos que Y es un subespacio cerrado no trivial de Z y probemos el siguiente resultado:

Proposición 4.2.2. *Sea $\lambda \geq 1$. Si Y es un ideal casi isométrico en Z y Z es un $\mathcal{L}_{p,\lambda}$-espacio, entonces Y es un $\mathcal{L}_{p,\delta}$-espacio para todo $\delta > \lambda$.*

Demostración. Fijemos $\delta > \lambda$ y elijamos $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda(1+\varepsilon)^2 = \delta$. Sea $H \subseteq Y$ un subespacio de dimensión finita. Entonces H es un subespacio de dimensión finita del $\mathcal{L}_{p,\lambda}$-espacio Z. Debe existir entonces otro subespacio finito dimensional $H \subseteq E \subseteq Z$, un cierto $n \in \mathbb{N}$ y un isomorfismo $T : E \to \ell_p^{(n)}$ tal que $\|T\|\|T^{-1}\| \leq \lambda$. Tomemos una ε-isometría $P : E \to Y$ tal que $Py = y$ para todo $y \in E \cap Y$. En particular, $Ph = h$ para todo $h \in H$. Luego, $\tilde{E} := R(P) \supseteq H$ y es un subespacio de dimensión finita de Y. Definamos $\tilde{T} := T \circ (P|^{\tilde{E}})^{-1} : \tilde{E} \to \ell_p^{(n)}$. Se trata de un isomorfismo por ser una composición de isomorfismos. Además

$$\|\tilde{T}\|\|\tilde{T}^{-1}\| \leq \|T\|\|T^{-1}\|\|P|^{\tilde{E}}\|\|(P|^{\tilde{E}})^{-1}\| \leq \lambda(1+\varepsilon)^2 = \delta.$$

□

Corolario 4.2.3. *Si Y^{**} es un $\mathcal{L}_p$-espacio, entonces Y es un $\mathcal{L}_p$-espacio.*

Comentario 4.2.4. Puede probarse, de hecho, que Y^{**} es un $\mathcal{L}_p$-espacio si y solo si Y es un $\mathcal{L}_p$-espacio (ver [24]). No obstante, la otra implicación es mucho más difícil de demostrar.

4.3. Operadores aproximables

Consideremos un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Definición 4.3.1. T se dice *aproximable* si es el límite uniforme de una sucesión de operadores de X en Y de rango finito.

Por ejemplo, si Y es un espacio de Hilbert o un espacio con base de Schauder y T es un operador compacto, entonces T es aproximable. Recordemos a su vez que todo operador aproximable es, necesariamente, compacto.

Proposición 4.3.2. *Sea V un espacio de Banach. Si T es aproximable y $S \in \mathcal{L}(V, X)$, entonces TS es aproximable.*

Demostración. Sea $(T_n) \subseteq \mathcal{F}(X, Y)$ una sucesión de operadores de rango finito que tiende uniformemente a T. Entonces, $(T_n S)$ es una sucesión de operadores de rango finito que tiende uniformemente a TS. $\square$

Apoyándonos en el Principio de Reflexividad Local podemos probar la siguiente proposición:

Proposición 4.3.3. *T es aproximable si y solo si T^* es aproximable.*

Demostración. Comencemos por la implicación más sencilla. Si T es aproximable, existe una sucesión $(T_n) \subseteq \mathcal{F}(X, Y)$ tal que $\|T - T_n\| \to 0$. Entonces, $(T_n^*) \subseteq \mathcal{F}(Y^*, X^*)$ y $\|T^* - T_n^*\| = \|(T - T_n)^*\| = \|T - T_n\| \to 0$.

Supongamos ahora que T^* es aproximable. Sea $\varepsilon > 0$. Basta ver que existe un operador de rango finito cuya distancia a T es menor a ε. Por lo que ya probamos, T^{**} también es aproximable. Luego, la Proposición 4.3.2 nos dice que $J_Y T = T^{**} J_X$ es aproximable. Elijamos $\delta > 0$ tal que $\delta(5 + 4\delta) < \varepsilon$ y sea $S \in \mathcal{F}(X, Y^{**})$ tal que $\|J_Y T - S\| < \delta$. Es decir, $\|\widehat{Tx} - Sx\| < \delta$ para todo $x \in B_X$.

Siendo T^* aproximable, en particular es compacto. En consecuencia, T también lo es (ver Apéndice). Podemos elegir entonces $\{Tx_1, \dots, Tx_n\}$ δ-red para el conjunto $T(B_X)$. Sea E el subespacio de Y^{**} de dimensión finita generado por $\{\widehat{Tx_1}, \dots, \widehat{Tx_n}\} \cup R(S)$. Por el Principio de Reflexividad Local existe una δ-isometría $P : E \to Y$ tal que $P\widehat{y} = y$ si $\widehat{y} \in E \cap J_Y(Y)$. Es claro que el operador $PS|^E$ es de rango finito. Veamos que aproxima bien a T. Tomemos $x \in B_X$ e $1 \leq i \leq n$ tal que $\|Tx - Tx_i\| < \delta$. Como $\widehat{Tx_i} \in E \cap J_Y(Y)$, vale $P\widehat{Tx_i} = Tx_i$. Luego,

$$Tx - PS|^E x = (Tx - Tx_i) + (P\widehat{Tx_i} - PSx_i) + (PSx_i - PSx).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|Tx - PS|^E x\| &\leq \|Tx - Tx_i\| + \|P\|\|\widehat{Tx_i} - Sx_i\| + \|P\|\|Sx_i - Sx\| \\
&\leq \delta + (1+\delta)\delta + (1+\delta)\big(\|Sx_i - \widehat{Tx_i}\| + \|\widehat{Tx_i} - \widehat{Tx}\| + \|\widehat{Tx} - Sx\|\big) \\
&\leq \delta + (1+\delta)\delta + (1+\delta)(\delta + \delta + \delta) \\
&= \delta(5 + 4\delta) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

4.4. Normas tensoriales

En el primer capítulo definimos la norma epsilon sobre el producto tensorial $X \otimes Y$ y comentamos que es una de las más importantes normas que pueden definirse sobre este espacio. En esta sección veremos cuáles son en general las propiedades deseables en una norma definida sobre un producto tensorial, junto con algunas consecuencias de estas propiedades y de lo estudiado en los capítulos anteriores.

Definiciones 4.4.1. 1. Una *norma cruz razonable* sobre $X \otimes Y$ es una norma $\alpha_{X,Y}$ sobre $X \otimes Y$ que satisface:

(i) $\alpha_{X,Y}(x \otimes y) \leq \|x\|\|y\|$ para todo $x \in X,\ y \in Y$.

(ii) Para cada $x^* \in X^*$ e $y^* \in Y^*$, si denotamos por $x^* \otimes y^*$ a la linealización de la bilineal $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ tal que $B(x,y) = x^*(x)y^*(y)$, entonces $\|x^* \otimes y^*\| \leq \|x^*\|\|y^*\|$.

2. Una *norma cruz uniforme* α es una asignación a cada par de espacios de Banach X e Y de una norma cruz razonable sobre $X \otimes Y$, $\alpha_{X,Y}$, con la *"metric mapping property"*:

   Si $T \in \mathcal{L}(X_1, Y_1)$ y $S \in \mathcal{L}(X_2, Y_2)$ son operadores continuos entre espacios de Banach, y si denotamos por $T \otimes S$ al único operador $T \otimes S : (X_1 \otimes X_2, \alpha_{X_1,X_2}) \to (Y_1 \otimes Y_2, \alpha_{Y_1,Y_2})$ tal que $(T \otimes S)(x_1 \otimes x_2) = Tx_1 \otimes Tx_2$ (el lector puede chequear la existencia y unicidad del mismo), entonces $\|T \otimes S\| \leq \|T\|\|S\|$.

Mantendremos en esta sección las notaciones utilizadas en las definiciones anteriores. Cabe aclarar que estamos introduciendo aquí nuevos abusos de notación.

También adoptaremos la notación $X \otimes_\alpha Y := (X \otimes Y, \alpha_{X,Y})$, para α norma cruz uniforme.

Es fácil ver que si α es una norma cruz uniforme y si M y N son subespacios de X e Y respectivamente, entonces $M \otimes N$ es un subespacio algebraico de $X \otimes Y$ de manera natural y $\alpha_{X,Y}(u) \leq \alpha_{M,N}(u)$ para todo $u \in M \otimes N$, como consecuencia de la "metric mapping property" aplicada al producto tensorial de las inclusiones. En general, esta desigualdad puede ser estricta. En otras palabras, $M \otimes_\alpha N$ no suele ser un subespacio normado de $X \otimes_\alpha Y$.

Definiciones 4.4.2. Decimos que una norma cruz uniforme α está *finitamente generada* si cada par de espacios de Banach $X,\ Y$ y cada $u \in X \otimes Y$ vale que

$$\alpha_{X,Y}(u) = \text{ínf}\{\alpha_{M,N}(u) : M \subseteq X,\ N \subseteq Y \text{ subespacios de dimensión finita y } u \in M \otimes N\}.$$

En tal caso, decimos que α es una *norma tensorial.*

La norma epsilon del primer capítulo (pensada como asignación de una norma para cada par de espacios de Banach) es una norma tensorial (ver [34]).

Veamos ahora que el producto tensorial normado respeta subespacios cuando estos son ideales casi isométricos y, en particular, respeta la inclusión de un subespacio en su bidual.

Proposición 4.4.3. *Sean W, X, Y y Z espacios de Banach tales que X es un ideal casi isométrico en W e Y es un ideal casi isométrico en Z. Sea α una norma tensorial. Entonces, $X \otimes_\alpha Y$ es un subespacio normado de $W \otimes_\alpha Z$.*

Demostración. Sea $u \in X \otimes Y$. Como ya mencionamos, la desigualdad $\alpha_{W,Z}(u) \leq \alpha_{X,Y}(u)$ vale siempre, por el simple hecho de ser X e Y subespacios de W y Z respectivamente. Para probar la otra desigualdad consideremos $\varepsilon > 0$ y fijemos una escritura de u como suma de tensores elementales en $X \otimes Y$, $u = \sum_{j=1}^k x_j \otimes y_j$. Como α está finitamente generada, existen subespacios de dimensión finita M, N de W, Z respectivamente, tales que

$$\alpha_{M,N}(u) \leq \alpha_{W,Z}(u) + \varepsilon.$$

Ahora bien, el valor de $\alpha_{M,N}(u)$ no se incrementa si M y N son "agrandados". Podemos asumir entonces, sin pérdida de generalidad, que $x_1, \ldots, x_k \in M$ e $y_1, \ldots, y_k \in N$. Siendo X e Y ideales casi isométricos, existen E, F subespacios de dimensión finita de X, Y respectivamente y ε-isometrías suryectivas $S : M \to E$, $T : N \to F$ tales $Sx_j = x_j$ y $Ty_j = y_j$ para todo j (estamos considerando simplemente a las proyecciones locales usuales correstringidas a sus respectivos rangos). En consecuencia $(S \otimes T)u = u$ y por ende

$$\begin{aligned} \alpha_{X,Y}(u) &\leq \alpha_{E,F}(u) = \alpha_{E,F}((S \otimes T)u) \\ &\leq \|S\|\|T\|\alpha_{M,N}(u) \leq (1+\varepsilon)^2\big(\alpha_{W,Z}(u) + \varepsilon\big) \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, concluimos que $\alpha_{X,Y}(u) \leq \alpha_{W,Z}(u)$. □

Recordemos que como consecuencia del PRL todo espacio de Banach es un ideal casi isométrico en su bidual. Esto deviene en el siguiente caso particular notable de la proposición anterior:

Corolario 4.4.4. *Si α es una norma tensorial, entonces $X \otimes_\alpha Y$ es un subespacio normado de $X^{**} \otimes_\alpha Y^{**}$.*

Para nuestra siguiente y última aplicación, dada una forma bilineal acotada B sobre $X \times Y$, denotaremos por $\widetilde{B}$ a su linealización: $\widetilde{B} : X \otimes Y \to \mathbb{K}$. Podemos definir los operadores $T_B \in \mathcal{L}(X, Y^*)$ y $S_B \in \mathcal{L}(Y, X^*)$ según:

$$\langle y, T_B x\rangle = B(x,y) \quad \text{ y } \quad \langle x, S_B y\rangle = B(x,y)$$

para cada $x \in X$, $y \in Y$. A partir de estos operadores quedan definidas dos extensiones bilineales "naturales" de B a $X^{**} \times Y^{**}$:

Definiciones 4.4.5. 1. Llamamos *extensión canónica izquierda* de B a

$$^*B : X^{**} \times Y^{**} \to \mathbb{K} \quad \text{tal que} \quad {}^*B(x^{**}, y^{**}) = \langle T_B^* y^{**}, x^{**} \rangle.$$

2. Llamamos *extensión canónica derecha* de B a

$$B^* : X^{**} \times Y^{**} \to \mathbb{K} \quad \text{tal que} \quad B^*(x^{**}, y^{**}) = \langle S_B^* x^{**}, y^{**} \rangle.$$

Para el siguiente teorema consideremos una norma tensorial α y a los espacios $X \otimes Y$ y $X^{**} \otimes Y^{**}$ dotados de las correspondientes normas $\alpha_{X,Y}$ y $\alpha_{X^{**},Y^{**}}$.

Teorema 4.4.6. *Si $B : X \times Y \to \mathbb{K}$ es una forma bilineal acotada, entonces:*

$$\widetilde{B} \in (X \otimes_\alpha Y)^* \iff \widetilde{{}^*B} \in (X^{**} \otimes_\alpha Y^{**})^* \iff \widetilde{B^*} \in (X^{**} \otimes_\alpha Y^{**})^*.$$

Más aún,

$$\big\|\widetilde{{}^*B}\big\| = \big\|\widetilde{B^*}\big\| = \big\|\widetilde{B}\big\|.$$

Demostración. Demostraremos únicamente la igualdad $\big\|\widetilde{B}\big\| = \big\|\widetilde{{}^*B}\big\|$. De forma análoga se prueba $\big\|\widetilde{B}\big\| = \big\|\widetilde{B^*}\big\|$.

Veamos primero que $\big\|\widetilde{B}\big\| \leq \big\|\widetilde{{}^*B}\big\|$. Sea $u \in X \otimes_\alpha Y$, $u = \sum_{j=1}^k x_j \otimes y_j$. Luego, $(J_X \otimes J_Y)u = \sum_{j=1}^k \widehat{x_j} \otimes \widehat{y_j}$. Calculemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{{}^*B}((J_X \otimes J_Y)u) &= \widetilde{{}^*B}\Big(\sum_{j=1}^k \widehat{x_j} \otimes \widehat{y_j}\Big) = \sum_{j=1}^k \langle T_B^* \widehat{y_j}, \widehat{x_j} \rangle = \sum_{j=1}^k \langle x_j, T_B^* \widehat{y_j} \rangle \\
&= \sum_{j=1}^k \langle T_B x_j, \widehat{y_j} \rangle = \sum_{j=1}^k \langle y_j, T_B x_j \rangle = \widetilde{B}(u).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\big|\widetilde{B}(u)\big| \leq \big\|\widetilde{{}^*B}\big\| \|J_X\| \|J_Y\| \alpha_{X,Y}(u) = \big\|\widetilde{{}^*B}\big\| \alpha_{X,Y}(u)$$

y por lo tanto, $\big\|\widetilde{B}\big\| \leq \big\|\widetilde{{}^*B}\big\|$.

Para la otra desigualdad tomemos $u \in X^{**} \otimes_\alpha Y^{**}$, $u = \sum_{j=1}^k x_j^{**} \otimes y_j^{**}$, y $\varepsilon > 0$. Entonces,

$$\widetilde{{}^*B}(u) = \sum_{j=1}^k \langle T_B^* y_j^{**}, x_j^{**} \rangle.$$

Por estar α finitamente generada, sabemos que existen subespacios finito dimensionales $M \subseteq X^{**}$ y $N \subseteq Y^{**}$ tales que $\alpha_{M,N}(u) \leq \alpha_{X^{**},Y^{**}}(u) + \varepsilon$. Sean $E_1 := [x_1^{**}, \ldots, x_k^{**}] + M \subseteq X^{**}$ y $F_1 := [T_B^* y_1^{**}, \ldots, T_B^* y_k^{**}] \subseteq X^*$. Por el Principio de Reflexividad Local aplicado a

X^{**}, E_1, F_1 y ε, existe un subespacio $H_1 \subseteq X$ de dimensión finita y una ε-isometría $P : E_1 \to H_1$ tal que

$$\langle Px_j^{**}, T_B^* y_j^{**} \rangle = \langle T_B^* y_j^{**}, x_j^{**} \rangle \qquad \text{para todo } j.$$

Resulta entonces que

$$\widetilde{{}^*B}(u) = \sum_{j=1}^{k} \langle Px_j^{**}, T_B^* y_j^{**} \rangle = \sum_{j=1}^{k} \langle T_B P x_j^{**}, y_j^{**} \rangle.$$

Ahora, definiendo $E_2 := [y_1^{**}, \ldots, y_k^{**}] + N \subseteq Y^{**}$, $F_2 := [T_B P x_1^{**}, \ldots, T_B P x_k^{**}] \subseteq Y^*$ y aplicando el Principio de Reflexividad Local a Y^{**}, E_2, F_2 y ε, conseguimos un subespacio de dimensión finita $H_2 \subseteq Y$ y una ε-isometría $R : E_2 \to H_2$ tal que

$$\langle R y_j^{**}, T_B P x_j^{**} \rangle = \langle T_B P x_j^{**}, y_j^{**} \rangle \qquad \text{para todo } j.$$

Resulta entonces que

$$\widetilde{{}^*B}(u) = \sum_{j=1}^{k} \langle R y_j^{**}, T_B P x_j^{**} \rangle = \sum_{j=1}^{k} \langle T_B^* R y_j^{**}, P x_j^{**} \rangle = \widetilde{B}((P \otimes R)u).$$

Esto nos permite acotar

$$\left|\widetilde{{}^*B}(u)\right| \le \left\|\widetilde{B}\right\| \|P\| \|R\| \alpha_{E_1,E_2}(u) \le \left\|\widetilde{B}\right\| (1+\varepsilon)^2 \alpha_{M,N}(u) \le \left\|\widetilde{B}\right\| (1+\varepsilon)^2 (\alpha_{X^{**},Y^{**}}(u) + \varepsilon).$$

Y como $\varepsilon > 0$ y $u \in X^{**} \otimes_\alpha Y^{**}$ eran arbitrarios, debe ser $\left\|\widetilde{{}^*B}\right\| \le \left\|\widetilde{B}\right\|$. $\square$

Apéndice A

Algunos resultados

Enunciamos aquí algunos conocidos resultados del Análisis Funcional y de la Topología general, que se usan a lo largo de este trabajo. Las notaciones y terminología utilizadas son estándar y pueden encontrarse en la primera sección del Capítulo 1: "Primeras notaciones, terminología y convenciones".

Teorema A.1 (Teorema de Goldstine)**.** $\overline{J_X(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$.

Teorema A.2 (Teorema de Banach-Alaoglu)**.** *B_{X^*} es w^*-compacta.*

Teorema A.3. *Si V es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión finita, existe una única topología en V que lo convierte en un espacio vectorial topológico.*

Teorema A.4. $(X^*, w^*)^* = J_X(X)$.

Proposición A.5. $J_X^* J_{X^*} = I_{X^*}$.

Teorema A.6 (Teorema de Tychonoff)**.** *Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos compactos, entonces $\prod_{i\in I} X_i$ con la topología producto es compacto.*

Teorema A.7. *Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces $\overline{R(T^*)}^{w^*} = \ker T^{\perp}$.*

Teorema A.8. *Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces*

$$T \text{ es compacto} \iff T^* \text{ es compacto.}$$

Teorema A.9 (Corolario de la versión más general del Teorema de Hahn-Banach)**.** *Si Y es un subespacio de Z e $y^* \in Y^*$, entonces existe $\widetilde{y^*} \in Z^*$ extensión de y^*, tal que $\|\widetilde{y^*}\| = \|y^*\|$.*

Bibliografía

[1] T.A. Abrahamsen, V. Lima y O. Nygaard, *Almost isometric ideals in Banach Spaces*, Glasgow Math. Journal **56** (2014), 395-407.

[2] F. Albiak y N. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Springer, New York, 2006.

[3] E. Behrends, *A generalization of the principle of local reflexivity*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **31** (1986), 293-296.

[4] E. Berkson y T.A. Gillespie, *Spectral decompositions and harmonic analysis in UMD spaces*, Studia Math. **112** (1994), 13-49.

[5] S.J. Bernau, *A unified approach to the principle of local reflexivity*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **31** (1986), 293-296.

[6] J. Bourgain, *Some remarks on Banach spaces in which martingale differences are unconditional*, Ark. Mat. **21** (1983), 163-168.

[7] P.G. Casazza, *Approximation properties*, In: W.B. Johnson and J. Lindenstrauss (eds.), Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Volume 1, 271-316, Elsevier, 2001.

[8] J.M.F. Castillo, R. García, A. Defant, D. Pérez-García y J. Suárez, *Local complementation and the extension of bilinear mappings*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **152** (2012), 153-166.

[9] D.W. Dean, *The equation* $L(E, X^{**}) = L(E, X)^{**}$ *and the principle of local reflexivity*, Proc. Amer. Math. Soc. **40** (1973), 146-148.

[10] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[11] J. Diestel y J.J. Uhl, *Vector Measures*, Mathematical Surveys 15. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977.

[12] N. Dunford y J.T. Schwartz, *Linear Operators. Part 1: General Theory*, Wiley, New York, 1958.

[13] H. Fakhoury, *Sélections linéaires associées au théorème de Hahn-Banach*, J. Funct. Anal. **11** (1972), 436-452.

[14] M. Fernández-Unzueta y A. Prieto, *Extension of polynomials defined on subspaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **148** (2010), 505-518.

[15] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).

[16] G. Godefroy, N.J. Kalton y P.D. Saphar, *Unconditional ideals in Banach spaces*, Studia Math. **104** (1993), 13-59.

[17] P. Harmand, D. Werner y W. Werner, *M-ideals in Banach Spaces and Banach Algebras*, Lecture notes in Math., vol. 1547, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1993.

[18] M. Hoffmann, N.J. Kalton y Kucherenko, *R-bounded approximating sequences and applications to semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **294** (2004), 373-386.

[19] W.B. Johnson, H.P. Rosenthal y M. Zippin,*On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces*, Israel J. Math. **9** (1971), 488-506.

[20] N.J. Kalton, *Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces for* $0 < p < 1$, Math.Nachr. **115** (1984), 71-97.

[21] C. Kriegler y C. Le Merdy, *Tensor extension properties of $C(K)$-representations and applications to unconditionality*, J. of the Austr. Math. Soc. **88** (2010), 205-230.

[22] A. Martínez-Abejón, *An elementary proof of the principle of local reflexivity*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1397-1398.

[23] J. Lindenstrauss, *Extension of compact operators*, Mem. Amer. Math. Soc. **48** (1964).

[24] J. Lindenstrauss y H.P. Rosenthal, *The $\mathcal{L}_p$ spaces*, Israel J. Math. Soc. **7** (1969), 325-349.

[25] J. Lindenstrauss y A. Pelczynsky, *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}$-spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 275-326.

[26] E. Oja, *Geometry of Banach spaces having shrinking approximations of the identity*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 2801-2823.

[27] E. Oja, *Operators that are nuclear whenever they are nuclear for a larger range space*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **47** (2004), 679-694.

[28] E. Oja y M. Põldvere, *Principle of local reflexivity revisited*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1081-1088.

[29] B. de Pagter y W.J. Ricker, *R-boundedness of $C(K)$-representations group homomorphisms, and Banach space geometry*, Proc. Conf. "Positivity IV-Theory & Applications", Julio de 2005, Tech. Univ. Dresden, Eds: J. Voigt, M. Weber (2006), 115-129.

[30] B. de Pagter y W.J. Ricker, *$C(K)$-representations and R-boundedness*, J. London Math. Soc. (Ser. II), **76** (2007), 498-512.

[31] B. de Pagter y W.J. Ricker, *A Note on R-boundedness in Bidual Spaces*, Operator Theory: Adv. and Applic. **201** (2009), 323-325.

[32] R.S. Phillips, *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 516-541.

[33] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1991.

[34] R.A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer, London-Berlin-Heidelberg, 2002.

[35] Ch. Stegall, *A proof of the principle of local reflexivity*, Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1980), 154-156.