



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Algunos problemas de optimización de forma

Antonella Ritorto

Director: Julián Fernández Bonder

Marzo, 2014

Índice general

Resumen	v
1. Introducción	1
2. Preliminares	4
2.1. Espacios de Sobolev	4
2.2. El problema de Dirichlet	13
2.3. Problema con obstáculo	22
3. Operadores lineales y formas cuadráticas	29
3.1. Operadores lineales	29
3.2. Formas cuadráticas	32
4. Caracterización de $H_0^1(\Omega)$	37
4.1. Capacidad y quasi-abiertos	37
4.2. Caracterización de $H_0^1(\Omega)$	40
5. Γ-convergencia	44
5.1. Γ -convergencia	44
5.2. γ -convergencia I	48
5.3. El espacio de medidas capacitarias	53
5.4. γ -convergencia II	57
6. Diseño óptimo I	70
6.1. Enunciado y ejemplo	70
6.2. Demostraciones	71

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	iii
7. Diseño óptimo II	85
7.1. Un resultado de compacidad para dominios	85
7.1.1. Resultados de compacidad	87
7.1.2. Resultados de vanishing	88
7.1.3. Resultados de dicotomía	90
7.2. Aplicación a diseño óptimo	96

Estudio de problemas de optimización de forma

(Resumen)

Un problema de optimización de forma se trata, en general, de un problema de minimización

$$\text{mín}\{F(A) : A \in \mathcal{A}\} \quad (0.0.1)$$

donde F es un función de costo y \mathcal{A} es una clase de dominios admisibles.

En esta tesis, estudiaremos la existencia de solución al problema de minimización cuando el funcional de costo F se calcula a partir de la solución de una *ecuación de estado*, es decir, una cierta ecuación en derivadas parciales en el dominio A y la clase de dominios admisibles \mathcal{A} es el conjunto

$$\mathcal{A}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega, A \text{ cuasi-abierto}, |A| = c\},$$

donde Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^n , y, luego,

$$\mathcal{A} = \{A : A \subset \mathbb{R}^n, A \text{ cuasi-abierto}, |A| \leq c\},$$

donde $c > 0$ es una constante.

Palabras Claves: Optimización de forma, espacios de Sobolev, cuasi-abiertos.

Capítulo 1

Introducción

Para resolver un problema de optimización de forma

$$\text{mín}\{F(A): A \in \mathcal{A}\} \quad (1.0.1)$$

donde F es un funcional de costo y \mathcal{A} es una clase de dominios admisibles, podemos intentar usar el *método directo*. Si $\text{ínf}\{F(A): A \in \mathcal{A}\} > -\infty$, tomo una sucesión minimizante $(A_h)_h$ en \mathcal{A} . En el caso de tener un resultado de compacidad en la clase de dominios admisibles, podemos decir que existe una subsucesión $(A_{h_k})_k$ de $(A_h)_h$, (que sigue siendo una sucesión minimizante para el problema) y un conjunto $A \in \mathcal{A}$ tal que $(A_{h_k})_k$ converge a A en *algún sentido*. Si la función F es continua con respecto a este sentido de convergencia en \mathcal{A} , resulta

$$F(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} F(A_{h_k}) = \text{ínf}_{\mathcal{A}} F.$$

Por lo tanto, A alcanza el mínimo de F en \mathcal{A} . Notemos que, como se trata de resolver un problema de minimización, alcanza con que F sea semicontinua inferior para *ese* sentido de convergencia en \mathcal{A} . En tal caso,

$$F(A) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} F(A_{h_k}) = \text{ínf}_{\mathcal{A}} F,$$

y se concluye de igual manera. Veremos más adelante, que *ese* sentido de convergencia es la γ -convergencia.

Definiremos la clase de conjuntos *cuasi-abiertos* de \mathbb{R}^n . En el Capítulo 7, estudiaremos la resolución (con la idea del método directo), del problema

$$\text{mín} \left\{ \Phi(\lambda_1(A), \lambda_2(A)): A \subset \mathbb{R}^n, A \text{ cuasi-abierto}, |A| \leq c \right\}$$

donde $c > 0$ es una constante, Φ es semicontinua inferior y creciente en cada variable, y $\lambda_k(A)$ denota el k -ésimo autovalor del operador Laplace en $H_0^1(A)$. Veremos que existe al menos una solución. Este resultado se debe al trabajo de Dorin Bucur [4].

Utilizando otras ideas, resolveremos también el siguiente problema de optimización de forma

$$\text{mín} \{F(A) : A \subset \Omega, A \text{ cuasi-abierto}, |A| = c\}$$

donde Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^n , el funcional F es semicontinua inferior para la γ -convergencia de conjuntos, F es monótona decreciente con respecto a la inclusión de conjuntos y c es una constante $0 < c < |\Omega|$. Probaremos que existe al menos una solución. Este resultado se debe al trabajo de Buttazzo y Dal Maso [6].

A continuación, describimos brevemente el contenido de cada capítulo.

En el Capítulo 2, estudiamos algunas propiedades funcionales de los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, Ω un abierto acotado. El problema de Dirichlet en conjuntos abiertos $A \subset \Omega$, sus propiedades de linealidad y continuidad. Por último, la existencia y unicidad de solución en ciertos problemas de obstáculo. Estos resultados nos serán útiles en el Capítulo 6, para resolver el problema de optimización de forma en el caso acotado.

En el Capítulo 3, estudiamos operadores lineales definidos en un espacio de Hilbert y formas cuadráticas. Estos temas nos serán útiles para probar un lema muy importante sobre diseño óptimo. La bibliografía que utilizamos fue el libro de Kinderlehrer y Stampacchia [16].

En el Capítulo 4, estudiamos algunos resultados del libro de Henrot y Pierre [15] sobre capacidad, cuasi-abiertos, cuasi-continuidad. Damos una caracterización para el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, que motiva la definición de $H_0^1(A)$ para A un cuasi-abierto acotado de \mathbb{R}^n .

En el Capítulo 5, estudiamos propiedades básicas de la Γ -convergencia, teniendo como referencia los libros de Andrea Braides [2] y Gianni Dal Maso [8]. Definimos la γ -convergencia de una sucesión de conjuntos cuasi-abiertos contenidos en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y damos una caracterización variacional y otra, en términos de operadores resolventes. Más adelante, vemos que la γ -convergencia de conjuntos cuasi-abiertos es un caso particular de la γ -convergencia de medidas borelianas, no negativas, que pueden tomar el valor $+\infty$ y que se anulan en todos los conjuntos de capacidad cero. Un resultado importante es la relación que existe entre el γ -límite de una sucesión de cuasi-abiertos de medida uniformemente acotada $(A_h)_h$ y el límite en $L^2(\mathbb{R}^n)$ (si existe), de la sucesión $(w_{A_h})_h$, donde $w_{A_h} \in H_0^1(A_h)$ y $-\Delta w_{A_h} = 1$ en A_h . Utilizamos como bibliografía, principalmente, los trabajos de Dal Maso y Mosco [9] y Bucur [4].

En el Capítulo 6, resolvemos el problema

$$\text{mín} \{F(A) : A \subset \Omega, A \text{ cuasi-abierto}, |A| = c\}$$

donde Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^n , el funcional F es semicontinua inferior para la γ -convergencia de conjuntos, F es monótona decreciente con respecto a la inclusión de conjuntos, c es una constante $0 < c < |\Omega|$.

En el Capítulo 7, damos una idea de la resolución del problema

$$\text{mín} \{ \Phi(\lambda_1(A), \lambda_2(A)) : A \subset \mathbb{R}^n, A \text{ cuasi-abierto}, |A| \leq c \}$$

donde $c > 0$ es una constante, Φ es semicontinua inferior y creciente en cada variable, y $\lambda_k(A)$ denota el k -ésimo autovalor del operador Laplace en $H_0^1(A)$.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Espacios de Sobolev

A lo largo de esta tesis, utilizaremos la siguiente notación: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ será un abierto acotado y $C_c^\infty(\Omega)$, es el conjunto de todas las funciones $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω .

Definición 2.1.1. Sean u, v en $L_{loc}^1(\Omega)$. Decimos que v es la derivada débil de u respecto a x_i si

$$\int_{\Omega} u \partial_{x_i} \phi dx = - \int_{\Omega} v \phi dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Observación 2.1.2. Si existe una derivada débil de u respecto a x_i , entonces es única.

Demostración. Si v y $w \in L_{loc}^1(\Omega)$ satisfacen

$$\int_{\Omega} u \partial_{x_i} \phi dx = - \int_{\Omega} v \phi dx = - \int_{\Omega} w \phi dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces,

$$\int_{\Omega} (v - w) \phi dx = 0$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Luego, $v - w = 0$ c.t.p. (casi todo punto respecto de la medida de Lebesgue) de Ω . \square

Notamos $v = \partial_{x_i} u$ (o bien, u_{x_i} o $\partial_i u$) a la única derivada débil de u respecto de x_i .

Definición 2.1.3. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \partial_i u \in L^p(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (2.1.1)$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, notamos $\nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_n u)$ al gradiente de u en el sentido débil.

El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}$$

o también de la norma equivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

con la que trabajaremos a lo largo de esta tesis.

Observación 2.1.4. Cuando $p = 2$, notamos $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, que es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)}$$

con la norma asociada

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Definición 2.1.5. Sea E un espacio de Banach. Definimos el espacio dual de E como

$$E^* = \{\varphi : E \rightarrow \mathbb{R} / \varphi \text{ es lineal y continua}\}.$$

Dada $\varphi \in E^*$ notamos $\langle \varphi, x \rangle_{E^*, E} = \varphi(x)$ para cada $x \in E$.

Definición 2.1.6. Sea E un espacio de Banach. Decimos que E es *reflexivo* si $J(E) = E^{**}$, donde $J : E \rightarrow E^{**}$ es la inyección canónica, $J(x)(\varphi) = \varphi(x)$ para toda $\varphi \in E^*$, que también notamos

$$\langle Jx, \varphi \rangle_{E^{**}, E^*} = \langle \varphi, x \rangle_{E^*, E}.$$

Proposición 2.1.7. El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración. Es claro que es un espacio normado.

Veamos que es completo. Sea $(u_h)_h$ una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$. Luego, $(u_h)_h, (\partial_1 u_h)_h, (\partial_2 u_h)_h, \dots, (\partial_n u_h)_h$ son sucesiones de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Como

$L^p(\Omega)$ es completo para $1 \leq p \leq \infty$, existen funciones $u, g_1, g_2, \dots, g_n \in L^p(\Omega)$ tales que

$$\|u_h - u\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0, \|\partial_i u_h - g_i\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Para concluir la demostración, basta ver que para cada i, g_i es la derivada débil de u respecto de x_i . Fijo un i en $\{1, 2, \dots, n\}$. Tomo una $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Como cada $u_h \in W^{1,p}(\Omega)$, sabemos que

$$\int_{\Omega} u_h \partial_i \phi dx = - \int_{\Omega} \partial_i u_h \phi dx.$$

Pasando al límite de $h \rightarrow +\infty$, resulta

$$\int_{\Omega} u \partial_i \phi dx = - \int_{\Omega} g_i \phi dx.$$

Por lo tanto, existen las derivadas débiles de u de orden 1 y $\partial_i u = g_i \in L^p(\Omega)$. Así, obtenemos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Luego, la sucesión $(u_h)_h$ es convergente en $W^{1,p}(\Omega)$. \square

Proposición 2.1.8. *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Demostración. Sea $E = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)^n$. Considero el operador $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow E$, $T(u) = (u, \nabla u)$. Tenemos que T es una isometría de $W^{1,p}(\Omega)$ en E , por lo tanto, $T(W^{1,p}(\Omega))$ es un subespacio cerrado de E . Como $L^p(\Omega)$ es reflexivo si $1 < p < \infty$, E también es reflexivo para $1 < p < \infty$. Como $T(W^{1,p}(\Omega))$ es un subespacio cerrado de E y E es reflexivo, $T(W^{1,p}(\Omega))$ es reflexivo y por lo tanto, $W^{1,p}(\Omega)$ lo es. \square

Proposición 2.1.9. *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio separable para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. La prueba es totalmente análoga a la anterior. \square

Corolario 2.1.10. *El espacio $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable.*

$$\text{Definimos } H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Observación 2.1.11. El espacio $H_0^1(\Omega)$ es Hilbert y separable. Pues, es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ y éste es un espacio de Hilbert separable.

Observación 2.1.12. Sea $u \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$. Entonces,

$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega \Leftrightarrow u \in H_0^1(\Omega).$$

Se puede ver una demostración en [13, Sección 5.5, Teorema 2].

Observación 2.1.13. Sea $A \subset \Omega$ un abierto. Entonces, $H_0^1(A) \subset H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Pues si $u \in H_0^1(A)$, tomo $v = \begin{cases} u & \text{en } A \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus A \end{cases}$. Luego, $v \in H_0^1(\Omega)$ y $u = v$ c.t.p. de Ω . \square

Definimos el espacio $H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)^*$, el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$. En otras palabras, $f \in H^{-1}(\Omega)$ si $f: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal y continua.

Notaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ al par dual entre $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$.

El espacio $H^{-1}(\Omega)$ está dotado de la norma

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup \left\{ \langle f, u \rangle_{H^{-1}, H_0^1} : u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

Teorema 2.1.14 (Caracterización de $H^{-1}(\Omega)$).

(i) Sea $f \in H^{-1}(\Omega)$. Entonces, existen funciones f^0, f^1, \dots, f^n en $L^2(\Omega)$ tales que

$$\langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_{\Omega} f^0 v dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f^i \partial_i v dx \quad (2.1.2)$$

para $v \in H_0^1(\Omega)$. En tal caso, notaremos $f = f^0 - \sum_{i=1}^n \partial_i f^i$.

(ii) Además,

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf \left\{ \left(\int_{\Omega} \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx \right)^{1/2} : f \text{ satisface (2.1.2) para } f^0, \dots, f^n \right\}.$$

Demostración.

Para $u, v \in H_0^1(\Omega)$, tomamos el producto en $H_0^1(\Omega)$

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx.$$

Sea $f \in H^{-1}(\Omega)$. Por el teorema de representación de Riesz, existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \quad (2.1.3)$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

- Veamos (i).

Tomando

$$\begin{cases} f^0 = u \\ f^i = \partial_i u \text{ para } i = 1, \dots, n. \end{cases},$$

vale (2.1.2).

• Veamos (ii).

Sean funciones g^0, \dots, g^n en $L^2(\Omega)$ tales que

$$\langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_{\Omega} g^0 v dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} g^i \partial_i v dx,$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. En particular, para la u que obtuvimos aplicando el teorema de representación de Riesz,

$$\langle f, u \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_{\Omega} g^0 u dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} g^i \partial_i u dx.$$

Usando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g^0 u dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} g^i \partial_i u dx &\leq \|g^0\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|g^i\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \sum_{i=0}^n \|g^i\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, tomando $v = u$ en (2.1.3), tenemos que

$$\langle f, u \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Entonces,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \sum_{i=0}^n \|g^i\|_{L^2(\Omega)},$$

simplificando,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sum_{i=0}^n \|g^i\|_{L^2(\Omega)}.$$

Entonces,

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \sum_{i=0}^n \int_{\Omega} |g^i|^2 dx.$$

Como $f^0 = u$, $f^i = \partial_i u$ para $i = 1, \dots, n$ por (i), tenemos que

$$\int_{\Omega} \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx \leq \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n |g^i|^2 dx.$$

Ahora, por (2.1.2), tenemos que

$$\left| \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \right| = \left| \int_{\Omega} f^0 v dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f^i \partial_i v dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx \right)^{1/2},$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$. Entonces,

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \left(\int_{\Omega} \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\Omega} \sum_{i=0}^n |g^i|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Tomando ínfimo, tenemos que

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \inf \left\{ \left(\int_{\Omega} \sum_{i=0}^n |g^i|^2 dx \right)^{1/2} : f \text{ satisface (2.1.2) para } g^0, \dots, g^n \right\}.$$

Veamos que vale la igualdad. Considero $v = \frac{u}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}}$ en (2.1.3),

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla \frac{u}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} dx + \int_{\Omega} u \frac{u}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} dx \\ &= \langle f, \frac{u}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Como

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \langle f, u \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx,$$

resulta

$$\left(\int_{\Omega} \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx \right)^{1/2} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

por lo tanto, vale la igualdad de (ii). \square

Definición 2.1.15. Sean E y F espacios de Banach. Decimos que E está compactamente contenido en F si para toda sucesión acotada en E existe una subsucesión convergente en F . En tal caso, notamos $E \subset\subset F$.

Teorema 2.1.16 (Rellich-Kondrachov). *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.*

Sea $(u_h)_h \subset H^1(D)$ una sucesión acotada. Entonces, existe una subsucesión $(u_{h_k})_k$ de $(u_h)_h$ y una $u \in H^1(D)$ tal que $u_{h_k} \rightarrow u$ en $L_{loc}^2(\Omega)$ y $u_{h_k} \rightarrow u$ c.t.p. de D .

Si además, D es acotado, $H_0^1(D) \subset\subset L^2(D)$.

Observemos que el teorema de Rellich-Kondrachov también se puede enunciar de la siguiente manera:

Teorema 2.1.17. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.*

La inclusión $i: H^1(D) \hookrightarrow L^2_{loc}(D)$ es compacta.

Si además, D es acotado, $i: H^1(D) \hookrightarrow L^2(D)$ es compacta.

Se puede ver una demostración en [13, Sección 5.7, Teorema 1]. Allí, se requiere que el borde de D sea de clase C^1 , para poder extender una función $u \in H^1(D)$ a todo \mathbb{R}^n . Nosotros usaremos este resultado para $H^1_0(D)$, (y no $H^1(D)$), con lo cual no necesitamos ninguna hipótesis de regularidad sobre el borde de D , porque una función $u \in H^1_0(D)$ se extiende a \mathbb{R}^n por cero, trivialmente.

Corolario 2.1.18. *Sea A un abierto de \mathbb{R}^n tal que $|A| < \infty$. Entonces, la inclusión $H^1(A) \hookrightarrow L^2(A)$ es compacta.*

Demostración. Sea $(u_h)_h$ una sucesión acotada en $H^1(A)$. En particular, es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$, digamos $\|u_h\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq M$. Entonces, existe una subsucesión $(u_{h_k})_k$ y una función $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_{h_k})_k$ converge a u débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y fuerte en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Luego, $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_k \|u_{h_k}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq M$ y $u \in H^1(A)$.

Dado $\epsilon > 0$, existe un compacto $K_\epsilon \subset A$ tal que $|A \setminus K_\epsilon| < \epsilon$. Entonces, usando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \int_A |u_{h_k} - u|^2 dx &= \int_{A \setminus K_\epsilon} |u_{h_k} - u|^2 dx + \int_{K_\epsilon} |u_{h_k} - u|^2 dx \\ &\leq |A \setminus K_\epsilon| \|u_{h_k} - u\|_{L^2(A \setminus K_\epsilon)}^2 + \int_{K_\epsilon} |u_{h_k} - u|^2 dx \\ &\leq |A \setminus K_\epsilon| \left(\|u_{h_k}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \right) + \int_{K_\epsilon} |u_{h_k} - u|^2 dx \\ &\leq 2M\epsilon + \int_{K_\epsilon} |u_{h_k} - u|^2 dx \end{aligned}$$

Como K_ϵ es compacto y, por Rellich-Kondrachov, $(u_{h_k})_k$ converge a u en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $\lim_k \int_{K_\epsilon} |u_{h_k} - u|^2 dx = 0$, para cada $\epsilon > 0$. Luego, tomando límite de ϵ a 0, resulta que $(u_{h_k})_k$ converge a u en $L^2(A)$. \square

El siguiente lema, nos da una condición suficiente para decidir si una función u en $H^1(\mathbb{R}^n)$, pertenece a $H^1_0(\Omega)$.

Lema 2.1.19. *Sean $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $w \in H^1_0(\Omega)$ tales que $0 \leq |v| \leq w$ c.t.p. de Ω . Entonces, $v \in H^1_0(\Omega)$.*

Demostración. Sabemos que $v = v^+ - v^-$, con $v^+ \geq 0$ y $v^- \geq 0$.

Veamos que $v^+ \in H_0^1(\Omega)$.

Como $w \geq 0$, existen $w_h \in C_c^\infty(\Omega)$, $w_h \geq 0$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tales que $w_h \rightarrow w$ en $H_0^1(\Omega)$. Considero $\varphi_h = \min\{w_h, v^+\} = w_h \wedge v^+$. Tenemos que el soporte de φ_h está contenido en el soporte de w_h y $\varphi \geq 0$, para toda $h \in \mathbb{N}$. Además, como tomar mínimo es una aplicación continua en $H^1(\Omega)$ y $w_h \rightarrow w$ en $H_0^1(\Omega)$, resulta que $v_h \rightarrow w \wedge v^+$ en $H^1(\Omega)$. Con un argumento standar de regularización, suavizo las funciones φ_h y las noto ϕ_h . Entonces, tenemos que $\phi_h \in C_c^\infty(\Omega)$, $\phi_h \geq 0$ y $\phi_h \rightarrow v^+$ en $H^1(\Omega)$. Luego, como $C_c^\infty(\Omega)^+$ es denso en $H_0^1(\Omega)^+$, resulta $v^+ \in H_0^1(\Omega)^+$.

Análogamente, construyo una funciones $\psi_h \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi_h \rightarrow v^-$ en $H_0^1(\Omega)$. Luego, $v^- \in H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto, $v \in H_0^1(\Omega)$. \square

Proposición 2.1.20. *Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ una función continua tal que $u(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Entonces, $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demostración. Podemos suponer $u \geq 0$. Pues, $u = u^+ - u^-$ con $u^+, u^- \geq 0$.

Sea $\epsilon > 0$. Considero $v_\epsilon = (u - \epsilon)^+$. Tenemos que v_ϵ tiene soporte compacto en Ω y $v_\epsilon \rightarrow u$ en $H^1(\Omega)$, cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Ahora, v_ϵ no necesariamente es una función diferenciable. Pero, convolucionando con una sucesión regularizante $(\rho_h)_h$, tenemos que $z_{h,\epsilon} = \rho_h * v_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ y $(z_{h,\epsilon})_h$ converge a v_ϵ en $H^1(\Omega)$, cuando $h \rightarrow +\infty$. Luego, por un argumento diagonal, existe una subsucesión $(\epsilon_h)_h$ tal que $(z_{h,\epsilon_h})_h$ converge a u en $H^1(\Omega)$, con $z_{h,\epsilon_h} \in C_c^\infty(\Omega)$. Por lo tanto, $u \in H_0^1(\Omega)$. \square

Proposición 2.1.21 (Desigualdad de Poincaré). *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto tal que $D \subset [-a, a] \times \mathbb{R}^{n-1}$. Entonces, existe una constante $c > 0$ que sólo depende de D tal que*

$$\int_D |u|^2 dx \leq c \int_D |\nabla u|^2 dx,$$

para toda $u \in H_0^1(D)$.

Demostración. Sea $u \in C_c^\infty(D)$. Podemos escribir

$$u(x) = \int_{-a}^a \partial_1 u(t, \bar{x}) dt,$$

donde $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)$. Usando la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$|u(x)|^2 \leq 2a \int_{-a}^a |\partial_1 u(t, \bar{x})|^2 dt \leq 2a \int_{-a}^a |\nabla u(t, \bar{x})|^2 dt.$$

Integrando sobre D y usando Fubini, resulta

$$\int_D |u(x)|^2 dx \leq 2a \int_D \int_{-a}^a |\nabla u(t, \bar{x})|^2 dt dx = 4a^2 \int_D |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Considero $c = 4a^2$. Entonces, vale

$$\int_D |u|^2 dx \leq c \int_D |\nabla u|^2 dx,$$

para toda $u \in C_c^\infty(D)$. Como $C_c^\infty(D)$ es denso en $H_0^1(D)$, la desigualdad vale para toda $u \in H_0^1(D)$. \square

Proposición 2.1.22 (Desigualdad de Poincaré para abiertos de medida finita). *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto tal que $|A| < \infty$. Entonces, existe una constante $c > 0$ que sólo depende de A tal que*

$$\int_A |u|^2 dx \leq c \int_A |\nabla u|^2 dx,$$

para toda $u \in H_0^1(A)$.

Demostración. Supongamos que no vale. Entonces, para cada $h \in \mathbb{N}$, existe $u_h \in H_0^1(A)$ tal que

$$\int_A |u_h|^2 dx > h \int_A |\nabla u_h|^2 dx.$$

Considero las funciones $v_h = u_h / \|u_h\|_{L^2(A)}$. Entonces, $\|v_h\|_{L^2(A)} = 1 \forall h \in \mathbb{N}$ y

$$\int_A |\nabla v_h|^2 dx = \frac{1}{\|u_h\|_{L^2(A)}^2} \int_A |\nabla u_h|^2 dx < \frac{1}{h} \leq 1.$$

Por lo tanto, $(v_h)_h$ es acotada en $H^1(A)$. Entonces, por 2.1.18, existe una subsucesión de $(v_h)_h$ (que seguimos notando con h) y una función $v \in H^1(A)$ tal que $(v_h)_h$ converge a v en $L^2(A)$. Como

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_A |\nabla v_h|^2 dx \leq \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{1}{h} = 0,$$

v es una función constante. Por otro lado, como $v_h \in H_0^1(A)$, $v = 0$. Contradicción. Pues, como $(v_h)_h$ converge a v en $L^2(A)$, en particular, $(\|v_h\|_{L^2(A)})_h$ converge a $\|v\|_{L^2(A)}$. Pero, $\|v_h\|_{L^2(A)} = 1$ y $\|v\|_{L^2(A)} = 0$. \square

2.2. El problema de Dirichlet

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sean $f \in H^{-1}(\Omega)$ y $A \subset \Omega$ abierto. Tenemos el siguiente problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } A, \\ u \in H_0^1(A). \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Decimos que $u \in H^1(\Omega)$ es una *solución débil* del problema de Dirichlet (2.2.1) si

$$\begin{cases} u \in H_0^1(A) \\ \int_A \nabla u \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \text{ para toda } v \in H_0^1(A) \end{cases},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$ es el producto dual.

Notaremos u_A^f a la solución débil de (2.2.1).

La notación tiene sentido gracias a la siguiente proposición que afirma que existe solución de (2.2.1) y es única.

Proposición 2.2.1. *Sea $A \subset \Omega$ un abierto. Sea $f \in H^{-1}(\Omega)$. Entonces, existe una única solución en el sentido débil de (2.2.1).*

Más aún, u_A^f es la única solución del siguiente problema de minimización:

$$\min_{v \in H_0^1(A)} \{J(v)\} \text{ donde } J(v) = \frac{1}{2} \int_A |\nabla v|^2 dx - \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Demostración.

(1) Veamos que ser solución débil de (2.2.1) es equivalente a ser solución del problema de minimización de J sobre $H_0^1(A)$.

• Sea $u = u_A^f$. Sea $v \in H_0^1(A)$. Como $u - v \in H_0^1(A)$, puedo considerarla como función test en la formulación débil de $-\Delta u = f$ en A . Entonces,

$$\int_A \nabla u \nabla (u - v) dx = \langle f, u - v \rangle,$$

es decir,

$$\int_A |\nabla u|^2 dx - \int_A \nabla u \nabla v dx = \langle f, u \rangle - \langle f, v \rangle.$$

Por lo tanto,

$$J(u) + \frac{1}{2} \int_A |\nabla u|^2 dx - \int_A \nabla u \nabla v dx + \frac{1}{2} \int_A |\nabla v|^2 dx = \frac{1}{2} \int_A |\nabla v|^2 dx - \langle f, v \rangle = J(v).$$

Es decir,

$$J(u) \leq J(u) + \int_A |\nabla(u-v)|^2 dx + J(v).$$

Luego, $J(u) \leq J(v)$, para toda $v \in H_0^1(A)$. Por lo tanto, u es un punto mínimo de J .

• Supongamos ahora que $u \in H_0^1(A)$ es la única solución del problema de minimización de J sobre $H_0^1(A)$. Veamos que $u = u_A^f$. Basta ver que $-\Delta u = f$ en A , en el sentido débil.

Sean $v \in H_0^1(A)$ y $t \in \mathbb{R}$. Entonces, $u + tv \in H_0^1(A)$. Luego, como u es mínimo de J , tenemos que $J(u) \leq J(u + tv)$. Es decir,

$$\frac{1}{2} \int_A |\nabla u|^2 dx - \langle f, u \rangle \leq \frac{1}{2} \int_A |\nabla(u + tv)|^2 dx - \langle f, u + tv \rangle.$$

Desarrollando y simplificando tenemos que

$$\int_A \nabla u \nabla v dx - \langle f, v \rangle + \frac{t}{2} \int_A |\nabla v|^2 dx \geq 0, \quad \forall t > 0,$$

$$\int_A \nabla u \nabla v dx - \langle f, v \rangle + \frac{t}{2} \int_A |\nabla v|^2 dx \leq 0, \quad \forall t < 0.$$

Tomando límite en t (a cero), resulta

$$\int_A \nabla u \nabla v dx = \langle f, v \rangle,$$

para todo $v \in H_0^1(A)$. Por lo tanto, $u = u_A^f$.

(2) Veamos que el problema de minimización de J en $H_0^1(A)$ tiene solución y es única.

Existencia.

Obsevemos que $\inf_{v \in H_0^1(A)} \{J(v)\}$ es finito. Pues, como $f \in H^{-1}(\Omega)$, es continua en

$H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto, existe una constante $c > 0$ tal que

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \langle f, v \rangle \geq \frac{1}{2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - c \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Usando la desigualdad $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, para a, b reales positivos, con $a = c$ y $b = \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$, tenemos que

$$\begin{aligned} J(v) &\geq \frac{1}{2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - c \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} c^2 \\ &\geq -\frac{1}{2} c^2 > -\infty. \end{aligned}$$

Sea $(u_h)_h$ una sucesión minimizante. Es decir, $u_h \in H_0^1(A)$ y $(J(u_h))_h$ tiende al $\inf_{H_0^1(A)} J =: \lambda \in \mathbb{R}$. De la desigualdad anterior, podemos concluir que $(u_h)_h$ es acotada en $H_0^1(A)$. Pues, si no, existe una subsucesión, que seguimos notando u_h tal que $\|u_h\|_{H_0^1(A)}$ tiende a $+\infty$. Pero, $J(u_h) \geq \frac{1}{2}\|u_h\|_{H_0^1(A)}^2 - c\|u_h\|_{H_0^1(A)}$. Pasando al límite, resulta $\lambda \geq +\infty$, lo que es absurdo. Luego, la sucesión $(u_h)_h$ está acotada en $H_0^1(A)$. Entonces, existe una subsucesión, que seguimos notando con h , y una u tal que $(u_h)_h$ tiende débil a u en $H_0^1(A)$.

Veamos que u es el mínimo buscado. Sabemos que $(u_h)_h$ tiende débil a u en $H_0^1(A)$. Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \langle f, u_h \rangle = \langle f, u \rangle.$$

Además, la convergencia débil nos dice que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \|u_h\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Entonces,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_h|^2 dx$$

Luego,

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \langle f, u \rangle \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_h|^2 dx - \langle f, u_h \rangle \right) = \liminf_{h \rightarrow +\infty} J(u_h) = \lambda$$

Por lo tanto, $J(u) = \min_{v \in H_0^1(A)} \{J(v)\}$.

Unicidad.

La unicidad de u es una consecuencia de que el funcional J es estrictamente convexo. Si $v \in H_0^1(A)$ también es mínimo y $v \neq u$, $\frac{u+v}{2} \in H_0^1(A)$. Luego, $J(\frac{u+v}{2}) < \frac{1}{2}J(u) + \frac{1}{2}J(v)$. Como u es mínimo, $J(u) \leq J(v)$. Como v es mínimo, $J(\frac{u+v}{2}) \geq J(v)$. Así, la desigualdad $J(\frac{u+v}{2}) < \frac{1}{2}J(u) + \frac{1}{2}J(v)$, nos queda $J(\frac{u+v}{2}) < J(\frac{u+v}{2})$, lo cual es absurdo.

□

Observación 2.2.2. Si $f \in L^2(\Omega)$, $\langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = (f, v)_{L^2(\Omega)}$.

Utilizaremos la siguiente convención $u_0^f = 0$ para toda $f \in H^{-1}(\Omega)$.

A continuación, veremos un criterio de comparación entre dos soluciones del problema de Dirichlet. Previamente, necesitamos una definición.

Definición 2.2.3. Sea $h \in H^{-1}(\Omega)$. Decimos que $h \geq 0$ si $\langle h, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \geq 0$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$.

Sean f y $g \in H^{-1}(\Omega)$. Decimos que $f \leq g$ si $g - f \geq 0$.

Proposición 2.2.4 (Principio de comparación del problema de Dirichlet).

(i) Sea $A \subset \Omega$ un abierto. Sean f y $g \in H^{-1}(\Omega)$ tales que $f \leq g$. Entonces, $u_A^f \leq u_A^g$ c.t.p. de A .

(ii) Sea $f \in H^{-1}(\Omega)$, $f \geq 0$. Sean A_1 y A_2 subconjuntos abiertos de Ω tales que $A_1 \subset A_2$. Entonces, $u_{A_1}^f \leq u_{A_2}^f$ c.t.p. de Ω .

Demostración. Para demostrar (i) alcanza con ver que si $h \in H^{-1}(\Omega)$, $h \leq 0$, entonces $u_A^h \leq 0$. Pues, $u_A^{f-g} = u_A^f - u_A^g$, por linealidad de $-\Delta$.

Sea $h \in H^{-1}(\Omega)$ tal que $h \leq 0$. Quiero ver que $u_A^h \leq 0$. Llamo $u := u_A^h$.

Veamos que $u^+ = 0$. Sabemos que

$$\int_A \nabla u \nabla v dx = \langle h, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

para toda $v \in H_0^1(A)$. En particular,

$$\int_A \nabla u \nabla u^+ dx = \langle h, u^+ \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Como $h \leq 0$ y $u^+ \geq 0$, tenemos que $\langle h, u^+ \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \leq 0$. Entonces,

$$0 \leq \int_A |\nabla u^+|^2 dx = \int_A \nabla u \nabla u^+ dx = \langle h, u^+ \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \leq 0.$$

Por lo tanto, $u^+ = 0$ c.t.p. de A . Luego, $u = u_A^h \leq 0$, como queríamos probar.

Para probar (ii), notemos $u_i = u_{A_i}^f$ para $i = 1, 2$.

Sabemos que

$$\int_{A_1} \nabla u_1 \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \text{ para toda } v \in H_0^1(A_1)$$

$$\int_{A_2} \nabla u_2 \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \text{ para toda } v \in H_0^1(A_2)$$

Como $A_1 \subset A_2$, $H_0^1(A_1) \subset H_0^1(A_2)$. Entonces, para toda $v \in H_0^1(A_1)$

$$\int_{A_1} \nabla u_2 \nabla v dx = \int_{A_2} \nabla u_2 \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Restando adecuadamente, tenemos que

$$\int_{A_1} \nabla (u_1 - u_2) \nabla v dx = 0 \text{ para toda } v \in H_0^1(A_1).$$

Si $(u_1 - u_2)^+ \in H_0^1(A_1)$, entonces podemos tomarla como función test y nos queda

$$\int_{A_1} \nabla(u_1 - u_2) \nabla(u_1 - u_2)^+ dx = \int_{A_1} |\nabla(u_1 - u_2)^+|^2 dx = 0 \Rightarrow (u_1 - u_2)^+ = 0.$$

Concluyendo que $u_1 \leq u_2$. Por lo tanto, basta ver que $(u_1 - u_2)^+ \in H_0^1(A_1)$. Como $f \geq 0$, por la parte (i) tenemos que $u_2 = u_{A_2}^f \geq 0$. Entonces, $(u_1 - u_2)^+ \leq u_1^+$. Como además, $u_1^+ \in H_0^1(A_1)$, por el lema 2.1.19, resulta $(u_1 - u_2)^+ \in H_0^1(A_1)$, como queríamos ver. \square

Proposición 2.2.5 (Continuidad del problema de Dirichlet). *Existe una constante $c > 0$ que sólo depende de Ω tal que*

$$\|u_A^f\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

para todo abierto $A \subset \Omega$.

Demostración. Sea A un abierto contenido en Ω . Llamemos $u = u_A^f$. Sabemos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_A \nabla u \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \text{ para toda } v \in H_0^1(A).$$

En particular, tomando $v = u$, tenemos que

$$k \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \int_A |\nabla u|^2 dx = \langle f, u \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

donde la primera desigualdad se debe a la desigualdad de Poincaré y la segunda a que $f \in H^{-1}(\Omega)$ y la definición de $\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega)}$. Por lo tanto, si $c = \frac{1}{k}$, nos queda

$$\|u_A^f\|_{H_0^1(A)} \leq c \|f\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

como queríamos probar. \square

Corolario 2.2.6. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de abiertos contenidos en Ω . Entonces, existe una subsucesión $(u_{A_{h_k}}^f)_k$ de $(u_{A_h}^f)_h$ y una $u^* \in H_0^1(\Omega)$ tal que $(u_{A_{h_k}}^f)_k$ converge a u^* débil en $H_0^1(\Omega)$ y fuerte en $L^2(\Omega)$.*

Demostración. Por la proposición anterior, sabemos que

$$\|u_{A_h}^f\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \text{ para todo } h \in \mathbb{N}.$$

Luego, la sucesión $(u_{A_h}^f)_h$ es acotada en $H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto, existe una subsucesión que converge débil en $H_0^1(\Omega)$ y, por el teorema de Rellich-Kondrachov, fuerte en $L^2(\Omega)$. \square

Proposición 2.2.7. Sean $(A_h)_h$ y A abiertos contenidos en Ω tales que $(u_{A_h}^f)_h$ converga a u_A^f débil en $H_0^1(\Omega)$ y fuerte en $L^2(\Omega)$. Entonces, $(u_{A_h}^f)_h$ converge a u_A^f fuerte en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Como $(u_{A_h}^f)_h$ converge a u_A^f débil en $H_0^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, basta ver que las normas convergen, es decir, que $(\|u_{A_h}^f\|_{H_0^1(\Omega)})_h$ converge a $\|u_A^f\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Usando $u_{A_h}^f$ como función test en la formulación débil de $-\Delta u_{A_h}^f = f$ en A_h , tenemos que

$$\|u_{A_h}^f\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u_{A_h}^f|^2 dx = \int_{A_h} |\nabla u_{A_h}^f|^2 dx = \langle f, u_{A_h}^f \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Como $(u_{A_h}^f)_h$ converge a u_A^f débil en $H_0^1(\Omega)$, resulta $\langle f, u_{A_h}^f \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ converge a $\langle f, u_A^f \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$. Por otro lado, tomando u_A^f como función test en la formulación débil de $-\Delta u_A^f = f$ en A , resulta que $\langle f, u_A^f \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_A |\nabla u_A^f|^2 dx = \|u_A^f\|_{H_0^1(\Omega)}^2$. Concluimos que las normas convergen, luego, $(u_{A_h}^f)_h$ converge a u_A^f fuerte en $H_0^1(\Omega)$. \square

Lema 2.2.8. Sea $A \subset \Omega$ un abierto, no vacío. Entonces, $u_A^1 > 0$ en A .

Demostración. Sean $x_0 \in A$ y $r > 0$ tal que $B := B_r(x_0) \subset A$. Veamos que $u_A^1 > 0$ en la bola B . Luego, como la bola es arbitraria, $u_A^1 > 0$ en A .

Tomemos $w \in H_0^1(\Omega)$ solución de

$$\begin{cases} -\Delta w = 1 & \text{en } B, \\ w = 0 & \text{en } \partial B. \end{cases}$$

Se sabe que $w(x) = \frac{1}{2n}(r^2 - |x - x_0|^2)$. Como $B \subset A$, por principio de comparación del problema de Dirichlet, tenemos que $w = u_B^1 \leq u_A^1$. Como $w > 0$ en B , resulta $u_A^1 > 0$ en B , como queríamos ver. \square

Lema 2.2.9. El espacio $L^\infty(\Omega)$ es denso en $H^{-1}(\Omega)$.

Demostración. Sea $f \in H^{-1}(\Omega)$. Sea ρ el núcleo regularizante standar. Defino para cada $x \in \Omega$

$$f_\epsilon(x) = \langle f, \rho_\epsilon(\cdot - x) \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

Entonces, $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$. Veamos que f_ϵ es acotada.

$$|f_\epsilon(x)| \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\rho_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c,$$

donde c es una constante independiente de x . Luego, $f_\epsilon \in L^\infty(\Omega)$.

Veamos ahora que $(f_\epsilon)_\epsilon$ converge a f en $H^{-1}(\Omega)$. Queremos ver que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \langle f_\epsilon - f, u \rangle = 0$$

Para cada $h \in \mathbb{N}$, por definición de supremo, existe una función $u_h \in H_0^1(\Omega)$, con $\|u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$ y tal que

$$\sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \langle f_\epsilon - f, u \rangle - \frac{1}{h} \leq \langle f_\epsilon - f, u_h \rangle.$$

Como las funciones de soporte compacto en Ω son densas en $H_0^1(\Omega)$ y $u_h \in H_0^1(\Omega)$, podemos asumir que $\text{sop } u_h \subset \Omega$ es compacto. Por lo tanto, $u_h * \rho_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$.

Se puede ver que

$$\langle f - f_\epsilon, u_h \rangle = \langle f, u_h - u_h * \rho_\epsilon \rangle.$$

Para demostrar la igualdad anterior, basta ver que

$$\langle f_\epsilon, u \rangle = \langle f, u * \rho_\epsilon \rangle$$

para toda $u \in H_0^1(\Omega)$. Supongamos que $f \in L^2(\Omega)$ (para $f \in H^{-1}(\Omega)$ es similar). Entonces, en esta cuenta, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$. Luego,

$$f_\epsilon(x) = \int_{\Omega} f(y) \rho_\epsilon(y - x) dy.$$

Por lo tanto, usando Fubini y el hecho de que $\rho(y - x) = \rho(x - y)$, resulta

$$\begin{aligned} (f_\epsilon, u)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} f_\epsilon(x) u(x) dx = \int_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} f(y) \rho_\epsilon(y - x) dy \right\} u(x) dx \\ &= \int_{\Omega} f(y) \left\{ \int_{\Omega} \rho_\epsilon(x - y) u(x) dx \right\} dy = (f, u * \rho_\epsilon)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

como queríamos ver.

Además, tenemos que

$$\langle f, u_h - u_h * \rho_\epsilon \rangle \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_h - u_h * \rho_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Por otro lado, para cada h fijo, $\|u_h - u_h * \rho_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)}$ tiende a cero, cuando ϵ tiende a

0^+ . Entonces, tomando límite en ϵ , tenemos que

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \langle f_\epsilon - f, u \rangle - \frac{1}{h} \right\} &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \langle f, u_h - u_h * \rho_\epsilon \rangle - \frac{1}{h} \right\} \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_h - u_h * \rho_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)} - \frac{1}{h} \right\} \\ &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ 0 - \frac{1}{h} \right\} = -\frac{1}{h} \leq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \langle f_\epsilon - f, u \rangle - \frac{1}{h} \right\} \leq 0, \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

Luego,

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \langle f_\epsilon - f, u \rangle = 0$$

Concluyendo que $L^\infty(\Omega)$ es denso en $H^{-1}(\Omega)$. \square

Teorema 2.2.10 (Independencia de f). Sean $(A_h)_h$, A abiertos contenidos en Ω . Si $(u_{A_h}^1)_h$ converge a u_A^1 fuerte en $L^2(\Omega)$, entonces $(u_{A_h}^f)_h$ converge a u_A^f fuerte en $H_0^1(\Omega)$, para toda $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Demostración. Fijo $f \in H^{-1}(\Omega)$. Para facilitar la notación, llamo

$$u_h^f := u_{A_h}^f \text{ para cada } h \in \mathbb{N} \text{ y } u^f := u_A^f,$$

$$u_h^1 := u_{A_h}^1 \text{ para cada } h \in \mathbb{N} \text{ y } u^1 := u_A^1.$$

Observemos que si $M > 0$, $u^M = Mu^1$.

• Si $f \in L^\infty(\Omega)$, existe una constante $M > 0$ tal que $-M \leq f \leq M$ c.t.p. de Ω . Entonces, por el principio de comparación, tenemos que

$$-Mu_h^1 \leq u_h^f \leq Mu_h^1.$$

Por el corolario 2.2.6, existe una subsucesión, que seguimos notando con h , y una $u^* \in H_0^1(\Omega)$ tal que $(u_h^f)_h$ converge a u^* débil en $H_0^1(\Omega)$ y fuerte en $L^2(\Omega)$. Entonces, como además, por hipótesis, $(u_h^1)_h$ converge a u_A^1 fuerte en $L^2(\Omega)$, tomando límite cuando $h \rightarrow +\infty$ en la desigualdad anterior, resulta

$$-Mu^1 \leq u^* \leq Mu^1.$$

Luego, $0 \leq |u^*| \leq Mu^1$ y $Mu^1 \in H_0^1(A)$. Entonces, por el lema 2.1.19, $u^* \in H_0^1(A)$.

Veamos que u^* es solución de $-\Delta u^* = f$ en A .

Sea $\varphi \in C_c^\infty(A)$, $\varphi \geq 0$. Como $u^1 > 0$ en A , por el lema 2.2.8, existe $t > 0$ tal que $\varphi \leq tu^1$, por ejemplo, $t = \|\varphi\|_\infty / \min_{\text{sop } \varphi} u^1$. Considero las siguientes funciones $\varphi_h := \inf\{\varphi, tu_h^1\} = \varphi \wedge tu_h^1 \in H_0^1(A_h)$.

Por el corolario 2.2.6, existe alguna función $u \in H_0^1(\Omega)$ que es límite débil de $(u_h^1)_h$. Pero, sabemos que u^1 es límite fuerte en $L^2(\Omega)$. Luego, $u = u^1$ y $(u_h^1)_h$ converge a u^1 débil en $H_0^1(\Omega)$. Por la proposición 2.2.7, resulta $(u_h^1)_h$ converge a u^1 fuerte en $H_0^1(\Omega)$.

Ahora, tomar ínfimo es una aplicación continua en $H_0^1(\Omega)$, entonces $(\varphi_h)_h$ converge a $\varphi \vee tu^1 = \varphi$ fuerte en $H_0^1(\Omega)$.

Notemos que podemos suponer que las funciones $\varphi_h \in C_c^\infty(A_h)$. Pues, sino, usamos un argemento standar de regularización.

Entonces, tomando φ_h como función test en la formulación débil de $-\Delta u_h^f = f$ en A_h ,

$$\int_{A_h} \nabla u_h^f \nabla \varphi_h dx = \langle f, \varphi_h \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Como $(u_h^f)_h$ converge a u^* débil en $H_0^1(\Omega)$ y $(\varphi_h)_h$ converge a φ fuerte en $H_0^1(\Omega)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_h^f \nabla \varphi_h dx &\longrightarrow \int_{\Omega} \nabla u^* \nabla \varphi dx, \\ \langle f, \varphi_h \rangle_{H^{-1}, H_0^1} &\longrightarrow \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \end{aligned}$$

cuando $h \rightarrow +\infty$, obteniendo la siguiente igualdad

$$\int_{\Omega} \nabla u^* \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1},$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(A)$. Luego, por un argumento de densidad, esta igualdad vale para toda $v \in H_0^1(A)$. Por lo tanto, $-\Delta u^* = f$ en A .

Vimos que, si $f \in L^\infty(\Omega)$, $u^* = u_A^f$.

• Si $f \notin L^\infty(\Omega)$, como $f \in H^{-1}(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}$ (ver 2.2.9), existe una sucesión $(f_k)_k$ en $L^\infty(\Omega)$ que converge a f en $H^{-1}(\Omega)$.

Por continuidad del problema de Dirichlet, existe una constante $c > 0$ tal que $\|u_B^g\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}$ para todo abierto $B \subset \Omega$, para toda $g \in H^{-1}(\Omega)$.

Sea $\epsilon > 0$.

Como $(f_k)_k$ converge a f en $H^{-1}(\Omega)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_k\|_{H^{-1}(\Omega)} < \frac{\epsilon}{4c}$, para todo $k \geq k_0$. Como $f_{k_0} \in L^\infty(\Omega)$, por la primera parte de la demostración, tenemos que $(u_h^{f_{k_0}})_h$ converge a $u^{f_{k_0}}$ fuerte en $H_0^1(\Omega)$. Para el ϵ dado, existe un $h_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_{h_0}^{f_{k_0}} - u^{f_{k_0}}\|_{H_0^1(\Omega)} < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $h \geq h_0$.

Entonces, si $h \geq h_0$,

$$\begin{aligned} \|u_h^f - u^f\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \|u_h^f - u_h^{f_{k_0}}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_h^{f_{k_0}} - u^{f_{k_0}}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u^{f_{k_0}} - u^f\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \|u_h^{f-f_{k_0}}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_h^{f_{k_0}} - u^{f_{k_0}}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u^{f_{k_0}} - u^f\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq c\|f - f_{k_0}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u_h^{f_{k_0}} - u^{f_{k_0}}\|_{H_0^1(\Omega)} + c\|f - f_{k_0}\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &< 2c\frac{\epsilon}{4c} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(u_h^f)_h$ converge a u^f fuerte en $H_0^1(\Omega)$. \square

2.3. Problema con obstáculo

Sea H un espacio de Hilbert real y $\|\cdot\|$, su norma.

Definición 2.3.1. Decimos que $B: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ es una *forma bilineal* si

$$B(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w),$$

$$B(w, u + \lambda v) = B(w, u) + \lambda B(w, v),$$

para todo $u, v, w \in H$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 2.3.2. Sea $A: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación. Decimos que A es *continua* si existe una constante $c > 0$ tal que

$$|A(u, v)| \leq c\|u\|\|v\|$$

para toda $u, v \in H$.

Definición 2.3.3. Sea $A: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación. Decimos que A es *coerciva* si existe una constante $k > 0$ tal que

$$A(u, u) \geq k\|u\|^2$$

para toda $u \in H$.

Enunciamos un teorema que necesitaremos en el capítulo de diseño óptimo:

Teorema 2.3.4 (Stampacchia). *Sea H un espacio de Hilbert. $A: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva. Sea E un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de H . Dada $\varphi \in H^*$, en el espacio dual de H , existe una única $u \in H$ tal que*

$$A(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle \text{ para toda } v \in E.$$

Si además A es simétrica, entonces u se caracteriza por la propiedad

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in E \\ \frac{1}{2}A(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in E} \left\{ \frac{1}{2}A(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\} \end{array} \right.$$

Demostraremos el teorema para el caso particular de $H = H_0^1(\Omega)$,

$$A(z, \eta) = \int_{\Omega} \nabla z \nabla \eta dx,$$

$$\varphi \in H_0^1(\Omega)^*, \langle \varphi, \eta \rangle = \int_{\Omega} \eta dx$$

y $E \subset H_0^1(\Omega)$ no vacío, convexo, cerrado; donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado. La demostración del caso general puede encontrarse en [3, Teorema V.6].

Observación 2.3.5. Sea $A: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $A(z, \eta) = \int_{\Omega} \nabla z \nabla \eta dx$ es una forma bilineal, continua, coerciva y simétrica.

Demostración. Es claro que A es una forma bilineal simétrica.

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y luego la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$|A(z, \eta)| \leq \int_{\Omega} |\nabla z \nabla \eta| dx \leq \int_{\Omega} |\nabla z| |\nabla \eta| dx \leq \|z\|_{H_0^1(\Omega)} \|\eta\|_{H_0^1(\Omega)},$$

por lo tanto, A es continua.

Como $A(z, z) = \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx = \|z\|_{H_0^1(\Omega)}^2$, A es coerciva. \square

Observación 2.3.6. Sea $\varphi: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\langle \varphi, \eta \rangle = \int_{\Omega} \eta dx$ es lineal y continua.

Demostración. Usando primero la desigualdad de Hölder y luego, la desigualdad de Poincaré, tenemos que

$$|\langle \varphi, \eta \rangle| \leq \int_{\Omega} |\eta| dx \leq \|\eta\|_{L^2(\Omega)} |\Omega|^{1/2} \leq c \|\eta\|_{H_0^1(\Omega)} |\Omega|^{1/2},$$

con lo cual, φ resulta continua. Además, es claro que φ es lineal. \square

Probaremos ahora un caso particular del teorema de Stampacchia.

Teorema 2.3.7. Sea $A: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $A(z, \eta) = \int_{\Omega} \nabla z \nabla \eta dx$ y $\varphi: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle \varphi, \eta \rangle = \int_{\Omega} \eta dx$. Sea E convexo, cerrado, no vacío de $H_0^1(\Omega)$. Entonces, existe una única $u \in E$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (\eta - u) dx \geq \int_{\Omega} (\eta - u) dx \text{ para toda } \eta \in E. \quad (2.3.1)$$

Además, u se caracteriza por la propiedad

$$\begin{cases} u \in E \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} u dx = \min_{\eta \in E} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx - \int_{\Omega} \eta \right\} \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Demostración. La idea de la demostración se divide en dos pasos:

(1) Probar que existe una única u que resuelve el problema (2.3.2).

(2) Probar que el problema de la desigualdad variacional (2.3.1) y el problema de minimización (2.3.2) son equivalentes.

Paso (1)

$$\text{Definimos } J(\eta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx - \int_{\Omega} \eta.$$

Paso (2)

• Veamos que si u es la solución del problema de minimización (2.3.2), entonces resuelve la desigualdad variacional (2.3.1).

Sea $t \in [0, 1]$, y $\eta \in E$. Como E es convexo, $t\eta + (1-t)u \in E$. Defino

$$j(t) = J(t\eta + (1-t)u),$$

lo que es lo mismo que

$$j(t) = J(u + t(\eta - u)).$$

Tenemos para todo $t \in [0, 1]$,

$$j(0) = J(u) = \min_E J \leq J(u + t(\eta - u)) = j(t)$$

Entonces, $J(u) \leq J(u + t(\eta - u))$. Es decir,

$$J(u) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + t(\eta - u))|^2 dx - \int_{\Omega} (u + t(\eta - u)) dx$$

Desarrollando el lado derecho de la desigualdad queda

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + t \int_{\Omega} \nabla u \nabla(\eta - u) dx + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla(\eta - u)|^2 dx - \int_{\Omega} u dx - t \int_{\Omega} (\eta - u) dx$$

Agrupando y reemplazando en la desigualdad,

$$J(u) \leq J(u) + t \left\{ \int_{\Omega} \nabla u \nabla(\eta - u) dx - \int_{\Omega} (\eta - u) dx \right\} + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla(\eta - u)|^2 dx$$

Simplificando,

$$0 \leq t \left\{ \int_{\Omega} \nabla u \nabla(\eta - u) dx - \int_{\Omega} (\eta - u) dx \right\} + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla(\eta - u)|^2 dx$$

Dividiendo la desigualdad por $t > 0$,

$$0 \leq \int_{\Omega} \nabla u \nabla (\eta - u) dx - \int_{\Omega} (\eta - u) dx + \frac{t}{2} \int_{\Omega} |\nabla (\eta - u)|^2 dx$$

Tomando límite de $t \rightarrow 0^+$,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (\eta - u) dx \geq \int_{\Omega} (\eta - u) dx$$

Como η en E era arbitraria, tenemos que esta última desigualdad vale para toda η en E .

• Veamos que si u resuelve la desigualdad variacional (2.3.1), entonces u alcanza el mínimo del problema (2.3.2).

Vale (2.3.1), es decir, para toda $\eta \in E$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla (\eta - u) dx &\geq \int_{\Omega} (\eta - u) dx \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla \eta dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &\geq \int_{\Omega} \eta dx - \int_{\Omega} u dx \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} u dx &\leq \int_{\Omega} \nabla u \nabla \eta dx - \int_{\Omega} \eta dx \end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + J(u) &\leq \int_{\Omega} \nabla u \nabla \eta dx - \int_{\Omega} \eta dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + J(u) &\leq \int_{\Omega} \nabla u \nabla \eta dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx + J(\eta) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} \nabla u \nabla \eta dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx &\leq J(\eta) - J(u) \end{aligned}$$

Observando que $\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} \nabla u \nabla \eta dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla (u - \eta)|^2 dx \geq 0$, resulta que $J(\eta) - J(u) \geq 0$, o sea, $J(\eta) \geq J(u)$. Concluimos que, como $\eta \in E$ era arbitraria, $J(u) = \min_E J$. \square

Observación 2.3.8. Si consideramos en el teorema anterior, $f \in H^{-1}(\Omega)$ y $\varphi = f$, es decir,

$$\langle f, \eta \rangle = \langle f, \eta \rangle_{H^{-1}, H^1}, \eta \in H_0^1(\Omega),$$

el resultado sigue valiendo y la demostración es completamente análoga.

Veamos una aplicación del teorema 2.3.7.

Definición 2.3.9. Sea $w \in H_0^1(\Omega)$. Decimos que $-\Delta w \leq 1$ en Ω si

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla v dx \leq \int_{\Omega} v dx$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$.

La siguiente proposición nos dice que el supremo de dos subsoluciones del operador $-\Delta$, es también una subsolución.

Proposición 2.3.10. Sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$ tales que

$$-\Delta u \leq 1, \quad -\Delta v \leq 1 \text{ en } \Omega.$$

Entonces, $w = u \vee v = \sup\{u, v\}$ verifica $-\Delta w \leq 1$ en Ω .

Demostración. Queremos ver que $-\Delta w \leq 1$ en Ω .

Definamos el conjunto $E = \{\eta \in H_0^1(\Omega) : \eta \leq w \text{ c.t.p. de } \Omega\}$. E es convexo, cerrado, no vacío en $H_0^1(\Omega)$, por ejemplo $w \in E$. Por el teorema 2.3.7, existe una única $z \in E$ tal que $J(z) = \min_{\eta \in E} J(\eta)$, donde $J(\eta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx - \int_{\Omega} \eta dx$. El teorema me dice además que z resuelve la siguiente desigualdad variacional

$$\int_{\Omega} \nabla z \nabla (\eta - z) dx \geq \int_{\Omega} (\eta - z) dx \text{ para toda } \eta \in E.$$

(1) Veamos que $-\Delta z \leq 1$ en Ω .

Sean $t \geq 0$ y $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \leq 0$. Defino $i(t) = J(z + t\phi)$. Observemos que está bien definido pues $z + t\phi \in E$, ya que $t \geq 0$ y $\phi \leq 0$ implica que $t\phi \leq 0$, por lo tanto, $z + t\phi \leq z \leq w$. Explícitamente,

$$i(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla z + t\nabla \phi|^2 dx - \int_{\Omega} (z + t\phi) dx, \text{ para } t \geq 0$$

Como $i(0) = J(z) \leq J(z + t\phi) = i(t)$, para todo $t \geq 0$, resulta que $i'(0) \geq 0$. Como $i'(t) = \int_{\Omega} (\nabla z + t\nabla \phi) \nabla \phi dx - \int_{\Omega} \phi dx$, nos queda

$$\int_{\Omega} \nabla z \nabla \phi dx - \int_{\Omega} \phi dx \geq 0, \text{ para toda } \phi \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} \nabla z \nabla \phi dx \geq \int_{\Omega} \phi dx, \text{ para toda } \phi \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} \nabla z \nabla \phi dx \leq \int_{\Omega} \phi dx, \text{ para toda } \phi \geq 0$$

Por lo tanto, $-\Delta z \leq 1$ en Ω .

(2) Veamos que $z \geq u$ y $z \geq v$.

Alcanza con ver que $z \geq u$. $z \geq v$ es análogo. Tomo $\eta = z \vee u$. Queremos ver que $\eta = z$. Como $z \in E$, tenemos que $z \leq w = u \vee v$. Además, $u \leq w$. Entonces, $\eta \leq w$. Esto nos dice que $\eta \in E$, y por lo tanto podemos usarla como función test en la desigualdad variacional que soluciona z , quedando:

$$\int_{\Omega} (\eta - z) dx \leq \int_{\Omega} \nabla z \nabla (\eta - z) dx.$$

Por otro lado, $z \leq \eta$ implica $\eta - z \geq 0$, entonces podemos tomar $\eta - z \in H_0^1(\Omega)$ como función test en $-\Delta u \leq 1$:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (\eta - z) dx \leq \int_{\Omega} (\eta - z) dx.$$

Juntando las dos última desigualdades tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla (\eta - z) dx &\leq \int_{\Omega} \nabla z \nabla (\eta - z) dx \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \int_{\Omega} \nabla (z - u) \nabla (\eta - z) dx \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \int_{\{z < u\}} \nabla (z - u) \nabla (\eta - z) dx + \int_{\{z \geq u\}} \nabla (z - u) \nabla (\eta - z) dx \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \int_{\{z < u\}} \nabla (z - u) \nabla (\eta - z) dx + \int_{\{z \geq u\}} \nabla (z - u) \nabla (z - z) dx \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \int_{\{z < u\}} \nabla (z - u) \nabla (u - z) dx = - \int_{\{z < u\}} |\nabla (u - z)|^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

Luego, $(u - z)^+ = 0$. Por lo tanto, $z \geq u$.

(3) Por último, observemos que $z \geq u$ y $z \geq v$ implica $z \geq u \vee v = w$. Pero, como $z \in E$, $z \leq w$. Luego, $z = w$ q.t.p. de Ω . Por (1), $-\Delta w \leq 1$ en Ω . \square

Definimos el conjunto

$$\mathcal{K} = \{\eta \in H_0^1(\Omega) : \eta \geq 0, -\Delta \eta \leq 1 \text{ en } \Omega\}$$

Corolario 2.3.11. *El supremo de dos funciones en \mathcal{K} , pertenece a \mathcal{K} .*

Demostración. Sea u y $v \in \mathcal{K}$. Llamo $w = u \vee v =: \sup\{u, v\}$. Queremos ver que $w \in \mathcal{K}$.

Es claro que $w \geq 0$, pues, por ejemplo, $w \geq u \geq 0$ ya que $u \in \mathcal{K}$. Además, por la proposición anterior, $-\Delta w \leq 1$. Luego, $w \in \mathcal{K}$. \square

Capítulo 3

Operadores lineales y formas cuadráticas

En este capítulo, estudiaremos operadores lineales definidos en un espacio de Hilbert y formas cuadráticas. Estos temas nos serán útiles para probar un lema muy importante sobre diseño óptimo. La bibliografía que utilizamos fue el libro de Kinderlehrer y Stampacchia [16].

3.1. Operadores lineales

Sea X un espacio de Hilbert (real) con producto (\cdot, \cdot) y norma $\|\cdot\|$. Un operador A en X es una aplicación lineal de $D(A)$ a X , donde $D(A)$ es un subespacio de X que llamamos dominio de A . El rango de A , que notamos $R(A)$, es el conjunto de todos los puntos $f \in X$ para los cuales existe un $x \in D(A)$ con $Ax = f$. El núcleo de A , $N(A)$, es el conjunto de todos los puntos $x \in D(A)$ tal que $Ax = 0$. El gráfico de A , es el subconjunto de $X \times X$ definido por

$$G(A) = \{[x, f] \in X \times X : x \in D(A), f = Ax\}.$$

Definición 3.1.1. Decimos que A es *cerrado* si el gráfico es cerrado en $X \times X$. Es decir, si $(x_h)_h$ es una sucesión en $D(A)$ que converge a un punto $x \in X$, y $(Ax_h)_h$ converge a un punto f , entonces $x \in D(A)$ y $f = Ax$.

Definición 3.1.2. Decimos que un operador B es una *extensión* de A si $G(A) \subset G(B)$, es decir, si $D(A) \subset D(B)$ y $Ax = Bx$ para todo $x \in D(A)$. En tal caso, notamos $A \subset B$.

Definición 3.1.3. Decimos que A es *positivo* si $(Ax, x) \geq 0$ para todo $x \in D(A)$.

Definición 3.1.4. Decimos que A es un operador *densamente definido* si su dominio $D(A)$ es denso en X .

En tal caso, definimos el operador *adjunto* A^* de A de la siguiente manera: el dominio de A^* , $D(A^*)$, es el conjunto de todos los $x \in X$ tales que existe $f \in X$ de modo que $(Ay, x) = (f, y)$ para todo $y \in D(A)$, y $A^*x = f$ para todo $x \in D(A^*)$.

Observación 3.1.5. La buena definición de A^* , sigue de la densidad de $D(A)$ en X .

Demostración. En efecto, si existe (otra) $g \in X$ tal que $(Ay, x) = (g, y)$ para todo $y \in D(A)$, resulta que $(f, y) = (g, y)$ para todo $y \in D(A)$. Entonces, $(f - g, y) = 0$ para todo $y \in D(A)$. Como $D(A)$ es denso en X , existe una sucesión $(y_h)_h$ en $D(A)$ que converge a $f - g$. Luego, $0 = (f - g, y_h)$ tiende a $\|f - g\|^2$, cuando $h \rightarrow +\infty$. Por lo tanto, $f = g$. \square

Observación 3.1.6. A^* es cerrado.

Demostración. Si $z \in D(A^*)$, $y \in D(A)$, de la definición de A^* , tenemos que $(A^*z, y) = (Ay, z)$.

Sea $(x_h)_h$ sucesión en $D(A^*)$ que converge a x en X , y $(A^*x_h)_h$ que converge a f en X . Quiero ver que $x \in D(A^*)$ y $A^*x = f$. Como $x_h \in D(A^*)$, para todo $y \in D(A)$, tenemos que $(A^*x_h, y) = (Ay, x_h)$. Tomando límite de $h \rightarrow +\infty$, nos queda que $(f, y) = (Ay, x)$ para todo $y \in D(A)$. Luego, $x \in D(A^*)$. Ahora, como $x \in D(A^*)$, para todo $y \in D(A)$, tenemos que

$$(A^*x, y) = (Ay, x) = (f, y).$$

Entonces, $(A^*x - f, y) = 0$ para todo $y \in D(A)$. Como $D(A)$ es denso en X , resulta $A^*x = f$, como queríamos probar. \square

Definición 3.1.7. Decimos que A es *simétrico* si $(Ax, y) = (x, Ay)$ para todo $x, y \in D(A)$.

Definición 3.1.8. Decimos que A es *autoadjunto* si $D(A)$ es denso en X y $A = A^*$.

Observación 3.1.9. Todo operador autoadjunto es cerrado y simétrico.

La siguiente proposición nos da una condición equivalente a ser un operador autoadjunto, cuando el operador es simétrico y positivo.

Proposición 3.1.10. Sea A un operador simétrico y positivo en X . Son equivalentes:

- (a) A es autoadjunto.
- (b) $R(I + A) = X$.

Demostración. Veamos que (a) \Rightarrow (b). Asumimos A autoadjunto. Probaremos primero que $R(I + A)$ es denso en X y luego, que es cerrado, concluyendo $R(I + A) = X$.

Para ver que es denso en X , como estamos en un espacio de Hilbert, basta probar que $R(I + A)^\perp = \{0\}$. Sea $y \in R(I + A)^\perp$. Entonces, para todo $x \in D(A)$,

$0 = (y, x + Ax) = (y, x) + (y, Ax)$, por lo tanto, $(Ax, y) = -(y, x)$ para todo $x \in D(A)$. Esto implica que $y \in D(A^*)$ y que $A^*y = -y$. Como $A = A^*$, tenemos que $y \in D(A)$ y $Ay = -y$. Como A es positivo, $0 \leq (Ay, y) = -(y, y) = -\|y\|^2 \leq 0$, por lo tanto $y = 0$. Luego, $R(I + A)^\perp = \{0\}$, es decir, $R(I + A)$ es denso en X .

Ahora, veamos que $R(I + A)$ es cerrado en X . Sea $(f_h)_h$ sucesión en $R(I + A)$ que converge a f en X . Sea $(x_h)_h$ sucesión en $D(A)$ tal que $f_h = x_h + Ax_h$ para toda $h \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} (f_h - f_k, x_h - x_k) &= (x_h + Ax_h - (x_k + Ax_k), x_h - x_k) \\ &= (x_h - x_k, x_h - x_k) + (Ax_h - Ax_k, x_h - x_k) \\ &= \|x_h - x_k\|^2 + (A(x_h - x_k), x_h - x_k) \\ &\geq \|x_h - x_k\|^2 + 0 = \|x_h - x_k\|^2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\|x_h - x_k\|^2 \leq (f_h - f_k, x_h - x_k) \leq \|f_h - f_k\| \|x_h - x_k\|$$

y por ende,

$$\|x_h - x_k\| \leq \|f_h - f_k\|$$

Como $(f_h)_h$ es una sucesión convergente, en particular es una sucesión de Cauchy. Y por la desigualdad anterior, tenemos que $(x_h)_h$ también lo es. Como X es Hilbert, existe un $x \in X$ tal que $(x_h)_h$ converge a x . Ahora, de la igualdad $f_h - x_h = Ax_h$, pasando al límite, tenemos que $(Ax_h)_h$ converge a $g = f - x$. Como A es autoadjunto, es cerrado. Entonces, $x \in D(A)$ y $g = Ax$, por lo tanto, $f = x + Ax$. Esto implica que $f \in R(I + A)$. Luego, $R(I + A)$ es cerrado en X .

Veamos que (b) \Rightarrow (a).

Veamos que $D(A)$ es denso en X , con lo cual A resulta densamente definido. Sea $f \in D(A)^\perp$, quiero ver que $f = 0$. Como $R(I + A) = X$, existe un $x \in D(A)$ tal que $f = x + Ax$. Como A es positivo, $(Ax, x) \geq 0$. Como $f \in D(A)^\perp$ y $x \in D(A)$,

$$0 = (f, x) = (x + Ax, x) = (x, x) + (Ax, x) \geq (x, x) = \|x\|^2,$$

lo que nos dice que $x = 0$, y entonces $f = x + Ax = 0$. Esto prueba que $D(A)^\perp = \{0\}$, por lo tanto A es densamente definido.

Como A es simétrico, A^* es una extensión de A . Esto es que sus gráficos verifican $G(A) \subset G(A^*)$, es decir, que $D(A) \subset D(A^*)$ y que $Ax = A^*x$ para todo $x \in D(A)$. Para probar que A es autoadjunto, alcanza con ver que $D(A^*) \subset D(A)$. Fijo $y \in D(A^*)$. Como $R(I + A) = X$, existe un $z \in D(A)$ tal que $y + A^*y = z + Az$, y existe un $x \in D(A)$ tal que $y - z = x + Ax$. Como A es simétrico, $I + A$ es simétrico, por lo tanto

$$(y + A^*y, x) = (z + Az, x) = ((I + A)z, x) = (z, (I + A)x) = (z, x + Ax) = (z, y - z)$$

Como $(A^*y, x) = (Ax, y)$,

$$(y - z, y) = (x + Ax, y) = (x, y) + (Ax, y) = (x, y) + (A^*y, x) = (x, y + A^*y) = (y - z, z).$$

Esto nos dice que $\|y - z\|^2 = 0$, entonces $y = z$. Luego, $y \in D(A)$. Esto prueba la inclusión que queríamos $D(A^*) \subset D(A)$. \square

3.2. Formas cuadráticas

Definición 3.2.1. Una función $F: X \rightarrow [0, +\infty]$ es una *forma cuadrática* si existe un subespacio lineal $Y \subset X$ y una forma bilineal $B: Y \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que

$$F(x) = \begin{cases} B(x, x), & \text{si } x \in Y, \\ +\infty, & \text{si } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Sea $F: X \rightarrow [0, +\infty]$ una forma cuadrática. El dominio $D(F)$ es el subespacio de X definido por $D(F) = \{x \in X: F(x) < +\infty\}$.

Definición 3.2.2. Sea $F: X \rightarrow [0, +\infty]$ una forma cuadrática, sea B su forma bilineal asociada, y sea $V = \overline{D(F)}$. El operador A asociado a F es el operador lineal A en V definido de la siguiente manera: su dominio

$$D(A) = \{x \in D(F): \text{existe } f \in V \text{ tal que } B(x, y) = (f, y) \forall y \in D(F)\},$$

$$Ax = f \text{ para todo } x \in D(A).$$

Observación 3.2.3. La buena definición de A , sigue de la densidad de $D(F)$ en V .

Por el teorema de representación de Riesz, $x \in D(A)$ si y sólo si la aplicación lineal $B(x, \cdot)$ es continua en $D(F)$ para la topología en X .

Observación 3.2.4. Para todo $x \in D(A)$ y para todo $y \in D(F)$ tenemos $(Ax, y) = (f, y) = B(x, y)$. En particular, tomando $y = x$, $(Ax, x) = B(x, x) = F(x)$ para todo $x \in D(A)$.

Sea $P: X \rightarrow V$ la proyección ortogonal en $V = \overline{D(F)}$. Para todo $x, f \in X$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $B(x, y) = (f, y)$ para todo $y \in D(F)$.

(b) $x \in D(A)$ y $Ax = Pf$.

En efecto, si $B(x, y) = (f, y)$ para todo $y \in D(F)$, tenemos que $x \in D(A)$. Además, $f = Pf + w$, con $Pf \in V$ y $w \in V^\perp$. Entonces,

$$B(x, y) = (f, y) = (Pf + w, y) = (Pf, y) + (w, y) = (Pf, y) + 0 = (Pf, y)$$

para todo $y \in D(F) \subset V$. Luego, $Ax = Pf$. La otra implicación es similar. Si $x \in D(A)$, existe una $f \in V$ tal que $B(x, y) = (f, y)$ para todo $y \in D(F)$. Descomponiendo a $f = Pf + w$ con $Pf \in V$, $w \in V^\perp$ y leyendo la cadena de igualdades al revés, concluimos que (a) y (b) son equivalentes.

Ejemplo 3.2.5. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n , sea $X = L^2(\Omega)$, sea $F : L^2(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ la forma cuadrática

$$F(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, & \text{si } u \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty, & \text{si no.} \end{cases}$$

Sea A el operador lineal asociado a F . Notando Δ al operador Laplaciano, tenemos que

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

$$Au = -\Delta u \text{ para toda } u \in D(A).$$

Si Ω es acotado con borde C^2 , o si $\Omega = \mathbb{R}^n$, la teoría de regularidad para operadores elípticos nos dice que $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Proposición 3.2.6. *Sea $F : X \rightarrow [0, +\infty]$ una forma cuadrática, sea A su operador asociado en $V = \overline{D(F)}$, y sea $P : X \rightarrow V$ la proyección ortogonal en V . Para todo $x, f \in X$ son equivalentes:*

- (a) $x \in D(A)$ y $Ax = Pf$.
- (b) $F(y) \geq F(x) + 2(f, x - y)$ para todo $y \in X$.
- (c) x es un punto mínimo en X del funcional $G(y) = F(y) - 2(f, y)$.

Demostración. Sean x y $f \in X$, y sea B la forma bilineal asociada a F .

- Veamos que (a) \Rightarrow (b).

Suponemos $x \in D(A) \subset D(F)$ y $Ax = Pf$. Entonces, por la observación 3.2.4,

$$x \in D(F) \text{ y } B(x, v) = (Pf, v) = (f, v) \text{ para toda } v \in D(F).$$

Sea $y \in X$. Si $y \notin D(F)$, $F(y) = +\infty$ y la desigualdad (b) es trivial. Luego, basta probar (b) para $y \in D(F)$. Tomo $v = y - x$. Entonces, $v \in D(F)$ y

$$\begin{aligned} F(y) &= F(v + x) = B(v + x, v + x) = B(x, x) + 2B(x, v) + B(v, v) \\ &= F(x) + 2(f, v) + F(v) \\ &\geq F(x) + 2(f, y - x). \end{aligned}$$

Esto prueba (b).

- Veamos (b) \Rightarrow (a).

Si $F(y) \geq F(x) + 2(f, x - y)$ para todo $y \in X$, tomando $y = 0$, tenemos que $F(x) \leq 2(f, x)$, por lo tanto $x \in D(F)$. Fijo $v \in D(F)$. Para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos que $F(x + tv) \geq F(x) + 2t(f, v)$. Como

$$\begin{aligned} F(x + tv) &= B(x + tv, x + tv) = B(x, x) + 2tB(x, v) + t^2B(v, v) \\ &= F(x) + 2tB(x, v) + t^2F(v), \end{aligned}$$

resulta $F(x) + 2tB(x, v) + t^2F(v) \geq F(x) + 2t(f, v)$. Esto implica que, simplificando $F(x)$ y dividiendo por t ,

$$2B(x, v) + tF(v) \geq 2(f, v) \text{ para todo } t > 0$$

$$2B(x, v) + tF(v) \leq 2(f, v) \text{ para todo } t < 0$$

Tomando límite de $t \rightarrow 0$, tenemos que $B(x, v) = (f, v) = (Pf, v)$. Como $Pf \in V$ y $B(x, v) = (Pf, v)$ para toda $v \in D(F)$, obtenemos que $Pf = Ax$.

- Veamos (b) \Leftrightarrow (c).

x es punto mínimo de G en $X \Leftrightarrow G(x) \leq G(y)$ para todo $y \in X \Leftrightarrow$

$$F(x) - 2(f, x) \leq F(y) + 2(f, y)$$

$$\Leftrightarrow F(y) \geq F(x) + 2(f, y - x).$$

Lo que concluye la demostración. \square

En el ejemplo 3.2.5, esta proposición nos dice que dados $u, f \in L^2(\Omega)$ son equivalentes:

(a) $u \in D(-\Delta)$ y $-\Delta u = f$.

(b) $\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - 2 \int_{\Omega} f(u - v) dx$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

(c) u es punto mínimo del funcional $G(v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - 2 \int_{\Omega} f v dx$.

Teorema 3.2.7. *Sea $F: X \rightarrow [0, +\infty]$ una forma cuadrática y sea A el operador lineal en $V = \overline{D(F)}$ asociado a F . Entonces, A es positivo y simétrico. Si además, F es semicontinua inferior en X , entonces A es autoadjunto en V .*

Demostración. Si $x \in D(A)$, entonces $(Ax, x) = F(x) \geq 0$, usamos la observación 3.2.4. Por lo tanto, A es positivo. Para probar que A es simétrico, observemos que para todo $x, y \in D(A)$ tenemos que $(Ax, y) = B(x, y) = B(y, x) = (Ay, x)$, donde B es la forma bilineal asociada a F .

Supongamos F semicontinua inferior en X .

- Veamos que $R(I + A) = V$, donde I es el operador identidad.

Defino el funcional $G(y) = \|y\|^2 + F(y) - 2(f, y)$. Es fácil ver que G es convexo y semicontinuo inferior en la topología fuerte de X , y semicontinuo inferior en la topología débil de X . Observemos que, usando $F(y) \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|y\|^2 &\leq \frac{1}{2}\|y - f\|^2 + \frac{1}{2}\|f\|^2 \\ &\leq \|y - f\|^2 + \|f\|^2 \\ &= \|y\|^2 - 2(f, y) + 2\|f\|^2 \\ &\leq \|y\|^2 + F(y) - 2(f, y) + 2\|f\|^2 \\ &= G(y) + 2\|f\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $G(y) \geq \frac{1}{2}\|y\|^2 - 2\|f\|^2$. Luego, G es coercivo en la topología débil de X .

Veamos que existe $x \in X$ punto mínimo de G . El funcional G es acotado inferiorment: $G(y) \geq \frac{1}{2}\|y\|^2 - 2\|f\|^2 \geq -2\|f\|^2 > -\infty$. Luego, $\inf_X G =: \lambda \in \mathbb{R}$. Sea $(y_h)_h$ una sucesión minimizante en X . Tenemos que $G(y_h) \geq \frac{1}{2}\|y_h\|^2 - 2\|f\|^2$. Tomando límite, resulta $\limsup_{h \rightarrow +\infty} \|y_h\|^2 \leq \lambda + 4\|f\|^2 < +\infty$. Como $(y_h)_h$ es acotada en X y X es Hilbert, por lo tanto reflexivo, existe $x \in X$ tal que (para una subsucesión que seguimos notando y_h) $(y_h)_h$ converge débil a x en X . Entonces,

$$y_h \rightharpoonup x \Rightarrow \|x\| \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \|y_h\| \Rightarrow \|x\|^2 \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \|y_h\|^2$$

Además, $y_h \rightharpoonup x \Rightarrow (f, y_h) \rightarrow (f, x)$. Y como F es semicontinua inferior en X , $F(x) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F(y_h)$. Por lo tanto,

$$G(x) = \|x\|^2 + F(x) - 2(f, x) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \left\{ \|y_h\|^2 + F(y_h) - 2(f, y_h) \right\} = \liminf_{h \rightarrow +\infty} G(y_h) = \lambda.$$

Concluimos que $G(x) = \min_X G$.

Como $I + A$ es el operador asociado a la forma cuadrática $\|y\|^2 + F(y)$, por la proposición 3.2.6 tenemos que $f = Pf = (I + A)x$, por lo tanto $f \in R(I + A)$. Esto prueba que $R(I + A) = V$.

Por la proposición 3.1.10, sabemos que $R(I + A) = V$ es equivalente a A auto-adjunto en V . \square

Definición 3.2.8. Sea $F: X \rightarrow [0, +\infty]$ una forma cuadrática. Definimos el producto interno $(\cdot, \cdot)_F$ en $D(F)$ como

$$(x, y)_F = B(x, y) + (x, y)$$

donde B es la forma bilineal asociada a F . La norma correspondiente en $D(F)$ está dada por

$$\|x\|_F = (F(x) + \|x\|^2)^{1/2}.$$

Ejemplo 3.2.9. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n , sea $X = L^2(\Omega)$, sea $F: L^2(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ la forma cuadrática

$$F(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, & \text{si } u \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty, & \text{si no.} \end{cases}$$

Entonces, para toda $u \in D(F) = H_0^1(\Omega)$, el producto escalar $(u, v)_F$ coincide con el producto escalar $(u, v)_{H^1(\Omega)}$.

En el Capítulo 6, necesitaremos el siguiente resultado:

Proposición 3.2.10. Sea $F: X \rightarrow [0, +\infty]$ una forma cuadrática semicontinua inferior y sea A su operador asociado en $V = \overline{D(F)}$. Entonces, $D(A)$ es denso en $D(F)$ para la norma $\|\cdot\|_F$.

Demostración. Para ver que $D(A)$ es denso en $D(F)$ basta ver que si $y \in D(F)$ es tal que $(y, v)_F = 0$ para todo elemento v de $D(A)$, resulta $y = 0$. Tomo $y \in D(F)$ tal que $(y, v)_F = 0$ para todo elemento v de $D(A)$. Como A es positivo y autoadjunto en V (por el teorema 3.2.7), tenemos que $R(I + A) = V$, por la proposición 3.1.10. Sé que $y \in D(F) \subset V$, entonces existe un $x \in D(A)$ tal que $y = (I + A)x = x + Ax$. Como $(x, y)_F = 0$, tenemos que

$$\|y\|^2 = (y, y) = (x + Ax, y) = (x, y) + (Ax, y) = (x, y) + B(x, y) = (x, y)_F = 0$$

Por lo tanto, $y = 0$, que es lo que queríamos probar. Luego, $D(A)$ denso en $D(F)$. \square

Capítulo 4

Caracterización de $H_0^1(\Omega)$

En este capítulo, estudiamos algunos resultados del libro de Henrot y Pierre [15] sobre capacidad, cuasi-abiertos, cuasi-continuidad y el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. Uno de los objetivos es motivar la definición del espacio de Sobolev $H_0^1(A)$ para $A \subset \mathbb{R}^n$ cuasi-abierto.

4.1. Capacidad y cuasi-abiertos

Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n . La medida de Lebesgue de un subconjunto medible E de Ω la notamos $|E|$. Introducimos la noción de *capacidad* de un conjunto E en Ω .

Definición 4.1.1. Dado $E \subset \Omega$. Definimos la *capacidad* de E en Ω como

$$\text{cap}(E) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx : u \in \mathcal{U}_E \right\}$$

donde \mathcal{U}_E es el conjunto de todas las funciones u del espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ tal que $u \geq 1$ casi todo punto (c.t.p.) en un entorno de E .

Si una propiedad $P(x)$ ocurre para todo $x \in E$ salvo para elementos de un conjunto $Z \subset E$ con $\text{cap}(Z) = 0$ diremos que $P(x)$ ocurre *cuasi-todo punto* de E (abreviaremos q.t.p. de E).

Definición 4.1.2. Un subconjunto A de Ω se dice *cuasi-abierto* si existe una sucesión decreciente de abiertos $(A_h)_h$, tal que $(\text{cap}(A_h))_h$ tiende a cero y $A \cup A_h$ es abierto para toda $h \in \mathbb{N}$.

La clase de todos los subconjuntos cuasi-abiertos de Ω la notamos $\mathcal{A}(\Omega)$.

Definición 4.1.3. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *cuasi-continua* (-*semicontinua inferior*) si para todo $\epsilon > 0$ existe una función $f_\epsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua (semicontinua inferior) tal que $\text{cap}(\{f \neq f_\epsilon\}) < \epsilon$, donde $\{f \neq f_\epsilon\} = \{x \in \Omega : f(x) \neq f_\epsilon(x)\}$.

Proposición 4.1.4. *Sea $v \in H^1(\Omega)$ una función cuasi-continua tal que $v \geq 0$ c.t.p. de Ω . Entonces, $v \geq 0$ q.t.p. de Ω .*

Demostración. Sea $E = \{v < 0\} = \{x \in \Omega : v(x) < 0\}$. Sabemos que $|E| = 0$. Quiero ver que $\text{cap}(E) = 0$.

Como v es cuasi-continua, para cada $h \in \mathbb{N}$, existe $A_h \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $\text{cap}(A_h) < \frac{1}{h}$ y $v|_{\mathbb{R}^n \setminus A_h}$ es continua.

Tenemos que $E \cup A_h$ es abierto, para cada $h \in \mathbb{N}$. Pues,

$$E \cup A_h = [v^{-1}((-\infty, 0)) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)] \cup A_h$$

con A_h y $v^{-1}((-\infty, 0)) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)$ son abiertos. (El conjunto $v^{-1}((-\infty, 0)) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)$ es abierto pues $v|_{\mathbb{R}^n \setminus A_h}$ es continua).

Ahora, por definición de capacidad, dado $\epsilon > 0$, existen funciones v_h en $H_0^1(\Omega)$, tales que $v_h \geq 1$ c.t.p. de un entorno de A_h y

$$\int_{\Omega} |\nabla v_h|^2 dx \leq \text{cap}(A_h) + \epsilon < \frac{1}{h} + \epsilon.$$

Como $|E| = 0$ y $v_h \geq 1$ c.t.p. en un entorno de A_h , tenemos que $v_h \geq 1$ c.t.p. de un entorno de $A_h \cup E$. Por lo tanto, v_h es admisible en el conjunto de las funciones test para calcular la $\text{cap}(A_h \cup E)$. Entonces,

$$0 \leq \text{cap}(E) \leq \text{cap}(A_h \cup E) \leq \int_{\Omega} |\nabla v_h|^2 dx \leq \text{cap}(A_h) + \epsilon < \frac{1}{h} + \epsilon,$$

donde usamos, en la segunda desigualdad, la monotonía de la capacidad. Tomando límite de $h \rightarrow +\infty$ y de $\epsilon \rightarrow 0^+$, resulta $\text{cap}(E) = 0$. Esto nos dice, que $v \geq 0$ q.t.p. de Ω . \square

Es conocido que toda función u del espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ tiene un representante cuasi-continuo, que está únicamente definido salvo un conjunto de capacidad cero.

Proposición 4.1.5. *Sea $u \in H_0^1(\Omega)$. Existe una función $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ cuasi-continua tal que $u = \tilde{u}$ c.t.p. de Ω . La función \tilde{u} es única q.t.p. de Ω .*

Demostración. Existencia. Sean $u_h \in C_c^\infty(\Omega)$, para $h \in \mathbb{N}$, tales que $(u_h)_h$ converge a u en $H^1(\Omega)$ y c.t.p. de Ω . Como $(u_h)_h$ es una sucesión convergente en un espacio completo, en particular, es una sucesión de Cauchy. Entonces, puedo elegir una subsucesión de $(u_h)_h$, que seguimos notando con h , tal que

$$\sum_{h=1}^{\infty} 2^{2h} \|u_{h+1} - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 < +\infty.$$

- Contrucción de los abiertos $(W_h)_h$ con $(\text{cap}(W_h))_h$ tendiendo a cero.

Considero los siguientes conjuntos,

$$A_h = \{|u_{h+1} - u_h| > 2^{-h}\},$$

que resultan abiertos ya que cada u_h es continua. Ahora, tomo para cada $h \in \mathbb{N}$, el conjunto abierto $W_h = \cup_{k \geq h} A_k$.

Observemos que si llamo $v_h = 2^h |u_{h+1} - u_h|$, tenemos que $v_h > 1$ en A_h . Entonces, puedo tomarla como función test para el cálculo de la capacidad de A_h , así

$$\text{cap}(A_h) \leq \int_{\Omega} |\nabla v_h|^2 dx \leq \|v_h\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|2^h |u_{h+1} - u_h|\|_{H^1(\Omega)}^2 = 2^{2h} \|u_{h+1} - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Además, por la propiedad de subaditividad de la capacidad, tenemos que

$$\text{cap}(W_h) \leq \sum_{k \geq h} \text{cap}(A_k) \leq \sum_{k \geq h} 2^{2k} \|u_{k+1} - u_k\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

que tiende a cero cuando $h \rightarrow +\infty$ por ser la cola de una serie convergente. Luego, $(\text{cap}(W_h))_h$ tiende a cero.

- Convergencia uniforme de $(u_k)_k$ a u en $\Omega \setminus W_h$.

Sea $x \in \Omega \setminus W_h = \cap_{k \geq h} (\Omega \setminus A_k) = \cap_{k \geq h} \{|u_{k+1} - u_k| \leq 2^{-k}\}$. Luego, $(u_k)_k$ converge uniformemente en $\Omega \setminus W_h$. Entonces, existe un límite uniforme que en principio depende de h , lo llamo v_h . Pero, observando que los abiertos $(W_k)_k$ verifican $W_{k+1} \subset W_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$, tenemos un único límite uniforme, independiente de h . Lo llamamos \tilde{u} . Por lo tanto, $(u_k)_k$ converge a \tilde{u} uniformemente en $\mathbb{R}^n \setminus W_h$, para toda $h \in \mathbb{N}$.

Ahora, definimos $\tilde{u} = 0$ en $\cap_{h \in \mathbb{N}} W_h$, así \tilde{u} está definida en todo Ω . Observemos que $\text{cap}(\cap_{h \in \mathbb{N}} W_h) \leq \text{cap}(W_k)$, y esta última es una sucesión que tiende a cero. Tenemos entonces que $|\cap_{h \in \mathbb{N}} W_h| = 0$.

Como $(u_k)_k$ converge a u c.t.p. de Ω y $(u_k)_k$ converge uniformemente a \tilde{u} en $\Omega \setminus W_h$, para todo $h \in \mathbb{N}$, entonces $u = \tilde{u}$ c.t.p. de Ω .

Unicidad. Supongamos que \tilde{u} y \tilde{v} son funciones de $H^1(\Omega)$ cuasi-continuas tales que $\tilde{u} = u$ c.t.p. de Ω y $\tilde{v} = u$ c.t.p. de Ω . Entonces, $\tilde{u} - \tilde{v} = 0$ c.t.p. de Ω y es una función cuasi-continua. Por la proposición 4.1.4, resulta que $\tilde{u} - \tilde{v} = 0$ q.t.p. de Ω . Luego, $\tilde{u} = \tilde{v}$ q.t.p. de Ω . \square

Se puede ver en el libro de Evans y Gariepy [14, Sección 4.8, Teorema 1] otra demostración de la existencia del representante cuasi-continuo de una función en $H^1(\Omega)$, que construye explícitamente dicho representante.

Lema 4.1.6. *Sea $u \in H^1(\Omega)$, \tilde{u} su representante cuasi-continuo. Entonces,*

$$\text{cap}(\{|\tilde{u}| > 1\}) \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Demostración. Llamo $E = \{|\tilde{u}| > 1\}$. Como \tilde{u} es cuasi-continua, existen $(W_h)_h$ abiertos decrecientes tal que $(\text{cap}(W_h))_h$ tiende a cero y $E \cup W_h$ es abierto, para toda $h \in \mathbb{N}$.

Como $(\text{cap}(W_h))_h$ tiende a cero, existen funciones $v_h \in H_0^1(\Omega)$ tales que $v_h \geq 1$ en W_h , $v_h \geq 0$ en Ω y $(\|v_h\|_{H^1(\Omega)})_h$ tiende a cero.

Tenemos que $|u| + v_h \geq 1$ en $E \cup W_h$, que es un conjunto abierto. Entonces, puedo tomarla como función test para el cálculo de la capacidad de $E \cup W_h$,

$$\text{cap}(E) \leq \text{cap}(E \cup W_h) \leq \| |u| + v_h \|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v_h\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Tomando límite de $h \rightarrow +\infty$, obtenemos la desigualdad que queríamos. \square

4.2. Caracterización de $H_0^1(\Omega)$

Sea $A \subset \Omega$. Definimos el conjunto

$$\Gamma_A = \{v \in H_0^1(\Omega) : \exists (v_h)_h / (v_h)_h \rightarrow v \text{ en } H_0^1(\Omega) \text{ y } v_h \geq 1 \text{ en un entorno de } A\}$$

Si Γ_A es no vacío, se puede ver que el funcional $J(v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$, $J: \Gamma_A \rightarrow \mathbb{R}$, alcanza su mínimo valor.

Teorema 4.2.1. *Existe una única función $u_A \in \Gamma_A$ tal que*

$$\int_{\Omega} |\nabla u_A|^2 dx = \inf_{v \in \Gamma_A} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right\}.$$

Decimos que u_A es el potencial capacitario de A .

Demostración. Tenemos que Γ_A es un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de $H_0^1(\Omega)$. Aplicando el teorema de Stampacchia 2.3.4, resulta que existe $u_A \in \Gamma_A$ tal que alcanza el mínimo de J en Γ_A y es única. \square

Lema 4.2.2. *Sea $(u_h)_h$ una sucesión en $C_c^\infty(\Omega)$ que converge a una función u en $H_0^1(\Omega)$. Entonces, existe una subsucesión $(u_{h_k})_k$ tal que (\tilde{u}_{h_k}) converge a \tilde{u} q.t.p. de Ω .*

Demostración. La prueba es similar a la demostración de la proposición 4.1.5. Como $(u_h)_h$ es una sucesión convergente en un espacio completo, en particular, es una sucesión de Cauchy. Entonces, puedo elegir una subsucesión de $(u_h)_h$, que seguimos notando con h , tal que

$$\sum_{h=1}^{\infty} 2^{2h} \|u_{h+1} - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 < +\infty.$$

Considero los siguientes conjuntos,

$$A_h = \{|\tilde{u}_{h+1} - \tilde{u}_h| > 2^{-h}\}.$$

Tomo para cada $h \in \mathbb{N}$, el conjunto $W_h = \cup_{k \geq h} A_k$. Al igual que en la proposición 4.1.5, se tiene que

$$\text{cap}(W_h) \leq \sum_{k \geq h} \text{cap}(A_k) \leq \sum_{k \geq h} 2^{2k} \|u_{k+1} - u_k\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

que tiende a cero cuando $h \rightarrow +\infty$ por ser la cola de una serie convergente. Luego, $(\text{cap}(W_h))_h$ tiende a cero y procediendo como en la proposición 4.1.5 se tiene que $(\tilde{u}_h)_h$ converge a \tilde{u} q.t.p. de Ω . \square

Teorema 4.2.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sea $A \subset \Omega$ un abierto. Entonces,*

$$u \in H_0^1(A) \Leftrightarrow u \in H_0^1(\Omega) \text{ y } \tilde{u} = 0 \text{ q.t.p. de } \Omega \setminus A.$$

Demostración. Si $u \in H_0^1(A)$, tomamos funciones $\phi_h \in C_c^\infty(A) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tales que $(\phi_h)_h$ converge a u en $H_0^1(A)$. Por lo tanto, $(\phi_h)_h$ converge a u en $H_0^1(\Omega)$. Por el lema 4.2.2, extrayendo una subsucesión, que seguimos notando con h , tenemos que $(\phi_h)_h$ converge a \tilde{u} q.t.p. de Ω . Como $\phi_h = 0$ en $\Omega \setminus A$, resulta $\tilde{u} = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$.

Supongamos que $u \in H_0^1(\Omega)$ y que $\tilde{u} = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$. Queremos ver que $u \in H_0^1(A)$.

Podemos hacer las siguientes reducciones:

(1) $\Omega = \mathbb{R}^n$. Sino, extendiendo las funciones por cero.

(2) $u \geq 0$. Recordando la descomposición $u = u^+ - u^-$.

(3) u acotada. Pues, si considero $v_h = u \vee h = \min\{u, h\} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $(v_h)_h$ converge a u en $H^1(\mathbb{R}^n)$, y como $H_0^1(A)$ es cerrado en $H^1(\mathbb{R}^n)$, si vemos que $v_h \in H_0^1(A)$ para toda $h \in \mathbb{N}$, luego, $u \in H_0^1(A)$.

(4) $\text{sop}(u) \subset B_R(0)$, para algún $R > 0$. Sea $\xi \in C_c^\infty(B_2(0))$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi \equiv 1$ en $B_1(0)$, $\xi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$. Considero $\xi_h(x) = \xi(\frac{x}{h})$, $\text{sop}(\xi_h) \subset B_{2h}(0)$, $\xi_h \equiv 1$ en $B_h(0)$ y $(\xi_h u)_h$ converge a u en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Entonces, suponemos $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, no negativa, acotada y con soporte contenido en una bola $B_R(0)$.

Como \tilde{u} es casi-continua, existe una sucesión decreciente de abiertos $(W_h)_h$ tales que $(\text{cap}(W_h))_h$ tiende a cero y $\tilde{u}|_{\mathbb{R}^n \setminus W_h}$ es continua, para cada $h \in \mathbb{N}$.

Supongamos que contiene al conjunto de capacidad cero

$$V = \{x \in A^c : \tilde{u}(x) \neq 0\} \subset W_h,$$

recordemos que $\text{cap}(V) = 0$. Entonces, $\tilde{u} = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus (A \cup W_h) = A^c \cap W_h^c$.

Sea $\delta > 0$. Considero los conjuntos $V_h = \{\tilde{u} < \delta\} \cup W_h$, que resultan abiertos ya que \tilde{u} es continua en W_h^c y W_h es abierto. Así, $A^c \subset V_h$. Por lo tanto, $V_h^c \subset A$ y V_h^c es cerrado. Como además, $V_h^c \subset B_R(0)$. Entonces, V_h^c es compacto.

Sea u_{W_h} el potencial capacitario de W_h . Tenemos que

$$(u - \delta)^+(1 - u_{W_h}) = 0 \text{ c.t.p. de } V_h.$$

Entonces,

$$(u - \delta)^+(1 - u_{W_h}) = 0 \text{ c.t.p. de } A \setminus V_h.$$

Sea $(\rho_k)_k$ sucesión regularizante. Consideramos

$$z_{h,k} := \rho_k * [(u - \delta)^+(1 - u_{W_h})] \in C_c^\infty(A),$$

para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $k = k(h, \delta)$.

Entonces, como $(1 - u_{W_h})_h$ es una sucesión acotada y u es acotada, $(1 - u_{W_h})_h$ converge a 1 en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y $\|u_{W_h}\|_{H^1}^2 = \text{cap}(W_h)$ tiende a cero; tomando límite de $h \rightarrow +\infty$, $\delta \rightarrow 0^+$, resulta $(z_h)_h$ converge a u en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y como cada $z_h \in C_c^\infty(A)$, tenemos que, por definición de $H_0^1(A) = \overline{C_c^\infty(A)}^{\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}}$, $u \in H_0^1(A)$. \square

Definición 4.2.4. Sea $A \subset \Omega$ cuasi-abierto. Defino

$$H_0^1(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) : \tilde{u} = 0 \text{ q.t.p. de } \Omega \setminus A\}.$$

Proposición 4.2.5. Sea $A \subset \Omega$ un cuasi-abierto no vacío. Entonces,

$$H_0^1(A) \text{ es denso en } L^2(A).$$

Demostración. Como $L^2(A)$ es un espacio de Hilbert, basta ver que $H_0^1(A)^\perp = \{0\}$ con respecto al producto interno de $L^2(A)$.

Sea $f \in H_0^1(A)^\perp$. Es decir,

$$\int_A f v dx = 0,$$

para toda $v \in H_0^1(A)$. Quiero ver que $f = 0$ c.t.p. de A .

Como A es cuasi-abierto, existe una sucesión decreciente de abiertos $(W_h)_h$ tal que $(\text{cap}(W_h))_h$ tiende a cero y $A \cup W_h$ es abierto para cada $h \in \mathbb{N}$.

Extiendo f a $A \cup W_h$, $f = 0$ en $W_h \setminus A$. Entonces, existe $f_h \in C_c^\infty(A \cup W_h)$ tal que $\|f_h - f\|_{L^2(A \cup W_h)} < \frac{1}{2h}$, para cada $h \in \mathbb{N}$.

Considero u_{W_h} el potencial capacitario de W_h . Como $u_{W_h} = 1$ en W_h (ver [15, Teorema 3.3.21]), resulta que $f_h(1 - u_{W_h}) \in H_0^1(A)$. Entonces,

$$0 = \int_A f f_h (1 - u_{W_h}) dx, \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Ahora, $(f_h)_h$ converge a f en $L^2(\Omega)$ y $(1 - u_{w_h})_h$ es una sucesión acotada que converge a 1 en $H^1(\Omega)$. Por lo tanto,

$$\int_A f f_h (1 - u_{w_h}) dx \rightarrow \int_A f^2 dx.$$

Luego, $f = 0$ c.t.p. de A . □

Proposición 4.2.6. *Sea $A \subset \Omega$ un cuasi-abierto no vacío. Entonces,*

$$\{u_A^f : f \in L^\infty(\Omega)\} \text{ es denso en } H_0^1(A).$$

Demostración. Sea $u \in H_0^1(A)$ y $g = -\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$. Entonces, $u = u_A^g$.

Como $L^\infty(\Omega)$ es denso en $H^{-1}(\Omega)$ (ver 2.2.9), existe una sucesión $(g_h)_h$ en $L^\infty(\Omega)$ que converge a g en $H^{-1}(\Omega)$. Es decir,

$$\|g_h - g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup \left\{ \langle g_h - g, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} : v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1 \right\}$$

tiende a cero. Entonces, $(u_A^{g_h})_h$ converge a $u_A^g = u$ en $H_0^1(A)$. En efecto,

$$\|u_A^{g_h} - u_A^g\|_{H_0^1(A)} = \|u_A^{g_h - g}\|_{H_0^1(A)} \leq c \|g_h - g\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

por la linealidad y continuidad del problema de Dirichlet. □

Notemos que la proposición anterior es muy importante ya que nos da un resultado *equivalente* a

$$L^\infty(\Omega) \text{ es denso en } H^{-1}(\Omega), \Omega \text{ abierto acotado}$$

para cuasi-abiertos, $\{u_A^f : f \in L^\infty(\Omega)\}$ es denso en $H_0^1(A)$.

Corolario 4.2.7. *Sea $A \subset \Omega$ un cuasi-abierto no vacío. Entonces,*

$$\{u_A^f : f \in L^\infty(\Omega)\} \text{ es denso en } L^2(A).$$

Demostración. Sigue de las dos proposiciones anteriores. □

Capítulo 5

Γ -convergencia

En la primera sección, estudiamos propiedades básicas de la Γ -convergencia, teniendo como referencia los libros de Andrea Braides [2] y Gianni Dal Maso [8].

Definimos la γ -convergencia de una sucesión de conjuntos cuasi-abiertos contenidos en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y damos una caracterización variacional y otra, en término de operadores resolventes. Más adelante, vemos que la γ -convergencia de conjuntos cuasi-abiertos es un caso particular de la γ -convergencia de medidas borelianas, no negativas, que pueden tomar el valor $+\infty$ y que se anulan en todos los conjuntos de capacidad cero. Utilizamos como bibliografía, principalmente, los trabajos de Dal Maso y Mosco [9, Secciones 3 y 4] y Bucur [4].

5.1. Γ -convergencia

Definición 5.1.1. Sea X un espacio topológico. Sean $F_h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ y $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funcionales. Decimos que $(F_h)_h$ Γ -converge a F en X , si

(i) para toda $u \in X$ y para toda sucesión $(u_h)_h$ en X tal que $u_h \rightarrow u$ en X , se tiene que

$$F(u) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h),$$

(ii) para toda $u \in X$ tal que $F(u) < \infty$, existe una sucesión $(u_h)_h$ en X tal que $u_h \rightarrow u$ en X y

$$F(u) = \lim_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h).$$

En tal caso, se dirá que F es el Γ -límite de $(F_h)_h$.

Observación 5.1.2. Notar que la condición (ii) de la definición de Γ -convergencia, es equivalente a que para toda $u \in X$, exista una sucesión $(u_h)_h$ en X tal que $u_h \rightarrow u$ en X y

$$F(u) \geq \limsup_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h).$$

La Γ -convergencia es estable bajo perturbaciones continuas.

Observación 5.1.3. Sean $F_h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $F, G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funcionales tales que $(F_h)_h$ Γ -converge a F en X y G es continua en X . Entonces, $(F_h + G)_h$ Γ -converge a $F + G$.

Demostración. Es inmediata de la definición de Γ -convergencia y la continuidad de G . \square

El Γ -límite de formas cuadráticas en X , resulta ser también una forma cuadrática en X , (ver la definición de forma cuadrática en 3.2.1).

Teorema 5.1.4. *Sea $(F_h)_h$ una sucesión de formas cuadráticas no negativas en X tal que Γ -converge a F . Entonces, F es una forma cuadrática no negativa.*

Se puede encontrar una demostración en el libro de Gianni Dal Maso [8, Teorema 11.10].

Proposición 5.1.5. *Sean $F_h, F, G : X \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $(F_h)_h$ Γ -converge a F y G es continua. Si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existe $K_\lambda \subset X$ compacto tal que*

$$\{v \in X : F_h(v) + G(v) \leq \lambda\} \subset K_\lambda \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Entonces, $F + G$ alcanza su mínimo en X y

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \inf_{v \in X} \{F_h(v) + G(v)\} = \min_{v \in X} \{F(v) + G(v)\}.$$

Si además, $F_h + G$ alcanza su mínimo en $u_h \in X$ y $F + G$ tiene un único mínimo u en X , entonces $(u_h)_h$ converge a u en X .

Demostración. Como la Γ -convergencia es estable por perturbaciones continuas, podemos olvidarnos de la función G . Pues, como la sucesión $(F_h)_h$ Γ -converge a F y G es continua, tenemos que $(F_h + G)_h$ Γ -converge a $F + G$. Definiendo $\tilde{F}_h = F_h + G$ y $\tilde{F} = F + G$, basta probar que si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existe $K_\lambda \subset X$ compacto tal que

$$\{v \in X : \tilde{F}_h(v) \leq \lambda\} \subset K_\lambda \quad \forall h \in \mathbb{N},$$

entonces \tilde{F} alcanza el mínimo en X y vale

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \inf_{v \in X} \{\tilde{F}_h(v)\} = \min_{v \in X} \{\tilde{F}(v)\}.$$

Para simplificar la notación, $\tilde{F} = F$ y $\tilde{F}_h = F_h$.

Por definición de ínfimo, para cada $h \in \mathbb{N}$, existe un $x_h \in X$ tal que

$$F_h(x_h) \leq \inf_X F_h + \frac{1}{h}.$$

Asumimos que F no es idénticamente $+\infty$. Por lo tanto, existe $x_0 \in X$ tal que $F(x_0) < \infty$. Por la segunda condición de la definición de Γ -convergencia, tenemos que existe una sucesión $(z_h)_h$ en X , tal que $(z_h)_h$ converge a x_0 en X y

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} F_h(z_h) \leq F(x_0) < \infty,$$

por lo tanto,

$$\sup_{h \in \mathbb{N}} F_h(z_h) < +\infty$$

Entonces,

$$F_h(x_h) \leq \inf_X F_h + \frac{1}{h} \leq F_h(z_h) + 1 \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} F_k(z_k) + 1 =: \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, $x_h \in \{v \in X : F_h(v) \leq \lambda\}$, para toda $h \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, existe K_λ compacto en X tal que

$$\{v \in X : F_h(v) \leq \lambda\} \subset K_\lambda, \text{ para toda } h \in \mathbb{N}.$$

Luego, $(x_h)_h \subset K_\lambda$. Por lo tanto, existe una subsucesión de $(x_h)_h$, que seguimos notando con h , que converge a un $x \in X$. Por la primera condición de la definición de la Γ -convergencia de $(F_h)_h$ a F , tenemos que

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(x_h) \geq F(x) \geq \inf_X F.$$

Entonces,

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} \inf_X F_h \geq \inf_X F.$$

Por otro lado, por la definición de ínfimo, dado $\epsilon > 0$, existe $y \in X$ tal que

$$F(y) \leq \inf_X F + \epsilon.$$

Por la segunda condición de la definición de Γ -convergencia de $(F_h)_h$ a F , tenemos que existe una sucesión $(y_h)_h$ que converge a y , tal que

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} F_h(y_h) \leq F(y).$$

Entonces,

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} \inf_X F_h \leq \limsup_{h \rightarrow +\infty} F_h(y_h) \leq \inf_X F + \epsilon.$$

Luego,

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} \inf_X F_h \leq \inf_X F + \epsilon,$$

para todo $\epsilon > 0$. Entonces,

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} \inf_X F_h \leq \inf_X F.$$

Además,

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} \inf_X F_h \leq \inf_X F \leq F(x) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \inf_X F_h \leq \limsup_{h \rightarrow +\infty} \inf_X F_h.$$

Entonces, valen las igualdades. Por lo tanto, F alcanza el mínimo en x y

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \inf_X F_h = \min_X F,$$

como queríamos ver.

Si además, existen $u_h \in X$ tal que $\min_X F_h = F_h(u_h)$ y existe un único $u \in X$ tal que $\min_X F = F(u)$, veamos que $(u_h)_h$ converge a u en X . En efecto, por lo probado anteriormente tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \inf_X F_h = \min_X F = F(u).$$

Veamos que toda $(u_{h_k})_k$ subsucesión de $(u_h)_h$, admite una subsucesión $(u_{h_{k_j}})_j$ convergente a u . Luego, la sucesión *entera* $(u_h)_h$ converge a u . Sea $(u_{h_k})_k$ subsucesión de $(u_h)_h$. Como $\lim_h F_h(u_h) = F(u)$, resulta $\lim_k F_{h_k}(u_{h_k}) = F(u)$. Entonces, podemos suponer que $u_{h_k} \in \{v \in X : F_{h_k}(v) \leq F(u) + 1\}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, existe un compacto K que contiene dicho conjunto. En particular contiene a la sucesión $(u_{h_k})_k$. Luego, existe una subsucesión $(u_{h_{k_j}})_j$ que converge a un cierto $x \in K$. Por la primera condición de la Γ -convergencia, tenemos que

$$F(x) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} F_{h_{k_j}}(u_{h_{k_j}}) = F(u) = \min_X F.$$

Como estamos suponiendo que F tiene un único punto mínimo, resulta $u = x$, lo que concluye la demostración. \square

Proposición 5.1.6. *Sean X e Y espacios Banach tales que $Y \subset X$. Y es reflexivo y separable. Y es denso en X . La inclusión $Y \hookrightarrow X$ es compacta. Sea $F_h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexa para cada $h \in \mathbb{N}$ tal que $F_h(u) \geq \|u\|_Y^2$ para toda $u \in Y$ y $F_h(u) = +\infty$ si $u \notin Y$. Supongamos que existe una $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ semicontinua inferior y convexa tal que*

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \inf_{v \in X} \{F_h(v) + G(v)\} = \min_{v \in X} \{F(v) + G(v)\},$$

para toda $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua y lineal. Entonces, $(F_h)_h$ Γ -converge a F en X .

Se demuestra usando algunos resultados de [1, Corolario 3.13]. Nos interesa la proposición anterior en el caso en que $X = L^2(\Omega)$, $Y = H_0^1(\Omega)$, para Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n .

5.2. γ -convergencia I

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sea $-\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, el operador de Laplace. Sea $A \subset \Omega$ un cuasi-abierto y sea el $R_A = (-\Delta)^{-1}$, el operador resolvente. Es decir, $R_A(f) = u_A^f$ para cada $f \in H^{-1}(\Omega)$. Esto es,

$$\begin{cases} -\Delta u_A^f = f \text{ en } A, \\ u_A^f \in H_0^1(A). \end{cases}$$

Notamos $\mathcal{A}(\Omega) = \{A \subset \Omega : A \text{ cuasi-abierto}\}$.

Definición 5.2.1. Sea $(A_h)_h$ una sucesión en $\mathcal{A}(\Omega)$. Decimos que

$$(A_h)_h \text{ } \gamma\text{-converge a } A \in \mathcal{A}(\Omega)$$

si

$$(R_{A_h}(f))_h \text{ converge a } R_A(f) \text{ en } H_0^1(\Omega) \text{ para toda } f \in H^{-1}(\Omega).$$

Observación 5.2.2. Vimos en el teorema de *Independencia de f* 2.2.10, que si $(u_{A_h}^1)_h$ converge a u_A^1 fuerte en $L^2(\Omega)$, entonces $(u_{A_h}^f)_h$ converge a u_A^f fuerte en $H_0^1(\Omega)$, para toda $f \in H^{-1}(\Omega)$. Por lo tanto, podemos decir que

$$(A_h)_h \text{ } \gamma\text{-converge a } A \in \mathcal{A}(\Omega) \Leftrightarrow (R_{A_h}(1))_h \text{ converge a } R_A(1) \text{ en } L^2(\Omega).$$

A continuación, daremos dos caracterizaciones de la γ -convergencia de conjuntos cuasi-abiertos contenidos en un abierto acotado Ω . La primera se trata de una caracterización variacional y la segunda, en términos de operadores resolventes. Más adelante, veremos que la γ -convergencia de cuasi-abiertos es un caso particular de la γ -convergencia de ciertas medidas en el espacio de medidas borelianas, no negativas, que pueden tomar el valor $+\infty$ y que se anulan en todos los conjuntos de capacidad cero.

Para todo $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ consideramos el funcional $\Phi_A : L^2(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definido por

$$\Phi_A(u) = \begin{cases} \int_A |\nabla u|^2 dx, & \text{si } u \in H_0^1(A), \\ +\infty, & \text{sino.} \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Proposición 5.2.3 (Caracterización variacional). *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos y sea $A \in \mathcal{A}(\Omega)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) $(A_h)_h$ γ -converge a A .
- (ii) $(\Phi_{A_h})_h$ Γ -converge a Φ_A en $L^2(\Omega)$.

Demostración.

- Veamos que (i) \Rightarrow (ii).

Llamo $Y = H_0^1(\Omega)$, $X = L^2(\Omega)$. Entonces, $Y \subset X$, Y es reflexivo y separable (más aún, es un espacio de Hilbert), Y es denso en X , la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacta. Las funciones Φ_{A_h} son convexas y verifican que $\Phi_{A_h}(v) = \|v\|_{H_0^1(A_h)}^2$ para toda $v \in H_0^1(A_h)$ y $\Phi_{A_h}(v) = +\infty$ si $v \notin H_0^1(A_h)$. Además, Φ_A es semicontinua inferior y convexa.

Veamos que para toda $G: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua vale

$$\lim_h \inf_{v \in X} \{\Phi_{A_h}(v) + G(v)\} = \min_{v \in X} \{\Phi_A(v) + G(v)\}$$

Fijo una función $G: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua. Por la definición de ínfimo, para cada $h \in \mathbb{N}$, existe una función $v_h \in H_0^1(A_h)$ tal que

$$\Phi_{A_h}(v_h) + G(v_h) \leq \inf_X \{\Phi_{A_h} + G\} + \frac{1}{h}$$

Como G es lineal, $G(0) = 0$. Entonces,

$$\Phi_{A_h}(v_h) + G(v_h) \leq \inf_X \{\Phi_{A_h} + G\} + \frac{1}{h} \leq \Phi_{A_h}(0) + G(0) + 1 = 1 < \infty$$

Por otro lado, como G es continua en $L^2(\Omega)$, existe una constante $M > 0$ tal que $|G(v)| \leq M\|v\|_{L^2(\Omega)}$ para toda $v \in L^2(\Omega)$. En particular, $|G(v_h)| \leq M\|v_h\|_{L^2(\Omega)}$ para toda $h \in \mathbb{N}$. Usando la desigualdad de Poincaré, pues cada $v_h \in H_0^1(A_h)$, y el hecho de que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, resulta

$$|G(v_h)| \leq M\alpha(c)\|v_h\|_{H_0^1(A_h)}, \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{H_0^1(A_h)}^2 - M\alpha(c)\|v_h\|_{H_0^1(A_h)} &= \Phi_{A_h}(v_h) - M\alpha(c)\|v_h\|_{H_0^1(A_h)} \\ &\leq \Phi_{A_h}(v_h) + G(v_h) \leq 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(v_h)_h$ es acotada en $Y = H_0^1(\Omega)$. Luego, existe una subsucesión, que seguiremos notando con h , y una función $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $(v_h)_h$ converge a v débil en $H_0^1(\Omega)$ y por el teorema de Rellich-Kondrachov, fuerte en $L^2(\Omega)$.

Como G es continua en $L^2(\Omega)$ y $(v_h)_h$ converge a v fuerte en $L^2(\Omega)$, resulta $G(v) = \lim_h G(v_h)$. Por la convergencia débil en $H_0^1(\Omega)$, tenemos que

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \|v_h\|_{H_0^1(A_h)}$$

Entonces,

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + G(v) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \{\Phi_{A_h}(v_h) + G(v_h)\}$$

-Veamos que $v \in H_0^1(A)$.

Sea $f = -\Delta v \in H^{-1}(\Omega)$. Considero $u_h = u_{A_h}^f$, es decir, $R_{A_h}(f) = u_h \in H_0^1(A_h)$. Como $(A_h)_h$ γ -converge a A , tenemos que $(u_h)_h$ converge a u_A^f fuerte en $H_0^1(\Omega)$. Quiero ver que $v = u_A^f$. Llamo $u = u_A^f$.

Tomando $v_h - u_h \in H_0^1(A_h)$ como función test en la formulación débil de $-\Delta u_h = f$ en A_h y usando el hecho de que $f = -\Delta v$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(v_h - u_h) \nabla u_h dx &= \int_{A_h} \nabla(v_h - u_h) \nabla u_h dx = \int_{A_h} (v_h - u_h) f dx \\ &= \int_{A_h} (v_h - u_h) (-\Delta v) dx = \int_{A_h} \nabla(v_h - u_h) \nabla v dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla(v_h - u_h) \nabla v dx \end{aligned}$$

Ahora, tomando límite en h , como $(v_h - u_h)_h$ converge a $v - u$ débil en $H_0^1(\Omega)$ y $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $H_0^1(\Omega)$, resulta

$$\int_{\Omega} \nabla(v - u) \nabla u dx = \int_{\Omega} \nabla(v - u) \nabla v dx$$

Entonces,

$$\int_{\Omega} |\nabla(v - u)|^2 dx = 0$$

Por lo tanto, $v = u_A^f$. Luego, $v \in H_0^1(A)$ como queríamos ver. Entonces, v pertenece al dominio de Φ_A y $\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|v\|_{H_0^1(A)}^2 = \Phi_A(v)$. Luego,

$$\inf_X \{\Phi_A + G\} \leq \Phi_A(v) + G(v) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \{\Phi_{A_h}(v_h) + G(v_h)\} \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \inf_X \{\Phi_{A_h} + G\}$$

Por lo tanto,

$$\inf_X \{\Phi_A + G\} \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \inf_X \{\Phi_{A_h} + G\}$$

Sea $\epsilon > 0$. Por definición de ínfimo y el hecho de que el ínfimo de $\Phi_A + G$ en $L^2(\Omega)$ coincide con el ínfimo de $\Phi_A + G$ en $H_0^1(A)$, existe $u \in H_0^1(A)$ tal que

$$\Phi_A(u) + G(u) \leq \inf_X \{\Phi_A + G\} + \epsilon$$

Considero $f = -\Delta u$, $f \in H^{-1}(\Omega)$ y vale que $u = u_A^f$. Tomo $z_h \in H_0^1(A_h)$ tal que $-\Delta z_h = f$ en A_h . Como $(A_h)_h$ γ -converge a A , tenemos que $(z_h)_h$ converge a u fuerte en $H_0^1(\Omega)$. En particular, la sucesión de normas $(\|z_h\|_{H_0^1(\Omega)})_h$ converge a $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. Como cada $z_h \in H_0^1(A_h)$, tenemos que $\|z_h\|_{H_0^1(\Omega)} = \|z_h\|_{H_0^1(A_h)} = \Phi_{A_h}(z_h)^{1/2}$. Como $u \in H_0^1(A)$, $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(A)} = \Phi_A(u)^{1/2}$. Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \Phi_{A_h}(z_h) = \Phi_A(u).$$

Por la continuidad de G en $L^2(\Omega)$ y el hecho de que $(z_h)_h$ converge a u fuerte en $H_0^1(\Omega)$ (por lo tanto, en $L^2(\Omega)$), resulta que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} G(z_h) = G(u)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow +\infty} \inf_{H_0^1(A_h)} \{\Phi_{A_h} + G\} &\leq \lim_{h \rightarrow +\infty} \{\Phi_{A_h}(z_h) + G(z_h)\} \\ &= \Phi_A(u) + G(u) \\ &\leq \inf_{H_0^1(A)} \{\Phi_A + G\} + \epsilon \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto,

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} \inf_X \{\Phi_{A_h} + G\} \leq \inf_X \{\Phi_A + G\}$$

Finalmente,

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} \inf_X \{\Phi_{A_h} + G\} \leq \inf_X \{\Phi_A + G\} \leq \Phi_A(v) + G(v) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \inf_X \{\Phi_{A_h} + G\},$$

entonces, $\Phi_A + G$ alcanza el mínimo y

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \inf_X \{\Phi_{A_h} + G\} = \min_X \{\Phi_A + G\}$$

como queríamos ver.

Ahora, estamos en condiciones de aplicar la proposición 5.1.6, y por lo tanto, $(\Phi_{A_h})_h$ Γ -converge a Φ_A en $L^2(\Omega)$.

- Veamos (ii) \Rightarrow (i).

Llamo nuevamente $X = L^2(\Omega)$, $G: X \rightarrow \mathbb{R}$, $G(v) = -2 \int_{\Omega} v dx$ es continua. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existe un compacto $K_{\lambda} \subset X$ tal que

$$E_{\lambda} = \{v \in L^2(\Omega): \Phi_{A_h}(v) + G(v) \leq \lambda\} \subset K_{\lambda} \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Pues, si tomo $v \in E_{\lambda}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo, en particular $v \in H_0^1(A_h) \subset H_0^1(\Omega)$ y, usando las desigualdades de Hölder y Poincaré

$$-\frac{1}{2}G(v) = \int_{\Omega} v dx \leq |\Omega|^{1/2} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c |\Omega|^{1/2} \|v\|_{H_0^1(A_h)} = c |\Omega|^{1/2} \Phi_{A_h}(v)^{1/2}$$

Entonces,

$$\Phi_{A_h}(v) - 2c |\Omega|^{1/2} \Phi_{A_h}(v)^{1/2} \leq \Phi_{A_h}(v) + G(v) \leq \lambda$$

Luego, $E_{\lambda} \subset K_{\lambda}$, donde K_{λ} es una bola cerrada en $H_0^1(\Omega)$ de radio que depende de λ . Esta bola resulta compacta en $L^2(\Omega)$ por Rellich-Kondrachov.

Por la proposición 5.1.5, resulta que $\Phi_A + G$ alcanza su mínimo y

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \inf_{v \in L^2(\Omega)} \{\Phi_{A_h}(v) + G(v)\} = \min_{v \in L^2(\Omega)} \{\Phi_A(v) + G(v)\},$$

es decir,

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \inf_{v \in H_0^1(A_h)} \left\{ \int_{A_h} |\nabla v|^2 dx - 2 \int_{A_h} v dx \right\} = \min_{v \in H_0^1(A)} \left\{ \int_A |\nabla v|^2 dx - 2 \int_A v dx \right\}.$$

Por la proposición 2.2.1 aplicada a cada A_h y a A , sabemos que

$$\begin{aligned} \min_{v \in H_0^1(A_h)} \left\{ \int_{A_h} |\nabla v|^2 dx - 2 \int_{A_h} v dx \right\} &= \int_{A_h} |\nabla u_{A_h}^1|^2 dx - 2 \int_{A_h} u_{A_h}^1 dx \\ \min_{v \in H_0^1(A)} \left\{ \int_A |\nabla v|^2 dx - 2 \int_A v dx \right\} &= \int_A |\nabla u_A^1|^2 dx - 2 \int_A u_A^1 dx. \end{aligned}$$

Nuevamente, usando la segunda parte de la proposición 5.1.5 y el hecho de que $\Phi_{A_h} + G$ alcanza el mínimo en $u_{A_h}^1$ y $\Phi_A + G$ tiene un único punto mínimo u_A^1 , tenemos que $(u_{A_h}^1)_h$ converge a u_A^1 en $L^2(\Omega)$. Por lo tanto, $(A_h)_h$ γ -converge a A en $\mathcal{A}(\Omega)$. \square

Proposición 5.2.4 (Caracterización en términos de operadores resolventes).

Sean $(A_h)_h$ una sucesión en $\mathcal{A}(\Omega)$, $A \in \mathcal{A}(\Omega)$. Son equivalentes:

- (i) $(A_h)_h$ γ -converge a A en $\mathcal{A}(\Omega)$.
- (ii) $(R_{A_h})_h$ converge a R_A en $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$.

Demostración.

- Veamos (i) \Rightarrow (ii).

Queremos ver que $(R_{A_h})_h$ converge a R_A en $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$, es decir,

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \sup_{\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq 1} \|R_{A_h}(f) - R_A(f)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Recordemos la notación $R_A(f) = u_A^f$. Por definición de supremo, para cada $h \in \mathbb{N}$, existe una $f_h \in L^2(\Omega)$, tal que

$$\sup_{\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq 1} \|u_{A_h}^f - u_A^f\|_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{h} \leq \|u_{A_h}^{f_h} - u_A^{f_h}\|_{L^2(\Omega)}$$

con $\|f_h\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$. Veamos que $\|u_{A_h}^{f_h} - u_A^{f_h}\|_{L^2(\Omega)}$ tiende a cero, cuando $h \rightarrow +\infty$.

Como la sucesión $(f_h)_h$ es acotada en $L^2(\Omega)$, existe una subsucesión, que seguimos notando con h , y una f tal que $(f_h)_h$ converge a f débil en $L^2(\Omega)$. Como

el operador inclusión $i: H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacto (por Rellich-Kondrachov), tenemos que su operador adjunto $i^*: L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ (que también es la inclusión) resulta compacto. Entonces, podemos afirmar que $(f_h)_h$ converge a f fuerte en $H^{-1}(\Omega)$.

Usando la linealidad y continuidad del problema de Dirichlet, tenemos que

$$\begin{aligned} \|u_{A_h}^{f_h} - u_A^{f_h}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_{A_h}^{f_h} - u_{A_h}^f\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{A_h}^f - u_A^f\|_{L^2(\Omega)} + \|u_A^f - u_A^{f_h}\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|u_{A_h}^{f_h-f}\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{A_h}^f - u_A^f\|_{L^2(\Omega)} + \|u_A^{f-f_h}\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq c\|f_h - f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u_{A_h}^f - u_A^f\|_{L^2(\Omega)} + c\|f - f_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &= 2c\|f_h - f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u_{A_h}^f - u_A^f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Como $(f_h)_h$ converge a f fuerte en $H^{-1}(\Omega)$ y $\|u_{A_h}^f - u_A^f\|_{L^2(\Omega)}$ tiende a cero (porque $(A_h)_h$ γ -converge a A), resulta

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +\infty} \sup_{\|g\|_{L^2(\Omega)} \leq 1} \|u_{A_h}^g - u_A^g\|_{L^2(\Omega)} &\leq \lim_{h \rightarrow +\infty} \left\{ \|u_{A_h}^{f_h} - u_A^{f_h}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \|u_{A_h}^{f_h} - u_A^{f_h}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \lim_{h \rightarrow +\infty} \left\{ 2c\|f_h - f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u_{A_h}^f - u_A^f\|_{L^2(\Omega)} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión de operadores $(R_{A_h})_h$ converge a R_A en $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$.

• Veamos (ii) \Rightarrow (i).

Para garantizar la γ -convergencia de $(A_h)_h$ a A , por el teorema 2.2.10, alcanza con ver que $(u_{A_h}^1)_h$ converge a u_A^1 en $L^2(\Omega)$. Por (ii), tomando $f = |\Omega|^{-1/2} \in L^2(\Omega)$, tenemos que $\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \sup_{\|g\|_{L^2(\Omega)} \leq 1} \|u_{A_h}^g - u_A^g\|_{L^2(\Omega)} \geq \lim_{h \rightarrow +\infty} \|u_{A_h}^f - u_A^f\|_{L^2(\Omega)} \\ &= |\Omega|^{-1/2} \lim_{h \rightarrow +\infty} \|u_{A_h}^1 - u_A^1\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

5.3. El espacio de medidas capacitarias

Notamos con \mathcal{M}_0 al conjunto de medidas capacitarias de \mathbb{R}^n . Es decir, \mathcal{M}_0 es el conjunto de todas las medidas borelianas, no negativas, que pueden tomar el valor $+\infty$, que se anulan sobre todos los conjuntos de capacidad cero.

Ejemplo 5.3.1. Un ejemplo muy importante de medida capacitaria es

$$\infty_S(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{cap}(B \cap S) = 0 \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.3.1)$$

con $S \subset \mathbb{R}^n$.

A cada $\mu \in \mathcal{M}_0$ le asociamos un funcional cuadrático

$$F_\mu(u, \Omega) = \begin{cases} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 d\mu & \text{si } u \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases} \quad (5.3.2)$$

donde Ω es un abierto acotado arbitrario de \mathbb{R}^n .

Ejemplo 5.3.2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cuasi-abierto tal que $|A| < \infty$. El funcional asociado a ∞_{A^c} es

$$F_{\infty_{A^c}}(u, \Omega) = \begin{cases} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 d\infty_{A^c} & \text{si } u \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

para todo abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Fijo Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n .

Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\int_\Omega |u|^2 d\infty_{A^c} = 0$. Quiero ver que $u \in H_0^1(A \cap \Omega)$.

Llamo $E = \{u \neq 0\}$. Como $0 \leq \int_\Omega |u|^2 d\infty_{A^c} = 0$, tenemos que $u = 0$ ∞_{A^c} -casi todo punto. Es decir, $\infty_{A^c}(E) = 0$. Por definición de esta medida, $\text{cap}(E \cap A^c) = 0$. Luego, $u = 0$ q.t.p. de A^c . Además, $u = 0$ q.t.p. en Ω^c . Concluimos que $u = 0$ q.t.p. de $A^c \cup \Omega^c = (A \cap \Omega)^c$. Luego, $u \in H_0^1(A \cap \Omega)$.

Recíprocamente, si $u \in H_0^1(A \cap \Omega)$, en particular, $u \in H_0^1(A)$. Entonces, $u = 0$ q.t.p. de A^c . Nuevamente, llamo $E = \{u \neq 0\}$. Tenemos que $\text{cap}(E \cap A^c) = 0$, es decir, $\infty_{A^c}(E) = 0$. Por lo tanto,

$$\int_\Omega |u|^2 d\infty_{A^c} = \int_E |u|^2 d\infty_{A^c} = 0.$$

Entonces, el funcional asociado a ∞_{A^c} nos queda,

$$F_{\infty_{A^c}}(u, \Omega) = \begin{cases} \int_{A \cap \Omega} |\nabla u|^2 dx & \text{si } u \in H_0^1(A \cap \Omega), \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Observemos que si A es acotado, para todo abierto Ω tal que $A \subset \Omega$, el funcional asociado a ∞_{A^c} nos queda,

$$F_{\infty_{A^c}}(u, \Omega) = \begin{cases} \int_A |\nabla u|^2 dx & \text{si } u \in H_0^1(A), \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

que coincide con la definición de Φ_A (5.2.1).

A continuación, definimos una noción de convergencia de medidas en \mathcal{M}_0 que generaliza la noción de γ -convergencia de una sucesión $(A_h)_h$ de cuasi-abiertos uniformemente acotados, es decir, $A_h \subset \Omega$ para toda $h \in \mathbb{N}$, donde Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^n , ver 5.2.1.

Definición 5.3.3. Dadas $\mu_h, \mu \in \mathcal{M}_0$. Decimos que $(\mu_h)_h$ γ -converge a μ si para todo abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $F_{\mu_h}(\cdot, \Omega)$ Γ -converge a $F_\mu(\cdot, \Omega)$ en $L^2(\Omega)$.

Observación 5.3.4. Notemos que la notación es consistente con la definición de γ -convergencia de cuasi-abiertos uniformemente acotados $(A_h)_h$ a un cuasi-abierto A en $\mathcal{A}(\Omega)$. Pues, cada cuasi-abierto A_h representa la medida $\infty_{A_h^c}$ y, como vimos en el ejemplo 5.3.2, cada funcional Φ_{A_h} coincide con $F_{\infty_{A_h^c}}(\cdot, \Omega)$.

Podemos entonces, enunciar el siguiente resultado:

Proposición 5.3.5. Sea una sucesión de cuasi-abiertos $(A_h)_h$ y un cuasi-abierto A contenidos en Ω . Son equivalentes:

- (i) $(A_h)_h$ γ -converge a A en $\mathcal{A}(\Omega)$.
- (ii) $(\infty_{A_h^c})_h$ γ -converge a ∞_{A^c} en \mathcal{M}_0 .

Demostración. Sigue del ejemplo 5.3.2, en el que se deduce que los funcionales Φ_{A_h}, Φ_A coinciden con los funcionales $F_{\infty_{A_h^c}}(\cdot, \Omega), F_{\infty_{A^c}}(\cdot, \Omega)$ respectivamente, y de la proposición 5.2.3. \square

Enunciamos unos resultados sobre una caracterización variacional y otra en términos de operadores resolventes de la definición de γ -convergencia de medidas capacitarias.

Proposición 5.3.6 (Caracterización variacional). Sea $(\mu_h)_h$ una sucesión en \mathcal{M}_0 y $\mu \in \mathcal{M}_0$. Son equivalentes:

- (i) $(\mu_h)_h$ γ -converge a μ .
- (ii) La sucesión de mínimos $(m_h)_h$ converge a m , donde

$$m_h = \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 d\mu_h + \int_{\Omega} f u dx \right\}$$

$$m = \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 d\mu + \int_{\Omega} f u dx \right\},$$

para todo abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, para toda $f \in L^2(\Omega)$.

Demostración. Usando las proposiciones de Γ -convergencia 5.1.5 e 5.1.6 para $X = L^2(\Omega)$ y $Y = H_0^1(\Omega)$, la demostración resulta análoga a la prueba de la caracterización variacional de la γ -convergencia de cuasi-abiertos, 5.2.3. \square

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $f \in L^2(\Omega)$ y $\mu \in \mathcal{M}_0$. Llamamos al siguiente problema:

$$-\Delta u + \mu u = f \text{ en } \Omega \quad (5.3.3)$$

el problema de Dirichlet relajado en Ω .

Definición 5.3.7. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $f \in L^2(\Omega)$ y $\mu \in \mathcal{M}_0$. Decimos que u es solución débil de (5.3.3) si

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, \mu), \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v d\mu = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, \mu). \end{cases} \quad (5.3.4)$$

Para cada $\mu \in \mathcal{M}_0$ y cada abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, notamos R_{μ}^{Ω} al operador resolvente

$$R_{\mu}^{\Omega} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), R_{\mu}^{\Omega}(f) = u,$$

donde u es la solución débil de $-\Delta u + \mu u = f$ en Ω .

Proposición 5.3.8 (Caracterización en términos de operadores resolventes). *Sea $(\mu_h)_h$ una sucesión en \mathcal{M}_0 y $\mu \in \mathcal{M}_0$. Son equivalentes:*

- (i) $(\mu_h)_h$ γ -converge a μ .
- (ii) $(R_{\mu_h}^{\Omega})_h$ converge a R_{μ}^{Ω} en $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$, para cada abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Demostración. Es análoga a la demostración que caracteriza a la γ -convergencia de cuasi-abiertos en términos de operadores resolventes, ver 5.2.4. \square

Nuevamente, observamos que esta noción de convergencia de operadores resolventes de medidas en \mathcal{M}_0 generaliza la vista anteriormente para operadores resolventes de conjuntos cuasi-abiertos en $\mathcal{A}(\Omega)$.

Ejemplo 5.3.9. Sea $A \subset \Omega$ un abierto. Tomamos la medida ∞_{A^c} , ver 5.3.1. Consideramos el problema de Dirichlet relajado

$$-\Delta u + \infty_{A^c} u = f \text{ en } \Omega.$$

Quiero ver que es equivalente al problema original de Dirichlet

$$u \in H_0^1(A), -\Delta u = f \text{ en } A.$$

Basta observar que

$$L^2(\Omega, \infty_{A^c}) = \{u : u = 0 \text{ q.t.p. de } A^c\},$$

entonces,

$$H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, \infty_{A^c}) = H_0^1(A).$$

Teorema 5.3.10 (Compacidad). *Para toda sucesión $(\mu_h)_{h \geq 0} \subset \mathcal{M}_0$ existe una subsucesión $(\mu_{h_k})_{k \geq 0}$ tal que γ -converge a una μ en la clase \mathcal{M}_0 .*

Se puede ver una demostración en [9, Teorema 4.14].

Este resultado de compacidad en el espacio de medidas capacitarias nos brinda un resultado de compacidad para los conjuntos cuasi-abiertos de medida de Lebesgue acotada. Si $(A_h)_h$ es una sucesión de cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n tal que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$ (asociando a cada A_h con la medida $\infty_{A_h^c} \in \mathcal{M}_0$), tenemos que existe una subsucesión $(A_{h_k})_k$ y una medida $\mu \in \mathcal{M}_0$ tal que $(\infty_{A_{h_k}^c})_k$ γ -converge a μ . En tal caso, notaremos $(A_{h_k})_k$ γ -converge a μ .

5.4. γ -convergencia II

En esta sección, estudiaremos la γ -convergencia de una sucesión $(A_h)_h$ de cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n tal que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, con $c > 0$ una constante. Notar que esta restricción no implica que la sucesión verifique $A_h \subset \Omega$, para algún Ω abierto acotado de \mathbb{R}^n . Por ejemplo, $A_h = B_r(x_h)$ con $r > 0$ tal que $|A_h| = c$ y $(x_h)_h$ en \mathbb{R}^n , $\lim_h |x_h| = +\infty$.

Introducimos la notación que utilizaremos en el Capítulo 7.

Sea A un cuasi-abierto de \mathbb{R}^n . Notamos $R_A: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ al operador resolvente del problema de Dirichlet en A . Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $R_A(f) = u$, donde u es la solución débil de $-\Delta u = f$ en A :

$$\begin{cases} \int_A \nabla u \nabla v dx = \int_A f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(A), \\ u \in H_0^1(A). \end{cases}$$

Decimos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es un *abierto fino* si es unión arbitraria de intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\{u > r\}$ o $\{u < r\}$, donde $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ es una función super-armónica y $r \in \mathbb{R}$. Decimos que una función u es *super-armónica* en A , si $v \leq u$ en A , para toda v tal que $\Delta v = 0$ en A y $v \leq u$ en ∂A . La topología definida por los abiertos finos hace continuas a las funciones super-armónicas de \mathbb{R}^n . Se puede ver que una base de la clase de abiertos finos para un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es la clase de conjuntos de la forma

$$\bigcap_{h=1}^k \{y \in B: u_h(y) < r_h\},$$

donde B es una bola que contiene al punto x , u_h es super-armónica en B tal que $u_h(x) = 0$ y $r_h > 0$, para cada h . Se puede ver más en [11, Capítulo XI, Parte I].

Sea μ una medida de Borel positiva que se anula en todos los conjuntos de capacidad cero ($\mu \in \mathcal{M}_0$). El conjunto regular de la medida μ , lo notamos A_μ .

$$A_\mu = \{\cup A: A \text{ abierto fino, } \mu(A) < \infty\}$$

El operador resolvente asociado a μ es $R_\mu: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $R_\mu(f) = u$, donde u es la solución débil de $-\Delta u + \mu u = f$ en \mathbb{R}^n , es decir,

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} u v d\mu = \int_{A_\mu} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu), \\ u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu). \end{cases}$$

Notamos $R_A(1) = w_A$, $R_\mu(1) = w_\mu$, si $|A|$ y $|A_\mu|$ son finitas.

Ejemplo 5.4.1. Se tiene que

$$H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \infty_{A^c}) = H_0^1(A),$$

para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ cuasi-abierto con $|A| < \infty$

Demostración. Sea $u \in H_0^1(A) \subset H^1(\mathbb{R}^n)$. Por definición del espacio $H_0^1(A)$, $u = 0$ q.t.p. de A^c . Es decir, $\text{cap}(\{u \neq 0\} \cap A^c) = 0$. Por lo tanto, $\infty_{A^c}(\{u \neq 0\}) = 0$. Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\infty_{A^c} = \int_{\{u \neq 0\}} |u|^2 d\infty_{A^c} = 0.$$

Así, $u \in L^2(\mathbb{R}^n, \infty_{A^c})$.

Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \infty_{A^c})$. Dado $\epsilon > 0$, usando la desigualdad de Chebyshev y que $u \in L^2(\mathbb{R}^n, \infty_{A^c})$, tenemos que

$$\infty_{A^c}(\{u \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\infty_{A^c} < \infty$$

Como ∞_{A^c} puede tomar sólo dos valores (0 ó $+\infty$), resulta $\infty_{A^c}(\{u \geq \epsilon\}) = 0$, para todo $\epsilon > 0$. Luego, $\infty_{A^c}(\{u > 0\}) = 0$. Haciendo la misma cuenta para $-u$ (que también pertenece a $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \infty_{A^c})$), se tiene que $\infty_{A^c}(\{u < 0\}) = 0$. Por lo tanto, $\infty_{A^c}(\{u \neq 0\}) = 0$. Es decir, $\text{cap}(\{u \neq 0\} \cap A^c) = 0$. Entonces, $u = 0$ q.t.p. de A^c . Luego, $u \in H_0^1(A)$. \square

El espacio $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, con producto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} u v dx + \int_{\mathbb{R}^n} u v d\mu$$

resulta ser un espacio de Hilbert separable. Se puede ver una demostración en [5].

Observación 5.4.2. Sea $\mu \in \mathcal{M}_0$ tal que $|A_\mu| < \infty$. Entonces,

$$H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu) \subset H_0^1(A_\mu).$$

Demostración. Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. Recordemos que trabajamos con los representantes casi-continuos de las funciones en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Por [10, Proposición 3.6, Capítulo II], sabemos que u es continua fina q.t.p. de \mathbb{R}^n por ser una función casi-continua en \mathbb{R}^n . Entonces, para cada $\epsilon > 0$, $\{u > \epsilon\}$ es un abierto fino. Además, por la desigualdad de Chebyshev y el hecho de que $u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, tenemos que

$$\mu(\{u > \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu < \infty$$

Entonces, $\{u > 0\} \subset A_\mu$. Usando el mismo razonamiento para $-u$ (que también es una función de $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$), tenemos que $\{u < 0\} \subset A_\mu$. Por lo tanto, $\{u \neq 0\} \subset A_\mu$, casi todo punto. Luego, $u \in H_0^1(A_\mu)$. \square

Observación 5.4.3. Si $|A_\mu| < \infty$, $\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu$ es una norma equivalente en $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$.

Demostración. Es claro que $\|u\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu$ para cada función $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$.

Como $|A_\mu| < \infty$, por la observación 5.4.2, sé que $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu) \subset H_0^1(A_\mu)$. Así, $u = 0$ q.t.p. de $\mathbb{R}^n \setminus A_\mu$ para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. Por lo tanto, usando ese hecho y luego la desigualdad de Poincaré 2.1.22, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu &= \int_{A_\mu} |\nabla u|^2 dx + \int_{A_\mu} |u|^2 dx + \int_{A_\mu} |u|^2 d\mu \\ &\leq \int_{A_\mu} |\nabla u|^2 dx + M \int_{A_\mu} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu \\ &= (1 + M) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu \right), \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

Sea $(A_h)_h$ una sucesión de casi-abiertos de \mathbb{R}^n , con $|A_h| \leq c \forall h \in \mathbb{N}$. Recordemos que podemos asignarle a cada casi-abierto A_h la medida $\infty_{A_h^c} \in \mathcal{M}_0$. Luego, por el teorema de compacidad en \mathcal{M}_0 5.3.10, tenemos que $(\infty_{A_h^c})_h$ γ -converge a una medida $\mu \in \mathcal{M}_0$ (para una subsucesión que seguimos notando con h). En tal caso, diremos que $(A_h)_h$ γ -converge a μ en \mathcal{M}_0 . Es decir, si $(F_{A_h}(\cdot, \Omega))_h$ Γ -converge a $F_\mu(\cdot, \Omega)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo abierto acotado Ω de \mathbb{R}^n , donde

$$F_{A_h}(u, \Omega) = F_{\infty_{A_h^c}}(u, \Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \chi_{H_0^1(A_h \cap \Omega)}(u) \quad (5.4.1)$$

$$F_\mu(u, \Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 d\mu + \chi_{H_0^1(\Omega)}(u), \quad (5.4.2)$$

donde se define la función característica $\chi_{H_0^1(A)}$ como

$$\chi_{H_0^1(A)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in H_0^1(A) \\ +\infty & \text{sino.} \end{cases}$$

Definimos

$$F_h(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \chi_{H_0^1(A_h)}(u) \quad (5.4.3)$$

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu \quad (5.4.4)$$

Lema 5.4.4. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n , con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ -converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$. Sea $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Entonces, para toda sucesión $(u_h)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a u débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $F(u) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h)$.

Demostración. Sea $(u_h)_h$ una sucesión en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a u débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

-Si $\liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h) = \infty$, el resultado vale trivialmente.

-Supongamos $\liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h) < \infty$. Es decir,

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h|^2 dx + \chi_{H_0^1(A_h)}(u_h) \right\} < \infty$$

Entonces, existe una subsucesión de $(u_h)_h$ (que seguimos notando con h) tal que $u_h \in H_0^1(A_h)$ y $\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h|^2 dx < \infty$. Luego, existe una constante $M > 0$ tal

que $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h|^2 dx \leq M$ para toda $h \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $(u_h)_h$ es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Entonces, existe una subsucesión (que seguimos notando con h) y $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a v débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Pero, sé que $(u_h)_h$ converge a u débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luego, $v = u$.

Sea $R > 0$. Considero una función de corte $\rho_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\rho_R = 1$ en $B_R(0)$, $\rho_R = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}(0)$, $0 \leq \rho_R \leq 1$. Entonces, $\rho_R u_h, \rho_R u \in H^1(B_{2R}(0))$ y $(\rho_R u_h)_h$ converge a $\rho_R u$ débil en $H^1(B_{2R}(0))$. Por Rellich-Kondrachov, la inclusión $H^1(B_{2R}(0)) \hookrightarrow L^2(B_{2R}(0))$ es compacta. Entonces, $(\rho_R u_h)_h$ converge a $\rho_R u$ fuerte en $L^2(B_{2R}(0))$.

Como $(A_h)_h$ γ -converge a μ , sé que la sucesión de funcionales $(F_{A_h}(\cdot, \Omega))_h$ Γ -converge a $F_\mu(\cdot, \Omega)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, para todo abierto acotado Ω de \mathbb{R}^n (ver 5.4.1, 5.4.2).

Considero $\Omega = B_{2R}(0)$. Entonces, $(F_{A_h}(\cdot, B_{2R}(0)))_h$ Γ -converge a $F_\mu(\cdot, B_{2R}(0))$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Por la primera condición de la definición de Γ -convergencia (ver 5.1.1) y el hecho de que $(\rho_R u_h)_h$ converge a $\rho_R u$ fuerte en $L^2(B_{2R}(0))$, tenemos que

$$F_\mu(\rho_R u, B_{2R}(0)) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_{A_h}(\rho_R u_h, B_{2R}(0)),$$

es decir,

$$\int_{B_{2R}(0)} |\nabla(\rho_R u)|^2 dx + \int_{B_{2R}(0)} |\rho_R u|^2 d\mu \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{B_{2R}(0)} |\nabla(\rho_R u_h)|^2 dx$$

Desarrollando,

$$\int_{B_{2R}(0)} |\nabla(\rho_R u)|^2 dx = \int_{B_{2R}(0)} [|\nabla \rho_R|^2 |u|^2 + 2\rho_R u \nabla \rho_R \nabla u + \rho_R^2 |\nabla u|^2] dx$$

además,

$$\int_{B_{2R}(0)} |\nabla(\rho_R u_h)|^2 dx = \int_{B_{2R}(0)} [|\nabla \rho_R|^2 |u_h|^2 + 2\rho_R u_h \nabla \rho_R \nabla u_h + \rho_R^2 |\nabla u_h|^2] dx$$

(a) Veamos que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{B_{2R}(0)} 2\rho_R u_h \nabla \rho_R \nabla u_h dx \right\} = \int_{B_{2R}(0)} 2\rho_R u \nabla \rho_R \nabla u dx$$

Vamos a usar el hecho de que $(\rho_R u_h)_h$ converge a $\rho_R u$ fuerte en $L^2(B_{2R}(0))$.

$$\begin{aligned} & \left| \int_{B_{2R}(0)} \rho_R u_h \nabla \rho_R \nabla u_h dx - \int_{B_{2R}(0)} \rho_R u \nabla \rho_R \nabla u dx \right| = \\ & \left| \int_{B_{2R}(0)} \rho_R u_h \nabla \rho_R \nabla u_h - \rho_R u \nabla \rho_R \nabla u_h + \rho_R u \nabla \rho_R \nabla u_h - \rho_R u \nabla \rho_R \nabla u dx \right| \\ & \left| \int_{B_{2R}(0)} (\rho_R u_h - \rho_R u) \nabla \rho_R \nabla u_h + \rho_R u \nabla \rho_R \nabla (u_h - u) dx \right| \end{aligned}$$

Por un lado, usando la desigualdad de Hölder, $\|\nabla \rho_R\|_\infty \leq m$ y $\|u_h\|_{H^1} \leq k$ (es una sucesión acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$),

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_{2R}(0)} (\rho_R u_h - \rho_R u) \nabla \rho_R \nabla u_h dx \right| & \leq \|\rho_R\|_\infty \|\rho_R u_h - \rho_R u\|_{L^2} \|\nabla u_h\|_{L^2} \\ & \leq mk \|\rho_R u_h - \rho_R u\|_{L^2(B_{2R}(0))} \end{aligned}$$

Luego, tiende a cero, pues $(\rho_R u_h)_h$ converge a $\rho_R u$ fuerte en $L^2(B_{2R}(0))$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{B_{2R}(0)} \rho_R u \nabla \rho_R \nabla (u_h - u) dx \right| = \\
& \left| \int_{B_{2R}(0)} \rho_R u \nabla \rho_R \nabla (u_h - u) + \rho_R u \rho_R (u_h - u) - \rho_R u \rho_R (u_h - u) dx \right| = \\
& \left| \int_{B_{2R}(0)} \rho_R u (\nabla \rho_R \nabla (u_h - u) + \rho_R (u_h - u)) - \rho_R u \rho_R (u_h - u) dx \right| \\
& \leq \|\rho_R u\|_\infty (\rho_R, u_h - u)_{H^1} + \|\rho_R u\|_\infty \int_{B_{2R}(0)} |\rho_R (u_h - u)| dx \\
& \leq \|\rho_R u\|_\infty (\rho_R, u_h - u)_{H^1} + \|\rho_R u\|_\infty |B_{2R}(0)|^{1/2} \|\rho_R (u_h - u)\|_{L^2(B_{2R}(0))}
\end{aligned}$$

Concluimos que tiende a cero, pues $(u_h)_h$ converge a u débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y $(\rho_R u_h)_h$ converge a $\rho_R u$ fuerte en $L^2(B_{2R}(0))$. Por lo tanto, vale (a).

(b) Veamos que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{B_{2R}(0)} |\nabla \rho_R|^2 |u_h|^2 dx \right\} = \int_{B_{2R}(0)} |\nabla \rho_R|^2 |u|^2 dx$$

En efecto, como $\|\nabla \rho_R\|_\infty \leq m$,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{B_{2R}(0)} |\nabla \rho_R|^2 |u_h|^2 dx - \int_{B_{2R}(0)} |\nabla \rho_R|^2 |u|^2 dx \right| = \left| \int_{B_{2R}(0)} |\nabla \rho_R|^2 (|u_h|^2 - |u|^2) dx \right| \\
& \leq \|\nabla \rho_R\|_\infty^2 \left| \int_{B_{2R}(0)} |u_h|^2 - |u|^2 dx \right| \\
& \leq m^2 \left| \|u_h\|_{L^2(B_{2R}(0))}^2 - \|u\|_{L^2(B_{2R}(0))}^2 \right|
\end{aligned}$$

Como $(u_h)_h$ converge a u débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$, por Rellich-Kondrachov, tenemos que $(u_h)_h$ converge a u en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Tomando $K = \overline{B_{2R}(0)}$, resulta $(u_h)_h$ converge a u en $L^2(K)$. En particular, la sucesión de normas $(\|u_h\|_{L^2(K)})_h$ converge a $\|u\|_{L^2(K)}$. Entonces, vale (b). (El borde de K mide cero con respecto a la medida de Lebesgue y las funciones en $H^1(\mathbb{R}^n)$ están definidas cuasi-todo punto.)

Por (a) y (b), resulta

$$\int_{B_{2R}(0)} \rho_R^2 |\nabla u|^2 dx + \int_{B_{2R}(0)} \rho_R^2 |u|^2 d\mu \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{B_{2R}(0)} \rho_R^2 |\nabla u_h|^2 dx$$

Tomando límite en R ,

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h|^2 dx = \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h),$$

como queríamos ver. □

Lema 5.4.5. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de quasi-abiertos de \mathbb{R}^n , con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ -converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$.*

Entonces, para toda $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $F(u) < \infty$, existe una sucesión $(u_h)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $F(u) = \lim_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h)$.

Demostración. Sea $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $F(u) < \infty$. Es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu < \infty,$$

por lo tanto, $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$.

Sea $R > 0$. Considero una función de corte $\rho_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\rho_R = 1$ en $B_R(0)$, $\rho_R = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}(0)$, $0 \leq \rho_R \leq 1$. Entonces, $(\rho_R u)_R$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

(a) Veamos que $\lim_{R \rightarrow +\infty} F(\rho_R u) = F(u)$.

$$F(\rho_R u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\rho_R u)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\rho_R u|^2 d\mu$$

Desarrollando,

$$F(\rho_R u) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[|\nabla \rho_R|^2 |u|^2 + 2\rho_R u \nabla \rho_R \nabla u + \rho_R^2 |\nabla u|^2 \right] dx + \int_{\mathbb{R}^n} \rho_R^2 |u|^2 d\mu$$

Por el teorema de convergencia mayorada para la medida de Lebesgue, tenemos que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_R^2 |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$$

y, luego, para μ ,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_R^2 |u|^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu$$

Puedo elegir la sucesión $(\rho_R)_R$ de modo que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \|\nabla \rho_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$. Por ejemplo, $\rho_R(x) = \rho_1(\frac{x}{R})$. Entonces,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \rho_R|^2 |u|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \lim_{R \rightarrow +\infty} \|\nabla \rho_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^2 = 0$$

Por otro lado, usando que $\rho_R \leq 1$, y la desigualdad de Hölder,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_R u \nabla \rho_R \nabla u dx \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lim_{R \rightarrow +\infty} \|\nabla \rho_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$$

Por lo tanto, $\lim_{R \rightarrow +\infty} F(\rho_R u) = F(u)$ como queríamos ver.

Como $(A_h)_h$ γ -converge a μ , sé que la sucesión de funcionales $(F_{A_h}(\cdot, \Omega))_h$ Γ -converge a $F_\mu(\cdot, \Omega)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, para todo abierto acotado Ω de \mathbb{R}^n (ver 5.4.1, 5.4.2). Considero $\Omega = B_{2R}(0)$. Entonces, $(F_{A_h}(\cdot, B_{2R}(0)))_h$ Γ -converge a $F_\mu(\cdot, B_{2R}(0))$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, para cada $R > 0$, $\rho_R u \in L^2(B_{2R}(0))$ y $F(\rho_R u) < \infty$. Entonces, por la segunda condición de la definición de Γ -convergencia (ver 5.1.1), tenemos que existe una sucesión $(u_h^R)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h^R)_h$ converge a $\rho_R u$ fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} F_{A_h}(u_h^R, B_{2R}(0)) = F_\mu(\rho_R u, B_{2R}(0)),$$

es decir,

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h^R) = F(\rho_R u).$$

Con un argumento diagonal, existe una sucesión $(R_h)_h$ tal que $(u_h^{R_h})_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h^{R_h}) = F(u),$$

lo que concluye la demostración. \square

Proposición 5.4.6. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de quasi-abiertos de \mathbb{R}^n , con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ -converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$.*

Entonces, la sucesión de funcionales $(F_h)_h$ Γ -converge a F en $L^2(\mathbb{R}^n)$ débil y fuerte.

Demostración. Sigue de las proposiciones 5.4.4 y 5.4.5 y el hecho de que convergencia fuerte implica convergencia débil. \square

Lema 5.4.7. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado. Sea $(E_h)_h$ una sucesión de quasi-abiertos de \mathbb{R}^n tal que $E_h \subset D$ para toda $h \in \mathbb{N}$, $(E_h)_h$ γ -converge a $v \in \mathcal{M}_0$ y $(w_{E_h})_h$ converge a η débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $A_v \cap D = \{\eta > 0\}$, salvo un conjunto de capacidad cero.*

Se puede ver una demostración en [5].

Proposición 5.4.8. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de quasi-abiertos de \mathbb{R}^n , con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ -converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$ y $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Notamos $A = \{w > 0\}$.*

Entonces, $|A| \leq c$ y $A = A_\mu$, salvo un conjunto de capacidad cero.

Demostración.

• Veamos que $|A| \leq c$.

Dado $\epsilon > 0$, tenemos que

$$\{w \geq \epsilon\} \subset \{|w - w_{A_h}| \geq \epsilon/2\} \cup \{w_{A_h} \geq \epsilon/2\}$$

Entonces, usando la desigualdad de Chebyshev y que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\{w \geq \epsilon\}| &\leq |\{|w - w_{A_h}| \geq \epsilon/2\}| + |\{w_{A_h} \geq \epsilon/2\}| \\ &\leq \frac{4}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} |w - w_{A_h}|^2 dx + |A_h| \\ &\leq \frac{4}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} |w - w_{A_h}|^2 dx + c \end{aligned}$$

Tomando límite en h , como $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$, resulta

$$|\{w \geq \epsilon\}| \leq \frac{4}{\epsilon^2} \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |w - w_{A_h}|^2 dx + c = c$$

Por lo tanto, $|\{w \geq \epsilon\}| \leq c$, para todo $\epsilon > 0$. Luego, $|A| = |\{w > 0\}| \leq c$.

- Veamos que $A = A_\mu$, salvo un conjunto de capacidad cero.

Como $(A_h)_h$ γ -converge a μ , por la proposición 5.4.6 sé que $(F_h)_h$ Γ -converge a F fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$, por la Γ -convergencia vale que

$$F(w) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(w_{A_h})$$

Usando la desigualdad de Poincaré 2.1.22 y la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h}|^2 dx &= \int_{A_h} w_{A_h} dx \leq |A_h|^{1/2} \|w_{A_h}\|_{L^2(A_h)} \\ &\leq c^{1/2} \beta(|A_h|) \|\nabla w_{A_h}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c^{1/2} \beta(c) \|\nabla w_{A_h}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(w_{A_h})_h$ es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Usando la definición de los funcionales y que la sucesión $(w_{A_h})_h$ es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$, tenemos

$$\begin{aligned} F(w) &\leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(w_{A_h}) = \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h}|^2 dx \\ &\leq M(c) = M < \infty \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^n} w^2 d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} w^2 d\mu = F(w) < \infty$$

En particular, $w \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ y por ende $A = \{w > 0\} \subset A_\mu$. Pues, para cada $\epsilon > 0$, usando la desigualdad de Chebyshev, tenemos que

$$\mu(\{w > \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} w^2 d\mu < \infty$$

Por lo tanto, $A \subset A_\mu$.

Por otro lado, dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, si $(w_{A_h \cap \Omega})_h$ converge a w^Ω débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$, por el lema 5.4.7, tomando $E_h = A_h \cap \Omega$ y $\nu = \mu|_\Omega$, tenemos que $A_\mu \cap \Omega = \{w^\Omega > 0\}$.

Como $0 \leq 1_{A_h \cap \Omega} \leq 1_{A_h}$, por el principio de comparación del problema de Dirichlet, resulta $0 \leq w_{A_h \cap \Omega} \leq w_{A_h}$. Entonces, tomando límite en la desigualdad, $0 \leq w^\Omega \leq w$. Por lo tanto, $\{w^\Omega > 0\} \subset \{w > 0\}$. Ahora, esto vale para todo Ω acotado arbitrario. Luego, $A_\mu \subset A$. Pues,

$$A_\mu = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_\mu \cap B_k(0)$$

y cada $A_\mu \cap B_k(0) \subset A$. □

Observación 5.4.9. Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n , con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ -converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$ y $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $w \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$.

Demostración. En la demostración de la proposición 5.4.8 se ve que $w \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. □

Teorema 5.4.10. Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n , con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ -converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$ y $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Notamos $A = \{w > 0\}$. Definimos

$$G_h(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \chi_{H_0^1(A_h)}(u) - \int_{A_h} u dx$$

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu - \int_A u dx$$

Entonces, la sucesión de funcionales $(G_h)_h$ Γ -converge a G en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$$\text{Más aún, } G(w) = \min_{L^2(\mathbb{R}^n)} G = \min_{H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)} G.$$

Demostración. Observemos que

$$G_h(u) = F_h(u) - \int_{A_h} u dx$$

$$G(u) = F(u) - \int_A u dx$$

(a) Sea $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Veamos que para toda sucesión $(u_h)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene $G(u) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} G_h(u_h)$.

Sea $(u_h)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

-Si $\liminf_{h \rightarrow +\infty} G_h(u_h) = +\infty$, el resultado vale trivialmente.

-Supongamos $\liminf_{h \rightarrow +\infty} G_h(u_h) < \infty$.

Por la proposición 5.4.6, sé que $(F_h)_h$ Γ -converge a F fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$F(u) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h).$$

En particular, $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu) \subset H_0^1(A_\mu) = H_0^1(A)$ (ver observación 5.4.2).

$$\text{Veamos que } \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{A_h} u_h dx = \int_A u dx.$$

Por la proposición 5.4.8, sabemos que $|A| \leq c$. Entonces, usando la desigualdad de Hölder, y que $u_h \in H_0^1(A_h)$ y $u \in H_0^1(A)$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_h} u_h dx - \int_A u dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} u_h dx - \int_{\mathbb{R}^n} u dx \right| = \left| \int_{A_h \cup A} (u_h - u) dx \right| \\ &\leq |A_h \cup A|^{1/2} \|u_h - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq (2c)^{1/2} \|u_h - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Tomando límite en h , como $(u_h)_h$ converge a u en $L^2(\mathbb{R}^n)$, resulta

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left| \int_{A_h} u_h dx - \int_A u dx \right| = 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} G(u) &= F(u) - \int_A u dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h) - \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{A_h} u_h dx \\ &= \liminf_{h \rightarrow +\infty} \left\{ F_h(u_h) - \int_{A_h} u_h dx \right\} \\ &= \liminf_{h \rightarrow +\infty} G_h(u_h), \end{aligned}$$

como queríamos ver.

(b) Sea $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $G(u) < \infty$. Veamos que existe una sucesión $(u_h)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$G(u) = \lim_{h \rightarrow +\infty} G_h(u_h).$$

Por la proposición 5.4.6, $(F_h)_h$ Γ -converge a F en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $F(u) < \infty$ (pues $G(u) < \infty$), tenemos que existe una sucesión $(u_h)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$F(u) = \lim_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h).$$

Al igual que en la parte **(a)**, tenemos que $\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{A_h} u_h dx = \int_A u dx$. Por lo tanto, vale

$$G(u) = \lim_{h \rightarrow +\infty} G_h(u_h).$$

De (a) y (b), concluimos que $(G_h)_h$ Γ -converge a G fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

- Por último, probemos que w es el mínimo de G .

Por la proposición 5.1.5 y el hecho de que w_{A_h} es el mínimo de G_h y G tiene un único punto mínimo (por ser estrictamente convexa), resulta que $(w_{A_h})_h$ converge a la función que alcanza el mínimo de G fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pero, por hipótesis, $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y además $w \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ (por la observación 5.4.9). Por lo tanto, $G(w) = \min G$. \square

Corolario 5.4.11. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n , con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ -converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$ y $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Notamos $A = \{w > 0\}$.*

Entonces, $w = w_\mu$.

Demostración. Por el teorema anterior, $w \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ y $G(w) = \min G$ y esto es equivalente a ser solución débil de $-\Delta w + \mu w = 1$ en \mathbb{R}^n . \square

Proposición 5.4.12. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n , con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ -converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$ y $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Notamos $A = \{w > 0\}$. Sea $(f_h)_h$ sucesión en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $(f_h)_h$ converge a f débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\|f_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ para toda $h \in \mathbb{N}$. Definimos*

$$I_h(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \chi_{H_0^1(A_h)}(u) - \int_{A_h} f_h u dx$$

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu - \int_A f u dx$$

Entonces, la sucesión de funcionales $(I_h)_h$ Γ -converge a I en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$$\text{Más aún, } I(w) = \min_{L^2(\mathbb{R}^n)} I = \min_{H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)} I$$

Demostración. Por la proposición 5.4.6, sé que (F_h) Γ -converge a F en $L^2(\mathbb{R}^n)$ fuerte. Notar que

$$I_h(u) = F_h(u) - \int_{A_h} f_h u dx$$

$$I(u) = F(u) - \int_A f u dx.$$

De manera análoga a la prueba de 5.4.10, alcanza con ver que dada una función $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y una sucesión $(u_h)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ que converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\liminf_h I_h(u_h) < \infty$, se tiene

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{A_h} f_h u_h dx = \int_A f u dx.$$

Como (F_h) Γ -converge a F , $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\liminf_h I_h(u_h) < \infty$, tenemos que

$$F(u) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F(u_h) < \infty$$

En particular, $u_h \in H_0^1(A_h)$ para cada $h \in \mathbb{N}$ y $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \subset H_0^1(A)$ (por la observación 5.4.2). Entonces, usando la desigualdad de Hölder y que $\|f_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{A_h} f_h u_h dx - \int_A f u dx &= \int_{A_h \cup A} f_h u_h - f u dx = \int_{A_h \cup A} f_h u_h - f_h u + f_h u - f u dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_h (u_h - u) dx + \int_{\mathbb{R}^n} (f_h - f) u dx \\ &\leq \|f_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u_h - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + (f_h - f, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|u_h - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + (f_h - f, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

Como $(f_h)_h$ converge a f débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$, tomando límite en h resulta

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{A_h} f_h u_h dx = \int_A f u dx,$$

como queríamos ver. \square

Corolario 5.4.13. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de quasi-abiertos de \mathbb{R}^n , con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ -converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$ y $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Notamos $A = \{w > 0\}$. Sea $(f_h)_h$ sucesión en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $(f_h)_h$ converge a f débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\|f_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$ para toda $h \in \mathbb{N}$.*

Entonces, la sucesión $(R_{A_h}(f_h))_h$ converge a $R_\mu(f)$ fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Se puede ver que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ existe un compacto $K_\lambda \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$E_\lambda = \{v \in L^2(\mathbb{R}^n) : I_h(v) \leq \lambda\} \subset K_\lambda$$

Se prueba de manera análoga a la implicación (i) \Rightarrow (ii) de la proposición 5.2.3. Entonces, por la proposición 5.1.5, tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \inf_{L^2(\mathbb{R}^n)} I_h = \min_{L^2(\mathbb{R}^n)} I = I(w).$$

La última igualdad es consecuencia de la proposición 5.4.12. Como $R_{A_h}(f_h)$ es mínimo de I_h e I tiene un único punto mínimo (por ser estrictamente convexa), usando la segunda parte de la proposición 5.1.5, resulta que $(R_{A_h}(f_h))_h$ converge a $R_\mu(f)$ fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$, como queríamos ver. \square

Capítulo 6

Diseño óptimo I

El objetivo de este capítulo es estudiar la existencia de solución para el siguiente problema de optimización de forma

$$\min\{F(A) : A \subset \Omega, A \text{ cuasi-abierto}, |A| = c\} \quad (6.0.1)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, F es decreciente respecto de la inclusión de conjuntos y semicontinua inferior en $\mathcal{A}(\Omega)$ con respecto a la γ -convergencia; con $\mathcal{A}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega, \text{ cuasi-abierto}\}$.

Este resultado, se debe al trabajo de Buttazzo y Dal Maso [6].

6.1. Enunciado y ejemplo

Enunciamos el teorema principal de este capítulo.

Teorema 6.1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Notamos $\mathcal{A}(\Omega)$ a la clase de conjuntos cuasi-abiertos contenidos en Ω . Sea $F : \mathcal{A}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función que satisface*

(i) *F es semicontinua inferior con respecto a la γ -convergencia.*

(ii) *F es decreciente, es decir, $F(A) \geq F(B)$, si $A \subset B$.*

Entonces, para toda constante c entre 0 y $|\Omega|$, el mínimo

$$\min\{F(A) : A \in \mathcal{A}(\Omega), |A| = c\} \quad (6.1.1)$$

se alcanza.

Ejemplo 6.1.2 (Dominios con k -ésimo autovalor mínimo). Para todo $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ sea $\lambda_k(A)$ es k -ésimo autovalor del operador $-\Delta$ en $H_0^1(A)$, con la convención de que $\lambda_k(A) = +\infty$ si $\text{cap}(A) = 0$. Es conocido que las funciones $A \rightarrow \lambda_k(A)$ son decrecientes con respecto a la inclusión, ver [7, Capítulo VI, Teorema 3]. Más aún,

son continuas respecto de la γ -convergencia, entonces podemos aplicar el teorema 6.1.1, y para todo $k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq c \leq |\Omega|$ obtenemos que el mínimo

$$\min\{\lambda_k(A) : A \in \mathcal{A}(\Omega), |A| = c\}$$

se alcanza.

Más generalmente, el mínimo

$$\min\{\Phi(\lambda(A)) : A \in \mathcal{A}(\Omega), |A| = c\}$$

se alcanza, donde $\lambda(A)$ denota la sucesión $(\lambda_k(A))_k$ y la función $\Phi: \overline{\mathbb{R}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es semicontinua inferior y creciente en el sentido de que

$$\lambda_k^h \rightarrow \lambda_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \Phi(\lambda) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \Phi(\lambda^h),$$

$$\lambda_k \leq \mu_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \Phi(\lambda) \leq \Phi(\mu).$$

6.2. Demostraciones

Necesitaremos el siguiente resultado, que es una aplicación del teorema de obstáculo 2.3.7.

Definimos para $A \subset \Omega$ cuasi-abierto,

$$K_A = \{u \in H_0^1(\Omega) : u \leq 0 \text{ q.t.p. en } \Omega \setminus A\}.$$

Como K_A es convexo, cerrado y no vacío en $H_0^1(\Omega)$, el teorema 2.3.7 nos garantiza que existe una única u_A tal que

$$\begin{cases} u_A \in K_A, \\ \int_{\Omega} \nabla u_A \nabla (v - u_A) dx \geq \int_{\Omega} (v - u_A) dx \quad \forall v \in K_A \end{cases}$$

Para el problema anterior, vale el *principio del máximo*:

Proposición 6.2.1. *Sea u_A la solución de*

$$\begin{cases} u_A \in K_A, \\ \int_{\Omega} \nabla u_A \nabla (v - u_A) dx \geq \int_{\Omega} (v - u_A) dx \quad \forall v \in K_A \end{cases}$$

Entonces, $u_A \geq 0$ q.t.p. de Ω .

Demostración. Considero $w = \max\{u_A, 0\}$. Tenemos que $w \geq 0$ q.t.p. de Ω . Veamos que $w = u_A$.

De manera análoga a la demostración de 2.3.11, se puede ver que K_A es cerrado con respecto a tomar máximo de dos elementos en K_A . Por lo tanto, como u_A y 0 pertenecen a K_A , vale que $w \in K_A$. Entonces, puedo considerarla como función test en la desigualdad variacional que verifica u_A ,

$$\int_{\Omega} \nabla u_A \nabla (w - u_A) dx \geq \int_{\Omega} (w - u_A) dx.$$

Como $w \geq u_A$, tenemos que

$$\int_{\Omega} \nabla u_A \nabla (w - u_A) dx \geq \int_{\Omega} (w - u_A) dx \geq 0,$$

por lo tanto,

$$\int_{\Omega} \nabla u_A \nabla (w - u_A) dx \geq 0.$$

Por otro lado, usando la definición de w , tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} \nabla u_A \nabla (w - u_A) dx = \int_{\{u_A > 0\}} \nabla u_A \nabla (w - u_A) dx + \int_{\{u_A \leq 0\}} \nabla u_A \nabla (w - u_A) dx \\ &= \int_{\{u_A > 0\}} \nabla u_A \nabla (u_A - u_A) dx + \int_{\{u_A \leq 0\}} \nabla u_A \nabla (0 - u_A) dx \\ &= - \int_{\{u_A \leq 0\}} |\nabla u_A|^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Concluimos que $u_A = 0$ q.t.p. de $\{u_A \leq 0\}$. Por lo tanto, $u_A \geq 0$ q.t.p. de Ω . \square

Una demostración más general se puede ver en Kinderlehrer & Stampacchia [16, Capítulo II, Teorema 6.4]).

Recordamos que para cada $A \in \mathcal{A}(\Omega)$, llamamos w_A a la única solución de

$$-\Delta w_A = 1 \text{ en } A, \quad w_A \in H_0^1(A) \quad (6.2.1)$$

en el sentido

$$\int_A \nabla w_A \nabla v dx = \int_A v dx, \quad \forall v \in H_0^1(A)$$

Observación 6.2.2. Para la w_A definida arriba vale que

$$-\Delta w_A \leq 1 \text{ en } \Omega \quad (6.2.2)$$

y que

$$w_A \geq w \text{ q.t.p. en } \Omega \quad (6.2.3)$$

para toda función $w \in H_0^1(\Omega)$ con $w \leq 0$ q.t.p. en $\Omega \setminus A$ y $-\Delta w \leq 1$ en Ω .

Demostración. Consideremos la solución u_A de la desigualdad variacional

$$u_A \in K_A, \int_{\Omega} \nabla u_A \nabla (v - u_A) dx \geq \int_{\Omega} (v - u_A) dx \quad \forall v \in K_A \quad (6.2.4)$$

donde

$$K_A = \{u \in H_0^1(\Omega) : u \leq 0 \text{ q.t.p. en } \Omega \setminus A\}. \quad (6.2.5)$$

(El problema anterior tiene solución, por lo visto al inicio de esta sección).

- Veamos que $u_A \in H_0^1(A)$

Por la proposición 6.2.1, tenemos que $u_A \geq 0$ q.t.p. en Ω . Además, $u_A \in K_A$, entonces $u_A \leq 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$. Por lo tanto, $u_A = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$. Luego, $u_A \in H_0^1(A)$.

Afirmo que $H_0^1(A) \subset K_A$. En efecto, si $z \in H_0^1(A)$, $z = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$. En particular, $z \leq 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$. Por lo tanto, $z \in K_A$.

- Veamos que u_A es solución de (6.2.1).

Vimos que $u_A \in H_0^1(A)$. Basta ver que $-\Delta u_A = 1$ en A , en el sentido débil. Sea $v \in H_0^1(A)$. Como $u_A \in H_0^1(A)$, entonces, $v + u_A$ y $-v + u_A \in H_0^1(A) \subset K_A$. De modo que puedo tomar $v + u_A$ y $-v + u_A$ como funciones test en la desigualdad variacional (6.2.4):

- * Usando $v + u_A$ como función test, tenemos que

$$\int_{\Omega} \nabla u_A \nabla v dx \geq \int_{\Omega} v dx$$

- * Usando $-v + u_A$ como función test, tenemos que

$$\int_{\Omega} \nabla u_A \nabla v dx \leq \int_{\Omega} v dx$$

Luego, vale la igualdad

$$\int_{\Omega} \nabla u_A \nabla v dx = \int_{\Omega} v dx$$

para toda $v \in H_0^1(A)$, obteniendo que u_A es solución de la ecuación (6.2.1).

Por lo tanto, por unicidad de solución en el sentido débil, $w_A = u_A$.

Como todas las soluciones de desigualdades variacionales con condición de obstáculo de la forma (6.2.5) son subsoluciones de la correspondiente ecuación, concluimos que $-\Delta w_A \leq 1$ en Ω . En efecto, Sea $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$. En particular, $-v \leq 0$ en $\Omega \setminus A$. Luego, $-v \in K_A$. Tomo $-v$ como función test en la desigualdad variacional (6.2.4):

$$\int_{\Omega} \nabla u_A \nabla (-v - u_A) dx \geq \int_{\Omega} (-v - u_A) dx$$

$$-\int_{\Omega} \nabla u_A \nabla v dx - \int_{\Omega} |\nabla u_A|^2 dx \geq -\int_{\Omega} v dx - \int_{\Omega} u_A dx$$

Además, vimos que u_A es solución de $-\Delta u_A = 1$ en A . Entonces, tomando u_A como función test en la formulación débil, tenemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_A|^2 dx = \int_{\Omega} u_A dx$$

Lo que nos permite simplificar la desigualdad, obteniendo

$$\int_{\Omega} \nabla u_A \nabla v dx \leq \int_{\Omega} v dx$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$. Es decir, $-\Delta u_A \leq 1$ en Ω . Luego, vale (6.2.2).

Sea $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que $w \leq 0$ en $\Omega \setminus A$ y $-\Delta w \leq 1$. Queremos ver que $w_A \geq w$ en Ω . Tenemos que

$$\begin{cases} -\Delta w_A = 1 \text{ en } A \\ -\Delta w \leq 1 \text{ en } A \\ w \leq 0 = w_A \text{ en } \partial A \end{cases}$$

Entonces, por el principio del máximo, $w \leq w_A$ en A . Más aún, $w \leq w_A$ en Ω . Pues, $w \leq 0 = w_A$ en $\Omega \setminus A$. \square

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{K} = \{w \in H_0^1(\Omega) : w \geq 0, -\Delta w \leq 1 \text{ en } \Omega\}. \quad (6.2.6)$$

Notar que \mathcal{K} es no vacío. Por la observación 6.2.2, $w_A \in \mathcal{K}$ para todo $A \in \mathcal{A}(\Omega)$. Pues, de (6.2.2), usando el principio del máximo, tenemos que $w_A \geq 0$ en A . Y como $w_A \in H_0^1(A)$, sigue que $w_A = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$. Luego, $w_A \geq 0$ en Ω . Y además vale (6.2.3).

Observación 6.2.3. \mathcal{K} es convexo, cerrado y acotado en $H_0^1(\Omega)$. Además, \mathcal{K} es compacto en $L^2(\Omega)$.

Demostración. Es claro que \mathcal{K} es convexo.

- Veamos que \mathcal{K} es cerrado en $H_0^1(\Omega)$.

Sea $(w_h)_h$ en \mathcal{K} que converge a w fuerte en $H_0^1(\Omega)$. Quiero ver que $w \geq 0$ y que $-\Delta w \leq 1$ en Ω .

Como $(w_h)_h$ en \mathcal{K} , $(w_h)_h \geq 0$. La convergencia fuerte de $H_0^1(\Omega)$, implica la convergencia fuerte en $L^2(\Omega)$ y c.t.p. de Ω , extrayendo alguna subsucesión si es

necesario. Así, $w \geq 0$. Por otro lado, $-\Delta w_h \leq 1$, es decir, para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$ se tiene que

$$\int_{\Omega} \nabla w_h \nabla v dx \leq \int_{\Omega} v dx$$

La convergencia fuerte en $H_0^1(\Omega)$ implica la convergencia débil en $H_0^1(\Omega)$. Esto último es, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ahora denota el producto interno en $H_0^1(\Omega)$,

$$\langle w_h, u \rangle \rightarrow \langle w, u \rangle \text{ cuando } h \rightarrow +\infty.$$

En particular,

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla v dx = \langle w, v \rangle = \lim_{h \rightarrow +\infty} \langle w_h, v \rangle = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \nabla w_h \nabla v dx \leq \int_{\Omega} v dx$$

Luego, $-\Delta w \leq 1$.

- Veamos que \mathcal{K} es acotado en $H_0^1(\Omega)$.

Sea $w \in \mathcal{K}$. Tomando w como función test en la desigualdad $-\Delta w \leq 1$ obtenemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq \int_{\Omega} w dx \tag{6.2.7}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq \int_{\Omega} w dx \leq \left(\int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{1/2} |\Omega|^{1/2} \\ &\leq c \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right)^{1/2} |\Omega|^{1/2} = c |\Omega|^{1/2} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Usamos en la segunda desigualdad, la desigualdad de Hölder, y en la tercera, la desigualdad de Poincaré. Simplificando, obtenemos que

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c |\Omega|^{1/2}$$

concluyendo que \mathcal{K} es acotado en $H_0^1(\Omega)$.

- Veamos que \mathcal{K} es compacto en $L^2(\Omega)$.

Un resultado conocido de análisis funcional nos dice que si un conjunto es cerrado fuerte en $H_0^1(\Omega)$ y convexo, entonces es cerrado débil en $H_0^1(\Omega)$. Además, por el teorema de Rellich-Kondrachov, la inclusión de $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacta, tenemos que si un conjunto es cerrado débil y acotado en $H_0^1(\Omega)$, resulta compacto en $L^2(\Omega)$. En efecto, sea $(w_h)_h$ una sucesión en \mathcal{K} . Veamos que admite una subsucesión convergente en \mathcal{K} , con respecto a la norma en $L^2(\Omega)$. Como \mathcal{K} es acotado en $H_0^1(\Omega)$, la sucesión $(w_h)_h$ lo es. Luego, existe $(w_{h_j})_j$ subsucesión de $(w_h)_h$ que converge débil a una w en $H_0^1(\Omega)$. Como \mathcal{K} es cerrado débil, $w \in \mathcal{K}$. Además, por Rellich-Kondrachov, $(w_{h_j})_j$ converge fuerte a w en $L^2(\Omega)$. \square

Para demostrar la existencia de una solución del problema (6.1.1) seguiremos los siguientes pasos:

(1) Definiremos un funcional G en \mathcal{K} tal que

G es decreciente en \mathcal{K} , es decir, $G(u) \geq G(v)$ donde $u \leq v$ q.t.p. en Ω , (6.2.8)

G es semicontinua inferior en \mathcal{K} para la topología fuerte en $L^2(\Omega)$, (6.2.9)

$G(w_A) = F(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}(\Omega)$. (6.2.10)

(2) Probaremos que el problema

$$\min\{G(w) : w \in \mathcal{K}, |\{w > 0\}| \leq c\}$$

tiene una solución w_0 .

(3) Probaremos que $A_0 = \{w_0 > 0\}$ es un punto mínimo de

$$\min\{F(A) : A \in \mathcal{A}(\Omega), |A| \leq c\}.$$

(4) Finalmente, la solución de (6.1.1) se obtiene *ampliando* el conjunto A_0 .

El primer paso es el más trabajoso. Los últimos tres, forman parte de la demostración del teorema 6.1.1.

Construcción de G .

Para toda $w \in \mathcal{K}$ consideramos

$$J(w) = \inf\{F(A) : A \in \mathcal{A}(\Omega), w_A \leq w\} \quad (6.2.11)$$

y definimos G como la envoltura semicontinua inferior de J en \mathcal{K} con respecto a la topología fuerte de $L^2(\Omega)$, es decir,

$$G(w) = \inf \liminf_{h \rightarrow +\infty} J(w_h), \quad (6.2.12)$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las sucesiones $(w_h)_h$ en \mathcal{K} que convergen a w fuerte en $L^2(\Omega)$.

Proposición 6.2.4. *El funcional G definido arriba satisface las condiciones (6.2.8) y (6.2.9).*

Demostración. G resulta semicontinua inferior por construcción. Luego, G satisface (6.2.9).

Para probar (6.2.8) observemos que

- El funcional J es decreciente. Pues, si $u \leq v$, entonces

$$\{F(A) : A \in \mathcal{A}(\Omega)/w_A \leq u\} \subset \{F(A) : A \in \mathcal{A}(\Omega)/w_A \leq v\}$$

y tomando ínfimo resulta $J(u) \geq J(v)$.

• El supremo de dos funciones de \mathcal{K} pertenece a \mathcal{K} . Ver Proposición 2.3.11. (Esto es una propiedad conocida de las subsoluciones de operadores elípticos, que puede encontrarse con más generalidad, en el libro de Kinderlehrer y Stampacchia [16, Teorema 6.6]).

Sean u y v en \mathcal{K} con $u \leq v$ q.t.p. en Ω . Queremos ver que $G(u) \geq G(v)$.

Por (6.2.12) (definición de ínfimo), existe una sucesión $(u_h)_h$ en \mathcal{K} que converge fuerte en $L^2(\Omega)$ a u tal que $\liminf_{h \rightarrow +\infty} J(u_h) = G(u)$. Por definición de límite inferior, existe una subsucesión, que seguimos notando u_h , tal que $G(u) = \lim_{h \rightarrow +\infty} J(u_h)$.

Si tomamos $v_h = v \vee u_h$ (recordemos que $v \vee u_h = \sup\{v, u_h\}$), como el supremo entre dos funciones de \mathcal{K} también es una función de \mathcal{K} , resulta que las $v_h \in \mathcal{K}$. Además, tomar supremo es una aplicación continua en $L^2(\Omega)$ y $(u_h)_h$ converge a u en $L^2(\Omega)$, tenemos que $(v \vee u_h)_h$ converge a $v \vee u$ en $L^2(\Omega)$, es decir, $(v_h)_h$ converge a v en $L^2(\Omega)$. Notemos que $v \vee u = v$, ya que $u \leq v$. Entonces,

$$G(v) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} J(v_h) \leq \lim_{h \rightarrow +\infty} J(u_h) = G(u),$$

donde la primera desigualdad se debe a la definición de G (6.2.12) y la segunda, ocurre gracias a que $v_h \geq u_h$ y el funcional J es decreciente. Así, $G(v) \leq G(u)$. \square

Para probar que $G(w_A) = F(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ necesitamos los siguientes lemas.

Lema 6.2.5. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de subconjuntos cuasi-abiertos de Ω tal que $(w_{A_h})_h$ converge a una función w débil en $H_0^1(\Omega)$.*

Sea $(u_h)_h$ una sucesión en $H_0^1(\Omega)$ tal que cada $u_h \in H_0^1(A_h)$ y $(u_h)_h$ converge a una función u débil en $H_0^1(\Omega)$. Entonces, $u \in H_0^1(\{w > 0\})$.

Demostración. Observemos que la condición $u_h \in H_0^1(A_h)$ es equivalente a $u_h = 0$ q.t.p. en $\Omega \setminus A_h$, y $u \in H_0^1(\{w > 0\})$ es equivalente a $u = 0$ q.t.p. en $\{w = 0\}$ (sabemos que $w \geq 0$, pues cada $w_{A_h} \geq 0$, por principio de comparación del problema de Dirichlet y $(w_{A_h})_h$ converge a w débil en $H_0^1(\Omega)$, extrayendo una subsucesión, fuerte en $L^2(\Omega)$ y c.t.p.).

Consideramos los funcionales

$$\Phi_h(v) = \begin{cases} \int_{A_h} |\nabla v|^2 dx & \text{si } v \in H_0^1(A_h), \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

definimos en $L^2(\Omega)$. Notemos que cada Φ_h coincide con el funcional asociado a la medida $\infty_{A_h^c} \in \mathcal{M}_0$ (el espacio de medida capacitarias), para cada $h \in \mathbb{N}$, ver el ejemplo 5.3.2.

Por el teorema de compacidad en \mathcal{M}_0 5.3.10, existe una subsucesión, que seguimos notando con h , y una medida $\mu \in \mathcal{M}_0$ tales que $(\infty_{A_h^c})_h$ γ -converge a μ . Por la definición de γ -convergencia 5.3.3, tenemos que la sucesión de funcionales $(\Phi_h)_h$ Γ -converge a $F_\mu(\cdot, \Omega)$, que es el funcional asociado a μ en Ω , en $L^2(\Omega)$. Llamamos $\Phi = F_\mu(\cdot, \Omega)$. Entonces, por la definición del funcional asociado a μ (5.3.2), tenemos que

$$\Phi(v) = \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} |v|^2 d\mu & \text{si } v \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Luego, Φ es una forma cuadrática semicontinua inferior en $L^2(\Omega)$ con dominio $D(\Phi)$ contenido en $H_0^1(\Omega)$. Más precisamente, $D(\Phi) = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, \mu)$.

Como $(u_h)_h$ converge débil en $H_0^1(\Omega)$, es acotada. Por otro lado, $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\Omega)$, usando el teorema de Rellich-Kondrachov y el hecho de que converge a u débil en $H_0^1(\Omega)$. Entonces, por la primera condición de la Γ -convergencia de $(\Phi_h)_h$ a Φ (ver 5.1.1), tenemos que

$$\Phi(u) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \Phi_h(u_h) = \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_h|^2 dx < +\infty;$$

entonces $u \in D(\Phi) = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, \mu)$.

Sea V la clausura de $D(\Phi)$ en $L^2(\Omega)$ y sea $B: D(\Phi) \times D(\Phi) \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal asociada a Φ , definida por

$$B(v, w) = \frac{1}{4}(\Phi(v+w) - \Phi(v-w)) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx + \int_{\Omega} v w d\mu.$$

También consideramos el operador lineal $T: D(T) \rightarrow L^2(\Omega)$ definido por

$$D(T) = \{v \in D(\Phi): \exists f \in V \text{ tal que } B(v, w) = (f, w) \forall w \in D(\Phi)\},$$

donde $B(v, w) = (f, w)$ es

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx + \int_{\Omega} v w d\mu = \int_{\Omega} f w dx,$$

luego,

$$Tv = -\Delta v + \mu v = f,$$

(ver la definición 3.2.2).

Notemos que, en general, $D(T)$ no es denso en $L^2(\Omega)$. Sin embargo, por la proposición 3.2.10, tenemos que $D(T)$ es denso en $D(\Phi)$ respecto a la norma

$$\|v\|_{\Phi} = (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Phi(v))^{\frac{1}{2}},$$

es decir,

$$\|v\|_{\Phi} = (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} |v|^2 d\mu)^{\frac{1}{2}} = (\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |v|^2 d\mu)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $\|v\|_{\Phi} \geq \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$, obtenemos que $D(T)$ es denso en $D(\Phi)$ con respecto a la topología fuerte de $H_0^1(\Omega)$. Es decir,

$$\overline{D(T)}^{H_0^1(\Omega)} = D(\Phi) = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, \mu).$$

Si vemos que para toda $v \in D(T)$, se tiene $v = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$, como $u \in D(\Phi)$, por un argumento de densidad, resulta $u = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$.

Fijemos $v \in D(T)$ y sea $f = Tv = -\Delta v + \mu v$; entonces v es un punto mínimo del funcional

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}\Phi(z) - (f, z) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |z|^2 d\mu - \int_{\Omega} f z dx,$$

ver proposición 3.2.6.

Sea v_h el punto mínimo del funcional

$$\Psi_h(z) = \frac{1}{2}\Phi_h(z) - (f, z) = \frac{1}{2} \int_{A_h} |\nabla z|^2 dx - \int_{A_h} f z dx.$$

entonces, v_h es solución del problema

$$-\Delta v_h = f \text{ en } A_h, \quad v_h \in H_0^1(A_h).$$

Como $(\Phi_h)_h$ Γ -converge a Φ y la aplicación $z \mapsto (f, z)$ es continua en $L^2(\Omega)$, tenemos que $(\Psi_h)_h$ Γ -converge a Ψ , por la observación 5.1.3. Entonces, la sucesión de mínimos $(v_h)_h$ converge débil a v en $H_0^1(\Omega)$, por la proposición 5.1.5.

Para todo $\epsilon > 0$ sea $f^\epsilon \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\|f^\epsilon - f\|_{L^2(\Omega)} < \epsilon$, y sea v_h^ϵ la solución de

$$-\Delta v_h^\epsilon = f^\epsilon \text{ en } A_h, \quad v_h^\epsilon \in H_0^1(A_h).$$

Entonces, por linealidad y continuidad del problema de Dirichlet,

$$\|v_h^\epsilon - v_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|f^\epsilon - f\|_{L^2(\Omega)} \leq c\epsilon.$$

Luego, existe una subsucesión que seguimos notando con h , tal que $(v_h^\epsilon)_h$ converge débil a una función v^ϵ en $H_0^1(\Omega)$.

$$v_h^\epsilon \rightharpoonup v^\epsilon \text{ y } v_h \rightharpoonup v \text{ en } H_0^1(\Omega) \Rightarrow v_h^\epsilon - v_h \rightharpoonup v^\epsilon - v \text{ en } H_0^1(\Omega)$$

Por lo tanto, por la semicontinuidad inferior de la norma, tenemos que

$$\|v^\epsilon - v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \|v_h^\epsilon - v_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\epsilon.$$

Es suficiente mostrar que $v^\epsilon = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$ para todo $\epsilon > 0$. Tomando $c^\epsilon = \|f^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}$. Sabemos que

$$\begin{cases} -\Delta v_h^\epsilon = f^\epsilon \text{ en } A_h \\ v_h^\epsilon \in H_0^1(A_h). \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} -\Delta(c^\epsilon w_{A_h}) = c^\epsilon \text{ en } A_h \\ c^\epsilon w_{A_h} \in H_0^1(A_h) \end{cases}$$

Como $f^\epsilon \leq c^\epsilon$, por el principio de comparación del problema de Dirichlet, tenemos que $|v_h^\epsilon| \leq c^\epsilon w_{A_h}$ c.t.p. de A_h , entonces c.t.p. de Ω . Como $v_h^\epsilon \rightarrow v^\epsilon$ y $w_{A_h} \rightarrow w$ en $H_0^1(\Omega)$, tenemos que convergen en $L^2(\Omega)$ y c.t.p. de Ω . Así $|v^\epsilon| \leq c^\epsilon w$ c.t.p. de Ω , entonces q.t.p. de Ω , ya que $v^\epsilon, w \in H^1(\Omega)$. Esto implica que $v^\epsilon = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$.

Como $\|v^\epsilon - v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\epsilon$, $v^\epsilon \rightarrow v$ en $H_0^1(\Omega)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Luego, q.t.p. en Ω . Por lo tanto, $v = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$. Probamos que $v = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$ para toda $v \in D(T)$. Como $u \in D(\Phi)$ y $D(\Phi) = \overline{D(T)}^{\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}}$, $u = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$. \square

Observación 6.2.6. Si suponemos en la demostración anterior, que $\mu = \infty_{A^c}$ para $A \in \mathcal{A}(\Omega)$, tenemos que $u \in D(\Phi) \subset H_0^1(A)$, pues $\Phi = \Phi_A$. Por el lema 2.2.8, tenemos que $w_A > 0$ en A , entonces $A \subset \{w_A > 0\}$. Como $w_A \in H_0^1(A)$, sé que $w_A = 0$ q.t.p. A^c . Por principio de comparación del problema de Dirichlet, vale que $w_A \geq 0$ en Ω . Por lo tanto, $\{w_A > 0\} \subset A$. Concluyendo que $A = \{w_A > 0\}$, salvo un conjunto de capacidad cero. Entonces, $H_0^1(A) = H_0^1(\{w_A > 0\})$. Luego, $u \in H_0^1(\{w_A > 0\})$.

Probaremos el siguiente lema técnico, que necesitaremos para concluir que G verifica (6.2.10).

Lema 6.2.7. Sean A y A_h , $h \in \mathbb{N}$, subconjuntos cuasi-abiertos de Ω tales que $(w_{A_h})_h$ converge a una función w débil en $H_0^1(\Omega)$, con $w \leq w_A$ q.t.p. de Ω .

Sea $A^\epsilon = \{w_A > \epsilon\}$. Asumimos que $(w_{A_h \cup A^\epsilon})_h$ converge a una función w^ϵ débil en $H_0^1(\Omega)$. Entonces, $w^\epsilon \leq w_A$ q.t.p. de Ω .

Demostración. La idea de la demostración es probar que $w^\epsilon \leq 0$ en q.t.p. de $\Omega \setminus A$ y que $-\Delta w^\epsilon \leq 1$ en Ω . Luego, la observación 6.2.2, nos dice que w_A es la más grande con esa propiedad, es decir, $w^\epsilon \leq w_A$.

Para todo $\epsilon > 0$ definimos

$$v^\epsilon = 1 - \frac{1}{\epsilon}(w_A \wedge \epsilon)$$

Recordemos que $w_A \wedge \epsilon = \inf\{w_A, \epsilon\}$. Entonces, tenemos que

$$v^\epsilon \in H^1(\Omega), 0 \leq v^\epsilon \leq 1 \text{ q.t.p. en } \Omega,$$

pues, $\frac{1}{\epsilon}(w_A \wedge \epsilon) \geq 0$ implica $v^\epsilon \leq 1$ y $\frac{1}{\epsilon}(w_A \wedge \epsilon) \leq 1$ implica $v^\epsilon \geq 0$.

En A^ϵ , sabemos que $w_A \wedge \epsilon = \epsilon$. Entonces, $v^\epsilon = 0$ q.t.p. en A^ϵ .

Como $w_A \in H_0^1(A)$, tenemos que $w_A = 0$ q.t.p. en $\Omega \setminus A$. Entonces, $w_A \wedge \epsilon = 0$ y $v^\epsilon = 1$ q.t.p. en $\Omega \setminus A$.

Ahora, considero

$$u_h = v^\epsilon \wedge w_{A_h \cup A^\epsilon}.$$

Entonces, $u_h = 0$ q.t.p. de A^ϵ , pues $v^\epsilon = 0$ en A^ϵ y $w_{A_h \cup A^\epsilon} \geq 0$ en A^ϵ por el principio del máximo.

Además, $u_h = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus (A_h \cup A^\epsilon)$, porque $w_{A_h \cup A^\epsilon} \in H_0^1(A_h \cup A^\epsilon)$.

Como $u_h = 0$ en A^ϵ y $\Omega \setminus (A_h \cup A^\epsilon)$, $u_h = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A_h$. Luego, $u_h \in H_0^1(A_h)$, para toda $h \in \mathbb{N}$.

Como $w_{A_h \cup A^\epsilon} \rightarrow w^\epsilon$ en $H_0^1(\Omega)$ y tomar mínimo es débil continuo en $H_0^1(\Omega)$, tenemos que $u_h = v^\epsilon \wedge w_{A_h \cup A^\epsilon} \rightarrow v^\epsilon \wedge w^\epsilon$. Por el lema 6.2.5, $v^\epsilon \wedge w^\epsilon = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$.

Observemos que $0 \leq w \leq w_A$ q.t.p. de Ω , pues $w_{A_h} \geq 0$ q.t.p. de Ω y $w_{A_h} \rightarrow w$ en $H_0^1(\Omega)$. Además, $\Omega \setminus A \subset \{w_A = 0\} \subset \{w = 0\}$ q.t.p. Por lo tanto $v^\epsilon \wedge w^\epsilon = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$.

De $v^\epsilon \wedge w^\epsilon = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$ y $v^\epsilon = 1$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$, obtenemos que $w^\epsilon = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$. Entonces, $w^\epsilon \in H_0^1(A)$. En particular, $w^\epsilon \leq 0$ en $\Omega \setminus A$, como queríamos.

Finalmente, por la observación 6.2.2, sabemos que $w_{A_h \cup A^\epsilon}$ satisface

$$-\Delta w_{A_h \cup A^\epsilon} \leq 1 \text{ en } \Omega$$

Pasando al límite, como $w_{A_h \cup A^\epsilon} \rightarrow w^\epsilon$ en $H_0^1(\Omega)$, tenemos que

$$-\Delta w^\epsilon \leq 1 \text{ en } \Omega.$$

Entonces, $w^\epsilon \in H_0^1(A)$ y $-\Delta w^\epsilon \leq 1$ en Ω . Luego, (6.2.3) nos dice que w_A es la más grande con esa propiedad. Es decir, $w^\epsilon \leq w_A$ q.t.p. de Ω . \square

Proposición 6.2.8. *El funcional G satisface la propiedad (6.2.10), es decir,*

$$G(w_A) = F(A) \text{ para todo } A \in \mathcal{A}(\Omega).$$

Demostración. La desigualdad $G(w_A) \leq F(A)$ sigue inmediatamente de la definición de G , ver (6.2.12).

Para la desigualdad opuesta, alcanza con ver que si $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ y $(w_h)_h$ es una sucesión en \mathcal{K} que converge a w_A fuerte en $L^2(\Omega)$, se tiene

$$F(A) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} J(w_h).$$

Por la definición de J (y definición de ínfimo) (ver (6.2.11)), para toda $h \in \mathbb{N}$,

$$\exists A_h \in \mathcal{A}(\Omega) \text{ tal que } w_{A_h} \leq w_h \text{ y } F(A_h) \leq J(w_h) + 1/h.$$

Vimos que $w_B \in \mathcal{K}$ para todo $B \in \mathcal{A}(\Omega)$, ver (6.2.6). Además, la observación 6.2.3 nos dice que \mathcal{K} es acotado en $H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto, la sucesión $(w_{A_h})_h$ es acotada en $H_0^1(\Omega)$. Luego, existe una subsucesión, que seguimos notando $(w_{A_h})_h$, que converge débil a una función w en $H_0^1(\Omega)$.

Como $(w_h)_h$ converge a w_A fuerte en $L^2(\Omega)$ y $w_{A_h} \leq w_h$, tenemos que $w \leq w_A$.

Ahora, considero $A^\epsilon = \{w_A > \epsilon\}$. Nuevamente, como $w_{A_h \cup A^\epsilon} \in \mathcal{K}$ y \mathcal{K} es acotado en $H_0^1(\Omega)$, existe una subsucesión de $(w_{A_h \cup A^\epsilon})_h$ que seguimos notando igual, y una función w^ϵ tal que $w_{A_h \cup A^\epsilon} \rightharpoonup w^\epsilon$ en $H_0^1(\Omega)$. Por el lema 6.2.7, resulta que $w^\epsilon \leq w_A$ q.t.p. en Ω .

- Veamos que $w_{A^\epsilon} = (w_A - \epsilon)^+$.

Sea $v \in H_0^1(A^\epsilon)$.

$$\begin{aligned} \int_{A^\epsilon} \nabla(w_A - \epsilon)^+ \nabla v dx &= \int_{\{w_A > \epsilon\}} \nabla(w_A - \epsilon)^+ \nabla v dx = \int_{A^\epsilon} \nabla(w_A - \epsilon) \nabla v dx \\ &= \int_{A^\epsilon} \nabla w_A \nabla v dx = \int_A \nabla w_A \nabla v dx \\ &= \int_A v dx = \int_{A^\epsilon} v dx. \end{aligned}$$

Más aún, por el principio de comparación del problema de Dirichlet, como $A^\epsilon \subset A_h \cup A^\epsilon$, tenemos la desigualdad $(w_A - \epsilon)^+ = w_{A^\epsilon} \leq w_{A_h \cup A^\epsilon}$. Entonces, $(w_A - \epsilon)^+ \leq w_{A_h \cup A^\epsilon}$ en q.t.p. de Ω . Pasando al límite, $(w_A - \epsilon)^+ \leq w^\epsilon$ q.t.p. de Ω .

Como cada w^ϵ es el límite débil de $(w_{A_h \cup A^\epsilon})_h \subseteq \mathcal{K}$ y \mathcal{K} es cerrado para la topología débil de $H_0^1(\Omega)$ por ser convexo y cerrado fuerte, tenemos que $w^\epsilon \in \mathcal{K}$ para todo $\epsilon > 0$. Esto nos dice, ya que \mathcal{K} es acotado en $H_0^1(\Omega)$, que $(w^\epsilon)_\epsilon$ tiene algún límite débil en $H_0^1(\Omega)$. Pero como además tenemos las desigualdades

$$(w_A - \epsilon)^+ \leq w^\epsilon \leq w_A$$

sigue que $(w^\epsilon)_\epsilon$ converge débil a w_A en $H_0^1(\Omega)$. Tenemos que

$$w_{A_h \cup A^\epsilon} \rightharpoonup w^\epsilon \text{ y } w^\epsilon \rightharpoonup w_A \text{ en } H_0^1(\Omega).$$

Por un argumento standar de diagonalización podemos encontrar una sucesión $(\epsilon_h)_h$ que converge a 0 tal que $(w_{A_h \cup A^{\epsilon_h}})_h$ converge a w_A débil en $H_0^1(\Omega)$. Por Rellich-Kondrachov, $(w_{A_h \cup A^{\epsilon_h}})_h$ converge a w_A fuerte en $L^2(\Omega)$. Luego, por el teorema (de

independencia de f) 2.2.10, $(A_h \cup A^{\epsilon_h})_h$ γ -converge a A . Luego, como F es semi-continua inferior para la γ -convergencia y decreciente con respecto a la inclusión, tenemos que

$$F(A) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F(A_h \cup A^{\epsilon_h}) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F(A_h) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} J(w_h)$$

Esto concluye la demostración. \square

Estamos en condiciones de demostrar el teorema principal de este capítulo, cuya prueba será sencilla gracias a los resultados estudiados anteriormente.

Teorema 6.2.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $\mathcal{A}(\Omega)$ la clase de conjuntos cuasi-abiertos contenidos en Ω y $F: \mathcal{A}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función que satisface*

(i) *F es semicontinua inferior con respecto de la γ -convergencia.*

(ii) *F es decreciente, es decir, $F(A) \geq F(B)$, si $A \subset B$.*

Entonces, para toda constante c entre 0 y $|\Omega|$, el mínimo

$$\min\{F(A): A \in \mathcal{A}(\Omega), |A| = c\} \quad (6.2.13)$$

se alcanza.

Demostración. Dividiremos la demostración en tres pasos.

(1) Observemos que alcanza con resolver

$$\min\{F(A): A \in \mathcal{A}(\Omega), |A| \leq c\}. \quad (6.2.14)$$

En efecto, si A_0 es un punto mínimo del problema (6.2.14), existe $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ tal que $A_0 \subset A$ y $|A| = c$. Para cada $r > 0$, considero $E_r = A_0 \cup (B_r(0) \cap \Omega) \subset \Omega$, y E_r es cuasi-abierto. Luego, por continuidad de la medida de Lebesgue, existe $r_0 > 0$ tal que $|E_{r_0}| = c$. Tomo $A = E_{r_0}$. Como F es decreciente, tenemos que $F(A) \leq F(A_0) \leq F(B)$ para todo $B \in \mathcal{A}(\Omega)$ con $|B| = c$, y esto implica que A es solución de (6.1.1).

(2) Consideremos el problema

$$\min\{G(w): w \in \mathcal{K}, |\{w > 0\}| \leq c\}. \quad (6.2.15)$$

Veamos que tiene solución.

Observemos que $F(A) \geq F(\Omega)$ para todo $A \in \mathcal{A}(\Omega)$, pues F es decreciente con respecto a la inclusión de conjuntos. Luego, $\inf\{G(w): w \in \mathcal{K}, |\{w > 0\}| \leq c\}$ es finito, ver la definición de G (6.2.12).

Sea $(w_h)_h$ una sucesión minimizante, es decir, $w_h \in \mathcal{K}$, $|\{w_h > 0\}| \leq c$ y $(G(w_h))_h$ tiende a λ , donde

$$\lambda = \inf\{G(w): w \in \mathcal{K}, |\{w > 0\}| \leq c\}.$$

Como $w_h \in \mathcal{K}$ para toda $h \in \mathbb{N}$ y \mathcal{K} es acotado en $H_0^1(\Omega)$, existe una subsucesión de $(w_h)_h$, que seguimos notando igual, y una w_0 tal que $w_h \rightharpoonup w_0$ en $H_0^1(\Omega)$. Además, \mathcal{K} es débil cerrado por ser cerrado fuerte y convexo. Entonces, $w_0 \in \mathcal{K}$.

Como $w_h \rightharpoonup w_0$ en $H_0^1(\Omega)$, por Rellich-Kondrachov, $w_h \rightarrow w_0$ en $L^2(\Omega)$. Luego, ya que G es semicontinua inferior con respecto a la topología fuerte en $L^2(\Omega)$, tenemos que

$$G(w_0) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} G(w_h) = \lambda = \inf\{G(w) : w \in \mathcal{K}, |\{w > 0\}| \leq c\}.$$

Además, $|\{w_0 > 0\}| \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} |\{w_h > 0\}| \leq c$. Pues, dado $\epsilon > 0$

$$\{w_0 \geq \epsilon\} \subset \{|w_0 - w_h| \geq \epsilon/2\} \cup \{w_h \geq \epsilon/2\}$$

$$|\{w_0 \geq \epsilon\}| \leq |\{|w_0 - w_h| \geq \epsilon/2\}| + |\{w_h \geq \epsilon/2\}|,$$

usando la desigualdad de Chebyshev,

$$|\{|w_0 - w_h| \geq \epsilon/2\}| \leq \frac{4}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |w_0 - w_h|^2 dx$$

y tomando límite en h , como $(w_h)_h$ converge a w_0 en $L^2(\Omega)$, resulta $|\{w > 0\}| \leq c$. Por lo tanto, w_0 es una solución de (6.2.15).

(3) Afirmamos que $A_0 = \{w_0 > 0\}$ es una solución de (6.2.14).

Como $w_0 \in \mathcal{K}$, tenemos que $w_0 \in H_0^1(\Omega)$, $w_0 \leq 0$ en $\Omega \setminus A_0$ y $-\Delta w_0 \leq 1$ en Ω . Por la observación 6.2.2, $w_0 \leq w_{A_0}$ q.t.p. de Ω .

Como w_0 y $w_{A_0} \in \mathcal{K}$, $w_0 \leq w_{A_0}$ y G es decreciente en \mathcal{K} , tenemos que $G(w_{A_0}) \leq G(w_0)$. Por la proposición 6.2.8, $F(A_0) = G(w_{A_0}) \leq G(w_0)$.

Si $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ y $|A| \leq c$, entonces $w_A \in \mathcal{K}$, ver la observación 6.2.2. Además, como $\{w_A > 0\} \subset A$, $|\{w_A > 0\}| \leq c$. Entonces, por la minimalidad de w_0 y la proposición 6.2.8,

$$G(w_0) \leq G(w_A) = F(A).$$

Por lo tanto, $F(A_0) \leq F(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ con $|A| \leq c$. Esto implica que los problemas (6.2.14) y (6.2.15) tienen solución. \square

Capítulo 7

Diseño óptimo II

El propósito de este capítulo es dar una idea de la resolución del problema

$$\min \{ \Phi(\lambda_1(A), \lambda_2(A)) : A \subset \mathbb{R}^n \text{ cuasi-abierto } |A| \leq c \},$$

donde Φ es decreciente y semicontinua inferior en cada variable, y $\lambda_k(A)$ denota al k -ésimo autovalor del $-\Delta$ en A , para $k = 1, 2$. Utilizaremos, en este capítulo, la misma notación que en la sección γ -convergencia II del capítulo de Γ -convergencia.

Este resultado se debe al trabajo de Dorin Bucur [4].

7.1. Un resultado de compacidad para dominios

Recordemos $R_A(1) = w_A$, para A cuasi-abierto de \mathbb{R}^n , $|A| < \infty$; es decir, $-\Delta w_A = 1$ en A y $w_A \in H_0^1(A)$.

Lema 7.1.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cuasi-abierto tal que $|A| \leq c$. Entonces, existe una constante $M > 0$ que sólo depende de $|A|$ tal que*

$$\|w_A\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq M$$

Demostración. Como $w_A \in H_0^1(A)$ y $|A| \leq c$, podemos usar la desigualdad de Poincaré 2.1.22.

$$\|w_A\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \beta \|\nabla w_A\|_{L^2(A)}^2 = \beta \int_A |\nabla w_A|^2 dx$$

Sé que $-\Delta w_A = 1$ en A . Tomando como función test w_A en la formulación débil, resulta

$$\int_A |\nabla w_A|^2 dx = \int_A w_A dx$$

Luego, usando la desigualdad de Hölder,

$$\|w_A\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \beta \int_A w_A dx \leq \beta |A|^{1/2} \|w_A\|_{L^2(A)} \leq \beta |A|^{1/2} \|w_A\|_{H^1(\mathbb{R}^n)},$$

simplificando,

$$\|w_A\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \beta |A|^{1/2} =: M,$$

lo que concluye la demostración. \square

Dada una sucesión acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$, el siguiente teorema nos afirma que ocurre compacidad, vanishing o dicotomía.

Teorema 7.1.2 (Principio de concentración-compacidad de Lions).

Sea $(u_h)_h$ una sucesión acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_h \int_{\mathbb{R}^n} u_h^2 dx = \lambda > 0$. Existe una subsucesión, que seguimos notando con h , tal que ocurre alguna de las siguientes:

(i) *compacidad*: Existe una sucesión $(y_h)_h$ en \mathbb{R}^n tal que

$$\forall \epsilon > 0, \exists R > 0, \int_{y_h + B_R(0)} u_h^2 dx \geq \lambda - \epsilon$$

(ii) *vanishing*: Para todo $R > 0$ se tiene

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{y + B_R(0)} u_h^2 dx = 0$$

(iii) *dicotomía*: Existe un $\alpha \in (0, \lambda)$ y funciones u_h^1, u_h^2 no negativas, tales que

1. $\|u_h - (u_h^1 + u_h^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$
2. $\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u_h^1)^2 dx = \alpha$, y $\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u_h^2)^2 dx = \lambda - \alpha$
3. $\lim_{h \rightarrow +\infty} d(\text{sop } u_h^1, \text{sop } u_h^2) = +\infty$
4. $\liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} [|\nabla u_h|^2 - (|\nabla u_h^1|^2 + |\nabla u_h^2|^2)] dx \geq 0$

Se puede ver una demostración en el trabajo de Lions [18].

A continuación, demostraremos algunos resultados que nos facilitarán la prueba del principio de concentración-compacidad para dominios.

7.1.1. Resultados de compacidad

Lema 7.1.3. Sea $\mu \in \mathcal{M}_0$ tal que $|A_\mu| < \infty$. Sea $(f_h)_h$ una sucesión en $L^2(\mathbb{R}^n)$ que converge débil a f en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $(R_\mu(f_h))_h$ converge a $R_\mu(f)$ débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Llamo $u_h = R_\mu(f_h)$ y $u = R_\mu(f)$. Como $u_h, u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, basta ver que $(u_h)_h$ converge a u débil en $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. Notar que como A_μ tiene medida de Lebesgue finita, podemos considerar en $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ el producto interno

$$\langle z, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla z \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} z v d\mu,$$

ver la observación 5.4.3. Usando que $-\Delta u_h + \mu u_h = f$ y $-\Delta u + \mu u = f$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_h \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_h v d\mu &= \int_{\mathbb{R}^n} f_h v dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu) \\ \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} u v d\mu &= \int_{\mathbb{R}^n} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu) \end{aligned}$$

Como $(f_h)_h$ converge débil a f en $L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_h v dx = \int_{\mathbb{R}^n} f v dx$$

para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_h \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_h v d\mu \right\} = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} u v d\mu$$

para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, lo que concluye la demostración. \square

Proposición 7.1.4. Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n , $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$ tal que $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $(A_h)_h$ γ -converge a μ . Entonces, la sucesión de operadores resolventes $(R_{A_h})_h$ converge a R_μ en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

Demostración. Queremos ver que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \sup_{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \|R_{A_h}(f) - R_\mu(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Por definición de supremo, para cada $h \in \mathbb{N}$, existe una $f_h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\sup_{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \|R_{A_h}(f) - R_\mu(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \frac{1}{h} \leq \|R_{A_h}(f_h) - R_\mu(f_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

y $\|f_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1$.

Veamos que $\|R_{A_h}(f_h) - R_\mu(f_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ tiende a cero.

Como la sucesión $(f_h)_h$ es acotada en $L^2(\mathbb{R}^n)$, existe una subsucesión (que seguimos notando con h) y una función $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $(f_h)_h$ converge a f débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Tenemos

$$\|R_{A_h}(f_h) - R_\mu(f_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|R_{A_h}(f_h) - R_\mu(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|R_\mu(f) - R_\mu(f_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Veamos que *cada uno* tiende a cero.

Por el corolario 5.4.13, como $(f_h)_h$ converge a f débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $(R_{A_h}(f_h))_h$ converge a $R_\mu(f)$ fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $\|R_{A_h}(f_h) - R_\mu(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ tiende a cero.

Por el lema 7.1.3, como $(f_h)_h$ converge a f débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $(R_\mu(f_h))_h$ converge a $R_\mu(f)$ débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Pero, $R_\mu(f_h), R_\mu(f) \in H_0^1(A)$, donde $A = A_\mu$; y la inclusión $H_0^1(A) \hookrightarrow L^2(A)$ es compacta ya que $|A| \leq c$. Entonces, $(R_\mu(f_h))_h$ converge a $R_\mu(f)$ fuerte en $L^2(A)$. Por lo tanto, $\|R_\mu(f) - R_\mu(f_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ tiende a cero.

Concluimos que $\lim_{h \rightarrow +\infty} \|R_{A_h}(f_h) - R_\mu(f_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow +\infty} \sup_{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \|R_{A_h}(g) - R_\mu(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & \leq \limsup_{h \rightarrow +\infty} \left\{ \sup_{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \|R_{A_h}(g) - R_\mu(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \frac{1}{h} \right\} \\ & \leq \lim_{h \rightarrow +\infty} \|R_{A_h}(f_h) - R_\mu(f_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión de operadores $(R_{A_h})_h$ converge a R_μ en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$. \square

Corolario 7.1.5. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n tal que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, $(A_h)_h$ γ -converge a μ y $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $(\lambda_k(A_h))_h$ converge a $\lambda_k(\mu)$, donde $\lambda_k(A_h)$ denota el k -ésimo autovalor del Laplaciano, contado con multiplicidad, en $H_0^1(A_h)$.*

Se puede ver una demostración en [12, Lema XI.9.5].

7.1.2. Resultados de vanishing

Observación 7.1.6. Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n tal que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_1(A_h) = +\infty.$$

Entonces, para toda sucesión $(u_h)_h$ acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_h \in H_0^1(A_h)$, se tiene que $(u_h)_h$ converge a 0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $(u_h)_h$ una sucesión acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$, $\|u_h\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq M$, tal que $u_h \in H_0^1(A_h)$. Entonces, usando la desigualdad de Poincaré 2.1.22,

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|u_h\|_{L^2(A_h)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1(A_h)} \|\nabla u_h\|_{L^2(A_h)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1(A_h)} \|u_h\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \frac{M^2}{\lambda_1(A_h)}$$

y tomando límite de $h \rightarrow +\infty$, resulta $(u_h)_h$ converge a 0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$. \square

Lema 7.1.7 (Lieb). Sean $A, E \subset \mathbb{R}^n$ abiertos no vacíos.

Dado $\epsilon > 0$, existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\lambda_1(A \cap (E + z)) < \lambda_1(A) + \lambda_1(E) + \epsilon$. Equivalentemente, $\lambda_1(A) + \lambda_1(E) \geq \inf_{z \in \mathbb{R}^n} \lambda_1(A \cap (E + z))$.

Si A y E son acotados, existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\lambda_1(A \cap (E + z)) < \lambda_1(A) + \lambda_1(E)$. Equivalentemente, $\lambda_1(A) + \lambda_1(E) > \inf_{z \in \mathbb{R}^n} \lambda_1(A \cap (E + z))$.

Se puede ver una demostración en [17], y el resultado se extiende a A y E cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n .

Lema 7.1.8. Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n tal que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, $(w_{A_h})_h$ converge a w débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y para todo $R > 0$ se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{y+B_R(0)} w_{A_h}^2 dx = 0.$$

Entonces, $\lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_1(A_h) = +\infty$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Veamos que existe un $R > 0$ y una sucesión $(y_h)_h$ en \mathbb{R}^n tal que

$$\lambda_1(A_h \cap B_R(y_h)) \leq \lambda_1(A_h) + \epsilon$$

En efecto, dado ese $\epsilon > 0$, tomo $R > 0$ tal que $\delta := \epsilon - \lambda_1(B_R(0)) > 0$. Por el lema 7.1.7, tenemos que $\lambda_1(A_h) + \lambda_1(B_R(0)) \geq \inf_{z \in \mathbb{R}^n} \lambda_1(A_h \cap (B_R(z)))$. Usando la definición de ínfimo, existe un $y_h \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lambda_1(A_h \cap B_R(y_h)) \leq \inf_{z \in \mathbb{R}^n} \lambda_1(A_h \cap (B_R(z))) + \delta \leq \lambda_1(A_h) + \lambda_1(B_R(0)) + \delta = \lambda_1(A_h) + \epsilon.$$

Como $0 \leq 1_{A_h \cap B_R(y_h)} \leq 1_{A_h}$, por el principio de comparación del problema de Dirichlet, tenemos que $0 \leq w_{A_h \cap B_R(y_h)} \leq w_{A_h}$. Entonces, $0 \leq w_{A_h \cap B_R(y_h)}^2 \leq w_{A_h}^2$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_{A_h \cap B_R(y_h)} w_{A_h \cap B_R(y_h)}^2 dx &\leq \int_{A_h \cap B_R(y_h)} w_{A_h}^2 dx \leq \int_{B_R(y_h)} w_{A_h}^2 dx = \int_{y_h + B_R(0)} w_{A_h}^2 dx \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{y+B_R(0)} w_{A_h}^2 dx \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $h \rightarrow +\infty$, resulta

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} \int_{A_h \cap B_R(y_h)} w_{A_h \cap B_R(y_h)}^2 dx \leq \limsup_{h \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{y+B_R(0)} w_{A_h}^2 dx = 0$$

Entonces, la sucesión $(w_{A_h \cup B_R(y_h)})_h$ converge a 0 fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Llamo $E_h = A_h \cap B_R(y_h)$. Entonces, $(E_h)_h$ es una sucesión de cuasi-abiertos tal que $|E_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$. Por el teorema 5.3.10, existe una subsucesión (que seguimos notando con h) y una medida $\nu \in \mathcal{M}_0$ tales que $(E_h)_h$ γ -converge a ν . Además, $(w_{E_h})_h$ converge a 0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, por 5.4.11, $0 = w_\nu$. En consecuencia, $\nu = \infty_\emptyset \in \mathcal{M}_0$. Entonces, $(E_h)_h$ γ -converge a \emptyset .

Luego, por el corolario 7.1.5, tenemos que $(\lambda_1(E_h))_h$ converge a $\lambda_1(\emptyset) = +\infty$. Como teníamos la desigualdad

$$\lambda_1(E_h) = \lambda_1(A_h \cap B_R(y_h)) \leq \lambda_1(A_h) + \epsilon,$$

resulta que $(\lambda_1(A_h))_h$ tiende a $+\infty$, como queríamos probar. \square

Proposición 7.1.9. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n tal que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, $(w_{A_h})_h$ converge a w débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y para todo $R > 0$ se tiene que*

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{y+B_R(0)} w_{A_h}^2 dx = 0.$$

Entonces, la sucesión de operadores resolventes $(R_{A_h})_h$ converge a 0 en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

Demostración. Por el lema 7.1.8, sabemos que $(\lambda_1(A_h))_h$ tiende a $+\infty$. Entonces, por la observación 7.1.6 aplicada a la sucesión $(w_{A_h})_h$ (que es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$ por el lema 7.1.1 y el hecho de que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$), tenemos que $(w_{A_h})_h$ converge a $0 = w_{\infty_0}$ fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por último, aplicando la proposición 7.1.4, tenemos que $(R_{A_h})_h$ converge a $R_{\infty_0} = 0$ en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$, lo que concluye la demostración. \square

7.1.3. Resultados de dicotomía

Lema 7.1.10. *Sean A, B cuasi-abiertos tales que $B \subset A$. Entonces, $w_B = P(w_A)$, donde $P: H_0^1(A) \rightarrow H_0^1(B)$ es la proyección ortogonal.*

Demostración. Observemos que $w_B = P(w_A)$ si y sólo si $w_A - w_B \in (H_0^1(B))^\perp$, es decir,

$$(w_A - w_B, v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(B),$$

donde (\cdot, \cdot) es el producto interno de $H_0^1(A)$ usual.

Sea $v \in H_0^1(B) \subset H_0^1(A)$. Tomo v como función test en la formulación débil de $-\Delta w_A = 1$ en A y en $-\Delta w_B = 1$ en B . Entonces,

$$\int_B \nabla w_B \nabla v dx = \int_B v dx$$

$$\int_B \nabla w_B \nabla v dx = \int_A \nabla w_A \nabla v dx = \int_A v dx = \int_B v dx$$

Restando, tenemos que

$$(w_A - w_B, v) = \int_B \nabla(w_A - w_B) \nabla v dx = 0,$$

para toda $v \in H_0^1(B)$. Luego, queda probada la igualdad que queríamos. \square

Lema 7.1.11. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n , con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que existe un $\alpha \in (0, \lambda)$ y funciones $u_h^1, u_h^2 \in H_0^1(A_h)$ no negativas, tales que*

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} w_{A_h}^2 dx = \lambda > 0 \quad (7.1.1)$$

$$\|w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \quad (7.1.2)$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u_h^1)^2 dx = \alpha \text{ y } \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u_h^2)^2 dx = (\lambda - \alpha) \quad (7.1.3)$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} d(\text{sop } u_h^1, \text{sop } u_h^2) = +\infty \quad (7.1.4)$$

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} [|\nabla w_{A_h}|^2 - (|\nabla u_h^1|^2 + |\nabla u_h^2|^2)] dx \geq 0 \quad (7.1.5)$$

Definimos $A_h^1 = \{u_h^1 > 0\}$ y $A_h^2 = \{u_h^2 > 0\}$, $B_h = A_h^1 \cup A_h^2$. Entonces, se tiene que $(w_{A_h} - w_{B_h})_h$ converge a 0 fuerte en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Como $w_{A_h} - w_{B_h} \in H_0^1(A_h)$, basta ver que $(\nabla(w_{A_h} - w_{B_h}))_h$ converge a 0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$, por la desigualdad de Poincaré 2.1.22 y el hecho de que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$.

Como $B_h \subset A_h$, por el lema 7.1.10, tenemos que $w_{B_h} = P_{H_0^1(B_h)}(w_{A_h})$ para cada $h \in \mathbb{N}$. Como $u_h^1 + u_h^2 \in H_0^1(B_h)$ y $P_{H_0^1(B_h)}(w_{A_h})$ es la función de $H_0^1(B_h)$ que realiza la distancia mínima de w_{A_h} a $H_0^1(B_h)$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h} - \nabla w_{B_h}|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h} - \nabla(u_h^1 + u_h^2)|^2 dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h}|^2 dx - 2 \int_{\mathbb{R}^n} \nabla w_{A_h} \nabla(u_h^1 + u_h^2) dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u_h^1 + u_h^2)|^2 dx$$

Pero, tomando como función test w_{A_h} y luego $u_h^1 + u_h^2$ en $-\Delta w_{A_h} = 1$ en A_h , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h}|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} w_{A_h} dx \\ \int_{\mathbb{R}^n} \nabla w_{A_h} \nabla(u_h^1 + u_h^2) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_h^1 + u_h^2) dx \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h} - \nabla w_{B_h}|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} w_{A_h} dx - 2 \int_{\mathbb{R}^n} (u_h^1 + u_h^2) dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u_h^1 + u_h^2)|^2 dx$$

Sumo $\int_{\mathbb{R}^n} w_{A_h} dx$ y resto $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h}|^2 dx$ (que son términos iguales). Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h} - \nabla w_{B_h}|^2 dx \leq 2 \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} [w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)] dx \right\} + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u_h^1 + u_h^2)|^2 - |\nabla w_{A_h}|^2 dx$$

(a) Observemos que $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u_h^1 + u_h^2)|^2 - |\nabla w_{A_h}|^2 dx \leq 0$. En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u_h^1 + u_h^2)|^2 - |\nabla w_{A_h}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h^1|^2 + |\nabla u_h^2|^2 + 2\nabla u_h^1 \nabla u_h^2 - |\nabla w_{A_h}|^2 dx$$

Por (7.1.4), tenemos que para h suficientemente grande

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_h^1 \nabla u_h^2 dx = 0$$

pues la distancia entre los soportes de u_h^1 y u_h^2 tiende a $+\infty$. Entonces, tomando límite inferior en h y usando (7.1.5), resulta

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u_h^1 + u_h^2)|^2 - |\nabla w_{A_h}|^2 dx = \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h^1|^2 + |\nabla u_h^2|^2 - |\nabla w_{A_h}|^2 dx \leq 0$$

(b) Veamos que $\int_{\mathbb{R}^n} [w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)] dx$ tiende a cero.

En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} [w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)] dx = \int_{A_h} [w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)] dx \leq |A_h|^{1/2} \|w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Como $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$ y vale (7.1.2) ($\|w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ tiende a cero), queda probado (b).

De (a) y (b), concluimos que $(\nabla w_{A_h} - \nabla(u_h^1 + u_h^2))_h$ converge a 0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por último, usando que $w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2) \in H_0^1(A_h)$, la desigualdad de Poincaré 2.1.22 y el hecho de que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} &= \|w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)\|_{H_0^1(A_h)} \\ &\leq M(|A_h|) \|\nabla w_{A_h} - \nabla(u_h^1 + u_h^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq M(c) \|\nabla w_{A_h} - \nabla(u_h^1 + u_h^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

y por lo tanto, $(w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2))_h$ converge a 0 fuerte en $H^1(\mathbb{R}^n)$, como queríamos ver. \square

El siguiente lema es un resultado similar al teorema de la *independencia de f* 2.2.10 en el caso acotado. Nos dice que la norma de la resta de dos operadores es *gobernada* por la norma de la resta de soluciones con $f = 1$.

Lema 7.1.12. *Sean A, B cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n tales que $B \subset A$ y $|A| < \infty$. Entonces, existen constantes K y α que sólo dependen de $|A|$ y la dimensión n tales que*

$$\|R_A - R_B\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq K \|w_A - w_B\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^\alpha$$

Se puede ver una demostración en [4], donde se usa teoría de interpolación de operadores.

Proposición 7.1.13. *Sea $(A_h)_h$ sucesión de cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n , $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tales que existe un $\alpha \in (0, \lambda)$ y funciones $u_h^1, u_h^2 \in H_0^1(A_h)$ no negativas, que verifican (7.1.1)-(7.1.5). Entonces, existe una sucesión $(B_h)_h$ de cuasi-abiertos tal que*

$$B_h \subset A_h, B_h = A_h^1 \cup A_h^2 \quad (7.1.6)$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} d(A_h^1, A_h^2) = +\infty \quad (7.1.7)$$

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} |A_h^i| > 0, \text{ para } i = 1, 2. \quad (7.1.8)$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \|R_{A_h} - R_{B_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = 0 \quad (7.1.9)$$

Demostración. Definimos $A_h^1 = \{u_h^1 > 0\}$ y $A_h^2 = \{u_h^2 > 0\}$, $B_h = A_h^1 \cup A_h^2$. Es claro que $(B_h)_h$ es una sucesión de cuasi-abiertos (recordemos que trabajamos con los representantes cuasi-continuos de las funciones de $H^1(\mathbb{R}^n)$), y $B_h \subset A_h$. Luego, vale (7.1.6). Por (7.1.4), que nos dice que la distancia entre los soportes de u_h^1 y u_h^2 tiende a $+\infty$, vale (7.1.7). Por (7.1.3), vale (7.1.8). En efecto, si $\liminf_{h \rightarrow +\infty} |A_h^1| = 0$, existe una subsucesión que sigo notando $(A_h^1)_h$ tal que $\lim_h |A_h^1| = 0$. Entonces,

$$0 = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{A_h} (u_h^1)^2 dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u_h^1)^2 dx = \alpha > 0,$$

lo que es absurdo. Luego, $\liminf_{h \rightarrow +\infty} |A_h^1| > 0$. Análogamente, $\liminf_{h \rightarrow +\infty} |A_h^2| > 0$.

Por último, veamos que vale (7.1.9).

Por el lema 7.1.12, existen constantes $K_h = K(|A_h|, n)$ y $M_h = M(|A_h|, n)$ tales que

$$\|R_{A_h} - R_{B_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq K_h \|w_{A_h} - w_{B_h}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{M_h}$$

Como $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, existen constantes $K = K(c, n)$ y $M = M(c, n)$ tales que

$$\|R_{A_h} - R_{B_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq K \|w_{A_h} - w_{B_h}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^M$$

Además,

$$\begin{aligned} \|R_{A_h} - R_{B_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} &\leq K \|w_{A_h} - w_{B_h}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^M \\ &\leq K \|w_{A_h} - w_{B_h}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^M \end{aligned}$$

Por el lema 7.1.11, tenemos que $(w_{A_h} - w_{B_h})_h$ converge a 0 fuerte en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, vale (7.1.9). \square

Corolario 7.1.14. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de quasi-abiertos de \mathbb{R}^n , con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que existe un $\alpha \in (0, \lambda)$ y funciones $u_h^1, u_h^2 \in H_0^1(A_h)$ no negativas, que verifican (7.1.1)-(7.1.5).*

Si $A_h^1 = \{u_h^1 > 0\}$ y $A_h^2 = \{u_h^2 > 0\}$, $B_h = A_h^1 \cup A_h^2$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k(A_h)} - \frac{1}{\lambda_k(B_h)} \right| = 0,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Se puede ver una demostración en [12, Corolario XI.9.4], donde se usa la proposición 7.1.13.

Ahora, estamos en condiciones de demostrar el teorema más importante de esta sección, el *principio de concentración-compacidad de dominios*.

Teorema 7.1.15 (Principio de concentración-compacidad de dominios).

Sea $(A_h)_h$ una sucesión de quasi-abiertos de \mathbb{R}^n tal que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$. Entonces, existe una subsucesión, que seguimos notando con h , tal que ocurre alguna de las siguientes:

(i) compacidad: Existe una sucesión $(y_h)_h$ en \mathbb{R}^n y una medida $\mu \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$ tales que $(A_h + y_h)_h$ γ -converge a μ y $(R_{A_h + y_h})_h$ converge a R_μ en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

(ii) dicotomía: Existe una sucesión de quasi-abiertos $(B_h)_h$ de \mathbb{R}^n tal que para cada $h \in \mathbb{N}$ $B_h \subset A_h$, $\lim_h \|R_{B_h} - R_{A_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = 0$, $B_h = A_h^1 \cup A_h^2$ con $\lim_h d(A_h^1, A_h^2) = +\infty$ y $\liminf_h |A_h^i| > 0$ para $i = 1, 2$.

Demostración. Consideramos la sucesión $(w_{A_h})_h$ en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Por el lema 7.1.1 y el hecho de que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, la sucesión $(w_{A_h})_h$ es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Pues,

$$\|w_{A_h}\|_{H(\mathbb{R}^n)} \leq M(|A_h|) \leq M(c)$$

para toda $h \in \mathbb{N}$. Luego, existe una subsucesión de $(w_{A_h})_h$ (que seguimos notando con h), y una función $w \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tales que $(w_{A_h})_h$ converge a w débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$, débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y fuerte en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad, extrayendo una subsucesión, que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} w_{A_h}^2 dx = \lambda \geq 0$$

Si $\lambda = 0$, $(w_{A_h})_h$ converge a 0 fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Recordando que cada A_h está asociado a la medida $\infty_{A_h^c}$ en \mathcal{M}_0 y el teorema de compacidad 5.3.10, tenemos que (para una subsucesión que seguimos notando con h) existe una medida $\mu \in \mathcal{M}_0$ tal que $(A_h)_h$ γ -converge a μ . Por la proposición 7.1.4, tenemos que $(R_{A_h})_h$ converge a R_μ en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$. Es decir, vale (i) tomando $y_h = 0$ para toda $h \in \mathbb{N}$.

Si $\lambda > 0$, podemos aplicar el principio de concentración-compacidad de Lions para $(w_{A_h})_h$. Entonces, existe una subsucesión (que seguimos notando con h) tal que ocurre la compacidad, el vanishing o la dicotomía de $(w_{A_h})_h$.

- Si ocurre la *compacidad* para $(w_{A_h})_h$, existe una sucesión $(z_h)_h$ en \mathbb{R}^n tal que

$$\forall \epsilon > 0, \exists R > 0, \int_{z_h + B_R(0)} w_{A_h}^2 dx \geq \lambda - \epsilon$$

Llamo $B_h = A_h - z_h$, entonces, $w_{B_h}(x) = w_{A_h}(x + z_h)$ y

$$\forall \epsilon > 0, \exists R > 0, \int_{B_R(0)} w_{B_h}^2 dx \geq \lambda - \epsilon$$

Como $(w_{A_h})_h$ es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$, $(w_{B_h})_h$ también lo es, pues la norma en \mathbb{R}^n es invariante por traslaciones. Entonces, existe una subsucesión de $(w_{B_h})_h$ (que seguimos notando con h) y una función u tales que $(w_{B_h})_h$ converge a u débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$, débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y fuerte en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. En particular, por la convergencia débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$, tenemos que

$$\lambda = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} w_{A_h}^2 dx = \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} w_{B_h}^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx$$

Por otro lado, como $B_R(0)$ es compacto,

$$\lambda - \epsilon \leq \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0)} w_{B_h}^2 dx = \int_{B_R(0)} u^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx \leq \lambda$$

para todo $\epsilon > 0$. Luego, $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \lambda$. Como $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert y tenemos que $(w_{B_h})_h$ converge a u débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y converge las normas, resulta que $(w_{B_h})_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Por el teorema 5.3.10, la proposición 5.4.8 y el corolario 5.4.11, tenemos que existe una subsucesión de $(B_h)_h$ (que seguimos notando con h) y una medida $\mu \in \mathcal{M}_0$ tales que $(B_h)_h$ γ -converge a μ y $u = u_\mu$ y $A_\mu = \{u > 0\}$ salvo conjunto de capacidad cero.

Ahora, estamos en condiciones de aplicar la proposición 7.1.4. Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \|R_{B_h} - R_\mu\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = 0.$$

Tomando $y_h = -z_h$, vale (i).

- Si ocurre el *vanishing* para $(w_{A_h})_h$, para todo $R > 0$, tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{y+B_R(0)} w_{A_h}^2 dx = 0$$

Por la proposición 7.1.9, resulta $\lim_{h \rightarrow +\infty} \|R_{A_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = 0$. Por lo tanto, nuevamente vale (i).

- Si ocurre la *dicotomía* para $(w_{A_h})_h$, existe un $\alpha \in (0, \lambda)$ y funciones no negativas $u_h^1, u_h^2 \in H_0^1(A_h)$ que verifican (7.1.2)-(7.1.5). Aplicando la proposición 7.1.13, tenemos que existe una sucesión $(B_h)_h$ de cuasi-abiertos que satisface (7.1.6)-(7.1.9), lo que concluye la demostración. \square

7.2. Aplicación a diseño óptimo

Lema 7.2.1. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n , con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_1(A_h) = x \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_2(A_h) = y \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Entonces, existe al menos un cuasi-abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $|A| \leq c$, $\lambda_1(A) \leq x$, $\lambda_2(A) \leq y$.

Demostración. Aplico el principio de concentración-compacidad para dominios, 7.1.15, a la sucesión $(A_h)_h$. Entonces, para una subsecusión de $(A_h)_h$ (que seguimos notando con h) ocurre la *compacidad* o la *dicotomía*.

- Si ocurre la *compacidad*, existen una medida $\mu \in \mathcal{M}_0$ y una sucesión en \mathbb{R}^n $(y_h)_h$ tales que $(A_h + y_h)_h$ γ -converge a μ y la sucesión de operadores $(R_{A_h + y_h})_h$ converge a R_μ en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

Por la convergencia de operadores, tenemos que $(w_{A_h+y_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, por la proposición 5.4.8, tenemos que $\{w > 0\} = A_\mu$ y, además, $|\{w > 0\}| \leq c$. Tomo $A = \{w > 0\}$, que es un conjunto cuasi-abierto, porque trabajamos con los representantes cuasi-continuos de las funciones de $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Por el corolario 7.1.5, tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_k(A_h + y_h) = \lambda_k(\mu),$$

para toda $k \in \mathbb{N}$, donde

$$\lambda_k(\mu) = \inf \frac{\int_A |\nabla v|^2 dx + \int_A |v|^2 d\mu}{\int_A |v|^2 dx}, \quad \lambda_k(A_h) = \inf \frac{\int_{A_h} |\nabla v|^2 dx}{\int_{A_h} |v|^2 dx}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las funciones ortogonales a las primeras k autofunciones. Entonces,

$$\lambda_1(A) \leq \lambda_1(\mu) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_1(A_h) = x$$

$$\lambda_2(A) \leq \lambda_2(\mu) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_2(A_h) = y.$$

Luego, A verifica $|A| \leq c$, $\lambda_1(A) \leq x$, $\lambda_2(A) \leq y$.

• Si ocurre la dicotomía, existe una sucesión $(B_h)_h$ de cuasi-abiertos que verifica (7.1.6)-(7.1.9). Por el corolario 7.1.14, tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k(A_h)} - \frac{1}{\lambda_k(B_h)} \right| = 0,$$

Como, además, por hipótesis sé que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_1(A_h) = x, \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_2(A_h) = y,$$

resulta

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_1(B_h) = x, \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_2(B_h) = y.$$

Observemos que si U, V son cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n disjuntos, tenemos que $\lambda_1(U \cup V) = \min\{\lambda_1(U), \lambda_1(V)\}$. Si suponemos $\lambda_1(U \cup V) = \lambda_1(U)$, entonces, $\lambda_2(U \cup V) = \min\{\lambda_2(U), \lambda_1(V)\}$.

Por (7.1.7), podemos suponer que A_h^1 y A_h^2 son disjuntos. Entonces, por la observación anterior, para cada $h \in \mathbb{N}$ ocurre (a) o (b):

$$(a) \begin{cases} \lambda_1(B_h) = \lambda_1(A_h^1), \\ \lambda_2(B_h) = \lambda_1(A_h^2). \end{cases}, \quad \text{o (b)} \begin{cases} \lambda_1(B_h) = \lambda_1(A_h^1), \\ \lambda_2(B_h) = \lambda_2(A_h^1). \end{cases}$$

Como la sucesión es infinita y para cada $h \in \mathbb{N}$ hay dos posibilidades, existen infinitos valores de h tal que ocurre (a) o infinitos valores de h tal que ocurre (b).

Extrayendo una subsucesión, puede suponer que para todo $h \in \mathbb{N}$ ocurre (a), o para todo $h \in \mathbb{N}$ ocurre (b). Veamos qué sucede en cada caso.

$$(a) \begin{cases} \lambda_1(B_h) = \lambda_1(A_h^1), \\ \lambda_2(B_h) = \lambda_1(A_h^2). \end{cases}$$

Por rearrreglos de Schwartz, existen bolas disjuntas E_h^1 y E_h^2 tales que

$$|E_h^1| + |E_h^2| \leq c \text{ y } \lambda_k(E_h^1 \cup E_h^2) \leq \lambda_k(B_h), \text{ para } k = 1, 2.$$

Entonces, para una subsucesión, existen bolas disjuntas E^1 y E^2 tales que $(E_h^1 \cup E_h^2)_h$ γ -converge a $E^1 \cup E^2$. (Eventualmente trasladando los centros de las bolas E_h^i , armo una nueva sucesión de bolas con radios $r_h \leq m$, m una constante, y luego, extraigo una subsucesión $(r_{h_k})_k$ convergente a r . Tomando como $E^i = B_r(p)$, con $p \in \mathbb{R}^n$).

Considero $A = E^1 \cup E^2$. Notar que ahora estoy en la situación de compacidad de la sucesión $(E_h^1 \cup E_h^2)_h$. Por el corolario 7.1.5, tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_k(E_h^1 \cup E_h^2) = \lambda_k(A), \quad k = 1, 2.$$

Además, como $\lambda_k(E_h^1 \cup E_h^2) \leq \lambda_k(B_h)$ para $k = 1, 2$,

$$\lambda_1(A) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_1(E_h^1 \cup E_h^2) \leq \lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_1(B_h) = x,$$

$$\lambda_2(A) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_2(E_h^1 \cup E_h^2) \leq \lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_2(B_h) = y.$$

Por lo tanto, $A = E^1 \cup E^2$ satisface el enunciado.

$$(b) \begin{cases} \lambda_1(B_h) = \lambda_1(A_h^1), \\ \lambda_2(B_h) = \lambda_2(A_h^1). \end{cases}$$

Por (7.1.8), $\alpha := \liminf_{h \rightarrow +\infty} |A_h^2| > 0$, $\beta := \liminf_{h \rightarrow +\infty} |A_h^1| > 0$, con $\alpha + \beta \leq c$. Existe $\epsilon > 0$ tal que

$$m_\epsilon = \max \left\{ \left(\frac{x + \epsilon}{x} \right)^{1/2}, \left(\frac{y + \epsilon}{y} \right)^{1/2} \right\} < \left(\frac{c}{\beta + \epsilon} \right)^{1/n}.$$

En efecto, como $\beta < c$, tenemos que $1 < \left(\frac{c}{\beta} \right)^{1/n}$ y

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} m_\epsilon = 1 < \left(\frac{c}{\beta} \right)^{1/n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{c}{\beta + \epsilon} \right)^{1/n}$$

Para ese ϵ , existe $h_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x - \epsilon < \lambda_1(A_h^1) < x + \epsilon,$$

$$y - \epsilon < \lambda_2(A_h^1) < y + \epsilon,$$

$$|A_h^1| < \beta + \epsilon$$

para toda $h \geq h_0$. Tomo $t > 0$. Notamos $tA_{h_0}^1$ a la dilatación de $A_{h_0}^1$ de radio t con respecto al origen. Entonces,

$$\lambda_1(tA_{h_0}^1) = t^{-2}\lambda_1(A_{h_0}^1) < t^{-2}(x + \epsilon), \quad \lambda_2(tA_{h_0}^1) = t^{-2}\lambda_2(A_{h_0}^1) < t^{-2}(y + \epsilon)$$

Elijo t tal que $t \geq (\frac{x+\epsilon}{x})^{1/2}$, $t \geq (\frac{y+\epsilon}{y})^{1/2}$ y $t \leq (\frac{c}{\beta+\epsilon})^{1/n}$. Existe tal t pues, elegimos el $\epsilon > 0$ tal que

$$m = \max \left\{ \left(\frac{x + \epsilon}{x} \right)^{1/2}, \left(\frac{y + \epsilon}{y} \right)^{1/2} \right\} < \left(\frac{c}{\beta + \epsilon} \right)^{1/n},$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\lambda_1(tA_{h_0}^1) \leq x, \quad \lambda_2(tA_{h_0}^1) \leq y,$$

$$|tA_{h_0}^1| = t^n |A_{h_0}^1| < t^n (\beta + \epsilon) \leq c.$$

Considerando $A = tA_{h_0}^1$, concluimos la demostración. \square

Teorema 7.2.2. Sea $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ semicontinua inferior y creciente en cada variable. Entonces, el problema

$$\min \left\{ \Phi(\lambda_1(A), \lambda_2(A)): A \subset \mathbb{R}^n \text{ cuasi-abierto}, |A| \leq c \right\} \quad (7.2.1)$$

admite al menos una solución, para toda $c > 0$.

Demostración. Por el teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos (ver [13, Apéndice E, Teorema 6]), sabemos que $(\lambda_j(A))_j$ es una sucesión creciente, positiva, que tiende a $+\infty$, para cada $A \subset \mathbb{R}^n$ cuasi-abierto tal que $|A| \leq c$. En particular, $\lambda_j(A) \geq 0$ para $j = 1, 2$. Como Φ es creciente en cada variable, $G(A) = \Phi(\lambda_1(A), \lambda_2(A)) \geq \Phi(0, 0)$. Por lo tanto, G es acotada inferiormente. Entonces, el ínfimo de G sobre todos los cuasi-abiertos de \mathbb{R}^n de medida de Lebesgue menor o igual a c , es finito.

Sea $(A_h)_h$ una sucesión minimizante para el problema

$$\alpha := \inf \left\{ \Phi(\lambda_1(A), \lambda_2(A)): A \subset \mathbb{R}^n \text{ cuasi-abierto}, |A| \leq c \right\}$$

tal que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_1(A_h) = x, \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \lambda_2(A_h) = y.$$

En principio, x, y podrían valer $+\infty$. Si $x = +\infty$, existe una subsucesión $(A_{h_k})_k$, que sigue siendo una sucesión minimizante para el problema, tal que $\lambda_1(A_{h_k}) > k$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\lambda_2(A_{h_k}) > \lambda_1(A_{h_k})$, entonces, como Φ es creciente en cada variable,

$$+\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(k, k) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(\lambda_1(A_{h_k}), \lambda_2(A_{h_k})) = \alpha < \infty,$$

que es una contradicción. Luego, $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Análogamente, $y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Por el lema 7.2.1, existe al menos un cuasi-abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $|A| \leq c$, $\lambda_1(A) \leq x$ y $\lambda_2(A) \leq y$. Entonces, como Φ es semicontinua inferior y creciente en cada variable, tenemos que

$$\Phi(\lambda_1(A), \lambda_2(A)) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \Phi(\lambda_1(A_h), \lambda_2(A_h)) = \alpha,$$

lo que concluye la demostración. □

Bibliografía

- [1] H. Attouch, *Variational convergence for functions and operators*, Applicable Mathematics Series, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984. MR 773850 (86f:49002)
- [2] Andrea Braides, *Γ -convergence for beginners*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 22, Oxford University Press, Oxford, 2002. MR 1968440 (2004e:49001)
- [3] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983, Théorie et applications. [Theory and applications]. MR 697382 (85a:46001)
- [4] Dorin Bucur, *Uniform concentration-compactness for Sobolev spaces on variable domains*, J. Differential Equations **162** (2000), no. 2, 427–450. MR 1751712 (2001d:49008)
- [5] Giuseppe Buttazzo and Gianni Dal Maso, *Shape optimization for Dirichlet problems: relaxed formulation and optimality conditions*, Appl. Math. Optim. **23** (1991), no. 1, 17–49. MR 1076053 (92e:49055)
- [6] ———, *An existence result for a class of shape optimization problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **122** (1993), no. 2, 183–195. MR 1217590 (94i:49052)
- [7] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations*, (Vol. II by R. Courant.), Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons), New York-London, 1962. MR 0140802 (25 #4216)
- [8] Gianni Dal Maso, *An introduction to Γ -convergence*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 8, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993. MR 1201152 (94a:49001)
- [9] Gianni Dal Maso and Umberto Mosco, *Wiener's criterion and Γ -convergence*, Appl. Math. Optim. **15** (1987), no. 1, 15–63. MR 866165 (88e:49031)

- [10] J. Deny and J. L. Lions, *Les espaces du type de Beppo Levi*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **5** (1953–54), 305–370 (1955). MR 0074787 (17,646a)
- [11] J. L. Doob, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 262, Springer-Verlag, New York, 1984. MR 731258 (85k:31001)
- [12] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz, *Linear operators. Part II: Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space*, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Interscience Publishers John Wiley & Sons New York-London, 1963. MR 0188745 (32 #6181)
- [13] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR 2597943 (2011c:35002)
- [14] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. MR 1158660 (93f:28001)
- [15] Antoine Henrot and Michel Pierre, *Variation et optimisation de formes*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], vol. 48, Springer, Berlin, 2005, Une analyse géométrique. [A geometric analysis]. MR 2512810 (2009m:49003)
- [16] David Kinderlehrer and Guido Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Classics in Applied Mathematics, vol. 31, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000, Reprint of the 1980 original. MR 1786735 (2002d:49001)
- [17] Elliott H. Lieb, *On the lowest eigenvalue of the Laplacian for the intersection of two domains*, Invent. Math. **74** (1983), no. 3, 441–448. MR 724014 (85e:35090)
- [18] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), no. 2, 109–145. MR 778970 (87e:49035a)