



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Departamento de Matemática
Tesis de Licenciatura

UN NUEVO MÉTODO NUMÉRICO PARA LA
DIFRACCIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS
POR SUPERFICIES NATURALES

Martín Maas
L.U.: 445/05

Director: Prof. Oscar Bruno

Co-Director: Dr. Francisco Grings

Marzo de 2013

Resumen

La presente tesis tiene como objetivo contribuir métodos matemáticos eficientes para la resolución de problemas que surgen en el ámbito de la teledetección en microondas. Más específicamente, el scattering de superficies de medios naturales resulta esencial en el area de teledetección y se estudia hace mas de cien años, pero a la luz de nuevos desafíos científicos y tecnológicos las metodologías empleadas encuentran limitaciones importantes.

Los primeros capítulos de esta tesis introducen gradualmente varios métodos basados en ecuaciones integrales con distintas condiciones de borde para objetos cerrados y redes de difracción. Explotando ciertas propiedades de regularidad mediante el uso de cuadraturas especializadas, funciones de truncamiento y particiones suaves de la unidad, se obtienen métodos de convergencia espectral.

En el capítulo 5 se presenta una extensión al caso periódico de un esquema de aceleración basado en fuentes equivalentes y FFTs que fue propuesto previamente para superficies acotadas. Este nuevo método nos permite tratar superficies muy grandes en tiempos computacionales reducidos. También se presenta un análisis de la convergencia del método de aceleración propuesto sobre la base de una nueva demostracion simple (aunque no constructiva). La última sección presenta una evaluación de la eficiencia computacional del algoritmo completo y el Capítulo 6, finalmente, incluye estudios iniciales que involucran algunas aplicaciones relevantes.

*A mi abuelo José,
un trabajador que dominaba todos los oficios
y construía maravillas para nosotros*

*Al parecer decía que las matemáticas
governaban al mundo.*

*Por haberme logrado sentar
todavía roñoso y atolondrado
a enseñarme a jugar al ajedrez
y no haberme dejado ganar*

Agradecimientos

Aprovecho esta oportunidad para saludar a todos los que me acompañaron durante este período.

Compañeros de cursada, ya sean del grupo que empezamos juntos, otros con los que nos conocimos más adelante, los que siguieron por otros rumbos, los que me dieron una mano, y en general a todos los que pasamos varios años acá, en un camino que resulta único para cada uno porque es el camino de una búsqueda.

A Oscar, por haber aceptado con alegría la posibilidad de dirigir este trabajo, por su enorme visión, talento y humildad.

A Francisco, por su concepción integradora y su ayuda indispensable para que me pudiera unir al proyecto del grupo de Teledetección del IAFE. A todos los chicos del grupo, por la buena onda y el sentido del humor con el que llevamos adelante las cosas, y a los que crearon nuestro singular equipo, Haydeé y Antonio, por haber tenido la visión de que en Argentina “estaba todo por hacerse” y habernos enseñado a todos nosotros a comenzar a trabajar en ese sentido.

A los entusiastas de la matemática aplicada que tuve el gusto de conocer, en particular a Javier, porque logra enseñar lo que es “ojo” para los problemas matemáticos que surgen en lugares inesperados, y por haberme ayudado a ganar mucha confianza para seguir en este camino.

A todos con los que compartí alguna actividad del Centro de Estudiantes, ya sea una manifestación, una charla, una toma, el olor picante de unos gases, peculiares batucadas en salones desbordados de gente, una elección, o una agrupación como la Lista Unidad. Porque la lucha para transformar la realidad también lo transforma a uno mismo, y porque a pesar de los momentos de desengaño siempre la alegría va a estar asociada a nuestro camino.

A mi familia, por enseñarme tantas cosas importantes y por su buen sentido del humor.

A Flor, mi compañera de estos últimos dos años, que en particular suspendió sus vacaciones y soportó mi malhumor de cuando todavía tenía que dar los últimos finales.

Y un agradecimiento especial al que me ayudó durante varios años *a poder llegar hasta acá*, y que mis amigos llaman el “tinchomóvil”: un Citroën 3CV modelo 78, que refrigera por aire tanto al motor como al conductor o sus acompañantes, y que ya tiene cerraduras, luces y una capota nueva.

Índice general

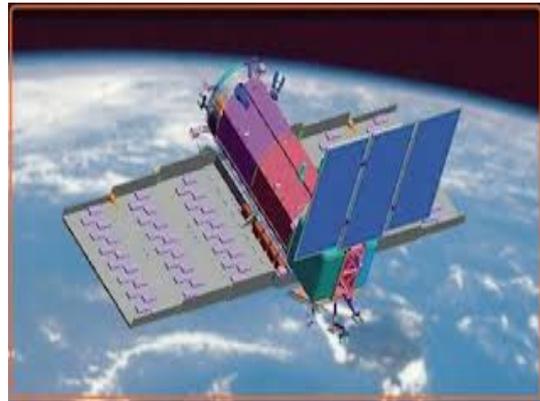
| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Modelado electromagnético de medios naturales complejos | 2 |
| 1.2. Nuevos métodos numéricos | 3 |
| 1.3. Un nuevo método acelerado y de orden alto para superficies naturales | 5 |
| 1.4. Descripción de los capítulos | 5 |
| 2. Scattering en 2D: Cuestiones Físico-Matemáticas | 9 |
| 2.1. Deducción de las ecuaciones | 10 |
| 2.1.1. Conductores perfectos | 10 |
| 2.1.2. Dieléctricos | 11 |
| 2.2. Instrumentos de microondas | 13 |
| 2.3. Análisis de la ecuación de Helmholtz | 15 |
| 2.3.1. La solución fundamental | 15 |
| 2.3.2. Formulas de representación | 16 |
| 2.3.3. Potenciales single y double layer | 19 |
| 2.4. Métodos analíticos para superficies aleatorias | 20 |
| 2.5. Un primer método numérico | 21 |
| 3. Un método espectral para objetos cerrados | 25 |
| 3.1. El problema de Dirichlet exterior | 25 |
| 3.2. Algunos elementos de interpolación e integración numérica | 27 |
| 3.3. El método de Nyström | 30 |
| 3.3.1. Evaluación del algoritmo | 31 |
| 3.3.2. Análisis del Método de Nyström | 35 |
| 3.4. Existencia, unicidad y regularidad | 36 |
| 4. Un método de orden alto para redes de difracción | 41 |
| 4.1. Introducción | 41 |
| 4.1.1. Expansión de Rayleigh | 42 |
| 4.1.2. Caso oblicuo | 43 |
| 4.2. Formulaciones Integrales | 44 |
| 4.3. Particiones suaves de la unidad | 44 |
| 4.4. Ecuaciones integrales para redes de difracción | 48 |
| 4.4.1. Reglas de cuadratura | 49 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 4.5. | Evaluación del algoritmo | 51 |
| 5. | Un método acelerado de orden alto para superficies naturales | 55 |
| 5.1. | Aproximación con monopolos y dipolos en caras paralelas | 56 |
| 5.1.1. | Discretización de las distribuciones y cálculo de las fuentes equivalentes | 59 |
| 5.2. | Interacciones en la grilla | 61 |
| 5.2.1. | Transformada Rápida de Fourier | 62 |
| 5.2.2. | Corrección de interacciones cercanas | 63 |
| 5.3. | Reconstrucción en la superficie | 64 |
| 5.4. | La aceleración en el caso periódico | 66 |
| 5.5. | Resumen | 67 |
| 5.6. | Evaluación del algoritmo | 68 |
| 6. | Aplicaciones: estudios iniciales y trabajo futuro | 71 |
| 6.1. | Posibilidades de detectar áreas sembradas con papa | 71 |
| 6.1.1. | Dimensión Social | 71 |
| 6.1.2. | Antecedentes | 72 |
| 6.1.3. | Nuevos cálculos electromagnéticos | 73 |
| 6.2. | Trabajo futuro | 77 |
| 6.2.1. | Océano y Antártida | 77 |
| 6.2.2. | Aspectos computacionales | 77 |
| 6.2.3. | Un plan de trabajo | 78 |
| A. | Antecedente: Un problema inverso de la misión SAOCOM | 79 |
| 1. | Análisis de sensibilidad del problema directo | 80 |
| 2. | Incertezas | 81 |
| 2.1. | Ruido Speckle | 81 |
| 2.2. | Caminatas al azar | 81 |
| 2.3. | Cómo surge la distribución Rayleigh | 82 |
| 2.4. | Gammas multivariadas | 83 |
| 2.5. | Desbalances y cross-talk | 83 |
| 3. | Estimadores Bayesianos | 83 |
| 3.1. | Análisis de la varianza y resolución óptima | 84 |
| 4. | Método bayesiano para el problema inverso | 85 |
| 5. | Inversión de datos SARAT | 85 |
| 5.1. | Datos | 86 |
| 5.2. | Resultados | 87 |
| 6. | Conclusiones y perspectivas | 88 |

Introducción



SAC-D/Aquarius: microondas pasivas



SAOCOM: microondas activas

La presente tesis tiene el objetivo de **contribuir métodos matemáticos eficientes** para la resolución de problemas que surgen en el ámbito de la teledetección en microondas. Para ello es necesario analizar el proceso por el cual surgen problemas en esta disciplina, y abordar los aspectos matemáticos de los mismos de la mejor manera posible.

La teledetección en microondas es la disciplina que busca estimar parámetros biofísicos a partir de mediciones de instrumentos a bordo de satélites o vehículos aéreos, que operan en el rango de las microondas (0.36 - 300 Ghz): radares y radiómetros como los que desarrolla el **Plan Espacial Nacional**, e información contextual.

Entre las variables de interés se puede mencionar la humedad del suelo, la biomasa de bosques, el contenido de agua de la vegetación, la salinidad o la concentración de hielo en el mar, entre otras, que son posteriormente utilizadas como insumos en aplicaciones cruciales para el monitoreo del medio terrestre como el seguimiento de extremos hidrológicos, que aprovechan la gran cobertura espaciotemporal de los sistemas orbitales.

Muchas veces leemos u oímos en los medios que determinado satélite “mide” la salinidad del mar o la humedad del suelo, etc. Pero en verdad, la extracción de

información útil a partir de las mediciones que realizan estos sistemas es un problema de inferencia complejo. Por ejemplo, el objetivo central de la misión argentina **SAOCOM** es estimar la humedad del suelo en zonas agrícolas. Pero para ello, es necesario desacoplar en la señal recibida todos los efectos que no dependen de las variaciones de humedad (rugosidad del suelo, efecto de la anisotropía asociada a filas de cultivo, las distintas capas de humedad vertical y la presencia de rastrojo). Estos efectos tendrán un peso relativo para diferentes longitudes de onda (Bandas X, C, L en la literatura de radar), y polarizaciones (HH, VV, HV, VH, según cuál es el modo transmitido y recibido).

Es decir, la teledetección lidia constantemente con **métodos indirectos**, ya que los sistemas orbitales miden la radiación reflejada o emitida por el medio terrestre en una frecuencia, polarización y geometría de observación dada, y el usuario final desea variables bio-geofísicas del medio terrestre. Son dos tipos de variables diferentes, y pasar de una a otra requiere de un modelo de interacción electromagnética que las vincule. Por este motivo, el **modelado electromagnético** se utiliza desde el surgimiento mismo de la disciplina de la teledetección, para estimar la señal reflejada/emitada de un blanco en función de sus características geométricas y dieléctricas, las que a su vez tienen que ser caracterizadas cuantitativamente en términos de las variables bio-físicas de interés (ej. cuánto disminuye la constante dieléctrica de una hoja al secarse).

Este es un **proceso dinámico**, ya que los avances tecnológicos en los nuevos sistemas de observación terrestre que son puestos en funcionamiento permiten la medición de nuevas variables físicas con altos niveles de precisión. Al intentar aprovechar esta información, se ha puesto en evidencia que los modelos existentes no pueden explicar completamente las observaciones en todas las condiciones de adquisición. Es decir que el avance tecnológico en la medición hace necesario el desarrollo de nuevos modelos para poder aprovechar la riqueza de la nueva información generada, y este esquema se retroalimenta.

En esta tesis **desarrollamos modelos numéricos de scattering** y emisividad con el fin de **aportar a la extracción de información** de los sistemas satelitales asociados al plan espacial argentino o a análogos internacionales, y de analizar el rango de validez de modelos existentes, así como a caracterizar discrepancias entre modelos y observaciones.

1.1. Modelado electromagnético de medios naturales complejos

La física del comportamiento electromagnético de medios naturales complejos está expresada en las ecuaciones de Maxwell. Poder resolver estas ecuaciones para todas las configuraciones de interés resolvería todas las necesidades del modelista. Pero dada la complejidad de los medios naturales esto no siempre es posible, por lo que se torna necesario utilizar diversas aproximaciones. Las mismas, para ser útiles, tienen que tener un error conocido y aceptable. Para conocer estos errores un medio

es la realización de importantes campañas experimentales de medición, y otro es la comparación contra la solución numérica exacta de las ecuaciones de Maxwell en casos de prueba. Decidir si las aproximaciones son aceptables o no depende de la aplicación en cuestión y es algo que puede variar con el tiempo, por ejemplo con avances tecnológicos que permiten hacer mediciones más precisas.

Comparando observaciones con los modelos existentes, se suelen manifestar problemas de las siguientes formas

- **Nuevas variables medidas:** como el coeficiente de backscattering cross-polarizado (se transmite una polarización y recibe otra), para las cuales no hay modelos o los existentes son demasiado imprecisos.
- **Anomalías:** se observan datos con un comportamiento cualitativo distinto al predicho por los modelos existentes, que no pueden ser explicadas. Por ejemplo, polarizaciones que aparecen “invertidas” ($HH > VV$) en el scattering de superficies.
- **Características que se consideraban aleatorias que sin embargo presentan efectos “coherentes”.** Por ejemplo la presencia de filas de cultivo en suelos modelados como aleatorios (y fuertemente decorrelacionados), la interacción entre troncos de vegetación y el suelo donde se desprecia información de la fase, grupos de hojas muy cerca unas de otras con un comportamiento cualitativamente distinto que la suma “incoherente” de las mismas hojas por separado, etc.
- **Geometrías complejas:** como las de las hojas de cualquier especie vegetal, o como el tallo de algunas herbáceas (juncos) que se vuelven cuasi-trianguulares durante la fase de senescencia (muerte), lo cual no puede ser modelado con geometrías simplificadas como cilindros circulares.

1.2. Nuevos métodos numéricos

Ciertas cuestiones encontradas corrientemente en las aplicaciones, como las altas frecuencias, los múltiples rebotes, las polarizaciones cruzadas, las esquinas, puntas y resonancias, han ocasionado problemas a los enfoques de modelado tradicionales, se trate de aproximaciones analíticas o de métodos numéricos, limitando severamente su rango de validez en el primer caso, o el nivel del realismo alcanzable con una capacidad de computo especificada en el segundo. Pero en los últimos años, gracias al aumento de la capacidad de cómputo disponible - y a la creciente sofisticación matemática de los métodos utilizados - es posible resolver numéricamente problemas en configuraciones cada vez más realistas, lo que abre numerosas posibilidades para el avance del modelado electromagnético necesario en la disciplina de teledetección.

El desarrollo de nuevos modelos numéricos para el abordaje de aplicaciones concretas, una actividad normalmente llevada a cabo por matemáticos aplicados, ha tenido un desarrollo escaso en nuestro país a partir de la discontinuidad del proyecto

del Instituto del Cálculo en 1966. La incorporación de matemáticos en grupos interdisciplinarios de investigación aplicada resulta natural en este marco. Asimismo, es de notarse que los métodos novedosos que viene desarrollando Oscar Bruno junto a sus colaboradores ¹ han podido dar cuenta de numerosas dificultades que aparecen en diversas áreas científico-tecnológicas, incluyendo la teledetección en microondas.

Por ejemplo uno de los enfoques desarrollados permitió explicar anomalías en las polarizaciones en un problema de scattering del océano [33]. Otro método introducido en 2009 permitió, por primera vez, estudiar la propagación de una señal de una longitud de onda de 20 cm a través de atmósferas realistas, tridimensionales, de cientos de kilómetros en tiempos de cómputo del orden de una hora en PCs de escritorio - tarea para la cual otros algoritmos hubieran requerido en las mismas condiciones de varios meses. Este método fue utilizado para analizar configuraciones de la técnica de ocultación de GPS para observación de la atmósfera [9]

Los métodos que estudiaremos conducen a rutinas de cálculo electromagnético que puedan obtener una precisión arbitrariamente alta con un esfuerzo computacional lo más bajo posible. Algunas de las ventajas de los métodos de alta precisión son las siguientes:

- **Capacidad de calcular magnitudes que son muy pequeñas con respecto a la energía incidente**, o aplicaciones donde se busca identificar cambios sutiles. Es el caso para el backscattering cross-polarizado u otras magnitudes de orden superior.
- **Confiabilidad**, dado que podemos realizar estimaciones del error de manera muy sencilla aumentando levemente la discretización, ya que este decae muy rápidamente.
- **Mayor realismo para una capacidad de cómputo dada**, al volverse innecesaria la simplificación de ciertos aspectos de la realidad que conducirían a dificultades de cálculo inabordables con los viejos métodos.

Veremos, por ejemplo, que las ecuaciones de Maxwell para objetos cerrados en 2D se pueden escribir como ecuaciones integrales de la forma:

$$\psi(t) - \int_0^{2\pi} \left[\ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) K_s(s, t) + K_r(s, t) \right] \psi(s) ds = g(t)$$

Aquí se ilustran dos problemas básicos que es necesario enfrentar cuando se aborda un problema de scattering mediante ecuaciones integrales: cómo dar cuenta de las interacciones cercanas (donde la integral es singular: en este caso la singularidad es logarítmica) sin comprometer la velocidad, y cómo dar cuenta de las numerosas (pero regulares) interacciones lejanas sin comprometer la velocidad. Para esto veremos algunos métodos numéricos *de orden alto*, es decir que el error de aproximación decrece, si es posible, exponencialmente con el refinamiento de la discretización, y así mismo estudiaremos un método de *aceleración* basado en FFTs, es decir que dada

¹<http://www.cms.caltech.edu/people/2951/profile>

una discretización, en vez de una implementación directa que tendría una complejidad computacional alta, se reformula de algún modo de poder disminuir la misma haciendo en el camino aproximaciones del orden de la precisión de la máquina.

1.3. Un nuevo método acelerado y de orden alto para superficies naturales

En la presente tesis desarrollaremos varios métodos numéricos de alta precisión para problemas de creciente complejidad: estudiaremos objetos acotados, luego superficies no acotadas (periódicas), y finalmente extenderemos un método de aceleración que fue desarrollado para objetos acotados al caso de superficies periódicas, cuestión que no había sido abordada aún.

Fundamentalmente para simplificar la programación estudiaremos casos donde la superficie es invariante en una dirección (o sea 2-dimensional). Esta restricción geométrica no imposibilitará que los métodos que desarrollaremos encuentren aplicaciones. De hecho, esperamos poder responder en el corto plazo preguntas en relación al scattering de las superficies que ilustramos a continuación (cuadro 1.1), donde las superficies contienen aleatoriedad, pero al mismo tiempo pueden tener una “dirección privilegiada” debida al viento o alguna causa antrópica.

1.4. Descripción de los capítulos

En el capítulo 2 veremos algunas cuestiones físico-matemáticas del scattering en 2 dimensiones. Partiremos de las ecuaciones de Maxwell, veremos como en el caso 2D estas se reducen a las ecuaciones de Helmholtz, y deduciremos formulaciones integrales para esos problemas. A su vez, reseñaremos cuestiones fundamentales - y clásicas - respecto a la unicidad y la regularidad de las soluciones de las ecuaciones de Helmholtz, e introduciremos los llamados potenciales y veremos algunas propiedades claves de éstos. También reseñaremos teorías aproximadas clásicas para problemas de scattering de superficies aleatorias y comentaremos sobre un primer método numérico desarrollado para resolver de manera exacta las ecuaciones integrales.

En el capítulo 3 desarrollaremos y analizaremos un método de convergencia exponencial para el scattering de un objeto cerrado. Estudiaremos una formulación integral que tiene solución única para cualquier número de onda, hecho del cual daremos una demostración en mediante la teoría de Fredholm, basándonos en que en el caso homogéneo solamente se admite la solución trivial y propiedades de compacidad en L^2 de los operadores involucrados.

El método numérico desarrollado es de tipo Nystrom: se aproximan los operadores integrales por operadores discretos de cuadratura. Una propiedad clave de estos métodos es que el orden de convergencia de la cuadratura se traslada al de la solución. Esto justifica el esfuerzo por desarrollar reglas de cuadratura especializadas,

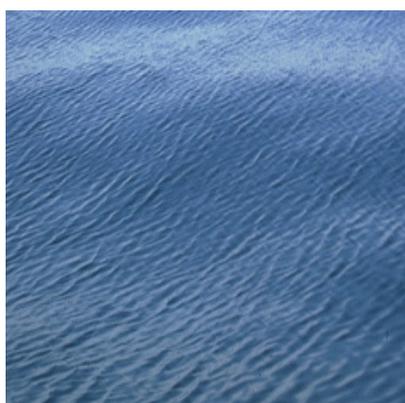
Cuadro 1.1: Superficies rugosas en la naturaleza

**Cultivo de papa**

Identificar con un radar el tipo de arado es una aplicación aún no resuelta

**Nieve-Sastrugi**

Monitoreo de fracción de nieve seca/húmeda (Inst. Antártico)

**Océano**

Lo estudia el INIDEP (velocidad del viento, frentes, mareas)

**Sequía**

Monitorear la humedad del suelo permitiría contar con sistemas de alerta temprana

con un orden de convergencia alto. Las reglas que veremos se basan en propiedades de interpolación e integración numérica para funciones suaves, y una descomposición analítica de los núcleos de las ecuaciones integrales en una parte singular y otra regular. La suavidad de las funciones involucradas resulta a su vez, de propiedades de regularidad para la ecuación de Holmholtz o de alguna formulación integral de la misma.

En el capítulo 4 estudiaremos el caso de una superficie periódica, o red de difracción. Aquí, la descomposición entre una parte regular y otra singular se llevará a cabo mediante funciones de partición C^∞ . Asimismo, según veremos, un truncamiento C^∞ de una integral oscilatoria impropia conlleva un efecto sumamente notable, con una convergencia mucho mejor de lo esperado intuitivamente. Modificando ligeramente las reglas de cuadratura del capítulo 3, formularemos un método

de Nyström para redes de difracción, y evaluaremos su precisión mediante la satisfacción de una regla de conservación de la energía. Evaluaremos el comportamiento del algoritmo para formulaciones integrales de Fredholm de tipo 1 y 2.

En el capítulo 5 presentaremos una extensión al caso periódico de un esquema de aceleración basado en fuentes equivalentes y FFTs que fue propuesto previamente para superficies acotadas. Más específicamente, mostraremos cómo es posible utilizar el truncamiento C^∞ del capítulo anterior para evaluar eficientemente el núcleo de la convolución correspondiente al caso periódico. Este nuevo método nos permite tratar superficies muy grandes en tiempos computacionales reducidos. También presentaremos un análisis de la convergencia del método de aceleración sobre la base de una nueva demostración simple (aunque no constructiva). La última sección presenta una evaluación de la eficiencia computacional del algoritmo completo para casos de prueba inspirados en las dificultades que aparecen en las aplicaciones.

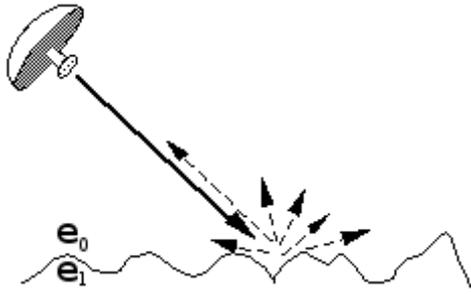
En el capítulo 6, comenzaremos el estudio de algunas aplicaciones. Por cuestiones de tiempo de programación, no se dispone al momento del *solver* acelerado para el caso dieléctrico, cuestión que es inmediata pero que al momento nos limita al estudio de efectos geométricos. Un problema donde esto no parece ser una limitación importante es el de la detección de suelos sembrados con papa, de características geométricas marcadamente distintas a cualquier otro suelo.

También incluimos, en un apéndice, un trabajo realizado previamente en el marco de la misión SAOCOM, en colaboración con Matías Barber y Francisco Grings, sobre un método para el problema inverso de estimar la constante dieléctrica de un suelo. En las perspectivas de trabajo futuro de dicho trabajo, se incluye la necesidad de desarrollar métodos numéricos para el scattering de superficies, con el objetivo de explicar ciertas anomalías encontradas, y así mismo de explorar la posibilidad de estimar la rugosidad de un suelo mediante satélites CosmoSkymed italianos (que operan en frecuencias más altas) con los cuales la Argentina tiene un acuerdo de cooperación importante, y que podrían proveer información auxiliar necesaria, de manera sistemática, para estimar la humedad del suelo con SAOCOM.

Una parte importante del desarrollo de este trabajo - y que insumió un gran esfuerzo - consistió en **la programación de los métodos numéricos descriptos**. Es de notarse que, gracias al desarrollo de estos métodos, el tiempo de ejecución para problemas considerados grandes es muy bajo incluso en la presente implementación en MATLAB. El paso a un lenguaje compilado reduciría estos tiempos por un factor al menos 4, más otro tanto si se aprovecharan las capacidades de paralelización que ofrecen esos lenguajes. Estos aspectos no fueron abordados aún por considerarse *optimizaciones prematuras*. Evitarlas es un concepto de diseño de software sumamente válido en lo que respecta al desarrollo de métodos numéricos para la resolución de problemas científicos, ya que esta es un área donde tanto los problemas más importantes a resolver como los métodos a emplear se suelen redefinir a lo largo del desarrollo de un proyecto. Por lo tanto siempre es preferible en una primera etapa, minimizar el tiempo de programación y la posibilidad de errores, a costas de un factor de eficiencia conocido.

2

Scattering en 2D: Cuestiones Físico-Matemáticas



Los problemas de scattering que nos interesan se pueden modelar correctamente con las ecuaciones de Maxwell. En un problema de scattering, a partir de un campo incidente buscamos obtener los campos dispersados por un determinado obstáculo geométrico. Por ejemplo, un campo incidente puede ser una onda plana:

$$\mathbf{E}^{inc}(\hat{x}) = \mathbf{A}e^{i\alpha x - i\beta y} e^{-i\omega t} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{H}^{inc}(\hat{x}) = \mathbf{B}e^{i\alpha x - i\beta y} e^{-i\omega t} \quad (2.2)$$

$$(2.3)$$

Y los campos totales

$$\mathbf{E}(\hat{x}) = \mathbf{E}^{inc}(\hat{x}) + \mathbf{E}^{sca}(\hat{x}) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{H}(\hat{x}) = \mathbf{H}^{inc}(\hat{x}) + \mathbf{H}^{sca}(\hat{x}) \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

En nuestro caso, por la ausencia de cargas libres y para materiales paramagnéticos, y omitiendo el factor $e^{-i\omega t}$ (donde ω es la frecuencia de la onda incidente), tenemos para los campos totales

$$\nabla \times \mathbf{E} = iw\mu_0\mathbf{H} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = iw\epsilon^+\mathbf{E} \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.8)$$

Para los medios con pérdidas (la corriente por conducción no puede ser despreciada), se tiene

$$J_{tot} = J_{cond} + J_{diel} = \sigma E - iw\epsilon' E = -iw\hat{\epsilon}E$$

con $\hat{\epsilon} = \epsilon' - i\frac{\sigma}{w}$ la constante dieléctrica compleja. En general, la conductividad de una superficie natural está relacionada con su nivel de salinidad, por lo que resulta importante conocerla.

Usando la identidad $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\Delta\mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$, obtenemos

$$\Delta(\mathbf{E}, \mathbf{H}) - k(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = 0$$

con $k = w^2\mu_0\epsilon^+$ que es un sistema de ecuaciones de Helmholtz para los campos (\mathbf{E}, \mathbf{H}) . El mismo resultará acoplado por las condiciones de borde.

Sin embargo, en los casos 2-dimensionales que estudiaremos en esta tesis estas ecuaciones pueden desacoplarse, resultando en una ecuación de Helmholtz escalar para uno de los componentes de un campo, a partir de la cual pueden reconstruirse todos los otros, o sistemas de ecuaciones de Helmholtz más pequeños. Veamos.

2.1. Deducción de las ecuaciones

2.1.1. Conductores perfectos

Supongamos que el problema es invariante en la dirección \hat{y} . En general tendremos $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ de todos los campos.

Ahora consideremos el caso TE (transverse electric), con el campo eléctrico incidente en la dirección \hat{y} . Esto es una de las posibles polarizaciones incidentes. Como el campo eléctrico total no depende de y ,

$$\mathbf{E}^{inc} = \hat{y}\psi^{inc}(x, z) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{E} = \hat{y}\psi(x, z) \quad (2.10)$$

Si el objeto Ω es un conductor perfecto, la condición de borde es:

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.11)$$

Entonces, para el campo eléctrico total, tenemos

$$\begin{cases} \Delta\psi + k^2\psi = 0 & \in \Omega^C \\ \psi = 0 & \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.12)$$

El campo magnético se puede recuperar a partir del rotor del campo eléctrico, con lo cual tenemos todos los componentes del campo (\mathbf{E}, \mathbf{H}) .

Ahora consideremos el caso TM (transverse magnetic), con el campo magnético incidente en la dirección \hat{y} . Esta es la otra polarización posible con incidencia paralela al plano de simetría de la superficie. Tendremos,

$$\mathbf{H}^{inc} = \hat{y}\psi^{inc}(x, z) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{H} = \hat{y}\psi(x, z) \quad (2.14)$$

Por lo tanto el campo eléctrico será

$$-i\omega\epsilon^+\mathbf{E} = \hat{x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \hat{z}\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (2.15)$$

Si el objeto es un conductor perfecto, por la condición de borde (2.11) tenemos

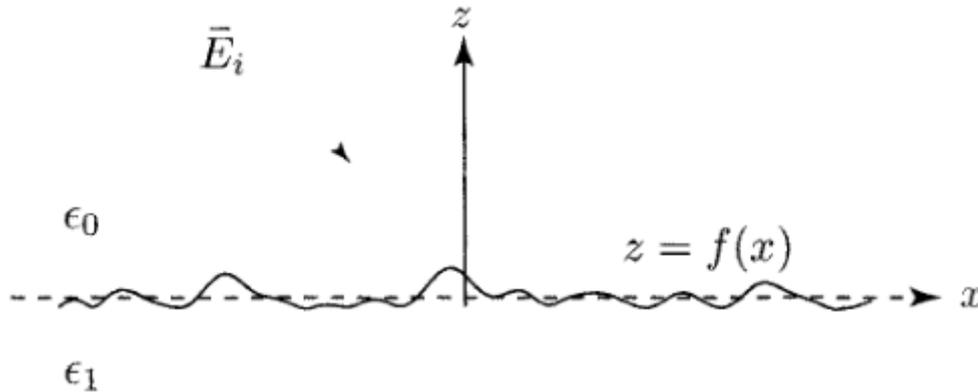
$$\hat{n} \times \left(-\hat{x}\frac{\partial\psi}{\partial z} + \hat{z}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\hat{y}\left(n_x\frac{\partial\psi}{\partial x} + n_z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = -\hat{y}\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad (2.16)$$

por lo que tenemos la ecuación

$$\begin{cases} \Delta\psi + k^2\psi = 0 & \in \Omega^C \\ \frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} = 0 & \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.17)$$

donde ψ es en este caso el campo magnético total (incidente más reflejado).

2.1.2. Dieléctricos



En el problema dieléctrico tenemos que considerar los campos electromagnéticos en ambos lados de la superficie. Habrá parte de la energía que se reflejará y otra que se transmitirá hacia adentro del medio.

Llamaremos \mathbf{E}, \mathbf{H} a los campos en $\Omega = \{(x, z) : z > f(x)\}$, y $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ a los campos en $\Omega_1 = \{(x, z) : z < f(x)\}$.

El mismo análisis anterior se puede repetir para cada uno de los medios, y llegar a la conclusión de que en cada uno de ellos, cada componente de los campos satisface una ecuación de Helmholtz, aunque con un número de onda k que es distinto para cada medio, y que llamaremos k y k_1 .

En el caso TE, ψ representa el campo eléctrico . Por lo tanto

$$\mathbf{E} = \hat{y}\psi(x, z) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{i\omega\mu_0}\hat{y} \times \nabla\psi(x, z) \quad (2.19)$$

$$\hat{n} \times \mathbf{H} = -\frac{\hat{y}}{i\omega\mu_0} (\hat{n} \cdot \nabla\psi(x, z)) \quad (2.20)$$

Y relaciones análogas para $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ y ψ_1 . Sobre la superficie, la continuidad de la componente tangencial de los campos eléctricos y magnéticos, se puede expresar

$$\psi(r) = \psi_1(r) \quad (2.21)$$

$$\hat{n} \cdot \nabla\psi(r) = \hat{n} \cdot \nabla\psi_1(r) \quad (2.22)$$

Por lo que obtenemos el sistema de ecuaciones para los campos eléctricos totales

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\psi + k^2\psi = 0 & \in \Omega \\ \Delta\psi_1 + k_1^2\psi_1 = 0 & \in \Omega_1 \\ \psi = \psi_1 & \in S \\ \frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} = \frac{\partial\psi_1}{\partial\hat{n}} & \in S \end{array} \right. \quad (2.23)$$

En el caso TM, ψ representa el campo magnético . Por lo tanto

$$\mathbf{H} = \hat{y}\psi(x, z) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{i\omega\epsilon}\hat{y} \times \nabla\psi(x, z) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{E} \times \hat{n} = -\frac{\hat{y}}{i\omega\epsilon} (\hat{n} \cdot \nabla\psi(x, z)) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{H}_1 = \hat{y}\psi_1(x, z) \quad (2.27)$$

$$\mathbf{E}_1 \times \hat{n} = -\frac{\hat{y}}{i\omega\epsilon_1} (\hat{n} \cdot \nabla\psi_1(x, z)) \quad (2.28)$$

Y relaciones análogas para $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ y ψ_1 . Sobre la superficie, la continuidad de la componente tangencial de los campos eléctricos y magnéticos, se puede expresar

$$\psi(r) = \psi_1(r) \quad (2.29)$$

$$\hat{n} \cdot \nabla\psi(r) = \frac{\epsilon}{\epsilon_1} \hat{n} \cdot \nabla\psi_1(r) \quad (2.30)$$

Por lo que obtenemos el sistema de ecuaciones para los campos eléctricos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\psi + k^2\psi = 0 & \in \Omega \\ \Delta\psi_1 + k_1^2\psi_1 = 0 & \in \Omega_1 \\ \psi = \psi_1 & \in S \\ \frac{\partial\psi}{\partial\tilde{n}} = \frac{\epsilon}{\epsilon_1} \frac{\partial\psi_1}{\partial\tilde{n}} & \in S \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Es claro que si tenemos distintas capas de superficies rugosas con diferentes constantes dieléctricas, el sistema se puede generalizar agregando nuevos campos ψ_2 , \mathbf{H}_2 , etc.

2.2. Instrumentos de microondas

Para poder entender cómo se pueden modelar a partir de lo visto las mediciones de instrumentos de microondas a bordo de satélites, hacen falta algunos conceptos extras.

En principio, existen dos tipos de instrumentos de microondas: los que miden la energía reflejada por el terreno que fue previamente emitida por el propio instrumento, y los que miden la energía emitida por el terreno mismo (ver más adelante la Ley de Planck). Los primeros se conocen como activos y se los llaman radares o scatterómetros, y los segundos como pasivos y se los llama radiómetros.

Las microondas activas son las más simples de entender en términos de problemas de scattering. Miden la energía retrodispersada por el terreno en un ángulo de incidencia dado. Si el punto desde el que miden está muy lejos del blanco (como es el caso de los sistemas orbitales), nos interesará el comportamiento asintótico del campo reflejado en el límite conocido como *campo lejano*, cuya expresión analítica daremos más adelante.

Definición 2.1 (Backscattering). *El coeficiente de backscattering o de retrodispersión es el comportamiento asintótico del campo reflejado, en la dirección opuesta a la de la onda incidente. Los sistemas activos están diseñados para medir este coeficiente.*

Un aspecto tecnológico muy importante es la resolución espacial (tamaño del pixel) de un sistema. Normalmente a mejores resoluciones hace falta construir antenas mucho más grandes (el tamaño necesario también depende de la longitud de onda). Por eso, el tipo más importante de instrumentos de microondas activos son los Radares de Apertura Sintética (SAR), que mediante un sofisticado procesamiento de los datos recibidos logra obtener una resolución correspondiente a una antena de mucho mayor tamaño (de ahí el nombre apertura sintética), llegando a una resolución, para un sistema orbital, del orden de decenas de metros por píxel con una antena de tamaño razonable. Esta tecnología será utilizada en la misión SAOCOM, planeada actualmente para 2015.

Para entender qué son las microondas pasivas, recordemos que la Ley de Planck expresa cómo un cuerpo negro en equilibrio térmico emite energía electromagnética en todas las longitudes de onda.

$$S(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \approx \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}$$

donde, T es la temperatura termodinámica, c la velocidad de la luz y k la constante de Boltzmann y h la constante de Planck. La aproximación vale solo para las longitudes de onda suficientemente grandes, como es el caso de las microondas. De hecho, la aproximación era conocida antes que la ley de Planck y el hecho de que fallara para frecuencias muy altas motivó el desarrollo de la cuántica.

La hipótesis de cuerpo negro vale en muy pocos casos. La mayoría de las veces, cada objeto tiene una *emisividad* ϵ , que es un factor que separa al cuerpo en cuestión de un cuerpo negro. Observando que en el caso que estamos la energía emitida es lineal con la temperatura, obteniendo $T_b = T_s \cdot \epsilon$, es decir, la temperatura de brillo (T_b) es proporcional a la temperatura termodinámica de un objeto (T_s) y a su emisividad.

Ahora, dada una geometría y una constante dieléctrica, la emisividad se puede calcular resolviendo problemas de scattering como los que venimos mencionando. Definamos antes algunos conceptos físicos que necesitaremos para entender esto.

Definición 2.2 (Reflectividad). *La reflectividad de un objeto es la suma de la energía reflejada por el mismo en todas las direcciones a una longitud de onda dada, normalizada por la energía incidente. La denotaremos r_α . En el caso de una superficie dieléctrica, no se consideran las direcciones que apuntan hacia el medio inferior (hacia el cual se propaga la onda), dado que se la considera parte de la energía transmitida. Los conductores perfectos tienen reflectividad 1, y no transmiten energía hacia el medio inferior.*

Proposición 2.1 (Conservación de la energía). *La energía incidente se divide en energía reflejada, energía transmitida y energía absorbida: $\epsilon_i = \epsilon_r + \epsilon_t + \epsilon_a$. Por lo tanto, normalizando con la energía incidente,*

$$1 = r_\alpha + t_\alpha + a_\alpha$$

En los medios sin pérdidas, $r_\alpha + t_\alpha = 1$.

Definición 2.3 (Emisividad). *En microondas, la energía absorbida es reemitida como microondas, por lo que, tanto para los medios con pérdidas como sin ellas, la emisividad $\epsilon = 1 - r_\alpha$.*

Est se conoce como Ley de Kirchoff. Más detalles sobre el tema pueden verse en el volumen 1 de [34].

Un ejemplo de un instrumento de microondas pasivas es el radiómetro Aquarius, desarrollado por NASA y a bordo del SAC-D, que es una antena orientada a captar la energía que emite la tierra en una longitud de onda grande (25cm) así como el MWR (Microwave Radiometer), desarrollado en el IAR de La Plata, que es otro radiómetro que opera en dos longitudes de onda más pequeñas (27 y 37 Ghz) también a bordo del

SAC-D. El objetivo principal del Aquarius es inferir la constante dieléctrica del agua en el océano (más específicamente, su parte imaginaria) y a partir de ese dato dar una medida de la salinidad superficial del mar. El MWR fue diseñado para proveer información complementaria para la operación del Aquarius, como identificar zonas con lluvias (al ser más pequeña la longitud de onda, es más sensible a partículas pequeñas como las gotas), y al mismo tiempo estimar la rugosidad del mar debida al viento.

La resolución del Aquarius es de un píxel de 50km de radio, o sea 7850 km^2 ($\frac{1}{4}$ de la provincia de Tucumán).

2.3. Análisis de la ecuación de Helmholtz

Como vimos, muchos problemas se pueden reducir a una ecuación de Helmholtz o a un sistema de ecuaciones de Helmholtz. Por lo tanto las técnicas de resolución de la misma serán muy importantes a lo largo de este trabajo. Y el buen funcionamiento de estas técnicas se apoya en algunas propiedades importantes de esta ecuación. Veamos.

2.3.1. La solución fundamental

En dimensión 2 existen dos armónicos esféricos linealmente independientes de orden n , y se pueden representar como $e^{\pm in\psi}$. Buscar soluciones de la ecuación de Helmholtz de la forma

$$u(x) = f(kr)e^{\pm in\psi}$$

en coordenadas polares (r, ψ) conduce a la ecuación diferencial de Bessel:

$$t^2 f''(t) + t f'(t) + [t^2 - n^2] f(t) = 0$$

El análisis que necesitamos de las soluciones de esta ecuación es directo pero largo, por lo que presentaremos los resultados necesarios dando solo alguna idea de la prueba. Para más detalles pueden consultarse Colton [11] o Lebedev [25].

Se puede verificar fácilmente derivando y usando el criterio de D'Alembert que las funciones

$$J_n(t) := \sum_p^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2p} \quad (2.32)$$

son soluciones a la ecuación de Bessel analíticas para todo $t \in \mathbf{R}$, y se conocen como funciones de Bessel de orden n . Con paciencia pero también de manera directa se puede verificar que

$$Y_n := \frac{2}{\pi} \left[\ln \frac{t}{2} + C \right] J_n(t) - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1-p)!}{p!} \left(\frac{2}{t}\right)^{n-2p} - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2p} [\psi(p+n) + \psi(p)] \quad (2.33)$$

son soluciones a la ecuación de Bessel, analíticas para todo $t \in (0, +\infty)$, con

$$\psi(p) := \sum_{m=1}^p \left(\frac{1}{m} \right) \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

$$C := \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{m=1}^p \frac{1}{m} - \ln(p) \right\}$$

donde las sumas de cero términos se toman como nulas. A la constante C se la conoce como *constante de Euler*, a las funciones Y_n como *funciones de Neumann* de orden n . Y a las combinaciones lineales

$$H_n^{(1,2)} := J_n + iY_n$$

se las llama *funciones de Hankel* de primer y segundo tipo.

Tenemos el siguiente comportamiento asintótico de las funciones de Hankel:

$$H_n^{(1,2)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{\pm i(t - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\}, \quad t \rightarrow \infty$$

$$H_n^{(1,2)'}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{\pm i(t - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\}, \quad t \rightarrow \infty$$
(2.34)

Ahora bien, la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones es

$$\Phi(x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|), \quad x \neq y$$
(2.35)

Para cada y fijo, satisface la ecuación de Helmholtz en $\mathbf{R}^2 \setminus \{y\}$

2.3.2. Formulas de representación

Tanto para estudiar propiedades teóricas de la ecuación de Helmholtz como para resolverla numéricamente, son importantes las formulaciones integrales de estas ecuaciones.

Una primera herramienta básica es el teorema de Green, así como ciertas fórmulas de representación que se deducen del mismo.

Teorema 2.1 (Green). *Sea D un dominio C^1 , ν la normal unitaria del borde ∂D orientada hacia el exterior de D . Si $u \in C^1(\bar{D})$ y $v \in C^2(\bar{D})$, tenemos el primer y el segundo teorema de Green, que son:*

$$\int_D \{u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v\} dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds$$
(2.36)

y si $u, v \in C^2(\bar{D})$,

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds$$
(2.37)

Teorema 2.2 (Fórmula de Green o de Representación de Helmholtz). *Sea D un dominio C^2 , ν la normal unitaria del borde ∂D orientada hacia el exterior de D . Sea $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ una función que tiene una derivada normal en el borde en el sentido de que el límite*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \nu(x) \cdot \nabla u(x - h\nu(x)), \quad x \in \partial D,$$

existe uniformemente en ∂D . Y Φ es la solución fundamental a la ecuación de Helmholtz (2.35). Entonces tenemos:

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) - \int_D \{ \Delta u(y) + k^2 u(y) \} \Phi(x, y) dy \quad x \in D, \quad (2.38)$$

donde la integral de volumen existe como integral impropia. En particular, si u es una solución a la ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ en } D,$$

entonces

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \quad (2.39)$$

Demostración. Puede verse, primero para $u \in C^2(\bar{D})$, utilizando el teorema de Green con las funciones u y Φ , en una esfera de radio ρ y tomando límite cuando $\rho \rightarrow 0$. El caso del teorema puede verse tomando un límite con *superficies paralelas* que se aproximan a ∂D . \square

Definición 2.4. *Una solución a la ecuación de Helmholtz cuyo dominio de definición contiene el exterior de alguna esfera se llama radiante si satisface la condición de radiación de Sommerfeld*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \quad \text{en } \mathbf{R}^3 \quad (2.40)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \quad \text{en } \mathbf{R}^2 \quad (2.41)$$

$$(2.42)$$

donde $r = |x|$ y el límite es uniforme en todas las direcciones $\frac{x}{|x|}$

Teorema 2.3 (Fórmula de Green en el dominio exterior). *Supongamos que el conjunto acotado D es el complemento abierto de un dominio no acotado de clase C^2 , y que ν es la normal unitaria al borde ∂D orientada hacia el exterior de D . Sea $u \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbf{R}^2 \setminus \bar{D})$ una solución **radiante** a la ecuación de Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{en } \mathbf{R}^2 \setminus \bar{D}$$

que tiene una derivada normal en el borde en el sentido de que el límite

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \nu(x) \cdot \nabla u(x - h\nu(x)), \quad x \in \partial D,$$

existe uniformemente en ∂D . Entonces tenemos la fórmula de Green para el dominio exterior:

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \quad (2.43)$$

Demostración. Puede verse en [13]. □

Una consecuencia inmediata de la fórmula de representación de Green es un resultado que en la literatura física se denomina “Teorema de Extinción”.

Teorema 2.4 (de Extinción). *En un problema de scattering donde una onda incide desde un medio Ω_1 hacia otro medio Ω_2 , se tienen los siguientes campos*

$$\begin{cases} u(x) = u^{inc}(x) + u^{scat}(x) & x \in \Omega_1 \\ u(x) = u^{scat}(x) & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

Donde tanto u , como u^{inc} y u^{scat} satisfacen las ecuaciones de Helmholtz, y además u^{scat} cumple las condiciones de radiación.

Entonces, en los interiores de los dominios vale la siguiente representación (independientemente de la condición de borde).

$$u(x) - u^{inc} = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \quad x \in \Omega_1 \quad (2.44)$$

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \quad x \in \Omega_2 \quad (2.45)$$

donde Φ es la solución fundamental en cada medio.

Teorema 2.5 (Campo lejano). *Cualquier solución radiante de la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones tiene el comportamiento asintótico de una onda esférica:*

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.46)$$

y

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y} \right\} ds(y) \quad (2.47)$$

Teorema 2.6. *Si u es una solución C^2 a la ecuación de Helmholtz en un dominio D , ya sea el problema interior o exterior, entonces u es analítica en el interior de D .*

Demostración. Sea $x \in D$, y tomemos una bola cerrada contenida en D centrada en x . Aplicando según corresponda el teorema 2.2 o el 2.3 en esta bola, la analiticidad de u se sigue de la analiticidad de la solución fundamental para $x \neq y$ \square

La extensión de este resultado para ver la analiticidad de la solución hasta el borde es un resultado clásico que puede verse en [28].

El Problema de Cauchy Un resultado muy importante que necesitaremos aplicar a la ecuación de Helmholtz es el Teorema de Holmgren. Es una generalización de Cauchy-Kowalevski, ya que el mismo asegura la unicidad de soluciones analíticas, pero deja abierta la posibilidad de que existan otras soluciones no-analíticas.

Según el teorema de Holmgren [23], es posible obtener unicidad de soluciones suaves para el problema de Cauchy en una hiper-superficie analítica (curva en el caso dos-dimensional) que sea no característica, para una ecuación lineal con coeficientes analíticos. En el caso de las ecuaciones elípticas como la de Helmholtz, ninguna curva suave es no característica. Por lo tanto, a partir de Holmgren es posible obtener el siguiente resultado:

Teorema 2.7 (Unicidad de soluciones suaves). *Dado un dominio Ω en \mathbf{R}^2 y una curva analítica S contenida en Ω , el problema de Cauchy para la ecuación de Helmholtz con dato $f, g \in C^2$,*

$$\begin{cases} \Delta\psi + k^2\psi = 0 & \in \Omega \\ \psi = f & \in S \\ \frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} = g & \in S \end{cases} \quad (2.48)$$

tiene una única solución

2.3.3. Potenciales single y double layer

Observando lo anterior, llegamos a la definición de dos operadores muy importantes en la teoría de scattering: el *potencial de capa simple*, o *single layer potential* y el *potencial de capa doble*, o *double layer potential*, que definimos a continuación como S y D respectivamente.

$$S(\mu)(x) := \int_{\partial D} \mu(y) \Phi(x, y) dS(y) \quad x \notin \partial D \quad (2.49)$$

$$D(\mu)(x) := \int_{\partial D} \mu(y) \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\hat{n}(y)} dS(y) \quad x \notin \partial D \quad (2.50)$$

Es claro que son soluciones a la ecuación de Helmholtz cuando $x \notin \partial D$ que satisfacen la condición de radiación de Sommerfeld. Nos interesan los valores que toman en ∂D , que los podemos obtener calculando un límite conocido como *jump relation*.

Teorema 2.8 (Relaciones de salto). *Sea ∂D de clase C^2 y μ continua. Entonces los potenciales S y D satisfacen las condiciones de salto*

$$S(\mu)(x) = \int_{\partial D} \mu(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} S(\mu)_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \mu(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) \mp \frac{1}{2} \mu(x), \quad x \in \partial D \quad (2.52)$$

$$D(\mu)_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \mu(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) \pm \frac{1}{2} \mu(x), \quad x \in \partial D \quad (2.53)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} S(\mu)_{\pm}(x) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \nu(x) \cdot \nabla S(\mu)(x \pm h\nu(x)) \\ D(\mu)_{\pm}(x) &:= \lim_{h \rightarrow 0} D(\mu)(x \pm h\nu(x)) \end{aligned}$$

Demostración. Daremos una idea de cómo aparecen funciones δ en el cálculo de la integral singular en su forma más simple, que como veremos en el próximo capítulo cuando estudiemos ciertas descomposiciones de los núcleos, es un núcleo con una singularidad logarítmica. En el caso de un segmento recto, las funciones resultantes son:

$$F_1(y) = \int_{-1}^1 \log(\sqrt{x^2 + y^2}) dx \quad F_2(y) = \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial x} \log(\sqrt{x^2 + y^2}) dx$$

correspondientes al single y al double layer. Puede verse por integración directa que

$$F_1(y) = \log(y^2 + 1) + 2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{y}\right)y - 2$$

que es continua cuando $y \rightarrow 0$. Y sin embargo,

$$F_2(y) = 2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{y}\right)$$

satisface $\lim_{y \rightarrow 0^+} F_2(y) = \frac{\pi}{2}$, y $\lim_{y \rightarrow 0^-} F_2(y) = -\frac{\pi}{2}$

Este es el hecho básico en el que se apoyan las sucesivas demostraciones, mediante un cambio a coordenadas polares, para distintas condiciones de regularidad de las densidades, del borde, etc. La demostración completa para el caso 2D puede verse en [24], y para el 3D y las ecuaciones de Maxwell en [13]. \square

2.4. Métodos analíticos para superficies aleatorias

Las superficies aleatorias suelen estar descriptas en términos de su función de autocorrelación espacial. Es decir, $A(x, y) = E(f(x)f(y))$. El scattering de estas

superficies será entonces un proceso aleatorio, cuyos momentos se pueden calcular a partir de esta función de autocorrelación.

Hay dos familias muy importantes de soluciones aproximadas clásicas para el scattering de superficies: las basadas en la aproximación de Kirchoff y las basadas en perturbaciones en la altura (Small Perturbation Method, SPM). Tomaremos los resultados de [34].

En principio, definimos la función de scattering biestático $\sigma(\theta_s)$, que representará la proporción de energía que es reflejada en campo lejano, en dirección σ .

Para el problema de Dirichlet con SPM, se tiene

$$\sigma(\theta_s) = 4k^3 \cos^2 \theta_s \cos(\theta_i) W(k \sin \theta_s - k \sin \theta_i)$$

donde W es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de la superficie.

y para el problema de Neumann,

$$\sigma(\theta_s) = 4k^3 \cos^2 \theta_s \cos(\theta_i) W(k \sin \theta_s - k \sin \theta_i)$$

El enfoque del método de Kirchoff consiste en aproximar los campos superficiales usando la aproximación del plano tangente. Es decir, en el campo en cada punto es aproximado por el que efectivamente habría en el plano tangente.

Tanto para el problema de Dirichlet como para el de Neumann se obtiene, para el back-scattering

$$\sigma(\theta_s) = |1 + \cos(\theta_i + \theta_s)|^2 \frac{k^3}{\cos \theta_i} e^{-k^2 h^2 (\cos \theta_i + \cos \theta_s)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(k(\cos \theta_i + \cos \theta_s))^{2(m-1)}}{m!} W^{(m)}(k \sin \theta_s - k \sin \theta_i) \quad (2.54)$$

Con cualquiera de estas teorías analíticas surge la necesidad de caracterizar su *rango de validez*, es decir los valores para los cuales las aproximaciones empleadas son “aceptables”, donde la aceptabilidad depende del caso. Para hacer esto, una opción es comparar contra métodos numéricos que resuelvan las ecuaciones originales. Para realizar esta comparación, durante las décadas del 70’ y 80’ se desarrolló el método que comentamos a continuación.

2.5. Un primer método numérico

Un método numérico para estos problemas es el llamado “Method of Moments”, En la literatura de física e ingeniería las ecuaciones integrales a resolver se suelen derivar usualmente a partir del Teorema de Extinción (Teorema 2.4), que en la notación de los potenciales single y double-layer se puede escribir, para el caso dieléctrico, como sigue

$$\begin{aligned}
u(x) - u^{inc}(x) &= S_k \left(\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \right) (x) - D_k(u)(x) & x \in \Omega_1^o \\
u_1(x) &= S_{k_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \hat{n}} \right) (x) - D_{k_1}(u_1)(x) & x \in \Omega_2^o
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Y por las relaciones de salto (Teorema 2.8), cuando $x \rightarrow \partial D$ resulta

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}u(x) - u^{inc}(x) &= S_k \left(\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \right) (x) - D_k(u)(x) & x \in \Omega_1^o \\
\frac{1}{2}u_1(x) &= S_{k_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \hat{n}} \right) (x) - D_{k_1}(u_1)(x) & x \in \Omega_2^o
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Donde k es el número de onda del medio superior (Ω_1 , desde el que proviene la onda), y k_1 el del medio inferior Ω_2 . A continuación se aplican las condiciones de borde. En el caso de un conductor perfecto solo se necesita la primera ecuación (el campo es nulo en el segundo medio), y en el borde vale, para el caso TE, $u = 0$, y para el TM, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. En el caso dieléctrico, las condiciones de borde de (2.23) y (2.31) nos permiten despejar u_1 en función de u y $\frac{\partial u_1}{\partial n}$ en función de $\frac{\partial u}{\partial n}$, con distintas constantes según la polarización TE o TM.

Por ejemplo, una ecuación integral para el problema de Dirichlet del conductor perfecto es

$$u^{inc}(x) = S \left(\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \right) (x) \tag{2.57}$$

y para el problema de Neumann,

$$u^{inc}(x) = -\frac{1}{2}u(x) + D(u)(x) \tag{2.58}$$

Un método numérico para resolver estos problemas en una superficie - tal vez el primero que se usó - consiste en evaluar en una cantidad finita de puntos $x = (x_j)$, y pedir que la ecuación se satisfaga en ellos, procedimiento conocido como *point matching*. Posteriormente se escribe la incógnita en alguna base de funciones que se integran analíticamente. La base de funciones constantes a trozos suele ser referida como *pulse basis functions*, aunque también son usuales las bases de funciones lineales a trozos u otras de más alto orden. De esta manera se llega a sistemas lineales de la forma

$$\Delta x \sum_{n=1, n \neq m} K(x_m, x_n) U(x_n) + \left(\int_{I_m} K(x_m, x) \right) U(x_m) = b(x_m)$$

donde la integral en el intervalo I_m se evalúa, por ejemplo, usando expresiones asintóticas para la función de Hankel con argumentos pequeños, o, a costas de una mayor carga computacional, mediante integración numérica. Así se llega, para el problema de Dirichlet, a una matriz de la forma

$$A_{mn} = \begin{cases} \Delta K(x_m, x_n) & m \neq n \\ \frac{i\Delta x}{4} \left[1 + i\frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\gamma^k}{4e} \Delta l_m\right) \right] & m = n \end{cases}$$

Más detalles sobre esta clase de métodos pueden verse en [34].

El método resulta ser de orden bajo, por lo cual hacen falta muchos puntos de discretización para alcanzar una precisión dada. Aún peor, ciertas condiciones como superficies de altura comparable (o mayor) que la longitud de onda, hacen crecer el número de puntos de discretización por longitud de onda dramáticamente.

3

Un método espectral para objetos cerrados

En este capítulo vamos a desarrollar y analizar un método numérico para el scattering de un objeto cerrado, con condición de borde de Dirichlet. En la mayoría de las aplicaciones, los bordes de los objetos son analíticos o analíticos a trozos. En la presente tesis estudiaremos el caso analítico, y referiremos a [13] para el tratamiento necesario en el caso donde existen puntas.

Veremos una formulación integral del problema con solución única para cualquier longitud de onda, hecho del cual daremos una demostración en L^2 mediante la teoría de Fredholm, propiedades de compacidad de los operadores involucrados, y el hecho de que la formulación propuesta solo admite la solución trivial en el caso homogéneo.

El método numérico propuesto es un método de Nyström (aproxima el operador del caso continuo por operadores discretos de cuadratura). Las excelentes propiedades del método en cuestión se basan en el empleo de reglas de cuadratura especializadas, basados en hechos de interpolación e integración numérica que demostraremos, ya sea para núcleos integrales suaves o singulares, que convergen exponencialmente. A su vez, también reseñaremos propiedades de convergencia de los métodos de Nystrom, en particular la propiedad que justifica el esfuerzo por desarrollar reglas de cuadratura de orden alto: en los métodos de Nystrom el orden de convergencia de la cuadratura se traslada al de la solución.

Así mismo, evaluamos el comportamiento del método propuesto en un ejemplo canónico.

3.1. El problema de Dirichlet exterior

La formulación integral que utilizaremos consiste en buscar una solución de la forma de una combinación lineal de los potenciales single y double layer

$$u_{scat}(x) = S(\varphi)(x) + i\nu D(\varphi)(x)$$

donde ν es una constante a elección.

Puede verse que para cualquier densidad φ , u_{scat} es una solución radiante de la ecuación de Helmholtz en el dominio exterior. La condición de borde nos da la ecuación a resolver: como en el problema de Dirichlet el campo total se anula en la superficie, pedimos que $u_{scat}(x) = -\phi_{inc}(x)$ para $x \in \partial D$. Utilizando las *jump relations* vemos que esto valdrá siempre que

$$\frac{1}{2}\varphi + S(\varphi) + i\nu D(\varphi) = \phi_{inc} \quad (3.1)$$

Como veremos más adelante, esta formulación integral tiene solución única para cualquier número de onda k , y es de la forma de $I + K$ con K un operador compacto, lo que conduce a un problema bien condicionado.

Entonces tenemos una ecuación integral con incógnitas en el borde del dominio. Antes de ver cómo la podemos discretizar y resolver, analicemos un poco el tipo de núcleo que tiene esta ecuación.

Para ello empezamos parametrizando el borde, que como el objeto es cerrado se puede escribir con dos componentes periódicas

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Usando la regla de la cadena, y $\partial H_0^1 = -H_1^1$, obtenemos la ecuación parametrizada

$$\psi(t) - \int_0^{2\pi} (L(t, \tau) + i\nu M(t, \tau)) \psi(\tau) d\tau = g(t) \quad (3.2)$$

con $g(t) := 2\phi_{inc}(x(t))$, $\psi(t) := \mu(x(t))$ y los núcleos

$$L(t, \tau) := \frac{ik}{2} (x_2'(\tau) [x_1(\tau) - x_1(t)] - x_1'(\tau) [x_2(\tau) - x_2(t)]) \frac{H_1^1(kr(t, \tau))}{r(t, \tau)} \quad (3.3)$$

$$M(t, \tau) := \frac{i}{2} H_0^1(kr(t, \tau)) [x_1'(\tau)^2 + x_2'(\tau)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

con

$$r(t, \tau) := \{[x_1(t) - x_1(\tau)]^2 + [x_2(t) - x_2(\tau)]^2\}^{1/2}$$

Utilizamos algunas propiedades de las funciones de Bessel para descomponer los núcleos en dos partes con propiedades bien distintas.

$$L(t, \tau) = L_1(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \left(\frac{t - \tau}{2} \right) \right) + L_2(t, \tau) \quad (3.5)$$

$$M(t, \tau) = M_1(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \left(\frac{t - \tau}{2} \right) \right) + M_2(t, \tau) \quad (3.6)$$

donde

$$L_1(t, \tau) := \frac{k}{2\pi} \{x'_2(\tau)[x_1(t) - x(\tau)] - x'_1(\tau)[x_2(t) - x_2(\tau)]\} \frac{J_1(kr(t, \tau))}{r(t, \tau)} \quad (3.7)$$

$$L_2(t, \tau) := L(t, \tau) - L_1(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right), \quad (3.8)$$

$$M_1(t, \tau) := -\frac{1}{2\pi} J_0(kr(t, \tau)) \{[x'_1(\tau)]^2 + [x'_2(\tau)]^2\}^{1/2} \quad (3.9)$$

$$M_2(t, \tau) := M(t, \tau) - M_1(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) \quad (3.10)$$

Los núcleos L_1, L_2, M_1 y M_2 resultan analíticos. Y en particular, usando las expansiones (2.32) y (2.33) podemos deducir los términos diagonales tomando el límite $\tau \rightarrow t$.

$$L_2(t, t) = L(t, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{x'_1(t)x''_2(t) - x'_2(t)x''_1(t)}{[x'_1(t)]^2 + [x'_2(t)]^2} \quad (3.11)$$

$$M_2(t, t) = \left\{ \frac{i}{2} - \frac{C}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{k^2}{4} [x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2] \right) \right\} [x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2]^{1/2} \quad (3.12)$$

Entonces la ecuación que teníamos que resolver (3.1), vemos que es de la forma

$$\psi(t) - \int_0^{2\pi} \left[\ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) K_s(s, t) + K_r(s, t) \right] \psi(s) ds = g(t) \quad (3.13)$$

Para resolver numéricamente una ecuación integral hay varias opciones: los métodos de colocación, de Galerkin y de Nystrom. En nuestro caso desarrollaremos un método de Nyström, que consiste en aproximar la integral por una regla de cuadratura. Nuestra preocupación está entonces en desarrollar una regla de cuadratura óptima para las integrales que tenemos, ya que, como veremos más adelante, el orden de convergencia de la solución resulta ser el mismo que el de la cuadratura.

3.2. Algunos elementos de intepolación e integración numérica

Definición 3.1. Diremos que un función es $C_{per}^r([a, b])$ si además de ser C^r es periódica junto con todas sus derivadas. Es decir, $\partial^\alpha f(a) = \partial^\alpha f(b) \forall \alpha$.

Teorema 3.1 (Regularidad y series de Fourier). *La convergencia de la serie de Fourier de una función C_{per}^m es $O(n^{-m})$. Y en particular para C_{per}^∞ la convergencia es súper-algebraica.*

Demostración.

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nt) + b_n \cos(nt)$$

con $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$, $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$.

Haciendo partes m veces,

$$a_n = n^{-m} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(t) \cos(nt) dt$$

si m es impar, y se tienen expresiones análogas para b_n y para m par.

Observemos que el término de la derecha corresponde al coeficiente de Fourier $b_n^{f^{(m)}}$, por lo que

$$a_n = \frac{b_n^{f^{(m)}}}{n^m}$$

Llamando $\hat{b}_n := b_n^{f^{(m)}}$, y desarrollando $(\hat{b}_n - \frac{1}{n})^2$ se obtiene la desigualdad

$$\frac{\hat{b}_n}{n} \leq \frac{1}{2} \left(\hat{b}_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

Por lo tanto,

$$|a_n| n^{m-1} = \left| \frac{\hat{b}_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\hat{b}_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

Sumando sobre n , obtenemos

$$\sum_n |a_n| n^{m-1} \leq \frac{1}{2} \|f^{(m)}\|_2^2 + \frac{\pi}{4} < \infty$$

lo que demuestra que la serie converge más rápido que cualquier polinomio de orden m . \square

Teorema 3.2 (Series de Fourier de funciones analíticas). *La serie de Fourier de una función analítica converge exponencialmente*

Demostración. Si f es analítica, como en particular su serie de Fourier es convergente, podemos escribir

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inz}$$

Es fácil ver que debido a la analiticidad de f en \mathbf{R} , para cada z , la serie de Fourier tiene un radio de convergencia en el plano complejo. Como el intervalo en el que está definida f , es finito y estos círculos definen un cubrimiento por abiertos, podemos quedarnos con el de radio mínimo, al que llamaremos σ . Entonces la serie de Fourier de f converge en $-\sigma \leq \text{Im}(z) \leq \sigma$. En particular, tomando $z = x + i\sigma$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} e^{n\pm\sigma}$$

converge. Es claro que para que la serie pueda converger, los coeficientes c_n deben decaer al menos exponencialmente. \square

Observamos que este resultado no es constructivo porque no nos permite estimar el valor de la constante σ .

Proposición 3.1. *La Regla de trapecios compuesta de orden n , es exacta para polinomios trigonométricos de orden $2n - 1$*

Demostración. Puede verse por integración directa. \square

Proposición 3.2. *El orden de convergencia de la interpolación por polinomios trigonométricos se traslada al de la regla de trapecios para la integral de esa función.*

Demostración. Sea f_n la interpolación con polinomios trigonométricos de f . Pongamos

$$\begin{aligned} \int f - R_T(f) &= \int f - R_T(f - f_n) - R_T(f_n) \\ &= \int (f - f_n) \end{aligned}$$

ya que la regla es exacta, y evaluamos en los puntos de interpolación. Por lo tanto se sigue, haciendo Hölder para la norma 2 o tomando supremos para la norma infinito, que

$$\left| \int f - R_T(f) \right| \leq C_{2,\infty} \|f - f_n\|_{2,\infty}$$

\square

En particular, por los resultados de convergencia de series de Fourier que vimos anteriormente, dada una función C_{per}^∞ , la regla de trapecios converge a la integral de f de manera súper-algebraica, y si además f es analítica, la convergencia resulta exponencial.

Proposición 3.3 (Cuadratura de Martensen-Kussmaul). *Si tenemos $f \in C_{per}^\infty$, y aproximamos la siguiente integral*

$$\int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) f(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t) f(t_j), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

con los pesos de la cuadratura dados por

$$R_j^{(n)}(t) := -\frac{2\pi}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos(m(t-t_j)) - \frac{\pi}{n^2} \cos(n(t-t_j)), \quad j = 0, 1, \dots, 2n-1$$

y los puntos t_j uniformemente distribuidos en $[0, 2\pi]$.

obtenemos una convergencia del mismo orden que el de la interpolación de f con polinomios trigonométricos.

Demostración. Esta regla se obtiene desarrollando f en su serie de Fourier e integrando cada término analíticamente. Llamemos al término n -ésimo de esta serie f_n .

El núcleo logarítmico define un operador que más adelante veremos que es acotado en L^2 (de hecho, veremos en (3.7) que es un operador compacto). Por lo tanto,

$$\left| \int_0^{2\pi} K(t-\tau)f(\tau) - f_n(\tau)d\tau \right| \leq \|K_t\|_2 \|f_n\|_2$$

Por lo tanto vemos que el orden de convergencia de la serie de Fourier de f se traslada al de la integral en cuestión. En particular, si f es C_{per}^∞ , la convergencia de la regla de Martensen Kussmaul es súper-algebraica, y si f es analítica, la convergencia será exponencial. \square

3.3. El método de Nyström

El método numérico que proponemos para la ecuación (3.13) consiste en elegir un conjunto equiespaciado $(t_i)_{i=1,\dots,n}$, y utilizar las cuadraturas anteriormente descritas. Así,

$$\int_0^{2\pi} K(t,\tau)\psi(\tau)d\tau \approx \sum_{j=0}^{2n-1} \left\{ R_j^{(n)}(t)K_1(t,t_j) + \frac{\pi}{n}K_2(t,t_j) \right\} \psi^{(n)}(t_j) = g(t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (3.14)$$

y obtenemos el sistema lineal

$$\psi(t_i) - \sum_{j=0}^{2n-1} \left\{ R_j^{(n)}(t_i)K_1(t_i,t_j) + \frac{\pi}{n}K_2(t_i,t_j) \right\} \psi^{(n)}(t_j) = g(t_i) \quad i = 0, 1, \dots, 2n-1 \quad (3.15)$$

Que se puede resolver fácilmente utilizando alguna rutina numérica para resolver matrices. Para armar la matriz del sistema alcanza con evaluar los núcleos K_1 y K_2 y los pesos R_j en una grilla de valores de t y τ .

3.3.1. Evaluación del algoritmo

Para evaluar el funcionamiento del algoritmo, utilizamos esta superficie que fue estudiada en la literatura

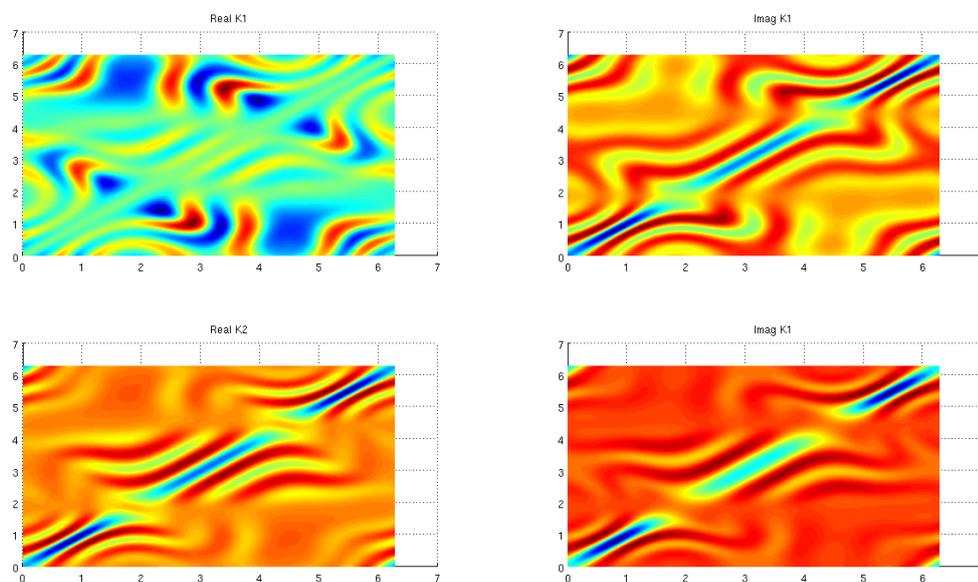
$$x(t) := (\cos(t) + 0,65\cos(2T) - 0,65, 1,5\sin(t))$$

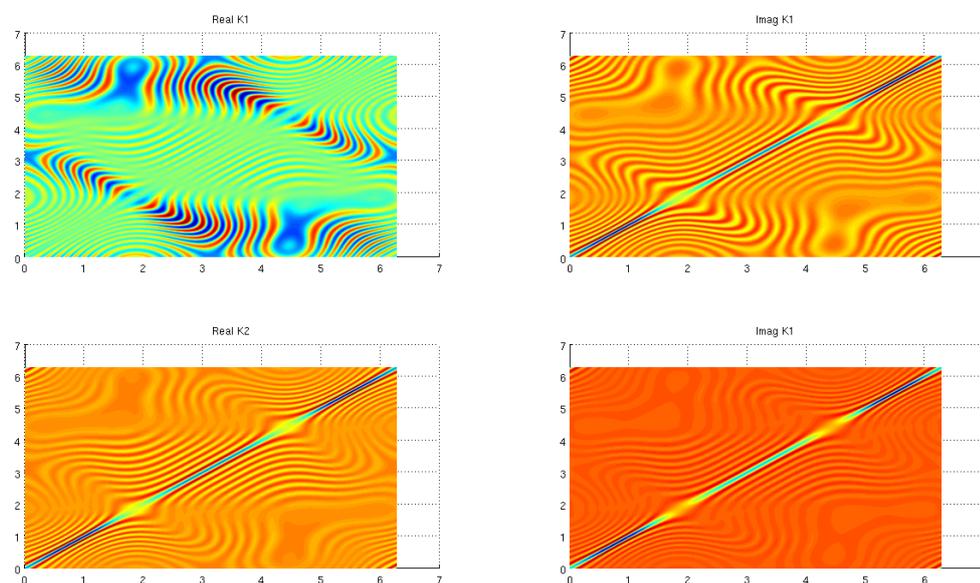
Los siguientes son resultados, para discretizaciones cada vez más finas, del campo lejano en la dirección de retrodispersión, con una onda incidente de dirección $(-\sin(30), \cos(30))$.

| n | k=5 | k=20 |
|-----|---|---|
| 8 | -2.289648473644328 + 1.346046414186653i | -0.783013771847816 + 1.614695911862722i |
| 16 | -2.393637692640171 + 1.740058127053416i | -2.216456302738274 + 2.387242421908693i |
| 32 | -2.400360139794605 + 1.743357044072512i | -4.327316037625248 + 2.622980224427514i |
| 64 | -2.400360144741134 + 1.743357039976258i | -4.161259049740845 + 3.665620193229977i |
| 128 | -2.400360144741134 + 1.743357039976258i | -4.164321593387035 + 3.667621520188368i |
| 256 | -2.400360144741134 + 1.743357039976258i | -4.164321593387034 + 3.667621520188368i |

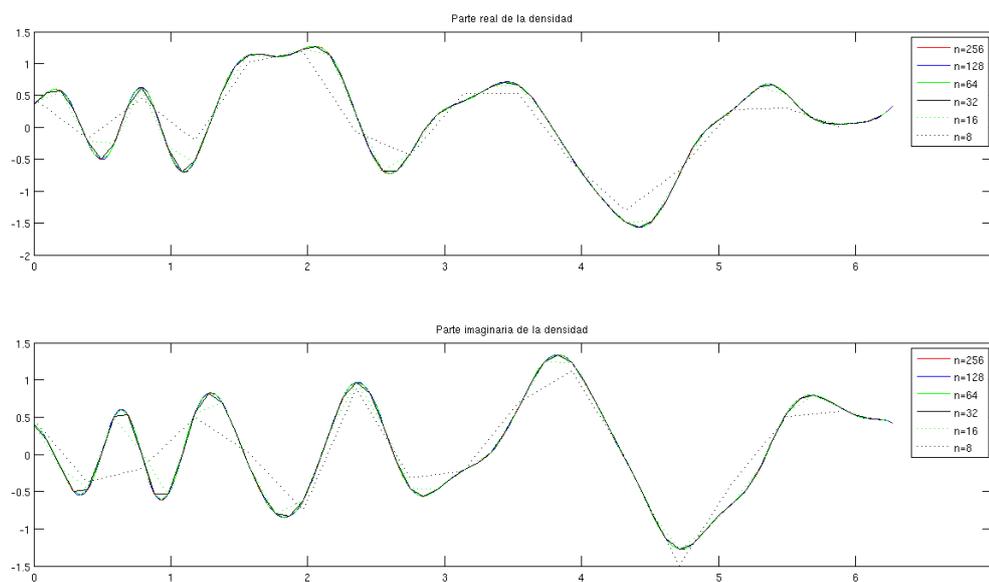
Se puede observar que, para el número de onda $k=5$, llegamos a la precisión de la máquina a partir de $n = 64$, y para $k=20$, a partir de $n=256$.

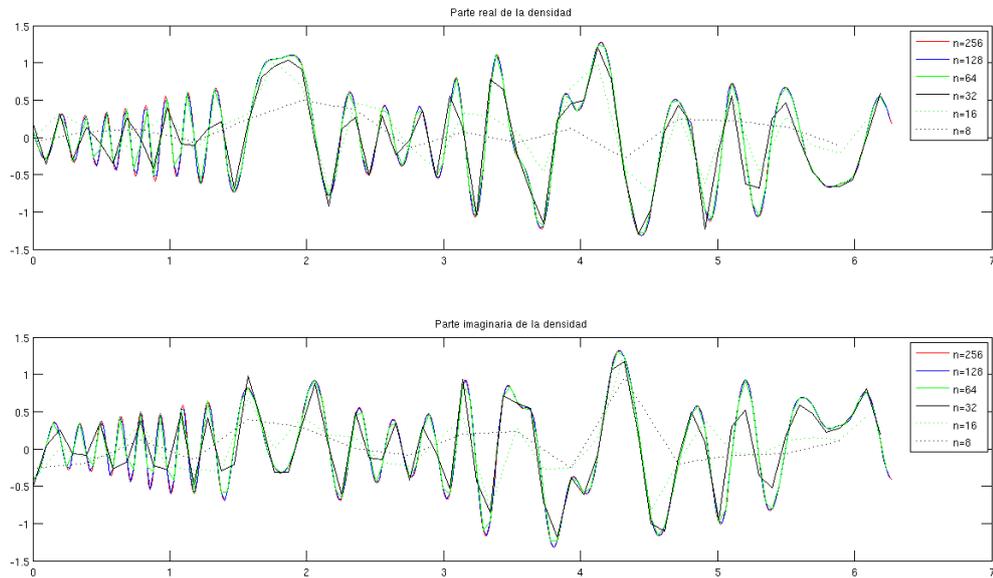
A continuación se muestran los núcleos de la ecuación integral (las partes reales e imaginarias de las parte regular y logarítmica).



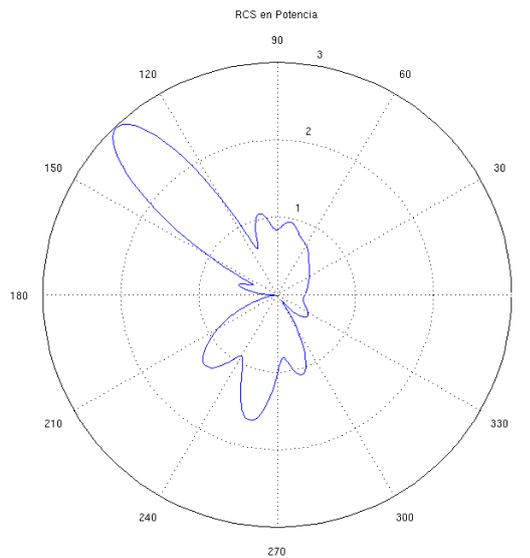


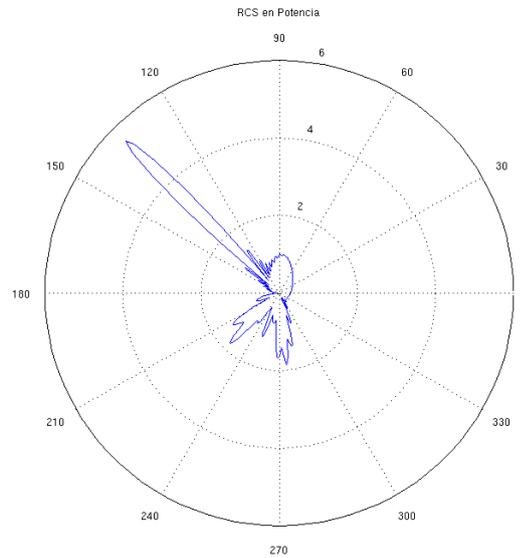
A continuación se pueden ver gráficos de la convergencia de las densidades, en sus partes reales e imaginarias en función de k .



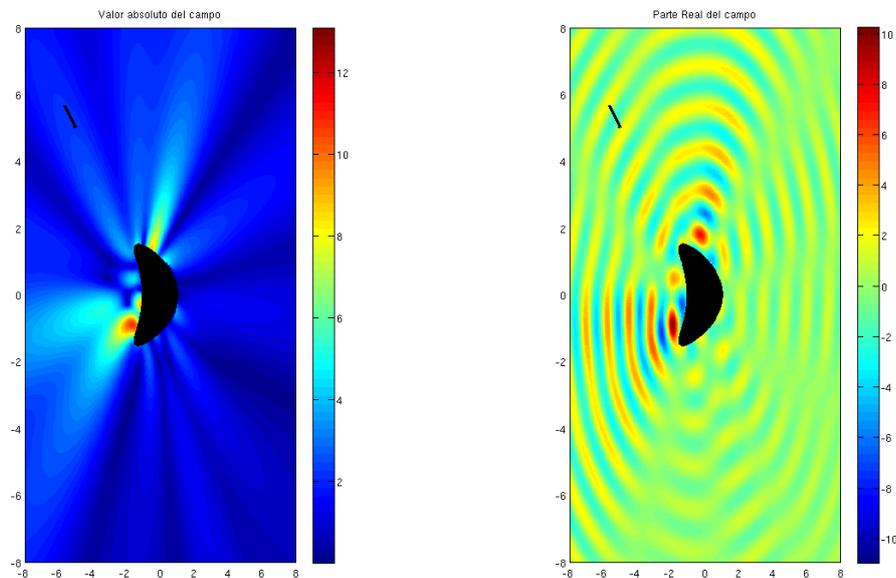


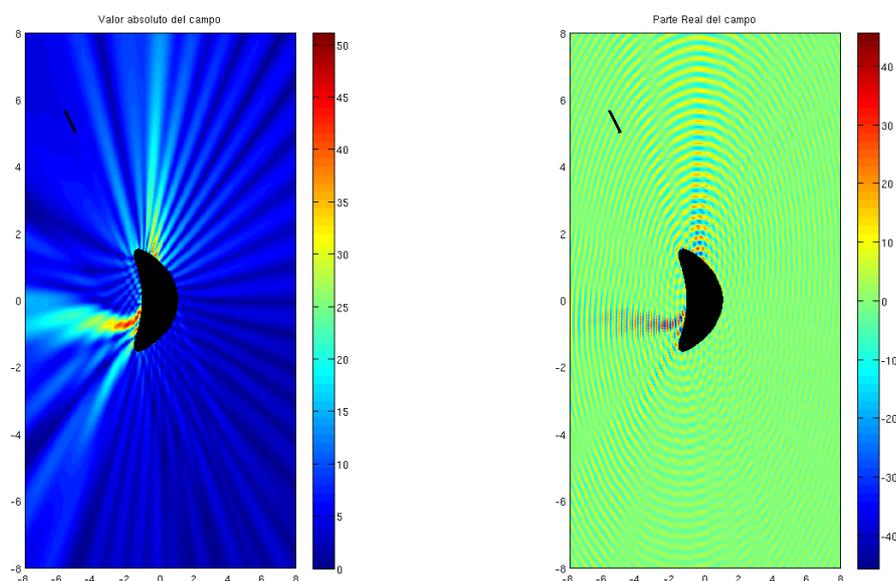
Al conjunto de las integrales de de campo lejano en todas las direcciones (para una misma dirección incidente) se lo conoce como Radar Cross Section (RCS). Las graficamos a continuación.





Y finalmente, las integrales de campo cercano. Estas son iguales que las de campo lejano solo que antes de tomar el límite con $|x| \rightarrow \infty$, por lo que hay que evaluar funciones de Hankel para calcularlas. De la misma manera que con el campo lejano, al tratarse de integrales suaves y periódicas, se pueden calcular con la regla de trapecios.





3.3.2. Análisis del Método de Nyström

Una propiedad importante de estos métodos es que el orden de convergencia de la cuadratura se traslada a la solución. Para ello es necesario estudiar la convergencia de los llamados operadores de cuadratura al operador continuo. A diferencia de otros métodos cuyas aproximaciones sucesivas se basan en considerar subespacios de dimensión creciente, los operadores de cuadratura no convergen en norma. Pero sí puede verse que convergen puntualmente, y que su convergencia es colectivamente compacta, noción que definimos a continuación.

Definición 3.2. *Una conjunto de operadores lineales $\mathcal{A} = \{A : X \rightarrow Y\}$ se dice colectivamente compacto si para cada conjunto U acotado, la imagen*

$$\mathcal{A}(U) = \{A\varphi : \varphi \in U, A \in \mathcal{A}\}$$

es relativamente compacta

Una sucesión (A_n) de operadores se dice colectivamente compacta cuando el conjunto correspondiente lo es. Puede verse muy fácilmente que la convergencia puntual de una sucesión colectivamente compacta implica la compacidad del operador límite.

Teorema 3.3. *Sea $A : X \rightarrow X$ un operador compacto en un espacio de Banach X , y sea $I - A$ inyectivo. Supongamos que la sucesión $A_n : X \rightarrow X$, es colectivamente compacta y puntualmente convergente ($A_n\varphi \rightarrow A\varphi, n \rightarrow \infty, \forall \varphi \in X$). Entonces existe n_0 tal que para $n > n_0$, los operadores inversos $(I - A_n)^{-1}$ existen y son acotados, y, para las soluciones de*

$$\varphi - A\varphi = f \quad y \quad \varphi_n - A_n\varphi_n = f_n$$

tenemos

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq C \{ \|(A_n - A)\varphi\| + \|f_n - f\| \}$$

Demostración. Se puede encontrar en los teoremas **10.9**, **10.10** y el corolario **10.11** de [24]. \square

Teorema 3.4. *Los operadores de la cuadratura de trapecios y de Martensen-Kussmaul son puntualmente convergentes y colectivamente compactos*

Demostración. Se puede encontrar en los teoremas **12.8**, **12.12** de [24] \square

3.4. Existencia, unicidad y regularidad

Las ecuaciones de la forma $I - \lambda K\varphi = f$, con K un operador integral (compacto) son conocidas como ecuaciones de Fredholm. Un teorema fundamental para comprender el comportamiento de estas ecuaciones es un resultado muy conocido de análisis funcional: la alternativa de Fredholm. Lo enunciamos a continuación.

Teorema 3.5 (Alternativa de Fredholm). *Si una ecuación integral admite, en el caso homogéneo, únicamente la solución trivial, en el caso no homogéneo habrá una única solución para cualquier dato. Y si no, tendrá un número de soluciones no-triviales (autofunciones), y solo habrá solución para datos que sean ortogonales a todas estas autofunciones.*

Para poder aplicar este resultado, nos interesará saber cuándo los operadores que aparecen en los problemas que estamos considerando son compactos. Para ello veremos unos primeros resultados básicos de compacidad en L^2 de todos los operadores que nos interesan.

Teorema 3.6. *Un operador integral de núcleo $k \in L^2$ (de Hilbert-Schmidt) es compacto como operador de $L^2 \rightarrow L^2$*

Demostración. Puede establecerse mediante la aproximación por los operadores de rango finito que resultan de truncar una base ortonormal de L^2 . \square

En particular, un operador de núcleo continuo sobre un dominio acotado resultará compacto en L^2 . Pero uno de los operadores que nos interesa, el operador de núcleo logarítmico, no es continuo ni de Hilbert-Schmidt, sino que es un operador singular, cuya singularidad tiene la siguiente propiedad.

Definición 3.3. *Un operador integral se dice débilmente singular si es de la forma*

$$K(s, t) = \frac{\kappa(s, t)}{\|s - t\|^l} \quad 0 \leq l \leq n$$

donde κ es una función acotada y n es la dimensión del espacio.

Proposición 3.4. *El operador de núcleo logarítmico es débilmente singular*

Demostración. Alcanza poder acotar $\frac{\log(\sin^2(x))}{x^{2-\alpha}}$, para $x \rightarrow 0^+$, lo que se puede comprobar mediante la regla de L'Hôpital para $\alpha < 2$. \square

Teorema 3.7. *Un operador integral débilmente singular es compacto en L^2 .*

Demostración. Veremos que se puede aproximar por operadores de Hilbert-Schmidt. Para ello, consideremos la siguiente descomposición ($r := |s - t|$).

$$K^r(s, t) = \begin{cases} K(s, t) & r \geq \delta \\ 0 & r < \delta \end{cases} \quad (3.16)$$

$$K^s(s, t) = \begin{cases} 0 & r \geq \delta \\ K(s, t) & r < \delta \end{cases} \quad (3.17)$$

Esto corresponde a truncar la singularidad. Tenemos $K = K^r + K^s$, donde K^r , como D es acotado, es un operador de Hilbert-Schmidt. Ahora veamos que el operador K^s tiene norma arbitrariamente pequeña.

$$|K^s\phi| \leq M^2 \left[\int_{r < \delta} \frac{|\phi|}{r^l} dt \right]^2 \quad (3.18)$$

donde M es una cota de $\kappa(s, t)$. Por la desigualdad de Schwartz,

$$\left[\int_{r < \delta} \frac{|\phi|}{r^l} dt \right]^2 = \left[\int_{r < \delta} \frac{|\phi|}{r^{\frac{l}{2}}} \frac{dt}{r^{\frac{l}{2}}} \right]^2 \quad (3.19)$$

$$\leq \left[\int_{r < \delta} \frac{|\phi|^2}{r^l} dt \right] \left[\int_{r < \delta} \frac{dt}{r^l} \right] \quad (3.20)$$

de lo que se sigue que

$$\|K^s\phi\| = \int_D |K^s\phi|^2 \leq M^2 \left[\int_D \int_D \frac{|\phi|^2}{r^l} dt ds \right] \left[\int_{r < \delta} \frac{dt}{r^l} \right] \quad (3.21)$$

Por el teorema de Fubini,

$$\left[\int_D \int_D \frac{|\phi|^2}{r^l} dt ds \right] = \int_D |\phi|^2 \int_D \frac{ds}{r^l} dt \quad (3.22)$$

$$\leq \left[\int_D |\phi|^2 dt \right] \left[\int_{r < d} \frac{ds}{r^l} \right] \quad (3.23)$$

donde d es el diámetro de D . Entonces obtuvimos

$$\|K^s\phi\| \leq M^2 \|\phi\|^2 \left[\int_{r < d} \frac{ds}{r^l} \right] \left[\int_{r < \delta} \frac{ds}{r^l} \right] \quad (3.24)$$

por lo tanto, la norma del operador K^s se puede acotar

$$\|K^s\| \leq \left[\int_{r < d} \frac{ds}{r^l} \right] \left[\int_{r < \delta} \frac{ds}{r^l} \right] \quad (3.25)$$

como $l < n$, la primer integral es acotada, y la segunda puede hacerse arbitrariamente chica si $\delta \rightarrow 0$. Entonces podemos concluir que $\|K^s\|$ se hace arbitrariamente chica, por lo que el operador K puede aproximarse - en norma - por operadores de Hilbert-Schmidt, que al ser compactos implican la compacidad de K . \square

Proposición 3.5. *El problema homogéneo para la formulación con potenciales combinados (3.1) admite únicamente la solución trivial.*

Demostración. Sea $u(x) = D(\varphi) + i\nu S(\varphi)$, y φ la solución de $\varphi + D(\varphi) + i\nu S(\varphi) = 0$. Entonces $u_+ = 0$ en ∂D . Por la unicidad de la solución para el problema de Dirichlet exterior para la ecuación de Helmholtz, tendremos $u_+ = 0$ en D . Y por las relaciones de salto,

$$-u_- = \varphi \quad - \frac{\partial u}{\partial n} = i\nu\psi \quad \text{en } \partial D \quad (3.26)$$

entonces, por el teorema de Green y como u se anula en D ,

$$i\nu \int_{\partial D} |\psi|^2 ds = \int_{\partial D} \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial n} ds = \int_D |\nabla u|^2 - k|u|^2 dx = 0 \quad (3.27)$$

Tomando parte imaginaria, resulta $\varphi = 0$. \square

Hemos demostrado que el operador $I + K - i\nu S : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ es inyectivo. Por lo tanto, por la teoría de Fredholm, será biyectivo y su inversa acotada, independientemente de k .

Notamos que en el caso $\nu = 0$, la unicidad de la solución puede perderse para los valores de k para los que existan soluciones no triviales para el problema interior con condiciones de Neumann homogéneas. En la elección del valor de ν se puede buscar el que minimiza el condicionamiento del problema.

Extensiones de la teoría Hasta aquí hemos demostrado la existencia y unicidad en L^2 para el problema de los potenciales combinados. Nos basamos en ciertos resultados de compacidad para los operadores involucrados. Es posible extender estos resultados de compacidad a otros espacios, como las funciones continuas, los espacios de funciones uniformemente Hölder continuas, y espacios de Sobolev. A su vez, es de interés la extensión a 3 dimensiones para las ecuaciones de Helmholtz y el caso electromagnético completo que involucra las ecuaciones de Maxwell. Todas estas extensiones se pueden encontrar en [12] y [13].

Regularidad . Una propiedad clave para el buen comportamiento del método numérico que describimos es la regularidad de la solución.

Teorema 3.8. *La solución de la ecuación integral (3.1) es analítica.*

No es trivial el hecho de que la regularidad de la solución de una ecuación diferencial se traslada al de una formulación integral para dicha ecuación. En el caso en dicha formulación integral se derive mediante la fórmula de representación de Green, alcanzará con mostrar la regularidad hasta el borde de la solución de la ecuación diferencial. Pero en el caso en que se derive mediante potenciales, es posible utilizar una técnica de escribir la solución a esa ecuación con potenciales como una combinación de soluciones de varios problemas interiores y exteriores para la ecuación diferencial. Dicha técnica puede verse, por ejemplo en [35].

4

Un método de orden alto para redes de difracción

4.1. Introducción

Los problemas de scattering por superficies periódicas (también conocidas como redes de difracción) son muy importantes en numerosas aplicaciones como la óptica, fotónica, comunicaciones, y también en teledetección. Numerosos métodos se propusieron para este problema, pero los métodos basados en ecuaciones integrales son muy populares porque necesitan discretizar únicamente las interfaces y porque satisfacen automáticamente la condición de radiación. Así mismo, es posible formular el problema en un único intervalo. Esta formulación, sin embargo, también conduce a la principal dificultad que tienen estos métodos: la evaluación de la función de Green periódica.

Consideramos un perfil $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ tal que $f(x + L) = f(x)$ para todo x .

Una propiedad que nos permitirá formular el problema en un único período se conoce como la α -cuasi-periodicidad de los campos incidentes y reflejados. Esto es, si

$$u^{inc}(r, t) := e^{i(k\alpha \cdot r - \omega t)} := \psi^{inc}(r) e^{-i\omega t} \quad (4.1)$$

$$r := (x, f(x))$$

$$\alpha := (\sin(\theta), -\cos(\theta)).$$

Entonces tenemos que

$$\psi^{inc}(x + L, y) = e^{iL\alpha} \psi^{inc}(x, y)$$

Proposición 4.1. *Dado que ψ^{inc} es α -cuasi-periódica, ψ^{scat} también lo es.*

Puede verse en virtud de la unicidad de las soluciones [18].

4.1.1. Expansión de Rayleigh

El campo reflejado $\psi^{scat}(r)$ puede representarse en $y > \max[f(x)]$ como una serie de ondas planas radiantes que se llama la “Expansión de Rayleigh”.

Siguiendo a [18], si F es α -cuasi periódica, entonces es de la forma $F(x, y) = T(x, y)e^{i\alpha x}$ con T periódica. Podemos desarrollar T en su serie de Fourier, y al multiplicar por $e^{i\alpha x}$ obtendremos

$$F(x, y) = \sum_n t_n(y)e^{i\alpha_n x}$$

con

$$\alpha_n := \alpha + n\frac{2\pi}{L} = k\sin(\theta) + n\frac{2\pi}{L}, \quad n \in (Z) \quad (4.2)$$

la forma de los t_n se obtiene buscando que se verifique la ecuación de Helmholtz.

Los números de onda tales que $k = \pm\alpha_n$ se conocen como “Anomalías de Wood”. Durante el transcurso de esta tesis supondremos que no estamos en ese caso, que fue abordado exitosamente para el caso de conductores perfectos en [3]. Bajo esta suposición, toda solución α -cuasi-periódica de la ecuación de Helmholtz puede escribirse como

$$\psi^{scat}(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\alpha_n x - i\beta_n y} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{i\alpha_n x + i\beta_n y} \quad (4.3)$$

donde los β_n se definen como

$$\beta_n := \begin{cases} \sqrt{k^2 - \alpha_n^2} & , \quad n \in U \\ i\sqrt{\alpha_n^2 - k^2} & , \quad n \notin U \end{cases}$$

donde U es el conjunto finito de enteros n tales que $k^2 - \alpha_n^2 > 0$.

Para no permitir ondas incidentes o no acotadas cuando $y \rightarrow \infty$, imponemos la siguiente condición de radiación:

Definición 4.1. *Una solución en $y > \max[f(x)]$ de la forma (4.3) satisface la condición de radiación cuando $y \rightarrow \infty$ si $A_n = 0$ para todo n . De manera análoga, una solución en $y > \max[f(x)]$ satisface la condición de radiación cuando $y \rightarrow -\infty$ si $B_n = 0$ para todo n .*

Entonces una solución radiante $\psi^{scat}(r)$ se puede expandir en $y > \max[f(x)]$ como

$$\psi^{scat}(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{i\alpha_n x + i\beta_n y} \quad (4.4)$$

Observación 4.1. *Las ondas que corresponden a $n \in U$ tienen magnitud constante y se las llama propagantes, mientras que para $n \notin U$, las ondas decaen exponencialmente cuando $y \rightarrow \infty$ y se las llama evanescentes. La n -ésima onda propagante viaja en la dirección $(\frac{\alpha_n}{k}, \frac{\beta_n}{k})$, y el número de ondas propagantes aumenta proporcionalmente a kL .*

Proposición 4.2 (Campo lejano). Como ψ^{scat} se representa en la forma (4.4), en el límite con $y \rightarrow \infty$ se representará como la suma finita $\sum_{n \in U} B_n e^{i\alpha_n x + i\beta_n y}$.

Definición 4.2 (Eficiencias). $e_n := \frac{\beta_n}{\beta} |B_n|^2$. Esta cantidad representa la fracción de energía reflejada en el modo propagante n -ésimo.

Se puede demostrar [18] que

$$\sum_{n \in U} e_n = 1 \quad (4.5)$$

Esto se puede interpretar físicamente como una expresión de la conservación de la energía: la onda incidente con energía uno, se refleja totalmente hacia el campo lejano en una cantidad finita de direcciones $(\frac{\alpha_n}{k}, \frac{\beta_n}{k})$, $n \in U$ con una fracción de energía de e_n en la dirección n -ésima.

Este balance de energía provee una medida del error de la suma de las eficiencias calculadas con algún método. Si bien es sabido que existen métodos que fuerzan que este balance se satisfaga exactamente aún cuando las eficiencias contienen errores importantes, para los métodos integrales que estudiaremos a continuación, existen fuertes sospechas de que el error en cada modo está controlado en alguna norma por este balance de energía, y por lo tanto, lo utilizaremos como una medida de precisión de los métodos numéricos que desarrollaremos. Es de notarse que no ha sido desarrollado en la literatura una teoría que permita estimar los errores en cada modo o en la solución, en base a esta conservación de la energía.

4.1.2. Caso oblicuo

Analicemos brevemente el caso en el que la onda incidente no está en el plano de invariancia de la superficie. Este caso es el llamado “caso cónico” debido a que en el caso de conductores perfectos, es posible reducir este problema al caso 2D que venimos estudiando mediante una proyección.

Para asociar el problema oblicuo con el problema 2D, escribimos las proyecciones del vector incidente k y los modos dispersados k_n ,

$$\begin{aligned} k &= k^{xy} + k^z \hat{z} \\ k_n &= k_n^{xy} + k_n^z \hat{z} \end{aligned}$$

El problema 2D equivalente corresponde a resolver un problema con el vector incidente k^{xy} , lo que nos da un ángulo de incidencia θ^{xy} y una longitud de onda $\lambda^{xy} = \lambda / \cos \eta$. Puede verse, por ejemplo en [18], que en el caso de los conductores perfectos, luego de resolver este problema equivalente es posible reconstruir las eficiencias del caso oblicuo proyectando nuevamente con $k_n^z = k^z$.

4.2. Formulaciones Integrales

Consideremos una formulación integral del problema. En principio tenemos la superficie infinita $y = f(x)$. La evaluación de algún potencial single, double layer o por ejemplo sus derivadas normales, involucrará una integral de la forma

$$\int_{y'=f(x')} K(u(x, x')) \mu(x') \sqrt{1 + [f'(x')]^2} dx' = f(x) \quad (4.6)$$

Con $u(x, x') = \sqrt{(x - x')^2 + (f(x) - f(x'))^2}$, y donde K es alguna función de Hankel o una de sus derivadas normales. Utilizando la α -cuasi-periodicidad de $\mu(x')$ y la periodicidad de $f'(x')$, obtenemos

$$\int_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha n L} K(u(x, x' - nL)) \right) \mu(x') \sqrt{1 + [f'(x')]^2} dx' = f(x) \quad (4.7)$$

Definición 4.3. Llamaremos función de Green periódica a cualquier serie de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha n L} K(u(x, x' - nL)) \quad (4.8)$$

donde K es la función de Hankel que aparece en alguna de las formulaciones integrales que podemos obtener mediante el uso de potenciales single, double-layer o sus derivadas normales.

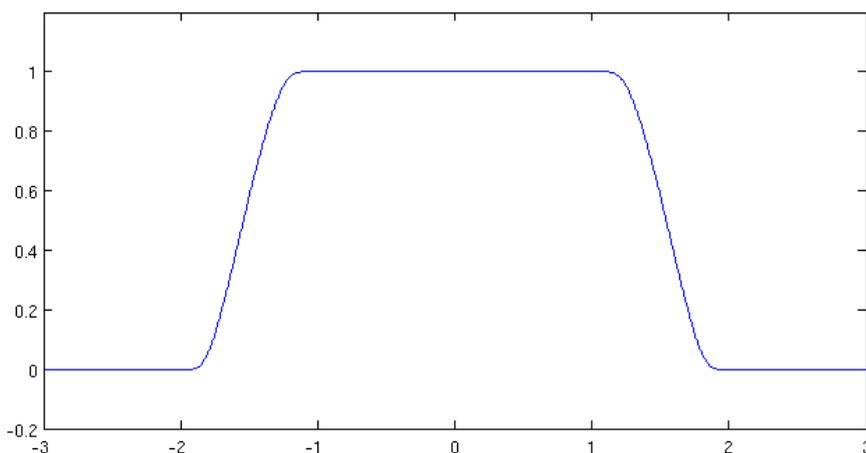
Para implementar métodos numéricos, hay que truncar esta serie de alguna manera. La forma más simple, es considerar una cantidad finita de términos y sumarlos. Sin embargo, la convergencia de ese procedimiento es extremadamente lenta. Por lo tanto en la literatura se han propuesto numerosas formulaciones alternativas. Un resumen de estas propuestas puede verse en [26]. Más recientemente, una técnica en apariencia muy simple pero sumamente efectiva, que consiste en truncar la integral impropia con una función de corte suave (C_0^∞), fue desarrollada en [27], y la reseñaremos a continuación.

4.3. Particiones suaves de la unidad

En general, las particiones suaves de la unidad (sPOU) son funciones $(f_i)_{i=1, \dots, n} \in C_0^\infty$ tales que $f_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$. Las utilizaremos con el fin de dividir integrales singulares y oscilatorias, normalmente en dos partes donde una es singular y poco oscilatoria, y la otra es oscilatoria pero regular. Así mismo, estudiaremos su efecto en el truncamiento de una integral oscilatoria impropia como la función de Green periódica.

Consideremos la función de truncamiento suave

$$S(x, x_0, x_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq x_0, \\ \exp\left(\frac{2e^{-1/u}}{u-1}\right) & \text{si } x_0 < |x| < x_1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq x_1, \end{cases} \quad u = \frac{|x|-x_0}{x_1-x_0},$$

Función S para $x_0 = 1, x_1 = 2$.

Observamos que la función S se anula en los bordes, junto con todas sus derivadas, es decir, $S \in C_{per}^\infty \cap C_0^\infty$. Por lo visto en el capítulo anterior, si integramos esta función con la regla de trapecios obtendremos convergencia super-algebraica. (Como la función se anula junto con todas sus derivadas en un punto no puede ser analítica, por lo tanto la convergencia no será exponencial).

Truncamiento suave La función $S(x, cA, A)$ es un truncamiento suave del intervalo $[-A, A]$, y $c < 1$ es un parámetro que regula la derivada cerca del borde.

Para analizar el comportamiento de este truncamiento suave, consideremos una versión simplificada de la serie de la función de Green periódica. Por ejemplo reemplazando la función de Hankel H_1^1 por su comportamiento asintótico $\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}$, y una densidad μ α -cuasi-periódica por un solo término de su expansión de Rayleigh $e^{i\alpha'_n}$, tenemos,

$$I_{ex} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ik_n x'}}{\sqrt{x'}} dx' \quad (4.9)$$

donde $k_n = k - \alpha - \frac{2\pi n}{L}$ para algún n ,

También suponemos que k no es una anomalía de Wood ($k_n \neq 0 \forall n$). De hecho, notamos que para el caso $k_n = 0$, la integral resultante

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x'}} dx' \quad (4.10)$$

no existe. En general este será el comportamiento en las anomalías de Wood, fenómeno que hay que tratar por separado.

Ahora bien, definamos los truncamientos

$$I_{S,A} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ik_n x'}}{\sqrt{x'}} S(x', cA, A) dx' \quad (4.11)$$

$$I_{H,A} = \int_0^A \frac{e^{ik_n x'}}{\sqrt{x'}} dx' \quad (4.12)$$

donde se utilizó la denominación H para hacer referencia a la función de truncamiento de Heaviside.

Los errores $I_{ex} - I_{S,A}$ en la aproximación por truncamiento suave son

$$I_{ex} - I_{S,A} = \int_0^{+\infty} (1 - S(x', cA, A)) \frac{e^{ik_n x'}}{\sqrt{x'}} dx' = \int_{cA}^{+\infty} P(x', cA, A) \frac{e^{ik_n x'}}{\sqrt{x'}} dx' \quad (4.13)$$

con $P(x, c, A) = 1 - S(x', cA, A)$. Usando el cambio de variables $x = \frac{x'}{cA}$ obtenemos

$$I_{ex} - I_{S,A} = \sqrt{cA} \int_1^{\infty} \frac{P(x, 1, 1/c)}{\sqrt{x}} e^{ik_n cAx} dx \quad (4.14)$$

como $P(1, 1, 1/c) = 0$, integrando por partes obtenemos

$$I_{ex} - I_{S,A} = -\frac{1}{ik_n \sqrt{cA}} \int_1^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P(x, 1, 1/c)}{\sqrt{x}} \right) e^{ik_n cAx} dx \quad (4.15)$$

y en general, integrando por partes p -veces,

$$I_{ex} - I_{S,A} = \frac{(-1)^p}{(ik_n)^p (cA)^{p-\frac{1}{2}}} \int_1^{\infty} \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left(\frac{P(x, 1, 1/c)}{\sqrt{x}} \right) e^{ik_n cAx} dx \quad (4.16)$$

Como las derivadas de $\frac{P(x, 1, 1/c)}{\sqrt{x}}$ no dependen de A , y son funciones acotadas con soporte en el intervalo $[1, 1/c]$ para todo $p \in \mathbf{N}$, obtenemos

$$|I_{ex} - I_{S,A}| \leq \frac{C}{\sqrt{k_n} (k_n cA)^{p-1/2}} \quad (4.17)$$

Es decir, el error de aproximación $I_{S,A}$ decrece de manera súper-algebraica: es del orden A^{-p} para todo $p > 1$.

Este análisis del error se puede generalizar al truncamiento las funciones de Hankel, ya que la integral considerada se obtuvo a partir del comportamiento asintótico de dichas integrales. El desarrollo completo de este análisis puede verse en [27].

En cambio, con el truncamiento clásico con la función de Heaviside, solamente es posible integrar por partes una vez, ya que

$$\begin{aligned}
|I_{ex} - I_{H,A}| &= \left| \int_A^\infty \frac{e^{ik_n Ax'}}{\sqrt{x'}} dx' \right| \\
&= \left| \sqrt{A} \int_1^\infty \frac{e^{ik_n Ax'}}{\sqrt{x'}} dx' \right| \\
&= \left| \sqrt{A} \frac{e^{ik_n Ax'}}{ik_n A \sqrt{x'}} \Big|_1^\infty + \frac{\sqrt{A}}{2ik_n A} \int_1^\infty \frac{e^{ik_n Ax'}}{x'^{\frac{3}{2}}} dx' \right| \\
&= O\left(\frac{1}{k_n \sqrt{A}}\right)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

con lo que se demuestra que esa aproximación decae como $A^{-\frac{1}{2}}$.

Veamos un ejemplo numérico de este comportamiento. La integral I_{ex} se puede calcular con precisión arbitrariamente alta (por ejemplo de 50 cifras) utilizando paquetes de cálculo simbólico. Integrando con estas rutinas, podemos estudiar la convergencia con $A \rightarrow \infty$ de los dos truncamientos. Como la performance no es un tema en esta comparación, utilizamos el toolbox simbólico incluido en Matlab, y para evitar problemas numéricos con la singularidad, tomamos el origen de la integral, tanto en I_{ex} como sus truncamientos, algo separada de 0. Los resultados a continuación corresponden al caso $k_n = \frac{2\pi}{L}$

| A | Error Trunc | Error suave |
|-----|----------------|----------------|
| 5 | 7.11315884e-02 | 1.04928986e-03 |
| 20 | 3.55867195e-02 | 3.45741125e-07 |
| 35 | 2.69017479e-02 | 6.86065024e-09 |
| 50 | 2.25077654e-02 | 1.57660945e-10 |
| 65 | 1.97406672e-02 | 7.02890076e-12 |
| 80 | 1.77940196e-02 | 4.67918572e-13 |
| 95 | 1.63289240e-02 | 3.96467801e-14 |
| 110 | 1.51748086e-02 | 3.90489074e-15 |
| 125 | 1.42352364e-02 | 4.46579844e-16 |
| 140 | 1.34510369e-02 | 6.10512661e-17 |
| 155 | 1.27836242e-02 | 9.12971355e-18 |
| 170 | 1.22066202e-02 | 1.46570820e-18 |
| 185 | 1.17012987e-02 | 2.62405518e-19 |
| 200 | 1.12539495e-02 | 4.92495297e-20 |

En resumen, es de destacar que el método del truncamiento suave produce una integral cuyo valor exacto se aproxima de manera súper-algebraica a la integral impropia. Resulta hasta contra intuitivo que, para un intervalo de integración mucho más pequeño en el que incluso se está modificando la función a integrar, con el truncamiento suave conseguimos muchos órdenes de magnitud de precisión extra.

4.4. Ecuaciones integrales para redes de difracción

Utilicemos este método de calcular la función de Green periódica para formular las ecuaciones integrales aproximadas para redes de difracción.

En principio, la ecuación 2.57, que obtuvimos a partir del Teorema de Extinción para el problema de Dirichlet es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{4} H_0^1(ku(x, x')) dx' = \phi_{inc} \quad (4.19)$$

Que resulta ser una ecuación de tipo 1 (invertir un operador compacto). Para obtener una ecuación de tipo 2 (de la forma $I+K$, con K compacto), una posibilidad es tomar derivada normal. Usamos la relación de salto para la derivada normal del single-layer potential que vimos en la sección 2.3.3, y obtenemos

$$\frac{1}{2}\mu(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{4} \frac{\partial H_0^1(ku(x, x'))}{\partial n(x)} \mu(x') \sqrt{(1 + f'(x')^2)} dx' = \frac{\partial \phi_{inc}}{\partial n}(x) \quad (4.20)$$

con

$$u(x, x') = \sqrt{(x - x')^2 + (f(x) - f(x'))^2}$$

y la incógnita $\mu = \frac{\partial u}{\partial n}$

para parametrizar estas ecuaciones, empecemos viendo la derivada normal de H_0^1 :

$$\frac{\partial H_0^1(ku(x, x'))}{\partial n} = k \cdot \frac{H_1^1(ku(x, x'))}{u(x, x')} (f(x) - f(x') - (x - x')f'(x')) \quad (4.21)$$

Y la de la onda incidente:

$$\frac{\partial \phi_{inc}}{\partial n}(x) = -ik \frac{\sin \theta f'(x) + \cos \theta}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} e^{ik[\sin \theta x - \cos \theta f(x)]} \quad (4.22)$$

De manera similar, para el problema de Neumann se obtiene

$$\frac{1}{2}\mu(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{4} \frac{\partial H_0^1(ku(x, x'))}{\partial n(x)} \mu(x') \sqrt{1 + f'(x')^2} dx' = \frac{\partial \phi_{inc}}{\partial n}(x) \quad (4.23)$$

Notamos que la única diferencia entre los problemas de Dirichlet y Neumann es, en este caso, un signo.

Y el cálculo de los modos de Rayleigh puede verse [27] que se resuelve, para el problema de Dirichlet (TE), mediante la siguiente integral:

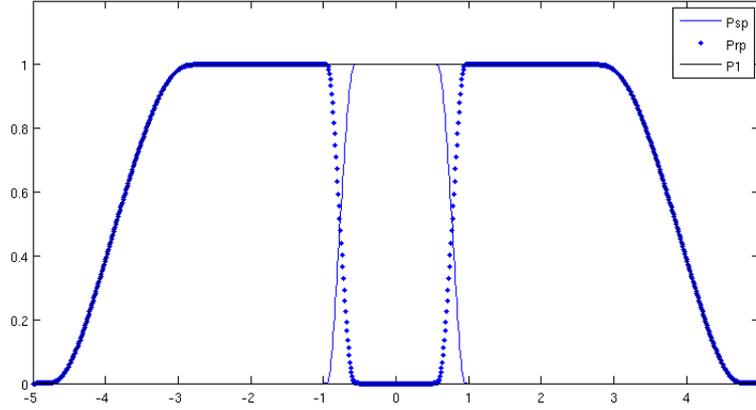
$$B_n = \frac{1}{2iL\beta_n} \int_0^L \mu(r') e^{-i\alpha_n x' - i\beta_n f(x')} \sqrt{1 + f'(x')^2} dx' \quad (4.24)$$

Y para el de Neumann,

$$B_n = -\frac{1}{2iL\beta_n} \int_0^L \mu(r') e^{-i\alpha_n x' - i\beta_n f(x')} \sqrt{1 + f'(x')^2} dx' \quad (4.25)$$

4.4.1. Reglas de cuadratura

Concentrémonos en cómo calcular las integrales. En primer lugar, tomamos el truncamiento suave descrito anteriormente y que llamaremos P_1 . Y luego, dividimos la integral resultante en dos partes con una partición de la unidad, para confinar la singularidad de la función de Green a un intervalo del período de la superficie, o bien un subconjunto de este.



$$P_1(x) = S(x, c, Ln_{per}) \quad (4.26)$$

$$P_{sp}(x, x', c_{sp}, A_{sp}) = S(x - x', c_{sp}A_{sp}, A_{sp}) \quad (4.27)$$

$$P_{rp}(x, x', c, A) = P_1(x) - P_{sp}(x, x', c_{sp}, A_{sp}) \quad (4.28)$$

donde L es la longitud del período de la superficie, A_{sp} un truncamiento que elegimos para confinar la singularidad, c y c_{sp} son parámetros que controlan las derivadas del decaimiento. Por construcción, $P_{sp} + P_{rp} = P_1$, por lo que

$$KP_1 = K.P_{rp} + K.P_{sp}$$

Donde K es el núcleo de la ecuación integral que hayamos elegido. Esto nos permitirá utilizar la regla de cuadratura vista en el capítulo anterior, ya que el segundo término se trata de una integral que se anula en los extremos de un intervalo (pequeño) junto con todas sus derivadas, gracias al empleo de la partición de la unidad. En particular, se trata de una función periódica. Usando la descomposición de la función de Hankel que vimos en (3.13), de la forma

$$K = \log(z).K_s(z) + K_r(z)$$

podemos construir un método de cuadratura de orden alto, combinando la regla de Martensen-Kussmaul (3.3) y la de trapecios, de modo similar al capítulo anterior.

El término regular, que es una integral impropia, también se anula en los extremos junto con sus derivadas gracias al truncamiento suave $P1$. Por lo tanto, el empleo de la regla de trapecios tendrá convergencia súper-algebraica para este término.

Para resumir, nuestro método de Nyström se puede aplicar a las distintas formulaciones vistas anteriormente, y consiste en realizar la siguiente aproximación

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K(ku(x, x'))\mu(x')dx' &\approx \int_{-A}^A P_1(x')K(ku(x, x'))\mu(x')dx' \\ &= \int_{-A}^A P_{rp}(x-x')K(ku(x, x'))\mu(x')dx' \\ &\quad + \int_{-A_{sp}}^{A_{sp}} P_{sp}(x-x')K(ku(x, x'))\mu(x')dx' \end{aligned} \quad (4.29)$$

y posteriormente aplicar, para un conjunto de puntos $x = (x_i)$, reglas de cuadratura en la variable x' . Para ello, definimos un conjunto de puntos equiespaciados $\{-A \leq x_j \leq A\}$, y aproximamos las integrales anteriores por

$$\begin{aligned} \phi^{inc}(x_i) &= \sum_{j=-nn_{per}}^{nn_{per}} P_{rp}(x_i - x_j)K(ku(x_i, x_j))\mu(x_j) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n P_{sp}(x_i - x_j)K_r(ku(x_i, x_j))\mu(x_j) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n P_{sp}(x_i - x_j)R^{(n)}K_s(ku(x_i, x_j))\mu(x_j) \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde $R^{(n)}$ son los pesos de la cuadratura de Martensen-Kussmaul (3.3).

Como la incógnita μ es α -cuasi-periódica, sacando factor común obtenemos para el primer término:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=-n_{per}}^{n_{per}} \sum_{j=1}^n P_{rp}(x_i - x_j - iL)K(ku(x_i, x_j - iL))e^{\alpha iL}\mu(x_j) \\ &\sum_{j=1}^n \left(e^{\alpha iL} \sum_{i=-n_{per}}^{n_{per}} P_{rp}(x_i - x_j - iL)K(ku(x_i, x_j - iL))\mu(x_j) \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Lo que se puede escribir como una matriz de $n \times n$. Observamos que para calcular cada elemento de esta matriz, hay que hacer $2n_{per}$ evaluaciones del núcleo, a diferencia de n como en el capítulo anterior.

Con estos núcleos aproximados (las expresiones analíticas de estas descomposiciones de los núcleos y los términos de la diagonal fueron vistas en el capítulo

anterior), se pueden armar las ecuaciones lineales a resolver con cualquier paquete de álgebra lineal. En general el costo computacional del armado de la matriz es mucho mayor que el de su resolución, por lo que para problemas no muy grandes, son recomendables los métodos directos, y para problemas de mayor tamaño, conviene considerar las técnicas de aceleración que desarrollaremos más adelante.

Del mismo modo que en el capítulo anterior, el orden de convergencia depende de la regularidad de la solución. Como las ecuaciones integrales fueron obtenidas mediante fórmulas de representación, alcanza con ver la analiticidad de la solución hasta el borde, como puede verse en [7]. Como los truncamientos suaves que utilizamos son C^∞ pero no analíticos, la convergencia en este caso no es exponencial sino súper-algebraica.

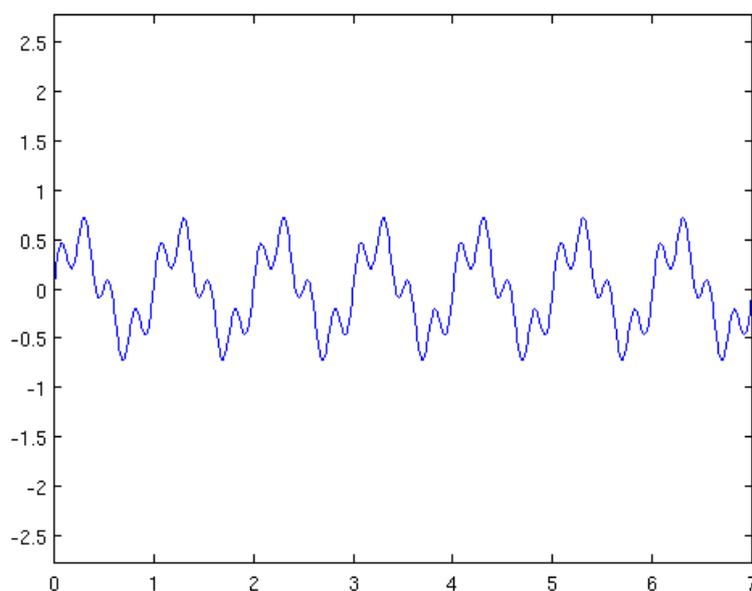
4.5. Evaluación del algoritmo

Para evaluar el comportamiento del algoritmo consideramos un problema resonante. Es decir, con características geométricas comparables a la longitud de onda. Consideramos la superficie

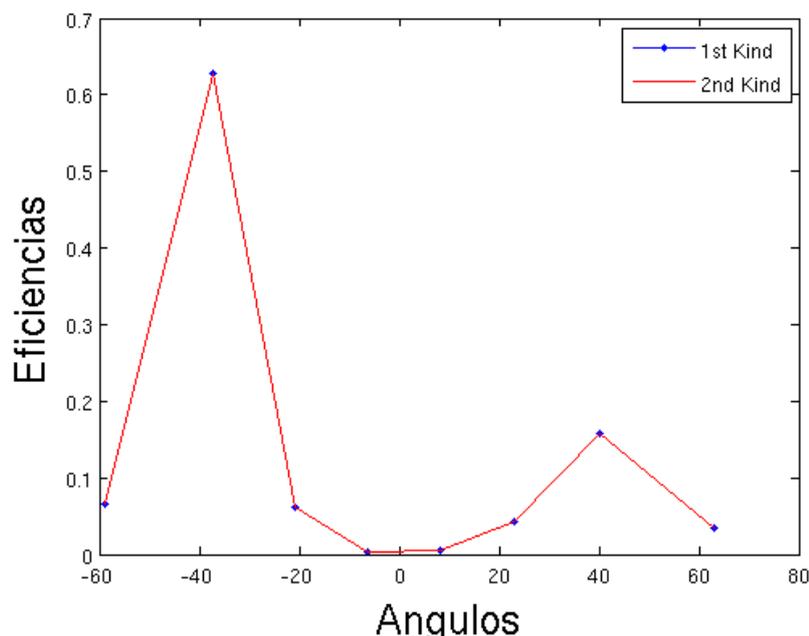
$$f(x) = 0,5 \sin(2\pi x) + 0,25 \sin(0,5\pi x) \quad (4.32)$$

con una onda incidente de $\lambda = 0,25$, un ángulo de incidencia $\theta_i = 40^\circ$ y un período $L = 1$.

A su vez, resulta de interés estudiar la diferencia entre la formulación como ecuación de Fredholm de tipo 1 y de tipo 2.



Superficie $y = f(x)$ a lo largo de 7 períodos



Las eficiencias obtenidas difieren a lo sumo en $1,4 \times 10^{-7}$

El output de nuestro programa de prueba es:

```
Condicionamiento de la matriz 2nd kind: 207.2267
Grating Slow 2nd Kind: error en la conservación de la energía:
8.6393e-08
```

```
Condicionamiento de la matriz 1st kind: 75.2592
Grating Slow 1st Kind: error en la conservación de la energía:
1.7938e-11
```

Con lo que podemos observar que, si bien teóricamente las ecuaciones de tipo 1 están mal condicionadas y las de tipo 2 bien, esto vale para el caso continuo. Las aproximaciones dadas por los métodos de Nyström resultan operadores discretos cuyo condicionamiento puede converger lentamente hacia el condicionamiento del caso continuo. De hecho en la ecuación de tipo 1, al tratarse de un operador compacto, el condicionamiento debería tender a infinito. Sin embargo la convergencia es tan lenta que puede haber otros factores que influyen el condicionamiento de las matrices en mayor medida, como sucede en nuestro caso.

Al menos para el caso 2D que estamos considerando, parece sumamente viable utilizar ecuaciones de Fredholm tipo 1. Esto es una conclusión sumamente positiva, ya que una extensión de los métodos que estamos estudiando al caso dieléctrico dada en la ecuación (2.56), que involucra solamente operadores single y double layers y es por lo tanto simple de implementar, resulta en un sistema de ecuaciones de tipo 1.

Por otra parte, el hecho de que la conservación de la energía sea algunos ordenes de magnitud peor en el caso de la ecuación de tipo 2, no tiene que ver con propiedades

de compacidad, sino con el hecho de que la misma está basada en un potencial de double-layer. En el mismo, los términos que aparecen debido a la derivada normal de la forma $\frac{(x-y) \cdot \hat{n}}{|x-y|^2}$ dan lugar a errores de truncamiento importantes por cancelación. Un tratamiento numérico para sobrellevar esta dificultad puede verse en la sección 3 de [6].

5

Un método acelerado de orden alto para superficies naturales

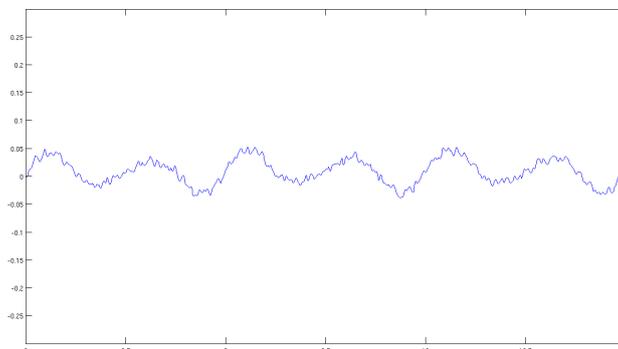
Nos interesa desarrollar un método de orden alto para el caso de una superficie de un medio natural, las cuales se suelen modelar como superficies aleatorias.

Para poder implementar cualquier método numérico, a la superficie la tenemos que trincar de alguna manera, y una posibilidad, como vimos anteriormente, es la extensión periódica. Es decir, considerar que tenemos una red de difracción. Esto nos resulta conveniente porque conduce a un método de orden alto que ya conocemos, pero resulta una condición artificial cuando se la pretende usar para modelar superficies que, en verdad, no son periódicas, como muchas que se observan en la naturaleza. Las superficies aleatorias caracterizadas por una función de autocorrelación que decae con la distancia se suelen aproximar mediante series de Fourier de coeficientes aleatorios, con lo cual las superficies obtenidas serán periódicas aunque en un intervalo generalmente grande, y que de hecho convergen al proceso aleatorio en cuestión cuando el intervalo de periodicidad tiende a infinito.

Es decir que una manera de independizarnos de esta periodicidad artificial para el caso de las superficies naturales, es haciendo tender este período a infinito.

En particular, las superficies que nos interesan son pseudo-periódicas, es decir, están compuestas de:

- una frecuencia central
- otras más bajas y más altas que corresponden a perturbaciones
- micro-rugosidad aleatoria de alta frecuencia pero poca altura



Los métodos que estudiamos anteriormente tienen una precisión que aumenta exponencialmente con la discretización, pero sin embargo su complejidad computacional es del orden de n^2 , donde n es la cantidad de puntos de la discretización en la superficie. En las aplicaciones, la presencia de microrrugosidad (oscilaciones de alta frecuencia en la geometría de la superficie) nos obligará a tomar una discretización con muchos puntos por longitud de onda, al mismo tiempo que el período de la superficie considerada será grande (de hecho, lo más grande posible), con lo cual tendremos problemas del tamaño de muchas longitudes de onda a los que hay que discretizar muy finamente. Esto puede ocasionar que los métodos vistos anteriormente, si bien son precisos, tengan un tiempo de cómputo inaceptablemente largo, o que no alcance la memoria de la computadora que tenemos a disposición para su ejecución.

Por lo tanto es indispensable poder usar algún esquema de *aceleración* de los propuestos en la literatura. Uno de los más populares, el Fast Multipole Method ([32],[31],[10]) requiere solo $n \log(n)$ operaciones, pero tiene el inconveniente de ser inestable a bajas frecuencias ([16],[17],[22]), es decir con la presencia de microrrugosidad, justo un caso de interés para nosotros. A su vez, otra familia de métodos basados en FFT ([2],[8]) no presenta este inconveniente pero el número de operaciones asciende a $n^{\frac{3}{2}} \log(n)$. Seguiremos el método descrito en [5] y [4], que es un método estable basado en FFTs y que reduce el número de operaciones de a $n^{\frac{6}{5}} \log(n)$. Al mismo tiempo, adaptaremos este método al caso de una superficie periódica, cuestión que no había sido abordada hasta el momento.

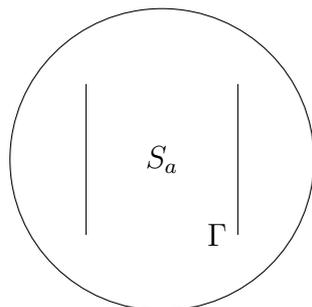
5.1. Aproximación con monopolos y dipolos en caras paralelas

La primera etapa del método de aceleración está basado en una de las posibles representaciones que puede hacerse de un campo a cierta distancia de sus puntos de fuente.

Para cualquier solución radiante de la ecuación de Helmholtz, tenemos la representación de Green

$$u(x) = S(\partial u / \partial \hat{n})(x) + D(u)(x)$$

para $x \notin \partial D$, donde D es un dominio cerrado. La pregunta que nos hacemos es si es posible tener una representación similar, pero en vez de ∂D , con únicamente dos caras paralelas de un rectángulo.



A continuación veremos que este es el caso, que es posible tener una representación - aproximada - de la forma

$$u(x) = S(\mu)(x) + D(\nu)(x)$$

válida en el exterior a un dominio S_a que contiene estrictamente al rectángulo, para una precisión dada. Para ello, necesitamos el siguiente teorema:

Teorema 5.1. *Dada una curva Γ no necesariamente cerrada, y un dominio S_a cerrado que contiene a Γ , las combinaciones lineales de potenciales single y double-layer con densidades μ y ν definidas en Γ son densas en $L^2(S_a)$*

Demostración. Tomemos una función h en $L^2(S_a)$, y supongamos que es ortogonal a todos los potenciales single y double layer de funciones μ y ν en $L^2(\Gamma)$, es decir

$$\langle h, S\mu + K\nu \rangle = 0$$

para todo μ y ν en $L^2(\Gamma)$. O sea,

$$\int_{S_a} h(x) \left(\alpha \int_{\Gamma} H_0^1(k|x-x'|) \mu(x') dx' + \beta \int_{\Gamma} \frac{\partial H_0^1(k|x-x'|)}{\partial \hat{n}(x')} \nu(x') dx' \right) dx = 0 \quad (5.1)$$

para todo α, β . En particular,

$$\int_{S_a} h(x) \left(\int_{\Gamma} H_0^1(k|x-x'|) \mu(x') dx' \right) dx = 0 \quad (5.2)$$

$$\int_{S_a} h(x) \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial H_0^1(k|x-x'|)}{\partial \hat{n}_{\Gamma}(x')} \nu(x') dx' \right) dx = 0 \quad (5.3)$$

Por el teorema de Fubini,

$$\int_{\Gamma} \mu(x') \left(\int_{S_a} H_0^1(k|x-x'|) h(x) dx \right) dx' = 0 \quad (5.4)$$

$$\int_{\Gamma} \nu(x') \left(\int_{S_a} \frac{\partial H_0^1(k|x-x'|)}{\partial \hat{n}_{\Gamma}(x')} h(x) dx \right) dx' = 0 \quad (5.5)$$

Para todo $\mu, \nu \in L^2(\Gamma)$. En particular, se sigue que el potencial single-layer definido sobre S_a , y su derivada normal en Γ ,

$$v(x') := S(h)(x') := \int_{S_a} H_0^1(k|x-x'|) h(x) dx \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_{\Gamma}} v(x') := \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma}} S(h)(x') := \int_{S_a} \frac{\partial H_0^1(k|x-x'|)}{\partial \hat{n}_{\Gamma}(x')} h(x) dx \quad (5.7)$$

se anulan en Γ .

Por la unicidad de soluciones al problema de Cauchy (Teorema de Holmgren [23], 2.7), el potencial single-layer también se anula en S_a . Y por la continuidad del single-layer, también se anulará en el exterior de S_a . Por lo tanto, su derivada normal (con la normal de S_a), también es nula en S_a .

Por la relación de salto de la derivada normal del single-layer, si tomamos límite desde el interior del dominio S_a , tendremos

$$0 = \frac{\partial}{\partial n(x)} S(h)(x) = \frac{1}{2} h(x) + \int_{S_a} \frac{\partial H_0^1(k|x-x'|)}{\partial n(x)} h(x') dx' \quad (5.8)$$

y tomando límite desde el exterior del dominio,

$$0 = \frac{\partial}{\partial n(x)} S(h)(x) = -\frac{1}{2} h(x) + \int_{S_a} \frac{\partial H_0^1(k|x-x'|)}{\partial n(x)} h(x') dx' \quad (5.9)$$

Por lo tanto,

$$h(x) = 0 \quad x \in S_a$$

□

Teorema 5.2. *Dada una curva Γ no necesariamente cerrada, un dominio S_a que contiene estrictamente a Γ , y una solución radiante de la ecuación de Helmholtz $u(x)$, y dado $\epsilon > 0$, existe una función de la forma*

$$u_{\epsilon}(x) = S_{\Gamma}(\mu)(x) + D_{\Gamma}(\nu)(x)$$

es decir, de potenciales single y double-layer con soporte en Γ , tal que

$$\|u_{\epsilon}(x) - u(x)\| < \epsilon$$

para todo x en el exterior de S_a .

Demostración. Por lo visto anteriormente podemos aproximar a u en el borde de S_a , mediante una función u_ϵ de la forma de potenciales single y double-layer con soporte en Γ .

Por la continuidad del llamado mapa Dirichlet a Neumann [13], dado ϵ_n , es posible hallar ϵ de modo que $\|u - u_\epsilon\|_{S_a} < \epsilon$ implique $\|\frac{\partial}{\partial n}(u - u_\epsilon)\|_{S_a} < \epsilon_n$

Utilizando la representación de Green,

$$u(x) - u_\epsilon(x) = S_{S_a}(\partial u - u_\epsilon/\partial n)(x) + D_{S_a}(u - u_\epsilon)(x) \quad x \notin S_a \quad (5.10)$$

y acotando

$$|u(x) - u_\epsilon(x)| \leq S_{S_a}(|\partial(u - u_\epsilon)/\partial n|)(x) + D_{S_a}(|u - u_\epsilon|)(x) \quad x \notin S_a \quad (5.11)$$

Como $x \notin S_a$ se trata de integrales regulares, por lo que obtenemos

$$|u(x) - u_\epsilon(x)| < C_1\epsilon + C_2\epsilon_n < \epsilon' \quad (5.12)$$

□

5.1.1. Discretización de las distribuciones y cálculo de las fuentes equivalentes

Hasta aquí tenemos un resultado - al que hemos llegado mediante métodos no constructivos - de que es posible aproximar cualquier solución radiante de la ecuación de Helmholtz mediante potenciales single y double-layer con *distribuciones continuas*. Para proseguir desarrollando nuestro método numérico, discretizaremos estas distribuciones en puntos equiespaciados, y desarrollaremos un método de cálculo de los valores de estas distribuciones en esos puntos, a los que de ahora en más llamaremos *fuentes equivalentes*, y, en el caso del potencial single-layer serán *monopolos* y en el del double-layer, *dipolos*.

En particular, la construcción que haremos será para el caso en que la curva Γ son dos caras paralelas cualesquiera de un rectángulo c_j , ya que esta elección dará origen a grillas cartesianas. El dominio S_a será un rectángulo de 3 veces el lado de c_j , y lo llamaremos C_j .

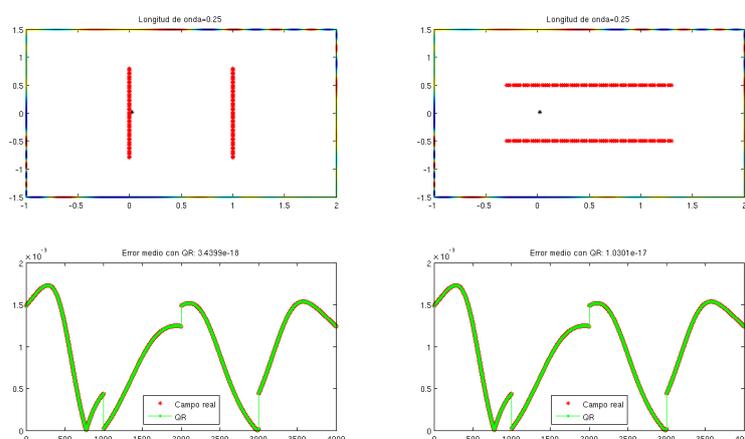
Nuestro objetivo es aproximar el campo generado por puntos de discretización en una superficie en puntos lejanos de la misma. Por ende, dividimos a la superficie en “cajas” c_j . El campo al que buscamos aproximar afuera de C_j , será el que generen los puntos de discretización que estén contenidos en c_j , al que llamaremos $u(x_i)$

Una manera natural de encontrar estas fuentes equivalentes es la siguiente. A partir de evaluar el valor del campo u en C_j , para cada x_i , buscamos fuentes equivalentes (monopolos ξ_l y dipolos ζ_l) que generen un campo que coincida con $u(x_i)$ en C_j , en un sentido de cuadrados mínimos. Esto es posible debido a la linealidad de los operadores involucrados.

Es decir, resolvemos

$$M(p, \xi) + D(p, \zeta) = F(p, [x, f(x)]) \quad (5.13)$$

donde p son los puntos de la caja en los que se busca hacer coincidir los campos, y F representa los campos originales.

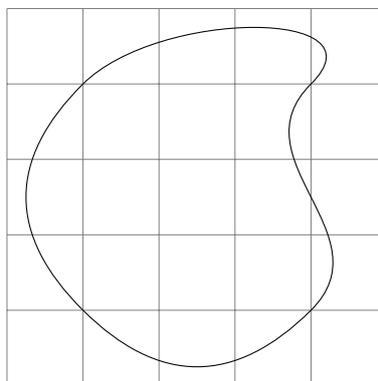


En la figura se puede ver que el error medio en la caja es del orden del ϵ de la máquina.

El problema de cuadrados mínimos puede resolverse, por ejemplo, mediante la descomposición QR. Como las cajas c_i y C_j tienen todas la misma geometría, se hace una sola vez la descomposición QR de las matrices $[M_h, D_h]$ y $[M_v, D_v]$, y luego hay que resolver un sistema triangular superior.

En un método iterativo, tendremos que multiplicar estos campos $u(x_i)$ por la densidad correspondiente a cada iteración, α_i . Por linealidad se puede multiplicar a posteriori por esta densidad de corriente, por lo cual los ξ y ζ pueden ser precalculados al inicio del programa. Sin embargo, este procedimiento puede no ser conveniente dado que al hacer la suma a posteriori, si tenemos muchos puntos de discretización en cada caja, el error de las fuentes equivalentes resultantes se puede acrecentar debido a cuestiones de truncamiento. Por lo tanto, puede convenir calcular primero la suma de los campos $\sum_i \alpha_i u(x_i)$ en la caja C_j y resolver el sistema triangular superior cada vez, una vez por caja, y no una sola vez al inicio del programa, pero una vez por punto.

Luego hay que sumar las fuentes equivalentes según su posición real en la superficie. Finalmente obtenemos un sistema de estas fuentes equivalentes que cubre toda la superficie.



Sistema de fuentes equivalentes en una grilla Cartesiana

También, por cuestiones de conveniencia numérica, en vez de utilizar a las caras paralelas de los rectángulos c_j se las puede extender de manera que se superpongan con los rectángulos vecinos, facilitando así la aproximación de los campos en C_j . Por linealidad, estas fuentes en posiciones superpuestas se podrán sumar junto con las otras, para obtener un sistema de fuentes equivalentes en toda la superficie.

Como comentario final, si bien hemos demostrado que cualquier solución se puede aproximar por monopolos y dipolos en caras paralelas, la convergencia con n del método de cuadrados mínimos para hallar los pesos correctos es actualmente **un problema abierto**.

5.2. Interacciones en la grilla

La ventaja de tener una grilla Cartesiana es que las integrales que dan cuenta de las contribuciones de estas fuentes equivalentes se convierten en convoluciones, que pueden calcularse eficientemente con la Transformada Rápida de Fourier (FFT). Veamos.

Una integral de la forma

$$\int_S K \left(\sqrt{(x - x')^2 + (f(x) - f(x'))^2} \right) \mu(x') dS(x') \quad (5.14)$$

no es una convolución (salvo que $f = 0$), pero otra de la forma

$$\int_{X, X' \in \Pi} K \left(\sqrt{(X_x - X'_x)^2 + (X_y - X'_y)^2} \right) \mu(X') dS(X') \quad (5.15)$$

Es una convolución en 2-D, ya que $(X - X') \in \Pi$.

Entonces, por ejemplo para la interacción entre los monopolos en caras verticales, tenemos un campo de la forma

$$Mv(x) = \int_{x, x' \in \Pi^v} K(x - x') \cdot \xi_v(x') \quad (5.16)$$

que, en su versión discreta, puede calcularse con FFTs como veremos a continuación.

5.2.1. Transformada Rápida de Fourier

Un algoritmo extremadamente útil en muchas áreas es, con sus muchas variantes e implementaciones, la Transformada Rápida de Fourier. Basándose en una técnica algorítmica conocida como *Divide and Conquer*, se logra reducir la complejidad de calcular una transformada de Fourier discreta, de n^2 a $n \log(n)$.

Un uso que le daremos es el de calcular convoluciones (discretas) de manera eficiente y exacta. Esto es posible gracias a la relación entre la convolución y la transformada de Fourier, que se puede aplicar al caso discreto con algunos cuidados.

Divide and Conquer: idea básica de la FFT La transformada de Fourier discreta (DFT) de un vector x_0, \dots, x_{N-1} es:

$$X(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i}{N} jk} \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.17)$$

La evaluación directa de esa fórmula requiere $O(N^2)$ operaciones aritméticas. Mediante un algoritmo FFT se puede obtener el mismo resultado con sólo $O(N \log N)$ operaciones. En general, estos algoritmos dependen de la factorización de n pero también existen FFTs para cualquier n , incluso con n primo.

Si N es par, podemos escribir la suma sobre los índices pares e impares como

$$X(j) = \sum_{k=0}^{N/2-1} x_{2k} e^{-\frac{2\pi i}{N} j2k} + \sum_{k=0}^{N/2-1} x_{2k+1} e^{-\frac{2\pi i}{N} j(2k+1)} \quad (5.18)$$

y sacando un factor $e^{-\frac{2\pi i}{n} k}$ del segundo término:

$$X(j) = \sum_{k=0}^{N/2-1} x_{2k} e^{-\frac{2\pi i}{N/2} jk} + e^{-\frac{2\pi i}{n} k} \sum_{k=0}^{N/2-1} x_{2k+1} e^{-\frac{2\pi i}{N/2} jk} \quad (5.19)$$

Con lo cual podemos escribir la transformada de Fourier discreta en forma recursiva.

$$DFT(X) = DFT(X_{par}) + e^{-\frac{2\pi i}{n} k} DFT(X_{impar}) \quad (5.20)$$

Esta representación recursiva (donde el algoritmo se escribe como una suma del resultado de aplicar el algoritmo a dos cadenas de tamaño $N/2$ por separado, conduce a implementaciones cuya complejidad computacional es $O(n \log n)$.

Convolución con FFT . En el caso discreto, una convolución está dada por

$$(r * s)_j = \sum_{k=-M/2+1}^{M/2} s_{j-k} r_k \quad (5.21)$$

Teorema 5.3. Si una señal s_j es periódica con período N , entonces su convolución discreta con otra señal de tamaño N está dada por

$$\sum_{k=-M/2+1}^{M/2} s_{j-k} r_k = DFT(s) DFT(r)$$

Muchas veces interesa calcular convoluciones discretas de vectores que no son periódicos, como es nuestro interés. Para ello, se recurre a una técnica denominada *zero padding*, que consiste en completar ambos vectores con ceros de una longitud adecuada. Luego, el resultado buscado consistirá en solamente algunos valores intermedios de la salida del algoritmo. Estos detalles de implementación fueron incorporados en la implementación del código que describimos.

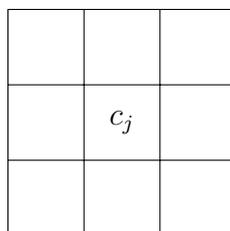
5.2.2. Corrección de interacciones cercanas

Hasta ahora vimos:

- Representaciones con fuentes equivalentes en una grilla Cartesiana
- Cómo algunas integrales se podían escribir como convoluciones en esta grilla
- Cómo calcular eficientemente estas convoluciones por medio de la FFT.

Sin embargo, también sabíamos que las fuentes equivalentes representan bien a las “fuentes reales” afuera de un cubo de lado $3H$. Y en los algoritmos anteriores estamos calculando las interacciones en toda la grilla, de todas las fuentes equivalentes entre sí. Por lo tanto los campos obtenidos aún no son los correctos.

Para obtener los campos correctos, es necesario sustraer las *contribuciones cercanas* de las fuentes equivalentes entre sí. Esto es, para cada caja c_j , eliminar las contribuciones que provienen de las cajas c_l adyacentes incluida sí misma.



Hay que restar las contribuciones de las cajas adyacentes a c_j .

Para implementar este paso, se itera en las cajas c_j y se calculan, para cada l , las interacciones entre las fuentes de la caja c_l con la c_j . Este procedimiento, para cada par de cajas, puede ser realizado mediante FFTs. Sin embargo se observó que para los casos de interés actuales, implementar esta operación de forma directa no insumía demasiado tiempo, por lo que esta aceleración de las correcciones cercanas no ha sido implementada aún.

Restando estas correcciones, obtenemos, para cada caja c_j las contribuciones de todas las fuentes equivalentes en posiciones no-adyacentes. Es decir, en donde estas fuentes representan bien a las fuentes reales. Por lo tanto, en la superficie de cada c_j contamos con todas las contribuciones de todos los puntos de discretización de la superficie que consideramos lejanos.

5.3. Reconstrucción en la superficie

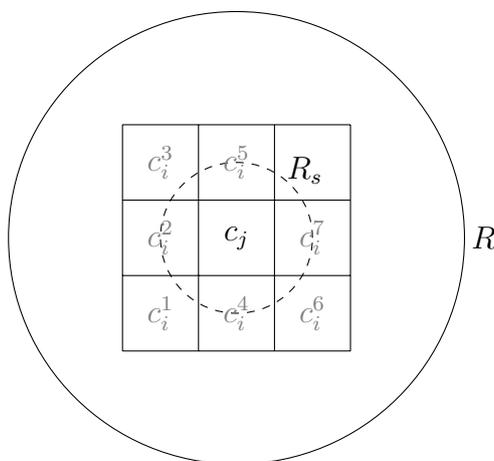
El procedimiento anterior, valga aclarar, se realiza para las caras verticales y horizontales por separado, y así podemos obtener el campo generado por los puntos de discretización que consideramos lejanos, *sobre la superficie* de los distintos rectángulos c_j . Nos interesa, a partir de aquí, propagar esos campos a cada uno de los puntos de discretización de la superficie que están dentro de cada c_j . Para ello hay que reconstruir el campo cercano a partir del campo en las grillas horizontales y verticales (Π^1 y Π^2). Esto se trata de un problema de Dirichlet para el interior de cada c_j .

El método que proponemos para su solución consiste en ajustar por cuadrados mínimos los pesos w_i de la siguiente expansión de ondas planas

$$u_n(x) = \sum_{i=0}^n w_i \cdot e^{ik(x_1 \cdot \sin(\theta_i) + x_2 \cdot \cos(\theta_i))} \quad (5.22)$$

contra los valores del campo en el borde de c_j .

Para justificar este método, en principio recordemos que las contribuciones de fuentes equivalentes cercanas habían sido removidas. Por lo tanto, el campo que buscamos está dado por fuentes únicamente en el exterior de las cajas adyacentes. Entonces podemos tomar un círculo de radio R_1 , como se ve en la figura, y en el interior del mismo el campo que buscamos no contendrá fuentes.



Es sabido que, a partir de realizar separación de variables en la ecuación de Helmholtz en 2D, podemos escribir cualquier solución que no contenga fuentes como una serie de la forma:

$$u(r) = ik \sum_{n=-n_t}^{\infty} b_n J_n(kr) e^{in\theta} \quad r < R_s \quad (5.23)$$

La serie anterior es válida dentro si $r < R_s$. Pero si consideramos la serie anterior truncada

$$u^{trunc}(r) = ik \sum_{n=-n_t}^{n_t} b_n J_n(kr) e^{in\theta} \quad (5.24)$$

esta expresión aproxima muy bien a u dentro de c_j , y está definida en todo \mathbf{R}^2 . Podemos buscar una representación de la misma en términos de un potencial de single-layer en un círculo de radio R para representarla. Luego, al tomar límite cuando $R \rightarrow \infty$ obtendremos la solución que buscamos, que en particular nos ahorra tener que evaluar funciones de Bessel. En principio, buscamos φ_R de modo que

$$u^{trunc}(x) = \int_{B_1(0)} H_0^1(k\|x - Ry\|) \varphi_R(y) dS(y) \quad (5.25)$$

Mediante una expansión conocida como el “teorema de adición”, según el cual

$$H_0^1(k\|x - y\|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k|x|) H_n^1(k|y|) e^{in\theta} \quad (5.26)$$

vemos que con tomar

$$\varphi_R(y) = ik \sum_{n=-n_t}^{n_t} b_n H_n^1(kR)^{-1} e^{in\theta} \quad (5.27)$$

con $\theta = \arctan(y_1, y_2)$, en la integral de (5.25) obtenemos

$$\int_{B_1(0)} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k|x|) H_n^1(kR|y|) e^{in\theta} \right) \left(ik \sum_{m=-n_t}^{n_t} b_m H_m^1(kR)^{-1} e^{im\theta} \right) dS(y) \quad (5.28)$$

Como $|y| = 1$, y teniendo en cuenta la ortogonalidad de las funciones trigonométricas, esta integral coincide con la expresión de (5.24). Esto explica que (5.25) converge a $u(r)$, con $n_t \rightarrow \infty$, para $r < R_s$, para todo R .

Ahora analicemos el límite cuando $R \rightarrow \infty$. Para ello, notemos que la expresión $H_0^1(k\|x - Ry\|) \varphi_R(y)$ es una combinación lineal de $2n_t + 1$ términos de la forma

$$H_0^1(k\|x - Ry\|) H_n^1(kR)^{-1} e^{in\theta}$$

Haciendo una expansión de Taylor en la función $\sqrt{1 + \delta}$, puede verse que

$$\sqrt{(x_1 - Ry_1)^2 + (x_2 - Ry_2)^2} \approx R \left(1 + \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \right) \quad (5.29)$$

Reemplazando en la expresión asintótica para las funciones de Bessel, el término lineal en R se anula, y solo se mantiene $x_1y_1 + x_2y_2 = x \cdot y$ en la exponencial, más términos $O\left(\frac{1}{R}\right)$ que tienden a cero. Con lo cual obtenemos que el comportamiento asintótico de cada término es de la forma

$$C e^{ikx \cdot y}$$

Con lo cual tendremos que en general $u^{trunc}(x)$ se puede escribir como una integral de cierta combinación lineal de ondas planas. Una discretización de orden alto de esa integral en θ viene dada por la regla de trapecios, con lo que resulta una expresión de la forma

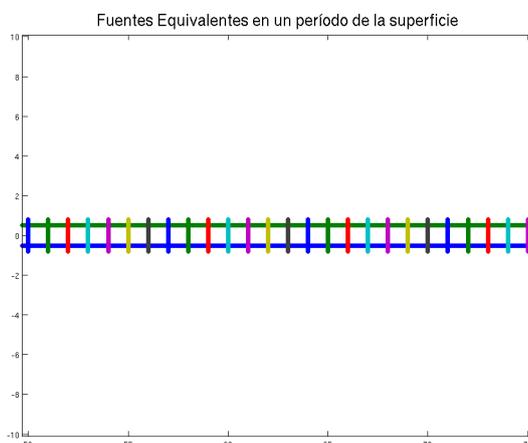
$$u_n(x) = \sum_{i=0}^n w_i \cdot e^{ik(x_1 \cdot \sin(\theta_i) + x_2 \cdot \cos(\theta_i))} \quad (5.30)$$

Análogamente a las representaciones en caras paralelas, si bien podríamos intentar hallar expresiones analíticas para los pesos, en función de la expansión (5.24), computacionalmente es preferible hacer un ajuste de estos valores mediante cuadrados mínimos de los pesos w_i con los valores del campo en el borde de c_j . Como comentario, del mismo modo que en el caso de las fuentes equivalentes, la convergencia con n de este método de mínimos cuadrados es actualmente un problema abierto.

5.4. La aceleración en el caso periódico

Es posible aplicar el método descrito anteriormente para acelerar el cálculo de ciertas interacciones que aparecen en un problema periódico, luego de emplear algunas modificaciones.

En principio, dada la α -cuasi-periodicidad de la solución, habrá que considerar un sistema de fuentes equivalentes α -cuasi-periodicas, en un período de la superficie.



Es decir, calculamos para cada caja las fuentes equivalentes correspondientes, pero al sumarlas tendremos la precaución de aplicar la corrección de la α -cuasi-periodicidad.

Ahora veamos cómo queda la función de Green periódica en este sistema de fuentes equivalentes. La integral en todo el espacio es:

$$\int_{\Pi \times LZ} K(x, x') \xi(x, x') dx' \quad (5.31)$$

que puede escribirse

$$\int_{\Pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} K(x, x' + iL) \xi(x, x' + iL) dx' \quad (5.32)$$

lo que, usando la α -cuasi-periodicidad resulta

$$\int_{\Pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (e^{iL\alpha} K(x, x' + iL)) \xi(x, x) dx' \quad (5.33)$$

Lo que equivale a la convolución del núcleo de Green periódico en la grilla con las fuentes equivalentes. Si utilizamos la aproximación mediante el truncamiento suave del núcleo de Green periódico, tendremos

$$K_A * \xi \rightarrow K_{per} * \xi \quad (5.34)$$

Luego alcanzará con calcular mediante FFTs, la convolución $K_A * \xi$ para algún A suficientemente grande. Para ello es necesario evaluar funciones de Hankel en la grilla cartesiana dada por un período, más todas sus repeticiones, lo que gracias a la aceleración que implica el uso de una función de truncamiento suave, no es una operación tan costosa. Es más, solo será necesario hacer esta evaluación una vez, y únicamente en los puntos de la grilla, por lo que esta evaluación es incluso en gran medida independiente de la superficie en consideración y por ende puede ser pre-calculada si se desea evaluar el scattering de varias superficies similares, como es frecuente en las aplicaciones.

Posteriormente, como describimos anteriormente, habrá que corregir las interacciones cercanas y aplicar las reglas de cuadratura correspondientes a las integrales singulares. En nuestro caso, en la implementación habrá que tener el cuidado, cuando se cruce alguno de los bordes del período, de aplicar la corrección de la α -cuasi-periodicidad. Lo mismo en el caso de la reconstrucción de los campos en la superficie.

5.5. Resumen

Primero se aproximan las integrales de superficie por otras integrales en una grilla cartesiana. Estas integrales se interpretan como convoluciones, que se pueden calcular (en la grilla) de manera exacta y acelerada con la Transformada Rápida

de Fourier (FFT). En el caso periódico el núcleo de la convolución viene dado por la función de Green periódica, que puede calcularse eficientemente mediante una función de truncamiento suave. Luego de las correcciones de las interacciones cercanas, se llevan los campos obtenidos en la grilla de nuevo a la superficie en cuestión, resolviendo un problema de Dirichlet para cada cubo de la grilla.

Las etapas donde se hacen aproximaciones (1 y 3) se pueden resolver de manera muy eficiente con una precisión cercana al ϵ de la máquina, y la reducción de operaciones se produce en la etapa 2, debido al uso de la FFT, que es un algoritmo exacto salvo error de truncamiento.

5.6. Evaluación del algoritmo

Veamos en la práctica como se comporta el algoritmo, comparándolo con el método sin aceleración del capítulo 5. Para poder utilizar el método sin acelerar tenemos que considerar períodos pequeños (sino el mismo se queda sin memoria). Estudiamos el caso de 4 superficies, cada una con mayor microrrugosidad, lo que obligará ir aumentando la discretización.

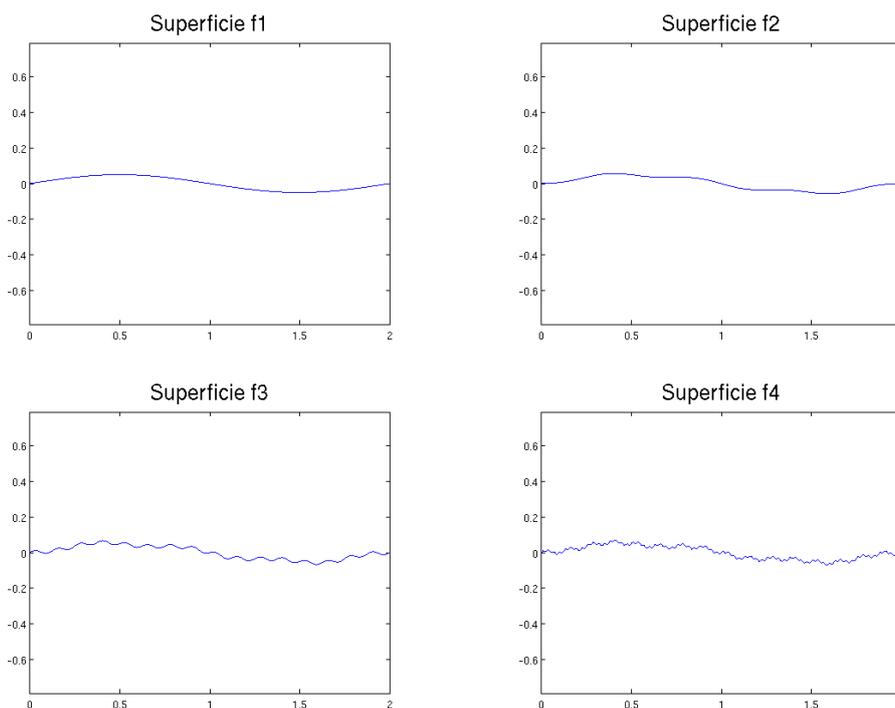
$$f_1(x) = h \sin(2\pi x/L)$$

$$f_2(x) = h \sin(2\pi x/L) - h_{mic} \sin(2\pi x^2)$$

$$f_3(x) = h \sin(2\pi x/L) - h_{mic} \sin(2\pi x^2) + h_{mic} \sin(2\pi x^8)$$

$$f_4(x) = h \sin(2\pi x/L) - h_{mic} \sin(2\pi x^2) + h_{mic} \sin(2\pi x^8) + h_{mic} \sin(2\pi x^{32})$$

con $L = 2$, $h = 0,05$ y $h_{mic} = 0,01$



En las siguientes tablas mostramos el error en la conservación de la energía para el solver sin acelerar (error gslow) y acelerado (error gfast) así como los tiempos de cómputo en una computadora personal contemporánea (AMD Phenom(tm) II X4 955, CPU 3.2Ghz y 6GB de RAM), sin paralelización, para distintas discretizaciones medidas en cantidad de puntos por longitud de onda (ppw). En todos los casos la longitud de onda es 0.25m, el largo del perfil es 2m, al ángulo de incidencia 40° y el parámetro nper fue fijado en 300 períodos.

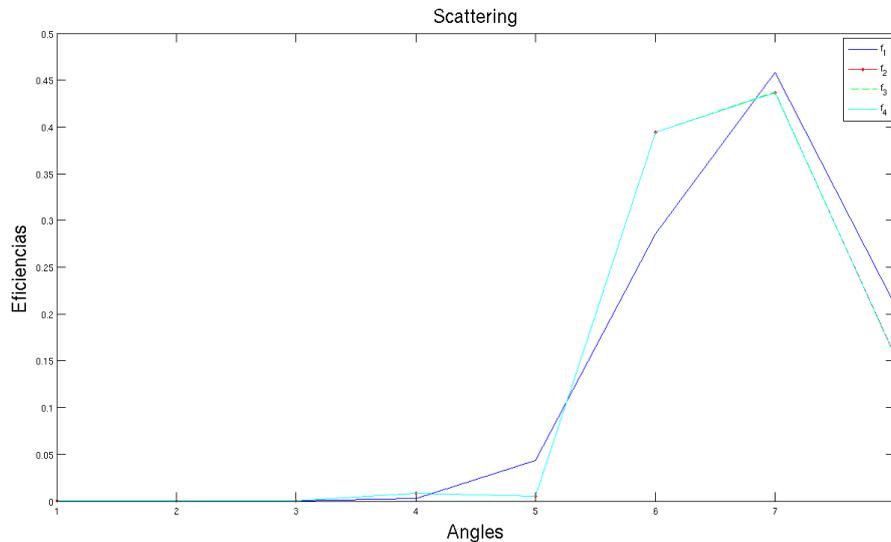
| $f_1(x)$ | error gslow | error gfast | tiempo gslow | tiempo gfast |
|----------|-----------------|-----------------|--------------|--------------|
| 2 ppw | -3.78352689e-06 | -3.78891966e-06 | 2.53 seg | 4.94 seg |
| 4 ppw | -1.38158793e-08 | -1.49952779e-08 | 4.56 seg | 4.74 seg |
| 6 ppw | -6.95232760e-10 | -8.74815775e-10 | 8.15 seg | 4.80 seg |
| 8 ppw | -1.41354706e-11 | -8.60874039e-10 | 13.09 seg | 4.99 seg |
| 10 ppw | -4.81259477e-12 | -5.91783622e-10 | 19.28 seg | 5.05 seg |
| 15 ppw | -2.53630450e-12 | -1.37550416e-10 | 33.56 seg | 5.31 seg |
| 20 ppw | -2.50532928e-12 | 3.10531822e-10 | 57.46 seg | 5.60 seg |
| 25 ppw | -2.51754173e-12 | -3.05273584e-10 | 89.02 seg | 5.91 seg |
| 30 ppw | -2.50421905e-12 | -9.00793884e-11 | 125.41 seg | 6.18 seg |
| 35 ppw | -2.50399701e-12 | -5.04982500e-10 | 168.65 seg | 6.54 seg |

| $f_2(x)$ | error gslow | error gfast | tiempo gslow | tiempo gfast |
|----------|-----------------|-----------------|--------------|--------------|
| 2 ppw | -3.81500108e-06 | -3.81773699e-06 | 2.50 seg | 4.66 seg |
| 4 ppw | -1.60920262e-08 | -1.70153561e-08 | 4.54 seg | 4.76 seg |
| 6 ppw | -6.95228985e-10 | -1.02903586e-09 | 8.18 seg | 4.93 seg |
| 8 ppw | -2.58360000e-11 | -3.57076813e-10 | 13.03 seg | 4.99 seg |
| 10 ppw | -1.49961155e-11 | -8.93809471e-11 | 19.23 seg | 5.06 seg |
| 15 ppw | -1.26032518e-11 | -9.99000882e-11 | 33.61 seg | 5.35 seg |
| 20 ppw | -1.25615074e-11 | -5.25711696e-10 | 57.71 seg | 5.82 seg |
| 25 ppw | -1.25767174e-11 | -5.63931901e-10 | 88.23 seg | 5.85 seg |
| 30 ppw | -1.25703892e-11 | -2.10564677e-10 | 124.55 seg | 6.23 seg |
| 35 ppw | -1.25860433e-11 | 2.97614600e-10 | 169.34 seg | 6.48 seg |

| $f_3(x)$ | error gslow | error gfast | tiempo gslow | tiempo gfast |
|----------|-----------------|-----------------|--------------|--------------|
| 2 ppw | -2.27399974e-04 | -2.27403296e-04 | 2.51 seg | 4.76 seg |
| 4 ppw | -1.45394593e-08 | -1.53106909e-08 | 4.59 seg | 4.88 seg |
| 6 ppw | -6.78166856e-10 | -2.15494977e-09 | 8.22 seg | 5.08 seg |
| 8 ppw | -2.40031328e-11 | 3.85662613e-11 | 13.23 seg | 5.25 seg |
| 10 ppw | -1.49262824e-11 | 3.28616689e-10 | 19.25 seg | 5.11 seg |
| 15 ppw | -1.25315314e-11 | -6.17089824e-10 | 33.19 seg | 5.38 seg |
| 20 ppw | -1.25104371e-11 | 3.37117001e-10 | 56.18 seg | 5.65 seg |
| 25 ppw | -1.25197630e-11 | 2.22985630e-10 | 87.23 seg | 5.93 seg |
| 30 ppw | -1.25007782e-11 | -5.17456633e-10 | 122.01 seg | 6.23 seg |
| 35 ppw | -1.25236488e-11 | 1.68593361e-10 | 170.90 seg | 7.06 seg |

| $f_4(x)$ | error gslow | error gfast | tiempo gslow | tiempo gfast |
|----------|-----------------|-----------------|--------------|--------------|
| 2 ppw | -2.49568228e-02 | -2.49568268e-02 | 2.52 seg | 4.64 seg |
| 4 ppw | -5.36717657e-03 | -5.36717792e-03 | 4.57 seg | 4.79 seg |
| 6 ppw | -5.62546974e-04 | -5.62547909e-04 | 8.14 seg | 4.89 seg |
| 8 ppw | -1.34240936e-03 | -1.34241039e-03 | 13.10 seg | 5.03 seg |
| 10 ppw | -1.97082226e-04 | -1.97138342e-04 | 19.21 seg | 5.09 seg |
| 15 ppw | -4.31482865e-06 | -5.06848844e-06 | 33.02 seg | 5.37 seg |
| 20 ppw | -1.50450540e-08 | -9.48435645e-07 | 55.97 seg | 5.63 seg |
| 25 ppw | -3.61565783e-08 | -2.58450642e-07 | 86.76 seg | 5.95 seg |
| 30 ppw | -6.89355240e-11 | -4.20846919e-07 | 122.28 seg | 6.26 seg |
| 35 ppw | -1.25588429e-11 | -6.09417942e-07 | 167.17 seg | 6.59 seg |

Comentarios. Es de notarse que, salvo en el caso de muy alta rugosidad y alta precisión, el error de ambos métodos es del mismo orden de magnitud, lo que indica que el método de aceleración no limita la precisión del método hasta llegar a $1e-9$, que fue la magnitud buscada. A su vez, el tiempo de ejecución disminuye cerca de un factor 50 para el último caso que se consideró. Si se siguiera aumentando la cantidad de puntos, como de hecho es necesario para considerar períodos más largos y como haremos a continuación, este factor sería mucho mayor. Sobre el último caso de mucha microrrugosidad, la dificultad para obtener mayores precisiones en la versión acelerada se conjetura que proviene de una manera inadecuada de sumar las fuentes equivalentes que incrementa los errores de truncamiento. Debería poder resolverse reescribiendo esa rutina como está indicado en la sección (5.1.1). Sin embargo, por los valores obtenidos en las eficiencias vemos que el scattering obtenido no se modifica significativamente para estos valores de microrrugosidad - de hecho la variación entre la superficie 3 y 4 es a lo sumo del orden de $1e-4$, siendo más baja aún en las direcciones ($\theta < 0$) - por lo que al menos para estas configuraciones simples, parecen ser más significativas las perturbaciones de frecuencias bajas.



6

Aplicaciones: estudios iniciales y trabajo futuro

No es que necesitemos ser creativos para inventarnos problemas, sino que alcanza con tener ojo para ver los que está sugiriendo la realidad constantemente.

– Teledetección (IAFE)

Podemos comenzar ahora el estudio de algunas aplicaciones. El caso de los conductores perfectos, si bien presenta limitaciones por ser las características dieléctricas de las superficies muy importantes en muchos casos, nos puede dar una buena idea de los efectos que producen algunas características geométricas de las superficies en cuestión.

Por otra parte el caso dieléctrico y dieléctrico con incidencia oblicua, fueron desarrollados teóricamente en la presente tesis, y dadas las similitudes que existen con los casos tratados, la implementación computacional de rutinas que den cuenta de estas configuraciones es inmediata, aunque insume un cierto tiempo de programación.

El tiempo limitado que se dispone para realizar una Tesis de Licenciatura alcanzó para esbozar algunas cuestiones iniciales, y para planificar pasos a seguir que a corto y mediano plazo muy posiblemente redunden en resultados de interés en la disciplina de Teledetección.

6.1. Posibilidades de detectar áreas sembradas con papa

6.1.1. Dimensión Social

Detectar áreas sembradas con papa es importante desde varios puntos de vista, como la planificación económica del sector, la recaudación fiscal, entre otros. Asimismo,

mo, representa un desafío para la teledetección óptica y por radar ¹.

En cuanto a la planificación económica del sector, el conocimiento del área sembrada total al momento de la siembra permite estimar la cosecha, información que influye en la formación de precios. Y en la cuestión impositiva, hay que tener en cuenta que los cultivos de papa son muy intensivos, con rindes del orden de 45-50 toneladas por hectárea, mientras que por ejemplo el de la soja es de 2 o 3. A su vez, el precio por tonelada suele ser comparable, con lo cual el valor por hectárea es del orden de 10-25 veces más que otros cultivos. La evasión de ingresos brutos consiste en declarar que en una zona en la que se sembró papa, se sembró un cultivo de mucho menor valor o se dejó sin sembrar.

La mayor parte de la producción de papa en la Provincia de Buenos Aires está concentrada en importantes empresas productoras, por ejemplo pools de siembra atraídos por la posibilidad de “diversificar riesgos” (la papa, al estar bajo riego, es más insensible a la sequía que otros cultivos). Dado que la producción al nivel industrial que se realiza en la Provincia de Buenos Aires requiere una gran inversión por hectárea (según [14] ya en 2005 era de \$10.683 \approx U\$2.500), la escala económica de las empresas productoras suele ser importante.

Al mismo tiempo, suele ser una actividad que se desarrolla con un alto grado de informalidad. Estimaciones indirectas indican que la evasión de ingresos brutos sería del orden del 50%. A su vez, fuera del marco impositivo, la situación de los trabajadores temporarios empleados en la cosecha es de extrema precariedad e incluso de ilegalidad, según puede verse en [15], donde se registra una inspección del Ministerio de Trabajo a una empresa productora.

Por lo tanto, es de esperarse que la detección satelital de áreas de producción de papa traiga beneficios en diferentes planos.

6.1.2. Antecedentes

La detección de la planta de papa mediante métodos ópticos se ve seriamente dificultada, al encontrarse la característica distintiva de la papa, el tubérculo, bajo tierra. Por lo tanto es común recurrir a imágenes de radar. Como la CONAE cuenta con un importante acuerdo de colaboración con la agencia espacial italiana (ASI), resulta de interés para realizar la detección la utilización de imágenes del sistema Cosmo-SkyMed, que opera en banda X ($\lambda = 2.8-3.5$ cm), y posee dos polarizaciones (HH y VV, correspondientes a los modos TE y TM). A su vez, dado que la futura misión de radar de la CONAE (SAOCOM) operará en banda L ($\lambda = 25$ cm), también resulta de interés explorar las posibilidades que presentará este sistema.

Los esfuerzos realizados por la División de Procesamiento de Imágenes del ARBA, que incluyeron salidas de campo para identificar distintos lotes y el procesamiento de imágenes ópticas y de radar en banda X, llegaron a la conclusión de que era posible discriminar los cultivos de papa de numerosos otros cultivos con errores pequeños, salvo en algunos casos donde había errores sistemáticos. Indagando

¹Agradecemos al Ing. Agr. Luciano Di Paolo, del grupo de Tecnología de Imágenes del ARBA por la información brindada sobre esta problemática.

en las similitudes y diferencias que presentan estos cultivos, se llegó a la conclusión de que los cultivos con un ciclo de crecimiento similar al de la papa, para los que a su vez el suelo es arado previo a la siembra (cuestión que no ocurre en el caso de la llamada siembra directa, donde no hay arado y el suelo resulta mucho más plano), son los más difíciles de distinguir. Posteriormente, la utilización combinada de series temporales de imágenes ópticas y de radar en banda X mejoró estos resultados, aunque implica una metodología que requiere un mayor nivel de trabajo.

6.1.3. Nuevos cálculos electromagnéticos

Con la aspiración de desarrollar una metodología simple para este problema, y al mismo tiempo con el objetivo de detectar el área de producción al momento de la siembra, nos concentraremos en el siguiente aspecto: los suelos sembrados con papa resultan marcadamente distintos a otros suelos agrícolas.

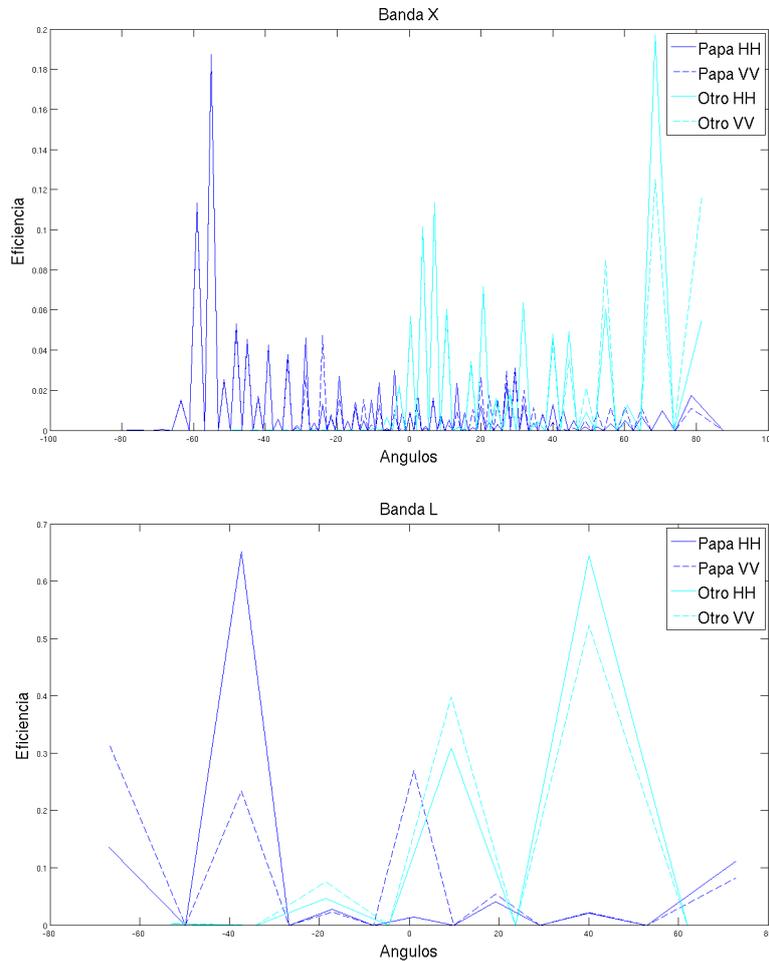
La papa se siembra en **filas de cultivo de 20 a 30 cm de altura** y separadas entre sí unos 80 cm, llamados “camellones”, mientras que con el arado tradicional, nunca se producen alturas que superen los 5 cm, a la vez que la separación entre las filas de cultivo es de 32 o 52 cm. Esta característica distintiva de este tipo de suelos ocasiona al mismo tiempo, que su respuesta al radar **no pueda ser calculada con los modelos aproximados más difundidos** de scattering de superficies aleatorias como [29] [21], por tratarse de *configuraciones resonantes* o de rugosidad extrema, casos que se encuentran fuera del rango de validez de dichos modelos.

Superficies sinusoidales Como primera aproximación, podemos estudiar el scattering por superficies sinusoidales:

$$\text{Papa: } h_1(x) = 0,15 \sin(2\pi/0,8) \quad \text{otro: } h_2(x) = 0,025 \sin(2\pi/0,52)$$

En banda X, h_1 corresponde a una red de difracción con una altura de 20λ , y un período de 30λ . Y es una simplificación importante, porque en el caso real cada fila de cultivo no será igual a la de al lado, por lo que habría que agregar algunas perturbaciones de más baja frecuencia, y al mismo tiempo microrugosidad, es decir perturbaciones de más alta frecuencia. Con estas perturbaciones el período a estudiar llegaría rápidamente a varios cientos de longitudes de ondas y la discretización necesaria sería además muy fina, lo que torna insostenible el uso de un método sin aceleración.

Veamos en principio cómo se comporta el método sin aceleración para el caso de una sinusoidal, y qué podemos decir a partir de las soluciones que obtengamos.



Una primera observación es que los perfiles sinusoidales de poca altura no presentan back-scattering. Esto indica que el back-scattering que se observa en la realidad para estos suelos, proviene más bien de las perturbaciones aleatorias de menor o mayor frecuencia, es decir de las diferencias entre las filas de cultivos que no son idénticas, y de la microrugosidad.

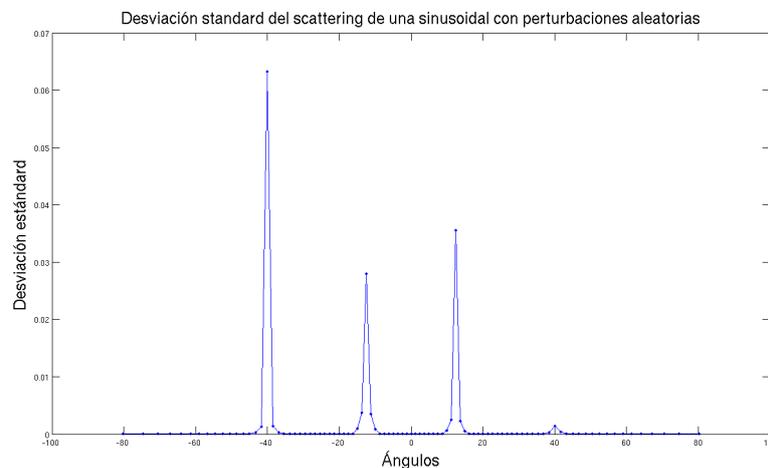
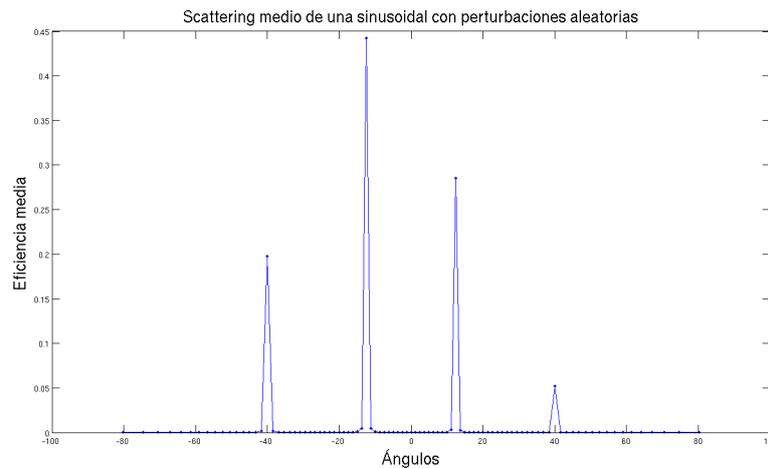
A si mismo, es de remarcar que en esta configuración simple, los perfiles correspondientes a la papa sí presentan back-scattering. De hecho en ambas longitudes de onda se observa mucha más energía en las direcciones $\theta < 0$ que en $\theta > 0$. Otra característica llamativa de este caso simplificado, es que, mientras en banda X las dos polarizaciones coinciden en back-scattering (y la mayoría de las direcciones de dispersión en las que $\theta < 0$), lo que con muchos modelos aproximados para superficies muy rugosas, en banda L las polarizaciones no solamente son muy distintas entre sí, sino que la polarización TE (HH) es mucho mayor que TM (VV), lo cual es sumamente inesperado (no se suele observar en la práctica ni en los modelos aproximados) y podría indicar una característica distintiva de este tipo de suelos.

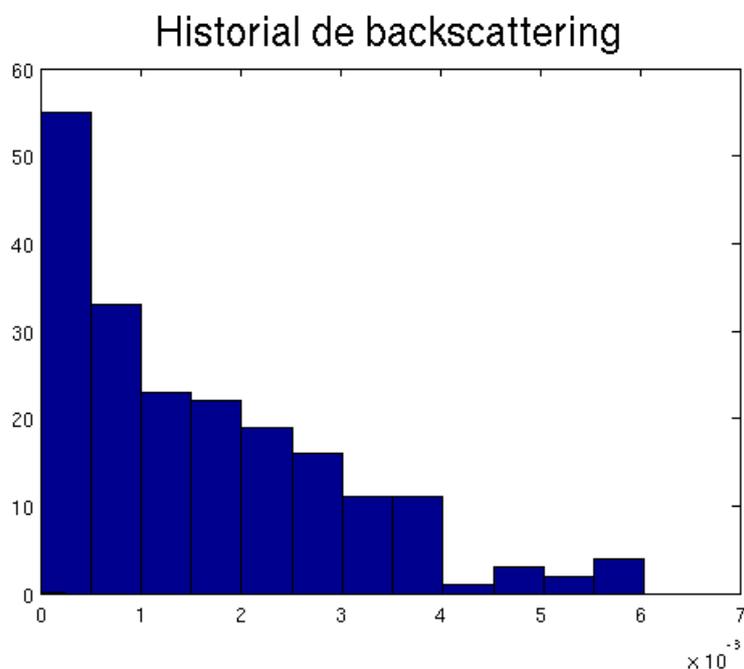
Otra cuestión para discutir es la hipótesis de conductores perfectos. En verdad, los suelos tendrán una constante dieléctrica finita, y por ende dejarán penetrar a la onda una *longitud característica* conocida como el *espesor de penetración*, que

será inversamente proporcional a la longitud de onda y a la raíz cuadrada de la constante dieléctrica. Para la banda X ($\lambda = 2\text{cm}$), y para una constante dieléctrica de 15, es de esperar un espesor de penetración de $\approx 0.5\text{mm}$, despreciable respecto a las características geométricas de estos suelos. En banda L esta longitud será $\approx 5\text{cm}$, lo cual sigue siendo chico para el caso de los suelos de papa, aunque no podemos asegurar con la misma confianza que el efecto de la constante dieléctrica será despreciable.

Perturbaciones aleatorias de las filas de cultivo. Analicemos ahora qué sucede en un caso más realista, donde las filas de cultivo no son idénticas y donde hay *microrrugosidad*. Modelaremos estas cuestiones como coeficientes de Fourier aleatorios, correspondientes a frecuencias más bajas (inexactitud de las filas de cultivo) y más altas que las filas de cultivo (microrrugosidad).

Para ello, consideramos un perfil de 16mts largo (64λ), y tomamos perturbaciones de 16,8,4 mts, como frecuencias bajas, y P/2, P/4, P/8 como frecuencias altas.





El backscattering se asemeja una distribución gamma, como es esperado (ver apéndice A).

Algunas Conclusiones. Más allá de las simplificaciones del caso, se halló que en banda L, el back-scattering en HH es mayor que en VV, lo que resulta un comportamiento anómalo - esta situación no se suele dar en otro tipo de suelos [29] - hecho que podría ser explotado para su detección. El trabajo futuro girará en torno a relajar las simplificaciones iniciales para revisar si este hecho característico (HH > VV en banda L) se mantiene bajo hipótesis más realistas o si por el contrario, solo se puede dar raramente. A su vez, se podrían buscar evidencias experimentales sobre la validez de este resultado en campañas de medición llevadas a cabo por CONAE con un sistema aerotransportado.

Un problema más general: anomalías en la polarización. El problema anterior resultó estar fuertemente relacionado con la problemática que se observa en los datos de radar, referentes a superficies agrícolas, donde en muchos casos se observa (HH ≥ VV), mientras que las teorías aproximadas conocidas (que suponen superficies gaussianas y baja altura), predicen HH < VV. Este hecho dificulta la posibilidad de utilizar esos modelos para la obtención de humedad del suelo, la principal aplicación planteada para la misión SAOCOM.

6.2. Trabajo futuro

6.2.1. Océano y Antártida

Las aplicaciones en océano cuyo interés nos ha sido expresado por investigadores del área, son también problemas de detectar mediante un radar características geométricas de las superficies iluminadas. En el caso de las superficies marinas, el interés es la identificación de fenómenos oceanográficos que tienen una manifiestan a nivel de la rugosidad de la superficie del océano, como las ondas internas, ondas atmosféricas, efectos topográficos conocidos como ondas de arena, surgientes de aceites vegetales que disminuyen la rugosidad del mar, líneas de rompiente y frentes térmicos. Fenómenos que a su vez influyen diversos procesos biológicos.

Estas aplicaciones no han sido desarrolladas aún por falta de información, pero se prevé que los métodos desarrollados serán de gran utilidad en este área, y que incluso en el caso simplificado de los conductores perfectos pueden aportar información, como puede verse en [33].

Las aplicaciones en Antártida con las que hemos entrado en contacto, tienen que ver con la posibilidad de monitorear mediante microondas pasivas cambios en los ciclos de acumulación, compactación y derretimiento de la nieve. Nuevamente las intrincadas características geométricas de las superficies de nieve - que cambian según el tipo de nieve presente - así como sus propiedades dieléctricas, modifican la emisividad de estas superficies. Para el abordaje de estas aplicaciones es indispensable extender el desarrollo de las rutinas de cálculo disponibles al caso dieléctrico, dado que la emisividad de un conductor perfecto es siempre nula, independientemente de la geometría. Así mismo, por motivos ajenos a nosotros, un vínculo que se había iniciado con el Instituto Antártico se vio interrumpido. Con la extensión de las rutinas de cálculo, es esperable que este vínculo pueda ser retomado y las aplicaciones en cuestión abordadas con éxito en un trabajo conjunto.

6.2.2. Aspectos computacionales

Ya mencionamos algunas cuestiones de trabajo futuro que quedaron planteadas en las aplicaciones. No son las únicas, pero sería demasiado largo listar todas las ideas que fueron surgiendo de posibles aplicaciones, a partir de charlas en el grupo de Teledetección del IAFE.

Comentaremos aquí un resumen de los aspectos computacionales que quedaron pendientes. En algunos casos se trata de cuestiones inmediatas, en otros de iniciativas que demandarán un mayor esfuerzo.

- El llamado caso cónico, visto en la sección (4.1.2). Según lo visto, en el caso PEC, alcanza con transformar el ángulo de incidencia y la longitud de onda, resolver un problema 2D equivalente y por último proyectar de vuelta, por lo cual es totalmente inmediato.

- Implementar el solver acelerado para superficies de mucha altura y frecuencias altas. Pudimos simular los suelos de papa de manera acelerada en banda L, pero no en banda X, cuestión que no estaba prevista originalmente pero que resulta de interés.
- Desarrollar solvers acelerados y sin acelerar para los casos dieléctrico y cónico-dieléctrico. Una posibilidad que conduce a una implementación simple es utilizar el sistema de ecuaciones de tipo 1 (2.56), como se mencionó en las conclusiones del capítulo 4.
- Resolver las cuestiones de las anomalías de wood de un modo similar a [3], que se adecúe para los potenciales double layer, y abordar la cuestión de los errores de cancelación en los mismos del mismo modo que en [6].
- Programar el solver del caso más general en un lenguaje compilado como FORTRAN 95, con paralelización al menos a los 4 núcleos que incorporan los procesadores modernos. Se espera que el tiempo de ejecución se reduzca en un factor de al menos 16.

6.2.3. Un plan de trabajo

Más allá de estas cuestiones, también se plantearon varios otros desafíos a más largo plazo.

- Resolver el scattering de un patrón de antena incidente en una superficie aleatoria, con un método de orden alto.
- Extender estas cuestiones al caso de Maxwell 3D
- Desarrollar métodos acelerados para el scattering electromagnético de conglomerados de partículas en longitudes de onda en el rango óptico, en vistas a la misión SAC-E SABIA-MAR.
- Incluir el caso de distintos tipos de partículas (gotas, hojas) o cuerpos como troncos y juncos, por encima de una superficie aleatoria, para modelar el efecto de la vegetación en el scattering de radar en el Delta del Paraná, o el uso de microondas pasivas en el bosque chaqueño, o el efecto de la cobertura de rastrojo en la obtención de humedad del suelo de SAOCOM.

A

Antecedente: Un problema inverso de la misión SAOCOM¹



Imagen SARAT del Centro Espacial Teófilo Tabanera (CETT).

En este trabajo estudiamos el problema de estimar la humedad del suelo a partir de datos de un radar, que es la principal aplicación planteada para la misión SAOCOM. Más formalmente, se trata de un problema inverso para la constante dieléctrica. Utilizamos como modelos directos diferentes modelos aproximados disponibles en la literatura.

El principal desafío para resolver este problema es que la señal recibida depende tanto de la constante dieléctrica como de la geometría (rugosidad) de la superficie, que no es conocida de antemano. Como veremos más adelante, la sensibilidad

¹Trabajo realizado previamente a la realización de esta tesis, en colaboración con Matías Barber, Francisco Grings y Haydee Karzembbaum, del grupo de Teledetección del IAFE. Presentado en el VII° Congreso ITLA de Matemática Aplicada e Industrial en Diciembre de 2012, Rosario

a la rugosidad es tan significativa, que sin información sobre ella probablemente será imposible resolver el problema con la precisión requerida.

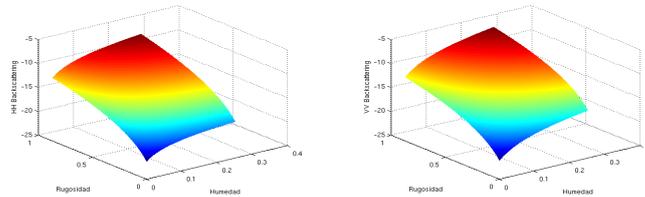
En el estudio de problemas inversos es importante disponer de datos reales. Los datos simulados pueden ayudar a entender mejor algunos aspectos del problema, pero las verdaderas dificultades aparecen con el uso de datos reales.

En ese sentido, se dispone de datos SAR adquiridos por el sistema aerotransportado SARAT de CONAE, y mediciones de humedad in-situ. Así mismo de información sobre la rugosidad de diferentes parcelas. Compararemos los datos de humedad contra el resultado de la inversión de los datos de radar hechos con este esquema de inferencia, lo que nos permitirá saber si parece factible la aplicación de estimar la humedad del suelo con un radar, así como estimar el peso relativo entre los diferentes factores que limitan la precisión de las estimaciones en la etapa actual.

1. Análisis de sensibilidad del problema directo

El modelo de Oh [29], utilizado para modelar el scattering en microondas de un suelo descubierto, es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 HV &= 0,11mv^{0,7} \cos(\theta)^{2,2} (1 - e^{-0,32ks^{1,8}}) \\
 VV &= \frac{HV}{0,095 * (0,13 + \sin(1,5\theta)^{1,4} (1 - e^{-1,3ks^{0,9}}))} \\
 HH &= VV * \left(1 - \left(\frac{2\theta}{\pi}\right)^{0,35} mv^{-0,65} e^{-0,4ks^{1,4}}\right)
 \end{aligned}$$



En la inversión de datos reales - que no fueron generados por el modelo - hay que tener en cuenta el efecto que produce el “ruido” en la inversión. En el caso de los problemas lineales, una herramienta que permite caracterizar estos efectos es la descomposición en valores singulares (SVD). Por lo tanto, en primer lugar linealizamos el problema y aplicamos la SVD.

Propagación de las incertezas en los datos a la solución Analicemos por ejemplo el modelo semiempírico de Oh, linearizándolo y usando la descomposición en valores singulares (SVD).

Si tenemos $Kf = d + \epsilon$, la solución a $Kx = d$ será

$$x = f + \sum_k \frac{u_k^t \epsilon}{\sigma_k} v_k$$

En nuestro caso la SVD de la matriz es $K = U\Sigma V$, con

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,0760 & 0 \\ 0 & 0,0046 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} -0,4883 & -0,8727 \\ -0,8727 & 0,4883 \end{pmatrix}$$

Al invertir este modelo, el “ruido” se proyecta más hacia la dirección de la humedad que de la rugosidad. Este es un inconveniente que habrá que superar, pero antes veamos que tipo de ruido está presente en las imágenes de radar.

2. Incertezas

2.1. Ruido Speckle

En principio analicemos un tipo de ruido clásico presente en todas las imágenes SAR, conocido como *Speckle*. Determinar qué es el “ruido” y qué es “la señal” es algo que le corresponde determinar al investigador en cada caso.

La causa del “ruido” llamado Speckle es que cada píxel de una imagen SAR (típicamente del orden de 10 m^2) es, en los hechos, distinto de los otros por más que para el aplicador se trate de una misma zona homogénea. Veamos: es correcto considerar la geometría de un medio natural (por ejemplo una superficie) como un proceso aleatorio. Ese proceso está caracterizado por parámetros (ej. la desviación estándar de las alturas), y son éstos parámetros los que pueden considerarse constantes a lo largo de un área, que para el aplicador se tratará de un área constante (“un suelo de rugosidad x ”). Pero sin embargo, al ser sistemas de alta resolución y muy sensibles a las características geométricas, estaremos viendo las diferencias entre las distintas realizaciones de ese proceso.

2.2. Caminatas al azar

El modelo más común para el speckle es el de la caminata al azar. Esto surge de la siguiente manera: podemos pensar que la energía que vemos en cada pixel de la imagen está compuesta por la suma de una cantidad de dispersores independientes. Es decir

$$z = \sum_i^N A_i e^{-2\pi i \theta_i}$$

Donde A_i y θ_i son variables aleatorias, la primera típicamente normal y la segunda uniforme. Esto constituye una caminata al azar en el plano complejo.

Veremos que la intensidad (módulo) sigue una distribución Rayleigh bajo condiciones bastante generales. Sin embargo, en la práctica, suele usarse la distribución gama, debido a que una imagen SAR pasa por varias etapas de procesamiento para reducir su varianza que no trataremos en el presente trabajo.

La variable gama de alguna manera “generaliza” a la distribución de Rayleigh, ya que

En la práctica se usa la distribución gama, que “generaliza” a la Rayleigh y tiene dos parámetros libres.

$$\sum_{i=1}^N \Gamma(k_i, \theta) \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^N k_i, \theta\right)$$

$$c\Gamma(k, \theta) = \Gamma(k, c\theta)$$

Hay expresiones simples para el promedio de gamas, que se utilizan para disminuir la incerteza a costa de perder resolución espacial.

El scattering se modela como $Z = X.Y$, donde Y es el ruido (de media uno y la varianza un parámetro libre), y X la predicción de los modelos directos. La varianza del speckle se representa con un parámetro N que se conoce en la literatura de radar como el *número de looks*, que vendría a indicar cuantas adquisiciones fueron promediadas para obtener el valor de cada pixel.

2.3. Cómo surge la distribución Rayleigh

La deducción rigurosa a partir de un modelo físico - por más que contenga simplificaciones importantes - de una distribución estadística para los valores de una imagen SAR, es de gran valor porque permite interpretar mucha de la información contenida en las mismas, que de otro modo no sería posible. De hecho, un problema recurrente en el modelado de imágenes SAR consiste en que las distribuciones que ajustan bien los datos observacionales obtenidas mediante “generalizaciones”, agregan parámetros libres que no tienen un correlato físico claro, y por lo tanto tienen un significado muy vago.

Es interesante entonces el estudio probabilístico de *dinámicas* (modelos físicos muy simples), que den lugar a diferentes distribuciones de probabilidad para los datos y que al mismo tiempo permitan asignar algún significado a los parámetros involucrados. En esta sección daremos una demostración moderna del resultado clásico antes citado de la distribución Rayleigh.

De la caminata al azar a la que nos referimos, la magnitud que mide el sistema es la intensidad (módulo al cuadrado), y es posible deducir su distribución de diversas formas. En Beckmann-Spizziccino [30], esto se hace trabajosamente mediante el teorema central de límite, y llama la atención una nota al pie sobre cómo había hecho esta cuenta originalmente Lord Rayleigh en el siglo XIX:

Rayleigh, who was not familiar with today’s routine methods of probability theory, used an ingenious method of adding one more vector to the sum and transforming the resulting difference equation to a PDE, which turns out to be the equation of heat conduction (...) [Rayleigh, 1896, Section 42a]

Esto no puede dejar de llamarle la atención a cualquier persona familiarizada con la teoría moderna de difusiones y el cálculo de Itô.

Siguiendo a [20] (e indirectamente a Rayleigh), podemos usar la fórmula de Itô y el teorema de Feynmann-Kac, para obtener una PDE para la intensidad, cuya solución estacionaria resulta

$$P(z) = \frac{\alpha}{2} \exp\left(\frac{-\alpha z}{2}\right)$$

2.4. Gammas multivariadas

En el caso de un sistema polarimétrico, los datos resultarán multivariados.

En dimensión 2 (que utilizaremos para tratar datos co-polarizados ignorando los cross-polarizados), hay una expresión analítica para una de tales distribuciones, conocida como la gama de Kibble

$$pdf(x, y) = \frac{(\lambda_1 \lambda_2)^v}{(1 - \rho)\Gamma(v)} \left(\frac{xy}{\rho \lambda_1 \lambda_2}\right)^{\frac{v-1}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda_1 x + \lambda_2 y}{\rho \lambda_1 \lambda_2}\right) I_{v-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho \lambda_1 \lambda_2 xy}}{1 - \rho}\right)$$

(con I_{v-1} la función modificada de Bessel de tipo 1)

Si $v > 2$, no es posible obtener expresiones analíticas para la distribución, por lo menos para generalizaciones de la gama de Kibble. Únicamente se puede escribir esta distribución como una transformada inversa de Laplace.

2.5. Desbalances y cross-talk

En un sistema SAR real hay otras clases de ruido además del Speckle, debido a desbalances y cross-talk, que los identificaremos como el error de ingeniería. Se pueden modelar (según [1]), como

$$\mathbf{M} = A \begin{pmatrix} 1 & \delta_1 \\ \delta_2 & f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{hh} & S_{vh} \\ S_{hv} & S_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta_3 \\ \delta_4 & f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{hh} & n_{vh} \\ n_{hv} & n_{vv} \end{pmatrix}$$

Los valores de los parámetros se obtienen con una calibración con reflectores, y a partir de los errores residuales se estima el error de ingeniería. Sin embargo, no disponemos actualmente de una función de error caracterizada en términos estadísticos.

3. Estimadores Bayesianos

Debido a las dificultades para lidiar con distribuciones gamas multivariadas antes mencionadas, y a las actuales limitaciones en nuestro conocimiento de las características estadísticas del error de ingeniería, lo más razonable parece ser considerar al error una variable normal, con una covarianza que es la suma de la covarianza del Speckle, más parámetros que caracterizarían el error de ingeniería. La hipótesis de

normalidad para el Speckle se puede justificar a resoluciones bajas (mucho multi-looking) mediante el Teorema Central del Límite. De hecho, a continuación estudiaremos la resolución óptima del sistema y veremos que a altas resoluciones, el ruido Speckle genera demasiadas incertezas en la obtención de humedad, por lo que de todas formas estaremos en el caso en el que la hipótesis de normalidad se cumple aproximadamente.

Entonces, la función de verosimilitud podemos modelarla como:

$$\text{Likelihood}(Z|p) = \text{Norm}(Z - f(p), \Sigma)$$

Z Mediciones

p Parámetros del Modelo

f Modelo Directo

Σ Covarianza del speckle + error de ingeniería

La distribución a posteriori, via el teorema de Bayes, resulta:

$$\text{Post}(p/Z) = \frac{\text{Likelihood}(Z/p)\text{Prior}(p)}{\int_{p \in P} \text{Likelihood}(Z/p)}$$

Y aquí hay dos estimadores a considerar: la media de la distribución a posteriori, y el máximo de la misma. El primer método es el estimador óptimo en la teoría bayesiana y el segundo está muy emparentado con los métodos de minimización.

Calcular los momentos de la distribución a posteriori involucra integrales de dimensión igual al número de parámetros ($\dim(p)$), lo que puede resultar un proceso complejo en caso de que esta dimensión sea alta. En el caso del modelo de Oh y del IEM con $\frac{\epsilon}{\gamma}$ parametrizado, esta dimensión es 2, por lo que estos momentos pueden ser calculados fácilmente mediante integración numérica. Implementamos una regla de gauss de orden 100 en cada dimensión, con muy buenos resultados, y que además sus nodos y pesos pueden ser reutilizados todas las veces que sea necesario.

3.1. Análisis de la varianza y resolución óptima

La humedad la podemos considerar como un campo aleatorio. Su heterogeneidad depende de la escala espacial, y el clima, entre otros.

Según Famiglietti [19], la varianza de la humedad en un terreno depende de la media según

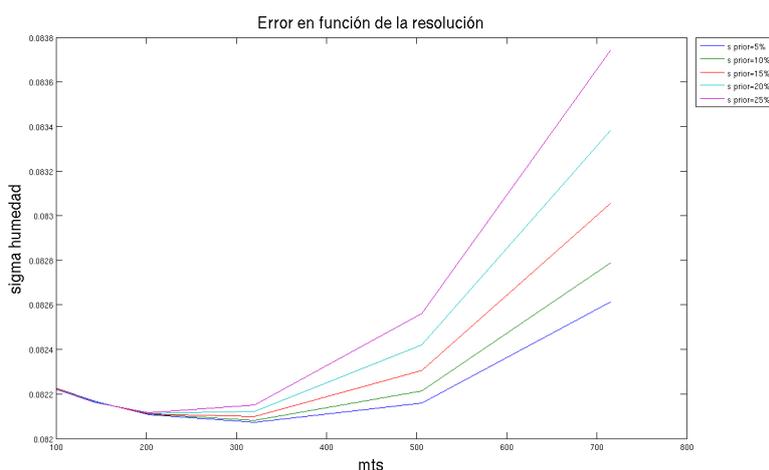
$$\sigma = k_1 \cdot \mu \cdot \exp^{-k_2 \mu}$$

donde k_1 y k_2 dependen de la escala espacial

| escala | k_1 | k_2 |
|--------|--------|--------|
| 2.5 m | 0.7803 | 9.0607 |
| 16 m | 0.7287 | 7.3796 |
| 100 m | 0.8941 | 8.0774 |
| 800 m | 0.8840 | 5.8070 |
| 1.6 km | 1.2070 | 7.1128 |
| 50 km | 1.0429 | 5.2212 |

Hacemos retrieval de una *constante efectiva*, pero que será menos representativa si la varianza del campo aumenta. Al mismo tiempo, a escalas mayores disminuye el speckle porque lo promediamos. Suponiendo que la distribución a posteriori de la constante efectiva es independiente de la heterogeneidad, la varianza se suma linealmente.

$$\text{Var}(H) = \text{Var}(C_{ef}) + \text{Var}(Het)$$



4. Método bayesiano para el problema inverso

El enfoque estadístico (bayesiano) con el que trabajamos nos provee un marco que permite:

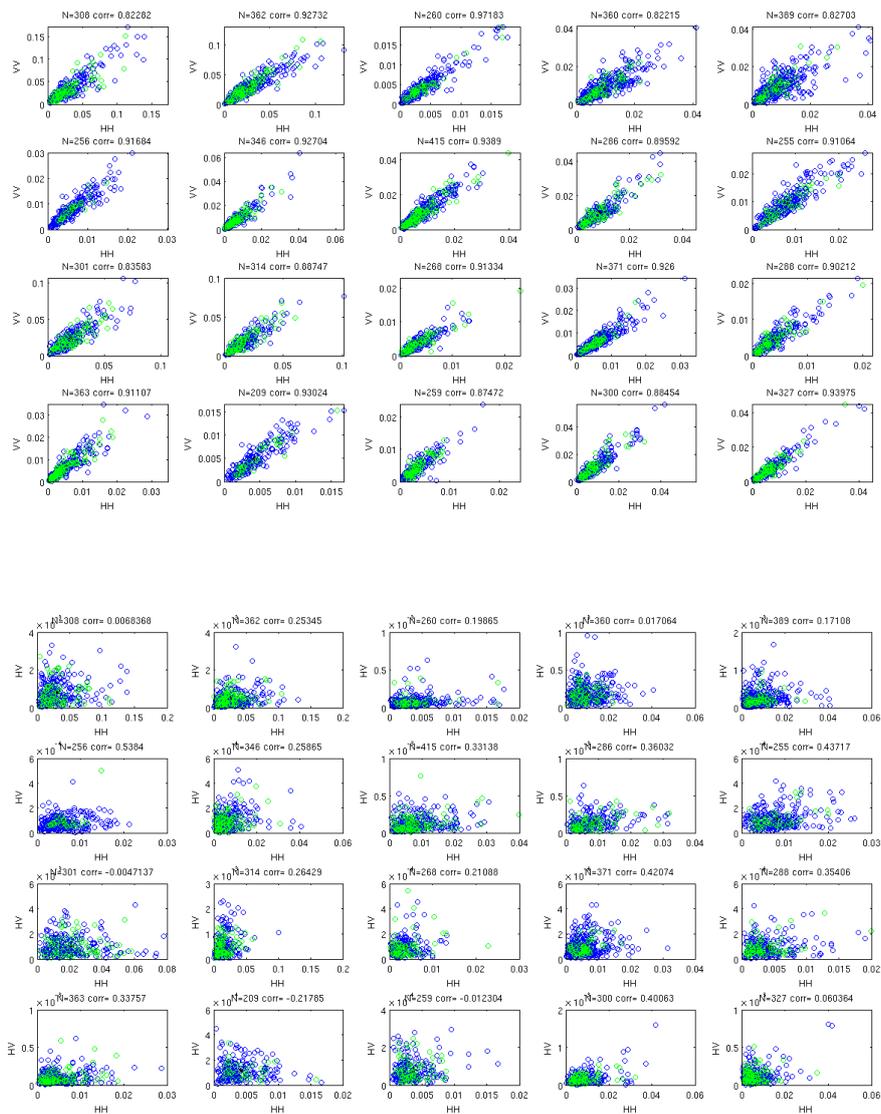
- Incorporar información a priori sobre la rugosidad, que no es sólo una ventaja sino una necesidad para la aplicación propuesta.
- Incorporar las incertezas inherentes a cualquier sistema SAR, y analizar fácilmente el efecto de las mismas en las estimaciones de humedad
- A partir de este análisis, determinar una resolución espacial óptima para el sistema
- Para pocos parámetros a obtener, como es el caso, estos estimadores se pueden implementar muy eficientemente con integración numérica.

5. Inversión de datos SARAT

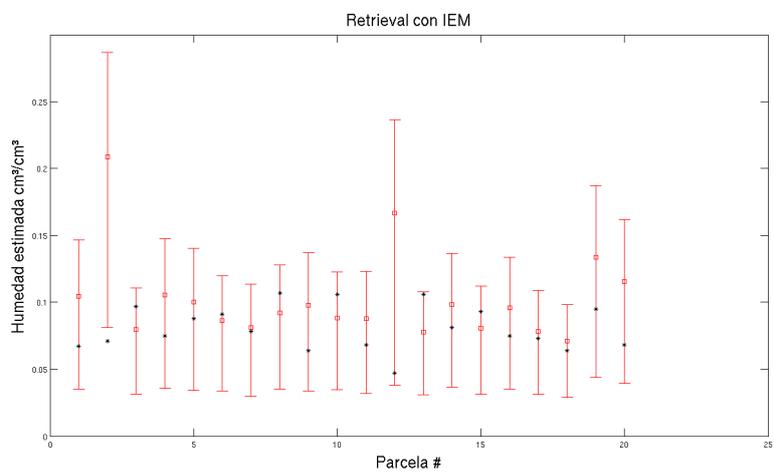
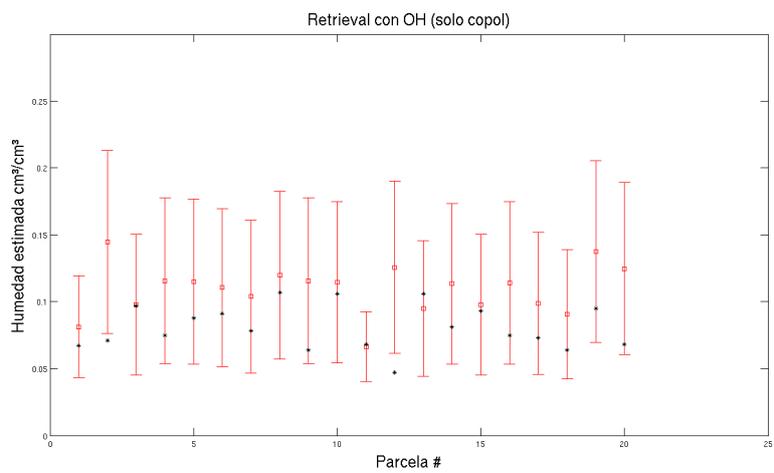
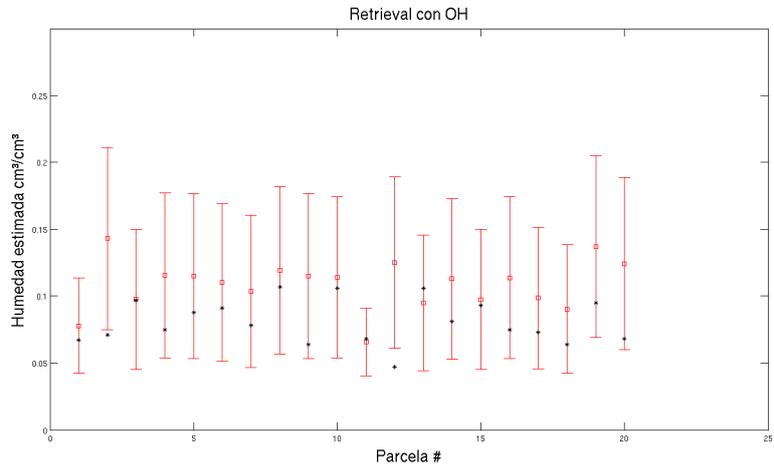
La implementación del esquema de inversión es la siguiente. En principio, dado que los datos tienen una correlación espacial, se procede a decorrelacionarlos de una manera eficiente, que es tomar promedios en cajas de tamaño creciente, hasta que la auto-correlación haya disminuido suficientemente. Los datos iniciales se muestran

en azul, y los decorrelacionados en verde. Posteriormente se procede a estimar los parámetros del ruido speckle. Como estamos en valores grandes de N , puede usarse la aproximación normal. Luego se construyen los likelihoods sumando el error de medición propiamente dicho, y se calculan las integrales para los diferentes modelos forward.

5.1. Datos



5.2. Resultados



6. Conclusiones y perspectivas

- Con información sobre la rugosidad, *es posible obtener buenas estimaciones de humedad con un radar*, al menos para suelos secos.
- También parece posible obtener buenas estimaciones *utilizando solamente datos co-pol*.
- Al mismo se analizaron los errores y se exploró *la resolución óptima* del sistema.

En principio, si bien no parece afectar al retrieval considerablemente, en los datos se observa que polarizaciones (HH y VV) son prácticamente iguales, mientras que los modelos predicen $VV > HH$. Falta explicar cuál es el efecto que causa esta anomalía. Además, se tiene conocimiento de que esta anomalía es aún más pronunciada en longitudes de onda más pequeñas, donde puede ocurrir $HH > VV$.

Esto marca la dificultad de un problema de gran interés, que es obtener información sobre la rugosidad con banda X (en la que opera el sistema italiano CosmoSkymed, parte de la misma constelación que el SAOCOM). En este caso, el problema de scattering es más desafiante. Por lo tanto, el esfuerzo futuro se centrará en resolver estos problemas de scattering con métodos numéricos eficientes.

A su vez, los modelos de back-scattering desarrollados en la literatura no dan cuenta de la correlación entre canales, por lo que este observable ha tenido que ser tomado como un parámetro libre en la distribución de speckle, sin ninguna relación con características de la superficie, lo que indica otro de los posibles caminos de mejora de dichos modelos.

Bibliografía

- [1] M. Alves A. Freeman, B. Chapman, J. Cruz, Y. Kim, S. Shaffer, J. Sun, and E. Turner K. Sarabandi. Sir-c data quality and calibration results. *IEEE Transactions on Geosciences and Remote Sensing Vol*, 33(4):848 – 857, 1995.
- [2] N. Bojarski. The k-space formulation of scattering problem in the time domain. *J. Acoust. Soc. Am*, 72(570), 1982.
- [3] O. P. Bruno and B. Delourme. Rapidly convergent quasi-periodic green function throughout the spectrum - including wood anomalies. Submitted for publication, March 2012.
- [4] O. P. Bruno and L. Kunyansky. A fast, high-order algorithm for the solution of surface scattering problems ii: Theoretical considerations. Inédito.
- [5] O. P. Bruno and L. Kunyansky. A fast, high-order algorithm for the solution of surface scattering problems: Basic implementation, tests, and applications. *J of Computational Physics*, 169:80–110, 2001.
- [6] O. P. Bruno, J. S. Owall, and C. Turc. A high-order integral algorithm for highly singular pde solutions in lipschitz domains. *Computing*, 84(3-4):149–181, 2009.
- [7] O.P. Bruno and F. Reitich. Solution of a boundary value problem for the helmholtz equation via variation of the boundary into the complex domain. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 122:317–340, 1992.
- [8] M. F. Catedra, E. Cago, and L. Nuno. A numerical scheme to obtain the rcs of three-dimensional bodies of resonant size using the conjugate gradient method and the fast fourier transform. *IEEE Trans Antennas Propag*, 37(5):528–537, 1989.
- [9] J. Chaubell, O. P. Bruno, and C. O. Ao. Evaluation of em-wave propagation in fully three-dimensional atmospheric refractive index distributions. *Radio Science*, 44, 2009.
- [10] R. Coifman, V. Rokhlin, and S. Wandzura. The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription. *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, 35(3):7–12, June.

-
- [11] D. Colton. *Partial Differential Equations*. Random House, 1985.
- [12] D. Colton and R. Kress. *Integral equation methods in scattering theory*. John Wiley and Sons, 1983.
- [13] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, second edition, 1997.
- [14] Ing Agr. S. Costantino. Costo de producción de papa. www.biblioteca.org.ar/libros/210319.pdf, Marzo 2005.
- [15] Diario La Voz de Tandil. Sigue prófugo el papero tandilense y su socio de balcarce. http://www.lavozdetandil.com.ar/ampliar_noticia.php?id_n=13367, Febrero 2010.
- [16] B. Dembart and E. Yip. The accuracy of fast multipole methods for maxwell's equations. *Computational Science Engineering, IEEE*, 5(3):48–56, Jul-Sep.
- [17] M. Epton. Multipole translation theory for the three-dimensional laplace and helmholtz equations. *SIAM J. Sci Comput*, 16(4):865–897, 1995.
- [18] D. Maystre et al. *Progress in optics.*, volume XXI. North-Holland physics publishing, 1983.
- [19] J. S. Famiglietti, D. Ryu, A. A. Berg, M. Rodell, and T. J. Jackson. Field observations of soil moisture variability across scales. *Water Resources*, 44(W01423), 2008.
- [20] Timothy R. Fields. *Electromagnetic Scattering from Random Media*. Oxford University Press, 2009.
- [21] A. K. Fung, W. Y. Liu, K. S. Chen, and M. K. Tsay. An improved iem model for bistatic scattering from rough surfaces. *J. Electromagn. Waves Applicat*, 16(5):689–702, 2002.
- [22] L. Greengard, J. F. Huang, and S. Wandzura V. Rokhlin. Accelerating fast multipole methods for the helmholtz equation at low frequencies. *IEEE Comput Sci Eng*, 5(3):32 – 38.
- [23] Fritz John. *Partial Differential Equations, Fourth Edition*. Applied Mathematical Sciences. Springer.
- [24] R. Kress. *Linear Integral Equations*, volume 82 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, second edition, 1999.
- [25] NN.: Lebedev. *Special Functions and their Applications*. Prentice-Hall, 1965.
- [26] C. M. Linton. The green's function for the two-dimensional helmholtz equation in periodic domains. *J. Engrg Math*, 33(4):377–402, 1998.

-
- [27] Jr. John A. Monro. *A Super-Algebraically Convergent, Windowing-Based Approach to the Evaluation of Scattering from Periodic Rough Surfaces*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2007.
- [28] C. B. Morrey and L. Jr.; Nirenberg. On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 10:271–290, 1957.
- [29] Y. Oh. Quantitative retrieval of soil moisture content and surface roughness from multipolarized radar observations of bare soil surfaces. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 42(3):596–601, March 2004.
- [30] A. Spizzichino P. Beckmann. *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*. Pergamon Press, 1963.
- [31] V. Rokhlin. Diagonal form of translation operators for the helmholtz equation in three dimensions. *Appl. Comput. Harmonic Anal.*, 1(1):82–93.
- [32] V Rokhlin. Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, 86(2):414 – 439, 1990.
- [33] A. Sei, O. P. Bruno, and M. Caponi. Study of polarization dependent scattering anomalies with application to oceanic scattering. *Radio Science, Volume*, 2(34):385–411, 1999.
- [34] L. Tsang, Ja Kong, Kh Ding, and Ao Co. *Scattering of electromangetic waves. 3 volume set*. John Wiley and Sons, 2001.
- [35] S. S. Zargaryan and V. G. Maz’ya. The asymptotic form of the solution of integral equations of potential theory in the neighbourhood of the corner points of a contour. *Prikl Matem Mekhan USSR*, pages 169–174, 1984.