UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Soluciones Periódicas de Sistemas Dinámicos Discretos

María Laura Noni

Director: Dr. Pablo Amster

Julio, 2012

A Coca y Roberto,
mis abuelos.

Agradecimientos

Quiero agradecerle a Pablo por aceptar dirigir este trabajo, por todo el aliento que me dio, por su calidez, por su paciencia y por todo lo que me enseñó. Todo el tiempo tuve en mente lo bien que elegí mi Director.

Al jurado, Pablo De Nápoli y Juan Pablo Pinasco, por honrarme dedicando su tiempo a leer mi trabajo.

Quiero agradecerle a todos aquellos profesores que con una sonrisa contestaban mis largas listas de preguntas, durante las cursadas y antes de cada final.

Quiero agradecerle a todos aquellos compañeros que alguna vez me explicaron algún ejercicio que no entendía, que me prestaron un cuaderno, que me alentaron antes de rendir un examen.

Aprovecho también para agradecer a todos los profes que tuve de compañeros de trabajo durante estos años, el mejor recuerdo de cada uno de ellos.

Quiero decir que estoy feliz y agradecida de haber hecho la Licencatura en Matemática en la FCEyN de la UBA. Aprendí mucho, valoro la formación que recibí. Admiro el entusiasmo que se contagia en los seminarios (tuve la suerte de asistir a un Seminario de Grafos, donde fui muy bien recibida) y en los Congresos (fui en tres oportunidades a la reunión anual de la UMA, es muy enriquecedor asistir). La diversidad de materias optativas que se dictan todos los cuatrimestres no deja de sorprenderme y tentarme. Todo esto es gracias al trabajo de mucha gente.

A título personal, quiero agradecerle a las personas que viven en mi corazón: mis amigos, mi familia y mi futuro marido (que lindo suena). A ellos porque toleraron mi mal humor y mi frustración antes de cada examen, alentándome con mucho amor. A mi mamá porque siempre me puso los pies sobre la tierra, para que reprobar un examen no fuera una tragedia en mi vida y a Santi porque me dio el aliento que necesitaba para que este año terminara la tesis.

Como dice Joan Manuel Serrat,

"Sin utopías, la vida sería un ensayo para la muerte",

con alegría, hoy estoy cumpliendo este sueño que alguna vez fue una utopía para mi. Este sueño hoy lo cumplo gracias a la ayuda de todas las personas que mencioné. Gracias a todos!!.

Contenidos

1

Introducción

Un Sistema Dinámico es un sistema que evoluciona con el tiempo, el cual puede modelarse por un sistema de ecuaciones diferenciales, si el tiempo es continuo, o por un sistema de ecuaciones en diferencias, si el tiempo es discreto.

Muchas veces, el interés no está en encontrar soluciones exactas a las ecuaciones que definen dichos sistema dinámicos, sino más bien en poder contestar preguntas como si el sistema se estabiliza a largo plazo o si el comprtamiento del sistema a largo plazo depende de las condiciones iniciales. Es decir, el foco está puesto en hacer un análisis cualitativo del sistema, en muchas oportunidades porque es difícil o imposible hallar explcitamente las soluciones.

Uno de los objetivos principales, es encontrar los puntos fijos del sistema, es decir los estados que son constantes en el tiempo. Analizar si dichos puntos son atractores, es decir si ante un estado inicial cercano, a largo plazo el sistema se ve atraido por dicho estado. También es de gran interés estudiar los puntos periódicos de dichos sistemas, son estados del sistema que se repiten en forma cíclica.

También es de interés el estudio de los sistemas que se comportan de forma complicada e impredecible, los cuales se llaman sistemas caóticos.

Haciendo un poco de historia, los Sistemas Dinámicos comienzan a estudiarse, aunque no con este nombre, hace cuatro siglos aproximadamente. Los principales referentes, sin duda dejando a muchos sin nombrar, son:

Newton (1642 - 1727), físico y matemático inglés, y Leibniz (1646 - 1716), matemático alemán, que nos legaron las ecuaciones diferenciales como principal herramienta para modelar la descripción de fenómenos físicos que evolucionan con el tiempo.

Poincaré (1854 1912), matemático francés, fue el primero en considerar la posibilidad de caos en un sistema determinista, en su trabajo sobre órbitas planetarias.

George Birkhoff (1884 - 1944), matemático estadounidense, que profundizó los estudios de Poincaré.

Lorenz (1917- 2008) matemático estadounidense, uno de los pioneros en el desarrollo de la teoría del caos.

Stephen Smale (1930-), matemático estadounidense, quien ganó la medalla Fields en 1966 por sus importantes aportes a los sistemas dinámicos.

Dada la cantidad de trabajos escritos acerca de Sistemas Dinámicos, y los que se siguen escribiendo, cabe preguntarse cuál es la importancia de este tema. Para los que tenemos un gran gusto por la Matemática, estudiar Sistemas Dinámicos nos puede resultar una actividad lúdica y poética, pero esto no suele resultar una buena respuesta a aquellos que preguntan cuál es su utilidad. La real importancia de este tema es la aplicación que tiene en diversas disciplinas, como la Física, Biología, Economía, Computación, diversas ramas de Ingeniería, Ciencias Sociales, por nombrar alguna de ellas. Por ejemplo es de interés estudiar cómo varía una tasa de interés o un precio con el tiempo (Economía), cómo varía la población de cierta especie con el tiempo (Biología), cómo varían las relaciones laborales con el tiempo (Ciencias Sociales), cómo varía el clima con el tiempo (Meteorología)

En este trabajo nos concentramos en las soluciones periódicas de sistemas dinámicos discretos. Lo interesante, es las diferentes formas en que se puede atacar este problema.

Podemos encontrar órbitas periódicas de una forma bastante artesanal, es decir imponiendo condiciones que transforman el problema en resolver ecuaciones algebraicas.

Otro enfoque para hallar soluciones periódicas es transformar el problema en hallar puntos fijos de una función. Aquí se ve una de las utilidades de tantos teoremas de punto fijo, que estudiamos en los diferentes cursos de análisis.

Y el último enfoque que vamos a mostrar en este trabajo, es usar el Cálculo Variacional para hallar soluciones periódicas. Consiste en transformar el problema en hallar puntos críticos de un funcional. Aquí también vemos una de las utilidades de tantos teoremas que estudiamos para hallar máximos y mínimos de funcionales.

En el capítulo 2 enunciamos resultados previos que es importante recordar para poder leer con comodidad el resto del trabajo. En la primer sección recordamos definiciones y algunos resultados de la teoría de Sistemas Dinámicos. Más información sobre estos temas se puede encontrar, por ejemplo, en [Smale, 2004], [Perko, 2000], [Teschl, 2011], [Kelley y Peterson, 2001] . También a lo largo del trabajo vamos a buscar soluciones en espacios de Hilbert y espacios de Sobolev, por eso los recordamos brevemente en las secciones 2 y 3 respectivamente. Para leer más sobre estos espacios y operadores, se recomienda [Brezis, 1984] y [Evans, 1991]. Y por último en la sección 4 nos focalizamos en la teroía de Puntos Críticos. Sobre estos temas se puede leer en [Cañada, 2011] y [Rabinowitz, 1986].

En el capítulo 3, basándonos en una publicación de [Zhou, 2003], analizamos la existencia de soluciones periódicas de un sistema dinámico autónomo no lineal de orden uno. En la primer sección introducimos el tema, en la segunda sección hallamos órbitas periódicas de forma artesanal, cuando se tiene la función de Mcculloch-Pitts y en la última sección, analizando el modelo con una función sigmoidea, probamos la existencia de soluciones periódicas transformando el problema en un problema de punto fijo.

En el capítulo 4 basándonos en una publicación de [Li y Yang, 2006], analizamos la existencia de soluciones periódicas de un sistema dinámico discreto de orden uno, perturbado por una función periódica. Lo hacemos estudiando los puntos fijos de un mapeo continuo.

En el capítulo 5, basándonos en una publicación de [Li y Zhang, 2009], analizamos la existencia de soluciones periódicas de una ecuación en diferencias autoadjunta periódica de orden 2. En la primer sección introducimos el tema, en la segunda sección transformamos el problema de hallar soluciones periódicas en el problema de hallar puntos críticos de un funcional, mediante un planteo variacional. En la seción 3, analizamos bajo diferentes hipótesis la existencia de soluciones cuando la función no está acotada y en la siguiente lo hacemos en el caso de que la función está acotada. Para terminar, en la última sección hallamos soluciones periódicas de una ecuación diferencial ordinaria autoadjunta comparando el problema con el problema análogo discreto.

2

Conocimientos Previos

2.1 Sistemas Dinámicos

Un Sistema Dinámico es un sistema que evoluciona con el tiempo, pero esta definición es poco precisa, con lo cual vamos a definirlo más formalmente. Un sistema dinámico es un semigrupo G actuando en un espacio X. Es decir, que existe un mapeo $\Phi : G \times X \to X$ tal que $\Phi(g, x) = \Phi_g(x)$ que cumple $\Phi_g \circ \Phi_h = \Phi_{g \circ h}$. Si G es un grupo, se dice que es un sistema dinámico inversible. Son de gran interés los sistemas dinámicos discretos en los que $G = \mathbb{N}_0$ o $G = \mathbb{Z}$ y los sistemas dinámicos continuos en los que $G = \mathbb{R}_+$ o $G = \mathbb{R}$.

2.1.1 Clasificación de Sistemas Dinámicos

Orden de los Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico discreto $\Phi : G \times M^n \to M^n$ ($G = \mathbb{Z}$ o $G = \mathbb{N}$) tal que

$$\Phi(k, u_k^1, u_k^2, \cdots, u_k^n) = (u_{k+1}^1, u_{k+1}^2, \cdots, u_{k+1}^n)$$

siendo $u_{k+1}^j = f_j(k, u_k^1, u_k^2, \cdots, u_k^n)$, donde $f_j : G \times M^n \to M$, con $j = 1, \cdots, n$.

se dice de orden n. Lo podemos escribir, también, de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}(k+1) = \Phi(k, \mathbf{u}(k)), \text{ con } k \in G, \ \mathbf{u}(k) \in M^n. \tag{2.1}$$

Vamos a notar $\Phi_k : M^n \to M^n$ a la función definida como $\Phi_k(\mathbf{u}) = \Phi(k, \mathbf{u})$.

También se puede escribir el sistema de la siguiente forma equivalente:

$$y_{k+n} = F(k, y_{k+n-1}, \cdots, y_k) \text{ siendo } F : G \times M^n \to M$$

El vector $\mathbf{u}_k = (u_k^1, u_k^2, \cdots, u_k^n)$ se denomina estado del sistema en el tiempo k.

Un sistema dinámico continuo $\Phi : G \times M^n \to M^n$ $(G = \mathbb{R})$ tal que

$$\Phi(t, u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)) = (u_1'(t), u_2'(t), \cdots, u_n'(t))$$

siendo $u_j'(t) = f_j(t, u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t))$, donde $f_j : G \times M^n \to M$, con $j = 1, \cdots, n$. se dice de orden n. Lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{u'}(t) = \Phi(t, \mathbf{u}(t)), \text{ con } t \in G, \ \mathbf{u}(t) \in M^n. \tag{2.2}$$

Y se tiene que $\Phi_t : M^n \to M^n$ es la función definida como $\Phi_t(\mathbf{u(t)}) = \Phi(t, \mathbf{u(t)})$. También se puede escribir el sistema de la siguiente forma equivalente:

$$y^{(n)}(t) = F(t, y^{(n-1)}(t), \cdots, y'(t), y(t)) \text{ siendo } F : G \times M^n \to M$$

El vector $\mathbf{u(t)} = (u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t))$ se denomina estado del sistema en el tiempo t.

Sistemas Dinámicos Lineales y No Lineales

Si $\Phi_k : M \to M$, $\forall k \in G$ es lineal en el caso del sistema dinámico discreto (o Φ_t, $\forall t \in G$ es lineal en el caso del sistema dinámico continuo), entonces se dice que el sistema dinámico es *lineal*. Por ejemplo:

$$y_{k+1} = 3y_k + 2k \text{ o } y'(t) = 5e^t y(t) + \cos(t)$$

son sistemas dinámicos lineales de orden 1.

A diferencia de los sistemas lineales, para los que existe una teoría matemática relativamente completa, como se puede leer en [Kelley y Peterson, 2001] o en [Teschl, 2011], no existen métodos generales de resolución para los sistemas de ecuaciones diferenciales o en diferencias no lineales. En ellas por ejemplo, no se cumple el principio de superposición y, en general, tampoco es posible la separación de variables. La no linealidad torna muy difícil, cuando no imposible, la resolución explícita. Esta dificultad da origen al desarrollo de un nuevo campo de la matemática denominado teoría cualitativa. El objetivo principal de esta teoría es encontrar las singularidades del sistema y determinar si el mismo es linealizable. Si lo es, se estudia luego el problema linealizado, y se analiza si la linealización conduce a una buena descripción de la dinámica no lineal, como se puede leer en [Smale, 2004].

Sistemas Dinámicos Autónomos y no Autónomos

En el caso en que la función $\Phi : G \times M \to M$ no dependa explícitamente del tiempo, es decir del elemento de G, el sistema se denomina *autónomo*. Esto se puede pensar, como que el sistema no tiene ningún estímulo externo que modifique el comportamiento del mismo. Por lo tanto en el caso de los sistemas autónomos se puede considerar arbitrariamente que el instante inicial es $t = 0$, dado que el estado del sistema solo depende del estado anterior y no del instante de tiempo.

La solución de un sistema autónomo, con la condicin inicial $\mathbf{u}_0$ se denomina trayectoria y se suele notar $\phi_t(u_0)$ o por $u(t, u_0)$. El mapa continuo $\phi_t : X \to \mathbb{R}^n$ se denomina flujo del sistema y representa el conjunto de todas las trayectorias con condiciones iniciales pertenecientes a X.

En el caso de sistemas discretos la solución es una secuencia de puntos a partir de una condición inicial $\{u_k : k = 0, \cdots\}$ denominada órbita de u_0.

En el caso general no autónomo, el instante inicial no puede elegirse arbitrariamente como cero, por lo que la solución que en el instante t_0 pasa por u_0, se designa $\phi_t(u_0, t_0)$ o $u(t, u_0, t_0)$.

Sistemas Dinámicos Periódicos

Un sistema no autónomo es periódico de período T si existe un $T > 0$ tal que, para todo u y para todo t, se cumple que $\Phi(t, u) = \Phi(t + T, u)$

2.1.2 Comportamiento Asintótico de los Sistemas Dinámicos

Estado estacionario

En todo sistema dinámico, se denomina estado estacionario al comportamiento asintótico del mismo, es decir a $\lim_{t\to\infty} u(t, u_0, t_0)$. Se denomina estado transitorio a la diferencia entre la solución y el estado estacionario. Desde el punto de vista práctico el estado estacionario respresenta el estado del sistema para tiempos suficientemente largos, comparados con las constantes de tiempo características del sistema.

Dado un sistema dinámico discreto autónomo:

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n) \tag{2.3}$$

introducimos los siguientes conceptos asociados, como punto de equilibrio, órbitas periódicas, eventualmente periódicas, estables y conjuntos límites

Punto de equilibrio

Un punto x_e se denomina punto de equilibrio o punto estacionario si

$$f(x_e) = x_e.$$

Notemos que un punto de equilibrio es un estado estacionario del sistema.

Un punto de equilibrio x_e es estable si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mid x_0 - x_e \mid \leq \delta \Rightarrow \mid x_n - x_e \mid \leq \epsilon \ \ \forall n \geq 1.$$

Si el punto no es estable, se denomina inestable.

Orbitas y Conjuntos Límites

Como ya vimos la órbita de x_0 con respecto a la ecuación (2.1) es de la siguiente forma:

$$O(x_0) = \{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^{(2)}(x_0), x_3 = f^{(3)}(x_0), \cdots\}$$

Una órbita $O(x_0)$ se dice que es periódica de período $p \in \mathbb{N}$ si $x_p = x_0$. Notemos que si $p = 1$, entonces x_0 es un punto de equilibrio.

Una órbita $O(x_0)$ se dice eventualmente periódica si $x_{n+p} = x_n$ para algún $n \geq 1$ y algún $p \geq 2$.

Una órbita periódica $\{x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}\}$ de período p es estable si cada punto x_i con $i = 0, 1, \cdots, p-1$ es un estado estacionario estable del sistema dinámico $x_{n+1} = f^p(x_n)$. Si la órbita no es estable se denomina inestable.

Un punto z se denomina punto límite de $O(x_0)$ si existe una subsecuencia $\{x_{n_k} : k = 0, 1, \cdots\}$ de $O(x_0)$ tal que $\mid x_{n_k} - z \mid \rightarrow 0$ si $k \rightarrow \infty$. El conjutno límite $L(x_0)$ de la órbita $O(X_0)$ es el conjunto de todos los puntos límites de la órbita.

Una órbita $O(x_0)$ se dice asintóticamente periódica si su conjunto límite es una órbita periódica.

2.2 Espacios normados

Los resultados presentados en esta sección pueden leerse con más detalle en [Brezis, 1984].

Recordemos la definición de espacio de Banach y espacio de Hilbert:

1. Se dice que $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, es un espacio de Banach si (V, d) es un espacio métrico completo, siendo $d(x,y) = \|x-y\|$.
2. Se dice que H es un espacio de Hilbert real, si es un espacio vectorial real con producto interno, completo por la norma inducida por el producto interno ($\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$).

Recordemos las siguientes propiedades de los espacios vectoriales de dimensión finita:

1. Sea V un K -ev de dimensión finita. Todo par de normas en V son equivalentes.
2. Sea V un K-ev de dimensión finita y sea X un conjunto cerrado y acotado en V. Entonces X es compacto, es decir que toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.
3. Sea V un espacio normado de dimensión finita, entonces V es un espacio de Banach.
4. Sea $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ tal que $T(x) = Ax$, A matriz simétrica de $N \times N$. Entonces $\langle \nabla T(x), x\rangle = 2\langle T(x), x\rangle$.

El siguiente teorema lo vamos a usar en varias oportunidades, se trata de un teorema de punto fijo en dimensión finita.

Teorema 2.2.1 (de Punto Fijo de Brouwer)**.** *Sea $F : C \subset \mathbb{R}^n \to C \subset \mathbb{R}^n$ una función continua, donde C es un conjunto no vacío, acotado, cerrado y convexo. Entonces F tiene un punto fijo en C.*

Demostración. Se pueden encontrar diferentes demostraciones de este teorema en [Amster, 2009]. □

Recordemos las siguientes propiedades de operadores en espacios de Hilbert:

1. Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert. Dado $A \in L(H_1, H_2) = \{T : H_1 \to H_2 : \text{T es lineal y acotado}\}$. Se demuestra que existe un único $B \in L(H_2, H_1)$ tal que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$.
2. Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert. Dado $A \in L(H_1, H_2)$, se define el operador adjunto de A (se nota $A^* \in L(H_2, H_1)$), como el único operador lineal y continuo que verifica:
$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$$
es decir, se define $A^* = B$.

3. Sea H un espacio de Hilbert y sea $A \in L(H,H)$. El operador A se llama autoadjunto si $A = A^*$, es decir si $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

El siguiente teorema que vamos a enunciar, se puede considerar una extensión del Teorema de Brouwer en espacios de dimensión infinita.

Teorema 2.2.2 (de Schauder)**.** *Sea E un espacio normado, y sea $C \subset E$ un conjunto convexo, cerrado y acotado. Supongamos que $T : C \to C$ es una función continua tal que $T(C)$ es compacto. Entonces T tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Se puede encontrar una demostración de este teorema en [Amster, 2009]. □

El siguiente Teorema nos va a ser útil para probar la continuidad del inverso de un operador lineal.

Teorema 2.2.3 (de la Aplicación Abierta)**.** *Sean X e Y dos espacios de Banach y $A \in L(X,Y)$. Si A es un operador sobreyectivo, entonces $A(U)$ es abierto $\forall U \subset X$, U abierto.*

Recordemos la definición de un operador compacto. Si tenemos dos espacios de Banach X, Y y un operador lineal $T : X \to Y$, T se dice compacto si $\overline{T(F)}$ es compacto en Y, para todo conjunto F acotado. El siguiente teorema es útil para probar compacidad de operadores.

Teorema 2.2.4 (de Arzela - Ascoli)**.** *Sea X un espacio métrico compacto e Y un espacio métrico completo. Un conunto $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ es relativamente compacto, es decir que $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto, si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones equicontinua y equiacotada.*

2.3 Espacios de Sobolev

Los resultados presentados en esta sección pueden leerse con más detalle en [Evans, 1991].

Recordemos las siguientes definiciones y resultados:

Definición 2.3.1. Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, decimos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la derivada débil de u con respecto a x_i si $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se cumple:

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i} = -\int_\Omega v\varphi$$

Notación: $v = D_{x_i}u$.

Observación 2.3.2. .

1. Si la derivada débil existe, entonces es única.
2. Si existen $D_{x_i}D_{x_j}u \ \forall i, j$, entonces $D_{x_i}D_{x_j}u = D_{x_j}D_{x_i}u$.
3. Si $u \in C^1(\Omega)$, las derivadas débiles existen y coinciden con las clásicas. Además se concluye que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1_{loc}(\Omega)$.
4. Si $u \in C^2(\Omega)$, entonces existen las derivadas débiles $D_\alpha u$ con $\mid \alpha \mid \leq 2$ y coinciden con las clásicas.

Observación 2.3.3. .

1. Si $u : (a, b) \to \mathbb{R}$ tiene derivada débil en $L^1_{loc}(a, b)$, entonces u es absolutamente continua en (a, b).
2. $u \in L^p(\Omega)$, entonces $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, con $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 2.3.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, sea $\alpha \in \mathbb{R}^N$ y $\mid \alpha \mid = \max_{1 \leq i \leq N} \mid \alpha_i \mid$. Se define el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$, de la siguiente manera:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D_\alpha u \in L^p(\Omega), \ \mid \alpha \mid \leq k\}$$

siendo $v = D_\alpha u$ la función que cumple:

$$\int_\Omega v\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int uD_\alpha\varphi, \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

que se denomina derivada débil de u de orden α. (Se puede demostrar que es única)

Teorema 2.3.5. .

1. $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$ *es un espacio de Banach, siendo*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|\leq k} \|D_\alpha u\|_{L^p(\Omega)})^{1/p}$$

2. $(W^{k,2}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{W^{k,2}(\Omega)})$ *es un espacio de Hilbert, siendo*

$$\langle u, v\rangle_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Notación: $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$

Definición 2.3.6. $W_0^{1,p}(\Omega)$ es la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Observación 2.3.7. $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un espacio cerrado en $W^{1,p}(\Omega)$, por lo tanto es un espacio de Banach y $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

En el cúltimo apítulo vamos a trabajar con el espacio $H_0^1(0,T) = \overline{C_0^\infty(0,T)}^{H^1(0,T)}$, siendo:

$$\langle u, v\rangle_{H^1(0,T)} = \int_0^T uv + \int_0^T u'v'$$

2.4 Resultados de la Teoría de Puntos Críticos

Los problemas de máximos y mínimos constituyeron la motivación fundamental para la creación del Cálculo Diferencial e Integral a finales del siglo XVII. El origen del Cálculo Diferencial e Integral se atribuye principalmente a Newton y Leibniz.

Los problemas que trata el Cálculo de Variaciones se formularon inmediatamente después del nacimiento del Cálculo. Se suele considerar que nació con la proposición de Bernoulli, a fines del siglo XVII, del problema de la braquistocrona. Este problema puede describirse como: una masa puntual se desliza, por acción de la gravedad, desde un punto A del plano, hasta otro punto B, a través de alguna curva. El tiempo empleado para ir desde A hasta B depende de la curva elegida. El interrogante es para qué curva se tendrá que el tiempo es mínimo. La resolución de este probelma exige el estudio de funcionales de la forma:

$$J(y) = \int_a^b (\frac{1 + y'(x)}{y(x)})^{1/2} dx,$$

donde la variable independiente $y(\cdot)$, pertenece a un conjunto adecuado de funciones.

La primer diferencia fundamental que podemos apreciar entre los problemas de máximos y mínimos del Cálculo de Variaciones y del Cálculo Diferencial e Integral, es que la variable independiente y(x) pertenece a un conjunto adecuado de funciones y no a un subconjunto del espacio euclídeo finito dimensional ($\mathbb{R}^n$). Tengamos en cuenta que los espacios de funciones son, en general, espacios vectoriales de dimensión infinita.

Por lo tanto, en el Cálculo de Variaciones, nos encontramos con el problema de maximiazar (o minimizar), o al menos encontrar puntos estacionarios (un concepto que definiremos rigurosamente), de funcionales J de la forma:

$$J(y) = \int_a^b L(t, y(t), \cdots, y^{(n)}(t))dt$$

donde $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase $C^n[a, b]$ o de manera más general $y : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ de clase $C^n[a, b]$. También se puede estudiar el caso de funciones y de varias variables. Entonces el primer problema con que nos encontramos es definir la noción de derivada, que lo hacemos a continuación.

Definición 2.4.1. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados reales, $J : \Omega \to Y$ donde Ω es un abierto de X y $x_0 \in \Omega$.
Se dice que J es derivable según Frechet en el punto $x_0 \in \Omega$ si existe alguna aplicación lineal y continua $L : X \to Y$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|J(x_0 + h) - J(x_0) - L(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

La notación que se suele usar es $L = J'(x_0)$ o $L = DJ(x_0)$.

Decir que $J \in C^1(X, Y)$, significa que J es una función continuamente diferenciable Frechet definida en X.

Notemos que si $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}$, entonces $DJ(x) = \nabla J(x)$.

Veamos un ejemplo de aplicación en el Cálculo de Variaciones.

Observación 2.4.2. Sea $J : H \to \mathbb{R}$, siendo $H = H_0^1(0, T) \oplus \mathbb{R}$ con la norma dada por:

$$\|h\|_H = \sqrt{\|h\|_{L^2}^2 + \|h'\|_{L^2}^2}$$

tal que:

$$J(u) = \int_a^b L(t, u(t), u'(t))dt$$

Entonces J es derivable y

$$J'(u)(h) = \int_a^b [\frac{\partial L(t, u, u')}{\partial u} h + \frac{\partial L(t, u, u')}{\partial u'} h']dt \;\; \forall h \in H$$

Demostración. Calculemos las derivadas direccionales. Para ello llamamos $\varphi(s) = J(u+sh)$. Entonces:

$$\frac{\partial J(u)}{\partial h} = \lim_{s\to 0}\frac{J(u+sh)-J(u)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{\varphi(s)-\varphi(0)}{s} = \varphi'(0)$$

Como

$$\varphi(s) = \int_a^b L(t, u(t)+sh(t), u'(t)+sh'(t))dt$$

entonces se tiene que:

$$\varphi'(s) = \int_a^b \frac{\partial L(t, u(t)+sh(t), u'(t)+sh'(t))}{\partial y}h(t) + \frac{\partial L(t, u(t)+sh(t), u'(t)+sh'(t))dt}{\partial y'}h'(t)dt$$

entonces evaluando $s=0$ tenemos que

$$\varphi'(0) = \int_a^b \frac{\partial L(t, u(t), u'(t))}{\partial y}h(t) + \frac{\partial L(t, u(t), u'(t))dt}{\partial y'}h'(t)dt$$

Por lo tanto ahora vamos a probar que J es diferenciable y que $J'(u)(h) = \varphi'(0)$. Por lo tanto lo que queremos probar es:

$$\lim_{h\to 0}\frac{J(u+h)-J(u)-J'(u)(h)}{\|h\|_H} = 0$$

Por el Teorema de Valor Medio tenemos que:

$$L(t, u+h, u'+h') - L(t, u, u') = \frac{\partial L(t,\overline{u},\overline{w})}{\partial u}h + \frac{\partial L(t,\overline{u},\overline{w})}{\partial u'}h'$$

con $\overline{u}$ entre u y $u+h$ y $\overline{w}$ entre u' y $u'+h'$. □

Usando este resultado podemos escribir:

$$\frac{\mid \int_a^b L(t, u+h, u'+h') - L(t,u,u') - \frac{\partial L(t,\overline{u},\overline{w})}{\partial u}h + \frac{\partial L(t,\overline{u},\overline{w})}{\partial u'}h' \mid}{\|h\|_H} \leq$$

$$\leq \int_a^b \mid (\frac{\partial L(t,\overline{u},\overline{w})}{\partial y} - \frac{\partial L(t,u,u')}{\partial y}) \mid \frac{\mid h \mid}{\|h\|_H} + \mid (\frac{\partial L(t,\overline{u},\overline{w})}{\partial y'} - \frac{\partial L(t,u,u')}{\partial y'}) \mid \frac{\mid h' \mid}{\|h\|_H}$$

Como $\mid h \mid / \|h\|_H \leq 1$ y $\mid h' \mid / \|h\|_H \leq 1$, $\mid (\frac{\partial L(t,\overline{u},\overline{w})}{\partial y} - \frac{\partial L(t,u,u')}{\partial y}) \mid \xrightarrow{h\to 0} 0$ y $\mid (\frac{\partial L(t,\overline{u},\overline{w})}{\partial y'} - \frac{\partial L(t,u,u')}{\partial y'}) \mid \xrightarrow{h\to 0} 0$, podemos aplicar el Teorema de Convergencia Mayorada y de esa forma queda probado que el límite da 0.

La siguiente definición es una condición importante que vamos a usar en la aplicaciones de los Teoremas que se presentan a continuación.

Definición 2.4.3. Sea H un espacio de Hilbert real, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$. Se dice que J satisface la condición de Palais-Smale si, toda sucesión $\{x^{(k)}\} \subset H$, para la cual $\{J(x^{(k)})\}$ es acotada y $\|DJ(x^{(k)})\| \to 0$ cuando $k \to \infty$, tiene una subsucesión convergente en H.

Los siguientes Teoremas nos van a asistir en la detección de puntos críticos. Las demostraciones de los mismos pueden encontrarse en [Rabinowitz, 1986].

Teorema 2.4.4 (del Paso de montaña)**.** *Sea H un espacio de Hilbert real y sea $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ que satisface la condición de Palais-Smale y las siguientes condiciones:*
(J_1) Existen dos constantes positivas ρ, a tales que $J(x) \geq a$ para todo $x \in \partial B_\rho$.
(J_2) $J(0) \leq 0$ y existe $x_0 \in B_\rho^c$ tal que $J(x_0) \leq 0$.

Entonces

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{s \in [0,1]} J(h(s))$$

es un valor crítico mayor o igual a a de J, donde $\Gamma = \{h \in C([0,1], H) : h(0) = 0, h(1) = x_0\}$.

Teorema 2.4.5 (de Punto Silla)**.** *Sea $H = H_1 \oplus H_2$ un espacio de Hilbert real, donde $0 < dim(H_1) < \infty$. Supongamos que $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisface la condición de Palais-Smale y las siguientes condiciones:*
(J_3) Existen dos constantes $\rho > 0$ y σ tal que $J\,|_{\partial B_\rho \cap H_1} \leq \sigma$
(J_4) Existe algún $e \in B_\rho \cap H_1$ y alguna constante $\omega > \sigma$ tal que $J\,|_{e+H_2} \geq \omega$.

Entonces J tiene un valor crítico $c \geq \omega$ y

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in B_\rho \cap H_1} J(h(u))$$

donde $\Gamma = \{h \in C(\overline{B}_\rho \cap H_1, H) : h\,|_{\partial B_\rho \cap H_1} = id\}$.

Teorema 2.4.6. *Sea $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ es una funcional par sobre un espacio de Banach H y $J(0) = 0$. Asumiendo que J satisface la condición de Palais-Smale y las siguientes condiciones:*
(J_5) Existe $H_1 \subset H$ con $dim(H_1) = l_1$ y $d > 0$ tal que

$$\sup_{\{u \in H_1 : \|u\| \geq d\}} J(u) < 0$$

(J_6) Existe $H_2 \subset H$ con $codim(H_2) = l_2 < l_1$ y $\rho > 0$ tal que

$$\inf_{\{u \in H_2 : \|u\| = \rho\}} J(u) > 0$$

Entonces J tiene por lo menos $l_1 - l_2$ pares de puntos críticos con valores críticos positivos.

3

Un sistema discreto autónomo de primer orden

Este capítulo está basado en la referencia [Zhou, 2003].

3.1 Introducción

Sea

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{3.1}$$

un sistema dinámico discreto autónomo, siendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de la forma $f(x) = \beta x - g(x)$.

Vamos a estudiar las soluciones periódicas de esta ecuación en el caso de que g sea una función sigmoidea, empezando por el caso particular de la función de Mcculloch-Pitts.

3.2 Soluciones periódicas, si g es la función de Mcculloch-Pitts

Se define la función de Mcculloch-Pitts de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0; \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Vamos a estudiar la existencia de soluciones periódicas, siendo g la función de Mcculloch-Pitts, para diferentes valores de β.

Lema 3.2.1. *Sea $f(x) = \beta x - g(x)$, con $\beta \in (0,1)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, g definida en (3.2) entonces*

$$| x_0 - \frac{1}{\beta+1} |< \frac{1}{\beta+1} \Rightarrow | f^{2n}(x_0) - \frac{1}{\beta+1} |= \beta^{2n} | x_0 - \frac{1}{\beta+1} |,$$

con $n \in \mathbb{N}$.
Notemos que $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\ veces}$

Demostración. Notemos que como $| x_0 - \frac{1}{\beta+1} |< \frac{1}{\beta+1}$, entonces

$$x_0 \in (0, 2/(\beta+1)), \text{y como } \frac{2}{\beta+1} < \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow 2\beta < \beta+1 \Leftrightarrow \beta < 1,$$

se tiene que $x_0 < 1/\beta$.

Veamos por inducción en n que

$$| f^{2n}(x_0) - \frac{1}{\beta+1} |= \beta^{2n} | x_0 - \frac{1}{\beta+1} | .$$

Si $n = 1$:

$$f^2(x_0) - \frac{1}{\beta+1} = f(\beta x_0 - g(\underbrace{x_0}_{>0})) - \frac{1}{\beta+1} = \beta(\beta x_0 - 1) - g(\beta x_0 - 1) - \frac{1}{\beta+1},$$

como $\beta x_0 - 1 < 0$ entonces $g(\beta x_0 - 1) = -1$, por lo tanto

$$f^2(x_0) - \frac{1}{\beta+1} = \beta^2 x_0 - \beta + 1 - \frac{1}{\beta+1} = \beta^2(x_0 - \frac{1}{\beta+1}).$$

Suponiendo que la igualdad se cumple para n, veamos que se cumple para $n+1$, bajo las hipótesis pedidas: Como $| f^{2n}(x_0) - \frac{1}{\beta+1} |= \beta^{2n} | x_0 - \frac{1}{\beta+1} |$ entonces

$$f^{2n}(x_0) = \beta^{2n}(x_0 - \frac{1}{\beta+1}) + \frac{1}{\beta+1} \quad o \quad f^{2n}(x_0) = \beta^{2n}(-x_0 + \frac{1}{\beta+1}) + \frac{1}{\beta+1}.$$

Notemos que en ambos casos $f^{2n}(x_0) > 0$ porque $| x_0 - 1/(\beta+1) |< 1/(\beta+1)$ y $\beta < 1$. Veamos la prueba en el primer caso (el otro caso es análogo):

$$f^{2n+1}(x_0) = \beta^{2n+1}(x_0 - \frac{1}{\beta+1}) + \frac{\beta}{\beta+1} - g(f^{2n}(x_0)) = \beta^{2n+1}(x_0 - \frac{1}{\beta+1}) - \frac{1}{\beta+1} < 0,$$

y por lo tanto:

$$f^{2n+2}(x_0) = \beta^{2n+2}(x_0 - \frac{1}{\beta+1}) - \frac{\beta}{\beta+1} - g(f^{2n+1}(x_0)).$$

Como $f^{2n+1}(x_0) < 0$ entonces $g(f^{2n+1}(x_0)) = -1$, por lo tanto:

$$f^{2n+2}(x_0) = \beta^{2n+2}(x_0 - \frac{1}{\beta+1}) + \frac{1}{\beta+1}.$$

$\square$

Teorema 3.2.2. *Dado el sistema (3.1), asumiendo $\beta \in (0,1)$ y g definida en (3.2), se tiene que la órbita $O(1/(\beta+1))$ es periódica de período 2 y estable.*
Además para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, la órbita $O(x_0)$ es asintóticamente periódica con

$$L(x_0) = \{1/(\beta+1), -1/(\beta+1)\}.$$

Demostración. Dado que $f(1/(\beta+1)) = -1/(\beta+1)$ y $f(-1/(\beta+1)) = 1/(\beta+1)$, entonces $O(1/(\beta+1))$ es una órbita periódica de período 2.

Veamos que $O(1/(\beta+1))$ es estable, es decir, tenemos que ver que tanto $1/(\beta+1)$ como $-1/(\beta+1)$ son puntos estacionarios estables de

$$x_{n+1} = f^2(x_n). \tag{3.3}$$

De hecho, para todo $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \min\{1/(\beta+1), \epsilon\}$ se tiene por el Lema (3.2.1) que:

$$\mid x_0 - \frac{1}{\beta+1} \mid < \delta \Rightarrow \mid f^{2n}(x_0) - \frac{1}{\beta+1} \mid = \beta^{2n} \mid x_0 - \frac{1}{\beta+1} \mid,$$

y como $\beta < 1$ tenemos que:

$$\mid f^{2n}(x_0) - \frac{1}{\beta+1} \mid < \mid x_0 - \frac{1}{\beta+1} \mid < \epsilon.$$

De esta forma queda demostrado que $1/(\beta+1)$ es un punto estacionario estable de $x_{n+1} = f^2(x_n)$. Analogamente se puede demostrar que $-1/(\beta+1)$ es un punto estacionario estable de $x_{n+1} = f^2(x_n)$. Por lo tanto la órbita $O(1/(\beta+1))$ es estable.

Veamos que $O(x_0)$ es asintóticamente periódica para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, con $L(x_0) = \{1/(\beta+1), -1/(\beta+1)\}$. Supongo $x_0 \geq 0$, como

$$x_{n+1} = \beta x_n - 1 \leq x_n - 1 \quad si \quad x_n \geq 0,$$

entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \geq 0$ si $0 \leq i \leq n_0$ y $x_{n_0+1} < 0$. Entonces

$$x_{n_0+2} = \beta x_{n_0+1} + 1 = \beta(\beta x_{n_0} - 1) + 1 = \beta^2 x_{n_0} + 1 - \beta > 0,$$

por lo tanto

$$x_{n_0+2} - \frac{1}{\beta+1} = \beta^2(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}).$$

Se puede demostrar por inducción en n que $x_{n_0+2n} - \dfrac{1}{\beta+1} = \beta^{2n}(x_{_0} - \dfrac{1}{\beta+1})$. Entonces queda demostrado que

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_0+2n} = \frac{1}{\beta+1}.$$

Notemos que:

$$x_{n_0+1+2n} = \beta x_{n_0+2n} - g(x_{n_0+2n}) = \beta x_{n_0+2n} - 1 = \beta^{2n+1}(x_{n_0} - 1/(\beta+1)) - 1/(\beta+1),$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_0+2n+1} = -\frac{1}{\beta+1}.$$

En el caso en que $x_0 < 0$, como

$$x_{n+1} = \beta x_n + 1 > x_n + 1, \quad si \quad x_n < 0,$$

entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i < 0$, si $0 \leq i \leq n_0$ y $x_{n_0+1} > 0$. Entonces

$$x_{n_0+2} = \beta x_{n_0+1} - 1 = \beta(\beta x_{n_0} + 1) - 1 = \beta^2 x_{n_0} - 1 + \beta,$$

por lo tanto

$$x_{n_0+2} + \frac{1}{\beta+1} = \beta^2(x_{n_0} + \frac{1}{\beta+1})$$

Se puede demostrar por inducción en n que $x_{n_0+2n} + \dfrac{1}{\beta+1} = \beta^{2n}(x_{_0} + \dfrac{1}{\beta+1})$. Entonces queda demostrado que

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_0+2n} = -\frac{1}{\beta+1}.$$

Y para terminar notemos que

$$x_{n_0+2n+1} = \beta^{2n+1}(x_{n_0} + \frac{1}{\beta+1}) - \frac{\beta}{\beta+1} - g(\underbrace{x_{n_0+2n}}_{<0}) = \beta^{2n+1}(x_{n_0} + \frac{1}{\beta+1}) + \frac{1}{\beta+1}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_0+2n+1} = \frac{1}{\beta+1}.$$

De esta forma probamos que $L(x_0) = \{\dfrac{1}{\beta+1}, -\dfrac{1}{\beta+1}\}$. $\square$

Teorema 3.2.3. *Sea $\beta = 1$. Entonces, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, la órbita $O(x_0)$ de (3.1) es eventualmente periódica con período 2.*

Demostración. Supongamos que $x_0 \geq 0$, entonces $x_{n+1} = x_n - 1$ si $x_n \geq 0$, por lo tanto existe un $n_0 > 0$ tal que $x_{n_0} > 0$ y $x_{n_0+1} = x_{n_0} - 1 < 0$, por lo tanto $O(x_{n_0})$ tiene período 2 y $O(x_0)$ es eventualmente periódica.

Análogamente si $x_0 < 0$. □

Teorema 3.2.4. *Sea $\beta \in (1, \infty)$. Entonces la ecuación (3.1) tiene un estado estacionario, órbitas periódicas de período 2 y 4.*
Además, para todo k tal que

$$\beta^{2k} - 2\beta^{2k-2} + 1 > 0, \tag{3.4}$$

la ecuación (3.1) tiene una órbita periódica de período $2k$ y para todo k tal que

$$\beta^{2k+1} - 2\beta^{2k-1} - 1 \geq 0, \tag{3.5}$$

la ecuación (3.1) tiene una órbita periódica de período $2k + 1$.

Demostración. Sea $f(x) = \beta x - g(x)$. Como $f(1/(\beta - 1)) = 1/(\beta - 1)$ tenemos que $1/(\beta - 1)$ es un estado estacionario de (3.1).

Notemos también que

$$O(\frac{1}{\beta + 1}) = \{\frac{1}{\beta + 1}, -\frac{1}{\beta + 1}\}$$

es una órbita de período 2. Y que

$$O(\frac{\beta + 1}{\beta^2 + 1}) = \{\frac{\beta + 1}{\beta^2 + 1}, \frac{\beta - 1}{\beta^2 + 1}, -\frac{\beta + 1}{\beta^2 + 1}, \frac{1 - \beta}{\beta^2 + 1}\}$$

es una órbita de período 4.

Sea $k \in \mathbb{N}$ que cumple (3.4), queremos construir una órbita de período $2k$. Vamos a buscar una órbita con las siguientes características:

$$x_0 > 0;\ x_1 \geq 0;\ x_2 < 0;\ x_3 < 0;\ (-1)^i x_i > 0 \ \ si \ \ i = 4, \cdots, 2k - 1;\ x_{2k} = x_0.$$

Por lo tanto queremos:

$$x_1 = \beta x_0 - 1 \geq 0,$$
$$x_2 = \beta^2 x_0 - \beta - 1 < 0,$$
$$x_3 = \beta^3 x_0 - \beta^2 - \beta + 1 < 0,$$
$$x_4 = \beta^4 x_0 - \beta^3 - \beta^2 + \beta + 1 > 0,$$
$$x_5 = \beta^5 x_0 - \beta^4 - \beta^3 + \beta^2 + \beta - 1 < 0,$$

$$x_{2k-1} = \beta^{2k-1}x_0 - \beta^{2k-2} - \beta^{2k-3} + \beta^{2k-4} + \beta^{2k-5} - \beta^{2k-6} + \cdots - 1 < 0,$$
$$x_{2k} = \beta^{2k}x_0 - \beta^{2k-1} - \beta^{2k-2} + \beta^{2k-3} + \beta^{2k-4} - \beta^{2k-5} + \beta^{2k-6} - \cdots + 1 > 0.$$

Como $x_{2k} = x_0$, obtenemos que x_0 tiene que ser:

$$x_0 = \frac{\beta^{2k-1} + \beta^{2k-2} - \beta^{2k-3} - \beta^{2k-4} + \beta^{2k-5} - \beta^{2k-6} + \cdots - 1}{\beta^{2k} - 1}.$$

Notemos entonces, que

$$\begin{aligned} x_1 = \beta x_0 - 1 &= \frac{\beta^{2k} + \beta^{2k-1} - \beta^{2k-2} - \beta^{2k-3} + \beta^{2k-4} - \beta^{2k-5} + \cdots - \beta - \beta^{2k} + 1}{\beta^{2k} - 1} \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta^{2k-2} - \beta^{2k-4} - \beta^{2k-6} \cdots - 1)}{\beta^{2k} - 1} = \frac{\beta^{2k} - 2\beta^{2k-2} + 1}{(\beta+1)(\beta^{2k} - 1)} > 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Vamos a ver que

$$x_1 = \min\{x_0, x_1, x_4, x_6, \cdots, x_{2k-2}\},$$

primero veamos que $x_1 < x_4$, reescribiendo x_4 de la siguiente manera:

$$x_4 = \beta^3 \underbrace{\frac{(\beta^{2k} - 2\beta^{2k-2} + 1)}{(\beta+1)(\beta^{2k} - 1)}}_{x_1 = \beta x_0 - 1} - \beta^2 + \beta + 1.$$

Notemos entonces que $x_1 < x_4$ si y solo si

$$\beta^{2k} - 2\beta^{2k-2} + 1 < 2\beta^3 - 2\beta - 1 + \beta^{2k} \Leftrightarrow \underbrace{\beta^{2k-2} - 1}_{>0} + \underbrace{\beta^3 - \beta}_{>0} > 0.$$

Ahora vamos a mostrar que $x_4 < x_6 < \cdots < x_{2k} = x_0$. Sea $3 \leq j \leq k$. Notemos que x_{2j} en función de x_1 es:

$$x_{2j} = \beta^{2j-1}x_1 - \beta^{2j-2} + \beta^{2j-3} + \beta^{2j-4} - \beta^{2j-5} + \beta^{2j-6} - \cdots + 1,$$

y

$$x_{2j-2} = \beta^{2j-3}x_1 - \beta^{2j-4} + \beta^{2j-5} + \beta^{2j-6} - \cdots + 1.$$

Reemplazando x_1 por (3.6) y agrupando de forma conveniente obtenemos:

$$x_{2j} - x_{2j-2} = \frac{2\beta^{2j-1} - 4\beta^{2j-3} + 2\beta^{2j-5}}{\beta^{2k+1} + \beta^{2k} - \beta - 1} = \frac{2\beta^{2j-5}(\beta^2 - 1)^2}{(\beta+1)(\beta^{2k} - 1)} > 0.$$

De esta forma queda probado que

$$0 < x_1 < x_4 < x_6 < x_8 < \cdots < x_{2k} = x_0.$$

Escribamos x_{2k-1} en función de x_1. Como $x_{2k-1} = \beta x_{2k-2} - 1$, entonces:

$$x_{2k-1} = \beta^{2k-2}x_1 - \beta x^{2k-3} + \beta^{2k-4} + \beta^{2k-5} - \cdots + \beta - 1,$$

reemplazando x_1 por (3.6) se tiene que

$$x_{2k-1} = \frac{2\beta^{2k-2} - 2\beta^{2k-4} - \beta^{2k} + 1}{(\beta+1)(\beta^{2k}-1)}.$$

Sacando factor común en el numerador $\beta + 1$ y luego simplificando obtenemos:

$$x_{2k-1} = \frac{\overbrace{-\beta^{2k-1} + \beta^{2k-2}}^{<0} + \overbrace{\beta^{2k-3} - \beta^{2k-4}}^{>0} + \overbrace{-\beta^{2k-5} + \beta^{2k-6}}^{<0} - \cdots + \overbrace{-\beta + 1}^{<0}}{\beta^{2k} - 1},$$

notemos que agrupando los términos del numerador de a pares, solo el segundo par es positivo, pero es menor en módulo que el primer par de términos, es decir

$$| -\beta^{2k-1} + \beta^{2k-2} | = \beta^{2k-2}(\beta - 1) > \beta^{2k-4}(\beta - 1) = \beta^{2k-3} - \beta^{2k-4},$$

entonces efectivamente $x_{2k-1} < 0$.

Veamos que $x_{2j-1} > x_{2j-3}$ si $3 \leq j \leq k$, para ello notemos que:

$$x_{2j-1} = \beta^{2j-1}\frac{(x_1+1)}{\beta} - \beta^{2j-2} - \beta^{2j-3} + \beta^{2j-4} + \beta^{2j-5} - \beta^{2j-6} + \cdots - 1$$

y

$$x_{2j-3} = \beta^{2j-3}\frac{(x_1+1)}{\beta} - \beta^{2j-4} - \beta^{2j-5} + \beta^{2j-6} + \beta^{2j-7} - \beta^{2j-8} + \cdots - 1,$$

por lo tanto, reemplazando x_1 por(3.6) obtenemos:

$$x_{2j-1} - x_{2j-3} = (\beta^{2j-2} - \beta^{2j-4})\frac{(\beta^{2k} - 2\beta^{2k-2} + 1)}{(\beta+1)(\beta^{2k}-1)} - \beta^{2j-3} + \beta^{2j-4} + 2\beta^{2j-5} - 2\beta^{2j-6},$$

agrupando convenientemente obtenemos

$$x_{2j-1} - x_{2j-3} = \frac{2\beta^{2j-6}(\beta^2-1)^2}{(\beta+1)(\beta^{2k}-1)} > 0.$$

Veamos que $x_2 < x_3$, notemos que

$$x_3 - x_2 = x_1(\beta^2 - \beta) - \beta + 2,$$

reemplazando x_1 por (3.6) y agrupando convenientemente tenemos que:

$$x_3 - x_2 = \frac{2(\overbrace{\beta^{2k-1} - \beta}^{>0} + \overbrace{\beta^2 - 1}^{>0})}{(\beta+1)(\beta^{2k}-1)} > 0.$$

Por lo tanto queda probado que

$$x_2 < x_3 < x_5 < x_7 < \cdots < x_{2k-1} < 0 < x_1 < x_4 < x_6 < \cdots < x_{2k} = x_0.$$

Es decir, probamos que $O(x_0)$ tiene $2k$ elementos.

Similarmente si se cumple (3.5) y si

$$x_0 = \frac{\beta^{2k} - \beta^{2k-1} - \beta^{2k-2} + \beta^{2k-3} - \beta^{2k-4} + \beta^{2k-5} - \beta^{2k-6} + \cdots - 1}{\beta^{2k+1} - 1}, \tag{3.7}$$

entonces $O(x_0)$ es una órbita periódica de período $2k+1$ y satisface

$$x_0 \geq 0;\ x_1 < 0;\ x_2 < 0;\ (-1)^i x_i < 0 \ \ si\ i = 3, \cdots, 2k. \tag{3.8}$$

$\square$

Observación 3.2.5. Si $\beta > 1$,

1. La condición (3.4) se cumple siempre para $k = 1, 2$.

2. Sea $k \geq 3$. La función $g(x) = x^{2k} - 2x^{2k-2} + 1$ tiene exactamente dos raices reales positivas. Una de ellas es $x = 1$ y la otra es $x = \alpha_k$, con $\alpha_k \in (1, \sqrt{2})$. La condición (3.4) se mantiene para todo $\beta > \alpha_k$.

3. Sea $k > 1$. La función $h(x) = x^{2k+1} - 2x^{2k-1} - 1$ tiene una única raíz real positiva $x = \beta_k$, con $\beta_k \in (\sqrt{2}, 2)$. La condición (3.5) se mantiene para todo $\beta > \beta_k$.

Demostración. 1. La condición (3.4) si k=1 es $\beta^2 - 1 > 0$, la cual se cumple pues $\beta > 1$. En el caso de $k = 2$ la condición es $\beta^4 - 2\beta^2 + 1 = (\beta^2 - 1)^2 > 0$ la cual se cumple para todo β.

2. Sea $g(x) = x^{2k} - 2x^{2k-2} + 1$ y $k \geq 3$. Hagamos un breve análisis de g. Notemos que 1 y -1 son raíces de g. La derivada de g es:

$$g'(x) = 2kx^{2k-1} - 2(2k-2)x^{2k-3} = 2x^{2k-3}(kx^2 - 2k + 2),$$

y sus raices son 0, $\sqrt{2 - 2/k}$ y $-\sqrt{2 - 2/k}$. Por el Teorema de Rolle, esto muestra que g tiene a lo sumo dos raíces reales más, $\alpha_k > 0$ y $\beta_k < 0$ tal que $\mid \alpha_k \mid > \sqrt{2 - 2/k} \geq 1$ y $\mid \beta_k \mid > \sqrt{2 - 2/k} \geq 1$.
Además como $g(x) = x^{2k-2}(x^2 - 2) + 1 > 0$ si $x \geq \sqrt{2}$, esto nos dice que $\alpha_k \in (\sqrt{2 - 2/k}, \sqrt{2})$.
Notemos además, que como α_k es la mayor raíz real positiva de g, $\alpha_k < \sqrt{2}$, g es continua y $g(\sqrt{2}) = 1$, por el Teorema de Bolzano $g > 0$ si $x > \alpha_k$, es decir que $g(x) > 0$ si $x > \alpha_k$.
De esta forma probamos que si $\beta > \alpha_k$ se cumple la condición (3.4).

3. Sea $h(x) = x^{2k+1} - 2x^{2k-1} - 1 = x^{2k-1}(x^2 - 2) - 1$ una función continua tal que $h(\sqrt{2}) = -1$ y $h(2) > 0$, entonces existe al menos una raíz en $(\sqrt{2}, 2)$. Como la derivada de h es:

$$h'(x) = (2k+1)x^{2k} - 2(2k-1)x^{2k-2} = x^{2k-2}((2k+1)x^2 - 2(2k-1)),$$

se puede ver que h decrece en $(0, \sqrt{\dfrac{4k-2}{2k+1}})$ y crece en $(\sqrt{\dfrac{4k-2}{2k+1}}, \infty)$, y como $h(0) = -1$, podemos afirmar que h tiene una única raíz real positiva β_k en $(\sqrt{2}, 2)$. Además podemos decir que $h > 0$ si $x > \beta_k$ por la tanto $h(x) > 0$, si $x > \beta_k$. De esta forma probamos que la condición (3.5) se cumple si $\beta > \beta_k$, siendo β_k la única raíz real postiva de h.

□

Corolario 3.2.6. *1. Sea k tal que se cumple la condición (3.4), entonces la ecuación (3.1) tiene órbitas periódicas de período $2k, 2k-2, 4, \cdots, 2$ y un estado estacionario.*

2. Sea k tal que se cumple la condición (3.5), entonces la ecuación (3.1) tiene órbitas periódicas de período $2k+1, 2k+3, \cdots$

3. Si $\beta \in [\sqrt{2}, \infty)$, entonces la ecuación (3.1) tiene órbitas periódicas de período q para todo q par.

4. Si $\beta \in [(1+\sqrt{5})/2, \infty)$, entonces la ecuación (3.1) tiene órbitas periódicas de período q para todo $q \in \mathbb{N}$.

Demostración. 1. Dado $\beta > 1$ tal que $\beta^2 - 2 > 0$, entonces $\beta^{2k-2}(\beta^2 - 2) + 1 > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se cumple la condición (3.4) para todo k. Por lo tanto, por el Teorema (3.2.4) existen órbitas de período $2k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Dados $\beta > 1$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que se cumple la condición (3.4) siendo $\beta^2 - 2 < 0$, como $\beta^{2j} < \beta^{2k-2}$ con $j < k-1$, entonces $\beta^{2j}(\beta^2-2)+1 > \beta^{2k-2}(\beta^2-2)+1 > 0$. Por lo tanto $\beta^{2j} - 2\beta^{2j-2} + 1 > 0$ si $1 \leq j \leq k$. Por lo tanto por el Teorema (3.2.4) queda probado, que existen órbitas de período $2j$, con $1 \leq j \leq k$.

2. Sean β y k tales que se cumple la condición (3.5). Como $\beta^{2k-1}(\beta^2 - 2) \geq 1$ entonces $\beta^2 - 2 > 0$, por lo tanto $\beta^{2k+1}(\beta^2 - 2) > \beta^{2k-1}(\beta^2 - 2) \geq 1$. Entonces probamos que $\beta^{2j+1} - 2\beta^{2j-1} - 1 \geq 0$ si $j \geq k$. Por lo tanto, queda probado por el Teorema (3.2.4), que existen órbitas de período $2j+1$ para todo $j \geq k$.

3. Si $\beta \geq \sqrt{2}$, entonces por la observación (3.2.5) la condición (3.4) se cumple para todo k.

4. Si $\beta > (1+\sqrt{5})/2 = \beta_1$, entonces $\beta > \beta_k$ para todo k, entonces por la observación (3.2.5) la condición (3.5) se cumple para todo k.

□

3.3 Soluciones periódicas, si g es una función sigmoidea

Sea g una función sigmoidea, es decir una función tal que existen constantes positivas r y ϵ que cumplen las siguientes condiciones:

$$\mid g(x) - 1 \mid \leq \epsilon, \quad si\ x \geq r \quad y \quad \mid g(x) + 1 \mid \leq \epsilon, \quad si\ x \leq -r, \tag{3.9}$$

Lema 3.3.1. *Sea $G : I \to \mathbb{R}$ continua, siendo I un intervalo en $\mathbb{R}$. Para todo $I_K \subset G(I)$ intervalo compacto, existe $Q \subset I$ intervalo compacto tal que $G(Q) = I_K$.*

Demostración. Sea $I_K = [G(p), G(q)]$, donde $p, q \in I$. Si $p < q$ (el otro caso es análogo) , se tiene $r = \max\{x \in [p,q] : G(x) = G(p)\}$ y $s = \min\{x \in [p,q] : G(x) = G(q)\}$.
Veamos que $G([r,s]) = I_K$:
Como G es continua entonces por el Teorema de Valores Intermedios (TVI), $\forall c \in I_K = [G(r), G(s)]$ existe $d \in [r,s]$ tal que $G(d) = c$, entonces $I_K \subset G([r,s])$.
Por otro lado, supongamos que existe $y \in G([r,s]) - I_K$ entonces $y > G(s)$ o $y < G(r)$. Si $y > G(s)$ (el otro caso es análogo), existe $t \in (r,s)$ tal que $G(t) = y$ y como $G(s) \in (G(r), y)$, por el TVI, existe $a \in (r,t)$ tal que $G(a) = G(s)$, pero $a < s$ lo cual es un absurdo. Entonces probamos que $G([r,s]) = I_K$. □

Lema 3.3.2. *Sea $F : J \to J$ una función continua, siendo J un intervalo en $\mathbb{R}$. Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sucesión de intervalos compactos tal que $I_n \subset J$ para todo n y además $I_{n+1} \subset F(I_n)$ $\forall n$. Entonces existe una sucesión de intervalos compactos Q_n tal que $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0$ y $F^n(Q_n) = I_n$ $\forall n$. Además para todo $x \in Q = \cap Q_n$ se tiene que $F^n(x) \in I_n$ $\forall n$.*

Demostración. Defino $Q_0 = I_0$. Supongamos que está definido Q_{n-1} intervalo compacto tal que $F^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$, entonces $I_n \subset F(I_{n-1}) = F^n(Q_{n-1})$. Por el lema (3.3.1) aplicado a la función $G = F^n : Q_{n-1} \to \mathbb{R}$, existe Q_n intervalo compacto tal que $Q_n \subset Q_{n-1}$ y $F^n(Q_n) = I_n \subset F^n(Q_{n-1})$. Por lo tanto queda demostrado por inducción en n, que $F^n(Q_n) = I_n$ $\forall n$. □

Lema 3.3.3. *Sea $G : J \to \mathbb{R}$ una función continua, siendo J un intervalo en $\mathbb{R}$. Sea I un intervalo cerrado en J tal que $I \subset G(I)$, entonces existe $p \in I$ tal que $G(p) = p$*

Demostración. Sea $I = [\beta_0, \beta_1]$. Como $I \subset G(I)$, existen $\alpha_0, \alpha_1 \in I$ tal que $G(\alpha_0) = \beta_0$ y $G(\alpha_1) = \beta_1$. Sea $H : J \to \mathbb{R}$ tal que $H(x) = x - G(x)$ una función continua porque G es continua. Como $H(\alpha_0) = \alpha_0 - G(\alpha_0) \geq 0$ y $H(\alpha_1) = \alpha_1 - G(\alpha_1) \leq 0$, entonces por el Teorema de Bolzano, existe $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ tal que $G(\alpha) = \alpha$. De esta forma queda probado que G tiene un punto fijo en I.
Notemos que este lema es el Teorema (2.2.1) de Brouwer en $\mathbb{R}$. □

Teorema 3.3.4. *Sea $F : J \to J$ una función continua, siendo J un intervalo en $\mathbb{R}$. Si existe $a \in J$ tal que $b = F(a)$, $c = F^2(a)$, $d = F^3(a)$ y $d \leq a < b < c$ (o $d \geq a > b > c$) entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, existe en J un punto periódico x_0 de período k, es decir que $F^k(x_0) = x_0$ y $F^s(x_0) \neq x_0$ si $s < k$.*

Demostración. Se pueden obtener otras conclusiones interesantes ante estas hipótesis, que escapan los alcances de este trabajo, en [Li y Yorke, 1975].

Asumo $d \leq a < b < c$ (el otro caso es análogo). Sea $K = [a, b]$ y $L = [b, c]$.

Si $k \in \mathbb{N} > 1$, entonces llamo $I_n = L$ si $n = 0, 1, \cdots, k-2$, $I_{k-1} = K$ e $I_{n+k} = I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Si $k = 1$, defino $I_n = L$ $\forall n$. Notemos que por el Teorema de Valores Intermedios, $L \subset F(L)$, $K \subset F(L)$ y $L \subset F(K)$, por lo tanto los intervalos compactos $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifican las hipótesis del lema (3.3.2): $I_{n+1} \subset F(I_n)$. Entonces sean Q_n los intervalos compactos definidos en la demostración de dicho lema, tal que $Q_n \subset Q_0$ $\forall n$ y $F^n(Q_n) = I_n$ $\forall n$, por lo tanto $F^k(Q_k) = I_k = I_0 = Q_0$. Entonces por el lema (3.3.3) como $Q_k \subset F^k(Q_k)$, tomando $G = F^k : Q_k \to \mathbb{R}$, se tiene que G tiene un punto fijo, es decir que existe $p \in Q_k$ tal que $F^k(p) = p$.

□

Teorema 3.3.5. *Sea $\beta \in ((1+\sqrt{5})/2, \infty)$, $r \in (0, (\beta^2 - \beta - 1)/(\beta^3 - 1))$. Sea g una función continua en $\mathbb{R}$ que cumple (3.9). Si*

$$\frac{1}{\beta^2}(1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^4})(\frac{\beta^2 - \beta - 1}{\beta^3 - 1} - r)^2 + \frac{\epsilon^2}{\beta^2}(3 + \frac{4}{\beta} + \frac{4}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^4}) + \tag{3.10}$$
$$+ \frac{2\epsilon}{\beta^2}(\frac{1}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^4})(\frac{\beta^2 - \beta - 1}{\beta^3 - 1} - r) \leq (\frac{\beta^2 - \beta - 1}{\beta^3 - 1} - r)^2,$$

para todo $m = 1, 2, \cdots$ la ecuación (3.1) tiene una órbita periódica de período m.

Demostración. Vamos a demostrar que existe $a, b, c \in J$ tal que $f(a) = b$, $f(b) = c$ y $f(c) = a$, esto equivale a decir que la ecuación (3.1) tiene una órbita de período

3. Entonces, como $f(x) = \beta x - g(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$, por el Teorema (3.3.4) queda probado que la ecuación (3.1) tiene órbitas de período m, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Para buscar la órbita de período 3, definimos la siguiente relación de recurrencia:

$$y_{n+1} = \frac{1}{\beta} y_n + \frac{1}{\beta} g(y_{n-2}). \tag{3.11}$$

Supongamos que se conocen y_{-2}, y_{-1}, y_0, entonces se tiene que

$$y_1 = \frac{1}{\beta} y_0 + \frac{1}{\beta} g(y_{-2}),$$

$$y_2 = \frac{1}{\beta^2} y_0 + \frac{1}{\beta^2} g(y_{-2}) + \frac{1}{\beta} g(y_{-1}),$$

$$y_3 = \frac{1}{\beta^3} y_0 + \frac{1}{\beta^3} g(y_{-2}) + \frac{1}{\beta^2} g(y_{-1}) + \frac{1}{\beta} g(y_0).$$

Defino $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $H(y_1, y_2, y_3) = (z_1, z_2, z_3)$, siendo:

$$z_1 = \frac{1}{\beta} y_3 + \frac{1}{\beta} g(y_1),$$

$$z_2 = \frac{1}{\beta^2} y_3 + \frac{1}{\beta^2} g(y_1) + \frac{1}{\beta} g(y_2),$$

$$z_3 = \frac{1}{\beta^3} y_3 + \frac{1}{\beta^3} g(y_1) + \frac{1}{\beta^2} g(y_2) + \frac{1}{\beta} g(y_3)$$

Sea $\overline{y} = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3})$ siendo

$$\overline{y_1} = \frac{1 + \beta - \beta^2}{\beta^3 - 1}, \quad \overline{y_2} = \frac{1 - \beta + \beta^2}{\beta^3 - 1}, \quad \overline{y_3} = \frac{-1 + \beta + \beta^2}{\beta^3 - 1}$$

Claramente $\overline{y_1} < 0$, $\overline{y_2} > 0$, $\overline{y_3} > 0$ y además se tiene que

$$\overline{y_1} = \frac{1}{\beta} \overline{y_3} - \frac{1}{\beta}; \quad \overline{y_2} = \frac{1}{\beta^2} \overline{y_3} - \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta}; \quad \overline{y_3} = \frac{1}{\beta^3} \overline{y_3} - \frac{1}{\beta^3} + \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta}\right) \tag{3.12}$$

Si

$$\sqrt{(y_1 - \overline{y_1})^2 + (y_2 - \overline{y_2})^2 + (y_3 - \overline{y_3})^2} \leq \delta_0 = \frac{\beta^2 - \beta - 1}{\beta^3 - 1} - r,$$

entonces

$$y_1 \leq \overline{y_1} + \delta_0 = -r,$$

$$y_2 \geq \overline{y_2} - \delta_0 = \frac{\beta^2 - \beta + 1}{\beta^3 - 1} - \frac{\beta^2 - \beta - 1}{\beta^3 - 1} + r \geq r,$$

$$y_3 \geq \overline{y_3} - \delta_0 = \frac{\beta^2+\beta-1}{\beta^3-1} - \frac{\beta^2-\beta-1}{\beta^3-1} + r \geq r$$

Teniendo en cuenta (3.12) se obtiene que

$$z_1 - \overline{y_1} = \frac{1}{\beta}(y_3 - \overline{y_3}) + \frac{1}{\beta}(g(y_1)+1)$$

Y como g es una función sigmoidea como la definida en (3.9) se tiene que

$$| z_1 - \overline{y_1} | \leq \frac{1}{\beta} | y_3 - \overline{y_3} | + \frac{1}{\beta} | g(y_1) + 1 | \leq \frac{1}{\beta}\delta_0 + \frac{1}{\beta}\epsilon.$$

Analogamente se puede probar que

$$| z_2 - \overline{y_2} | \leq \frac{1}{\beta^2}\delta_0 + (\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2})\epsilon \quad y \quad | z_3 - \overline{y_3} | \leq \frac{1}{\beta^3}\delta_0 + (\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3})\epsilon$$

Entonces aplicando la hipótesis se tiene que

$$(z_1-\overline{y_1})^2 + (z_2-\overline{y_2})^2 + (z_3-\overline{y_3})^2 \leq \frac{1}{\beta^2}(1+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^4})\delta_0^2 + \frac{\epsilon^2}{\beta^2}(3+\frac{4}{\beta}+\frac{4}{\beta^2}+\frac{2}{\beta^3}+\frac{1}{\beta^4})+$$

$$+\frac{2\delta_0\epsilon}{\beta^2}(1+\frac{1}{\beta}+\frac{2}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\beta^4}) \leq (\frac{\beta^2-\beta-1}{\beta^3-1} - r)^2 = \delta_0^2$$

Por lo tanto H mapea

$$N(\overline{y}, \delta_0) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : (y_1-\overline{y_1})^2 + (y_2-\overline{y_2})^2 + (y_3-\overline{y_3})^2 \leq \delta_0^2\} \; en \quad N(\overline{y}, \delta_0)$$

Por el Teorema (2.2.1) de Brouwer de punto fijo, se tiene que H tiene un punto fijo $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) \in N(\overline{y}, \delta_0)$. Es decir que $H(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$, entonces por la definición de H se tiene que:

$$y_1^* = \frac{1}{\beta}y_3^* + \frac{1}{\beta}g(y_1^*) \Rightarrow y_3^* = \beta y_1^* - g(y_1^*)$$

$$y_2^* = \frac{1}{\beta^2}y_3^* + \frac{1}{\beta^2}g(y_1^*) + \frac{1}{\beta}g(y_2^*) \Rightarrow \beta y_2^* - g(y_2^*) = \frac{1}{\beta}(y_3^* + g(y_1^*)) = y_1^*$$

$$y_3^* = \frac{1}{\beta^3}y_3^* + \frac{1}{\beta^3}g(y_1^*) + \frac{1}{\beta^2}g(y_2^*) + \frac{1}{\beta}g(y_3^*) \Rightarrow \beta y_3^* = \frac{y_3^*+g(y_1^*)}{\beta^2} + \frac{g(y_2^*)}{\beta} + g(y_3^*) = y_2^* + g(y_3^*)$$

Por lo tanto probamos que (3.1) tiene una órbita de período 3 que es $O(y_1^*) = \{y_1^*, y_3^*, y_2^*\}$ □

Ejemplo 3.3.6. Veamos un ejemplo. Sea $c > 0$ y $g_0(x) = (1 - e^{-cx})/(1 + e^{-cx})$. Entonces, como $(1 + e^{-cx}) \geq 1$, se tiene que

$$\mid g_0(x) - 1 \mid = \frac{2e^{-cx}}{1 + e^{-cx}} \leq 2e^{-cr}, \quad si \quad x \geq r$$

y como $1 + e^{-cx} \geq e^{-cx}$, se tiene que

$$\mid g_0(x) + 1 \mid = \frac{2}{1 + e^{-cx}} \leq 2e^{-cr}, \quad si \quad x \leq -r,$$

por lo tanto g_0 es una función sigmoidea.
Asumiendo que $\beta \in ((1 + \sqrt{5})/2, \infty)$, $r \in (0, (\beta^2 - \beta - 1)/(\beta^3 - 1))$ y que se cumple (3.10), entonces por el Teorema anterior tenemos que la siguiente ecuación

$$x_{n+1} = \beta x_n - g_0(x_n), \quad n = 0, 1, \cdots$$

tiene órbitas periódicas de período arbitrario.

4

Un sistema discreto perturbado de primer orden

Este capítulo está basado en la referencia [Li y Yang, 2006].

4.1 Introducción

Sea

$$x(n+1) = f(x(n), y(n)), \; x \in \mathbb{R}^n, \; y \in \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

un sistema dinámico discreto, siendo f una función continua y siendo $y(n)$ una función de perturbación.

En la siguiente sección se estudia bajo qué condiciones la ecuación (4.1) tiene una órbita periódica cuando la perturbación es una función periódica y qué relación hay entre sus períodos.

4.2 Resultados principales

Hipótesis 4.2.1. Se asume que la perturbación $y(n)$ en (4.1) es una función periódica, no nula de período mínimo k, es decir que $y(i) = y(i+k)$, con $i \in \mathbb{N}_0$ y $k \in \mathbb{N}$ y que $y(i) \neq y(i+j)$ si $j < k$ y $j \in \mathbb{N}$.

Hipótesis 4.2.2. $f(0, y(i)) \neq 0$ si $y(i) \neq 0$, con $i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$.

Hipótesis 4.2.3. Se tiene que

$$\limsup_{\|x\| \to \infty} \frac{\| f(x, y(i)) \|}{\| x \|} < 1, \; i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}. \tag{4.2}$$

Teorema 4.2.4. *Suponiendo que se cumplen las hipótesis* (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3), *entonces el sistema* (4.1) *tiene una órbita periódica no trivial, es decir que* $O(x_0) \neq \{0\}$.

Demostración. Por (4.2.3) se tiene que dado $i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$, existe $m_i > 0$ tal que $\| f(x, y(i)) \| < \| x \|$ si $\| x \| > m_i$.

Sea $\overline{m_i} = \max_{\|x\| \leq m_i} \| f(x, y(i)) \| > 0$, notemos que entonces

$$\| f(x, y(i)) \| \leq \begin{cases} \| x \|, & \text{si } \| x \| > m_i; \\ \overline{m_i}, & \text{si } \| x \| \leq m_i. \end{cases}$$

Sea $M_i = \max\{m_i, \overline{m_i}\}$ y sea $M = \max\{M_i : i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}\}$.

Veamos que si $\| x \| \leq M$ entonces $\| f(x, y(i)) \| \leq M$ $\forall i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$:

$$\begin{cases} \text{Si } m_i < \| x \| \leq M \text{ entonces } \| f(x, y(i) \| \leq \| x \| \leq M. \\ \text{Si } \| x \| \leq m_i \text{ entonces } \| f(x, y(i)) \| \leq \overline{m_i} \leq M_i \leq M. \end{cases}$$

Entonces $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| \leq M\}$ es un conjunto positivamente invariante del sistema

$$x(n+1) = f(x(n), y(i)), \; x \in U, \; i \in \{0, 1, \cdots, k-1\} \tag{4.3}$$

Sea $f_i = f(x, y(i))$, con $i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$ y sea $F = f_{k-1} \circ \cdots \circ f_0$. Luego $F : U \to U$ es un mapeo continuo, por ser composición de funciones continuas dado que f es continua por hipótesis. Por el Teorema (2.2.1) de Brouwer, F tiene un punto fijo x_0, es decir que $f_{k-1} \circ \cdots \circ f_0(x_0) = x_0$.

Sea $x_i = f_{i-1}(x_{i-1})$, entonces se tiene que $f_{k-1}(x_{k-1}) = x_0$, además por la (4.2.2) tenemos que $f_{i+k} = f_i$, entonces la órbita $o(x_0) = \{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}\}$ es una órbita periódica de (4.1). Esto implica que $o(x_0)$ contiene una órbita periódica de período mínimo j tal que j divide a k.

Vemos que la órbita no es trivial. Supongamos que $O(x_0) = \{0\}$, esto quiere decir que $x_0 = 0$ y $f(0, y(i)) = 0$ $\forall i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$. Pero como y no es nula, existe $j \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$ tal que $y(j) \neq 0$, entonces $f(0, y(j)) \neq 0$, lo cual es un absurdo. Entonces la órbita no es trivial.

□

Ejemplo 4.2.5. Veamos un ejemplo que cumple las hipótesis del Teorema (4.2.4), donde el período de la solución es más chico que el de la perturbación.

Sea

$$f(x,y) = \frac{x}{2+\mid y \mid} + \frac{\mid y \mid}{2+\mid y \mid},$$

siendo la perturbación $y(n)$ la función periódica de período cuatro, tal que $y(0) = 1$, $y(1) = -1/2$, $y(2) = -1$ e $y(3) = 1/2$.
Veamos que se verifican las hipótesis del Teorema:

1. $y(n+4) = y(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ por definción de y.

2. $f(0, y(n)) = \dfrac{\mid y(n) \mid}{2+\mid y(n) \mid} \neq 0$ si $y(n) \neq 0$.

3. $\limsup_{\|x\|\to\infty} \dfrac{\|f(x,y(n))\|}{\|x\|} \leq \limsup_{\|x\|\to\infty} \dfrac{1}{2+y(n)} + \dfrac{\mid y(n) \mid}{\mid x \mid (2+\mid y(n) \mid)} \leq$
$\leq \frac{1}{2+|y(n)|} \leq \begin{cases} 1/3, & \text{si } \| y(n) \| = 1; \\ 2/5, & \text{si } \| y(n) \| = \frac{1}{2}. \end{cases} \leq 1.$

4. f es continua por ser composición de funciones continuas.

Veamos que este sistema tiene una órbita periódica de longitud 2: $o(5/3) = \{\dfrac{5}{13}, \dfrac{6}{13}\}$
Sea $x_0 = \dfrac{5}{13}$, entonces $x_1 = f(x_0, 1) = \dfrac{6}{13}$, $x_2 = f(x_1, -\dfrac{1}{2}) = \dfrac{5}{13}$, $x_3 = f(x_2, -1) = \dfrac{6}{13}$ y $x_4 = f(x_3, \dfrac{1}{2}) = \dfrac{5}{13}$.

Por lo tanto, concluimos que el sistema (4.1) tiene una órbita periódica de período más chico que la perturbación.

Ejemplo 4.2.6. Veamos un ejemplo de un sistema que cumple las hipótesis del Teorema (4.2.4) y la órbita tiene un único elemento.

Sea
$$f(x,y) = \frac{x+\mid y \mid}{1+\mid y \mid}$$

siendo la perturbación $y(n)$, la función periódica de período dos, tal que $y(0) = 1$ e $y(1) = -1$ Es fácil ver que se verifican las hipótesis del Teorema. Por lo tanto sabamos que tiene una órbita periódica de período igual a un divisor de 2, por ejemplo $O(1) = \{1\}$.

Hipótesis 4.2.7. Suponiendo que se cumple (4.2.1) y que $k_i > 0$ con $i \in \{1, \cdots, r\}$ son los divisores de k tal que $0 < k_1 < \cdots < k_r < k$ y $r > 0$. Para todo k_l divisor propio de k, las funciones $F_{k_l} = f_{k_{l-1}} \circ \cdots \circ f_0$ y $F_{2k_l} = f_{2k_{l-1}} \circ \cdots \circ f_0$ no tienen puntos fijos en común.

Teorema 4.2.8. *Suponiendo que se cumplen las hipótesis (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) y (4.2.7) entonces el sistema (4.1) tiene una órbita periódica de período mínimo k.*

Demostración. Por el Teorema (4.2.4), el sistema (4.1) tiene una órbita periódica no trivial de período mínimo j, tal que $j \in \{k_1, \cdots, k_r, k\}$.

Veamos que $j = k$. Supongamos que $j \in \{k_1, \cdots, k_r\}$, tenemos que $F_j(x_0) = x_0$ y $F_{2j}(x_0) = x_0$, lo que contradice la cuarta hipótesis.

Entonces $k = r$. □

Ejemplo 4.2.9. Sea el sistema (4.1), con $f(x, y) = \dfrac{x + y}{2+ \mid y \mid}$, $y(n)$ la función periódica de período 4, tal que $y(0) = 1$, $y(1) = -1/2$, $y(2) = -1$ e $y(3) = 1/2$.

Veamos que se verifican las hipótesis del Teorema (4.2.8):

1. $y(n + 4) = y(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Siendo $k = 4$, $k_1 = 1$ y $k_2 = 2$.
2. $f(0, y(n)) = \dfrac{y(n)}{2+ \mid y(n) \mid} \neq 0$ si $y(n) \neq 0$.
3. $\limsup_{\|x\|\to\infty} \dfrac{\|f(x, y(n))\|}{\|x\|} \leq \limsup_{\|x\|\to\infty} \dfrac{1}{2 + y(n)} + \dfrac{y(n)}{\mid x \mid (2+ \mid y(n) \mid)} \leq$

   $\leq \frac{1}{2+|y(n)|} \leq \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & \text{si } \| y(n) \|= 1; \\ \dfrac{2}{5}, & \text{si } \| y(n) \|= \frac{1}{2}. \end{cases} \leq 1$
4. f es continua por ser composición de funciones continuas.
5. $F_2(x) = f_1 \circ f_0(x) = \dfrac{2x - 1}{15}$ no comparte puntos fijos con

$$F_1(x) = f_0(x) = \frac{x + 1}{3}.$$

   $F_2(x) = f_1 \circ f_0(x) = \dfrac{2x - 1}{15}$ no comparte puntos fijos con

$$F_4(x) = f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ f_0(x) = \frac{4x + 13}{225}.$$

Veamos que este sistema tiene la siguiente órbita de longitud 4:

$$o(1/17) = \{\frac{1}{17}, \frac{6}{17}, -\frac{1}{17} - \frac{6}{17}\}$$

Sea $x_0 = \dfrac{1}{17}$, entonces $x_1 = f(x_0, 1) = \dfrac{6}{17}$, $x_2 = f(x_1, -\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{1}{17}$, $x_3 = f(x_2, -1) = -\dfrac{6}{17}$ y $x_4 = f(x_3, \dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{17}$.

5

Ecuaciones en Diferencias de Orden 2 T-Periódicas Autoadjuntas

Este capítulo está basado en la referencia [Li y Zhang, 2009].

5.1 Introducción

Estamos interesados en estudiar la existencia de soluciones periódicas de la siguiente ecuación en diferencias autoadjunta de segundo orden T-periódica:

$$\triangle[p(t)\triangle u(t-1)] + q(t)u(t) = f(t, u(t)) \tag{5.1}$$

siendo $p, q : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ funciones, $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en la segunda variable y $\triangle$ el operador de diferencias hacia adelante, es decir

$$\triangle u(t) = u(t+1) - u(t).$$

Además como la ecuación es T-periódica, existe $T \in \mathbb{N}$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:

$$p(t+T) = p(t) \;\; y \;\; q(t+T) = q(t) \;\; \forall t \in \mathbb{Z} \;\; y \;\; f(t+T, x) = f(t, x) \;\; \forall (t, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}.$$

A lo largo del capítulo vamos a emplear las siguientes notaciones:

1. $$F(t, x) = \int_0^x f(t, s)ds$$

2. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$. Notamos $\mathbb{Z}(a) = \{a, a+1, \cdots\}$ y $\mathbb{Z}[a, b] = \{a, a+1, \cdots b\}$.

Con la siguiente observación queremos mostrar, que no son pocas las ecuaciones en diferencias de segundo orden que se pueden escribir en forma autoadjunta.

Observación 5.1.1. Notemos que toda ecuación de segundo orden

$$\alpha(t)u(t+1) + \beta(t)u(t) + \gamma(t)u(t-1) = g(t, u(t)) \tag{5.2}$$

con $\alpha(t) > 0$, $\gamma(t) > 0$ y $t \in \mathbb{Z}([a, b])$ puede ser escrita en forma autoadjunta para $t \in \mathbb{Z}([a, b])$.

En el caso de que α, β, γ y g sean funciones T-periódicas, entonces se obtiene una ecuación autoadjunta T-periódica.

Demostración. Queremos escribir (5.2) de la forma en que está escrita (5.1). Si desarrollamos esta última, teniendo en cuenta la definición del operador $\triangle$ tenemos que:

$$p(t+1)u(t+1) + (q(t) - p(t+1) - p(t))u(t) + p(t)u(t-1) = f(t, u(t))$$

y multiplicando ambos miembros de (5.2) por una función $h(t) > 0$ obtenemos:

$$h(t)\alpha(t)u(t+1) + h(t)\beta(t)u(t) + h(t)\gamma(t)u(t-1) = h(t)g(t, u(t))$$

Por lo tanto resolver este problema se reduce a hallar una función p tal que, $p(t+1) = h(t)\alpha(t)$ y $p(t) = h(t)\gamma(t)$ y una función q, tal que $q(t) = h(t)\beta(t) + p(t+1) + p(t)$. Por lo tanto, basta encontrar p que cumpla la siguiente condición:

$$h(t+1) = \frac{\alpha(t)}{\gamma(t+1)}h(t),$$

es decir que

$$h(a+1) = \frac{\alpha(a)}{\gamma(a+1)}h(a); \quad h(a+2) = \frac{\alpha(a+1)}{\gamma(a+2)}h(a+1) = \frac{\alpha(a+1)\alpha(a)}{\gamma(a+2)\gamma(a+1)}h(a); \cdots$$

Por lo tanto se puede ver por inducción en t, que h con $h(a) = A > 0$ es:

$$h(t) = A\prod_{s=a}^{t-1}\frac{\alpha(s)}{\gamma(s+1)}, \qquad t \in \mathbb{Z}([a, b]).$$

Si llamamos

$$p(t) = A\gamma(t)\prod_{s=a}^{t-1}\frac{\alpha(s)}{\gamma(s+1)}, \quad q(t) = \beta(t)h(t) + p(t+1) + p(t)$$

$$y \quad f(t, u(t)) = h(t)g(t, u(t))$$

logramos la escritura autoadjunta.

Notemos que si extendemos h de forma periódica, es decir $h(t+T) = h(t)$, $\forall t \in \mathbb{Z}$, entonces p, q y f son T-periódicas.

$\square$

La ecuación (5.1) se denomina autoadjunta, pues puede ser escrita de la siguiente forma:

$$L(u(t)) = f(t, u(t))$$

siendo $L : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^T$ el operador $L(u(t)) = \triangle(p(t)\triangle u(t-1)) + q(t)u(t)$, el cual es un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert $\mathbb{R}^T$ con el producto interno euclideo, con la condición de contorno $u(0) = u(T)$. Como vamos a estar interesados en soluciones periódicas, vamos a extender a u de forma periódica con período T, entonces por practicidad de escritura vamos a permitirnos escribir $u(T+1)$ sabiendo que es igual a $u(1)$, aunque su dominio es $\mathbb{R}^T$. Veamos que efectivamente es un operador autoadjunto, es decir que $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$. Notemos que

$$\langle Lu, v\rangle = \sum_{t=1}^{T} \triangle(p(t)\triangle u(t-1))v(t) + q(t)u(t)v(t) =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \triangle(p(t)u(t) - p(t)u(t-1))v(t) + q(t)u(t)v(t) =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} (p(t+1)u(t+1) - (p(t) + p(t+1))u(t) + p(t)u(t-1))v(t) + q(t)u(t)v(t)$$

$$= \underbrace{\sum_{t=1}^{T} p(t+1)u(t+1)v(t)}_{1} - \underbrace{\sum_{t=1}^{T} (p(t) + p(t+1))u(t)v(t)}_{2} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{t=1}^{T} p(t)u(t-1)v(t)}_{3} + \underbrace{\sum_{t=1}^{T} q(t)u(t)v(t)}_{4} \tag{5.3}$$

Como por la simetría del producto escalar se tiene $\langle u, Lv\rangle = \langle Lv, u\rangle$, por analogía con $\langle Lu, v\rangle$ obtenemos:

$$\langle u, Lv\rangle = \underbrace{\sum_{t=1}^{T} p(t+1)v(t+1)u(t)}_{1} - \underbrace{\sum_{t=1}^{T} (p(t) + p(t+1))v(t)u(t)}_{2} +$$

$$+\underbrace{\sum_{t=1}^{T} p(t)v(t-1)u(t)}_{3}+\underbrace{\sum_{t=1}^{T} q(t)v(t)u(t)}_{4} \tag{5.4}$$

Claramente el (2) y el (4) de (5.4) es igual al (2) y (4) de (5.3). Además como p y u son T-periódicas se tiene que

$$\sum_{t=1}^{T} p(t+1)u(t+1)v(t) = \sum_{t=2}^{T+1} p(j)u(j)v(j-1) = \sum_{t=2}^{T} p(t)u(t)v(t-1)+\underbrace{p(T+1)u(T+1)v(T)}_{p(1)u(1)v(0)} =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} p(t)u(t)v(t-1),$$

por lo tanto el (1) de (5.3) es igual al (3) de (5.4). Analogamente se puede ver que el (3) de (5.3) es igual al (1) de (5.4). Por lo tanto, queda probado que L es un operador autoadjunto de espacios de Hilbert.

Queremos conocer la existencia de soluciones periódicas de la ecuación (5.1), para ello vamos a hacer una correspondencia entre hallar soluciones periódicas y el problema de encontrar puntos críticos de un funcional. En la sección 2 transformamos el problema de hallar una solución periódica a nuestra ecuación en un problema de optimización. En la sección 3 analizamos la existencia de soluciones periódicas cuando f no está acotada, en la sección 4 analizamos la existencia de soluciones periódicas cuando f está acotada y en la sección 5 hacemos una comparación con el caso continuo, es decir probamos la existencia de soluciones periódicas de una ecuación diferencial autoadjunta de segundo orden con f acotada, bajo condiciones similares al caso discreto.

5.2 Planteo variacional

Sea S el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las sucesiones $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ y sea

$$E = \{u = \{u(t)\} \in S : u(t+T) = u(t),\ \forall t \in \mathbb{Z}\}$$

un subespacio de S. Notemos que E es isomorfo a $\mathbb{R}^T$, espacio que puede ser equipado con el siguiente producto interno:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{t=1}^{T} u(t)v(t), \qquad u, v \in E, \tag{5.5}$$

el cual induce la siguiente norma:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = (\sum_{t=1}^{T} u^2(t))^{1/2}, \qquad u \in E. \tag{5.6}$$

Por lo tanto se puede ver que E con el producto interno (5.5) es un espacio de Hilbert de dimensión finita, linealmente homeomorfo a $\mathbb{R}^T$.

Para todo $r > 1$ y $u \in E$, se define la norma r como

$$\|u\|_r = (\sum_{t=1}^{T} \mid u(t) \mid^r)^{1/r}. \tag{5.7}$$

Notemos que E con la norma $\|\cdot\|_r$ es equivalente al espacio de Hilbert, de dimensión finita, $\mathbb{R}^T$, porque las normas son equivalentes. Vamos a usar las siguientes constantes en este capítulo:

$$C_{1r}\|u\|_r \leq \|u\|_2 \leq C_{2r}\|u\|_r. \tag{5.8}$$

A lo largo del capítulo la notación que vamos a usar para $\|\cdot\|_2$ es $\|\cdot\|$.

5.2.1 Definición del funcional

Definamos el siguiente funcional I sobre E:

$$I(u) = -\sum_{t=1}^{T}[\frac{1}{2}p(t)(\triangle u(t-1))^2 - \frac{1}{2}q(t)u^2(t) + F(t,u(t))], \quad u \in E. \tag{5.9}$$

Por simplicidad, identificamos $u \in E$ con $u = (u(1), u(2), \cdots, u(T))^T$ y reescribimos $I(u)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I(u) &= -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} u(t)^2(p(t)-q(t)) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} p(t)u(t-1)^2 + \sum_{t=1}^{T} u(t)p(t)u(t-1) - \sum_{t=1}^{T} F(t,u(t)) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T-1} u(t)^2(p(t)+p(t+1)-q(t)) - \frac{1}{2}u(T)^2(p(1)+p(T)-q(T)) + \\ &\quad + \sum_{t=1}^{T} u(t)p(t)u(t-1) - \sum_{t=1}^{T} F(t,u(t)). \end{aligned}$$

Notemos que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ y para todo $u \in E$, como suponemos que $u(0) = u(T)$, $u(1) = u(T+1)$ podemos computar la derivada de Frechet de $I(u)$, es decir el gradiente $\nabla I(u) = (\frac{\partial I}{\partial u(1)}, \cdots, \frac{\partial I}{\partial u(T)})$ de la siguiente manera:

$$\frac{\partial I}{\partial u(t)} = -u(t)(p(t)+p(t+1)-q(t)) + p(t)u(t-1) + u(t+1)p(t+1) - f(t,u(t))$$

$$= p(t+1)(u(t+1) - u(t)) - p(t)(u(t) - u(t-1) + u(t)q(t) - f(t, u(t)))$$
$$= \triangle(p(t)\triangle u(t-1)) + u(t)q(t) - f(t, u(t)).$$

Notemos que hallar los puntos críticos de $I(u)$ se corresponde a igualar su gradiente a 0, por lo tanto obtenemos:

$$\triangle[p(t)\triangle u(t-1)] + q(t)u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{Z}[1, T],$$

la cual es precisamente la ecuación (5.1) con $t \in \mathbb{Z}[1, T]$. Con lo cual extendiendo u de forma periódica, es decir $u(t + T) = u(t)$, $\forall t \in \mathbb{Z}$, tenemos una solución $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ que es T-periódica.

Por lo tanto transformamos la existencia de una solución periódica de (5.1) a la existencia de un punto crítico de I en E. Este resultado es muy importante, porque lo que vamos a hacer es buscar puntos críticos del funcional I y de esa forma encontrar soluciones periódicas de nuestro sistema discreto.

5.2.2 Notación matricial del funcional

Reescribiendo $I(u)$ matricialmente obtenemos:

$$I(u) = -\frac{1}{2}\langle (P + Q)u, u\rangle - \sum_{t=1}^{T} F(t, u(t)), \tag{5.10}$$

donde $u = (u(1), u(2), \cdots, u(T)) \in \mathbb{R}^T$, y P, Q son matrices de $T \times T$ dadas por

$$P = \begin{pmatrix} p(1)+p(2) & -p(2) & 0 & \cdots & 0 & -p(1) \\ -p(2) & p(2)+p(3) & -p(3) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -p(3) & p(3)+p(4) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p(T-1)+p(T) & -p(T) \\ -p(1) & 0 & 0 & \cdots & -p(T) & p(T)+p(1) \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -q(1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -q(2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q(3) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -q(T-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -q(T) \end{pmatrix}.$$

Notemos que como $(P+Q)$ es simétrica, (esto se desprende de que la ecuación con la que estamos trabajando es autoadjunta) se tiene que

$$\langle \nabla I(u), u\rangle = -\langle (P+Q)u, u\rangle - \sum_{t=1}^{T} f(t,u(t))u(t). \tag{5.11}$$

5.3 Existencia de Soluciones Periódicas, cuando f no está acotada

Supongamos que f no es acotada y cumple la siguiente condición:

(A_1) Existen dos constantes α, γ con $1 < \alpha \leq \gamma < 2$, tal que

$$\gamma F(t,x) \leq x f(t,x) \leq \alpha F(t,x) < 0, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Queremos extraer información de esta condición, para ello integramos (A_1), obteniendo la siguiente desigualdad:

$$-a_1 \mid x \mid^{\gamma} \leq F(t,x) \leq -a_2 \mid x \mid^{\alpha}, \tag{5.12}$$

siendo a_1 y a_2 constantes positivas. Como γ y α son números menores que 2 dividiendo la desigualdad anterior por $\mid x \mid^2$ y tomando límite obtenemos:

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{F(t,x)}{x^2} = 0 \tag{5.13}$$

y

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{F(t,x)}{x^2} = -\infty, \tag{5.14}$$

es decir, que F es subcuadrática en ∞ y F es supercuadrática en 0.

Vamos a ver en el siguiente Lema, que si F satisface (A_1), entonces el funcional I satisface la condición de compacidad de Palais Smale. Esto nos sirve para aplicar los Teoremas (2.4.4), (2.4.5) y (2.4.6) para encontrar puntos críticos del funcional I.

Lema 5.3.1. *Supongamos que $F \in C^1(\mathbb{Z}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisface (A_1). Entonces I satisface la condición de Palais-Smale.*

Demostración. Ya vimos que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$. Sea $x^{(k)} \in E$ con $k \in \mathbb{N}$, una sucesión tal que $\{I(x^{(k)})\}$ está acotada y $\| \bigtriangledown I(x^{(k)})\| \to 0$ si $k \to \infty$. Entonces, existe una constante $M > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mid I(x^{(k)}) \mid \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

y

$$\| \bigtriangledown I(x^{(k)})\| \leq 1, \quad si\ k \geq k_0,$$

Por lo tanto, por la desigualdad de Cauchy Schwartz obtenemos:

$$| \langle \bigtriangledown I(x^{(k)}), x\rangle | \leq \|x\| \quad si\ k \geq k_0, x \in E.$$

Entonces

$$I(x^{(k)}) - \frac{1}{2}\langle \nabla I(x^{(k)}), x^{(k)}\rangle \leq M + \frac{1}{2}\|x^{(k)}\|.$$

Teniendo en cuenta las relaciones (5.10) y (5.11), tenemos que:

$$I(x^{(k)}) - \frac{1}{2}\langle \nabla I(x^{(k)}), x^{(k)}\rangle =$$

$$-\frac{1}{2}\langle (P+Q)x^{(k)}, x^{(k)}\rangle - \sum_{t=1}^{T} F(t, x^{(k)}(t)) + \frac{1}{2}\langle (P+Q)x^{(k)}, x^{(k)}\rangle + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} f(t, x^k(t))x^{(k)}(t) =$$

$$= -\sum_{t=1}^{T}[F(t, x^{(k)}(t)) - \frac{1}{2}f(t, x^k(t))x^{(k)}(t)].$$

Como $\gamma F(t,x) \leq x f(t,x)$ con $(t,x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, entonces:

$$M + \frac{1}{2}\|x^{(k)}\| \geq -\sum_{t=1}^{T} F(t, x^{(k)}(t)) + \frac{\gamma}{2}\sum_{t=1}^{T} F(t, x^{(k)}(t)) = \underbrace{(\frac{\gamma}{2} - 1)}_{<0}\sum_{t=1}^{T} F(t, x^{(k)}(t)).$$

Por (5.12), como $-F(t,x) \geq a_2 \mid x \mid^{\alpha}$, entonces

$$M + \frac{1}{2}\|x^{(k)}\| \geq a_2(1 - \frac{\gamma}{2})\sum_{t=1}^{T} \mid x^{(k)}(t) \mid^{\alpha} .$$

Por otro lado, como $\|\cdot\|_{\alpha}$ es equivalente a $\|\cdot\|$, se tiene que $\|x^{(k)}\|_{\alpha} \geq (1/C_{2\alpha})\|x^{(k)}\|$, tenemos que:

$$M + \frac{1}{2}\|x^{(k)}\| \geq a_2(1 - \frac{\gamma}{2})(\frac{1}{C_{2\alpha}})^{\alpha}\|x^{(k)}\|^{\alpha}$$

entonces

$$a_2(1 - \frac{\gamma}{2})(\frac{1}{C_{2\alpha}})^{\alpha}\|x^{(k)}\|^{\alpha} - \frac{1}{2}\|x^{(k)}\| \leq M,$$

lo cual implica que $\|x^{(k)}\|$ está acotada. Y como E es un espacio de dimensión finita, toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente. Por lo tanto el funcional I satisface la condición de Palais-Smale.

$\square$

A continuación presentamos el primer teorema de existencia de soluciones periódicas del capítulo, imponiendo condiciones en el signo de p y q.

Teorema 5.3.2. *Supongamos que F satisface (A_1) y que p, q satisfacen las siguientes condiciones:*
(p) $p(t) > 0$ $\forall t \in \mathbb{Z}[1,T]$;
(q) $q(t) \leq 0$ $\forall t \in \mathbb{Z}[1,T]$ y existe por lo menos un punto $t_0 \in \mathbb{Z}[1,T]$ tal que $q(t_0) < 0$.

Entonces existen por lo menos dos soluciones T-periódicas no triviales de la ecuación (5.1).

Demostración. Para encontrar los puntos críticos del funcional I, vamos a verificar primero las hipótesis del Teorema (2.4.4) del Paso de la montaña.

Por el Lema (5.3.1) sabemos que I verifica la condición de Palais-Smale.

Veamos que $P+Q$ es una matriz definida positiva. Sea $x \in \mathbb{R}^T$, tal que $x \neq 0$, entonces:

$$\langle (P+Q)x, x\rangle = \sum_{i=1}^{T}(p(i)+p(i+1)-q(i))x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{T} p(i+1)x_i x_{i+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{T} p(i+1)(x_i - x_{i+1})^2 - \sum_{i=1}^{T} q(i)x_i^2 \geq 0 \text{ pues } p(i) > 0 \text{ } y \text{ } q(i) \leq 0.$$

Si la primera sumatoria es positiva listo, pues la segunda es no positiva. Si la primera sumatoria es cero, es porque todas las coordenadas son iguales y como $x \neq 0$, las mismas son no nulas, y como por hipótesis existe i tal que $q(i) < 0$, nos queda la segunda suma estrictamente negativa. De esta forma queda probado que $P+Q$ es definida positiva, entonces todos sus autovalores son positivos:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_T.$$

Además sabemos que

$$\lambda_1 \|u\|^2 \leq \langle (P+Q)u, u\rangle \leq \lambda_T \|u\|^2.$$

Por el límite (5.14), existe $\rho > 0$ tal que $F(t,x) \leq -(3/4)\lambda_T x^2$ si $| \, x \, | \leq \rho$ y $t \in \mathbb{Z}[1,T]$. Entonces para todo $u \in E$ con $\|u\| \leq \rho$, se tiene que $| \, u(t) \, | \leq \rho$ para todo $t \in \mathbb{Z}[1,T]$ y entonces:

$$\frac{1}{2}\langle (P+Q)u, u\rangle + \sum_{t=1}^{T} F(t,u(t)) \leq \frac{1}{2}\lambda_T \|u\|^2 - \frac{3}{4}\lambda_T \sum_{t=1}^{T} u(t)^2.$$

Por lo tanto:

$$I(u) \geq -\frac{1}{2}\lambda_T\|u\|^2 + \frac{3}{4}\lambda_T\|u\|^2 = \frac{1}{4}\lambda_T\|u\|^2$$

Y esto implica que

$$I\mid_{\partial B_\rho} \geq \frac{1}{4}\lambda_T\rho^2 = a > 0.$$

Entonces probamos que se cumple (J_1).

Sea $w \in E$ con $\|w\| = 1$ y sea $\alpha > 0$, entonces teniendo en cuenta que λ_1 es el menor autovalor de $P + Q$ y la cota (5.12), observamos que:

$$I(\alpha w) = -\frac{1}{2}\langle (P+Q)\alpha w, \alpha w\rangle - \sum_{t=1}^{T} F(t, \alpha w(t)) \leq$$

$$\leq -\frac{1}{2}\alpha^2\lambda_1 + a_1\alpha^\gamma \sum_{t=1}^{T} \mid w(t) \mid^\gamma .$$

Y como $\|\cdot\|_\gamma$ es equivalente a $\|\cdot\|$ se tiene que:

$$I(\alpha w) \leq -\frac{1}{2}\alpha^2\lambda_1 + a_1\alpha^\gamma(\frac{1}{C_{1\gamma}})^\gamma\|w\|^\gamma \longrightarrow -\infty \;\; si \;\; \alpha \to \infty.$$

Entonces, se puede elegir α lo suficientemente grande para que $\alpha > \rho$ e $I(u_0) < 0$ con $u_0 = \alpha w \in E \cap B_\rho^c$. Además $I(0) = -\frac{1}{2}\langle (P+Q)0, 0\rangle - \sum_{t=1}^{T} F(t,0) = 0$. De esta forma probamos (J_2).

Por lo tanto probamos que I cumple las hipótesis del Teorema (2.4.4) del Paso de la Montaña, entonces existe por lo menos un punto crítico $\bar{u}$ de I, es decir que $\nabla I(\bar{u}) = 0$, tal que $I(\bar{u}) = c \geq a > 0$ siendo:

$$c = \inf_{h\in\Gamma} \sup_{s\in[0,1]} I(h(s)) \;\; \text{donde } \Gamma = \{h \in C([0,1], E) : h(0) = 0, h(1) = u_0\}.$$

Esto equivale a decir que existe una solución periódica de (5.1) de período T.

Veamos que hay otra solución periódica. Notemos que cualquier $u \in E$ lo podemos escribir como $u = \alpha w$ con $\|w\| = 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$I(u) \leq -\frac{1}{2}\lambda_1\|u\|^2 + a_1(\frac{1}{C_{1\gamma}})^\gamma\|u\|^\gamma, \quad \forall u \in E,$$

lo cual implica que:

$$\lim_{\|u\|\to\infty} I(u) = -\infty$$

Esto quiere decir que I está acotada superiormente en E y que $-I$ es coerciva, es decir que $\lim_{\|u\|\to\infty} -I(u) = +\infty$.

Sea $c_{max} = \sup\{I(u) : u \in E\}$. Veamos que el supremo se realiza. Por el límite anterior, tenemos que $I(u) < -M$, siendo $M > 0$ si $\|u\| > N_0$ con $N_0 \in \mathbb{N}$. Y como $\overline{B}_{N_0}$ es compacto, por estar en un espacio de dimensión finita e I es continua en E, entonces I alcanza un máximo en $\overline{B}_{N_0}$, que sabemos que es positivo, pues ya vimos que I toma valores positivos en $\partial B_\rho \subset E$. Por lo tanto I alcanza un máximo en E. Sea $\tilde{u} \in E$ tal que $I(\tilde{u}) = c_{max}$. Claramente $\tilde{u} \neq 0$, pues $I(0) = 0$ y ya probamos que existen puntos donde I es positiva ($I\mid_{\partial B_\rho} = a > 0$).

Si $\tilde{u} \neq \bar{u}$ está probado el Teorema. En caso contrario si $\tilde{u} = \bar{u}$, entonces $c = c_{max}$.

Si $h \in \Gamma = \{h \in C([0,1], E) : h(0) = 0, h(1) = u_0\}$, como $I \circ h$ es continua en $[0,1]$ que es compacto, tenemos que $\sup_{s\in[0,1]} I(h(s))$ se realiza. Es decir que para cada $h \in \Gamma$, existe $s_h \in [0,1]$ tal que $I \circ h(s_h) = \sup_{s\in[0,1]} I(h(s))$.

Veamos que $\inf_{h\in\Gamma} I \circ h(s_h) = c$ se realiza. Como $c = c_{max}$ y $c_{max} = \sup\{I(u) : u \in E\}$, tenemos que $c_{max} \geq I(u) \ \ \forall u \in E$, entonces $c_{max} \geq I(h(s_h)) \ \ \forall h \in \Gamma$.
Si existe $h \in \Gamma$ tal que $c_{max} \neq I \circ h(s_h)$, entonces $c_{max} < I \circ h(s_h)$, lo cual es un absurdo.

Por lo tanto $\forall\ h \in \Gamma$ y $s_h \in [0,1]$ tenemos que $c_{max} = I(h(s_h))$. Además podemos decir que $s_h \in (0,1)$, dado que $I(h(0)) = 0$ y $I(h(1)) < 0$ y ya vimos que existen puntos donde I es positiva.

Si elegimos $h_1, h_2 \in \Gamma$ tal que:

$$\{h_1(s) : s \in (0,1)\} \cap \{h_2(s) : s \in (0,1)\} = \emptyset,$$

entonces existen $s_1, s_2 \in (0,1)$ tal que $I(h_1(s_1)) = I(h_2(s_2)) = c_{max}$, entonces existen dos puntos críticos distintos $u_1 = h_1(s_1)$ y $u_2 = h_2(s_2)$ de I en E. De hecho, en este caso podemos obtener infinitos puntos críticos distintos no triviales.

$\square$

Veamos un ejemplo donde se aplica el Teorema recién demostrado.

Ejemplo 5.3.3. Sea

$$\triangle^2 u(t-1) - u(t) = -\frac{4}{3}u(t)^{1/3}a(t), \text{siendo } a > 0 \text{ una función T-periódica,}$$

siendo $p(t) = 1$, $q(t) = 1$, $f(t,u) = -\frac{4}{3}u^{1/3}(t)a(t)$, $\forall t \in \mathbb{Z}$. Como p y q son constantes y f es T-periódica, las tres funciones se puede decir que son T-periódicas. Veamos que se cumplen las hipótesis del Teorema anterior:

1. $p = 1 > 0$

2. $q = -1 < 0$

3. Como $f(t,u) = -\frac{4}{3}u^{1/3}(t)a(t)$, se tiene que $F(t,u) = \int_0^u f(t,s)ds = -a(t)u^{4/3}(t)$. Sea $\gamma \in [4/3, 2)$ y $\alpha \in (1, 4/3]$, entonces:

$$-\gamma u^{4/3}(t)a(t) \leq -\frac{4}{3}u^{4/3}(t)a(t) \leq -\alpha u^{4/3}(t)a(t)$$

   es decir que se cumple(A_1).

Por lo tanto el Teorema anterior nos dice que esta ecuación tiene dos soluciones no nulas de período T.

Si elegimos $a(t) = 1$ y $u(t) = b \in \mathbb{R}\ \forall t \in \mathbb{Z}$, hay al menos dos soluciones constantes, entonces reemplazando en la ecuación original obtenemos las mismas:

$$-b = -\frac{4}{3}b^{1/3}$$

es decir $b = \sqrt{64/27}$ o $b = -\sqrt{64/27}$.

Teorema 5.3.4. *Supongamos que F satisface (A_1) y que $(P+Q) \neq 0$ es semidefinida positiva. Entonces existe por lo menos una solución T-periódica no nula, de la ecuación* (5.1).

Demostración. Como $(P+Q)$ es semidefinida positiva no tiene autovalores negativos, y como es simétrica y real es diagonalizable. Si tuviera todos sus autovalores nulos, sería semejante a la matriz nula, es decir que sería la matriz nula. Como $(P+Q)$ no es la matriz nula tiene al menos un autovalor positivo.

Supongamos que $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m$ son los autovalores positivos de $P+Q$, y sean η_i $(1 \leq i \leq m)$ los autovectores de $P+Q$ correspondientes a los autovalores λ_i con $(1 \leq i \leq m)$ que satisfacen:

$$\langle \eta_i, \eta_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Sea $E^+ = gen\{\eta_i : 1 \leq i \leq m\}$.

Por el Lema (5.3.1) sabemos que I verifica la condición de Palais-Smale.

Veamos que se cumplen las condiciones (J_1) y (J_2) del Teorema (2.4.4) del Paso de la Montaña.

Por el límite (5.14), existe una constante $\rho > 0$ tal que $F(t,x) \leq -(3/4)\lambda_m x^2$ $\forall \mid x \mid \leq \rho$, $t \in \mathbb{Z}[1,T]$. Entonces $\forall u \in E$ tal que $\|u\| \leq \rho$ se tiene que $\mid u(t) \mid \leq \rho$ $\forall t \in \mathbb{Z}[1,T]$ y la siguiente condición:

$$I(u) \geq -\frac{1}{2}\lambda_m\|u\|^2 + \frac{3}{4}\lambda_m\|u\|^2 = \frac{1}{4}\lambda_m\|u\|^2,$$

la cual implica que

$$I(u) \mid_{\partial B_\rho} \geq a = \frac{1}{4}\lambda_m\|u\|^2.$$

Por lo tanto probamos que (J_1) se verifica.

Claramente, al igual que en el Teorema anterior $I(0) = 0$ y para todo $w \in E^+$ con $\|w\| = 1$ se tiene que:

$$\lim_{\alpha\to\infty} I(\alpha w) = -\infty.$$

Entonces, se puede elegir un α suficientemente grande tal que $\alpha > \rho$ y $I(u_0) < 0$ con $u_0 = \alpha w \in E^+ \subset E$. Entonces se cumple (J_2). De esta forma, probamos que se cumplen las hipótesis del Lema (2.4.4) del Paso de la Montaña, entonces existe por lo menos un valor crítico $u \in E$ tal que $I(u) = c \geq a > 0$, por lo tanto $u \neq 0$ pues $I(0) = 0$. Esto equivale a decir que la ecuación (5.1) tiene al menos una solución periódica no nula de período T. $\square$

Analizando la demostración del Teorema anterior, surge la inquietud de si se pueden obtener los mismos resultados relajando las hipótesis sobre $(P+Q)$. En el próximo Teorema solo le vamos a pedir a $(P+Q)$ que tenga al menos un autovalor positivo.

Teorema 5.3.5. *Supongamos que F satisface (A_1) y*

(A_2) $(P+Q)$ tiene al menos un autovalor positivo.
Entonces la ecuación (5.1) posee al menos una solución no trivial T-periódica.

Demostración. Supongamos que $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_l$ y $0 > -\mu_1 \geq -\mu_2 \geq \cdots \geq -\mu_k$ son los autovalores positivos y negativos de $(P+Q)$ y que $\eta_i(1 \leq i \leq l)$, y $\xi_j(1 \leq j \leq k)$ son los autovectores de $(P+Q)$ correspondientes a los autovalores $\lambda_i(1 \leq i \leq l)$ y $\mu_j(1 \leq j \leq k)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

$$\langle \eta_i, \eta_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad , \quad \langle \xi_i, \xi_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

y

$$\langle \eta_i, \xi_j \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq l, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Por lo tanto E se puede escribir como la suma directa $E = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$ siendo:

$$E^+ = gen\{\eta_i : 1 \leq i \leq l\} \quad E^- = gen\{\xi_j : 1 \leq j \leq k\}$$

y

$$E^0 = (E^+ \oplus E^-)^\perp.$$

Notemos que si $(P+Q)$ no tuviera autovalores negativos, es de decir $E^- = \emptyset$, estamos en la situación del Teorema anterior.

Para todo $u \in E$, u puede ser descompuesto como $u = u^+ + u^0 + u^-$, donde $u^+ \in E^+$, $u^- \in E^-$ y $u^0 \in E^0$. Por lo tanto

$$\lambda_1 \|u^+\|^2 \leq \langle (P+Q)u^+, u^+\rangle \leq \lambda_l \|u^+\|^2,$$

y

$$-\mu_k \|u^-\|^2 \leq \langle (P+Q)u^-, u^-\rangle \leq -\mu_1 \|u^-\|^2,$$

Queremos aplicar el Teorema (2.4.5) de Punto Silla para encontrar puntos críticos de I.

La condición de Palais-Smale se cumple por el Lema (5.3.1).

Ahora veamos que I verifica (J_3) y (J_4).

Sea $H_1 = E^+$, $H_2 = E^- \oplus E^0$. Asumamos que y_0 es un autovector de $P+Q$ asociado a λ_1 y $\|y_0\| = \delta$ suficientemente chico para que se cumpla lo siguiente:

$$\delta^{2-\alpha} < \frac{2a_2}{\lambda_1}(\frac{1}{C_{2\alpha}})^\alpha,$$

sindo a_2 la constante de la condición (5.12) y $C_{2\alpha}$ la constante de la relación (5.8). Dicho δ existe pues $\frac{2a_2}{\lambda_1}(\frac{1}{C_{2\alpha}})^\alpha > 0$. Reagrupando la desigualdad obtenemos:

$$w = \delta^\alpha (a_2 (\frac{1}{C_{2\alpha}})^\alpha - \frac{1}{2}\lambda_1 \delta^{2-\alpha}) > 0.$$

Entonces para todo $u = y_0 + u^- + u^0$ (notemos que $u \in H_2 + y_0$), como $I(u) = -\frac{1}{2} < (P+Q)u, u > - \sum_{t=1}^T F(t, u(t))$ y $(P+Q)u^0 = 0$, tenemos que:

$$I(u) = -\frac{1}{2}\lambda_1 \|y_0\|^2 - \frac{1}{2}\langle (P+Q)u^-, u^-\rangle - \sum_{t=1}^T F(t, u(t)).$$

Como $\langle (P+Q)u^-, u^-\rangle \leq -\mu_1 \|u^-\|^2$, entonces:

$$I(u) \geq -\frac{1}{2}\lambda_1 \|y_0\|^2 + \frac{1}{2}\mu_1 \|u^-\|^2 - \sum_{t=1}^T F(t, u(t)).$$

Por la condición (5.12) se tiene que $F(t,u(t)) \leq -a_2 \mid u(t) \mid^{\alpha}$, entonces

$$I(u) \geq -\frac{1}{2}\lambda_1\|y_0\|^2 + \frac{1}{2}\mu_1\|u^-\|^2 + a_2\sum_{t=1}^{T} \mid u(t) \mid^{\alpha}.$$

Por la condición (5.8) se tiene que $\|u\|_{\alpha}^{\alpha} \geq (1/C_{2\alpha})^{\alpha}(\|y_0\|^2 + \|u^-\|^2 + \|u^0\|^2)^{\alpha/2}$ y como $\frac{1}{2}\mu_1\|u^-\|^2 \geq 0$, podemos acotar $I(u)$ de la siguiente manera:

$$I(u) \geq -\frac{1}{2}\lambda_1\|y_0\|_2^2 + a_2(\frac{1}{C_{2\alpha}})^{\alpha}(\|y_0\|_2^2 + \|u^-\|_2^2 + \|u^0\|_2^2)^{\alpha/2}.$$

Como $\|u^-\|_2^2 + \|u^0\|_2^2 > 0$, entonces:

$$I(u) \geq -\frac{1}{2}\lambda_1\|y_0\|_2^2 + a_2(\frac{1}{C_{2\alpha}})^{\alpha}\|y_0\|_2^{\alpha} = \delta^{\alpha}(a_2(\frac{1}{C_{2\alpha}})^{\alpha} - \frac{1}{2}\lambda_1\delta^{2-\alpha}) = w > 0,$$

lo cual implica que I satisface (J_4). Porque probamos que si $y_0 \in H_1$, entonces $\exists w > 0$ tal que $J \mid_{H_2+y_0} \geq w$.

Veamos ahora que I también cumple J_3.
Sea $\nu \in H_1 = E^+$, como por (5.12) se tiene que $-a_1 \mid x \mid^{\gamma} \leq F(t,x)$ y λ_1 es el menor autovalor positivo de $P+Q$ tenemos que:

$$I(\nu) = -\frac{1}{2}\langle (P+Q)\nu, \nu\rangle - \sum_{t=1}^{T} F(t,\nu(t)) \leq -\frac{1}{2}\lambda_1\|\nu\|^2 + a_1\sum_{t=1}^{T} \mid \nu(t) \mid^{\gamma}.$$

Teniendo en cuenta (5.8) se tiene que $\|\nu\|_{\gamma}^{\gamma} \leq (1/C_{1\gamma})^{\gamma}\|\nu\|^{\gamma}$, entonces:

$$I(\nu) \leq -\frac{1}{2}\lambda_1\|\nu\|^2 + a_1(\frac{1}{C_{1\gamma}})^{\gamma}\|\nu\|^{\gamma} = \|\nu\|^2(a_1(\frac{1}{C_{1\gamma}})^{\gamma} - \frac{1}{2}\lambda_1\|\nu\|^{2-\gamma}) = \sigma.$$

Queremos que σ sea negativo, para poder asegurar que es menor que ω. Supongamos que $\|\nu\| = \rho$, entonces pedir $\sigma < 0$ equivale a pedir lo siguiente:

$$\frac{2a_1}{\lambda_1}\frac{1}{C_{1\gamma}}^{\gamma} \leq \rho^{2-\gamma}.$$

Como $1 < \gamma < 2$, existe $\rho > \delta$ suficientemente grande que cumpla la condición anterior. Entonces probamos que $I(\nu) \leq \sigma < 0$ y por lo tanto $\sigma < w$ para todo $\nu \in H_1$ con $\|\nu\| = \rho$. Entonces se cumple J_3.

Por lo tanto por el Teorema de Punto Silla I tiene al menos un punto crítico. Además dicho punto crítico no es cero, porque $J \mid_{H_2+y_0} \geq w > 0$. Esto equivale a decir que la ecuación (5.1) tiene al menos una solución periódica no nula de período T.

□

Nos preguntamos ahora, si el planteo variacional nos lleva a un funcional par, si podemos ante las mismas hipótesis que en el Teorema anterior probar que la ecuación original tiene más de una solución T-periódica. Esto es lo que vemos en el siguiente Teorema.

Teorema 5.3.6. *Supongamos que F satisface (A_1) y (A_2) y $F(t,-x) = F(t,x)$. Sea dim E^+=n. Entonces la ecuación (5.1) tiene por lo menos n pares de soluciones no triviales T-periódicas.*

Demostración. Para demostrar este Teorema vamos a usar el Teorema (2.4.6). Por eso vamos a ver que se verifican las hipótesis del mismo.

Como $I(u) = -\frac{1}{2}\langle (P+Q)u, u\rangle - \sum_{t=1}^{T} F(t, u(t))$ se tiene que $I(-u) = I(u)$, porque $F(t,u) = F(t,-u)$, es decir que el funcional es par. Esto nos hace pensar en usar el Teorema (2.4.6). Con lo cual a continuación vamos a chequear las hipótesis de dicho Teorema.

Notemos que $I(0) = 0$ porque $F(t,0) = 0$.

Sea $H_1 = E^+$ un espacio de Banach por ser un subespacio de dimensión finita y sea $\nu \in H_1$, entonces como por la condición (5.12) se tiene que $a_1 \mid x \mid^\gamma \leq F(t,x)$ y λ_1 es el autovalor más pequeño positivo de $(P+Q)$, obtenemos que:

$$I(\nu) \leq -\frac{1}{2}\lambda_1 \|\nu\|^2 + a_1 \sum_{t=1}^{T} \mid \nu(t) \mid^\gamma .$$

Y como por la condición (5.8) se tiene que $\|\nu\|_\gamma^\gamma \leq (1/C_{1\gamma})^\gamma \|\nu\|^\gamma$, entonces:

$$I(\nu) \leq -\frac{1}{2}\lambda_1 \|\nu\|^2 + a_1 (\frac{1}{C_{1\gamma}})^\gamma \|\nu\|^\gamma = \|\nu\|^\gamma (a_1 (\frac{1}{C_{1\gamma}})^\gamma - \frac{1}{2}\lambda_1 \|\nu\|^{2-\gamma}).$$

Notemos que $I(\nu) < 0$ si

$$\frac{2a_1}{\lambda_1}(\frac{1}{C_{1\gamma}})^\gamma \leq \|\nu\|^{2-\gamma}$$

y que existe $d > 0$ suficientemente grande tal que

$$\frac{2a_1}{\lambda_1}(\frac{1}{C_{1\gamma}})^\gamma \leq d^{2-\gamma}.$$

Por lo tanto si $\|\nu\| \geq d$ se tiene que $I(\nu) < 0$, entonces

$$\sup_{\{\nu \in H_1 : \|\nu\| \geq d\}} I(\nu) < 0.$$

De esta forma queda demostrado que I cumple (J_5).

Veamos ahora que I cumple (J_6). Sea $H_2 = E$, $codimH_2 = 0 < dimE^+$. Por el límite (5.14) se tiene que existe $\rho > 0$ tal que $F(t,x) \leq -(3/4)\lambda_l x^2$ (siendo λ_l el autovalor positivo más grande de $(P+Q)$) para todo $|\ x\ | \leq \rho$ y $t \in \mathbb{Z}[1,T]$. Entonces, si tomamos $u \in E$ con $\|u\| \leq \rho$, se tiene que $|\ u(t)\ | \leq \rho$ para todo $t \in \mathbb{Z}[1,T]$, entonces tenemos:

$$I(u) \geq -\frac{1}{2}\lambda_l\|u\|^2 + \frac{3}{4}\lambda_l\|u\|^2 = \frac{1}{4}\lambda_l\|u\|^2,$$

lo cual implica que:

$$\inf_{\{u\in H_2:\|u\|=\rho\}} I(u) \geq \frac{1}{4}\lambda_l\|\rho\|^2 > 0.$$

De esta forma queda probado que I cumple (J_6). Y entonces por el Teorema (2.4.6) existen $dimH_1 - codimH_2 = n$ pares de puntos críticos de I no nulos, pues $I(0) = 0$ y en la desigualdad anterior se ve que I toma valores positivos. Esto equivale a probar que la ecuación (5.1) tiene al menos n pares de soluciones periódicas de período T no triviales.

□

5.4 Existencia de Soluciones Periódicas, cuando f está acotada

Vamos a analizar primero el caso en que $P+Q$ es una matriz inversible, que es el resultado más sencillo de probar.

Teorema 5.4.1. *Supongamos que f, P, y Q satisfacen las siguientes condiciones:*
(A_3) f es acotada, es decir, que existe $M_0 > 0$ tal que $|\ f(t,x)\ | \leq M_0$ para todo $(t,x) \in \mathbb{Z}[0,T] \times \mathbb{R}$;
(A_4) La matriz $(P+Q)$ es inversible.

Entonces la ecuación (5.1) *posee al menos una solución no trivial T-periódica.*

Demostración. Como $I(u) = -\frac{1}{2}\langle(P+Q)u,u\rangle - \sum_{t=1}^{T} F(t,u(t))$, entonces se tiene que

$$\nabla I((u(1),\cdots,u(T))) = -(P+Q)(u(1),\cdots,u(T))^t - (f(1,u(1)),\cdots,f(T,u(T)))^t,$$

es decir que $\nabla I(u) = -(P+Q)u - f(\cdot,u)$.

Como vimos que hallar soluciones T-periódicas de la ecuación (5.1) equivale a hallar puntos críticos de I, hacemos $\nabla I(u) = 0$, por lo tanto obtenemos lo siguiente:

$$(P+Q)u = -f(\cdot,u)$$

y como $P+Q$ es inversible, podemos escribir:

$$u = -(P+Q)^{-1} f(\cdot, u).$$

Por lo tanto nuestro problema se transforma en hallar al menos un punto fijo de la función $K : E \to E$ tal que $K(u) = -(P+Q)^{-1} f(\cdot, u(\cdot))$. Notemos que K es continua, pues f es continua. Queremos usar el Teorema (2.2.1) de Brouwer para ver que K tiene un punto fijo, para eso vamos a ver que la imagen de K está incluida en una bola. Notemos que K se puede acotar de la siguiente forma:

$$\|K(u)\| \leq \|(P+Q)^{-1}\| \, \|f(\cdot, u)\|.$$

Y como f es acotada:

$$\|K(u)\| \leq \|(P+Q)^{-1}\| \sqrt{T} M_0 = C > 0.$$

Por lo tanto, $\|K(u)\| \leq C \ \forall u \in E$. Entonces, $K : \overline{B}_C \to \overline{B}_C$ tal que $K(u) = -(P+Q)^{-1} f(\cdot, u(\cdot))$ tiene un punto fijo por el Teorema de Brouwer. Por lo tanto queda probado que la ecuación (5.1) tiene al menos una solución periódica de período T.

□

En el siguiente Teorema, vamos a relajar las hipótesis sobre la matriz $P+Q$.

Teorema 5.4.2. *Supongamos que f, P, y Q satisfacen las siguientes condiciones:*
(A_3) definida en el Teorema anterior;
(A_5) La matriz $(P+Q)$ es singular y por lo menos uno de sus autovalores es positivo;
(A_6) $F(t,x) \to -\infty$ uniformemente para todo $t \in \mathbb{Z}$ si $\|x\| \to \infty$, $x \in E^0$.
Entonces, la ecuación (5.1) tiene por lo menos una solución T-periódica

Demostración. Veamos que I satisface la condición de Palais-Smale. Sea $\{x^{(k)}\}$ una sucesión en E tal que $\mid I(x^{(k)}) \mid \leq M_2$ con $M_2 > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\|\nabla I(x^{(k)})\| \to 0$ si $k \to \infty$, entonces existe k suficientemente grande tal que $\|\nabla I(x^{(k)})\| < 1$, entonces por la desigualdad de Cauchy Schwarz se cumple:

$$\mid \langle \nabla I(x^{(k)}), x \rangle \mid \leq \|x\|.$$

Sea $x^{(k)} = y^{(k)} + w^{(k)}$, donde $y^{(k)} = u^{(k)} + v^{(k)} \in E^+ \oplus E^-$ y $w^{(k)} \in E^0$. Como $I(x) = -\dfrac{1}{2}\langle (P+Q)x, x\rangle - \sum_{t=1}^{T} F(t, x(t))$, entonces:

$$\langle \nabla I(x^{(k)}), x \rangle = -\langle (P+Q)x^{(k)}, x \rangle - \sum_{t=1}^{T} f(t, x^{(k)}(t)) x(t), \ \ \forall x \in E,$$

por lo tanto para un k suficientemente grande:

$$\mid \langle (P+Q)x^{(k)}, u^{(k)} \rangle \mid \leq \|u^{(k)}\| + \sum_{t=1}^{T} \mid f(t, x^{(k)}(t)) u^{(k)}(t) \mid$$

y como f es acotada y $\sum_{j=1}^{T} \mid u_j \mid = \langle u, (1, \cdots, 1) \rangle \leq \|u\| \|(1, \cdots, 1)\| = \sqrt{T}\|u\|$ se tiene que:

$$\mid \langle (P+Q)x^{(k)}, u^{(k)} \rangle \mid \leq M_0 \sum_{t=1}^{T} \mid u^{(k)}(t) \mid + \|u^{(k)}\| \leq \|u^{(k)}\|(M_0\sqrt{T}+1).$$

Por otro lado, como $\langle x^{(k)}, u^{(k)} \rangle = \langle y^{(k)}, u^{(k)} \rangle + \langle w^{(k)}, u^{(k)} \rangle = \langle u^{(k)}, u^{(k)} \rangle$, pues $E = E^+ \oplus E^- \oplus E^0$, y λ_1 es el autovalor positivo más pequeño de $P+Q$ se tiene que

$$\mid \langle (P+Q)x^{(k)}, u^{(k)} \rangle \mid = \mid \langle (P+Q)u^{(k)}, u^{(k)} \rangle \mid \geq \lambda_1 \|u^{(k)}\|^2.$$

Entonces probamos que:

$$\lambda_1 \|u^{(k)}\|^2 \leq (M_0\sqrt{T}+1)\|u^{(k)}\|,$$

es decir que $\{u^{(k)}\}$ está acotada. Análogamente se puede probar que $\{v^{(k)}\}$ está acotada.

Ahora veamos que $\{w^{(k)}\}$ está acotada. De hecho:

$$I(x^{(k)}) = -\frac{1}{2}\langle (P+Q)x^{(k)}, x^{(k)} \rangle - \sum_{t=1}^{T} F(t, x^{(k)}(t))$$

$$= -\frac{1}{2}\langle (P+Q)y^{(k)}, y^{(k)} \rangle - \sum_{t=1}^{T} F(t, w^{(k)}(t)) - \sum_{t=1}^{T} [F(t, x^{(k)}(t)) - F(t, w^{(k)}(t))],$$

entonces:

$$\mid \sum_{t=1}^{T} F(t, w^{(k)}(t)) \mid \leq \mid I(x^{(k)}) \mid + \frac{1}{2} \mid \langle (P+Q)y^{(k)}, y^{(k)} \rangle \mid + \sum_{t=1}^{T} \mid F(t, x^{(k)}(t)) - F(t, w^{(k)}(t)) \mid,$$

como λ_l y μ_k son los autovalores más grandes en módulo se tiene que:

$$\mid \sum_{t=1}^{T} F(t, w^{(k)}(t)) \mid \leq M_2 + \frac{1}{2}(\lambda_l + \mu_k)\|y^{(k)}\|^2 + \sum_{t=1}^{T} \mid F(t, x^{(k)}(t)) - F(t, w^{(k)}(t)) \mid,$$

aplicando el Teorema de Valor Medio de Lagrange a F se obtiene:

$$\mid \sum_{t=1}^{T} F(t, w^{(k)}(t)) \mid \leq M_2 + \frac{1}{2}(\lambda_l + \mu_k)\|y^{(k)}\|^2 + \sum_{t=1}^{T} \mid f(t, w^{(k)}(t) + \theta y^{(k)}(t)) \mid \mid y^{(k)}(t) \mid,$$

con $\theta \in [0, 1]$. Como f es acotada podemos escribir:

$$\mid \sum_{t=1}^{T} F(t, w^{(k)}(t)) \mid \leq M_2 + \frac{1}{2}(\lambda_l + \mu_k)\|y^{(k)}\|^2 + M_0\sqrt{T}\|y^{(k)}\|.$$

Esto implica que $\{\sum_{t=1}^{T} F(t, w^{(k)}(t))\}$ está acotada, pues ya probamos que $\{y^{(k)}\}$ es acotada. Veamos que esto implica que $\{w^{(k)}\}$ está acotada. Supongamos que no, entonces podemos asumir que $\|w^{(k)}\| \to \infty$ cuando $k \to \infty$, entonces por (A_5) se tiene que

$$| \sum_{t=1}^{T} F(t, w^k(t)) | \to \infty \ \ si \ \ k \to \infty,$$

lo cual contradice el hecho de que $\{\sum_{t=1}^{T} F(t, w^{(k)}(t))\}$ está acotada.

Entonces hemos probado que $\{x^{(k)}\}$ es una sucesión acotada. Como E es un espacio de dimensión finita, existe una subsucesión de $\{x^{(k)}\}$ convergente en E. Entonces I satisface la condición de Palais-Smale.

Ahora veamos que las hipótesis (J_3) y (J_4) del Teorema (2.4.5) de Punto Silla se cumplen.

Llamemos $H_1 = E^+$ y $H_2 = E^- \oplus E^0$. Para todo $x = u + w \in H_2$, con $u \in E^-$ y $w \in E^0$, tenemos que

$$I(x) = -\frac{1}{2}\langle (P+Q)x, x\rangle - \sum_{t=1}^{T} F(t, x(t))$$

$$= -\frac{1}{2}\langle (P+Q)u, u\rangle - \sum_{t=1}^{T}[F(t, x(t)) - F(t, w(t))] - \sum_{t=1}^{T} F(t, w(t)),$$

aplicando el Teorema de Valor Medio de Lagrange a F con $\theta \in [0,1]$ obtenemos

$$I(x) \geq \frac{1}{2}\mu_1\|u\|^2 - \sum_{t=1}^{T} f(t, w(t) + \theta u(t))u(t) - \sum_{t=1}^{T} F(t, w(t)),$$

como f está acotada podemos escribir:

$$I(x) \geq \frac{1}{2}\mu_1\|u\|^2 - M_0 \sum_{t=1}^{T} | \ u(t) \ | - \sum_{t=1}^{T} F(t, w(t)).$$

Y finalmente como $\|u\|_1 \leq T\|u\|_2$ tenemos que

$$I(x) \geq \frac{1}{2}\mu_1\|u\|^2 - M_0 T\|u\| - \sum_{t=1}^{T} F(t, w(t)).$$

Por (A_6), $F(t,x)$ está acotada por arriba si $(t,x) \in \mathbb{Z} \times E^0$, esto es $F(t,x) \leq M_3$ para todo $(t,x) \in \mathbb{Z} \times E^0$ para alguna constante positiva M_3. Entonces tenemos que:

$$I(x) \geq \frac{1}{2}\mu_1\|u\|^2 - M_0 T\|u\| - M_3 T$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\mu_1(\|u\| - \frac{M_0}{\mu_1}T)^2}_{\geq 0} - \frac{M_0^2T^2}{2\mu_1} - M_3T$$

$$\geq -T(M_3 + \frac{M_0^2}{2\mu_1}),$$

lo cual implica que

$$I(x) \geq w \quad \forall x \in H_2 = E^- \oplus E^0,$$

con $w = -T(M_3 + (M_0^2/2\mu_1))$.
De esta forma queda probada la hipótesis (J_4) del Teorema (2.4.5) de Punto Silla, tomando $e = 0$.

Veamos ahora que se cumple (J_3). Para todo $\nu \in H_1 = E^+$ y como $| F(t,x) | \leq M_0 | x |$ dado que f está acotada, se tiene que:

$$I(\nu) = -\frac{1}{2}\langle (P+Q)\nu, \nu\rangle - \sum_{t=1}^{T} F(t,\nu(t)) \leq -\frac{1}{2}\lambda_1\|\nu\|^2 + \sum_{t=1}^{T}(M_0 \mid \nu(t) \mid).$$

Y como $\|u\|_1 \leq T\|u\|_2$ tenemos que:

$$I(\nu) \leq -\frac{1}{2}\lambda_1\|\nu\|^2 + M_0T\|\nu\|,$$

lo cual implica que $I(\nu) \to -\infty$ si $\|\nu\| \to \infty$.

Sea $\sigma = w - 1$, entonces existe $\rho > 0$ suficientemente grande tal que $I(\nu) \leq \sigma$ para todo $\nu \in H_1$ con $\|\nu\| = \rho$. Entonces queda probado que se cumple (J_3).

Entonces por el Teorema (2.4.5) de Punto Silla, I tiene un punto crítico. Por lo tanto queda probado que la ecuación (5.1) tiene al menos una solución periódica de período T.

□

Notemos que una ecuación que cumple las hipótesis del Teorema anterior, podría tener como única solución la trivial, dado que el Teorema no afirma la existencia de una solución periódica no trivial.

Ejemplo 5.4.3.

$$\triangle^2 u(t-1) = p(t) - arctg(u(t)), \tag{5.15}$$

siendo p una función T-periódica tal que $\|p\|_\infty < \dfrac{\pi}{2}$. Escribiendo el funcional asociado a esta ecuación como lo hacemos en (5.10), tenemos que la matriz Q es nula pues $q = 0$ y como $p = 1$, obtenemos:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $(P + Q) = P$ es singular. Esto se debe a que:

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir que 0 es autovalor y por lo tanto la matriz no es inversible.

Veamos que P es semidefinida positiva,

$$x^t P x = 2\sum_{i=1}^{T} x(i)^2 - 2\sum_{i=1}^{T-1} x(i)x(i+1) - 2x(1)x(T)$$

Reagrupando convenientemente obtenemos:

$$x^t P x = \sum_{i=1}^{T-1}(x(i) - x(i+1))^2 + (x(1) - x(T))^2 \geq 0.$$

De esta manera probamos que P es semidefinida positiva, es decir que no tiene autovalores negativos, y como no es la matriz nula tiene algún autovalor positivo. Por lo tanto se cumple (A_5).

Como $f(t, u) = p(t) - arctg(u(t))$ y la norma infinito de p es menor a $\pi/2$, se tiene que $\mid f(t, u) \mid \leq (\pi/2)$. Entonces se cumple (A_3).

Veamos que se cumple (A_6):

$$\int p - arctg(u)du = (p - arctg(u))u + \frac{1}{2}log(1 + u^2) \to -\infty, \quad si\ u \to \infty,$$

dado que si $u >> 0$ o $u << 0$, entonces $arctg(u) \sim \pi/2$.

Por lo tanto se cumplen las hipótesis del Teorema anterior. Es decir que la ecuación tiene una solución T-periódica.

En el caso de que p sea la función nula, veamos que $u \equiv 0$ es la única solución que tiene la ecuación. Supongamos que u es solución, entonces $\nabla I(u) = 0$, entonces

$$0 = \langle \nabla I(u), u \rangle = -\langle Pu, u \rangle - \sum arctg(u)u$$

Esto es equivalente a decir que si $u \neq 0$ entonces,

$$\underbrace{\sum arctg(u)u}_{>0} = -\underbrace{\langle Pu, u \rangle}_{\geq 0}$$

lo cual es un absurdo.

5.5 Soluciones periódicas de una EDO autoadjunta de segundo orden, con f acotada

Para terminar vamos a comparar la ecuación en diferencias autoadjunta con una ecuación diferencial ordinaria autoadjunta.

Notemos que la ecuación (5.1), se puede pensar como la discretización de la siguiente ecuación diferencial autoadjunta:

$$(P(x)z'(x))' + Q(x)z(x) = g(x, z(x)) \tag{5.16}$$

con $x \in [c, d]$. Esto se debe a que podemos aproximar la derivada y discretizar la varibale x. Primero aproximamos la derivada de la siguiente manera:

$$u'(x) \simeq \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad o \quad u'(x) \simeq \frac{u(x) - u(x-h)}{h},$$

es decir, usando una diferencia progresiva o regresiva respectivamente, con h suficientemente chico. Podemos tomar $h = (d-c)/n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Por lo tanto reemplzando en la ecuación diferencial obtenemos:

$$(P(x)z'(x))' \simeq \frac{1}{h}[(\frac{P(x+h)(z(x+h) - z(x))}{h} - \frac{P(x)(z(x) - z(x-h))}{h}],$$

entonces, agrupando convenientemente obtenemos:

$$(P(x)z'(x))' \simeq \frac{1}{h^2}[P(x+h)z(x+h) - (P(x+h) + P(x))z(x) + P(x)z(x-h)].$$

Ahora vamos a discretizar x de forma que $x = c + th$, siendo t una variable discreta tal que $0 \leq t \leq n$. Entonces obtenemos:

$$P(c+h(t+1))z(c+h(t+1)) - [P(c+h(t+1)) + P(c+th)]z(c+th) + P(c+th)z(c+h(t-1)) +$$

$$+h^2Q(c+th)z(c+th) \simeq h^2g(c+th, z(c+th)).$$

Si llamamos $y(t) = z(c+th)$ con $1 \leq t \leq n$, $p(t) = P(c+th)$ con $0 \leq t \leq n-1$; y $q(t) = h^2Q(c+th)$ y $f(t, y(t)) = h^2g(c+th, z(c+th))$ con $0 \leq t \leq n$, entonces obtenemos:

$$p(t+1)y(t+1) - (p(t+1)+p(t))y(t) + p(t)y(t-1) + q(t)y(t) \simeq f(t, y(t)).$$

Finalmente podemos escribir:

$$\triangle(p(t)\triangle y(t-1)) + q(t)y(t) \simeq f(t, y(t))$$

Veamos que se puede hacer un planteo variacional análogo al que hicimos para el problema discreto.

5.5.1 Planteo variacional

Queremos mostrar que hallar una solución periódica de (5.16) es equivalente a encontrar un punto crítico de cierto funcional. Para ello definimos el siguiente problema continuo:

$$(pu')' + qu = f(t, u(t)) \tag{5.17}$$

siendo $p, q \in C^1(\mathbb{R})$, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua , y

$$p(t+T) = p(t), \quad q(t+T) = q(t), \quad f(t+T, y) = f(t, y) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Notemos que si $u \in C^2(\mathbb{R})$, T-periódica es solución clásica de (5.17), entonces se cumple:

$$\int_0^T ((pu')' + qu)\varphi = \int_0^T f\varphi, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T).$$

Aplicando integración por partes al miembro izquierdo, como $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$, se obtiene:

$$\int_0^T -pu'\varphi' + qu\varphi = \int_0^T f\varphi.$$

Por lo tanto, tiene sentido definir, que $u \in H(0, T) = H_0^1(0, T) \oplus \mathbb{R}$ es solución débil de (5.17) si se cumple:

$$\int_0^T -pu'\varphi' + qu\varphi = \int_0^T f\varphi, \qquad \forall \varphi \in H.$$

Vamos a buscar, primero soluciones débiles, a partir de los puntos críticos de un funcional. Para ello definimos el funcional $J : H(0, T) \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$J(u) = \int_0^T [\frac{qu^2 - pu'^2}{2} - F], \tag{5.18}$$

siendo $H(0,T) = H_0^1(0,T) \oplus \mathbb{R}$ un espacio de Hilbert.

Notemos que $J \in C^1(H, \mathbb{R})$, por lo tanto por el teorema (2.4.2), $J' : H(0,T) \to L(H(0,T), \mathbb{R})$ es:

$$J'(u)(\varphi) = \int_0^T qu\varphi - f\varphi - pu'\varphi'.$$

Por lo tanto $u \in H$ es punto crítico de J si $J'(u)(\varphi) = 0 \ \forall \varphi \in H(0,T)$, es decir que u es punto crítico si cumple lo siguiente:

$$\int_0^T qu\varphi - f\varphi = \int_0^T pu'\varphi'. \tag{5.19}$$

Notemos que se desprenden las siguientes propiedades de la última condición:

1. Como la relación anterior se cumple para todo $\varphi \in H(0,T)$, en particular se cumple para $\varphi = 1$, por lo tanto se tiene que:

$$\int_0^T qu - f = 0. \tag{5.20}$$

2. Sea $\psi \in C_0^\infty(0,T)$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces $\psi + r \in H(0,T)$, entonces:

$$\int_0^T (qu\psi - f\psi) + \underbrace{\int_0^T (qur - fr)}_{=0} = \int_0^T pu'\psi',$$

por lo tanto

$$\int_0^T (qu\psi - f\psi) = \int_0^T pu'\psi', \qquad \forall\, \psi \in C_0^\infty(0,T), \tag{5.21}$$

entonces pu' tiene derivada débil y es $f - qu$ que es una función en $L^2[0,T]$. Por lo tanto $pu' \in H^1(0,T)$ y como $p \in C^1$ y $p > 0$, se tiene que $u' \in H^1(0,T)$, es decir que $u \in H^2(0,T)$.

Como la derivada débil de pu' existe podemos reescribir (5.19) como

$$\int_0^T qu\varphi - f\varphi + (pu')'\varphi = 0, \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Y como $C_0^\infty(0,T) \oplus \mathbb{R}$ es denso en H y por (5.20) se tiene que

$$\int_0^T qu\varphi - f\varphi + (pu')'\varphi = 0, \ \ \forall\, \varphi \in H(0,T),$$

entonces u es solución débil de (5.17) y como $u \in H^2(0,T)$ podemos decir que es solución.

Por otro lado, por (5.20), se tiene que

$$\int_0^T (pu')' = 0,$$

entonces $(pu')(0) = (pu')(T)$ y como $p(0) = p(T)$, entonces $u'(0) = u'(T)$.

Extendiendo u de forma periódica con período T, obtenemos una solución en $\mathbb{R}$ de (5.17).

5.5.2 Existencia de solución con f acotada

Lo que vamos a ver ahora es un Teorema análogo al Teorema(5.4.1), en el caso continuo. Le vamos a poner condiciones a p y q, para que el operador $Lu = (pu')' + qu$ sea inversible en espacios apropiados.

Teorema 5.5.1. *Sean $p \in C^1[0,T]$, $q \in C[0,T]$, $p > 0$, $q \leq 0$ y q no nula. Entonces la ecuación (5.17) tiene al menos una solución.*

Demostración. Sea $D = \{u \in H^2[0,T] \cap H[0,T] : u'(0) = u'(T)\}$ subconjunto denso de $H[0,T]$, considerando a D con la norma de $H^2[0,T]$ y sea el operador lineal

$$L : D \to L^2[0,T] \text{ tal que } Lu = (pu')' + qu.$$

Veamos que el operador es continuo:

$$\|Lu\|_{L^2[0,T]} \leq \|p'u' + pu''\|_{L^2[0,T]} + \|qu\|_{L^2[0,T]}$$

Como $p \in C^1[0,T]$, $q \in C[0,T]$, existen C_1, C_2 y C_3 constantes tal que

$$\|Lu\|_{L^2[0,T]} \leq C_1\|u'\|_{L^2[0,T]} + C_2\|u''\|_{L^2[0,T]} + C_3\|u\|_{L^2[0,T]}$$

Por lo tanto, existe una constante M tal que $\|Lu\|_{L^2[0,T]} \leq M\|u\|_{H^2}$.

Veamos que el operador es inversible. Para ello, primero vamos a probar que es inyectivo, mediante la siguiente cuenta:

$$\int_0^T Luu = \int_0^T (pu')'u + \int_0^T qu^2$$

Aplicando el método de integración por partes a la primera integral, como $p(0) = p(T)$, y $u'(0) = u'(T)$, obtenemos que:

$$\int_0^T Luu = -\int_0^T \underbrace{p}_{>0}(u')^2 + \int_0^T \underbrace{q}_{\leq 0} u^2 \leq 0$$

Es decir que

$$\langle Lu, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u' \equiv 0 \text{ y } \int_0^T qu^2 = 0$$

Por lo tanto, como $u' \equiv 0$, entonces u es constante y como q no es la función nula, se tiene que $u \equiv 0$.
De esta forma concluimos que L es inyectivo.

Veamos que L es sobreyectivo.
Sea $\varphi \in L^2[0,T]$, veamos que existe $u \in D$ tal que

$$(pu')' + qu = \varphi. \tag{5.22}$$

Notemos que el espacio de soluciones de la ecuación homogénea asociada tiene dimensión 2, podemos decir que está generado por $\{u_1, u_2\}$. Propongo una solución particular por el método de variación de parámetros, es decir de la siguiente forma:

$$u(t) = \alpha(t)u_1(t) + \beta(t)u_2(t)$$

Reemplazando en la ecuación, y teniendo en cuenta que u_1 y u_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada, obtenemos luego de agrupar convenientemente:

$$\frac{p'}{p}(\alpha' u_1 + \beta' u_2) + (\alpha' u_1 + \beta' u_2)' + \alpha' u_1' + \beta' u_2' = \frac{\varphi}{p}$$

Por lo tanto, resolviendo el siguiente sistema, podemos encontrar α y β:

$$\begin{cases} \alpha' u_1 + \beta' u_2 = 0 \\ \alpha' u_1' + \beta' u_2' = \dfrac{\varphi}{p} \end{cases}$$

Notemos que el sistema anterior tiene solución, dado que el wronskiano de u_1, u_2 es distinto de cero, por lo tanto podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \frac{1}{W(u_1,u_2)} \begin{pmatrix} u_2' & -u_2 \\ -u_1' & u_1 \end{pmatrix} \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Como $(pW(u_1,u_2))' = (pu_2')'u_1 - (pu_1')'u_2 = -qu_2u_1 + qu_1u_2 = 0$, entonces $pW(u_1,u_2) = C$ siendo C constante. Por lo tanto obtenemos α y β de la siguiente manera, dado que u_1, u_2 y φ son localmente integrables por estar en $L^2[0,T]$ y p es continua.

$$\begin{cases} \alpha = C\int_0^t(-u_2\varphi) + a \\ \beta = C\int_0^t(u_1\varphi) + b \end{cases}$$

siendo a y b constantes.

Lo que nos falta ver es que existen a y b tal que $u(0) = u(T)$ y $u'(0) = u'(T)$. De plantear estas dos ecuaciones obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a(u_1(0)-u_1(T))+b(u_2(0)-u_2(T)) = -C\int_0^T(u_2\varphi)u_1(T)+C\int_0^T(u_1\varphi)u_2(T) \\ a(u_1'(0)-u_1'(T))+b(u_2'(0)-u_2'(T)) = -C\int_0^T(u_2\varphi)u_1'(T)+C\int_0^T(u_1\varphi)u_2'(T) \end{cases}$$

Veamos que

$$det\begin{pmatrix} u_1(0)-u_1(T) & u_2(0)-u_2(T) \\ u_1'(0)-u_1'(T) & u_2'(0)-u_2'(T) \end{pmatrix} \neq 0$$

Si definimos $h_1(t) = u_1(t) - u_1(t+T)$ y $h_2(t) = u_2(t) - u_2(t+T)$, basta ver que $W(h_1, h_2)(0) \neq 0$. Notemos que como p y q son funciones T periódicas entonces h_1 y h_2 son soluciones de $(pu')' + qu = 0$. Supongamos que $\{h_1, h_2\}$ es un conjunto linealmente dependiente, entonces existe una constante k tal que $h_2 = kh_1$, entonces

$$ku_1(t) - u_2(t) = ku_1(T+t) - u_2(T+t).$$

Por lo tanto $F(t) = ku_1(t) - u_2(t) \in D$ y es solución de $(pu')' + qu = 0$. Como vimos que L es inyectiva tenemos que $F \equiv 0$, entonces $u_2 = ku_1$, lo cual es un absurdo. Entonces $\{h_1, h_2\}$ es linealmente independiente. Entonces $W(h_1, h_2)(0) \neq 0$.
Por lo tanto, logramos probar que L es sobreyectivo.

En consecuencia, probamos que L es un operador inversible. Notemos también que el operador inverso es lineal.

Como $L : (D, \|\cdot\|_{H^2}) \to L^2[0,T]$ es continuo, lineal e inversible, por el Teorema (2.2.3) de la Aplicación Abierta, el operador inverso es continuo.
Por lo tanto, como $L^{-1} : L^2[0,T] \to D \subset H^2$ es lineal, tenemos que

$$\|L^{-1}(\varphi)\|_{H^2} \leq c\|\varphi\|_{L^2[0,T]} \tag{5.23}$$

Veamos ahora que L^{-1} es continuo de $L^2[0,T]$ en $L^2[0,T]$. Por un lado la inclusión $H^2 \hookrightarrow H^1$ es continua pues $\|u\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^2}$ y la inclusión $C \hookrightarrow L^2[0,T]$ es continua pues $\|u\|_\infty \leq T\|u\|_{H^1}$. Con lo cual basta ver que la inclusión $H^1 \hookrightarrow C$ es continua. Sea $u \in \overline{B_R(0)} \cap H^1$, entonces u es absolutamente continua, por lo tanto podemos escribir:

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'$$

Eligiendo $t_0 \in [0,T]$ tal que $\mid u(t_0) \mid$ es mínimo, entonces

$$\int_0^T \mid u(t_0) \mid^2 \leq \int_0^T \mid u(t) \mid^2 \Rightarrow T \mid u(t_0) \mid^2 \leq \|u\|^2_{L^2[0,T]} \Rightarrow \mid u(t_0) \mid \leq \frac{1}{\sqrt{T}}\|u\|_{L^2[0,T]}$$

Por lo tanto obtenemos

$$\mid u(t) \mid \leq \frac{1}{\sqrt{T}}\|u\|_{L^2[0,T]} + \int_{t_0}^t \mid u' \mid \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{T}}\|u\|_{L^2[0,T]} + \sqrt{T}\|u'\|_{L^2[0,T]} \leq C\|u\|_{H^1}$$

Por lo tanto, demostramos que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{H^1}$.
De esta forma $L^{-1} : L^2[0,T] \to D \subset H^2 \subset H^1 \subset C \subset L^2[0,T]$ es continua.

Queremos ver que $L^{-1} : L^2[0,T] \to L^2[0,T]$, es compacto. Basta ver que la inclusión $H^1 \hookrightarrow C$ es compacto, pues de esta forma L^{-1} queda escito como composición de operadores continuos y compactos, entonces es compacto.
Veamos entonces que la inclusión $H^1 \hookrightarrow C$ es compacta. Para ello, vamos a usar el Teorema (2.2.4) de Arzela Ascoli. Dado un conjunto de funciones $\{u \in \overline{B_R(0)} : \|u\|_{H^1} \leq R\}$, como vimos que $\|u\|_\infty \leq c\|u\|_{H^1}$, tenemos que la familia es equiacotada y como

$$| u(t_1) - u(t_0) |=| \int_{t_2}^{t_1} u' |\leq| (t_1 - t_2) | \sqrt{T}\|u'\|_{L^2[0,T]} \leq| (t_1 - t_2) | \sqrt{T}\|u\|_{H^1}$$

tenemos que la familia es equicontinua. Por lo tanto por el Teorema de Arzela Ascoli $H^1 \hookrightarrow C$ es compacta.

Definimos $T : L^2[0,T] \to L^2[0,T]$ como $T(u) = L^{-1}(f(t,u))$, es decir que T es la composición de L^{-1} con el operador de Nemytskii $u \to f(\cdot, u)$. Veamos que el operador de Nemytskii es continuo.
Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^2[0,T]$ tal que $u_n \to u$ en $L^2[0,T]$. Entonces existe una subsucesión v_n de u_n que tiende en casi todo punto a u y existe una función $g \in L^2[0,T]$ tal que $| u |,| v_n |\leq g$ en c.t.p. Entonces como f está acotada, existe una constante $M > 0$ tal que

$$| f(x, v_n(x)) - f(x, u(x)) |\leq C,$$

por lo tanto por el teorema de convergencia mayorada $f(\cdot, v_n) \to f(\cdot, u)$ en $L^2[0,T]$.

Por lo tanto, como L^{-1} es compacto, y el operador de Nemytskii es continuo, se tiene que T es compacto.

Notemos que hallar un punto fijo de T equivale a resolver la ecuación (5.17) , así que ese es nuestro objetivo. Si $u \in \overline{B_R(0)}$, como f está acotada, obtenemos

$$\|Tu\|_{L^2[0,T]} = \|L^{-1}(f(t,u(t)))\|_{L^2[0,T]} \leq C\|f(t,u(t))\|_{L^2[0,T]} \leq M$$

es decir que la imagen de T queda contenida en $\overline{B_R(0)}$.
Por lo tanto como T es compacto, restringido a la bola cerrada sigue siendo compacto, entonces por el Teorema (2.2.2) de Schauder de punto fijo, existe $u \in \overline{B_R(0)}$ tal que $u = L^{-1}(f(t,u(t)))$, es decir que la ecuacion (5.17) tiene solución. $\square$

Bibliografía

[Zhou, 2003] Zhou, Zhan. *Periodic Orbits on Discrete Dynamical Systems* Computer and Mathematics with applications, 2003. 3, 15

[Li y Yang, 2006] Li, Hiumin and Yang, Xiaosong (2006) *A Note on Discrete-Time Dynamical Systems under Periodic Perturbation* 3, 29

[Li y Yorke, 1975] Li, T. Y. and Yorke, A. (1975) *Period three implies chaos* Amer. Math. Monthly 82, 985-992, (1975) 25

[Li y Zhang, 2009] Li, Xiong and Zhang, Jing. (2009) *Periodic solutions of some second order difference equations* 3, 33

[Kelley y Peterson, 2001] Kelley, Walter; Peterson, Allan (2001) *Difference Equations. An Introduction with Applications. Second Edition.* Academic Press. 2, 5

[Amster, 2009] Amster, Pablo (2009) *Métodos Topológicos en el Análisis no Lineal.* Publicaciones matemáticas, IMPA. 8, 9

[Rabinowitz, 1986] Rabinowitz, P.H., (1986) *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, en CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol. 65, American Mathematical Society, Providence, RI. 2, 14

[Cañada, 2011] Cañada Villar, Antonio (2011) *Apuntes de Métodos Variacionales.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada. 2

[Smale, 2004] Hirsch, M.; Smale, S. and Devaney, R. *Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos*. Second Edition. ElSevier, Academic Press. 2, 5

[Perko, 2000] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Third Edition. Texts in Applied Mathematics 7. Springer. 2

[Teschl, 2011] Teschl, G. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems.* American Mathematical Society Providence, Rhode Island. 2, 5

[Brezis, 1984] Brezis, H. *Análisis Funcional: teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, 1984. 2, 7

[Evans, 1991] Evans, Lawrence *Partial Differential Equations*. Berkley, 1991. 2, 9