UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Un criterio de invarianza homotópica y la conjetura de Rosenberg

Emanuel Darío Rodríguez Cirone

Director: Guillermo Cortiñas

Marzo de 2011

Índice general

Introducción

Dado un anillo A, $K_0(A)$ es el grupo de Grothendieck del monoide $\operatorname{Proj} A$ de clases de isomorfismo de A-módulos proyectivos finitamente generados. Para $j < 0$ se define inductivamente $K_j(A)$ como cierto sumando directo natural del grupo abeliano $K_{j+1}(A\left[t, t^{-1}\right])$. Cuando X es un espacio topológico compacto, hay una equivalencia entre fibrados vectoriales localmente triviales sobre X y $C(X)$-módulos proyectivos finitamente generados, donde $C(X)$ es el álgebra de funciones continuas de X en $\mathbb{C}$. Usando esta equivalencia puede probarse que $K_0(C(-))$ es invariante por homotopía [Kar78, Ch. II, Theorem 1.25]. La conjetura de Rosenberg predice que $K_j(C(-))$ es invariante por homotopía para $j < 0$. Esto fue probado por Cortiñas y Thom en [CnT]. Un resultado previo de Friedlander y Walker afirma que $K_j(\Delta^{\mathrm{n}}) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $j < 0$ [FW01, Theorem 5.1].

En esta tesis estudiamos una de las demostraciones de la conjetura de Rosenberg dadas en [CnT]. Esta consiste en verificar que la K-teoría negativa cumple las hipótesis de un criterio general de invarianza homotópica. El Capítulo 1 está dedicado a la demostración de este criterio, y combina ideas que aparecen en [CnT] y en [FW01]. Aquí se usa la técnica de *aproximación algebraica* que consiste en pensar a la $\mathbb{C}$-álgebra $C(X)$ como colímite filtrante de anillos de coordenadas de variedades afines. En el Capítulo 2 definimos los grupos K_j para $j \leq 1$ y demostramos la conjetura de Rosenberg. En el Apéndice A damos algunas definiciones básicas de teoría de categorías y fijamos notación usada en el resto de la tesis. En el Apéndice B definimos variedad algebraica y enunciamos el truco de Jouanoulou y el teorema de desingularización de Hironaka. En el Apéndice C definimos complejo simplicial y subdivisión baricéntrica. En el Apéndice D definimos conjunto semialgebraico, función semialgebraica, y enunciamos la existencia de triangulaciones semialgebraicas para conjuntos semialgebraicos compactos.

Capítulo 1

Un criterio de invarianza homotópica

1.1. Enunciado y esquema de la demostración

Las definiciones de categoría y funtor pueden encontrarse en el Apéndice A. Denotamos $\mathfrak{Comp}$ a la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos compactos Hausdorff y cuyos morfismos son las funciones continuas. Dados $X, Y \in \operatorname{obj} \mathfrak{Comp}$ y $f_0, f_1 : X \to Y$ funciones continuas, decimos que f_0 y f_1 son *homotópicas* si existe una función continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(-, i) = f_i$ para $i = 0, 1$. Un funtor contravariante $G : \mathfrak{Comp} \to \mathfrak{Ab}$ es *invariante por homotopía* si manda funciones homotópicas en morfismos iguales.

Denotamos $\mathfrak{Comm}$ a la categoría cuyos objetos son las $\mathbb{C}$-álgebras conmutativas (no necesariamente unitarias) y cuyos morfismos son los morfismos de $\mathbb{C}$-álgebras. Para $X \in \operatorname{obj} \mathfrak{Comp}$ sea $C(X)$ el álgebra de funciones continuas de X en $\mathbb{C}$. Este capítulo está dedicado a demostrar el siguiente criterio de invarianza homotópica.

Teorema 1.1.1. *Sea $F : \mathfrak{Comm} \to \mathfrak{Ab}$ un funtor que verifica las siguientes condiciones.*

1. *F es exacto escindido en C^*-álgebras.*
2. *F conmuta con colímites filtrantes.*
3. *F se anula en los anillos de coordenadas de variedades afines suaves.*

Entonces el funtor contravariante

$$\mathfrak{Comp} \to \mathfrak{Ab}, \quad X \mapsto F(C(X))$$

es invariante por homotopía.

Los conceptos y definiciones involucrados en el teorema se explican a lo largo de este capítulo. Para la definición de funtor exacto escindido, ver la sección 1.4. La definición de colímite filtrante se encuentra en el Apéndice A. Las definiciones de variedad afín y anillo de coordenadas de una variedad afín pueden encontrarse en el Apéndice B.

A continuación presentamos un esquema de la demostración de 1.1.1. Sea $\mathfrak{Pol}$ la subcategoría plena de $\mathfrak{Comp}$ cuyos objetos son los poliedros (ver Apéndices A y C). En la sección 1.2 probamos que si F es un funtor en las hipótesis del teorema, la invarianza homotópica de $F(C(-))$ en $\mathfrak{Pol}$ implica la invarianza homotópica de $F(C(-))$ en $\mathfrak{Comp}$. De esta manera, para probar el teorema basta ver que $F(C(-))$ es invariante por homotopía en $\mathfrak{Pol}$. En las secciones 1.3 y 1.4 estudiamos a los funtores exactos escindidos. Si X es un poliedro, podemos usar la exactitud escindida para obtener información de $F(C(X))$ a partir de $F(C(\sigma_i))$ donde σ_i son los simples maximales de X. Con un razonamiento de este tipo, probamos que para que $F(C(-))$ sea invariante por homotopía en $\mathfrak{Pol}$ basta ver que $F(C(\Delta^{\mathrm{n}})) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En la sección 1.5 usamos la técnica de aproximación algebraica para escribir a $C(X)$ como colímite filtrante de anillos de coordenadas de variedades afines. Esto se necesita en la sección 1.6 para probar que $F(C(\Delta^{\mathrm{n}})) = 0$ para todo n y terminar la demostración del teorema 1.1.1.

1.2. Reducción al caso de poliedros

La definición de la coma categoría $(X \downarrow \mathfrak{Pol})$ puede encontrarse en el Apéndice A. Supongamos que $G : \mathfrak{Pol} \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor contravariante. Definimos un funtor contravariante $G^{\mathfrak{Pol}} : \mathfrak{Comp} \to \mathfrak{Ab}$,

$$G^{\mathfrak{Pol}}(X) := \operatorname*{colim}_{g \in (X \downarrow \mathfrak{Pol})} G(\operatorname{cod}(g)), \quad X \in \mathfrak{Comp}\,.$$

$G^{\mathfrak{Pol}}$ se llama *extensión de Kan a derecha* de G. El siguiente resultado puede encontrarse en [CS78].

Teorema 1.2.1 (Calder-Siegel)**.** *Sea $G : \mathfrak{Pol} \to \mathfrak{Ab}$ un funtor contravariante. Si G es invariante por homotopía entonces $G^{\mathfrak{Pol}}$ es invariante por homotopía.*

Para la demostración del teorema 1.1.1 nos interesan funtores contravariantes $G : \mathfrak{Comp} \to \mathfrak{Ab}$ de la forma $G(X) = F(C(X))$ con $F : \mathfrak{Comm} \to \mathfrak{Ab}$ un funtor que conmuta con colímites filtrantes. Queremos ver cómo se relacionan un tal G y la extensión de Kan a derecha de G restringido a $\mathfrak{Pol}$. Los siguientes resultados pueden encontrarse en [CnT, 7.1].

Sean $X \in \operatorname{obj} \mathfrak{Comp}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ el disco unitario, y $C(X, D)$ el conjunto de funciones continuas $X \to D$. Dada $f \in C(X)$, al ser X compacto, la imagen de f es acotada y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} f \in C(X, D)$. Entonces cualquier subálgebra finitamente generada de $C(X)$ está generada por un subconjunto finito $F \subseteq C(X, D)$. Llamamos $\mathcal{F}_X$ al conjunto de subconjuntos finitos de $C(X, D)$. Tenemos

$$C(X) = \operatorname*{colim}_{F \in \mathcal{F}_X} \mathbb{C}\langle F \rangle.$$

Dado $F \in \mathcal{F}_X$ llamamos $V_F \subseteq \mathbb{C}^F$ a la clausura Zariski del conjunto $\{(f(x))_{f \in F} : x \in X\}$ (ver Apéndice B). Como $P_F := V_F \cap D^F$ es un poliedro (por ser un conjunto semialgebraico compacto, ver Apéndice D) tenemos $g_F \in (X \downarrow \mathfrak{Pol})$, $g_F : X \to P_F$ dada por $x \mapsto (f(x))_{f \in F}$. Tomando funciones continuas a $\mathbb{C}$ en el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "g_F"'] & & V_F \\ & P_F \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

e identificando $\mathbb{C}\langle F \rangle \simeq \mathbb{C}\,[V_F] \hookrightarrow C(V_F)$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathfrak{Comm}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}\langle F \rangle \arrow[rr] \arrow[dr] & & C(X) \\ & C(P_F) \arrow[ur, "g_F^*"'] & \end{tikzcd}$$

Tomando colímite e identificando $\operatorname{colim}_{F \in \mathcal{F}_X} \mathbb{C}\langle F \rangle = C(X)$, el morfismo horizontal es la identidad de $C(X)$ y obtenemos una sección natural α_X del morfismo $\operatorname{colim}_{F \in \mathcal{F}_X} C(P_F) \longrightarrow C(X)$.

Teorema 1.2.2. *Sea $F : \mathfrak{Comm} \to \mathfrak{Ab}$ un funtor que verifica las siguientes condiciones.*

1. *F conmuta con colímites filtrantes.*
2. *El funtor $\mathfrak{Pol} \to \mathfrak{Ab}$, $D \mapsto F(C(D))$ es invariante por homotopía.*

Entonces el funtor

$$\mathfrak{Comp} \to \mathfrak{Ab}, \quad X \mapsto F(C(X))$$

es invariante por homotopía.

Demostración. Dado $X \in \mathfrak{Comp}$, el morfismo $F(\alpha_X)$ es una sección natural del morfismo

$$\operatorname*{colim}_{F \in \mathcal{F}_X} F(C(P_F)) = F\left(\operatorname*{colim}_{F \in \mathcal{F}_X} C(P_F) \right) \longrightarrow F(C(X)).$$

Por otra parte, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname*{colim}_{F\in\mathcal{F}_X} F(C(P_F)) \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[dr] & \operatorname*{colim}_{g\in(X\downarrow\mathfrak{Pol})} F(C(\operatorname{cod}(g))) \arrow[d, "\pi_X"] \\
 & F(C(X))
\end{tikzcd}$$

y el morfismo $\theta_X F(\alpha_X)$ es una sección natural de π_X. Llamemos $G : \mathfrak{Comp} \to \mathfrak{Ab}$ al funtor contravariante $X \mapsto F(C(X))$. Sea $G^{\mathfrak{Pol}} : \mathfrak{Comp} \to \mathfrak{Ab}$ la extensión de Kan a derecha del funtor G restringido a $\mathfrak{Pol}$. Por el diagrama anterior hay un isomorfismo natural

$$G^{\mathfrak{Pol}}(X) = G(X) \oplus H(X), \quad H(X) = \ker \pi_X.$$

Entonces $G^{\mathfrak{Pol}}$ es invariante por homotopía si y sólo si G y H lo son. En efecto, dados $f_0, f_1 : X \to Y$ morfismos homotópicos en $\mathfrak{Comp}$ tenemos

$$G^{\mathfrak{Pol}}(f_i) = \begin{pmatrix} G(f_i) & 0 \\ 0 & H(f_i) \end{pmatrix}$$

de donde $G^{\mathfrak{Pol}}(f_0) = G^{\mathfrak{Pol}}(f_1)$ si y sólo si $G(f_0) = G(f_1)$ y $H(f_0) = H(f_1)$. Basta entonces ver que $G^{\mathfrak{Pol}}$ es invariante por homotopía, pero ésto sigue de la hipótesis y del teorema 1.2.1. □

1.3. Funtores exactos escindidos I

A lo largo de esta sección G es un funtor contravariante $\mathfrak{C} \to \mathfrak{Ab}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{Comp}$ o $\mathfrak{Pol}$.

Observación 1.3.1. Dado $X \in \operatorname{obj}\mathfrak{C}$ llamemos i_0, i_1 a las inclusiones $X \to X \times [0,1]$ poniendo respectivamente 0 y 1 en la segunda coordenada. Para probar que G es invariante por homotopía basta ver que $G(i_0)$ es isomorfismo. En efecto, de ocurrir lo último, como la proyección $X \times [0,1] \to X$ es retracción tanto de i_0 como de i_1 sigue que $G(i_0) = G(i_1)$. Dadas $f, g : X \to Y$ y una homotopía H de f a g tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
X \times [0,1] \arrow[r, "H"] & Y \\
X \arrow[u, "i_0"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X \times [0,1] \arrow[r, "H"] & Y \\
X \arrow[u, "i_1"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Aplicando G obtenemos la igualdad buscada: $G(f) = G(i_0)G(H) = G(i_1)G(H) = G(g)$.

Sean $X, Y \in \operatorname{obj}\mathfrak{C}$. Una función continua $f : X \to Y$ es una *sección* si existe $g : Y \to X$ continua tal que $gf = 1_X$.

Definición 1.3.2. G se dice *exacto escindido* si dado un cuadrado cocartesiano

$$\begin{tikzcd}
X_{12} \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & X_1 \arrow[d] \\
X_2 \arrow[r] & X
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

con i_1 sección o i_2 sección, la sucesión

$$0 \longrightarrow G(X) \longrightarrow G(X_1) \oplus G(X_2) \xrightarrow{\Delta} G(X_{12}) \longrightarrow 0$$

$$\Delta(x_1, x_2) = i_1^*(x_1) - i_2^*(x_2)$$

es exacta.

Sea $X \in \operatorname{obj} \mathfrak{C}$. Decimos que X es *contráctil* si la función identidad $1_X : X \to X$ es homotópica a una función constante.

Proposición 1.3.3. *[CnT, Proposition 2.1.5] Si G es exacto escindido y se anula en X para todo $X \in \operatorname{obj} \mathfrak{C}$ contráctil, entonces G es invariante por homotopía.*

Demostración. Sea $X \in \operatorname{obj} \mathfrak{C}$. Como $i_0 : X \to X \times [0,1]$ es sección, $G(i_0)$ es retracción y entonces es suryectiva. Por la observación anterior basta ver que $G(i_0)$ es inyectiva. Consideremos el siguiente cuadrado cocartesiano.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_0"] \arrow[d] & X \times [0,1] \arrow[d] \\ * \arrow[r] & cX \end{tikzcd}$$

Como G es exacto escindido hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow G(cX) \longrightarrow G(*) \oplus G(X \times [0,1]) \longrightarrow G(X) \longrightarrow 0 \quad .$$

Como G se anula en los objetos contráctiles, $G(cX) = 0$, $G(*) = 0$ y el morfismo $G(i_0) : G(X \times [0,1]) \to G(X)$ es inyectivo. ☐

En el caso de un funtor $G : \mathfrak{Pol} \to \mathfrak{Ab}$ podemos decir todavía un poco más. El lema que sigue también va a ser útil más adelante.

Lema 1.3.4. *Sea $G : \mathfrak{Pol} \to \mathfrak{Ab}$ un funtor contravariante exacto escindido. Si E es un poliedro estrellado con simples maximales σ_i, el morfismo inducido por las inclusiones $\sigma_i \hookrightarrow E$,*

$$G(E) \to \bigoplus G(\sigma_i)$$

es inyectivo.

Demostración. Hacemos inducción en la cantidad de simples maximales de E. Si E tiene un único simple maximal σ, $E = \sigma$ y el resultado vale. Supongamos que el lema vale para poliedros que tienen a lo sumo r simples maximales, y sea E un poliedro estrellado con $r+1$ simples maximales. Como E es estrellado, E es el cono de algún subcomplejo K. Los simples maximales de E son los conos de los de K. Sea σ un simple maximal de K y sea L el subcomplejo de K generado por los restantes simples maximales. Tenemos un cuadrado cocartesiano

$$\begin{tikzcd} c(\sigma \cap L) \arrow[r] \arrow[d] & c\sigma \arrow[d] \\ cL \arrow[r] & cK \end{tikzcd}$$

en el que todos los morfismos son secciones por ser inclusiones de poliedros contráctiles (ver Apéndice C). Entonces

$$0 \longrightarrow G(E) \longrightarrow G(cL) \oplus G(c\sigma) \longrightarrow G(c(\sigma \cap L)) \longrightarrow 0$$

es exacta y en particular $G(E) \to G(c\sigma) \oplus G(cL)$ es inyectiva. Si σ_i son los simples maximales de L, $\iota : G(cL) \to \bigoplus G(c\sigma_i)$ es inyectiva por hipótesis inductiva. Como la suma directa de morfismos inyectivos es un morfismo inyectivo, la composición

$$G(E) \longrightarrow G(c\sigma) \oplus G(cL) \xrightarrow{1 \oplus \iota} G(c\sigma) \oplus \bigoplus G(c\sigma_i)$$

es inyectiva. ☐

Corolario 1.3.5. *Si $G : \mathfrak{Pol} \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor contravariante exacto escindido y $G(\Delta^{\mathrm{n}}) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces G es invariante por homotopía.*

Demostración. Por la proposición anterior basta ver que G se anula en los poliedros contráctiles. Si C es un poliedro contráctil, la identidad de C se factoriza por cC y alcanza con ver que $G(cC) = 0$. Como cC es estrellado, esto último es consecuencia del lema anterior y de la hipótesis. □

1.4. Funtores exactos escindidos II

A lo largo de esta sección F es un funtor $\mathfrak{Comm} \to \mathfrak{Ab}$.

Una *sucesión exacta escindida* de álgebras es una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \underset{r}{\overset{s}{\leftrightarrows}} C \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

con $rs = 1$. Dada $\mathfrak{C}$ una subcategoría de $\mathfrak{Comm}$, decimos que la sucesión (1.2) está *contenida* en $\mathfrak{C}$ si todos los objetos y morfismos que aparecen en (1.2) son objetos y morfismos de $\mathfrak{C}$.

Definición 1.4.1. El funtor F es *exacto* en la sucesión (1.2) si la sucesión

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

es exacta. Dada $\mathfrak{C}$ una subcategoría de $\mathfrak{Comm}$, decimos que F es *exacto escindido* en $\mathfrak{C}$ si F es exacto en todas las sucesiones exactas escindidas contenidas en $\mathfrak{C}$.

Proposición 1.4.2. *Sea $\mathfrak{C}$ una subcategoría de $\mathfrak{Comm}$ cerrada por cuadrados cartesianos. Es decir, $\mathfrak{C}$ es una subcategoría tal que si*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar{g}} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ C & \xrightarrow[g]{} & D \end{array} \tag{1.3}$$

es un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Comm}$ con f y g morfismos en $\mathfrak{C}$, entonces $A \in \operatorname{obj}\mathfrak{C}$, $\bar{f}$ y $\bar{g}$ son morfismos en $\mathfrak{C}$ y (1.3) *es un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{C}$. Supongamos que F es exacto escindido en $\mathfrak{C}$. Entonces dado un cuadrado cartesiano* (1.3) *con f y g morfismos en $\mathfrak{C}$ y con f retracción en $\mathfrak{C}$, la sucesión*

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \oplus F(C) \xrightarrow{\Delta} F(D) \longrightarrow 0 \tag{1.4}$$

$$\Delta(b, c) = f_*(b) - g_*(c)$$

es exacta.

Demostración. Sea s una sección de f. Por la propiedad universal del cuadrado cartesiano, existe una única $\bar{s} : C \to A$ tal que $\bar{f}\bar{s} = 1_C$ y $\bar{g}\bar{s} = sg$. Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker \bar{f} & \hookrightarrow & A & \xrightarrow{\bar{f}} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{g}} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker f & \hookrightarrow & B & \xrightarrow{f} & D & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{1.5}$$

con filas exactas escindidas en $\mathfrak{C}$. Además $\bar{g}$ induce un isomorfismo en la columna de la izquierda. En efecto, a través del isomorfismo

$$A \simeq \{(b, c) \in B \times C : f(b) = g(c)\}$$

$\bar{g}$ se identifica con la proyección π_B en la primera coordenada, $\bar{f}$ con la proyección π_C en la segunda, y es claro que π_B induce un isomorfismo

$$\ker \pi_C = \{(b,0) : f(b) = 0\} \simeq \ker f.$$

Aplicando F en (1.5) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(\ker \bar{f}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\simeq"] & F(A) \arrow[r, "\bar{f}_*"] \arrow[d, "\bar{g}_*"] & F(C) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(\ker f) \arrow[r] & F(B) \arrow[r, "f_*"] & F(D) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{1.6}$$

con filas exactas de grupos abelianos.

Consideramos

$$Y : F(A) \xrightarrow{\bar{f}_*} F(C) \text{ y } X : F(B) \xrightarrow{f_*} F(D)$$

como complejos de cadenas, con $F(C)$ y $F(D)$ en grado cero. Tenemos un morfismo de complejos $Y \to X$ dado por

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\bar{f}_*"] \arrow[d, "\bar{g}_*"] & F(C) \arrow[d, "g_*"] \\
F(B) \arrow[r, "g_*"] & F(D)
\end{tikzcd}$$

El cono del morfismo $Y \to X$ es un complejo concentrado en los grados 0, 1 y 2, que difiere de la sucesión (1.4) sólo en el signo del morfismo $F(A) \to F(B) \oplus F(C)$ (ver [Wei95, 1.5]). Basta entonces ver que $C := \mathrm{cono}(Y \to X)$ es un complejo acíclico. Esto último sigue de la sucesión exacta larga de homología asociada a la sucesión exacta corta de complejos $0 \to X \to C \to Y[-1] \to 0$. En efecto, tenemos una sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_2(C) \arrow[r] & H_1(Y) \arrow[r] & H_1(X) \arrow[r] & H_1(C) \arrow[d] \\
 & 0 & H_0(C) \arrow[l] & H_0(X) \arrow[l] & H_0(Y) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

donde $H_0(Y) = H_0(X) = 0$ por exactitud de (1.6) y el morfismo $H_1(Y) \to H_1(X)$ es un isomorfismo porque se identifica con la columna de la izquierda de (1.6). $\square$

Ejemplo 1.4.3. Consideremos un cuadrado cocartesiano de espacios topológicos compactos como en (1.1). Verifiquemos que tomando funciones continuas a $\mathbb{C}$ se obtiene un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Comm}$. Sea $B \in \mathrm{obj}\,\mathfrak{Comm}$ con morfismos $g_i : B \to C(X_i)$ tales que $i_1^* g_1 = i_2^* g_2$. Para cada $b \in B$ existe una única $g(b) : X \to \mathbb{C}$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
X_{12} \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & X_1 \arrow[d, "\bar{i_2}"] \arrow[ddr, bend left, "g_1(b)"] & \\
X_2 \arrow[r, "\bar{i_1}"] \arrow[drr, bend right, "g_2(b)"'] & X \arrow[dr, dotted, "g(b)"] & \\
 & & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Usando la la unicidad de la propiedad universal sale que $g : B \to C(X)$ es morfismo de álgebras. Es claro que g es único tal que $\bar{i_j}^* g = g_j$ $(j = 1, 2)$.

Supongamos ahora que además i_1 es sección. Entonces

$$\begin{tikzcd} C(X) \arrow[r] \arrow[d] & C(X_1) \arrow[d, "i_1^*"] \\ C(X_2) \arrow[r] & C(X_{12}) \end{tikzcd}$$

es un cuadrado cartesiano de álgebras con i_1^* retracción, en el que todos los morfismos son morfismos de C^*-álgebras. Si F es exacto escindido en C^*-álgebras, como las C^*-álgebras son cerradas por pullback en $\mathfrak{Comm}$, la proposición anterior nos da una sucesión exacta como sigue.

$$0 \longrightarrow F(C(X)) \longrightarrow F(C(X_1)) \oplus F(C(X_2)) \xrightarrow{\Delta} F(C(X_{12})) \longrightarrow 0$$

Es decir, si $\mathfrak{C} = \mathfrak{Comp}$ o $\mathfrak{Pol}$, el funtor contravariante $\mathfrak{C} \to \mathfrak{Ab}$, $X \mapsto F(C(X))$ es exacto escindido en el sentido de la sección 1.3.

1.5. Aproximación algebraica

En esta sección mostramos que si $X \in \operatorname{obj} \mathfrak{Comp}$, el álgebra $C(X)$ es un colímite filtrante de anillos de coordenadas de variedades afines.

Denotamos $\mathfrak{Aff}$ a la categoría cuyos objetos son las variedades algebraicas afines y cuyos morfismos son las funciones regulares. Denotamos $\mathfrak{Top}$ a la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyos morfismos son las funciones continuas. Tenemos un funtor $an : \mathfrak{Aff} \to \mathfrak{Top}$ que a cada variedad algebraica afín le asigna su conjunto de puntos con la topología de variedad analítica, y a cada función regular le asigna la función continua inducida entre los respectivos espacios topológicos (Apéndice B).

Notación. Si V es una variedad afín, denotamos V^{an} a su conjunto de puntos con la topología analítica.

Observación 1.5.1. Dada $A \in \operatorname{obj} \mathfrak{Comm}$, llamamos $\mathcal{F}_A$ al conjunto de subconjuntos finitos de A. Tenemos

$$A = \bigcup \{\mathbb{C}\langle F\rangle : F \in \mathcal{F}_A\} = \operatorname*{colim}_{F \in \mathcal{F}_A} \mathbb{C}\langle F\rangle.$$

Fijemos $X \in \operatorname{obj} \mathfrak{Comp}$ y llamemos $\mathcal{F}_X$ al conjunto de subconjuntos finitos de $C(X)$. Por la observación anterior $C(X) = \operatorname{colim}_{F \in \mathcal{F}_X} \mathbb{C}\langle F\rangle$. Dado $F \in \mathcal{F}_X$ tenemos una función continua

$$X \to V_F^{an}, \qquad x \mapsto (f(x))_{f \in F} \tag{1.7}$$

donde V_F es la clausura Zariski en $\mathbb{C}^F$ del conjunto $\{(f(x))_{f\in F} : x \in X\}$. Observamos que $\mathbb{C}[V_F] \simeq \mathbb{C}\langle F\rangle$. Dados $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_X$, $\mathbb{C}\langle F_1\rangle \subseteq \mathbb{C}\langle F_2\rangle$ si y sólo si existe $\varphi : V_{F_2} \to V_{F_1}$ regular tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ V_{F_2}^{an} \arrow[rr, "\varphi_*"] & & V_{F_1}^{an} \end{tikzcd}$$

Además existe a lo sumo una φ que hace conmutar el diagrama. Más precisamente, la categoría $\mathcal{F}_X$ es isomorfa a la subcategoría plena de $(X \downarrow an)$ cuyos objetos son las funciones como en (1.7). Este isomorfismo induce un isomorfismo de álgebras

$$C(X) \simeq \operatorname*{colim}_{F \in \mathcal{F}_X} \mathbb{C}\langle F\rangle \simeq \operatorname*{colim}_{F \in \mathcal{F}_X} \mathbb{C}[V_F]$$

natural en la variable X.

Como las funciones (1.7) tienen imagen densa Zariski, dada $f : X \to V^{an}$ continua con V una variedad afín, f se factoriza por V_F^{an} para algún $F \in \mathcal{F}_X$. En efecto, si $V \subseteq k^N$ tomamos $F := \{f_1, \ldots, f_N\} \in \mathcal{F}_X$, donde f_i son las coordenadas de f. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr, "f"] & \\ V_F^{an} \arrow[rr] & & V^{an} \end{tikzcd}$$

donde la función regular $V_F \to V$ es mandar la coordenada f_i-ésima a la coordenada i-ésima. Entonces las funciones (1.7) forman una subcategoría final de $(X \downarrow an)$ y tenemos isomorfismos

$$C(X) \simeq \operatorname*{colim}_{F \in \mathcal{F}_X} \mathbb{C}\,[V_F] \simeq \operatorname*{colim}_{f : X \to V^{an}} \mathbb{C}\,[V]$$

naturales en X.

Para terminar la sección verificamos que $(X \downarrow an)$ es una categoría filtrante.

1. Sean $f_1, f_2 \in \operatorname{obj}(X \downarrow an)$. Para $i = 1, 2$ sea V_i la variedad afín tal que $V_i^{an} = \operatorname{cod}(f_i)$. Como $V_1 \times V_2$ es una variedad afín y $(V_1 \times V_2)^{an} = V_1^{an} \times V_2^{an}$, la función continua $(f_1, f_2) : X \to (V_1 \times V_2)^{an}$ es un objeto de $(X \downarrow an)$. Como las proyecciones $V_1 \times V_2 \to V_i$ son funciones regulares, inducen morfismos $\pi_i : (f_1, f_2) \to f_i$ en $(X \downarrow an)$.

2. Sean $f, g \in \operatorname{obj}(X \downarrow an)$ y sean $\varphi, \psi : f \to g$ morfismos. Sea V la variedad afín tal que $V^{an} = \operatorname{cod}(f) = \operatorname{cod}(g)$. Sea $W = \{x \in V : \varphi(x) = \psi(x)\}$. W es una variedad afín por ser un cerrado en la variedad afín V (las funciones φ y ψ son polinomiales). Entonces f se correstringe a W^{an} y la inclusión $\iota : W \to V$ es un morfismo de $f|^{W^{an}}$ a f tal que $\varphi\iota = \psi\iota$.

1.6. Parte final de la demostración

En esta sección F es un funtor $\mathfrak{Comm} \to \mathfrak{Ab}$, exacto escindido en C^*-álgebras, que conmuta con colímites filtrantes, y que se anula en los anillos de coordenadas de variedades afines suaves (Apéndice B). A continuación probamos el teorema 1.1.1, es decir, que el funtor $G : \mathfrak{Comp} \to \mathfrak{Ab}$, $X \mapsto F(C(X))$ es invariante por homotopía. Por el corolario 1.2.2 basta ver que G es invariante por homotopía en $\mathfrak{Pol}$. Por el corolario 1.3.5 alcanza con ver que G se anula en el simple. La demostración del Teorema 1.6.1 usa las ideas de [FW01, Theorem 5.1] pero generaliza este resultado a un funtor F que no necesariamente es parte de una teoría de homología.

Teorema 1.6.1. *Sea $F : \mathfrak{Comm} \to \mathfrak{Ab}$ un funtor exacto escindido en C^*-álgebras, que conmuta con colímites filtrantes y que se anula en los anillos de coordenadas de variedades afines suaves. Si llamamos G al funtor $\mathfrak{Pol} \to \mathfrak{Ab}$, $D \mapsto F(C(D))$ entonces $G(\Delta^{\mathrm{n}}) = 0$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Usaremos resultados sobre variedades algebraicas, poliedros, y conjuntos semialgebraicos, que pueden encontrarse en los apéndices.

Como F conmuta con colímites filtrantes, hay un isomorfismo natural

$$G(D) = F(C(D)) = \operatorname*{colim}_{D \to V^{an}} F(\mathbb{C}\,[V])$$

para cualquier poliedro D (ver Sección 1.5).

Tomemos $D = \Delta^{\mathrm{n}}$. Por el Lema A.2.11, un elemento del colímite está representado por un par (f, α) donde f es una función continua $D \to V^{an}$, V una variedad afín y $\alpha \in F(\mathbb{C}\,[V])$. Fijemos un elemento (f, α) y veamos que es el elemento cero de $G(D)$.

Si V es una variedad suave, $F(\mathbb{C}\,[V]) = 0$ por hipótesis y no hay nada que hacer. Si V no es suave, llamamos S al conjunto de puntos singulares de V. S es una subvariedad afín de V con $\dim S < \dim V$.

Por resolución de singularidades existen una variedad cuasiproyectiva suave $\tilde{V}$ y un morfismo suryectivo $p : \tilde{V} \to V$ tales que si $\tilde{S} = p^{-1}(S)$, el morfismo inducido $\tilde{V} - \tilde{S} \to V - S$ es un isomorfismo de variedades. Veremos que alcanza con considerar el caso en el que f es la inclusión de un simple D en una triangulación semialgebraica de V tal que $S \cap D$ es una cara propia de D.

Supongamos que $V \subseteq \mathbb{C}^k$. Como f es continua y D compacto, la imagen de f es compacta y está contenida en una bola $B \subseteq \mathbb{C}^k$. Como $B \cap V$ es un conjunto semialgebraico compacto de $\mathbb{R}^{2k}$, existe una triangulación semialgebraica de $B \cap V$ tal que $B \cap S$ es un subcomplejo.

Tomamos repetidas subdivisiones baricéntricas de D hasta que la imagen por f de cada n-simple caiga en el entorno estrellado de algún vértice de $B \cap V$. Sean σ_i los simples maximales de la última subdivisión realizada. Afirmamos que la aplicación

$$G(D) \longrightarrow \bigoplus G(\sigma_i) \tag{1.8}$$

es inyectiva. En efecto, si se realiza sólo una subdivisión baricéntrica, obtenemos un complejo estrellado y la inyectividad sale del Lema 1.3.4. Si se realiza más de una subdivisión, la afirmación se prueba por inducción usando que la suma directa de morfismos inyectivos es un morfismo inyectivo. Por la inyectividad de (1.8) basta ver que $(f|_{\sigma_i}, \alpha) \in G(\sigma_i)$ es cero para todo i. Es decir, podemos suponer que la imagen de f está contenida en el entorno estrellado $\mathrm{St}(v)$ de un vértice v de $B \cap V$. Sea E el polítopo del subcomplejo de $B \cap V$ formado por todos los simples que tienen a v como vértice. Si pensamos a f como función continua de D a E y consideramos el morfismo

$$f^* : C(E) = \operatorname*{colim}_{E \to V^{an}} F(\mathbb{C}\,[V]) \longrightarrow \operatorname*{colim}_{D \to V^{an}} F(\mathbb{C}\,[V]) = C(D)$$

tenemos que $(f, \alpha) = f^*(E \hookrightarrow V^{an}, \alpha)$. Basta entonces ver que $(E \hookrightarrow V^{an}, \alpha) \in G(E)$ es cero. Usando nuevamente el Lema 1.3.4 tenemos que

$$G(E) \longrightarrow \bigoplus G(\tau_j)$$

es inyectivo, donde τ_j son los simples maximales de E. Para ver que $(E \hookrightarrow V^{an}, \alpha) \in G(E)$ es cero alcanza entonces con ver que $(\tau_j \hookrightarrow V^{an}) \in G(\tau_j)$ es cero para todo j. Es decir, podemos suponer que f es la inclusión de un simple maximal D de una triangulación de $B \cap V$ (el simple es maximal porque los simples maximales del entorno estrellado de un vértice son simples maximales del complejo).

Como $\dim S < \dim V$, $S \cap D$ es una unión de caras propias de D. Reemplazamos a la triangulación de $B \cap V$ por su subdivisión baricéntrica, y usando el Lema 1.3.4 una vez más podemos suponer que f es la inclusión de D', alguno de los simples maximales en los que fue subdividido D. La diferencia es que ahora $S \cap D'$ es una única cara propia de D'.

Recapitulando, podemos suponer que f es la inclusión de un simple D de una triangulación semialgebraica de $B \cap V$, y que $S \cap D$ es una cara propia de D.

Llamemos $A := S \cap D$ y sean $\tilde{D} = p^{-1}(D)$, $\tilde{A} = p^{-1}(A)$. A y D son compactos porque son simples. $\tilde{A}$ y $\tilde{D}$ son compactos porque la función continua inducida por p es propia. Además, $\tilde{A}$ y $\tilde{D}$ son conjuntos semialgebraicos al ser preimágenes por una función semialgebraica de conjuntos semialgebraicos. Entonces $\tilde{A}$ y $\tilde{D}$ son triangulables, $\tilde{A}$ es subcomplejo de $\tilde{D}$, y por lo tanto $\tilde{A}$ es retracto de entorno de $\tilde{D}$.

Supongamos por un momento que $G(D) \to G(A) \oplus G(\tilde{D})$ es inyectiva. Por el truco de Jouanolou existen una variedad afín suave W y un torsor $\pi : W \to \tilde{V}$. La función continua inducida por π es un fibrado con fibra contráctil, y como $\tilde{D}$ es un poliedro, la inclusión $\tilde{D} \hookrightarrow \tilde{V}^{an}$ se levanta a $j : \tilde{D} \to W^{an}$ (ver Apéndice C). Para ver que (f, α) es cero en $G(D)$ alcanza con ver que $(f|_A, \alpha) \in G(A)$ y $(j, (p\pi)^*\alpha) \in G(\tilde{D})$ son cero. Como W es una variedad afín suave, $F(\mathbb{C}\,[W]) = 0$ por hipótesis. Entonces $(j, (p\pi)^*\alpha) \in G(\tilde{D})$ es cero. Como la imagen de $f|_A$ cae en S y $\dim S < \dim V$ podemos suponer que el resultado vale por inducción en la dimensión de V (si $\dim V = 0$, V es un punto y entonces es suave).

Lo que queda de la demostración apunta a ver que $G(D) \to G(A) \oplus G(\tilde{D})$ es inyectivo. Consideremos

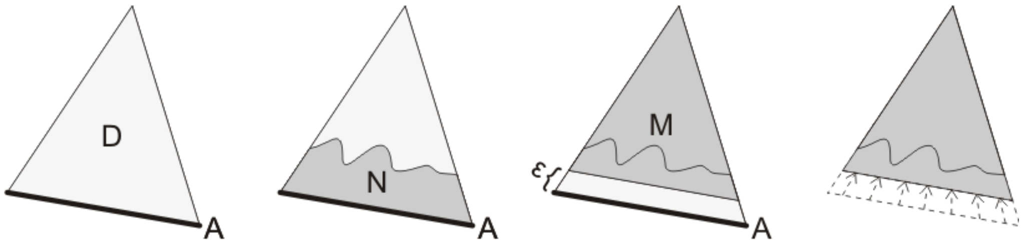

Figura 1.1: El compacto M y la retracción $r : D \to M$.

el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} \tilde{A} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] & \tilde{D} \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, hook] & D \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

Como el cuadrado conmuta, tenemos una función continua $A \cup_p \tilde{D} \to D$. Es fácil verificar que esta aplicación es biyectiva, y entonces homeomorfismo, al ser $A \cup_p \tilde{D}$ compacto y D Hausdorff. Sigue que (1.9) es un cuadrado cocartesiano y que D tiene la topología final con respecto a las funciones $A \hookrightarrow D$ y $p : \tilde{D} \to D$.

Sea $\tilde{N}$ un entorno compacto de $\tilde{A}$ en $\tilde{D}$ tal que $\tilde{A}$ es retracto de $\tilde{N}$. Sea $N = p(\tilde{N})$. Como $p^{-1}(N) = \tilde{N}$ y $N \cap A = A$ son cerrados en $\tilde{D}$ y en A respectivamente, N es cerrado en D. Un razonamiento similar muestra que N es entorno de A en D.

Como A es una cara propia de D, puede verse que existe M compacto en $D - A$ tal que $N \cup M = D$ y tal que existe $r : D \to M$ retracción con $r(N) \subseteq N$ (ver Figura 1.1). Tenemos entonces un cuadrado cocartesiano

$$\begin{tikzcd} N \cap M \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & N \arrow[d, hook] \\ M \arrow[r, hook] & D \end{tikzcd}$$

con $N \cap M \hookrightarrow N$ sección (porque r se restringe a N). Como G es exacto escindido,

$$G(D) \longrightarrow G(N) \oplus G(M) \tag{1.10}$$

es inyectivo. Por otro lado, tenemos un cuadrado cocartesiano

$$\begin{tikzcd} \tilde{A} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] & \tilde{N} \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, hook] & N \end{tikzcd}$$

con $\tilde{A} \hookrightarrow \tilde{N}$ sección y como G es exacto escindido

$$G(N) \longrightarrow G(A) \oplus G(\tilde{N}) \tag{1.11}$$

es inyectivo. Sea $\tilde{M} = p^{-1}(M)$. Como p induce un homeomorfismo $\tilde{D} - \tilde{A} \to D - A$, induce también un isomorfismo $G(M) \to G(\tilde{M})$. Si a este morfismo le sumamos (1.11) obtenemos un morfismo inyectivo

$$G(N) \oplus G(M) \longrightarrow G(A) \oplus G(\tilde{N}) \oplus G(\tilde{M})$$

que junto con (1.10) muestra que

$$G(D) \longrightarrow G(A) \oplus G(\tilde{N}) \oplus G(\tilde{M})$$

es inyectivo. Observando que este último morfismo se factoriza por $G(A) \oplus G(\tilde{D})$ sale que

$$G(D) \longrightarrow G(A) \oplus G(\tilde{D})$$

es inyectivo. $\square$

Capítulo 2

K-teoría negativa y la conjetura de Rosenberg

En este capítulo definimos los grupos K_j para $j \leq 1$ y probamos sus propiedades básicas. Todo ésto puede encontrarse en [Ros95],[Cn08] y [Wei11]. Usando el teorema 1.1.1 probamos la conjetura de Rosenberg.

Usamos las letras R y S para referirnos a anillos con unidad, y las letras A y B para referirnos a anillos no necesariamente unitarios. Consideramos siempre módulos a derecha a menos que se indique lo contrario.

2.1. Los grupos K_0 y K_1

Un R-módulo P se dice *proyectivo* si el funtor $Hom(P, -)$ es exacto. Esto equivale a decir que dado un diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, "\exists\rho"'] \\ M \arrow[r, two heads, "\psi"] & N \end{tikzcd}$$

existe algún morfismo ρ tal que $\psi\rho = \varphi$. Un R-módulo es proyectivo si y sólo si es sumando directo de un libre. Un R-módulo es proyectivo y finitamente generado si y sólo si es sumando directo de R^n para algún $n \in \mathbb{N}$.

Llamemos $\operatorname{Proj} R$ al conjunto de clases de isomorfismo de módulos proyectivos finitamente generados (podemos hablar de *conjunto* porque todo módulo proyectivo finitamente generado es isomorfo a algún sumando directo de R^n). Entonces $\operatorname{Proj} R$ es un monoide asociativo y conmutativo con la operación $\oplus$. Además esta construcción es funtorial. En efecto, dado un morfismo de anillos $\varphi : R \to S$ tenemos un morfismo de monoides $\varphi_* : \operatorname{Proj} R \to \operatorname{Proj} S$, $\varphi_*([P]) = [P \otimes_R S]$.

Ejemplo 2.1.1. Si R es un cuerpo, todo R-módulo finitamente generado es isomorfo a R^n para algún $n \geq 0$. Además $R^n \simeq R^m$ si y sólo si $n = m$. Es decir, el monoide $\operatorname{Proj} R$ es isomorfo a $\mathbb{N}_0$.

Ejemplo 2.1.2. Sea R un dominio de ideales principales. Por el teorema de clasificación para R-módulos finitamente generados, todo R-módulo P finitamente generado es isomorfo a $R^n \oplus T$ con T de torsión y n único. Si además P es proyectivo, P es sumando directo de un libre y entonces no tiene elementos de torsión. Sigue que $P \simeq R^n$ para un único n. Entonces $\operatorname{Proj} R \simeq \mathbb{N}_0$ como en el ejemplo anterior.

Ejemplo 2.1.3. Sean R_1 y R_2 anillos con unidad. Llamemos $R := R_1 \times R_2$. Las proyecciones $R \xrightarrow{\pi_k} R_k$ inducen un morfismo de monoides $\zeta : \operatorname{Proj}(R) \longrightarrow \operatorname{Proj}(R_1) \times \operatorname{Proj}(R_2)$. Veamos que este morfismo es un isomorfismo. Dado P_1 un R_1-módulo proyectivo finitamente generado, P_1 es un R-módulo a través de π_1.

P_1 es finitamente R-generado (porque R_1 es un R-módulo finitamente generado) y P_1 es R-proyectivo (porque $P_1 \oplus Q_1 \simeq R_1^n$ y R_1 es R-proyectivo). Tenemos $\zeta [P_1] = ([P_1 \otimes_R R_1], [P_1 \otimes_R R_2]) = ([P_1], 0)$. De manera análoga se ve que $(0, [P_2])$ está en la imagen de ζ y sigue que ζ es suryectiva. Para ver que es inyectiva, sea P un R-módulo proyectivo finitamente generado y supongamos que $\zeta [P] = ([P_1], [P_2])$. Entonces $P \otimes_R R_1 \simeq P_1$ y $P \otimes_R R_2 \simeq P_2$ y tenemos

$$P_1 \oplus P_2 \simeq P \otimes_R R_1 \oplus P \otimes_R R_2 \simeq P \otimes_R (R_1 \oplus R_2) = P \otimes_R R \simeq P.$$

Si $\zeta [P] = ([P_1], [P_2]) = \zeta [Q]$ entonces $P \simeq P_1 \oplus P_2 \simeq Q$.

A cualquier monoide asociativo y conmutativo M podemos asociarle un grupo abeliano $G(M)$ junto con un morfismo de monoides $M \to G(M)$ universal entre todos los morfismos que llegan a grupos abelianos. El grupo $G(M)$ se llama *grupo de Grothendieck* de M.

Lema 2.1.4. *Sea M un monoide asociativo y conmutativo. Existen un grupo abeliano $G(M)$ y un morfismo de monoides $\theta : M \to G(M)$ que verifican la siguiente propiedad universal: para todo grupo abeliano H y para todo morfismo de monoides $\psi : M \to H$ existe un único morfismo de grupos $\bar{\psi} : G(M) \to H$ tal que $\bar{\psi}\theta = \psi$.*

Demostración. Sea F el grupo abeliano libre con base $\{[m], m \in M\}$. Sea $\mathcal{R}$ el subgrupo de F generado por las relaciones

$$[m + n] - [m] - [n], \quad m, n \in M.$$

Tomamos $G(M) := F/\mathcal{R}$. La aplicación $\theta : M \to G(M)$, $m \mapsto [m]$ es un morfismo de monoides y el par $(G(M), \theta)$ cumple la propiedad universal. □

El resultado que sigue es fácil de probar usando otra construcción equivalente del grupo de Grothendieck [Ros95, Theorem 1.1.3].

Lema 2.1.5. *Sean M un monoide y $\theta : M \to G(M)$ su grupo de Grothendieck. Si $\theta(m_1) = \theta(m_2)$ existe $n \in M$ tal que $m_1 + n = m_2 + n$. Si $\theta(m) = 0$ existe $n \in M$ tal que $m + n = n$.*

Ejemplo 2.1.6. Sean M_1 y M_2 monoides asociativos y conmutativos y sea $M := M_1 \times M_2$. Las proyecciones $M \to M_k$ inducen un morfismo de grupos $G(M) \to G(M_1) \oplus G(M_2)$, $[(m_1, m_2)] \mapsto ([m_1], [m_2])$. Es claro que esta aplicación es suryectiva. Para ver que es inyectiva, supongamos que $([m_1], [m_2]) = 0$. Existen $n_k \in M_k$ tales que $m_k + n_k = n_k$ $(k = 1, 2)$ y tenemos $(m_1, m_2) + (n_1, n_2) = (n_1, n_2)$. Entonces $[(m_1, m_2)] = 0$ en $G(M)$.

Definición 2.1.7. El grupo abeliano $K_0(R)$ es el grupo de Grothendieck del monoide $\operatorname{Proj} R$.

Como $\operatorname{Proj} R$ y la construcción del grupo de Grothendieck son funtoriales, queda definido un funtor $K_0 : \mathfrak{Ass}_1 \to \mathfrak{Ab}$, donde $\mathfrak{Ass}_1$ denota a la categoría de anillos con unidad y morfismos que preservan el 1.

Ejemplo 2.1.8. Como $G(\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$ tenemos $K_0(R) = \mathbb{Z}$ si R es un dominio de ideales principales.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $M_n(R)$ el anillo de matrices de $n \times n$ con coeficientes en R y sea $GL_n(R)$ su grupo de unidades. Los morfismos de grupos

$$GL_n(R) \to GL_{n+1}(R), \quad g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forman un sistema dirigido de grupos y llamamos $GL(R)$ a su límite directo, $GL(R) := \operatorname{colim}_n GL_n(R)$. Podemos ver a los elementos de $GL(R)$ como matrices infinitas $g \in R^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ tales que existe $n \in \mathbb{N}$ de manera que $(g_{ij})_{i,j \leq n}$ es inversible y $g_{ij} = \delta_{ij}$ para i o j mayores que n. El producto en $GL(R)$ es la multiplicación usual de matrices, que está definida porque las matrices tienen finitos coeficientes no nulos en cada fila y en cada columna.

Definición 2.1.9. El grupo abeliano $K_1(R)$ es el cociente

$$GL(R)/\left[GL(R), GL(R)\right] = GL(R)_{ab}$$

donde $[GL(R), GL(R)]$ es el subgrupo conmutador de $GL(R)$.

Queda definido un funtor $K_1 : \mathfrak{Ass}_1 \to \mathfrak{Ab}$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Para $i \neq j$ y $r \in R$ denotamos $e_{ij}(r) \in GL_n(R)$ a la matriz que tiene r en el lugar ij y que en los restantes lugares coincide con la identidad 1_n. Las matrices $e_{ij}(r)$ se llaman *matrices elementales*. Llamamos $E_n(R)$ al subgrupo de $GL_n(R)$ generado por $e_{ij}(r)$, $1 \leq i, j \leq n$ y $r \in R$. Llamamos $E(R)$ al subgrupo de $GL(R)$ generado por las imágenes de los subgrupos $E_n(R)$ a través de los morfismos $GL_n(R) \hookrightarrow GL(R)$.

Lema 2.1.10 (Lema de Whitehead)**.** *Si $g \in GL_n(R)$ entonces*

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix} \in E_{2n}(R).$$

Demostración. Multiplicar a izquierda (a derecha) por la matriz elemental $e_{ij}(r)$ es sumarle a la i-ésima fila (a la j-ésima columna) r veces la j-ésima fila (la i-ésima columna). Usando ésto, es fácil ver que cualquier matriz triangular con 1 en la diagonal es una matriz elemental (haciendo operaciones elementales de fila o de columna se la puede llevar a la identidad). El resultado sigue de la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los primeros tres factores están en $E_{2n}(R)$ por ser triangulares y tener 1 en la diagonal. El último factor está en $E_{2n}(R)$ porque puede descomponerse como sigue.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Lema 2.1.11. *$[GL(R), GL(R)] = E(R)$.*

Demostración. Como $E(R) \subseteq GL(R)$ tenemos que $[E(R), E(R)] \subseteq [GL(R), GL(R)]$. La igualdad $e_{ij}(r) = [e_{ik}(r), e_{kj}(1)]$ para i, j y k distintos prueba que $[E(R), E(R)] = E(R)$. Basta entonces ver que $[GL(R), GL(R)] \subseteq E(R)$. Sean $g, h \in GL_n(R)$. En $GL(R)$ tenemos

$$ghg^{-1}h^{-1} = \begin{pmatrix} ghg^{-1}h^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gh & 0 \\ 0 & h^{-1}g^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{-1} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^{-1} & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}.$$

Los factores de la derecha están en $E(R)$ por el lema de Whitehead. □

Lema 2.1.12. *Sean R_1 y R_2 anillos con unidad. Las proyecciones $R_1 \times R_2 \to R_k$ inducen un isomorfismo $K_0(R_1 \times R_2) \to K_0(R_1) \oplus K_0(R_2)$.*

Demostración. Sigue de los ejemplos 2.1.3 y 2.1.6. □

Lema 2.1.13. *Sean R_1 y R_2 anillos con unidad. Las proyecciones $R_1 \times R_2 \to R_k$ inducen un isomorfismo $K_1(R_1 \times R_2) \to K_1(R_1) \oplus K_1(R_2)$.*

Demostración. Las proyecciones inducen isomorfismos $GL(R_1 \times R_2) \simeq GL(R_1) \times GL(R_2)$ y entonces

$$GL(R_1 \times R_2)_{ab} \simeq \left(GL(R_1) \times GL(R_2)\right)_{ab} \simeq GL(R_1)_{ab} \oplus GL(R_2)_{ab}.$$

□

A continuación extendemos las definiciones de K_j $(j = 0, 1)$ para anillos sin unidad. Denotamos $\mathfrak{Ass}$ a la categoría de anillos (no necesariamente unitarios) con morfismos de anillos. Si $A \in \operatorname{obj} \mathfrak{Ass}$ podemos darle al grupo abeliano $A \oplus \mathbb{Z}$ una estructura de anillo con unidad definiendo el producto de la siguiente manera.

$$(a, n)(a', n') := (aa' + n'a + na', nn')$$

Notamos $\tilde{A}$ al grupo abeliano $A \oplus \mathbb{Z}$ con este producto. La unidad de $\tilde{A}$ es $(0, 1)$, la proyección $\tilde{A} \to \mathbb{Z}$ es un morfismo de anillos que preserva el 1, y el núcleo de $\tilde{A} \to \mathbb{Z}$ es un ideal isomorfo al anillo A. Definimos

$$K_j(A) := \ker(K_j(\tilde{A}) \to K_j(\mathbb{Z}))$$

para $j = 0, 1$. Si A es un anillo con unidad, hay que ver que esta definición de $K_j(A)$ coincide con la que teníamos anteriormente. En tal caso tenemos un isomorfismo $\tilde{A} \to A \times \mathbb{Z}$, $(a, n) \mapsto (a + n, n)$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} \tilde{A} \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr] & & A \times \mathbb{Z} \arrow[dl] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

Aplicando K_j y usando la aditividad (proposiciones 2.1.12 y 2.1.13) obtenemos la igualdad buscada.

$$\ker(K_j(\tilde{A}) \to K_j(\mathbb{Z})) \simeq \ker(K_j(A \times \mathbb{Z}) \to K_j(\mathbb{Z})) = K_j(A)$$

Teorema 2.1.14. *[Cn08, Theorem 2.4.1] Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ es una sucesión exacta de anillos, existe un morfismo natural ∂ tal que la siguiente sucesión es exacta.*

$$K_1(A) \longrightarrow K_1(B) \longrightarrow K_1(C) \xrightarrow{\partial} K_0(A) \longrightarrow K_0(B) \longrightarrow K_0(C)$$

Corolario 2.1.15. *El funtor $K_0 : \mathfrak{Ass} \to \mathfrak{Ab}$ es exacto escindido.*

Sea P un R-módulo proyectivo finitamente generado y fijemos un isomorfismo $P \oplus Q \simeq R^n$. Tenemos un morfismo de grupos $\operatorname{Aut}(P) \to GL_n(R)$, $\alpha \mapsto \alpha \oplus 1_Q$, que depende de Q y del isomorfismo $P \oplus Q \simeq R^n$. Puede verse que al componer este morfismo con $GL_n(R) \to K_1(R)$ obtenemos un morfismo $\operatorname{Aut}(P) \to K_1(R)$ que depende sólo de P [Wei11, Ch. III, Lemma 1.6].

Proposición 2.1.16. *[Wei11, Ch. III, Corollary 1.6.1] Sean R y S anillos con unidad. Hay un producto natural $K_0(R) \otimes K_1(S) \xrightarrow{\cdot} K_1(R \otimes S)$ tal que si P es un R-módulo proyectivo finitamente generado y $\beta \in GL_n(S)$, el producto $[P] \cdot \beta$ es la imagen de $1_P \otimes \beta$ por el morfismo $\operatorname{Aut}(P \otimes S^n) \to K_1(R \otimes S)$.*

Sea I un ideal de un anillo R. Llamamos $GL(R, I)$ al núcleo del morfismo $GL(R) \to GL(R/I)$. Llamamos $E(R, I)$ al menor subgrupo normal de $E(R)$ que contiene a las matrices elementales $e_{ij}(r)$ con $r \in I$.

Lema 2.1.17. *$E(R, I)$ es un subgrupo normal de $GL(R, I)$ y $[GL(R, I), GL(R, I)] \subseteq E(R, I)$.*

Definición 2.1.18. $K_1(R, I) := GL(R, I)/E(R, I)$.

Notación. Si $I = (r)$ notamos $GL(R, r)$ al grupo $GL(R, I)$ y $K_1(R, r)$ al grupo $K_1(R, I)$.

$K_1(R, I)$ es un grupo abeliano por el lema anterior. La inclusión $GL(R, I) \longrightarrow GL(R)$ induce un morfismo de grupos $K_1(R, I) \longrightarrow K_1(R)$.

Proposición 2.1.19. *Sea I un ideal de un anillo R. Si el morfismo de anillos $R \twoheadrightarrow R/I$ es una retracción entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow K_1(R, I) \longrightarrow K_1(R) \longrightarrow K_1(R/I) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Teorema 2.1.20. *[Ros95, Corollary 3.2.13] Si R es un anillo regular a derecha, las inclusiones $R \hookrightarrow R[t]$ y $R \hookrightarrow R\left[t, t^{-1}\right]$ inducen isomorfismos $K_0(R) \simeq K_0(R[t])$ y $K_0(R) \simeq K_0(R\left[t, t^{-1}\right])$.*

2.2. El teorema de Bass-Heller-Swan

Definición 2.2.1. Una *categoría con sucesiones exactas* es un par $(\mathfrak{C}, \mathcal{E})$, donde $\mathfrak{C}$ es una categoría aditiva y $\mathcal{E}$ es una familia de sucesiones de la forma

$$0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

que satisfacen las siguientes condiciones.

- Existe una categoría abeliana $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{C}$ es una subcategoría plena de $\mathfrak{A}$.
- $\mathcal{E}$ consiste de todas las sucesiones (2.1) en $\mathfrak{C}$ que son exactas en $\mathfrak{A}$.
- $\mathfrak{C}$ es cerrada por extensiones. Es decir, si (2.1) es una sucesión exacta en $\mathfrak{A}$ con $C', C'' \in \mathfrak{C}$ entonces $C \in \mathfrak{C}$.

Las sucesiones de $\mathcal{E}$ se llaman *sucesiones exactas de* $\mathcal{E}$.

Un *funtor exacto* $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ entre categorías con sucesiones exactas es un funtor aditivo F que manda sucesiones exactas de $\mathfrak{C}$ a sucesiones exactas de $\mathfrak{D}$.

Ejemplo 2.2.2. La categoría $\mathrm{P}(R)$ de R-módulos proyectivos finitamente generados es una categoría con sucesiones exactas por ser una subcategoría plena de la categoría de R-módulos con morfismos de módulos.

Ejemplo 2.2.3. Llamamos $\operatorname{Nil} R$ a la categoría definida de la siguiente manera.

- Los objetos de $\operatorname{Nil} R$ son pares (P, ν) con P un R-módulo proyectivo finitamente generado y $\nu \in \operatorname{End}(P)$ nilpotente.
- Un morfismo $\varphi : (P, \nu) \to (P', \nu')$ en $\operatorname{Nil} R$ es un morfismo de R-módulos $\varphi : P \to P'$ tal que $\varphi\nu = \nu'\varphi$.

Una sucesión de morfismos

$$(0,0) \longrightarrow (P', \nu') \xrightarrow{\varphi} (P, \nu) \xrightarrow{\psi} (P'', \nu'') \longrightarrow (0,0)$$

es exacta si la sucesión $0 \longrightarrow P' \xrightarrow{\varphi} P \xrightarrow{\psi} P'' \longrightarrow 0$ es exacta. La categoría $\operatorname{Nil} R$ es otro ejemplo de categoría con sucesiones exactas.

Definición 2.2.4. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con sucesiones exactas. Definimos $K_0\,\mathfrak{C}$ como el grupo abeliano con generadores $[C]$ para $C \in \operatorname{obj}\mathfrak{C}$ y relaciones

$$[C] = [C'] + [C'']$$

para cada sucesión exacta $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$.

Nota. En la definición anterior estamos suponiendo que $\mathfrak{C}$ es una categoría pequeña, es decir, que $\operatorname{obj}\mathfrak{C}$ es un conjunto. Si $\mathfrak{C}$ no es pequeña pero tiene un esqueleto pequeño $\mathfrak{C}_0$ (ver Apéndice A), definimos $K_0\,\mathfrak{C}$ como el grupo abeliano con generadores $[C_0]$ para $C_0 \in \operatorname{obj}\mathfrak{C}_0$ y relaciones

$$[C_0] = [C_0'] + [C_0'']$$

para cada sucesión exacta $0 \to C_0' \to C_0 \to C_0'' \to 0$ con $C_0', C_0, C_0'' \in \operatorname{obj}\mathfrak{C}_0$. Como dos esqueletos cualesquiera son isomorfos, la definición de $K_0(\mathfrak{C})$ no depende del esqueleto elegido.

Ejemplo 2.2.5. Como todas las sucesiones exactas de módulos proyectivos son escindidas se tiene $K_0\,\mathrm{P}(R) \simeq K_0(R)$.

Un funtor exacto $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ entre categorías con sucesiones exactas induce un morfismo de grupos $K_0\,\mathfrak{C} \longrightarrow K_0\,\mathfrak{D}$, $[C] \mapsto [F(C)]$.

Ejemplo 2.2.6. Tenemos dos funtores exactos $\mathrm{P}(R) \to \mathrm{Nil}\, R$, $[P] \mapsto [(P, 0)]$ y $\mathrm{Nil}\, R \to \mathrm{P}(R)$, $[(P, \nu)] \mapsto [P]$. La composición $\mathrm{P}(R) \to \mathrm{Nil}\, R \to \mathrm{P}(R)$ es la identidad de $\mathrm{P}(R)$. Entonces

$$K_0 \,\mathrm{Nil}\, R = K_0 \,\mathrm{P}(R) \oplus Nil_0 R$$

donde $Nil_0 R$ es el núcleo del morfismo de grupos $K_0 \,\mathrm{Nil}\, R \to K_0(R)$ inducido por $\mathrm{Nil}\, R \to \mathrm{P}(R)$. Veamos que $Nil_0 R$ está generado por elementos de la forma $[(R^n, \nu)] - n\,[(R, 0)]$. Un elemento cualquiera de $K_0 \,\mathrm{Nil}\, R$ es de la forma

$$\sum [(P_i, \nu_i)] - \sum [(Q_j, \eta_j)]\,.$$

Usando que $[(P', \nu')] + [(P'', \nu'')] = [(P' \oplus P'', \nu' \oplus \nu'')]$ vemos que la expresión anterior puede escribirse como $[(P, \nu)] - [(Q, \eta)]$. Si un tal elemento está en $Nil_0 R$ tenemos $[P] = [Q]$ en $K_0(R)$. Entonces existe $T \in \mathrm{obj}\, \mathrm{P}(R)$ tal que $P \oplus T \simeq Q \oplus T \simeq R^n$. Entonces

$$\begin{aligned} [(P, \nu)] - [(Q, \eta)] &= [(P \oplus T, \nu \oplus 0)] - [(T, 0)] - [(Q \oplus T, \eta \oplus 0)] + [(T, 0)] \\ &= ([(R^n, \nu \oplus 0)] - n\,[(R, 0)]) - ([(R^n, \eta \oplus 0)] - n\,[(R, 0)]). \end{aligned}$$

En lo que sigue veremos que $K_0 \,\mathrm{Nil}\, R$ es un sumando directo natural de $K_1(R\left[t, t^{-1}\right])$.

Definición 2.2.7. Una matriz $\alpha \in M_n(R\,[t])$ se dice *t-isomorfismo* si $\alpha \in GL_n(R\left[t, t^{-1}\right])$.

Notación. Si $\alpha \in M_n(R\,[t])$ denotamos $\mathrm{coker}\, \alpha$ al conúcleo del morfismo $R\,[t]^n \xrightarrow{\alpha} R\,[t]^n$.

Lema 2.2.8. *Sea $\alpha \in M_n(R\,[t])$ un t-isomorfismo. Entonces* $\mathrm{coker}\, \alpha$ *es un R-módulo proyectivo finitamente generado y el endomorfismo $t : \mathrm{coker}\, \alpha \longrightarrow \mathrm{coker}\, \alpha$ multiplicación por t es nilpotente.*

Demostración. Veamos primero que la multiplicación por t es un endomorfismo nilpotente de $\mathrm{coker}\, \alpha$. Basta ver que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathrm{coker}\, \alpha)t^l = 0$. Llamemos e_i al iésimo vector canónico de $R\,[t]^n$. Como $R\left[t, t^{-1}\right]^n \xrightarrow{\alpha} R\left[t, t^{-1}\right]^n$ es un isomorfismo, existe $v_i \in R\left[t, t^{-1}\right]^n$ tal que $\alpha v_i = e_i$. Tomando $l_i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $v_i t^{l_i} \in R\,[t]^n$ y el vector $e_i t^{l_i} = \alpha(v_i t^{l_i})$ es 0 en $\mathrm{coker}\, \alpha$. Haciendo lo anterior para todo $1 \leq i \leq n$ y tomando $l = \max l_i$ se tiene $(\mathrm{coker}\, \alpha)t^l = 0$.

Veamos que $\mathrm{coker}\, \alpha$ es finitamente R-generado. Como la composición $R\,[t]^n \xrightarrow{t^l} R\,[t]^n \twoheadrightarrow \mathrm{coker}\, \alpha$ es el morfismo 0, la proyección $R\,[t]^n \twoheadrightarrow \mathrm{coker}\, \alpha$ se factoriza por el conúcleo de la multiplicación por t^l y tenemos un morfismo suryectivo

$$R^{nl} \simeq R\,[t]^n / t^l R\,[t]^n \twoheadrightarrow \mathrm{coker}\, \alpha.$$

Sólo queda por ver que $\mathrm{coker}\, \alpha$ es R-proyectivo. Como α es un t-isomorfismo, $\alpha : R\,[t]^n \to R\,[t]^n$ es inyectivo y tenemos una sucesión exacta como sigue.

$$0 \longrightarrow R\,[t]^n \xrightarrow{\alpha} R\,[t]^n \longrightarrow \mathrm{coker}\, \alpha \longrightarrow 0.$$

Entonces

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{R[t]}(\mathrm{coker}\, \alpha, R\,[t] / t^l) \longrightarrow R\,[t]^n / t^l R\,[t]^n \xrightarrow{\bar{\alpha}} R\,[t]^n / t^l R\,[t]^n \longrightarrow \mathrm{coker}\, \alpha \ \longrightarrow 0$$

también es exacta y el primer término de la sucesión es isomorfo a $\mathrm{coker}\, \alpha$. En efecto, usando la resolución $R\,[t]$-proyectiva $0 \to R\,[t] \xrightarrow{t^l} R\,[t] \to R\,[t] / t^l \to 0$ tenemos

$$\mathrm{Tor}_1^{R[t]}(\mathrm{coker}\, \alpha, R\,[t] / t^l) = \ker(\mathrm{coker}\, \alpha \xrightarrow{t^l} \mathrm{coker}\, \alpha) = \mathrm{coker}\, \alpha.$$

Consideremos la siguiente sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow \mathrm{coker}\, \alpha \longrightarrow R\,[t]^n / t^l R\,[t]^n \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathrm{im}\, \bar{\alpha} \longrightarrow 0$$

Como $R[t]^n/t^lR[t]^n \simeq R^{nl}$ es R-proyectivo, para probar que $\operatorname{coker}\alpha$ es R-proyectivo basta ver que $\operatorname{proj}\dim_R \operatorname{im}\bar{\alpha} \leq 1$. Al ser $(\operatorname{coker}\alpha)t^l = 0$ tenemos

$$t^lR[t]^n \subseteq \ker(R[t]^n \longrightarrow \operatorname{coker}\alpha) = \alpha(R[t]^n)$$

y entonces $\operatorname{im}\bar{\alpha} = \alpha(R[t]^n)/t^lR[t]^n$. Pero los $R[t]$-módulos $\alpha(R[t]^n)$ y $t^lR[t]^n$ son isomorfos a $R[t]^n$ y entonces son R-proyectivos. Sigue que $\operatorname{proj}\dim_R \operatorname{im}\bar{\alpha} \leq 1$. □

Proposición 2.2.9. *Existe un morfismo de grupos* $K_1(R[t,t^{-1}]) \xrightarrow{\partial} K_0 \operatorname{Nil} R$ *que manda a cada t-isomorfismo* $\alpha \in M_n(R[t])$ *a la clase* $[(\operatorname{coker}\alpha, t)]$.

Demostración. Como $K_1 = GL_{ab}$ basta definir un morfismo $\partial : GL(R[t,t^{-1}]) \to K_0 \operatorname{Nil} R$. Sea $\beta \in GL_n(R[t,t^{-1}])$. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $t^k\beta \in M_n(R[t])$ es un t-isomorfismo. Definimos

$$\partial(\beta) := \left[(\operatorname{coker}(t^k\beta), t)\right] - k\left[(R[t]^n/tR[t]^n, 0)\right].$$

Hay que ver que la definición de ∂ no depende de la elección de n y k. Fijemos n y veamos que la definición no depende de k. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R[t]^n \arrow[r, "t^i"] \arrow[d, "t^{k+i}\beta"] & R[t]^n \arrow[r] \arrow[d, "t^k\beta"] & R[t]^n/t^iR[t]^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R[t]^n \arrow[r, "="] & R[t]^n \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por el lema de la serpiente hay una sucesión exacta $0 \to R[t]^n/t^iR[t]^n \to \operatorname{coker}(t^{k+i}\beta) \to \operatorname{coker}(t^k\beta) \to 0$. Como los morfismos de la sucesión son morfismos de $R[t]$-módulos, conmutan con la multiplicación por t y entonces

$$\left[(R[t]^n/t^iR[t]^n, t)\right] + \left[(\operatorname{coker}(t^k\beta), t)\right] = \left[(\operatorname{coker}(t^{k+i}\beta), t)\right] \in K_0 \operatorname{Nil} R. \tag{2.2}$$

Tomando $i = 1$ y $\beta = 1_n$ en la igualdad anterior obtenemos

$$\left[(R[t]^n/tR[t]^n, t)\right] + \left[(R[t]^n/t^kR[t]^n, t)\right] = \left[(R[t]^n/t^{k+1}R[t]^n, t)\right] \in K_0 \operatorname{Nil} R.$$

Por inducción en k se muestra que

$$\left[R[t]^n/t^kR[t]^n, t)\right] = k\left[(R[t]^n/tR[t]^n, t)\right] = k\left[(R[t]^n/tR[t]^n, 0)\right] \in K_0 \operatorname{Nil} R.$$

Usando la iguadad anterior y (2.2) obtenemos

$$\begin{aligned}
\left[(\operatorname{coker}(t^{k+i}\beta), t)\right] - (k+i)\left[(R[t]^n/t, 0)\right] &= \left[(R[t]^n/t^i, t)\right] + \left[(\operatorname{coker}(t^k\beta), t)\right] - (k+i)\left[(R[t]^n/t, 0)\right] \\
&= i\left[(R[t]^n/t, 0)\right] + \left[(\operatorname{coker}(t^k\beta), t)\right] - (k+i)\left[(R[t]^n/t, 0)\right] \\
&= \left[(\operatorname{coker}(t^k\beta), t)\right] - k\left[(R[t]^n/t, 0)\right] \in K_0 \operatorname{Nil} R.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces funciones bien definidas $GL_n(R[t,t^{-1}]) \to K_0 \operatorname{Nil} R$ para cada n. Veamos que son morfismos de grupos. Dadas $\alpha, \beta \in GL_n(R[t,t^{-1}])$ tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $t^k\alpha, t^k\beta \in M_n(R[t])$ son t-isomorfismos. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R[t]^n \arrow[r, "="] \arrow[d, "t^k\beta"] & R[t]^n \arrow[r] \arrow[d, "t^{2k}\alpha\beta"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R[t]^n \arrow[r, "t^k\alpha"] & R[t]^n \arrow[r] & \operatorname{coker}(t^k\alpha) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por el lema de la serpiente hay una sucesión exacta $0 \to \operatorname{coker}(t^k\beta) \to \operatorname{coker}(t^{2k}\alpha\beta) \to \operatorname{coker}(t^k\alpha) \to 0$. Como los morfismos de esta sucesión son morfismos de $R[t]$-módulos, conmutan con la multiplicación por t, y tenemos

$$\left[(coker(t^{2k}\alpha\beta), t)\right] = \left[(\operatorname{coker}(t^k\beta), t)\right] + \left[(\operatorname{coker}(t^k\alpha), t)\right] \in K_0 \operatorname{Nil} R.$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} \partial(\alpha\beta) & = & \left[(\operatorname{coker}(t^{2k}\alpha\beta, t)\right] - 2k\left[(R[t]^n / tR[t]^n, 0)\right] \\ & = & \left[(\operatorname{coker}(t^k\beta), t)\right] + \left[(\operatorname{coker}(t^k\alpha), t)\right] - 2k\left[(R[t]^n / tR[t]^n, 0)\right] \\ & = & \partial(\alpha) + \partial(\beta) \in K_0 \operatorname{Nil} R. \end{array}$$

Para terminar la demostración falta ver que los morfismos $GL_n(R[t]) \to K_0 \operatorname{Nil} R$ son compatibles y definen un morfismo $GL(R[t]) \to K_0 \operatorname{Nil} R$. Sean $\beta \in GL_n(R\left[t, t^{-1}\right])$ y $r \in \mathbb{N}$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $t^k\beta \in M_n(R[t])$ es un t-isomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R[t]^n \arrow[r] \arrow[d, "t^k\beta"] & R[t]^{n+r} \arrow[r] \arrow[d, "t^k(\beta \oplus 1_r)"] & R[t]^r \arrow[r] \arrow[d, "t^k"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & R[t]^n \arrow[r] & R[t]^{n+r} \arrow[r] & R[t]^r \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por el lema de la serpiente tenemos

$$\left[(\operatorname{coker}(t^k(\beta \oplus 1_r)), t)\right] = \left[(\operatorname{coker}(t^k\beta), t)\right] + \left[(R[t]^r / t^k, 0)\right] \in K_0 \operatorname{Nil} R.$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} \partial(\beta \oplus 1_r) & = & \left[(\operatorname{coker}(t^k(\beta \oplus 1_r)), t)\right] - k\left[(R[t]^{n+r} / tR[t]^{n+r}, 0)\right] \\ & = & \left[(\operatorname{coker}(t^k\beta), t)\right] - k\left[(R[t]^n / tR[t]^n, 0)\right] \\ & = & \partial(\beta) \in K_0 \operatorname{Nil} R. \end{array}$$

□

Lema 2.2.10. *La composición* $K_0(R) \xrightarrow{\cdot t} K_1(R\left[t, t^{-1}\right]) \xrightarrow{\partial} K_0 \operatorname{Nil} R \twoheadrightarrow K_0(R)$ *es la identidad, donde* $\cdot t$ *es el producto con* $t \in K_1(\mathbb{Z}\left[t, t^{-1}\right])$ *de la proposición 2.1.16.*

Demostración. Sea $[P] \in K_0(R)$. Fijemos un isomorfismo $P \oplus Q \overset{\varphi}{\simeq} R^n$ con $Q \in \operatorname{obj} \mathrm{P}(R)$. A través de φ el morfismo $t1_{P[t,t^{-1}]} \oplus 1_{Q[t,t^{-1}]} \in \operatorname{Aut}(P\left[t, t^{-1}\right] \oplus Q\left[t, t^{-1}\right])$ se identifica con una matriz $\beta \in GL_n(R\left[t, t^{-1}\right])$. Más aún, $\beta \in M_n(R[t])$ es un t-isomorfismo. Tenemos $[P] \cdot t = [\beta] \in K_1(R\left[t, t^{-1}\right])$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \partial([P] \cdot t) & = & \partial(\beta) \\ & = & \left[(\operatorname{coker} \beta, t)\right] \\ & = & \left[(\operatorname{coker}(t1_{P[t]} \oplus 1_{Q[t]}), t)\right] \\ & = & \left[(\operatorname{coker} t1_{P[t]}, t)\right] + \left[(\operatorname{coker} 1_{Q[t]}, t)\right] \\ & = & \left[(P[t] / tP[t], 0)\right] + 0 \\ & = & \left[(P, 0)\right]. \end{array}$$

□

Lema 2.2.11 (Truco de Higman)**.** *Para cada* $g \in GL(R[t], t)$ *existe una matriz nilpotente* ν *con coeficientes en* R *tal que* $[g] = [1 - \nu t]$ *en* $K_1(R[t])$*.*

Demostración. Observamos primero que si $1 - \nu t \in GL_n(R[t])$ con $\nu \in M_n(R)$ entonces ν es nilpotente. En efecto, sea $\eta_0 + \eta_1 t + \cdots + \eta_k t^k$ la inversa de $1 - \nu t$ con $\eta_j \in M_n(R)$. Igualando coeficiente a coeficiente ambos miembros de la siguiente igualdad

$$1 = (1 - \nu t)(\eta_0 + \eta_1 t + \cdots + \eta_k t^k)$$

se obtiene $1 = \eta_0$, $\nu = \eta_1$, $\nu\eta_1 = \eta_2$, $\ldots$, $\nu\eta_{k-1} = \eta_k$, $\nu\eta_k = 0$, de donde $\nu^{k+1} = 0$.

Sea $g \in GL(R\,[t]\,, t)$. Entonces $g = 1 + \gamma_1 t + \cdots + \gamma_k t^k$ con $\gamma_j \in M_n(R)$. Si $k = 0$ no hay nada que hacer. Si $k = 1$ tomamos $\nu := -\gamma_1$ y ν es nilpotente por lo anterior. Si $k \geq 2$ razonamos inductivamente como sigue. Módulo $E(R\,[t]\,, t)$ tenemos

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} g & \gamma_k t^{k-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} g - \gamma_k t^k & \gamma_k t^{k-1} \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz de la derecha tiene grado menor que k. □

A continuación definimos un morfismo de grupos $\tau : Nil_0 R \to K_1(R\,[t]\,, t)$. Dado $(P, \nu) \in \operatorname{obj} \operatorname{Nil} R$ sea $\tau(P, \nu)$ la imagen de $1 - \nu t \in \operatorname{Aut}(P\,[t])$ por el morfismo $\operatorname{Aut}(P\,[t]) \to K_1(R\,[t])$. Verifiquemos que τ es aditiva en sucesiones exactas. Sea una sucesión exacta

$$(0,0) \longrightarrow (P', \nu') \longrightarrow (P, \nu) \longrightarrow (P'', \nu'') \longrightarrow (0,0)$$

en $\operatorname{Nil} R$. Fijando un isomorfismo $P \simeq P' \oplus P''$ tenemos

$$(1 - \nu t) = \begin{pmatrix} 1 - \nu' t & \gamma t \\ 0 & 1 - \nu'' t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \nu' t & 0 \\ 0 & 1 - \nu'' t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $[1 - \nu t] = [1 - \nu' t]\,[1 - \nu'' t]$ en $K_1(R\,[t])$. Como τ es aditiva en sucesiones exactas, define un morfismo $\tau : K_0 \operatorname{Nil} R \longrightarrow K_1(R\,[t])$. Como $1 - \nu t \equiv 1(t)$ el morfismo τ se correstringe a $K_1(R\,[t]\,, t)$.

Lema 2.2.12. *Sea $s = t^{-1}$, entonces la composición*

$$\delta : K_1(R\,[s]\,, s) \to K_1(R\,[s]) \to K_1(R\left[s, s^{-1}\right]) = K_1(R\left[t, t^{-1}\right]) \xrightarrow{\partial} K_0 \operatorname{Nil} R \twoheadrightarrow Nil_0 R$$

es un isomorfismo, donde ∂ es el morfismo de la proposición 2.2.9.

Demostración. Veremos que el morfismo $\tau : Nil_0 R \to K_1(R\,[s]\,, s)$ definido arriba es la inversa de δ. Por el truco de Higman, todo elemento de $K_1(R\,[s]\,, s)$ es de la forma $[1 - \nu s]$ con $\nu \in M_n(R)$ nilpotente. Entonces

$$\begin{aligned} \delta(1 - \nu s) &= \partial(1 - \nu t^{-1}) \\ &= \partial(t^{-1}(t - \nu)) \\ &= \partial(t - \nu) - \partial(t 1_n) \\ &= \left[(R\,[t]^n / (t - \nu) R\,[t]^n\,, t)\right] - \left[(R\,[t]^n / t R\,[t]^n\,, t)\right] \\ &= \left[(R^n, \nu)\right] - n\,\left[(R, 0)\right] \end{aligned}$$

de donde

$$\tau\delta(1 - \nu s) = \tau(\left[(R^n, \nu)\right] - n\,\left[(R, 0)\right]) = [1 - \nu s]$$

y

$$\delta\tau(\left[(R^n, \nu)\right] - n\,\left[(R, 0)\right]) = \delta(1 - \nu s) = \left[(R^n, \nu)\right] - n\,\left[(R, 0)\right].$$

□

Corolario 2.2.13. $K_1(R\,[s]) \longrightarrow K_1(R\left[s, s^{-1}\right])$ *es inyectivo.*

Demostración. El morfismo $R\,[s] \xrightarrow{s=0} R$ es inverso a izquierda de la inclusión $R \longrightarrow R\,[s]$. Por la proposición 2.1.19 la siguiente sucesión es exacta escindida:

$$0 \longrightarrow K_1(R\,[s]\,, s) \longrightarrow K_1(R\,[s]) \longrightarrow K_1(R) \longrightarrow 0.$$

Entonces hay una descomposición $K_1(R) \oplus K_1(R\,[s]\,, s) = K_1(R\,[s])$ inducida por las inclusiones. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_1(R) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & K_1(R\,[s]) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(R\,[s]\,, s) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_1(R) \arrow[r, "j"] & K_1(R\left[s, s^{-1}\right]) \arrow[r] & \operatorname{coker} j \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

en el que los morfismos del cuadrado de la izquierda son los inducidos por las inclusiones. Por el lema de la serpiente, para ver que $K_1(R[s]) \longrightarrow K_1(R\left[s,s^{-1}\right])$ es inyectivo basta ver que el morfismo $K_1(R[s],s) \longrightarrow \operatorname{coker} j$ lo es. Este último morfismo es igual a la composición

$$K_1(R[s],s) \longrightarrow K_1(R[s]) \longrightarrow K_1(R\left[s,s^{-1}\right]) \longrightarrow \operatorname{coker} j. \tag{2.3}$$

Consideremos el morfismo δ del lema anterior. Se verifica fácilmente que δ se factoriza por (2.3). Entonces $K_1(R[s],s) \longrightarrow \operatorname{coker} j$ es inyectivo al ser δ un isomorfismo. □

Teorema 2.2.14. *La siguiente sucesión es exacta*

$$K_1(R[t]) \longrightarrow K_1(R\left[t,t^{-1}\right]) \xrightarrow{\partial} K_0 \operatorname{Nil} R$$

donde ∂ es el morfismo de la proposición 2.2.9.

Demostración. Ver [Wei11, Ch. III, Theorem 3.2]. □

Para un funtor $F : \mathfrak{Ass}_1 \to \mathfrak{Ab}$ definimos $NF : \mathfrak{Ass}_1 \to \mathfrak{Ab}$, $NF(R) := \ker\left(F(R[t]) \xrightarrow{t=0} F(R)\right)$. Como la evaluación en 0 es una retracción con sección natural, hay un isomorfismo natural

$$F(R[t]) = F(R) \oplus NF(R).$$

Por la proposición 2.1.19, como $R[t] \xrightarrow{t=0} R$ es una retracción,

$$K_1(R[t],t) = \ker\left(K_1(R[t]) \xrightarrow{t=0} K_1(R)\right) = NK_1(R).$$

Teorema 2.2.15. *(Bass-Heller-Swan) Existe una retracción natural $K_1(R\left[t,t^{-1}\right]) \longrightarrow K_0(R)$ con sección natural $[P] \mapsto [P]\cdot t$ tal que la siguiente sucesión es exacta.*

$$0 \longrightarrow K_1(R) \xrightarrow{\pm} K_1(R[t]) \oplus K_1(R\left[t^{-1}\right]) \longrightarrow K_1(R\left[t,t^{-1}\right]) \longrightarrow K_0(R) \longrightarrow 0$$

Como consecuencia hay un isomorfismo natural

$$K_1(R\left[t,t^{-1}\right]) \simeq K_1(R) \oplus NK_1(R) \oplus NK_1(R) \oplus K_0(R).$$

Demostración. Consideremos la sucesión

$$0 \longrightarrow K_1(R[t]) \longrightarrow K_1(R\left[t,t^{-1}\right]) \xrightarrow{\partial} K_0 \operatorname{Nil} R \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

donde ∂ es el morfismo de la proposición 2.2.9. La sucesión es exacta en $K_1(R[t])$ y en $K_1(R\left[t,t^{-1}\right])$ por el corolario 2.2.13 y el teorema anterior respectivamente. Consideremos el isomorfismo $\operatorname{Nil}_0 R \simeq K_1(R\left[t^{-1}\right],t^{-1})$ del lema 2.2.12. Los morfismos $K_0(R) \xrightarrow{\cdot t} K_1(R\left[t,t^{-1}\right])$ y $\operatorname{Nil}_0 R \simeq K_1(R\left[t^{-1}\right],t^{-1}) \longrightarrow K_1(R\left[t,t^{-1}\right])$ inducen un morfismo

$$K_0 \operatorname{Nil} R = K_0(R) \oplus \operatorname{Nil}_0 R \longrightarrow K_1(R\left[t,t^{-1}\right])$$

que es inverso a derecha de $K_1(R\left[t,t^{-1}\right]) \xrightarrow{\partial} K_0 \operatorname{Nil} R$. En efecto, ésto es consecuencia de las demostraciones de los lemas 2.2.10 y 2.2.12. Entonces la sucesión (2.4) es exacta escindida y tenemos $K_1(R[t]) \oplus K_0 \operatorname{Nil} R = K_1(R\left[t,t^{-1}\right])$. Usando los isomorfismos $K_1(R[t]) = K_1(R) \oplus K_1(R[t],t)$ y $K_0 \operatorname{Nil} R = K_0(R) \oplus K_1(R\left[t^{-1}\right],t^{-1})$ obtenemos una descomposición

$$K_1(R) \oplus K_1(R[t],t) \oplus K_1(R\left[t^{-1}\right],t^{-1}) \oplus K_0(R) = K_1(R\left[t,t^{-1}\right]).$$

Las inclusiones de los tres sumandos de la izquierda son los morfismos inducidos por las inclusiones $R \to R\left[t,t^{-1}\right]$, $R[t] \to R\left[t,t^{-1}\right]$ y $R\left[t^{-1}\right] \to R\left[t,t^{-1}\right]$. La inclusión del sumando $K_0(R)$ es el morfismo

$K_0(R) \overset{\cdot t}{\to} K_1(R\left[t, t^{-1}\right])$, y la proyección sobre el sumando $K_0(R)$ es el morfismo $K_1(R\left[t, t^{-1}\right]) \overset{\partial}{\to} K_0 \operatorname{Nil} R \twoheadrightarrow K_0(R)$. Tenemos entonces una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K_1(R) \oplus K_1(R\left[t\right], t) \oplus K_1(R\left[t^{-1}\right], t^{-1}) \longrightarrow K_1(R\left[t, t^{-1}\right]) \longrightarrow K_0(R) \longrightarrow 0 \tag{2.5}$$

donde el morfismo $K_1(R\left[t, t^{-1}\right]) \to K_0(R)$ es una retracción con sección natural $[P] \mapsto [P] \cdot t$. Llamemos M al grupo abeliano $K_1(R) \oplus K_1(R\left[t\right], t) \oplus K_1(R\left[t^{-1}\right], t^{-1})$. Usando las descomposiciones $K_1(R\left[t\right]) = K_1(R) \oplus K_1(R\left[t\right], t)$ y $K_1(R\left[t^{-1}\right]) = K_1(R) \oplus K_1(R\left[t^{-1}\right], t^{-1})$ tenemos inclusiones $K_1(R\left[t\right]) \to M$ y $K_1(R\left[t^{-1}\right]) \to M$ que inducen una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K_1(R) \xrightarrow{\pm} K_1(R\left[t\right]) \oplus K_1(R\left[t^{-1}\right]) \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Juntando esta sucesión con la sucesión 2.5 obtenemos el resultado buscado. Observamos que el morfismo $K_1(R\left[t\right]) \oplus K_1(R\left[t^{-1}\right]) \longrightarrow K_1(R\left[t, t^{-1}\right])$ es el inducido por las inclusiones $R\left[t\right] \to R\left[t, t^{-1}\right]$ y $R\left[t^{-1}\right] \to R\left[t, t^{-1}\right]$. □

2.3. Los grupos K_j para $j < 0$

Por el teorema de Bass-Heller-Swan, si R es un anillo con unidad

$$K_0(R) = \operatorname{coker}\left(K_1(R\left[t\right]) \oplus K_1(R\left[t^{-1}\right]) \longrightarrow K_1(R\left[t, t^{-1}\right])\right).$$

Con esta motivación, se define inductivamente para $j < 0$

$$K_j(R) = \operatorname{coker}\left(K_{j+1}(R\left[t\right]) \oplus K_{j+1}(R\left[t^{-1}\right]) \longrightarrow K_{j+1}(R\left[t, t^{-1}\right])\right).$$

Teorema 2.3.1. *Para todo $j < 0$ existe una retracción natural $K_{j+1}(R\left[t, t^{-1}\right]) \longrightarrow K_j(R)$ con sección natural tal que la siguiente sucesión es exacta.*

$$0 \longrightarrow K_{j+1}(R) \xrightarrow{\pm} K_{j+1}(R\left[t\right]) \oplus K_{j+1}(R\left[t^{-1}\right]) \longrightarrow K_{j+1}(R\left[t, t^{-1}\right]) \longrightarrow K_j(R) \longrightarrow 0$$

Como consecuencia hay un isomorfismo natural

$$K_{j+1}(R\left[t, t^{-1}\right]) \simeq K_{j+1}(R) \oplus NK_{j+1}(R) \oplus NK_{j+1}(R) \oplus K_j(R).$$

Demostración. Hacemos el caso $j = -1$ y los casos restantes se prueban análogamente de manera inductiva. Como el funtor $K_0(-)$ es un sumando directo del funtor $K_1(- \otimes \mathbb{Z}\left[t, t^{-1}\right])$, la sucesión

$$0 \longrightarrow K_0(R) \longrightarrow K_0(R\left[s\right]) \oplus K_0(R\left[s^{-1}\right]) \longrightarrow K_0(R\left[s, s^{-1}\right]) \tag{2.6}$$

es un sumando directo natural de la sucesión

$$0 \longrightarrow K_1(R\left[t, t^{-1}\right]) \longrightarrow K_1(R\left[s, t, t^{-1}\right]) \oplus K_1(R\left[s^{-1}, t, t^{-1}\right]) \longrightarrow K_1(R\left[s, s^{-1}, t, t^{-1}\right]).$$

Como la última sucesión es exacta por el teorema de Bass-Heller-Swan para el anillo $R\left[t, t^{-1}\right]$, la sucesión (2.6) también es exacta. Además

$$\operatorname{coker}\left(K_1(R\left[s, t, t^{-1}\right]) \oplus K_1(R\left[s^{-1}, t, t^{-1}\right]) \longrightarrow K_1(R\left[s, s^{-1}, t, t^{-1}\right])\right) \tag{2.7}$$

se descompone naturalmente en cuatro sumandos directos, uno de los cuales es

$$\operatorname{coker}\left(K_0(R\left[s\right]) \oplus K_0(R\left[s^{-1}\right]) \longrightarrow K_0(R\left[s, s^{-1}\right])\right) = K_{-1}(R). \tag{2.8}$$

Como (2.7) tiene una sección natural, lo mismo ocurre con (2.8). □

Ejemplo 2.3.2. Veamos que $K_j(R) = 0$ para $j < 0$ y R un anillo regular a derecha. Hacemos inducción en j. Si R es regular a derecha, el morfismo $K_0(R[t]) \longrightarrow K_0(R[t,t^{-1}])$ es un isomorfismo por el teorema 2.1.20. Entonces

$$K_{-1}(R) = \mathrm{coker}(K_0(R[t]) \oplus R[t^{-1}]) \longrightarrow K_0(R[t,t^{-1}])) = 0.$$

Sea $j < -1$ y supongamos que K_{j+1} se anula en los anillos regulares a derecha. Sea R regular a derecha. El anillo $R[t,t^{-1}]$ también es regular a derecha [Ros95, Corollary 3.2.4]. Por el teorema anterior $K_j(R)$ es un sumando directo de $K_{j+1}(R[t,t^{-1}])$, pero este último grupo es 0 por hipótesis inductiva aplicada al anillo $R[t,t^{-1}]$.

Queremos extender la definición de K_j con $j < 0$ para anillos sin unidad. Para tener una buena definición, primero hay que probar que son funtores aditivos.

Proposición 2.3.3. *Sean R_1 y R_2 anillos con unidad. Las proyecciones $R_1 \times R_2 \to R_k$ inducen un isomorfismo $K_j(R_1 \times R_2) \to K_j(R_1) \oplus K_j(R_2)$ para todo $j < 0$.*

Demostración. Hacemos el caso $j = -1$; los casos restantes se hacen análogamente de manera inductiva. Las proyecciones $R_1 \times R_2 \to R_k$ inducen isomorfismos como sigue.

$$(R_1 \times R_2)[t,t^{-1}] \to R_1[t,t^{-1}] \times R_2[t,t^{-1}]$$

$$K_0((R_1 \times R_2)[t,t^{-1}]) \to K_0(R_1[t,t^{-1}]) \oplus K_0(R_2[t,t^{-1}]) \tag{2.9}$$

Como el funtor $K_{-1}(-)$ es un sumando directo de $K_0(- \otimes \mathbb{Z}[t,t^{-1}])$, el morfismo $K_{-1}(R_1 \times R_2) \to K_{-1}(R_1) \oplus K_{-1}(R_2)$ es un sumando directo natural del isomorfismo (2.9), y es por lo tanto un isomorfismo. □

Proposición 2.3.4. *Sea $A \in \mathrm{obj}\,\mathfrak{Ass}$. Hay una sucesión exacta natural*

$$0 \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{\pm} K_0(A[t]) \oplus K_0(A[t^{-1}]) \longrightarrow K_0(A[t,t^{-1}]) \longrightarrow K_{-1}(A) \longrightarrow 0$$

y el morfismo $K_0(A[t,t^{-1}]) \longrightarrow K_{-1}(A)$ tiene una sección natural.

Demostración. Dado un anillo B, $K_0(B)$ es sumando directo de $K_0(B[t])$ y $K_0(B[t^{-1}])$ inducido por las inclusiones $B \hookrightarrow B[t]$ y $B \hookrightarrow B[t^{-1}]$. Denotamos

$$K_0(B[t]) \oplus_{K_0(B)} K_0(B[t^{-1}]) := \frac{K_0(B[t]) \oplus K_0([t^{-1}])}{(b,-b),\ \ b \in K_0(B)}.$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo. Por el teorema de Bass-Heller-Swan las filas son exactas y los morfismos horizontales de la derecha admiten secciones compatibles.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(\tilde{A}[t]) \oplus_{K_0(\tilde{A})} K_0(\tilde{A}[t^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(\tilde{A}[t,t^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d] & K_{-1}(\tilde{A}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(\mathbb{Z}[t]) \oplus_{K_0(\mathbb{Z})} K_0(\mathbb{Z}[t^{-1}]) \arrow[r] & K_0(\mathbb{Z}[t,t^{-1}]) \arrow[r] & K_{-1}(\mathbb{Z}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por el lema de la serpiente, los núcleos de los morfismos verticales forman una sucesión exacta. El núcleo del morfismo de la derecha es $K_{-1}(A)$. Como K_0 es exacto escindido y la sucesión $0 \to A[t,t^{-1}] \to \tilde{A}[t,t^{-1}] \to \mathbb{Z}[t,t^{-1}] \to 0$ es exacta escindida, el núcleo del morfismo del medio es $K_0(A[t,t^{-1}])$. Sólo queda por ver que el núcleo del morfismo de la izquierda es $K_0(A[t]) \oplus_{K_0(A)} K_0(A[t^{-1}])$. Esto sigue de usar el lema de la serpiente con el diagrama de abajo.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ K_0(A) \arrow[r, "\pm"] \arrow[d] & K_0(A[t]) \oplus K_0(A[t^{-1}]) \arrow[d] \\ K_0(\tilde{A}) \arrow[r, "\pm"] \arrow[d] & K_0(\tilde{A}[t]) \oplus K_0(\tilde{A}[t^{-1}]) \arrow[d] \\ K_0(\mathbb{Z}) \arrow[r, "\pm"] \arrow[d] & K_0(\mathbb{Z}[t]) \oplus K_0(\mathbb{Z}[t^{-1}]) \arrow[d] \\ 0 & 0 \end{tikzcd}$$

□

Teorema 2.3.5. *Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ es una sucesión exacta de anillos, existe un morfismo natural $\partial_0 : K_0(C) \longrightarrow K_{-1}(A)$ tal que la siguiente sucesión es exacta.*

$$K_0(A) \longrightarrow K_0(B) \longrightarrow K_0(C) \xrightarrow{\partial_0} K_{-1}(A) \longrightarrow K_{-1}(B) \longrightarrow K_{-1}(C)$$

Demostración. Veamos primero que el resultado vale para una sucesión exacta $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ donde I es un ideal de un anillo unitario R. Las sucesiones

$$0 \longrightarrow I[t] \longrightarrow R[t] \longrightarrow (R/I)[t] \longrightarrow 0 \quad y \quad 0 \longrightarrow I[t,t^{-1}] \longrightarrow R[t,t^{-1}] \longrightarrow (R/I)[t,t^{-1}] \longrightarrow 0$$

son exactas. Tenemos un diagrama conmutativo como sigue.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_1(R) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(R[t]) \oplus K_1(R[t^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(R[t,t^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(R) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_1(R/I) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & K_1(R/I[t]) \oplus K_1(R/I[t^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d, "\partial \oplus \partial"] & K_1(R/I[t,t^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & K_0(R/I) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_0"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_0(I) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(I[t]) \oplus K_0(I[t^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(I[t,t^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d] & K_{-1}(I) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_0(R) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(R[t]) \oplus K_0(R[t^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(R[t,t^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d] & K_{-1}(R) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_0(R/I) \arrow[r] & K_0(R/I[t]) \oplus K_0(R/I[t^{-1}]) \arrow[r] & K_0(R/I[t,t^{-1}]) \arrow[r] & K_{-1}(R/I) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Las tres columnas de la izquierda son exactas por el teorema 2.1.14. El morfismo ∂_0 es el inducido por $K_1(R/I[t,t^{-1}]) \xrightarrow{\partial} K_0(I[t,t^{-1}])$. Las dos filas de arriba son exactas por el teorema de Bass-Heller-Swan. Las tres últimas filas son exactas por la proposición anterior. Hay que ver que la columna de la derecha es exacta. Es claro que la composición de dos morfismos consecutivos es nula. La exactitud en $K_{-1}(I)$ y $K_{-1}(R/I)$ se prueba usando que los morfismos de la derecha de las tres últimas filas tienen secciones compatibles (por el teorema anterior). La exactitud en $K_0(R/I)$ requiere un poco más de trabajo.

Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ es una sucesión exacta de anillos no necesariamente unitarios, A es isomorfo a un ideal de $\tilde{B}$ tal que la sucesión $0 \to A \to \tilde{B} \to \tilde{C} \to 0$ es exacta. Por el caso anterior tenemos un diagrama conmutativo con filas exactas como sigue.

$$\begin{tikzcd} K_0(A) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(\tilde{B}) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(\tilde{C}) \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d] & K_{-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & K_{-1}(\tilde{B}) \arrow[r] \arrow[d] & K_{-1}(\tilde{C}) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r, dash] & K_0(\mathbb{Z}) \arrow[r, dash, "="] & K_0(\mathbb{Z}) \arrow[r, dash] & 0 \arrow[r, dash] & K_{-1}(\mathbb{Z}) \arrow[r, dash, "="] & K_{-1}(\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

Tomando núcleos de los morfismos verticales se obtiene la sucesión exacta buscada (la sucesión de los núcleos es exacta porque los morfismos verticales admiten secciones compatibles). $\square$

Corolario 2.3.6. *El funtor* $K_{-1} : \mathfrak{Ass} \longrightarrow \mathfrak{Ab}$ *es exacto escindido.*

Corolario 2.3.7. *Si* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *es una sucesión exacta de anillos, existen morfismos naturales* $\partial_j : K_j(C) \longrightarrow K_{j-1}(A)$ $(j < 0)$ *tales que la siguiente sucesión es exacta.*

$$K_0(A) \longrightarrow K_0(B) \longrightarrow K_0(C) \xrightarrow{\partial_0} K_{-1}(A) \longrightarrow K_{-1}(B) \longrightarrow K_{-1}(C) \xrightarrow{\partial_{-1}} K_{-2}(A) \longrightarrow \cdots$$

Como consecuencia, los funtores $K_j : \mathfrak{Ass} \longrightarrow \mathfrak{Ab}$ $(j < 0)$ *son exactos escindidos.*

Demostración. Usando que K_{-1} es exacto escindido se prueba un resultado análogo a la proposición 2.3.4 para K_{-1} y K_{-2}. Razonando igual que en el teorema anterior se extiende la sucesión exacta hasta K_{-2}. Procediendo de manera inductiva se extiende la sucesión hasta K_j para todo $j < 0$. $\square$

2.4. Colímites filtrantes

En esta sección probamos que los funtores $K_j : \mathfrak{Ass} \to \mathfrak{Ab}$ con $j \leq 1$ conmutan con colímites filtrantes (ver Apéndice A).

Proposición 2.4.1. *El funtor* $K_1 : \mathfrak{Ass}_1 \to \mathfrak{Ab}$ *conmuta con colímites filtrantes.*

Demostración. Sean $\mathfrak{I}$ una categoría filtrante y $R : \mathfrak{I} \to \mathfrak{Ass}_1$ un funtor. Sean S un anillo con unidad y $\tau : R \to \Delta(S)$ una transformación natural tales que (S, τ) es un colímite de R. Veremos que $(K_1(S), K_1\tau)$ es un colímite de K_1R.

Sean H un grupo abeliano y φ una transformación natural $K_1R \to \Delta(H)$. Debemos ver que existe un único morfismo $\varphi : K_1(S) \to H$ tal que

$$\begin{tikzcd} K_1(R(i)) \arrow[r, "\tau_{i*}"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & K_1(s) \arrow[d, "\varphi"] \\ & H \end{tikzcd} \tag{2.10}$$

conmuta para todo $i \in \operatorname{obj} \mathfrak{I}$.

Un elemento de $K_1(s)$ está representado por una matriz $A \in GL(s)$. Como la matriz tiene finitos coeficientes, existe $i \in \operatorname{obj} \mathfrak{I}$ tal que todos los coeficientes de A están en la imagen del morfismo τ_i. Es decir, $[A] = \tau_{i*}[A_i] \in K_1(s)$ para cierta matriz $A_i \in GL(R(i))$. Definimos $\varphi[A] := \varphi_i[A_i]$. Es claro que φ es la única que hace conmutar el diagrama (2.10). Sólo hay que probar la buena definición.

Supongamos que $\tau_{i*}[A_i] = \tau_{j*}[A_j]$ para ciertos $i, j \in \operatorname{obj} \mathfrak{I}$, $A_i \in GL(R(i))$ y $A_j \in GL(R(j))$. Como $\mathfrak{I}$ es filtrante existe $k \in \operatorname{obj} \mathfrak{I}$ tal que existen morfismos $u : i \to k$ y $v : j \to k$. Entonces $\tau_{k*}\left[u_*A_iv_*A_j^{-1}\right] = 1$ en $K_1(s)$, es decir, $\tau_{k*}(u_*A_iv_*A_j^{-1})$ es un producto de matrices elementales. Como toda matriz elemental de $GL(s)$ es la imagen por τ_{s*} de una matriz elemental de $GL(R(s))$ para algún $s \in \operatorname{obj} \mathfrak{I}$, existen $l \in \operatorname{obj} \mathfrak{I}$ y un morfismo $w : k \to l$ tales que $w_*(u_*A_iv_*A_j^{-1})$ es elemental. Entonces

$$1 = \varphi_l\left[w_*(u_*A_iv_*A_j^{-1})\right] = \varphi_i[A_i]\,\varphi_j[A_j]^{-1}$$

probando la buena definición de φ. $\square$

Corolario 2.4.2. *Los funtores* $K_n : \mathfrak{Ass}_1 \to \mathfrak{Ab}$ *conmutan con colímites filtrantes para* $n \leq 1$.

Demostración. Por el teorema de Bass-Heller-Swan el funtor K_0 es sumando directo natural de $K_1(- \otimes \mathbb{Z}\left[t, t^{-1}\right])$. Como K_1 y el producto tensorial conmutan con colímites filtrantes [AM69, Ch. 2], $K_1(- \otimes \mathbb{Z}\left[t, t^{-1}\right])$ conmuta con colímites filtrantes y lo mismo vale para K_0. Para $n < 0$ la afirmación se demuestra inductivamente de manera análoga. $\square$

Lema 2.4.3. *El funtor* $\tilde{}:\mathfrak{Ass}\to\mathfrak{Ass}_1$ *conmuta con colímites filtrantes.*

Demostración. Sean $\mathfrak{J}$ una categoría filtrante y $A:\mathfrak{J}\to\mathfrak{Ass}$ un funtor. Sean $B\in\operatorname{obj}\mathfrak{Ass}$ y $\tau:A\to\Delta(B)$ una transformación natural tales que (B,τ) es un colímite de A. Veremos que $(\tilde{B},\tilde{\tau})$ es un colímite de $\tilde{A}$.

Sean R un anillo con unidad y $\varphi:\tilde{A}\to\Delta(R)$ una transformación natural. Debemos ver que existe un único morfismo de anillos con unidad $\varphi:\tilde{B}\to R$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \widetilde{A(i)} \arrow[r, "\tau_{i*}"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \tilde{B} \arrow[d, "\varphi"] \\ & R \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $i\in\operatorname{obj}\mathfrak{J}$.

Dado $i\in\operatorname{obj}\mathfrak{J}$ llamemos ρ_i al morfismo $A(i)\to\widetilde{A(i)}$ definido por $\rho_i(a)=(a,0)$. Si $u:i\to j$ es un morfismo en $\mathfrak{J}$ tenemos un diagrama conmutativo como sigue.

$$\begin{tikzcd} A(i) \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[d, "u_*"] & \widetilde{A(i)} \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "u_*"] & R \\ A(j) \arrow[r, "\rho_j"] & \widetilde{A(j)} \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del colímite existe un único morfismo $\psi:B\to R$ tal que $\psi\tau_i=\varphi_i\rho_i$ para todo $i\in\operatorname{obj}\mathfrak{J}$. Definimos $\varphi:\tilde{B}\to R$ por $\varphi(b,n)=n+\psi(b)$, φ resulta morfismo de anillos con unidad y es único tal que $\varphi\tau_{i*}=\varphi_i$.

$$\varphi\tau_{i*}(a,n)=\varphi(\tau_i(a),n)=n+\psi\tau_i(a)=n+\varphi_i\rho_i(a)=\varphi_i(0,n)+\varphi_i(a,0)=\varphi_i(a,n)$$

□

Corolario 2.4.4. *Los funtores* $K_n:\mathfrak{Ass}\to\mathfrak{Ab}$ *conmutan con colímites filtrantes para* $n\le 1$.

Demostración. Para todo anillo A hay una descomposición natural $K_n(\tilde{A})=K_n(A)\oplus K_n(\mathbb{Z})$. El resultado sigue del lema anterior y del corolario 2.4.2. □

2.5. La conjetura de Rosenberg

Para terminar el capítulo damos una demostración de la conjetura de Rosenberg.

Teorema 2.5.1 (Conjetura de Rosenberg). *Sea* $j<0$. *El funtor contravariante* $\mathfrak{Comp}\to\mathfrak{Ab}$, $X\mapsto K_j(C(X))$ *es invariante por homotopía y se anula en los espacios topológicos contráctiles.*

Demostración. La demostración consiste en verificar que el funtor $K_j:\mathfrak{Comm}\to\mathfrak{Ab}$ verifica las hipótesis del teorema 1.1.1. El funtor K_j es exacto escindido en C^*-álgebras por el teorema 2.3.7 (de hecho, es exacto escindido en $\mathfrak{Ass}$). En la sección anterior vimos que $K_j:\mathfrak{Ass}\to\mathfrak{Ab}$ conmuta con colímites filtrantes. Como el funtor inclusión $\mathfrak{Comm}\to\mathfrak{Ass}$ conmuta con colímites filtrantes, lo mismo sucede con $K_j:\mathfrak{Comm}\to\mathfrak{Ab}$. Si V es una variedad afín suave, $\mathbb{C}[V]$ es un anillo regular (ver Apéndice B) y $K_j(\mathbb{C}[V])=0$ por el ejemplo 2.3.2. Entonces el funtor $\mathfrak{Comp}\to\mathfrak{Ab}$, $X\mapsto K_j(C(X))$ verifica las hipótesis del teorema 1.1.1 y es invariante por homotopía. Si $X\in\operatorname{obj}\mathfrak{Comp}$ es contráctil, $K_j(C(X))=K_j(C(*))=K_j(\mathbb{C})=0$ porque $\mathbb{C}$ es regular. □

Apéndice A

Categorías

A.1. Categorías, funtores y transformaciones naturales

Definición A.1.1. Dar una *categoría* $\mathfrak{C}$ equivale a dar la siguiente información.

- Una *clase* $\operatorname{obj}\mathfrak{C}$ de *objetos*.
- Un conjunto $\hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ de *morfismos* de X a Y para cada par de objetos X e Y. Es común usar las notaciones $f : X \to Y$ y $X \xrightarrow{f} Y$ para referirse a un morfismo $f \in \hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$.
- Funciones *composición*

  $$\circ : \hom_{\mathfrak{C}}(Y,Z) \times \hom_{\mathfrak{C}}(X,Y) \longrightarrow \hom_{\mathfrak{C}}(X,Z), \quad (f,g) \mapsto f \circ g$$

  que verifican la propiedad asociativa. Es decir, siempre que se tienen morfismos

  $$W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$$

  vale $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- Una morfismo *identidad* $1_X \in \hom_{\mathfrak{C}}(X,X)$ para cada $X \in \operatorname{obj}\mathfrak{C}$ tal que

  $$1_Z \circ f = f \quad y \quad f \circ 1_Y = f$$

  para todo morfismo $f : Y \to Z$.

Notación. En general omitimos el $\circ$ y escribimos fg en lugar de $f \circ g$.

Ejemplo A.1.2. Los grupos abelianos y los morfismos de grupos son respectivamente los objetos y los morfismos de una categoría, que denotamos $\mathfrak{Ab}$. La composición de morfismos y las identidades son las usuales. De manera análoga, tenemos una categoría $\mathfrak{Comm}$ de $\mathbb{C}$-álgebras conmutativas y morfismos de álgebras, una categoría $\mathfrak{Comp}$ de espacios topológicos compactos y funciones continuas, una categoría $\mathfrak{Aff}$ de variedades afines y funciones regulares, y una categoría $\mathfrak{Ass}$ de anillos y morfismos de anillos.

Ejemplo A.1.3. A un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ podemos asociarle una categoría $\mathfrak{C}$ de la siguiente manera.

- $\operatorname{obj}\mathfrak{C} := P$.
- $\hom(x,y)$ tiene un único elemento si $x \leq y$, y es vacío en caso contrario.

Ejemplo A.1.4. Dada una categoría $\mathfrak{C}$, la categoría opuesta $\mathfrak{C}^{op}$ tiene como objetos a los objetos de $\mathfrak{C}$ y como conjuntos $\hom_{\mathfrak{C}^{op}}(X,Y)$ a los conjuntos $\hom_{\mathfrak{C}}(Y,X)$. Dados $f \in \hom_{\mathfrak{C}^{op}}(X,Y)$ y $g \in \hom_{\mathfrak{C}^{op}}(Y,Z)$ definimos

$$g \circ_{\mathfrak{C}^{op}} f := f \circ_{\mathfrak{C}} g.$$

Las identidades en $\mathfrak{C}^{op}$ son las identidades en $\mathfrak{C}$.

Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Un morfismo $f : X \to Y$ se llama *retracción* (*sección*) si existe $g : Y \to X$ tal que $fg = 1_Y$ (respectivamente $gf = 1_X$). Un morfismo $f : X \to Y$ se llama *isomorfismo* si existe $g : Y \to X$ tal que $fg = 1_Y$ y $gf = 1_X$ (se puede ver que un tal morfismo g es único).

Definición A.1.5. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ categorías. Un *funtor covariante* $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es una regla que le asocia a cada $c \in \operatorname{obj}\mathfrak{C}$ un objeto $F(c) \in \operatorname{obj}\mathfrak{D}$, y a cada morfismo $f \in \hom_{\mathfrak{C}}(c,c')$ un morfismo $F(f) \in \hom_{\mathfrak{D}}(F(c),F(c'))$. Además esta asociación debe respetar composiciones e identidades, es decir, $F(fg) = F(f)F(g)$ y $F(1_c) = 1_{F(c)}$. Un *funtor contravariante* $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es un funtor covariante $F : \mathfrak{C}^{op} \to \mathfrak{D}$.

Aclaración. Usamos la palabra *funtor* para referirnos siempre a funtores covariantes excepto que se indique lo contrario.

Notación. Si $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es un funtor y f es un morfismo en $\mathfrak{C}$ notamos f_* al morfismo $F(f)$. Si $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es un funtor contravariante y f es un morfismo en $\mathfrak{C}$ notamos f^* al morfismo $G(f)$.

Ejemplo A.1.6. Si $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ son categorías y $d \in \operatorname{obj}\mathfrak{D}$, tenemos un funtor $\Delta(d) : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ que vale d en todos los objetos y 1_d en todos los morfismos.

Ejemplo A.1.7. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ categorías y $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un funtor. Si f es una retracción (una sección) en $\mathfrak{C}$ entonces f_* es una retracción (respectivamente una sección) en $\mathfrak{D}$.

Un funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ induce funciones $\hom_{\mathfrak{C}}(c,c') \to \hom_{\mathfrak{D}}(F(c),F(c'))$ para todo par de objetos $c, c' \in \operatorname{obj}\mathfrak{C}$. Decimos que F es *pleno* si estas funciones son suryectivas; decimos que F es *fiel* si son inyectivas.

Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Una *subcategoría* $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{C}$ es una categoría tal que todos los objetos de $\mathfrak{D}$ son objetos de $\mathfrak{C}$, $\hom_{\mathfrak{D}}(x,y) \subseteq \hom_{\mathfrak{C}}(x,y)$ para todo par $x, y \in \operatorname{obj}\mathfrak{D}$, la composición en $\mathfrak{D}$ es la restricción de la composición en $\mathfrak{C}$ y los morfismos identidad de $\mathfrak{D}$ son los morfismos identidad de $\mathfrak{C}$. Si $\mathfrak{D}$ es una subcategoría de $\mathfrak{C}$ la inclusión $\mathfrak{D} \hookrightarrow \mathfrak{C}$ es un funtor fiel. Si además la inclusión es plena decimos que $\mathfrak{D}$ es una *subcategoría plena* de $\mathfrak{C}$.

Ejemplo A.1.8. La categoría Ass_1 de anillos con unidad y morfismos que preservan el 1 es una subcategoría de Ass. El funtor inclusión $\mathfrak{Ass}_1 \hookrightarrow \mathfrak{Ass}$ no es pleno. El morfismo

$$\mathbb{Z} \longrightarrow M_2(\mathbb{Z}), \quad n \mapsto \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es un ejemplo de morfismo que pertenece a $\hom_{\mathfrak{Ass}}(\mathbb{Z}, M_2(\mathbb{Z}))$ pero no a $\hom_{\mathfrak{Ass}_1}(\mathbb{Z}, M_2(\mathbb{Z}))$.

Ejemplo A.1.9. Llamamos $\mathfrak{Pol}$ a la subcategoría plena de $\mathfrak{Comp}$ cuyos objetos son los poliedros.

Ejemplo A.1.10. Un *esqueleto* de una categoría $\mathfrak{C}$ es una subcategoría plena $\mathfrak{C}_0$ tal que todo objeto de $\mathfrak{C}$ es isomorfo a un único objeto de $\mathfrak{C}_0$. Puede verse que dos esqueletos cualesquiera de una misma categoría son isomorfos. Esto significa que si $\mathfrak{C}_0$ y $\mathfrak{C}'_0$ son esqueletos de $\mathfrak{C}$, existen funtores $F : \mathfrak{C}_0 \to \mathfrak{C}'_0$ y $G : \mathfrak{C}'_0 \to \mathfrak{C}_0$ tales que $FG = 1_{\mathfrak{C}'_0}$ y $GF = 1_{\mathfrak{C}_0}$.

Definición A.1.11. Sean $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtores. Dar una *transformación natural* η de F a G es dar para cada $c \in \operatorname{obj}\mathfrak{C}$ un morfismo $\eta_c : F(c) \to G(c)$ de manera que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\eta_c"] & F(c') \arrow[d, "\eta_{c'}"] \\ G(c) \arrow[r, "f_*"'] & G(c') \end{tikzcd}$$

conmute para cualquier morfismo $f : c \to c'$.

Ejemplo A.1.12. Sean $\mathfrak{J}$ y $\mathfrak{C}$ categorías. Los funtores de $\mathfrak{J}$ a $\mathfrak{C}$ son los objetos de una categoría, que denotamos $\mathfrak{C}^{\mathfrak{J}}$. Un morfismo de F a G en $\mathfrak{C}^{\mathfrak{J}}$ es una transformación natural de F a G. Un *isomorfismo natural* de F a G es un isomorfismo de F a G en $\mathfrak{C}^{\mathfrak{J}}$.

Si d es un objeto de una categoría $\mathfrak{D}$ y $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es un funtor, definimos una categoría $(c \downarrow F)$ de la siguiente manera.

- Los objetos de $(d \downarrow F)$ son pares (f, c) con $c \in \operatorname{obj} \mathfrak{C}$ y $f : d \to F(c)$.
- Los morfismos $h : (f, c) \to (f', c')$ son morfismos $h : c \to c'$ en $\mathfrak{C}$ que hacen conmutar el diagrama.

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ F(c) \arrow[rr, "h_*"'] & & F(c') \end{tikzcd}$$

- La composición y las identidades están dadas por la composición y las identidades en $\mathfrak{D}$.

La categoría $(d \downarrow F)$ se llama *coma categoría.*

Notación. Si el funtor F es la inclusión de una subcategoría $\mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ usaremos la notación $(d \downarrow \mathfrak{C})$ para referirnos a $(d \downarrow F)$.

A.2. Colímites

Definición A.2.1. Un *colímite* de un funtor $F : \mathfrak{J} \to \mathfrak{C}$ es un objeto de $\mathfrak{C}$ notado $\operatorname{colim} F$ junto con una transformación natural $\tau : F \to \Delta(\operatorname{colim} F)$ universal entre todas las transformaciones naturales $F \to \Delta(c)$ con $c \in \operatorname{obj} \mathfrak{C}$. Esto significa que dados $c \in \operatorname{obj} \mathfrak{C}$ y una transformación natural $\eta : F \to \Delta(c)$ existe una única transformación natural $\varphi : \Delta(\operatorname{colim} F) \to \Delta(c)$ tal que $\varphi\tau = \eta$. Observamos que dar una transformación natural $\Delta(\operatorname{colim} F) \to \Delta(c)$ es lo mismo que dar un morfismo $\operatorname{colim} F \to c$.

Aclaración. Si $G : \mathfrak{J} \to \mathfrak{C}$ es un funtor contravariante, un colímite de G es un colímite del funtor (covariante) $G : \mathfrak{J}^{op} \to \mathfrak{C}$.

De la propiedad universal del colímite sigue que dos colímites cualesquiera de un funtor F son isomorfos. Esto justifica el uso de la notación $\operatorname{colim} F$ sin peligro de ambigüedad. Supongamos que $C, C' \in \operatorname{obj} \mathfrak{C}$, $\tau : F \to \Delta(C)$ y $\tau' : F \to \Delta(C')$ son dos colímites de F. Por la propiedad universal del colímite existen dos transformaciones naturales

$$\eta : \Delta(C) \to \Delta(C'), \quad \eta' : \Delta(C') \to \Delta(C)$$

tales que $\eta\tau = \tau'$ y $\eta'\tau' = \tau$. Entonces $\eta'\eta\tau = \tau$. Usando nuevamente la propiedad universal, existe una *única* transformación natural $\nu : \Delta(C) \to \Delta(C)$ tal que $\nu\tau = \tau$. Como $\eta'\eta\tau = \tau$ y $1\tau = \tau$ sigue que $\eta\eta' = 1$. De manera análoga se muestra que $\eta'\eta = 1$ y sigue que $\eta : C \to C'$ es un isomorfismo.

Ejemplo A.2.2. Sea $\mathfrak{J}$ la categoría asociada al conjunto $P = \{2, 3\}$ con el orden dado por la divisibilidad. $\mathfrak{J}$ tiene dos objetos y ningún morfismo distinto de las identidades. Dar un funtor $F : \mathfrak{J} \to \mathfrak{C}$ es dar dos objetos $F(2), F(3) \in \mathfrak{C}$. Si $c \in \operatorname{obj} \mathfrak{C}$, dar una transformación natural $\eta : F \to \Delta(c)$ es lo mismo que dar dos morfismos como sigue.

$$\begin{tikzcd} F(2) \arrow[dr, "\eta_2"] & \\ & c \\ F(3) \arrow[ur, "\eta_3"'] & \end{tikzcd} \tag{A.1}$$

Un colímite de F es un objeto $\operatorname{colim} F \in \operatorname{obj} \mathfrak{C}$ junto con una transformación natural $\tau : F \to \Delta(\operatorname{colim} F)$ tal que para todo diagrama (A.1) existe un único morfismo $\operatorname{colim} F \to c$ de manera que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
F(2) \arrow[dr, "\tau_2"] \arrow[drr, bend left, "\eta_2"] & & \\
& \operatorname{colim} F \arrow[r] & c \\
F(3) \arrow[ur, "\tau_3"'] \arrow[urr, bend right, "\eta_3"'] & &
\end{tikzcd}$$

Un colímite de F es un *coproducto* de $F(2)$ y $F(3)$.

Ejemplo A.2.3. Sea $\mathfrak{J}$ la categoría asociada al conjunto $P = \{1, 2, 3\}$ con el orden dado por la divisibilidad. $\mathfrak{J}$ tiene tres objetos y dos morfismos $1 \to 2$ y $1 \to 3$ distintos de las identidades. Dar un funtor $F : \mathfrak{J} \to \mathfrak{C}$ es dar tres objetos $F(1), F(2), F(3) \in \operatorname{obj} \mathfrak{C}$ y dos morfismos $F(1) \to F(2)$ y $F(1) \to F(3)$. Si $c \in \operatorname{obj} \mathfrak{C}$, dar una transformación natural $\eta : F \to \Delta(c)$ es lo mismo que dar dos morfimos $\eta_2 : F(2) \to c$ y $\eta_3 : F(3) \to c$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
F(1) \arrow[r] \arrow[d] & F(2) \arrow[d, "\eta_2"] \\
F(3) \arrow[r, "\eta_3"'] & c
\end{tikzcd} \tag{A.2}$$

Un colímite de F es un objeto $\operatorname{colim} F \in \operatorname{obj} \mathfrak{C}$ junto con una transformación natural $\tau : F \to \Delta(\operatorname{colim} F)$ tal que para todo diagrama (A.2) existe un único morfismo $\operatorname{colim} F \to c$ de manera que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
F(1) \arrow[r] \arrow[d] & F(2) \arrow[d, "\tau_2"] \arrow[ddr, bend left, "\eta_2"] & \\
F(3) \arrow[r, "\tau_3"'] \arrow[drr, bend right, "\eta_3"'] & \operatorname{colim} F \arrow[dr] & \\
& & c
\end{tikzcd}$$

El diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(1) \arrow[r] \arrow[d] & F(2) \arrow[d, "\tau_2"] \\
F(3) \arrow[r, "\tau_3"'] & \operatorname{colim} F
\end{tikzcd}$$

se llama *cuadrado cocartesiano*.

Definición A.2.4. Una categoría $\mathfrak{J}$ se dice *filtrante* si

1. Dados $i, j \in \operatorname{obj} \mathfrak{J}$ existe algún $k \in \operatorname{obj} \mathfrak{J}$ con morfismos $i \to k$, $j \to k$.
2. Dados dos morfismos paralelos $u, v : i \to j$ existe un morfismo $w : j \to k$ tal que $wu = wv$.

Ejemplo A.2.5. Si $\mathfrak{C}$ es la categoría asociada a un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$, la segunda condición de la definición anterior se cumple siempre porque de un objeto a otro hay a lo sumo un morfismo. Decir que $\mathfrak{C}$ es filtrante equivale a decir que para todo par $x, y \in P$ existe $z \in P$ con $x, y \leq z$. Si $(P, \leq)$ tiene esta última propiedad decimos que $(P, \leq)$ es un *conjunto dirigido*. Un colímite de un funtor $F : P \to \mathfrak{D}$ con P un conjunto dirigido se llama *límite directo* de F.

Definición A.2.6. Un *colímite filtrante* es un colímite de un funtor $F : \mathfrak{J} \to \mathfrak{C}$ con $\mathfrak{J}$ filtrante.

Observación A.2.7. Si $G : \mathfrak{J} \to \mathfrak{C}$ es un funtor contravariante y $\mathfrak{J}^{op}$ es filtrante, un colímite de G es un colímite filtrante.

Definición A.2.8. [ML71, p.213] Un funtor $L : \mathfrak{I} \to \mathfrak{J}$ se dice *final* si para todo $k \in \mathfrak{J}$ la coma categoría $(k \downarrow L)$ es no vacía y conexa.

Lema A.2.9. *[ML71, p.213] Si $L : \mathfrak{I} \to \mathfrak{J}$ es un funtor final y $H : \mathfrak{J} \to \mathfrak{C}$ es un funtor tal que existe* $\operatorname{colim} H$*, entonces existe* $\operatorname{colim} HL$ *y el morfismo canónico* $\operatorname{colim} HL \to \operatorname{colim} H$ *es un isomorfismo.*

Definición A.2.10. Sea $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{Ab}$ un funtor. Sea $H : \mathfrak{J} \to \mathfrak{C}$ otro funtor con $\mathfrak{J}$ filtrante tal que existe $\operatorname{colim} H$. Sea τ la transformación natural universal $H \to \Delta(\operatorname{colim} H)$. La composición $F\tau$ es una transformación natural de FH en $\Delta(F(\operatorname{colim} H))$. Decimos que F *conmuta con colímites filtrantes* si para todo H en la situación recién descripta la transformación natural $F\tau$ es un colímite de FH.

Para terminar la sección mencionamos un resultado que será útil más adelante.

Lema A.2.11. *[Wei95, Lemma 2.6.14] Sea $\mathfrak{I}$ una categoría filtrante y $H : \mathfrak{I} \to \mathfrak{Ab}$ un funtor. Entonces*

1. *Todo elemento $x \in \operatorname{colim} H$ es la imagen de algún elemento $x_i \in H(i)$ por el morfismo $H(i) \to \operatorname{colim} H$.*

2. *Si $x_i \in H(i)$ está en el núcleo de $H(i) \to \operatorname{colim} H$ entonces x_i está en el núcleo de $H(i) \to H(j)$ para alguna flecha $i \to j$ en $\mathfrak{I}$.*

Apéndice B

Variedades algebraicas

A lo largo de este capítulo k es un cuerpo algebraicamente cerrado.

B.1. La topología de Zariski en k^N

Denotamos k_N al anillo $k[x_1, \ldots, x_N]$ de polinomios en N variables con coeficientes en k.

Dado un conjunto $C \subseteq k_N$ definimos $V(C) := \{x \in k^N : f(x) = 0 \quad \forall f \in C\}$. Si I es el ideal de k_N generado por C entonces $V(I) = V(C)$. Un *conjunto algebraico* en k^N es un conjunto de la forma $V(I)$ para algún ideal I. Valen las siguientes propiedades, de las que se deduce que los conjuntos algebraicos en k^N son los cerrados para una topología en k^N.

1. $V(0) = k^N$ y $V(k_N) = \emptyset$.
2. $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$.
3. $\bigcap_l V(I_l) = V\left(\bigoplus_l I_l\right)$.

La topología en k^N cuyos cerrados son los conjuntos algebraicos se llama *topología de Zariski*.

Ejemplo B.1.1. Los conjuntos $D(g) := k^N - V(g)$ con $g \in k_N$ se llaman *abiertos principales* y son una base de la topología de Zariski en k^N. En efecto, supongamos que $f \in k^N - V(I)$ con $I \trianglelefteq k_N$. Como $V(I) = \bigcap_{h \in I} V(h)$, existe algún $h \in I$ tal que $f \notin V(h)$, es decir, $f \in D(h)$. Por otra parte es claro que $D(h) \subseteq k^N - V(I)$ para todo $h \in I$.

Dado un conjunto $C \subseteq k^N$ definimos $I(C) := \{f \in k_N : f(x) = 0 \quad \forall x \in C\}$. Los conjuntos $I(C)$ son ideales radicales y usando el teorema de los ceros de Hilbert se prueba el resultado que sigue.

Proposición B.1.2. *Hay una correspondencia biyectiva que invierte el orden entre conjuntos algebraicos en k^N e ideales radicales de k_N, dada por $V \mapsto I(V)$ y $I \mapsto V(I)$.*

Un espacio topológico se dice *irreducible* si no puede escribirse como unión de dos cerrados propios. En la proposición anterior, la correspondencia entre conjuntos algebraicos e ideales se restringe a una correspondencia entre conjuntos algebraicos irreducibles (resp. puntos) e ideales primos (resp. ideales maximales).

Ejemplo B.1.3. El conjunto algebraico k es irreducible. En efecto, los cerrados propios de k son los ceros de polinomios en una variable, es decir, los conjuntos finitos de puntos. Si k es algebraicamente cerrado, k es infinito y no se escribe como unión de cerrados propios.

B.2. La topología de Zariski en $\mathbb{P}^N$

Denotamos $\mathbb{P}^N$ al espacio proyectivo de dimensión N sobre k. Es decir, $\mathbb{P}^N$ es el cociente de k^{N+1} por la relación de equivalencia $(x_0, \ldots, x_N) \sim (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_N)$, $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$. Llamamos S_N al anillo graduado $k[x_0, \ldots, x_N]$.

Un ideal $I \trianglelefteq S_N$ se llama *homogéneo* si cada vez que $\sum F_i \in I$ con F_i homogéneos de distinto grado se tiene $F_i \in I$ para todo i. Un ideal es homogéneo si y sólo si está generado por elementos homogéneos.

Dados $f \in S_N$ y $p \in \mathbb{P}^N$ decimos que f se anula en p (y escribimos $f(p) = 0$) si $f(x) = 0$ para todo $x \in k^{N+1}$ representante de p. Si $F \in S_N$ es homogéneo, $F(p) = 0$ si y sólo si $F(x) = 0$ para *algún* $x \in k^{N+1}$ representante de p. Si $f = \sum F_i$ con $F_i \in S_N$ homogéneos de distinto grado y $f(p) = 0$ puede verse que $F_i(p) = 0$ para todo i.

Dado un conjunto $C \subseteq S_N$ definimos $V(C) := \{p \in \mathbb{P}^N : f(p) = 0 \quad \forall f \in C\}$. Si I es el ideal homogéneo de S_N generado por C entonces $V(I) = V(C)$. Un *conjunto algebraico* en $\mathbb{P}^N$ es un conjunto de la forma $V(I)$ para algún ideal homogéneo I. Valen las siguientes propiedades, de las que se deduce que los conjuntos algebraicos en $\mathbb{P}^N$ son los cerrados para una topología en $\mathbb{P}^N$.

1. $V(0) = \mathbb{P}^N$ y $V(S_N) = \emptyset$.
2. $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$.
3. $\bigcap_l V(I_l) = V\left(\bigoplus_l I_l\right)$.

La topología en $\mathbb{P}^N$ cuyos cerrados son los conjuntos algebraicos se llama *topología de Zariski*.

Ejemplo B.2.1. Denotamos $[x_0 : \cdots : x_N]$ a la clase de equivalencia de $(x_0, \ldots, x_N)$ en $\mathbb{P}^N$. Sea $U_0 := \mathbb{P}^N - V(x_0) = \{[x_0 : \cdots : x_N] \in \mathbb{P}^N : x_0 \neq 0\}$. U_0 es un abierto Zariski en $\mathbb{P}^N$ y todo $p \in U_0$ tiene un único representante de la forma $(1, x_1, \ldots, x_N)$. Tenemos entonces una biyección $\varphi_0 : U_0 \longrightarrow k^N$, $\varphi_0[1 : x_1 : \cdots : x_N] = (x_1, \ldots, x_N)$. Veamos que esta biyección es un homeomorfismo para las respectivas topologías de Zariski. Dado $F \in S_N$ homogéneo llamemos $\alpha(F)$ al polinomio $F(1, x_1, \ldots, x_N) \in k_N$. Tenemos que $\varphi_0(U_0 \cap V(F)) = V(\alpha(F))$ y por lo tanto φ_0^{-1} es continua. Dado $f \in k_N$ llamemos $\beta(f)$ al polinomio homogéneo $x_0^d f(x_1/x_0, \ldots, x_N/x_0)$ donde d es el grado de f. Tenemos $\varphi_0^{-1}(V(f)) = U_0 \cap V(\beta(f))$ y por lo tanto φ_0 es continua.

De manera similar podemos definir $U_i := \mathbb{P}^N - V(x_i)$ para $1 \leq i \leq N$ y obtenemos un cubrimiento de $\mathbb{P}^N$ por abiertos homeomorfos a k^N.

B.3. Variedades algebraicas y funciones regulares

Consideramos en k^N y en $\mathbb{P}^N$ la topología de Zariski, a menos que se indique lo contrario.

Decimos que un subconjunto de un espacio topológico es *localmente cerrado* si es la intersección de un abierto y un cerrado.

Definición B.3.1. Sea $W \subseteq k^N$ localmente cerrado. Una función $f : W \longrightarrow k$ es *regular* si para todo $p \in W$ existen un abierto $U \subseteq W$ con $p \in U$ y polinomios $g, h \in k_N$ con h nunca nulo en U tales que $f = g/h$ en U. Es decir, f es regular si localmente es un cociente de polinomios, pensando a los polinomios como funciones $k^N \longrightarrow k$.

Observación B.3.2. Sean W y $f : W \longrightarrow k$ como en la definición anterior. Si f es regular entonces es continua (con la topología de Zariski). En efecto, veamos que la preimagen de un cerrado es cerrada. Como los cerrados propios de k son sus subconjuntos finitos basta ver que $f^{-1}(a)$ es cerrado para todo $a \in k$. Además, para ver que $f^{-1}(a)$ es cerrado en W alcanza con ver que hay un cubrimiento abierto de W tal que $f^{-1}(a) \cap U$ es cerrado en U para todo abierto U del cubrimiento. Consideramos un cubrimiento por abiertos de W en los que f es un cociente de polinomios. Sea $U \subseteq W$ abierto tal que $f = g/h$ en U, con $g, h \in k_N$, h nunca nulo en U. Entonces

$$f^{-1}(a) \cap U = \{p \in U : g(p)/h(p) = a\} = \{p \in U : (g - ah)(p) = 0\} = U \cap V(g - ah)$$

es cerrado en U.

Definición B.3.3. Sea $W \subseteq \mathbb{P}^N$ localmente cerrado. Sean $U_i \subseteq \mathbb{P}^N$ $(0 \leq i \leq N)$ los abiertos del ejemplo B.2.1 y sean $\varphi_i : U_i \longrightarrow k^N$ los homeomorfismos con k^N. A través de φ_i podemos identificar a $W \cap U_i$ con $\varphi_i(W \cap U_i)$, y este último es un subconjunto localmente cerrado de k^N. Decimos que una función $f : W \longrightarrow k$ es *regular* si $f\varphi_i^{-1} : \varphi_i(W \cap U_i) \longrightarrow k$ es una función regular para todo i.

Observación B.3.4. Al igual que en el caso afín, como los φ_i son homeomorfismos, las funciones regulares son continuas.

Ejemplo B.3.5. Si $W \subseteq \mathbb{P}^N$ es localmente cerrado y $f : W \longrightarrow k$ es una función, decir que f es regular equivale a decir que localmente f es un cociente de polinomios homogéneos de igual grado. Supongamos que f es regular y sea $p \in W$. Podemos suponer que $p \in W \cap U_0$. Como $f\varphi_0^{-1} : \varphi_0(W \cap U_0) \longrightarrow k$ es regular, existen $U \subseteq \varphi_0(W \cap U_0)$ abierto con $\varphi_0(p) \in U$ y $g, h \in k_N$ con h nunca nulo en U tales que $f\varphi_0^{-1} = g/h$ en U. Entonces

$$f\left[x_0 : \cdots : x_N\right] = f\left[1 : x_1/x_0 : \cdots : x_N/x_0\right] = \frac{x_0^k f(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)}{x_0^k g(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)}$$

para $[x_0 : \cdots : x_N] \in \varphi_0^{-1}(U)$ y k suficientemente grande. Es decir, f se escribe en un entorno de p como cociente de polinomios homogéneos de igual grado. Recíprocamente, sean $V \subseteq W$ abierto, $p \in V$ y $G, H \in S_N$ polinomios homogéneos de igual grado tales que $f = G/H$ en V. Entonces $f\varphi_0^{-1} = \alpha(G)/\alpha(H)$ en $\varphi_0(V)$, donde $\alpha(F) = F(1, x_1, \ldots, x_N) \in k_N$. Es decir, $f\varphi_0^{-1} : \varphi_0(W \cap U_0) \longrightarrow k$ es regular.

Definición B.3.6. Una *variedad algebraica* (cuasi-proyectiva) es un subconjunto localmente cerrado de k^N o de $\mathbb{P}^N$. Si V y W son dos variedades, una función $f : V \longrightarrow W$ es *regular* si es continua y para todo abierto $U \subseteq W$ y toda función regular $g : U \longrightarrow k$ la función $gf : f^{-1}(U) \longrightarrow k$ es regular.

La composición de funciones regulares es una función regular, y tenemos una categoría de variedades algebraicas sobre k con funciones regulares.

Ejemplo B.3.7. Las funciones $\varphi_i : U_i \longrightarrow k^N$ del ejemplo B.2.1 son isomorfismos en la categoría de variedades algebraicas con funciones regulares.

Ejemplo B.3.8. Sean $V_1 \subseteq k^{N_1}$ y $V_2 \subseteq k^{N_2}$ conjuntos algebraicos con $I(V_j) \trianglelefteq k\left[x_1^j, \ldots, x_{N_j}^j\right]$. Entonces el conjunto $V_1 \times V_2$ se identifica con el conjunto algebraico $V(I(V_1) + I(V_2)) \subseteq k^{N_1+N_2}$, $I(V_1) + I(V_2) \trianglelefteq k\left[x_1^1, \ldots, x_{N_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{N_2}^2\right]$. Las proyecciones $k^{N_1+N_2} \longrightarrow k^{N_j}$ inducen morfismos $V_1 \times V_2 \longrightarrow V_j$. La variedad $V_1 \times V_2$ con estos morfismos es un producto de V_1 y V_2 en la categoría de variedades con funciones regulares.

Decimos que una variedad es *afín* si es isomorfa a un conjunto algebraico de k^N.

Ejemplo B.3.9. Los conjuntos $D(g) = k^N - V(g)$ con $g \in k_N$ son variedades afines. En efecto, el morfismo $D(g) \longrightarrow V(x_{N+1}f(x_1, \ldots, x_N) - 1) \subseteq k^{N+1}$, $(x_1, \ldots, x_N) \mapsto (x_1, \ldots, x_N, 1/f(x_1, \ldots, x_N))$ es un isomorfismo.

Como los conjuntos $D(g)$ con $g \in k_N$ son una base de abiertos de k^N, k^N tiene una base de abiertos afines. Más aún, lo mismo ocurre con cualquier variedad. Si V es un conjunto localmente cerrado en k^N, un abierto de V es de la forma $V(I) - V(J)$ para ciertos ideales I y J de k_N. Pero

$$V(I) - V(J) = \bigcup_{g \in J} V(I) - V(g) = \bigcup_{g \in J} V(I) \cap D(g)$$

y $V(I) \cap D(g)$ es afín por ser un cerrado en $D(g)$ afín. Si V es un conjunto localmente cerrado en $\mathbb{P}^N$, podemos usar los isomorfismos φ_i del ejemplo B.2.1 para conseguir un cubrimiento de V por abiertos isomorfos a conjuntos localmente cerrados en k^N y el resultado sigue de lo anterior.

Si V es una variedad, las funciones regulares $V \longrightarrow k$ forman un anillo $\mathcal{O}_V$ con la suma y el producto usuales.

Ejemplo B.3.10. Si $V \subseteq k^N$ es un conjunto algebraico, llamamos *anillo de coordenadas* de V al cociente $k_N/I(V)$ y lo denotamos $k[V]$. Dado $f \in k_N$, f induce una función regular $k^N \longrightarrow k$ que se restringe a una función regular $V \longrightarrow k$. Tenemos entonces un morfismo de anillos $k_N \longrightarrow \mathcal{O}_V$ cuyo núcleo es exactamente $I(V)$. Este morfismo induce un isomorfismo $k[V] \simeq \mathcal{O}_V$. Sólo hay que ver que toda función regular $V \longrightarrow k$ es inducida por algún polinomio. Sea $f \in \mathcal{O}_V$. Como f es regular, existe un cubrimiento de V por abiertos U_i tales que $f = a_i/b_i$ en U_i, con $a_i, b_i \in k_N$. Como los conjuntos de la forma $V \cap D(g)$ son una base de abiertos de V podemos suponer que $U_i = V \cap D(g_i)$. Sea J el ideal de k_N generado por los polinomios g_ib_i y por $I(V)$. Entonces $V(J) = \emptyset$. En efecto, si no fuera así, existiría $x \in V(J) \subseteq V$. Pero entonces $x \in U_i$ para algún i y luego $g_ib_i(x) \neq 0$, llegándose a una contradicción porque $x \in V(J)$. Por el teorema de los ceros de Hilbert debe ser $J = (1)$. Entonces $1 = \sum c_ib_ig_i + c \in k_N$ para ciertos polinomios $c_i \in k_N$ y $c \in I(V)$. Para todo $x \in V$ tenemos

$$f(x) = f(x)(\sum c_ib_ig_i + c)(x) = \sum c_i(x)a_i(x)g_i(x)$$

y entonces f está inducida por el polinomio $\sum c_ia_ig_i$.

Ejemplo B.3.11. Si $V_1 \subseteq k_{N_1}$ y $V_2 \subseteq k^{N_2}$ son conjuntos algebraicos, $V_1 \times V_2 \subseteq k^{N_1+N_2}$ es un conjunto algebraico (ejemplo B.3.8). Puede verse que $k[V_1 \times V_2] \simeq k[V_1] \otimes_k k[V_2]$ [Sha74, p.25].

Una k-álgebra se dice *reducida* si no tiene elementos nilpotentes. El anillo de coordenadas de una variedad afín V es una k álgebra reducida porque $I(V)$ es un ideal radical.

Proposición B.3.12. *[Har77, Ch. I, Corollary 3.8] El funtor $V \mapsto \mathcal{O}_V$ es una equivalencia de categorías entre la categoría de variedades algebraicas afines con funciones regulares y la categoría de k-álgebras reducidas finitamente generadas con morfismos de álgebras.*

Si V es una variedad y $p \in V$, llamamos $\mathcal{O}_{V,p} := \operatorname{colim}_{p \in U} \mathcal{O}_U$ donde el colímite recorre todos loa abiertos $U \subseteq V$ que contienen a p. Los elementos de $\mathcal{O}_{V,p}$ son gérmenes de funciones regulares en p y tenemos un morfismo $\mathcal{O}_{V,p} \longrightarrow k$ evaluación en p. Las unidades de $\mathcal{O}_{V,p}$ son los gérmenes que no están en el núcleo de la evaluación en p, y por lo tanto $\mathcal{O}_{V,p}$ es un anillo local cuyo ideal maximal es el núcleo de la evaluación en p.

Proposición B.3.13. *Si $V \subseteq k^N$ es un conjunto algebraico y $p \in V$ entonces $k[V]_{\mathfrak{m}_p} \simeq \mathcal{O}_{V,p}$ donde $\mathfrak{m}_p = \{f \in k[V] : f(p) = 0\}$ es el núcleo de la evaluación en p.*

Definición B.3.14. Sea X un espacio topológico. Definimos la *dimensión* de X como el supremo de los $n \geq 0$ tales que existe una cadena

$$\emptyset \neq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n$$

de cerrados de X irreducibles. Llamamos *dimensión* de una variedad V a su dimensión como espacio topológico.

Ejemplo B.3.15. Si $V = k$, los cerrados irreducibles propios de V son los puntos. Como V es irreducible, $\dim V = 1$.

Definición B.3.16. Sea A un anillo conmutativo. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, la *altura* de $\mathfrak{p}$ es el supremo de los $n \geq 0$ tales que existe una cadena

$$\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$$

de ideales primos. La *dimensión de Krull* de A es el supremo de las alturas de los ideales primos de A.

Ejemplo B.3.17. Sea $V \subseteq k^N$ un conjunto algebraico. Por la proposición B.1.2 los ideales primos de $k[V]$ (es decir, los ideales primos de k_N que contienen a $I(V)$) se corresponden con los subconjuntos cerrados irreducibles de V. Entonces $\dim V = \operatorname{Krull} \dim k[V]$.

B.4. Variedades no singulares

Dado $f \in k_N$ tenemos un funcional lineal $D_p f : k^N \to k$, $y \mapsto \sum_j \partial f/\partial x_j(p) y_j$. Si $f, g \in k_N$, $D_p(f+g) = D_p f + D_p g$ y $D_p(fg) = f(p) D_p g + g(p) D_p f$ (*regla de Leibniz*). Si $\lambda \in k$ y $f \in k_N$, $D_p(\lambda f) = \lambda D_p f$. Tenemos una transformación lineal $D_p : k_N \to (k^N)^*$.

Definición B.4.1. Sean $V \subseteq k^N$ un conjunto algebraico y $p \in V$. Supongamos que $I(V) = (f_1, \ldots, f_t)$. El *espacio tangente* de V en p se define como $\Theta_{V,p} := \{y \in k^N : \sum_j \partial f_i/\partial x_j(p) y_j = 0 \quad \forall i\}$. $\Theta_{V,p}$ es un subespacio lineal de k^N.

El conjunto $\Theta_{V,p}$ no depende de los f_i elegidos. En efecto, tenemos $\Theta_{V,p} = \bigcap_{f \in I(V)} \ker D_p f$. Una de las inclusiones es clara porque $\Theta_{V,p} = \bigcap D_p f_i$. Para ver la otra inclusión, sean $y \in \Theta_{V,p}$ y $f \in I(V)$. Entonces $f = \sum g_i f_i$ para ciertos polinomios g_i, y usando la regla de Leibniz

$$D_p f(y) = \sum (g_i(p) D_p f_i(y) + f_i(p) D_p g_i(y)) = 0$$

de donde $y \in \ker D_p f$.

Si $V = V(f_1, \ldots, f_t) \subseteq k^N$ es un conjunto algebraico, veremos que D_p induce una transformación lineal $d_p : k[V] \to (\Theta_{V,p})^*$. Dado $f \in k_N$ definimos $d_p f := D_p f|_{\Theta_{V,p}}$. Si $f \in I(V)$, $d_p f = 0$ al ser $\Theta_{V,p} = \bigcap_{f \in I(V)} \ker D_p f$. Entonces la transformación lineal $d_p : k_N \to (\Theta_{V,p})^*$ pasa al cociente por $I(V)$. El siguiente resultado permite reformular la definición de $\Theta_{V,p}$ de manera intrínseca.

Proposición B.4.2. *La transformación lineal $d_p : k[V] \to (\Theta_{V,p})^*$ definida arriba induce un isomorfismo lineal $\mathscr{M}_p/\mathscr{M}_p^2 \simeq (\Theta_{V,p})^*$, donde $\mathscr{M}_p$ es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{V,p}$.*

Demostración. Por el ejemplo B.3.10 tenemos un isomorfismo natural $\mathcal{O}_{V,p} \simeq k[V]_{\mathfrak{m}_p}$. Sea $d_p : k[V] \to (\Theta_{V,p})^*$ la transformación lineal definida arriba. Definimos una transformación lineal $k[V]_{\mathfrak{m}_p} \to (\Theta_{V,p})^*$,

$$\frac{f}{g} \mapsto \frac{g(p) d_p f - f(p) d_p g}{g(p)^2}$$

que también llamamos d_p. Hay que ver la buena definición. Si $f/g = \tilde{f}/\tilde{g}$ en $k[V]_{\mathfrak{m}_p}$ existe $h \in k[V]$ con $h(p) \neq 0$ tal que $hf\tilde{g} = h\tilde{f}g$ en $k[V]$. Aplicando d_p en la última igualdad, usando la regla de Leibniz y usando que $h(p), g(p), \tilde{g}(p) \neq 0$ se llega a la igualdad buscada.

Sea $\mathscr{M}_p = \{f/g \in k[V]_{\mathfrak{m}_p} : f(p) = 0\}$ el ideal maximal de $k[V]_{\mathfrak{m}_p}$. Consideramos la restricción a $\mathscr{M}_p$ de la transformación lineal $d_p : k[V]_{\mathfrak{m}_p} \to (\Theta_{V,p})^*$.

Para ver que $d_p : \mathscr{M}_p \to (\Theta_{V,p})^*$ es suryectiva, tomemos $\varphi \in (\Theta_{V,p})^*$. φ se extiende a un funcional lineal en k^N, $y \mapsto \sum a_i y_i$ para ciertos $a_i \in k$. Entonces $\varphi = d_p(\sum a_i(x_i - p_i))$ con $\sum a_i(x_i - p_i) \in \mathscr{M}_p$.

Para ver que $\ker d_p = \mathscr{M}_p^2$, supongamos que $d_p(f/g) = 0$ con $f/g \in \mathscr{M}_p$ y $f, g \in k_N$. Como $f(p) = 0$, tenemos $0 = d_p(f/g) = d_p f/g(p)$ y entonces $D_p f = 0$ en $\Theta_{V,p}$. Como $\Theta_{V,p} = \bigcap \ker D_p f_i$ debe ser $D_p f = \sum \lambda_i D_p f_i$ para ciertos $\lambda_i \in k$. Sea $h := f - \sum \lambda_i f_i \in k_N$. Entonces $h = f$ en $\mathscr{M}_p$. Tenemos

$$h = f - \sum \lambda_i f_i = a_0 + \sum a_1^i (x_i - p_i) + \sum a_2^{ij} (x_i - p_i)(x_j - p_j) + \cdots$$

pero $a_0 = 0$ porque $h(p) = 0$, y $a_1^i = 0$ para todo i porque $D_p h = D_p f - \sum \lambda_i D_p f_i = 0$. Entonces $h \in \mathscr{M}_p^2$. □

La proposición anterior motiva las siguientes definiciones.

Definición B.4.3. Sean V una variedad algebraica y $p \in V$. El *espacio tangente* de V en p es el espacio vectorial dual de $\mathscr{M}_p/\mathscr{M}_p^2$, donde $\mathscr{M}_p$ es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{V,p}$. El espacio $\mathscr{M}_p/\mathscr{M}_p^2$ se llama *espacio cotangente* de V en p.

La última definición de espacio tangente tiene sentido para variedades no necesariamente afines y es funtorial. Más precisamente, si $f : V \to W$ es un morfismo de variedades algebraicas y $p \in V$, tenemos un morfismo de k-álgebras $f^* : \mathcal{O}_{W,f(p)} \to \mathcal{O}_{V,p}$. Además $f^*(\mathscr{M}_{W,f(p)}) \subseteq \mathscr{M}_{V,p}$ por lo que tenemos un morfismo k-lineal $f^* : \mathscr{M}_{W,f(p)}/\mathscr{M}^2_{W,f(p)} \to \mathscr{M}_{V,p}/\mathscr{M}^2_{V,p}$. Dualizando obtenemos una transformación lineal $\Theta_{V,p} \to \Theta_{W,f(p)}$ que llamamos *diferencial* de f en p y denotamos d_p.

A continuación definimos punto no singular. Al igual que hicimos con la definición de espacio tangente, empezamos con una variedad afín $V \subseteq k^N$ para motivar la definición general. Además supondremos que V es irreducible para simplificar las cosas.

Definición B.4.4. Sean $V \subseteq k^N$ un conjunto algebraico irreducible y $p \in V$. Supongamos que $I(V) = (f_1, \dots, f_t)$. Recordamos que $\Theta_{V,p} = \{y \in k^N : \sum_j \partial f_i/\partial x_j(p) y_j = 0 \quad \forall i\}$. Decimos que p es un punto *no singular* de V si la matriz $(\partial f_i/\partial x_j)_{ij}$ tiene rango $N - d$ donde $d = \dim V$.

Decir que p es no singular equivale a decir que $\dim \mathscr{M}_p/\mathscr{M}_p^2 = \dim \Theta_{V,p} = \dim V$. Como V es irreducible, puede probarse que $\dim V = \text{Krull} \dim \mathcal{O}_{V,p}$ [Har77, Ch. I, Theorem 2.3]. Entonces p es no singular si y sólo si $\dim \mathscr{M}_p/\mathscr{M}_p^2 = \text{Krull} \dim \mathcal{O}_{V,p}$.

Definición B.4.5. Sean V una variedad algebraica y $p \in V$. Decimos que p es un punto *no singular* de V si $\dim \mathscr{M}_p/\mathscr{M}_p^2 = \text{Krull} \dim \mathcal{O}_{V,p}$, donde $\mathscr{M}_p$ es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{V,p}$. Decimos que V es *suave* si p es no singular en V para todo $p \in V$.

Proposición B.4.6. *[Har77] Sea V una variedad algebraica afín y sea $S \subseteq V$ el conjunto de puntos singulares. Entonces S es cerrado en V y $\dim S < \dim V$.*

Sea A un anillo conmutativo y Noetheriano. Para un A-módulo M finitamente generado definimos la *dimensión proyectiva de M* como el mínimo $d \geq 0$ tal que existe una sucesión exacta $0 \to P_d \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ con P_i A-módulos proyectivos finitamente generados. Definimos la *dimensión global* de A como $\text{glob} \dim A := \sup_M \text{proj} \dim M$ donde el supremo recorre todos los A-módulos M finitamente generados.

Definición B.4.7. Un anillo conmutativo A es *regular* si es Noetheriano y tiene dimensión global finita.

Teorema B.4.8. *[Ser00, Ch. IV] Sea A un anillo conmutativo, Noetheriano y local. Sean $\mathfrak{m}$ su ideal maximal y $k = A/\mathfrak{m}$. Son equivalentes.*

1. *A es regular.*
2. $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \text{Krull} \dim A$.

Además, en estas condiciones $\text{Krull} \dim A = \text{glob} \dim A$.

Como consecuencia del teorema anterior, dados V una variedad y $p \in V$, p es no singular en V si y sólo si $\mathcal{O}_{V,p}$ es regular.

Proposición B.4.9. *[Ser00] Sea A un anillo. Entonces A es regular si y sólo si* $\text{Krull} \dim A$ *es finita y $A_{\mathfrak{m}}$ es un anillo local regular para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$.*

Si V es una variedad afín, los ideales maximales de $k[V]$ se corresponden con los puntos de V y tenemos $k[V]_{\mathfrak{m}_p} \simeq \mathcal{O}_{V,p}$. Por la proposición anterior, V es suave si y sólo si $k[V]$ es regular.

Teorema B.4.10. *(Hironaka) Sea V una variedad algebraica y sea $S \subseteq V$ su conjunto de puntos singulares. Entonces existen una variedad suave $\tilde{V}$ y un morfismo suryectivo $p : \tilde{V} \longrightarrow V$ que induce un isomorfismo $\tilde{V} - p^{-1}(S) \longrightarrow V - S$. Además p induce una función continua propia entre los respectivos espacios analíticos.*

B.5. El truco de Jouanolou

Definición B.5.1. Un *torsor afín* sobre una variedad V es un morfismo $\pi : W \longrightarrow V$ con W afín, tal que para todo $p \in V$ existen un abierto $p \in U \subseteq V$ y un isomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times k^N$, de manera que $\pi|_{\pi^{-1}(U)}$ se identifica con la proyección $U \times k^N \longrightarrow U$ a través de φ_U. Además, si U_i y U_j son dos abiertos, los isomorfismos $\varphi_{U_i}\varphi_{U_j}^{-1}$ inducen isomorfismos afines $\{p\} \times k^N \longrightarrow \{p\} \times k^N$ para cada $p \in U_i \cap U_j$.

Teorema B.5.2. *Sea V una variedad. Entonces existe $\pi : W \longrightarrow V$ torsor afín.*

Demostración. Supongamos primero que $V = \mathbb{P}^N$. Llamamos

$$W := \{A \in k^{(N+1)\times(N+1)} : A^2 = A \quad y \quad \operatorname{tr} A = 1\}$$

al conjunto de las matrices idempotentes de rango 1 (como A es idempotente, el rango y la traza de A son iguales). Es claro de la definición que W es un conjunto algebraico en $k^{(N+1)\times(N+1)}$. Definimos $\pi : W \to \mathbb{P}^N$ mandando cada matriz a su imagen (una recta en k^{N+1}). Para verificar que π define un torsor afín, llamamos $\tilde{W} := \{([x], [y]) \in \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N : xy \neq 0\}$ y definimos un isomorfismo

$$\tilde{W} \to W, \quad ([x], [y]) \mapsto \left(\frac{x_j y_i}{xy}\right)_{ij}.$$

A través de este isomorfismo, π se identifica con el morfismo $([x], [y]) \mapsto [x]$. Para determinar una matriz idempotente, basta dar su núcleo y su imagen, que deben ser subespacios complementarios. Cada par $([x], [y])$ con $xy \neq 0$ representa a una matriz idempotente de rango uno, x es un generador de la imagen e y es una ecuación del núcleo. La condición $xy \neq 0$ equivale a pedir que imagen y núcleo sean complementarios. Seguimos llamando π a la proyección $\tilde{W} \to \mathbb{P}^N$. El conjunto $\pi^{-1}[y]$ está formado por todos los puntos $[y] \in \mathbb{P}^N$ tales que $xy \neq 0$, es decir, es el complemento de un hiperplano en $\mathbb{P}^N$ y es entonces isomorfo a k^N. Si U_i es el complemento de $y_i = 0$ en $\mathbb{P}^N$, tenemos un isomorfismo

$$\alpha_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times k^N, \quad ([x], [y]) \mapsto \left([x], \left(\frac{x_i y_0}{xy}, \ldots, \frac{\widehat{x_i y_i}}{xy}, \ldots, \frac{x_i y_N}{xy}\right)\right)$$

tde manera que $\pi|_{\pi^{-1}(U_i)}$ se identifica con la proyección $U_i \times k^N \to U_i$ a través de α_i. Sigue que $\pi : \tilde{W} \to \mathbb{P}^N$ es un torsor afín.

Supongamos ahora que $V \subseteq \mathbb{P}^N$ es un conjunto algebraico y sea $\pi : W \to \mathbb{P}^N$ el torsor construído arriba. Entonces $\pi^{-1}(V)$ es una variedad afín (por ser cerrado en W afín) y $\pi : \pi^{-1}(V) \to V$ es un torsor afín. En efecto, los isomorfismos α_i se restringen a isomorfismos $\pi^{-1}(V \cap U_i) \to (V \cap U_i) \times k^N$.

El caso en el que V es un conjunto localmente cerrado en $\mathbb{P}^N$ puede encontrarse en [Jou73]. □

Observación B.5.3. Sea $\pi : W \longrightarrow V$ un torsor afín. Veamos que si V es suave entonces W también lo es. Como W tiene un cubrimiento por abiertos isomorfos a $U \times k^N$ con U un abierto de V, basta ver que $U \times k^N$ es suave. Podemos suponer que U es afín. Como U es suave (por ser un abierto de V suave) el anillo $k[U]$ es regular y entonces

$$k\left[U \times k^N\right] \simeq k[U] \otimes_k k\left[k^N\right] \simeq k[U] \otimes_k k[x_1, \ldots, x_N] = k[U][x_1, \ldots, x_N]$$

también es regular.

B.6. Variedades algebraicas y variedades analíticas

En esta sección comentamos la definición de variedad algebraica dada en [Ser55], que generaliza las definiciones de la sección B.3. Luego damos la definición de variedad analítica y vemos que toda variedad algebraica admite una única estructura de variedad analítica compatible con la estructura algebraica. Las referencias para esta sección son [Ser55] y [Ser56].

Definición B.6.1. Sea V un espacio topológico. Un *prehaz de anillos* sobre V es un funtor contravariante $\mathscr{F} : \mathscr{U} \to \mathfrak{Ass}$, donde $\mathscr{U}$ es el conjunto de abiertos de V parcialmente ordenado por la inclusión. Es decir, dar un prehaz $\mathscr{F}$ sobre un espacio topológico V equivale a dar un anillo $\mathscr{F}(U)$ para cada abierto $U \subseteq V$ y morfismos de anillos $\rho_{U',U} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U')$ si $U' \subseteq U$. Los morfismos $\rho_{U',U}$ se llaman *morfismos de restricción*. Si $s \in \mathscr{F}(U)$ notaremos $s|_{U'}$ en vez de $\rho_{U',U}(s)$.

Ejemplo B.6.2. Sean V un espacio topológico y A un anillo. Dado un abierto $U \subseteq V$ sea $\mathscr{F}(U)$ el anillo de funciones de U en A. Entonces $\mathscr{F}$ es un prehaz de anillos sobre V con la restricción usual de funciones. Si A tiene una topología compatible con las operaciones podemos tomar $\mathscr{F}$ el haz de funciones continuas a valores en A.

Ejemplo B.6.3. Sea V una variedad algebraica en el sentido de la sección B.3. Dado un abierto $U \subseteq V$ sea $\mathcal{O}_V(U)$ el anillo de funciones regulares de U en k. Entonces $\mathcal{O}_V$ es un prehaz de anillos sobre V con la restricción usual de funciones.

Ejemplo B.6.4. Sea $\mathscr{F}$ un prehaz sobre un espacio topológico V y sea $U \subseteq V$ un abierto. Para cada abierto $U' \subseteq U$ la aplicación $U' \mapsto \mathscr{F}(U')$ define un prehaz sobre U que denotamos $\mathscr{F}|_U$.

Definición B.6.5. Sea V un espacio topológico. Un *haz* sobre V es un prehaz $\mathscr{F}$ que verifica las siguientes condiciones:

1. Si $\{U_i\}$ es un cubrimiento abierto de U y $s \in \mathscr{F}(U)$ es tal que $s|_{U_i} = 0$ para todo i entonces $s = 0$.
2. Si $\{U_i\}$ es un cubrimiento abierto de U y $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ son tales que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todo i, j, entonces existe $s \in \mathscr{F}(U)$ con $s|_{U_i} = s_i$ para todo i.

Ejemplo B.6.6. Todos los prehaces de los ejemplos anteriores son haces.

Ejemplo B.6.7. Si V es una variedad algebraica, sean $\mathcal{O}_V$ el haz de funciones regulares a valores en k y Func_V el haz de funciones a valores en k. Entonces $\mathcal{O}_V(U)$ es un subanillo de $\mathrm{Func}_V(U)$ para cada abierto $U \subseteq V$. En este caso decimos que $\mathcal{O}_V$ es un *subhaz* de Func_V.

Definición B.6.8. Sean V y W espacios topológicos y sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Sean Func_V y Func_W los respectivos haces de funciones a valores en k. Sean $\mathscr{F}$ un subhaz de Func_V y $\mathscr{G}$ un subhaz de Func_W. Toda función $f : V \to W$ induce morfismos de anillos $f^* : \mathrm{Func}_W(U) \to \mathrm{Func}_V(f^{-1}(U))$. Decimos que los pares $(V, \mathscr{F})$ y $(W, \mathscr{G})$ son *isomorfos* si existe un homeomorfismo $h : V \to W$ que tal que $h^*(\mathscr{G}(U)) = \mathscr{F}(h^{-1}(U))$ para todo abierto $U \subseteq W$.

Definición B.6.9. Una *prevariedad algebraica* es un espacio topológico V equipado con un subhaz $\mathcal{O}_V$ de Func_V tal que existe un cubrimiento por finitos abiertos $\{U_i\}$ de manera que $(U_i, \mathcal{O}_V|_{U_i})$ es isomorfo a $(W_i, \mathcal{O}_{W_i})$ donde W_i es un conjunto localmente cerrado en k^N y $\mathcal{O}_{W_i}$ es el haz de funciones regulares a valores en k. Una *variedad algebraica* (abstracta) es una prevariedad V tal que $\Delta := \{(x, x) \in V \times V\}$ es cerrado en $V \times V$, donde $V \times V$ tiene la estructura de prevariedad producto que se obtiene por pegado (ver [Ser55, Ch. II, 34]).

Ejemplo B.6.10. Es claro que un conjunto localmente cerrado en k^N con su haz de funciones regulares es una variedad algebraica abstracta. El espacio proyectivo $\mathbb{P}^N$ con su topología de Zariski y su haz de funciones regulares es una variedad algebraica abstracta: basta tomar el cubrimiento $\{U_i\}_{i=0}^N$ de ejemplo B.2.1. Más en general, cualquier variedad algebraica cuasi-proyectiva es una variedad algebraica abstracta.

Definición B.6.11. Sean $(V, \mathcal{O}_V)$ y $(W, \mathcal{O}_W)$ dos variedades algebraicas abstractas. Una función continua $f : V \to W$ se dice *regular* si $f^*(g) = gf \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$ para toda $g \in \mathcal{O}_W(U)$ y todo abierto $U \subseteq W$.

Si V es una variedad algebraica abstracta, pueden definirse el anillo local en un punto y la noción de punto no singular de la misma forma que se hizo en las secciones anteriores.

A partir de ahora tomamos $k = \mathbb{C}$ y pasamos a las variedades analíticas. La definición es análoga a la de variedad algebraica abstracta, reemplazando a la topología de Zariski en $\mathbb{C}^N$ por la topología usual, y a las funciones regulares por las funciones analíticas. De ahora en más, y hasta el final de la sección, consideramos en cualquier subconjunto de $\mathbb{C}^N$ la topología usual a menos que se indique lo contrario.

Definición B.6.12. Sea $G \subseteq \mathbb{C}^N$ un abierto. Una función $f : G \to \mathbb{C}$ es *analítica* si se representa como serie de potencias en un entorno de cada punto.

Definición B.6.13. Un conjunto $V \subseteq \mathbb{C}^N$ es *analítico* si para todo $x \in V$ existen G abierto en $\mathbb{C}^N$ con $x \in G$ y funciones analíticas $f_1, \dots, f_r : G \to \mathbb{C}$ tales que $V \cap G = \{y \in G : f_1(y) = \cdots = f_r(y) = 0\}$.

Ejemplo B.6.14. Si $V \subseteq \mathbb{C}^N$ es analítico, cualquier abierto de V (con la topología de subespacio de $\mathbb{C}^N$) es analítico.

Ejemplo B.6.15. Como las funciones polinomiales son analíticas, si $V \subseteq \mathbb{C}^N$ es un conjunto localmente cerrado para la topología de Zariski, V es un conjunto analítico.

Definición B.6.16. Sea $V \subseteq \mathbb{C}^N$ un conjunto analítico. Una función $f : V \to \mathbb{C}$ es *analítica* si localmente es la restricción de una función analítica definida en un abierto de $\mathbb{C}^N$. Es decir, f es analítica si para todo $x \in V$ existen G un abierto de $\mathbb{C}^N$ con $x \in G$ y una función analítica $\tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ tal que $\tilde{f}|_{V \cap G} = f|_{V \cap G}$.

Ejemplo B.6.17. Sea $V \subseteq \mathbb{C}^N$ un conjunto analítico. Si $f : V \to \mathbb{C}$ es analítica, la restricción de f a cualquier abierto de V también es analítica.

Ejemplo B.6.18. Sea $V \subseteq \mathbb{C}^N$ un conjunto localmente cerrado para la topología de Zariski. Como las funciones racionales son analíticas, cualquier función regular $V \to \mathbb{C}$ es una función analítica.

Las funciones analíticas forman un anillo con la suma y el producto usuales.

Si $V \subseteq \mathbb{C}^N$ es un conjunto analítico y $U \subseteq V$ es un abierto, llamamos $\mathscr{H}_V(U)$ al anillo de funciones analíticas $U \to \mathbb{C}$. Tenemos entonces un haz de funciones analíticas $\mathscr{H}_V$, que es un subhaz de Func_V.

Definición B.6.19. Una *variedad analítica* es un espacio topológico Hausdorff V equipado con un subhaz $\mathscr{H}_V$ de Func_V tal que existe un cubrimiento por abiertos $\{U_i\}$ de manera que $(U_i, \mathscr{H}_V|_{U_i})$ es isomorfo a $(W_i, \mathscr{H}_{W_i})$ donde W_i es un conjunto analítico en $\mathbb{C}^N$ y $\mathscr{H}_{W_i}$ es el haz de funciones analíticas.

Proposición B.6.20. *[Ser56, §2, Proposition 2] Sea $(V, \mathcal{O}_V)$ una variedad algebraica abstracta sobre $\mathbb{C}$. Existe una única estructura de variedad analítica sobre V que respeta la estructura de variedad algebraica.*

Apéndice C

Complejos simpliciales

C.1. Complejos simpliciales y poliedros

Los resultados de esta sección pueden encontrarse en [Mun84].

Un conjunto de puntos $\{v_0, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ es *afínmente independiente* si $\sum_0^n t_i = 0$ y $\sum_0^n t_i v_i = 0$ con $t_i \in \mathbb{R}$ implican $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$. Un punto y dos puntos son siempre afínmente independientes; tres puntos lo son si y sólo si no son colineares; cuatro puntos lo son si y sólo si no son coplanares. Cualquier subconjunto de un conjunto afínmente independiente es afínmente independiente.

Sea $\{v_0, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto afínmente independiente. El n-simple σ generado por $v_0, \dots, v_n$ es el menor convexo de $\mathbb{R}^N$ que contiene a todos los v_i. Es decir,

$$\sigma = \left\{ \sum_0^n t_i v_i : t_i \geq 0 \quad y \quad \sum_0^n t_i = 1 \right\}.$$

Dado $x \in \sigma$ existen únicos $t_i \geq 0$ con $\sum t_i = 1$ tales que $x = \sum t_i v_i$. Dichos t_i se llaman *coordenadas baricéntricas* de x. Los puntos $v_0, \dots, v_n$ se llaman *vértices* de σ y el entero n es la *dimensión* de σ. Los simples generados por subconjuntos de $\{v_0, \dots, v_n\}$ se llaman *caras* de σ. Las caras de σ distintas de σ se llaman *propias*. Si τ es una cara propia de σ notamos $\tau < \sigma$.

Definición C.1.1. Un *complejo simplicial* es un conjunto K de simples en $\mathbb{R}^N$ tal que:

1. Toda cara de un simple de K pertenece a K.
2. La intersección de dos simples cualesquiera es una cara de ambos.

Si K es un complejo simplicial, un *subcomplejo* L de K es un subconjunto $L \subseteq K$ tal que L es un complejo simplicial. La *dimensión* de un complejo es el máximo de las dimensiones de sus simples.

Ejemplo C.1.2. Si σ es un simple, el conjunto formado por todas las caras de σ es un complejo simplicial. Cuando hagamos referencia a σ como complejo simplicial estaremos refiriéndonos a este complejo.

Ejemplo C.1.3. Si K es un complejo simplicial, el conjunto $K^r := \{\sigma \in K : \dim \sigma \leq r\}$ es un subcomplejo de K, que llamamos *r-esqueleto* de K.

Definición C.1.4. Sea K un complejo simplicial en $\mathbb{R}^N$. Le damos a cada simple $\sigma \in K$ la topología de subespacio de $\mathbb{R}^N$. El *polítopo* $|K|$ de K es el subconjunto de $\mathbb{R}^N$ que es unión de todos los simples de K, con la topología final respecto a las incusiones de los simples. Es decir, un subconjunto $F \subseteq |K|$ es cerrado (resp. abierto) si y sólo si $F \cap \sigma$ es cerrado (resp. abierto) en σ para todo $\sigma \in K$.

Observación C.1.5. En general la topología de $|K|$ es más fina que la topología de subespacio de $\mathbb{R}^N$ pero ambas coinciden si K tiene finitos simples.

Ejemplo C.1.6. Si σ es un simple, $\mathrm{Bd}(\sigma) := \{\tau \in \sigma : \tau < \sigma\}$ es un subcomplejo de σ. El conjunto $\sigma - |\mathrm{Bd}(\sigma)|$ se llama *interior* de σ y es un abierto de σ. Si $n = \dim \sigma$, σ es un espacio topológico homeomorfo al disco unitario $D^n \subseteq \mathbb{R}^n$ y cualquier homeomorfismo $\sigma \simeq D^n$ se restringe a un homeomorfismo $|\mathrm{Bd}(\sigma)| \simeq S^{n-1}$.

Lema C.1.7. *Sea K un complejo simplicial. Entonces $|K|$ es Hausdorff. Además, $|K|$ es compacto si y sólo si K es finito (i.e. tiene finitos simples).*

Definición C.1.8. Si v es un vértice de un complejo simplicial K, el *entorno estrellado* de v en K, que denotamos $\mathrm{St}(v, K)$, es la unión de los interiores de los simples que contienen a v.

$\mathrm{St}(v, K)$ es un abierto de $|K|$ y su clausura es el polítopo del subcomplejo de K formado por todos los simples que tienen a v como vértice. Los conjuntos $\mathrm{St}(v, K)$ forman un cubrimiento por abiertos de $|K|$.

Definición C.1.9. Un *poliedro* D es un espacio topológico homeomorfo a $|K|$ para algún complejo simplicial finito K. Un homeomorfismo $\varphi : |K| \longrightarrow D$ se llama *triangulación* del poliedro D.

Observación C.1.10. Por el lema anterior, los poliedros son espacios topológicos compactos Hausdorff.

El siguiente resultado se usa en la demostración del teorema 1.1.1.

Proposición C.1.11. *Sean K un complejo simplicial finito y L un subcomplejo de K. Si $|L|$ es contráctil entonces $|L|$ es retracto de $|K|$.*

Demostración. Como K es finito, $K = K^n$ para $n = \dim K$. Definimos una retracción $r : |K| \longrightarrow |L|$ de manera inductiva en $|K^s|$. Para $s = 0$ elegimos cualquier función $r : |K^0| \longrightarrow |L|$ tal que $r(x) = x$ si $x \in |L|$. Supongamos que está definida $r : |K^s| \longrightarrow |L|$ tal que $r(x) = x$ para todo $x \in |L^s|$. Sea σ un $(s+1)$-simple de K. Si σ está en L entonces $\mathrm{Bd}(\sigma) \subseteq L^s$ y $r(x) = x$ para todo $x \in |\mathrm{Bd}(\sigma)|$. Extendemos r a σ definiendo $r(x) = x$ para todo $x \in \sigma$. Si σ no está en L, extendemos $r : |\mathrm{Bd}(\sigma)| \longrightarrow |L|$ a todo σ usando que $|L|$ es contráctil. $\square$

C.2. Subdivisión baricéntrica

Si σ es el n-simple generado por $\{v_0, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$, el *baricentro* de σ es el punto

$$b(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} v_i \in \mathbb{R}^N.$$

Dado un complejo simplicial K definimos un nuevo complejo simplicial $\delta(K)$ que llamamos *subdivisión baricéntrica* de K. Los vértices de $\delta(K)$ son los baricentros de los simples de K. Los n-simples de $\delta(K)$ están generados por $\{b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_n)\}$ con $\sigma_0 < \dots < \sigma_n$ en K. Los complejos K y $\delta(K)$ tienen la misma dimensión y sus polítopos son iguales. Si L es un subcomplejo de K, $\delta(L)$ es un subcomplejo de $\delta(K)$. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos inductivamente $\delta^{n+1}(K) := \delta(\delta^n(K))$ poniendo $\delta^1(K) := \delta(K)$.

Ejemplo C.2.1. Sea K el complejo simplicial formado por un n-simple y todas sus caras, y sea S un subcomplejo propio de K. Sea τ un simple maximal de $\delta(K)$. Veamos que $\tau \cap |S|$ es una cara propia de τ. Como τ es un simple maximal de $\delta(K)$, τ está generado por $b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_n)$ con $\sigma_i \in K$ y $\sigma_0 < \dots < \sigma_n$. Sea $d := \max\{1 \leq i \leq n : \sigma_i \in S\}$. Entonces $\sigma_i \in S$ para todo $i \leq d$ y $\tau \cap |S| = |\tau \cap \delta(S)|$ es el d-simple generado por $b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_d)$. Además $d < n$ porque $b(\sigma_n) \notin \delta(S)$.

Proposición C.2.2. *[Mun84, Ch. 2, Theorem 15.4] Sea K un complejo simplicial finito. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que todos los simples de $\delta^n(K)$ tienen diámetro menor que ε.*

Corolario C.2.3. *Sean K un complejo simplicial finito y X un espacio topológico. Dados $f : |K| \longrightarrow X$ una función continua y $\mathscr{U}$ un cubrimiento por abiertos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que la imagen por f de cada simple de $\delta^n(K)$ cae en algún abierto de $\mathscr{U}$. En particular, si $X = |L|$ con L un complejo simplicial, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que la imagen por f de todo simple de $\delta^n(K)$ cae en el entorno estrellado de algún vértice de L.*

Demostración. Como $\{f^{-1}(U)\}_{U\in\mathscr{U}}$ es un cubrimiento abierto del espacio métrico compacto $|K|$, existe un número de Lebesgue $\lambda > 0$ asociado a este cubrimiento; esto significa que cualquier subconjunto de $|K|$ con diámetro menor que λ está contenido en algún abierto del cubrimiento. Por la proposición anterior existe $n \in \mathbb{N}$ tal que todo simple de $\delta^n(K)$ tiene diámetro menor que λ. □

Sean E, B y F espacios topológicos. Una función continua y suryectiva $\pi : E \longrightarrow B$ es un *fibrado* con fibra F si todo punto de B tiene un entorno abierto U tal que existe un homeomorfismo $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$ que hace conmutar el siguiente diagrama, donde el morfismo $U \times F \longrightarrow U$ es la proyección en el primer factor.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Los abiertos U como arriba se llaman *abiertos trivializantes*.

Proposición C.2.4. *Sean K un complejo simplicial finito, E y B espacios topológicos, $f : |K| \longrightarrow B$ una función continua y $\pi : E \longrightarrow B$ un fibrado con fibra contráctil. Entonces existe $\tilde{f} : |K| \longrightarrow E$ tal que $\pi\tilde{f} = f$.*

Demostración. Como π es un fibrado, existe $\mathscr{U}$ cubrimiento de B por abiertos trivializantes. Aplicando el lema anterior y reemplazando K por $\delta^n(K)$ si es necesario, podemos suponer que la imagen por f de cada simple de K cae en un abierto trivializante.

Como K es finito, $K = K^n$ para $n = \dim K$. Definimos $\tilde{f}$ inductivamente en cada K^r. Como π es suryectiva, para cada vértice $v \in K^0$ existe $\tilde{f}(v) \in E$ tal que $\pi\tilde{f}(v) = f(v)$. De esta manera definimos $\tilde{f}$ en K^0. Supongamos ahora que tenemos $\tilde{f} : |K^r| \longrightarrow E$ tal que $\pi\tilde{f} = f$. Si $\sigma \in K$ es un $(r+1)$-simple, tenemos definida $\tilde{f}$ en $\mathrm{Bd}(\sigma)$ y queremos extender $\tilde{f}$ a todo σ. Sea $U \subseteq B$ abierto tal que $f(\sigma) \subseteq U$. Identificando $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$, la situación es la siguiente.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Bd}(\sigma) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, hook] & U \times F \arrow[d] \\ \sigma \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed] & U \end{tikzcd}$$

Para definir $\tilde{f} : \sigma \longrightarrow U \times F$ (la flecha punteada en el diagrama) hay que dar dos funciones continuas $\tilde{f}_1 : \sigma \longrightarrow U$ y $\tilde{f}_2 : \sigma \longrightarrow F$. Para que el triángulo inferior conmute debe ser $\tilde{f}_1 = f$. Para que el triángulo superior conmute, debemos extender una función dada $\mathrm{Bd}(\sigma) \longrightarrow F$ a todo σ, y ésto es posible porque F es contrácil. □

Apéndice D

Conjuntos semialgebraicos

D.1. Definiciones básicas y el teorema de triangulación

Los resultados de esta sección pueden encontrarse en [BPR03].

Definición D.1.1. Los *conjuntos semialgebraicos* de $\mathbb{R}^N$ son la familia más chica de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ que contiene a los conjuntos de la forma $\{x \in \mathbb{R}^k : P(x) > 0\}$ con $P \in \mathbb{R}[x]$ y que es cerrada por complementos, uniones finitas e intersecciones finitas.

Ejemplo D.1.2. Los conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^N : P(x) \geq 0\}$, $\{x \in \mathbb{R}^N : P(x) \leq 0\}$, $\{x \in \mathbb{R}^N : P(x) < 0\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^N : P(x) = 0\}$ son semialgebraicos.

Ejemplo D.1.3. Identificando a $\mathbb{C}^N$ con $\mathbb{R}^{2N}$, los conjuntos de la forma $\{z \in \mathbb{C}^N : Q(z) = 0\}$ con $Q \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ son semialgebraicos en $\mathbb{R}^{2N}$. En efecto, dar una ecuación de la forma $Q(z_1, \ldots, z_N) = 0$ con $z_i = x_i + iy_i$ y $Q \in \mathbb{C}[z_i, \ldots, z_N]$ equivale a dar dos ecuaciones de la forma $P(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N) = 0$ con $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N]$. Como los conjuntos semialgebraicos con cerrados por intersecciones finitas y por complemento, sigue que los conjuntos localmente cerrados en $\mathbb{C}^N$ (con la topología de Zariski) son semialgebraicos.

Ejemplo D.1.4. El disco unitario $D \subseteq \mathbb{C}$ es un conjunto semialgebraico en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo D.1.5. Un simple en $\mathbb{R}^N$ es un conjunto semialgebraico. Si K es un complejo simplicial finito en $\mathbb{R}^N$ entonces $|K|$ es un conjunto semialgebraico.

Definición D.1.6. Sean $S \subseteq \mathbb{R}^N$ y $T \subseteq \mathbb{R}^M$ conjuntos semialgebraicos. Una función $f : S \to T$ es *semialgebraica* si el gráfico de f es un conjunto semialgebraico en $\mathbb{R}^{N+M}$.

Ejemplo D.1.7. Denotamos $\mathcal{O}_N$ al anillo $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$. Sean $V \subseteq \mathbb{C}^N$ y $W \subseteq \mathbb{C}^M$ localmente cerrados. Si $f : V \to W$ es regular entonces f es semialgebraica. Supongamos que $V = V(I) - V(J)$ para ciertos ideales $I, J \trianglelefteq \mathcal{O}_N$. Como $\mathcal{O}_N$ es Noetheriano, $V = \bigcup_{i=1}^k V(I) - V(f_i)$ para ciertas $f_i \in \mathcal{O}_N$. Entonces

$$\mathrm{Graf}(f) = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Graf}(f|_{V(I)-V(f_i)})$$

y podemos suponer que $V = V(I) - V(f)$. En este caso, toda función regular $V \to k$ es de la forma g/f^n para cierto $g \in \mathcal{O}_N$ y tenemos que

$$\mathrm{Graf}(f) = (V \times \mathbb{C}^M) \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^{N+M} : w_i f(z)^{n_i} - g_i(z) = 0 \quad i = 1, \ldots, M\}$$

es un conjunto semialgebraico.

Proposición D.1.8. *[BPR03, Proposition 2.83] Sea $f : S \to T$ una función semialgebraica. Si $S' \subseteq S$ es semialgebraico entonces $f(S')$ es semialgebraico. Si $T' \subseteq T$ es semialgebraico entonces $f^{-1}(T')$ es semialgebraico.*

Proposición D.1.9. *[BPR03, Proposition 2.84] La composición de funciones semialgebraicas es una función semialgebraica.*

Definición D.1.10. Un *homeomorfismo semialgebraico* es un homeomorfismo $f : T \to S$ tal que f y f^{-1} son funciones semialgebraicas.

Definición D.1.11. Sea S un conjunto semialgebraico. Una *triangulación semialgebraica* de S es un homeomorfismo semialgebraico $h : |K| \to S$ con K un complejo simplicial finito.

Teorema D.1.12. *[BPR03, Theorem 5.43] Sea $S \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto semialgebraico cerrado y acotado, y sean $S_1, \dots, S_k \subseteq S$ conjuntos semialgebraicos. Entonces existe una triangulación semialgebraica $h : |K| \to S$ tal que cada S_i es unión de imágenes por h de interiores de simples de K.*

Corolario D.1.13. *Sean $T \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^N$ conjuntos semialgebraicos cerrados y acotados. Entonces existe una triangulación de S que se restringe a una triangulación de T.*

Demostración. Por el teorema anterior existen un complejo simplicial finito K y un homeomorfismo semialgebraico $h : |K| \to S$ tal que $T = \bigcup h(\mathrm{Int}(\sigma_i))$ para ciertos simples $\sigma_i \in K$. Como T es cerrado en S y $T = h(\bigcup \mathrm{Int}(\sigma_i))$ tenemos que $\bigcup \mathrm{Int}(\sigma_i)$ es cerrado en $|K|$. Entonces

$$\bigcup \mathrm{Int}(\sigma_i) = \overline{\bigcup \mathrm{Int}(\sigma_i)} = \bigcup \sigma_i.$$

Es decir, si L es el subcomplejo de K formado por σ_i y todas sus caras, h se restringe a un homeomorfismo $|L| \to T$. $\square$

Bibliografía

[AM69] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[BPR03] S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy, *Algorithms in real algebraic geometry*, Algorithms and Computation in Mathematics, vol. 10, Springer-Verlag, 2003.

[Cn08] G. Cortiñas, *Algebraic v. topological K-theory: a friendly match*, Topics in algebraic and topological K-theory, Springer Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2008.

[CnT] G. Cortiñas, A. Thom, *Algebraic geometry of topological spaces I*, Acta Mathematica, aceptado para su publicación.

[CS78] A. Calder, J. Siegel, *Kan extensions of homotopy functors*, J. Pure Appl. Algebra **12** (1978), no. 3, 253–269.

[FW01] E. M. Friedlander, M. E. Walker, *Comparing K-theories for complex varieties*, Amer. J. Math. **123** (2001), no. 5, 779–810.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, 1977.

[Jou73] J.-P. Jouanolou, *Une suite exacte de Mayer-Vietoris en K-théorie algébrique*, Algebraic K-Theory I, Lecture Notes in Math., vol. 341, Springer-Verlag, 1973, pp. 293–316.

[Kar78] M. Karoubi, *K-theory: An introduction*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 226, Springer-Verlag, 1978.

[ML71] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, 1971.

[Mun84] J. R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley, 1984.

[Ros95] J. Rosenberg, *Algebraic K-theory and its applications*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 147, Springer-Verlag, 1995.

[Ser55] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. **61** (1955), 197–278.

[Ser56] ———, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Annales de l'institut Fourier **6** (1956), 1–42.

[Ser00] ———, *Local algebra*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2000.

[Sha74] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1974.

[Wei95] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, 1995.

[Wei11] ———, *The k-book*, http://www.math.rutgers.edu/˜weibel/Kbook.html, 2011.

Agradecimientos

Todos estos años de estudio fueron posibles gracias al apoyo de diversas personas. Quiero mencionar a mi familia, a Gasti, a mis amigos del colegio Martín y Marina, a Santi, a las hermanas Kandel, y a mis amigos matemáticos. A Paula por ser una compañera ideal de cursada y a Mariano por hacerme reir tanto. A Romina y a Lucía porque amenazaron con retirarme el saludo de no aparecer sus nombres en esta página. A Shirel, a Meital, a Sandra y a Celeste. A Willie Cortiñas por el tiempo y la paciencia.