



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Hipersuperficies Tropicales Singulares

Cristian Carlos Czubara

Directora: Dra. Alicia Dickenstein

23/11/11

*No se puede dividir por cero!
Así empezó la historia....*

Agradecimientos

A mi familia, en especial a mi vieja, mi viejo y al Toti. Ellos sembraron en mi el deseo de aprender, de cuestionar, de empujar los límites un poco mas allá. A Alejandra, Micaela, Lautaro, Daniel, Roxana y Franco.

A mis amigos, por estar siempre. En especial a Ana, por la musiquita y las largas noches de cafecito y tertulia, y por haber creído siempre en que este momento iba a llegar. A Daniela, Ariel (y ahora Brenda), Karina y Daniel, por su hermosa amistad. A Laura, por las llamadas, la murga, Montevideo, Kevin, y por bancarnos en momentos difíciles.

A Alicia Dickenstein, por compartir en forma tan generosa su conocimiento. Por mostrar haciendo, mas que diciendo. Y por haber logrado, sin quererlo, que me reencuentre con la pasión de querer conocer, preguntarme, cuestionarme, y aprender Matemática. Me siento un privilegiado de haberte tenido como guía en este camino.

A Adrián, por haberme alentado siempre a mejorar, a no conformarme, a crecer. Por ser un DOCENTE en todos los aspectos de la vida. Enseñando haciendo, y haciendo, y haciendo, y haciendo....

A Cristina, por ayudarme a saber que puedo.

A mis compañeros de militancia, por el desafío continuo de tener una Universidad al servicio del Pueblo. Una Universidad Libre, Gratuita, Democrática y Científica. Y un país más justo para todos. Por no aceptar lo habitual, como cosa natural, y atreverse a escalar las alturas.

A mis alumnos, por enseñarme a enseñar.

A todos, muchas gracias.

Cristian Carlos Czubara

Índice general

Agradecimientos	5
Introducción	9
Capítulo 1. Geometría Tropical	11
1.1. El semianillo tropical	11
1.2. Polinomios tropicales	12
1.3. Raíces de un polinomio tropical	16
1.4. Valuaciones	18
1.5. Tropicalización de un ideal	20
Capítulo 2. Matroides y su relación con la Tropicalización de Subespacios Lineales	29
2.1. Introducción	29
2.2. Matroides	30
2.3. Tropicalización de un Espacio Lineal	31
2.4. Tropicalización de subespacios lineales y clases de peso	38
Capítulo 3. El abanico secundario y su relación con las curvas tropicales	43
3.1. Introducción	43
3.2. Dimensión de los conos del abanico secundario	47
3.3. Dimensión de los tipos de curvas tropicales	48
Capítulo 4. Tropicalización de la familia de curvas planas con una singularidad en un punto fijo	53
4.1. Introducción	53
4.2. Consideraciones para la clasificación de las curvas tropicales planas con una singularidad en un punto fijo	58
4.3. $\text{Trop}(\ker(A))$ y el abanico secundario.	62

Capítulo 5. Clasificación de curvas tropicales planas de máximo tipo dimensional con una singularidad en un punto fijo	71
5.1. Introducción	71
5.2. Clasificación de las curvas tropicales planas de tipo dimensional máximo con una singularidad en un punto fijo en el toro	72
Capítulo 6. Singularidades tropicales y derivadas de Euler	77
6.1. Introducción	77
6.2. Derivadas de Euler y su tropicalización	78
6.3. Hipersuperficies tropicales marcadas y singularidades tropicales	88
6.4. Clases de peso y el co-abanico de Bergman de \tilde{A} .	96
6.5. Dimensión de celdas de $\mathcal{T}(f)$ con todos sus puntos singulares	103
Bibliografía	107

Introducción

El concepto de punto singular en una variedad tropical no ha sido establecido claramente hasta ahora. Una definición natural podría ser la que sigue. Sea \mathbb{K} un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0, con una valuación no Arquimediana, $val : \mathbb{K}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que un punto q en una variedad tropical $V \subset \mathbb{R}^d$ es singular si existe una subvariedad algebraica (clásica) singular en el toro $(\mathbb{K}^*)^d$, con tropicalización V , con un punto singular de valuación q . Esta definición de singularidad en términos de la tropicalización de una variedad algebraica clásica, ya fue considerada en [MMS] en el caso $d = 2$ de curvas planas y fue luego desarrollada para hipersuperficies de cualquier dimensión en [DT]. Anteriormente había sido considerada en forma indirecta en [DFS] y en [Os]. Con esto en mente, en principio, uno debería estudiar *todas* las preimágenes de V bajo la función de valuación, para decidir si V es singular. En el presente trabajo analizaremos dos enfoques para resolver este problema cuando V es una hipersuperficie definida por un polinomio tropical con un soporte \mathcal{A} fijo, y el cuerpo residual de \mathbb{K} también es de característica 0 (pudiendo ser generalizado si esta hipótesis se hace más laxa).

Consideraremos al semianillo tropical $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$, donde $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \infty$ y las operaciones tropicales \oplus y \odot , definidas por $w \oplus w' = \min(w, w')$ y $w \odot w' = w + w'$ (donde $+$ es la suma usual). Como ya mencionamos, a lo largo del presente texto trabajaremos con polinomios F con soporte \mathcal{A} fijo y coeficientes todos no nulos. Es decir, $F(x) = \sum_{i \in \mathcal{A}} a_i x^i$ donde $F \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$ con $a_i \in \mathbb{K}^*$ para todo $i \in \mathcal{A}$. La tropicalización de un polinomio con estas características es el polinomio tropical $f = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} val(a_i) \odot w^i$, donde $val(a_i) \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \mathcal{A}$.

La *hipersuperficie tropical* definida por un polinomio tropical no nulo con soporte \mathcal{A} es el conjunto

$$\mathcal{T}(f) = \{w \in \mathbb{R}^d : \exists i \neq j \in \mathcal{A} \text{ con } f(w) = \langle i, w \rangle + val(a_i) = \langle j, w \rangle + val(a_j)\}.$$

Las nociones básicas y conceptos necesarios sobre la geometría tropical serán analizados en el Capítulo 1, donde presentaremos el Teorema Fundamental de la Geometría Tropical (1.5.6).

El presente trabajo está dividido, esencialmente, en tres partes: En los Capítulos 1, 2 y 3 nos nutriremos de suficientes herramientas

para poder abordar el problema de decidir si una curva tropical (una hipersuperficie en dos dimensiones) es o no es singular. Tendremos un primer acercamiento al problema por medio de técnicas combinatorias y constructivas, lo que constituye la segunda parte de la tesis.

A lo largo de todo el texto se hará presente la tropicalización de espacios lineales, por lo que el Capítulo 2 está íntegramente dedicado a este tema. En dicho capítulo abordaremos el problema desde las definiciones básicas hasta llegar a la demostración del Teorema 2.3.5 que caracteriza la tropicalización de un espacio lineal, incorporando nociones de clases de peso. En el Capítulo 3 estudiaremos la relación entre el abanico secundario y la dimensión del tipo de una curva. Todo el contenido desde el Capítulo 3 al Capítulo 5 está basado en [MMS].

La tercera etapa de esta tesis la constituye el Capítulo 6, donde atacamos al problema de decidir sobre la singularidad de una hipersuperficie tropical (ya no sólo restringidos a curvas planas) desde un punto de vista más algebraico, incorporando la noción de Derivadas Tropicales de Euler. Este punto de vista abstrae y profundiza el conocimiento sobre la singularidad de una hipersuperficie tropical, pues con estas técnicas se puede recuperar la información obtenida por medios exclusivamente combinatorios en los capítulos anteriores. Más aún, con estas herramientas se redemuestra el Teorema 1.1 de [DFS] sobre la tropicalización del \mathcal{A} -discriminante, y se caracterizan explícitamente todos los puntos singulares de una hipersuperficie tropical $\mathcal{T}(f)$. Esta caracterización permite esbozar un algoritmo para calcular todos los puntos singulares de $\mathcal{T}(f)$. Para finalizar esta tesis, utilizamos dicha caracterización para encontrar la dimensión de las celdas singulares de $\mathcal{T}(f)$, relacionándola con la codimensión en el abanico secundario del vector de coeficientes del polinomio tropical f . Este Teorema (6.5.1) se encuentra en [MMS2], que es la continuación del trabajo en [MMS], pero para superficies tropicales $\mathcal{T}(f) \subset \mathbb{R}^3$.

Geometría Tropical

1.1. El semianillo tropical

Definimos como *semianillo tropical* al conjunto $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, junto a las operaciones suma y multiplicación definidas como:

$$w_1 \oplus w_2 := \min(w_1, w_2) \quad \text{y} \quad w_1 \odot w_2 := w_1 + w_2$$

El término semianillo se debe a que \mathbb{T} satisface los siguientes axiomas:

1. $(\mathbb{T}, \oplus, 0_{\mathbb{T}})$ es un monoide conmutativo con elemento identidad $0_{\mathbb{T}} = \infty$:
 - a) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
 - b) $0_{\mathbb{T}} \oplus a = a \oplus 0_{\mathbb{T}} = a$
 - c) $a \oplus b = b \oplus a$
2. $(\mathbb{T}, \odot, 1_{\mathbb{T}})$ es un grupo con elemento identidad $1_{\mathbb{T}} = 0$:
 - a) $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$
 - b) $1_{\mathbb{T}} \odot a = a \odot 1_{\mathbb{T}}$
 - c) $a \odot b = b \odot a$
 - d) $a \odot (-a) = 1_{\mathbb{T}}$, si $a \neq 0_{\mathbb{T}}$
3. La multiplicación cumple con la ley distributiva con respecta a la adición:
 - a) $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$
 - b) $(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$
4. $0_{\mathbb{T}} \odot a = a \odot 0_{\mathbb{T}} = 0_{\mathbb{T}}$

A $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ también se lo conoce como el semianillo min-plus.

En otros textos se utiliza otra definición posible para la suma, tomando el máximo en vez del mínimo.

Es importante notar que en este anillo todos los elementos resultan idempotentes, ya que

$$w \oplus w = w \quad \forall w \in \mathbb{T}$$

Esto simplifica mucho las operaciones. Por ejemplo,

$$(w_1 \oplus w_2)^{\odot n} = (w_1)^{\odot n} \oplus (w_2)^{\odot n}$$

(donde la notación exponencial indica el producto tropical n veces)

Para tener una mayor comodidad en la escritura de ahora en adelante notaremos $a^{\odot n}$ simplemente a^n .

Proposición 1.1.1. *Para cualquier entero positivo n vale la igualdad:*

$$(w_1 \oplus w_2)^n = w_1^n \oplus w_2^n$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} (w_1 \oplus w_2)^n &= n * (w_1 \oplus w_2) \\ &= n * (\min(w_1, w_2)) \\ &= \min(n * w_1, n * w_2) \\ &= \min(w_1^n, w_2^n) \\ &= w_1^n \oplus w_2^n \end{aligned}$$

□

1.2. Polinomios tropicales

Sean w_1, w_2, \dots, w_n variables que representan elementos en el semi-anillo tropical $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$. Un *monomio* es un producto cualquiera de estas variables, donde las repeticiones están permitidas. Por la conmutatividad podemos ordenar el producto y escribir los monomios con la notación usual con las variables elevadas a exponentes:

$$w_2 \odot w_1 \odot w_3 \odot w_1 \odot w_4 \odot w_2 \odot w_3 \odot w_2 = w_1^2 \odot w_2^3 \odot w_3^2 \odot w_4.$$

Observemos que la evaluación de un monomio tropical de n variables, es una función lineal afín definida de \mathbb{T}^n en \mathbb{T} . Por ejemplo,

$$a \odot w_1^2 \odot w_2^3 \odot w_3^2 \odot w_4 = a + 2w_1 + 3w_2 + 2w_3 + w_4 = a + \langle w, i \rangle$$

donde $w = (w_1, \dots, w_4)$ es el vector de las variables, e $i = (2, 3, 2, 1)$ es el vector de sus respectivas potencias.

Por simplicidad, escribiremos

$$w_1^{i_1} \odot \cdots \odot w_n^{i_n} = w^i$$

Antes de definir a un polinomio tropical, recordemos la siguiente

Definición 1.2.1. Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que Δ es un *polígono entero* si Δ es la cápsula convexa de finitos puntos con coordenadas enteras.

Ahora sí pasemos a la definición de polinomio tropical.

Definición 1.2.2. Un *polinomio tropical* es una combinación lineal finita de monomios tropicales:

$$f(w_1, \dots, w_n) = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} a_i \odot w^i$$

donde los coeficientes $a_i \in \mathbb{T}$ para todo $i \in \mathcal{A}$, y $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$ un conjunto finito.

Si $a_i \in \mathbb{R} \forall i \in \mathcal{A}$, decimos que \mathcal{A} es el *soporte* del polinomio tropical f . A la cápsula convexa de \mathcal{A} , que es un polígono entero, se la llama *polígono de Newton de f* .

A lo largo del texto utilizaremos letras minúsculas para referirnos a un polinomio tropical, y reservaremos las mayúsculas para los polinomios en $\mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$.

Todo polinomio tropical representa una función $\mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}$. Cuando evaluamos estas funciones en la aritmética clásica, obtenemos el mínimo de una colección finita de funciones lineales:

$$\bar{p}(w_1, \dots, w_n) = \min_{i \in \mathcal{A}} \{a_i + \langle w, i \rangle\}$$

Si restringimos el dominio de esta función a \mathbb{R}^n nos queda una función $\bar{p} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que es continua y lineal a trozos.

Ejemplo 1.2.3. Consideremos un polinomio genérico de grado tres en una variable w .

$$p(w) = a \odot w^3 \oplus b \odot w^2 \oplus c \odot w \oplus d$$

Para graficar la función \bar{p} que define, dibujamos cuatro líneas en el plano de coordenadas $(w_1, w_2) : w_2 = 3w_1 + a, w_2 = 2w_1 + b,$

$w_2 = w_1 + c$ y la línea horizontal $w_2 = d$. El valor de $p(w)$ es el mínimo w_2 tal que (w_1, w_2) pertenece a alguna de estas líneas. Las cuatro líneas contribuyen si

$$b - a \leq c - a \leq d - c$$

Estos tres valores de w son exactamente los puntos en los cuales el gráfico de p es singular. La Figura 1.1 ilustra esta situación.

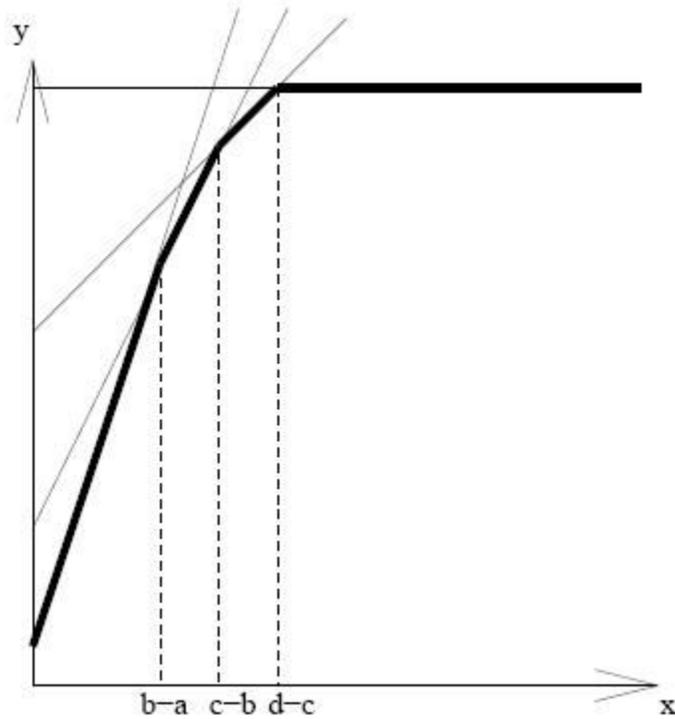


FIGURA 1.1. Gráfico de la función definida por el polinomio tropical del Ejemplo 1.2.3.

Observación 1.2.4. Polinomios distintos pueden representar la misma función.

Ejemplo 1.2.5. Consideremos un caso particular del Ejemplo 1.2.3 tomando $p = 0 \odot w^3 \oplus 3$. Podemos ver el gráfico de la función que define este polinomio tropical en la Figura 1.2. Si sumamos a p cualquier monomio del tipo $a \odot w^2$ con $a > 1$, o del tipo $b \odot w$ con $b > 2$, la función que definen será la misma, pues estos monomios se corresponden con

rectas por encima del gráfico de \bar{p} , con lo que no aportan al mínimo que se alcanza en los monomios de \bar{p} .

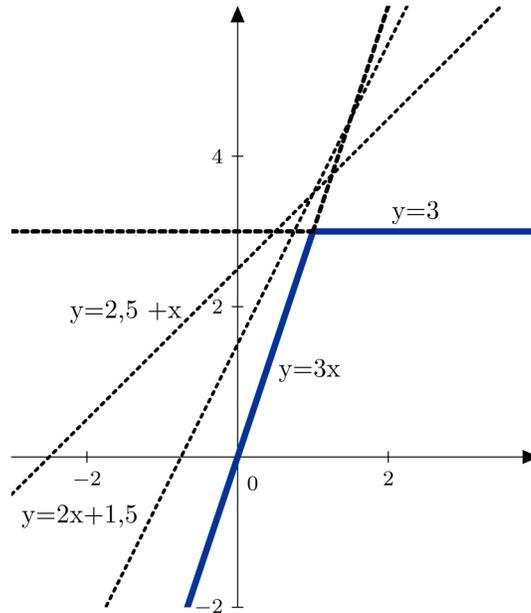


FIGURA 1.2. Gráfico de la función definida por el polinomio tropical del Ejemplo 1.2.5. Rectas punteadas corresponden a monomios que no aportan al mínimo.

Ejemplo 1.2.6. Un caso particular de la Propiedad 1.1.1 es

$$w_1^2 \oplus w_2^2 = w_1^2 \oplus w_1 \odot w_2 \oplus w_2^2$$

Es claro que como objetos estos dos polinomios son distintos, sin embargo definen la misma función.

$$\overline{w_1^2 \oplus w_2^2} = \min(2w_1, 2w_2) = \min(2w_1, w_1+w_2, 2w_2) = \overline{w_1^2 \oplus w_1 \odot w_2 \oplus w_2^2}$$

En general notaremos al polinomio tropical como f , indistintamente si estamos viéndolo como polinomio tropical o como la función lineal a trozos que define.

1.3. Raíces de un polinomio tropical

Dado un polinomio tropical f queremos definir sus raíces. Consideramos el polinomio en una variable:

$$f(w) := a \odot w \oplus b$$

y observamos que la ecuación $a \odot w \oplus b = 0_{\mathbb{T}}$ no tiene solución si $b \neq 0_{\mathbb{T}}$. Entonces tenemos que buscar otra definición de los ceros de f . La igualdad

$$a \odot w \oplus b = a \odot (w \oplus (b - a))$$

sugiere definir, así como en el caso clásico, el número $b - a$ como cero de f .

Ejemplo 1.3.1. Sea $f := 2 \odot w \oplus 3$, de acuerdo con la definición precedente, $w = 1$ es cero de f . El gráfico de $f(w)$ es singular para este valor de w puesto que en ese punto el mínimo entre $2 + w$ y 3 se alcanza dos veces, Figura 1.3.

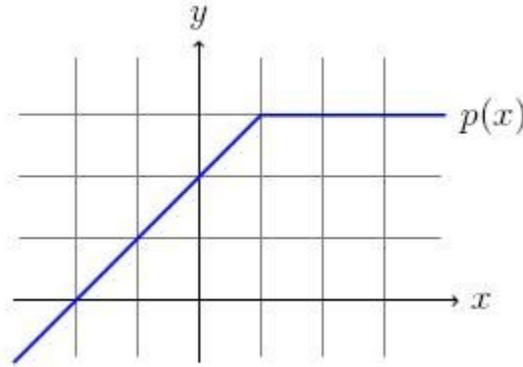


FIGURA 1.3. Gráfico de la función definida por el polinomio tropical del Ejemplo 1.3.1.

Esto nos motiva a dar la siguiente definición:

Definición 1.3.2. Llamamos *conjunto de ceros* de un polinomio tropical $f = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} c_i \odot w^i$ al conjunto $Z(f)$ de todos los puntos $w \in \mathbb{R}^n$ donde el valor $f(w) = \min_{i \in \mathcal{A}} \{c_i + \langle w, i \rangle\}$ se alcanza al menos dos veces.

Observación 1.3.3. Notar que si f es un monomio tropical su conjunto de ceros es vacío. Más aún, vale:

Teorema 1.3.1. $Z(f) = \emptyset \iff f$ es un monomio

DEMOSTRACIÓN. \Leftarrow : es la observación anterior.

\Rightarrow : Sea $f = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} a_i \odot w^i$ y notemos $l_i(w) = a_i + \langle w, i \rangle$ a la función lineal asociada a cada monomio. Definamos, para cada i , el conjunto $A_i = \{w \in \mathbb{R}^n : l_i(w) < l_j(w) \ \forall i \neq j\}$. Como las l_i son continuas, y $|\mathcal{A}| < \infty$, los A_i resultan abiertos. Como $Z(f) = \emptyset$, también resulta $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i \in \mathcal{A}} A_i$, y $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. La única forma que puede pasar esto es si existe $i_0 \in \mathcal{A}$ con $A_{i_0} = \mathbb{R}^n$ y $A_j = \emptyset$ si $j \neq i_0$, ya que \mathbb{R}^n es conexo. Con esto, si $w \in \mathbb{R}^n$ luego $a_{i_0} + \langle w, i_0 \rangle < a_j + \langle w, j \rangle \ \forall j \neq i_0$ o, equivalentemente, $a_{i_0} - a_j < \langle w, j - i_0 \rangle$. Como $i_0 \neq j$, esto puede pasar sólo si $a_j = \infty$, o sea $a_j = 0_{\mathbb{T}} \ \forall j \neq i_0$. Y con esto vemos que f es un monomio tropical. \square

Observación 1.3.4. Sean $l_1, \dots, l_n, g_1, \dots, g_r$ formas lineales en \mathbb{R}^n . Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ vale que

$$\begin{aligned} \min\{l_1(x), \dots, l_n(x)\} + \min\{g_1(x), \dots, g_r(x)\} &= \\ &= \min\{l_i(x) + g_j(x) : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, r\}. \end{aligned}$$

Proposición 1.3.2. Sea $p = \bigoplus_{\alpha \in A} a_\alpha \odot w^\alpha$. Para todo polinomio tropical $g = \bigoplus_{\beta \in B} b_\beta w^\beta$, se cumple que $Z(p) \subseteq Z(p \odot g)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $w \in Z(p)$. Por definición sabemos que

$$\begin{aligned} p \odot g(w) &= \bigoplus_{\alpha \in A, \beta \in B} a_\alpha \odot b_\beta \odot w^{\alpha+\beta} \\ &= \min\{a_\alpha + b_\beta + \langle \alpha + \beta, w \rangle : \alpha \in A, \beta \in B\} \\ &= \min\{(a_\alpha + \langle \alpha, w \rangle) + (b_\beta + \langle \beta, w \rangle) : \alpha \in A, \beta \in B\}. \end{aligned}$$

Entonces por la observación anterior obtenemos que

$$p \odot g(w) = \min_{\alpha \in A} \{a_\alpha + \langle \alpha, w \rangle\} + \min_{\beta \in B} \{b_\beta + \langle \beta, w \rangle\}.$$

Como $w \in Z(p)$, sabemos que el valor $\min_{\alpha \in A} \{a_\alpha + \langle \alpha, w \rangle\}$ se alcanza al menos dos veces, con lo cual $w \in Z(p \odot g)$. \square

1.4. Valuaciones

Sea K un cuerpo. Denotaremos por K^* al conjunto de elementos no nulos de K . Una *valuación no arquimediana* sobre K es una función $val : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que satisface:

- (1) $val(a) = \infty$ si y sólo si $a = 0$
- (2) $val(ab) = val(a) + val(b)$
- (3) $val(a + b) \geq \min\{val(a), val(b)\}$ para todo $a, b \in K^*$

A lo largo de todo el texto denominaremos a una valuación no arquimediana simplemente valuación.

Lema 1.4.1. Sean $a, b \in K$ con $val(a) \neq val(b)$. Entonces

$$val(a + b) = \min(val(a), val(b)).$$

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $val(b) > val(a)$. Como $1^2 = 1$ tenemos que $val(1) = 0$. Por otra parte como $(-1)^2 = 1$, resulta $val(-1) = 0$ también. Así $val(-b) = val(b)$ entonces $val(a) \geq \min(val(a+b), val(-b)) = \min(val(a+b), val(b))$, y por lo tanto $val(a) \geq val(a+b)$. Pero $val(a+b) \geq \min(val(a), val(b)) = val(a)$ entonces $val(a+b) = val(a)$ \square

Observación 1.4.1. Si $\#K > 3$ (por ejemplo $car(K) = 0$, o K algebraicamente cerrado), podemos asumir siempre que $1 \in Im(val)$ ya que $(\lambda val) : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ es una valuación para cualquier valuación val y $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$.

Ejemplo 1.4.2. Si $K = k(x)$ es el anillo de funciones racionales, podemos escribir cualquier función $f/g \in K$ como una serie de Laurent $h = \sum h_i x^i$ donde $h_i = 0$ para $i \ll 0$. Podemos definir una valuación como $val(f/g) := \min\{i : h_i \neq 0\}$. Si i es el menor exponente en f y j es el menor exponente en g , entonces $val(f/g) = i - j$.

Ejemplo 1.4.3. Si $K = \mathbb{Q}$, podemos definir $val_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ como $val_p(q) = j$ cuando $q = p^j a/b$ donde p no divide a a ni a b . Por ejemplo $val_2(12/5) = 2$, mientras que $val_2(1/10) = -1$. A esta valuación se la denomina valuación p-ádica.

Ejemplo 1.4.4. Series Formales de Laurent:

$$K((x)) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_{\alpha} x^{\alpha}, a_{\alpha} = 0 \text{ si } \alpha \ll 0 \right\}$$

Si $f \neq 0$, $f \in K((x))$, $f = \sum_{\alpha \geq \alpha_0} a_{\alpha} x^{\alpha}$ definimos $val(f) := \alpha_0$ si $a_{\alpha_0} \neq 0$, o sea

$$val(f) = \min\{\alpha : a_{\alpha} \neq 0\}.$$

Notemos que $K(x) \subseteq K((x))$ y la valuación que estamos considerando, resulta una extensión de la del Ejemplo 1.4.2.

Ejemplo 1.4.5. Se conocen con el nombre de *Series de Puiseux* al conjunto:

$$K\{\{x\}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K((x^{1/n}))$$

Notemos que existe una inyección natural de $K((x^{1/n})) \hookrightarrow K((x^{1/nm}))$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Luego dadas dos series $f, g \in K\{\{x\}\}$ podemos suponer que $f, g \in K((x^{1/n}))$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto tiene sentido definir $f + g \in K((x^{1/n}))$ sumando término a término y $f \cdot g \in K((x^{1/n}))$ extendiendo la definición usual de multiplicación de series de Laurent.

Estas dos operaciones definen una estructura de cuerpo para $K\{\{x\}\}$. Este cuerpo admite la siguiente valuación no trivial $val(f) := \alpha_0$ si $a_{\alpha_0} \neq 0$, siendo $f = \sum_{\alpha \geq \alpha_0} a_{\alpha} x^{\alpha/n} \in K\{\{x\}\}$.

De aquí en adelante notaremos con \mathbb{K} al conjunto $K\{\{x\}\}$.

Teorema 1.4.2. *Sea K algebraicamente cerrado, $car(K) = 0$, entonces \mathbb{K} es algebraicamente cerrado.*

La demostración de este Teorema es constructiva y se sigue del Teorema de Newton-Puiseux [W]. (cf. Teorema 1.5.3, donde damos una demostración para el caso multidimensional, habiendo aceptado el caso $n = 1$).

Notemos que según [AM, Pág. 104] un cuerpo K junto con una valuación resulta un *anillo local de valoración discreta*, con ideal maximal $\mathfrak{M} = \{f \in K : val(f) > 0\}$. A $\mathbf{k} = K/\mathfrak{M}$ lo llamaremos su *cuerpo residual*.

1.5. Tropicalización de un ideal

Para un cuerpo K y una función de valuación $val : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ podemos extender la función de valuación a su clausura algebraica \bar{K} (ver [EKL]) y a \bar{K}^n definiendo

$$val : \bar{K}^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty^n, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto (val(a_1), \dots, val(a_n))$$

Definición 1.5.1. Para un polinomio $F = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} \in K[x_1, \dots, x_n]$, la *tropicalización de F* es el polinomio tropical definido por:

$$f(w) = trop(F)(w) := \bigoplus_{\alpha} val(a_{\alpha}) \odot w^{\alpha} = \min_{\alpha} \{val(a_{\alpha}) + \langle \alpha, w \rangle\}$$

y la *hipersuperficie tropical* de f es el conjunto de ceros $\mathcal{T}(f)$ del polinomio tropical $trop(f)$, o sea:

$$\mathcal{T}(f) = \{w \in \mathbb{R}^n : \text{el mínimo de } trop(F) \text{ se alcanza al menos dos veces en } w\}.$$

Observación 1.5.2. Para cualquier monomio $x^{\beta} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_d]$ resulta

$$\mathcal{T}(Trop(F)) = \mathcal{T}(Trop(x^{\beta} F))$$

ya que $Trop(x^{\beta} F)(w) = \langle w, \beta \rangle + \min_{\alpha} \{val(a_{\alpha}) + \langle \alpha, w \rangle\}$.

Observación 1.5.3. La Definición 1.5.1 se puede extender naturalmente a un polinomio de Laurent $F = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$. Más aún, si x^{β} es el mínimo común múltiplo de los denominadores del polinomio F , tenemos que $x^{\beta} F = \tilde{F}$ con $\tilde{F} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, resultando

$$\mathcal{T}(trop(F)) = \mathcal{T}(trop(x^{\beta} F)) = \mathcal{T}(trop(\tilde{F}))$$

por la observación anterior.

En adelante notaremos $\gamma t^w := (\gamma_1 t^{w_1}, \dots, \gamma_n t^{w_n})$.

Lema 1.5.1. Sea $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Entonces $\forall w \in \mathbb{Q}^n$ y para $\gamma \in \mathbb{C}^n$ genérico, tenemos que

$$\overline{trop(F)}(w) = val(F(\gamma t^w)).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $F(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_{\alpha} x^{\alpha}$. Evaluando en $x = \gamma t^w$ nos queda $F(\gamma t^w) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_{\alpha} \gamma^{\alpha} t^{\langle w, \alpha \rangle}$. Como $\gamma^{\alpha} \in K$, claramente vale que

$val(a_\alpha \gamma^\alpha t^{\langle w, \alpha \rangle}) = val(a_\alpha) + \langle w, \alpha \rangle$. Llamando \mathcal{A}' al conjunto de todos los $\alpha \in \mathcal{A}$ para los cuales $trop(F)(w) = val(a_\alpha) + \langle w, \alpha \rangle$ resulta

$$F(\gamma t^w) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}'} a_\alpha \gamma^\alpha t^{\langle w, \alpha \rangle} + O(t^{\langle w, \alpha \rangle + \epsilon}).$$

Luego, tomando $\gamma \in \mathbb{C}^n$ genérico tal que $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}'} a_\alpha \gamma^\alpha t^{\langle w, \alpha \rangle} \neq 0$, podemos asegurar que $\overline{trop(F)}(w) = val(F(\gamma t^w))$. \square

Corolario 1.5.2. Sean $F, G \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $F, G \neq 0$ entonces $trop(FG)$ y $trop(F) \odot trop(G)$ definen la misma función. Es decir:

$$\overline{trop(FG)} = \overline{trop(F) \odot trop(G)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición sabemos que $val((FG)(\gamma t^w)) = val(F(\gamma t^w)G(\gamma t^w)) = val(F(\gamma t^w)) \odot val(G(\gamma t^w))$. Por el Lema anterior tenemos que $val((FG)(\gamma t^w)) = \overline{trop(FG)}(w)$, $val(F(\gamma t^w)) = \overline{trop(F)}(w)$ y $val(G(\gamma t^w)) = \overline{trop(G)}(w)$.

Luego, utilizando la Observación 1.3.4, podemos concluir que $\overline{trop(FG)}(w) = \overline{trop(F)}(w) \odot \overline{trop(G)}(w) = \overline{(trop(F) \odot trop(G))}(w)$. \square

Seguiremos con unas definiciones necesarias para caracterizar los ceros de un polinomio tropical:

Definición 1.5.4. Sea $F = \sum_{i \in \mathcal{A}} a_i x^i \in \mathbb{K}[x]$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$, $i = (i_1, \dots, i_n)$ y $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$ un conjunto finito.

Notaremos $cp(a_i) = c_i$ al coeficiente principal de a_i , $val(a_i) = v_i$, es decir

$$a_i = c_i t^{v_i} + \text{términos de orden mayor que } v_i.$$

También notaremos $\bar{f}(w) = trop(F)(w) = \min_{i \in \mathcal{A}} \{v_i + \langle i, w \rangle\}$.

Si $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$F_w(x) = \sum_{i \in \mathcal{A}'} c_i x^i \in K[x] \text{ e}$$

$$in_w(F)(x) = \sum_{i \in \mathcal{A}'} a_i x^i \in \mathbb{K}[x]$$

donde \mathcal{A}' es el conjunto de todos los vectores $i \in \mathcal{A}$ donde se alcanza $\bar{f}(w_1, \dots, w_n)$.

Observación 1.5.5. Notar que si escribimos $F(xt^w)$ en potencias de t tenemos que

$$F(xt^w) = \sum_{i \in \mathcal{A}'} c_i x^i t^{\bar{f}(w)} + O(t^{\bar{f}(w)+\epsilon}) = F_w(x) t^{\bar{f}(w)} + O(t^{\bar{f}(w)+\epsilon})$$

para algún $\epsilon > 0$, donde $O(t^{\bar{f}(w)+\epsilon})$ representa términos de orden mayor o igual a $\bar{f}(w) + \epsilon$ en t . Con esta escritura, F_w queda unívocamente determinado. Es decir, si $F(xt^w) = P(x) t^{\bar{f}(w)} + O(t^{\bar{f}(w)+\epsilon})$, resulta $P(x) = F_w(x)$.

Observación 1.5.6. Sea $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, K algebraicamente cerrado, y $f = \text{Trop}(F)$. Por su construcción, los monomios de f_w corresponden a los índices i donde se alcanza $\bar{f}(w)$. Luego las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (I) $w \in \mathcal{T}(f)$ ($w \in \mathbb{Q}^n$).
- (II) F_w tiene al menos dos monomios.
- (III) F_w tiene una raíz en $(K^*)^n$.

La equivalencia entre las dos primeras afirmaciones es clara por la definición de F_w , mientras que la equivalencia entre la segunda y tercera afirmación se puede deducir por inducción en la cantidad de variables de F .

Teorema 1.5.3. (*Newton-Puiseux en varias variables*)

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0. Sean $F \in K[x_1, \dots, x_n]$, $w \in \mathcal{T}(\text{Trop}(F)) \cap \mathbb{Q}^n$ y $\gamma \in (K^*)^n$ tal que $F_w(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = 0$. Entonces existe $z = (z_1, \dots, z_n) \in V_{\mathbb{K}^*}(F)$ tal que $z_i = \gamma_i t^{w_i} + O(t^{w_i + \epsilon_i})$ para algún $\epsilon_i > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Seguiremos la demostración de [T].

Aplicaremos inducción en n , siendo verdadera para el caso $n = 1$ por el Teorema de Newton- Puiseux clásico [W]. Notemos primero que si $F(\gamma t^w) = 0$, ya tenemos una raíz. También, si alguna variable x_j no aparece en F_w , especializar la misma en $x_j = \gamma_j t^{w_j}$ no modifica las hipótesis. Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las variables que aparecen en F_w son exactamente x_1, \dots, x_n . En esta situación hay dos casos posibles:

• Si hay un j ($1 \leq j \leq n$) tal que $F_w(x_1, \dots, \gamma_j, \dots, x_n) \neq 0$ entonces, reordenando las variables de ser necesario, podemos suponer que $j = 1$. Escribamos $w = (w_1, w')$, $x = (x_1, x')$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma')$. Las condiciones necesarias para aplicar inducción sobre $G(x') = F(\gamma_1 t^{w_1}, x')$ son:

$$w' = (w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{T}(\text{Trop}(G)) \text{ y } g_{w'}(\gamma_2, \dots, \gamma_n) = 0.$$

Es posible que $\overline{\text{Trop}(G)}(w') \neq \overline{\text{Trop}(F)}(w_1, w')$ (ver Ejemplo 1.5.7) pero como $G(x') = F(\gamma_1 t^{w_1}, x')$, trivialmente verificamos que

$$G(x' t^{w'}) = F(\gamma_1 t^{w_1}, x' t^{w'}) = F_w(\gamma_1, x') t^{\bar{f}(w)} + O(t^{\bar{f}(w)+\epsilon})$$

donde, por hipótesis, $F_w(\gamma_1, x') \neq 0$.

Por la Observación 1.5.5, de la ecuación anterior deducimos que $G_{w'}(\gamma') = F_w(\gamma_1, \gamma') = 0$, con lo cual se cumple la segunda condición. Y por la Observación 1.5.6, como $\gamma' \in (K^*)^{n-1}$ tenemos que $(w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{T}(\text{Trop}(G))$. Luego, por nuestra hipótesis inductiva, sabemos que $\exists z' \in V_{\mathbb{K}^*}(G)$ tal que $z'_i = \gamma'_i t^{w'_i} + O(t^{w'_i+\epsilon})$ con lo cual $z = (\gamma_1 t^{w_1}, z')$ es raíz de f y cumple todo lo que queríamos.

• Supongamos ahora que vale que $F_w(x_1, \dots, \gamma_i, \dots, x_n) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Recordemos que $F(x t^w) = f_w(x) t^{\bar{f}(w)} + O(t^{\bar{f}(w)+\epsilon})$, y escribamos $F_w = (x_1 - \gamma_1)^k (x_2 - \gamma_2) \dots (x_n - \gamma_n) Q(x_1, x')$ con $Q(\gamma_1, x') \neq 0$. Notar que como $n \geq 2$, existe al menos un término de la forma $(x_i - \gamma_i)$ con $i \neq 1$.

Sustituir x_1 por $\gamma_1 t^{w_1}$ como antes rompería con la estructura deseada para la inducción. Sustituiremos x_1 por $(\gamma_1 + t^{\frac{\epsilon}{2k}}) t^{w_1}$ y aplicaremos inducción sobre $G(x') = F((\gamma_1 + t^{\frac{\epsilon}{2k}}) t^{w_1}, x')$. Igual que en el caso anterior debemos ver que

$$w' = (w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{T}(\text{Trop}(G)) \text{ y } G_{w'}(\gamma_2, \dots, \gamma_n) = 0.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} G(x' t^{w'}) &= F((\gamma_1 + t^{\frac{\epsilon}{2k}}) t^{w_1}, x' t^{w'}) = t^{\bar{f}(w)} F_w(\gamma_1 + t^{\frac{\epsilon}{2k}}, x') + O(t^{\bar{f}(w)+\epsilon}) = \\ &= t^{\bar{f}(w)+\frac{\epsilon}{2}} (x_2 - \gamma_2) \dots (x_n - \gamma_n) Q(\gamma_1 + t^{\frac{\epsilon}{2k}}, x') + O(t^{\bar{f}(w)+\epsilon}). \end{aligned}$$

donde Q es un polinomio con coeficientes en K , por lo tanto

$$Q(\gamma_1 + t^{\frac{\epsilon}{2k}}, x') = Q(\gamma_1, x') + O(t^{\frac{\epsilon}{2k}}).$$

Entonces de la igualdad anterior obtenemos que

$$G(x't^{w'}) = t^{\bar{f}(w)+\frac{\epsilon}{2}}(x_2 - \gamma_2)\dots(x_n - \gamma_n)Q(\gamma_1, x') + O(t^{\bar{f}(w)+\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2k}}).$$

de lo que se sigue que $G_{w'} = (x_2 - \gamma_2)\dots(x_n - \gamma_n)Q(\gamma_1, x_2, \dots, x_n)$ tiene al menos dos monomios y $G_{(w_2, \dots, w_n)}(\gamma_2, \dots, \gamma_n) = 0$. Por la Observación 1.5.6 resulta $(w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{T}(\text{Trop}(G))$, con lo cual podemos aplicar el paso inductivo. \square

Ejemplo 1.5.7. Esta demostración nos brinda una herramienta para poder encontrar raíces de un polinomio.

Por ejemplo, sea $F = -3t^2 + 3tx - t^2y + txy - t^3xy^4 + (t^4 + t^5)y^4 + x^5$, $\bar{f} = \min\{2, 1 + x, 2 + y, 1 + x + y, 3 + x + 4y, 4 + 4y, 0 + 5x\}$. Tomemos $w = (1, 0) \in \mathcal{T}(f)$, $F(tx, y) = (-3 + 3x - y + xy)t^2 + O(t^4)$ y por lo tanto $F_w = -3 + 3x - y + xy$, $F_w(1, -3) = 0$. Entonces, por el Teorema 1.5.3, existe una raíz en $(\mathbb{K}^*)^2$ cuyo término principal es $(t, -3)$.

Como $F_w(1, y) = F_w(x, -3) = 0$ estamos en el segundo caso del teorema. Realizamos la sustitución $x = (1+t)t = t+t^2$ en F , resultando $F(t+t^2, y) = G(y) = 3t^3 + t^5 + 5t^6 + 10t^7 + 10t^8 + 5t^9 + t^{10} + t^3y$, y $\bar{g}(y) = \min\{3, 3 + y\}$. Notar que $\bar{g}(y) \neq \bar{f}(1, y) = \min\{2, 2 + y, 4 + 4y\}$ pero, como se afirmó en el teorema, $0 \in \mathcal{T}(\text{trop}(G))$. Ahora, calculando una raíz de $G(y)$ cuyo término principal es -3 , nos queda que

$$(x, y) = (t + t^2, -3 - t^2 - 5t^3 - 10t^4 - 10t^5 - 5t^6 - t^7)$$

parametriza una curva de raíces de $F(x, y)$.

Comentario 1.5.8. Podemos realizar una demostración del Teorema 1.4.2 a partir del enunciado del Teorema 1.5.3. En este caso $n = 1$, con lo que sea $F(x) \in \mathbb{K}[x]$. Si $F \neq 0$ es un monomio, luego $x = 0$ es raíz. De no ser un monomio, tenemos que $\mathcal{T}(\text{trop}(F)) \neq \emptyset$ por el Teorema 1.3.1. Sea ahora $w \in \mathcal{T}(\text{trop}(F)) \cap \mathbb{Q}$. Tenemos que F_w no resulta monomio, por lo tanto existe una raíz de F_w y, por el Teorema 1.5.3, podemos hallar una raíz $z \in \mathbb{K}^* \subset \mathbb{K}$ de F .

Ahora definiremos la tropicalización de un ideal $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$, con \mathbb{K} cuerpo valuado, algebraicamente cerrado.

Definición 1.5.9. Para un ideal $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ y un cuerpo K con una valuación no arquimediana, algebraicamente cerrado, se define

la variedad tropical de I como

$$\mathcal{T}(I) = \bigcap_{\substack{F \in I \\ F \neq 0}} \mathcal{T}(\text{Trop}(F))$$

Comentario 1.5.10. Teniendo en cuenta la Observación 1.5.3, es posible extender en forma natural la Definición 1.5.9 para un ideal $I \subseteq K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$.

Proposición 1.5.4. Sean I_1, I_2 dos ideales en $K[x_1, \dots, x_d]$ cuyos ideales extendidos en $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$ resultan iguales. Es decir, I_1 e I_2 cumplen $I_1 \otimes K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}] = I_2 \otimes K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$. Entonces resulta $\mathcal{T}(I_1) = \mathcal{T}(I_2)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $I_2 = \langle G_1, \dots, G_r \rangle$. Supongamos $F \in I_1$, luego $F \in I_1 \otimes K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}] = I_2 \otimes K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$. Con esto podemos escribir $F = \sum \frac{H_i}{x_i^{\alpha_i}} G_i$, con $H_i \in K[x_1, \dots, x_d]$ para todo i . Sacando denominador común y operando, llegamos a $x^\beta F = \sum \tilde{H}_i G_i$, donde también $\tilde{H}_i \in K[x_1, \dots, x_d]$ para todo i . O sea $x^\beta F \in I_2$. Y como $\mathcal{T}(\text{Trop}(x^\beta F)) = \mathcal{T}(\text{Trop}(F))$, resulta la inclusión $\mathcal{T}(I_1) \supseteq \mathcal{T}(I_2)$.

Análogamente se ve la otra inclusión, resultando la igualdad buscada. \square

Lema 1.5.5. Para un ideal principal $I = \langle F \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ se tiene que

$$\mathcal{T}(\langle F \rangle) = \mathcal{T}(\text{Trop}(F)).$$

DEMOSTRACIÓN. La inclusión “ \subseteq ” es clara por definición. Para la otra inclusión, si $w \in \mathcal{T}(\text{Trop}(F))$ entonces el mínimo de $\overline{\text{trop}(F)}$ se alcanza al menos dos veces en w . Sea $H \in \langle F \rangle$ y $H = GF$ para algún $G \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Sabemos que $\overline{\text{Trop}(FG)} = \overline{\text{Trop}(F)} \odot \overline{\text{Trop}(G)}$, por el Corolario 1.5.2. Con lo cual el mínimo en $\overline{\text{trop}(FG)}(w)$ se alcanza al menos dos veces puesto que esto sucede en $\overline{\text{trop}(F)}$. \square

El siguiente teorema nos da otra definición posible para la tropicalización de un ideal si \mathbb{K} es un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero.

Teorema 1.5.6 (Kapranov - Teorema Fundamental de la Geometría Tropical). *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero e $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Entonces*

$$\mathcal{T}(I) = \overline{\{(val(z_1), \dots, val(z_n)) : z \in V_{\mathbb{K}^*}(I)\}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Veremos \subseteq en el caso particular en el que I es un ideal principal. Si $I = \langle F \rangle$, el Lema 1.5.5 afirma que $\mathcal{T}(I) = \mathcal{T}(f)$, para $f = Trop(F)$. Con lo cual, si $w \in \mathcal{T}(f) \cap \mathbb{Q}^n$, la Observación 1.5.6 nos dice que F_w tiene una raíz en $(K^*)^n$. Entonces, por el Teorema 1.5.3, sabemos que existe $z = (z_1, \dots, z_n) \in V_{\mathbb{K}^*}(F)$ tal que $val(z_i) = w_i$. Por lo tanto $\mathcal{T}(I) \cap \mathbb{Q}^n \subseteq val(V_{\mathbb{K}^*}(I))$. Con lo cual tenemos que

$$\mathcal{T}(I) = \overline{\mathcal{T}(I) \cap \mathbb{Q}^n} \subseteq \overline{\{(val(z_1), \dots, val(z_n)) : z \in V_{\mathbb{K}^*}(I)\}}.$$

\supseteq : Como $\mathcal{T}(I)$ es cerrado, basta ver que para todo $z \in V_{\mathbb{K}^*}(I)$ se cumple que $w = val(z) \in \mathcal{T}(I)$.

Sea $F \in I, F \neq 0$. Sabemos que $F(z) = 0$ y que $z \in \mathbb{K}^*$ por lo tanto F no puede ser un monomio. Si $F = \sum c_\alpha x^\alpha$ tenemos que $\sum c_\alpha z^\alpha = 0$ entonces $val(\sum c_\alpha z^\alpha) = \infty$. Si existiera un único α tal que $val(c_\alpha z^\alpha)$ sea mínimo entonces no podría haber cancelaciones de término inicial. Como da ∞ , existe al menos otro índice β con $val(c_\alpha z^\alpha) = val(c_\beta z^\beta)$. Por lo tanto existen al menos dos términos para los cuales es mínimo $val(c_\alpha z^\alpha) = val(c_\alpha) + \langle \alpha, val(z) \rangle$. Es decir, $w = val(z) \in \mathcal{T}(I)$. \square

Comentario 1.5.11. Más generalmente el Teorema 1.5.6 se aplica a cualquier cuerpo K (no necesariamente algebraicamente cerrado) provisto de una función de valuación no trivial, y no arquimediana. En ese caso, para un ideal $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ se tiene que

$$\mathcal{T}(I) = \overline{val(\mathcal{V}(I))} = \overline{\{(val(z_1), \dots, val(z_n)) : z \in \mathcal{V}(I)\}} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

donde $\mathcal{V}(I)$ representa el conjunto de ceros de I en $(\bar{K}^*)^n$ siendo como antes \bar{K} la clausura algebraica de K [EKL].

Corolario 1.5.7. *Sea $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ y K un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces son equivalentes:*

1. $\mathcal{T}(I) = \emptyset$
2. existe un monomio $x^\alpha \in I$
3. $V_{K^*}(I) = \emptyset$

$$4. I \otimes K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] = K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$$

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos $2 \iff 3$.

\Rightarrow) Si $\alpha = 0$ entonces $x^\alpha = 1$ con lo cual $V(I) = \emptyset$.

Si no, $x^\alpha = x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n}$ con $\alpha_i > 0$ para algún $1 \leq i \leq n$. Si $z \in V(I)$, $z^\alpha = 0$ entonces $z_i = 0$ para algún $1 \leq i \leq n$ y por lo tanto I no tiene ceros en $(K^*)^n$.

\Leftarrow) Como $V_{K^*}(I) = \emptyset$ el ideal $J \subseteq K[x_1, \dots, x_n, y]$ definido por $J = IK[x_1, \dots, x_n, y] + \langle x_1 \dots x_n y - 1 : f \in I \rangle$ cumple que $V_K(J) = \emptyset$. Entonces por el teorema de los ceros de Hilbert (ver [CLO] página 168) tenemos que $J = K[x_1, \dots, x_n, y]$. Por lo tanto existen polinomios $G, G_1, \dots, G_s \in K[x_1, \dots, x_n, y]$ tales que

$$1 = \sum_{i=1}^s G_i F_i + G \cdot (x_1 \dots x_n y - 1).$$

Reemplazando $y = \frac{1}{x_1 \dots x_n}$ tenemos que

$$1 = \sum_{i=1}^s G_i(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{x_1 \dots x_n}) F_i(x_1, \dots, x_n).$$

Sea $N = \max_{1 \leq i \leq s} \{deg_y(G_i)\}$ entonces $(x_1 \dots x_n)^N G_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ para todo $1 \leq i \leq s$, con lo que $(x_1 \dots x_n)^N = \sum_{i=1}^s ((x_1 \dots x_n)^N G_i) F_i \in I$.

Para ver $1 \Leftrightarrow 2$ observemos que existe un monomio en $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ \Leftrightarrow existe un monomio en $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, con lo cual $V_{K^*}(I) = \emptyset \Leftrightarrow V_{\mathbb{K}^*}(I) = \emptyset$. Entonces por el Teorema 1.5.6 tenemos que

$$\mathcal{T}(I) = \overline{\{val(z), z \in V_{\mathbb{K}^*}(I)\}} = \emptyset \Leftrightarrow V_{\mathbb{K}^*}(I) = \emptyset \Leftrightarrow V_{K^*}(I) = \emptyset.$$

Por último, para ver $2 \Leftrightarrow 4$ observemos que los monomios son inversibles en $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Y si existe $x^\alpha \in I$, entonces existe $x^\alpha \in I \otimes K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Esto demuestra $2 \Rightarrow 4$.

Para la otra implicación, si $1 = \sum \frac{H_i}{x^{\alpha_i}} F_i$, $F_i \in I$ y $H_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ para todo i , sacando denominador común y operando, nos queda que $x^\beta = \sum \tilde{H}_i F_i$ con $\tilde{H}_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ para todo i , es decir $x^\beta \in I$. \square

Definición 1.5.12. Dada una variedad algebraica $V \subseteq K^n$ con K un cuerpo valuado algebraicamente cerrado, definimos

$$Trop(V) = \mathcal{T}(I(V))$$

donde $I(V) = \{F \in K[x_1, \dots, x_n] \mid F(x) = 0 \forall x \in V\}$ es el ideal de la variedad V .

Observación 1.5.13. Notar que $Trop(V)$ depende de $V \cap (K^*)^n$.

Si V es irreducible y $V \cap (K^*)^n \neq \emptyset$, entonces $V = \overline{V \cap (K^*)^n}$.

Si $V \subseteq K^n \setminus (K^*)^n$, entonces $Trop(V) = \emptyset$ por 1.5.7, ya que $I(V)$ contiene un monomio.

Gracias al Teorema de Kapranov 1.5.6 estamos en condiciones de definir una Hipersuperficie Tropical Singular.

Definición 1.5.14. Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^d$ un conjunto finito, que genera un espacio \mathbb{Z} -lineal de dimensión d . Sea $f = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i \in \mathbb{R}[w_1, \dots, w_d]$. Decimos que la hipersuperficie tropical $\mathcal{T}(f)$ es singular si podemos encontrar $q \in \mathcal{T}(f)$, $p \in (\mathbb{K}^*)^d$ y $G \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$ tales que $Trop(G) = f$, $val(p) = q$ y p es un punto singular de G . Es decir, $G(p) = \frac{\partial G}{\partial x_j}(p) = 0$ para todo $j = 1, \dots, d$.

A ese tal q lo llamaremos *punto singular* de la hipersuperficie tropical $\mathcal{T}(f)$.

Bajo estas mismas condiciones, diremos que $\mathcal{T}(\langle G \rangle)$ es una hipersuperficie tropical singular con $q = val(p)$ un punto singular.

Ejemplo 1.5.15. Sean $\mathcal{A} = \{0, \dots, m\}$ un subconjunto de \mathbb{Z} con $m \geq 2$, y $f = \bigoplus_{j=0}^m 0 \odot w^j$. Con esto, $q = 0$ es siempre un punto singular de $\mathcal{T}(f)$, por ejemplo tomando $F = (x - 1)^m \in \mathbb{R}[x]$ con $p = 1$.

Ejemplo 1.5.16. Consideremos el polinomio

$$F = xy^2 - tx^2 - (2 + t^3) \cdot xy + (1 + 2t + t^3) \cdot x + t^3y - (t + t^3) \in \mathbb{K}[x, y].$$

Se puede fácilmente verificar que $p = (1, 1) \in (\mathbb{K}^*)^2$ es un punto singular de la curva $V(F)$. Y esta singularidad se tropicaliza a la singularidad $q = (val(1), val(1)) = (0, 0)$ de la hipersuperficie tropical $\mathcal{T}(\langle F \rangle)$.

Matroides y su relación con la Tropicalización de Subespacios Lineales

2.1. Introducción

Desde este capítulo, y por el resto del texto, fijaremos un conjunto finito de puntos enteros $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset \mathbb{Z}^d$, tal que $\mathbb{Z}m_1 + \dots + \mathbb{Z}m_d = \mathbb{Z}^d$. A esta condición la notaremos como $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^d$.

Sea \mathbb{K} un cuerpo valuado con característica cero, algebraicamente cerrado. Los polinomios de Laurent

$$F = \sum_{i=1}^s a_{m_i} x^{m_i} \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$$

con soporte \mathcal{A} y un punto singular en el $(1, \dots, 1)$ son los polinomios cuyos coeficientes $a = (a_{m_1}, \dots, a_{m_s}) \in \mathbb{K}^s$ pertenecen al núcleo de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m_1 & m_2 & \dots & m_s \end{pmatrix}$$

Esto se debe a que los polinomios con soporte \mathcal{A} y un punto singular en el $(1, \dots, 1)$ cumplen $F(1, \dots, 1) = 0$ y $x_j \frac{\partial F}{\partial x_j}(1, \dots, 1) = 0$, para todo $1 \leq j \leq d$. Estas ecuaciones (lineales en a) son representadas por las filas de la matriz M .

En virtud de la Definición 1.5.14, si $a = (a_{m_1}, \dots, a_{m_d}) \in \text{Ker}(M)$ y $F = \sum_{i=1}^s a_{m_i} x^{m_i}$, la hipersuperficie tropical $\mathcal{T}(f)$ definida por el polinomio tropical $f = \text{Trop}(F) = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} \text{val}(a_i) \odot w^i$ resultará singular en $q = (0, \dots, 0)$.

Según el Teorema 1.5.6, nos interesa estudiar

$$\text{val}(\text{ker}(M) \cap (\mathbb{K}^*)^s) = \{\text{val}(a) : a \in \text{ker}(M) \cap (\mathbb{K}^*)^s\}.$$

En definitiva, por la Definición 1.5.12, estamos interesados en conocer la estructura de $\text{trop}(\ker(M)) = \mathcal{T}(I)$, donde $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ es el ideal generado por los polinomios homogéneos lineales inducidos por las filas de la matriz M .

Veremos que dicha tropicalización sólo depende del matroide de M , que a su vez depende de los menores no nulos de M . Referencias introductorias a la teoría de matroides pueden encontrarse en [BGW], [Ox] y [Wh].

Observación 2.1.1. Para estudiar la familia de polinomios con soporte en A y todos sus coeficientes no nulos, y un punto singular en $p = (p_1, \dots, p_d) \in (\mathbb{K}^*)^d$ (p fijo) lo que deberíamos estudiar es el núcleo de la matriz $M_p = MD_p$, donde $D_p \in \mathbb{K}^{s \times s}$ es diagonal, con $d_{ii} = p^{m_i}$.

Observemos que los menores de M_p difieren de los de M en un monomio en p (no nulo), con lo que los menores no nulos de M_p resultan exactamente los mismos que los de M . De hecho, como consecuencia del Teorema 1.5.6, tenemos que la tropicalización de esta familia de polinomios resulta una traslación de $\text{val}\{\text{Ker}(M) \cap (\mathbb{K}^*)^s\}$, ya que

$$a = (a_{m_1}, \dots, a_{m_s}) \in \text{Ker}(M_p) \iff D_p a \in \text{Ker}(M)$$

$$\text{y } \text{val}(D_p a) = \text{val}(p^{m_1} a_{m_1}, \dots, p^{m_s} a_{m_s}) = \text{val}(p^{m_1}, \dots, p^{m_s}) + \text{val}(a).$$

2.2. Matroides

Definición 2.2.1. Llamaremos a M un *matroide sobre E* , si es una colección de subconjuntos de un conjunto finito E tal que:

- (1) $\emptyset \in M$
- (2) Si $\alpha \in M$ y $\beta \subset \alpha$ entonces $\beta \in M$
- (3) Si $\alpha, \beta \in M$ y $|\alpha| > |\beta|$, luego $\exists x \in \alpha \setminus \beta$ tal que $\{x\} \cup \beta \in M$.

Esta condición se conoce como *propiedad de intercambio*.

Los elementos de M se llaman *conjuntos independientes*, y las *bases* son los elementos maximales de M con respecto a la inclusión. En virtud de (3) de 2.2.1, resulta que todas las bases tienen la misma cantidad de elementos. Es claro que puede concerse completamente a un *matroide* conociendo sólo sus bases.

Los subconjuntos de E que no son independientes se llaman *dependientes*. Y a los conjuntos dependientes minimales, se los llama *circuítos*.

Un elemento $i \in M$ se llama un *loop* si $\{i\}$ es un circuito (que es equivalente a que i no pertenezca a ninguna base). Por el contrario, al elemento i se lo llama *coloop* si pertenece a toda base.

Para un conjunto $S \subset E$ definimos su *clausura* como $cl(S) = S \cup \{i \in E \text{ tal que existe un circuito } C \text{ con } i \in C \text{ y } C \subset S \cup \{i\}\}$.

Un subconjunto S se dice cerrado si $S = cl(S)$.

A los subconjuntos cerrados de E se los denominan *flats*. Equivalentemente, un flat es un conjunto $F \subset M$ tal que no existe ningún circuito C con $|F - C| = 1$.

El *rango* de un subconjunto $S \subset E$ es el máximo de los cardinales de los subconjuntos independientes contenidos en él.

Un *hiperplano* es un subconjunto cerrado H tal que si le agregamos cualquier elemento $i \notin H$, la clausura de $\{i\} \cup H$ es todo E . Esto implica que un hiperplano es un flat propio maximal.

Definimos al *matroide dual* M^* de M (sobre el mismo conjunto E) al matroide con bases igual al complemento (en E) de las bases de M .

Observemos las siguientes relaciones:

- (1) C es un circuito en $M \iff E - C$ es un hiperplano en M^* .
- (2) i es un loop en $M \iff i$ es un coloop en M^* .
- (3) $(M^*)^* = M$.

2.3. Tropicalización de un Espacio Lineal

Asumamos que el espacio lineal a tropicalizar S viene dado como el núcleo de una matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, con rango máximo m . Es decir, $m = n - k$ con $k = \dim(\ker(A))$.

Definimos un *Gale dual de A* (sobre \mathbb{C}) a una matriz $B \in \mathbb{C}^{n \times k}$ tal que sus columnas son una base de $\ker(A)$.

Observación 2.3.1. B resulta un Gale dual de A sii $AB = 0$ y $rg(B) = k$.

Sea M_B el matroide asociado a las filas de una matriz B . Es decir, las bases de M_B son los subconjuntos maximales de $[n] = \{1, \dots, n\}$ que corresponden a filas linealmente independientes de B .

Definiremos al *abanico de Bergman de M_B* , siguiendo los lineamientos en el inicio de la segunda sección de [FS].

Definición 2.3.2. Sea $w \in \mathbb{R}^n$. Definimos a M_w como el matroide cuyas bases son bases de M_B con w -peso máximo. Es decir, β base de M_B es base de M_w sii $\sum_{i \in \beta} w_i$ es máximo.

Observemos que un elemento $i \in [n]$ es un loop de M_w si no está contenido en ninguna base con w -peso maximal.

Comentario 2.3.3. El conjunto M_w definido anteriormente resulta efectivamente un matroide como consecuencia de la definición 2.1 de [FS].

Observación 2.3.4. Según [FS], podemos definir la siguiente relación de equivalencia en \mathbb{R}^n : $w \sim w'$ sii $M_w = M_{w'}$. Las clases de equivalencia de esta relación son conos poliedrales convexos relativamente abiertos (es decir, cada cono es un conjunto abierto en el menor subespacio afín que los contiene). Estos conos forman un abanico completo en \mathbb{R}^n , y dicho abanico se denomina el *abanico normal de M_B* .

Definición 2.3.5. El *abanico de Bergman de M_B* se define como

$$\mathcal{B}(M_B) = \{w \in \mathbb{R}^n : M_w \text{ no contiene ningún loop}\}.$$

La siguiente proposición se puede encontrar, con su demostración, en [FS, 2.5].

Proposición 2.3.1. *El abanico de Bergman $\mathcal{B}(M_B)$ es un abanico. Más aún, resulta un sub-abanico del abanico normal de M_B .*

Proposición 2.3.2. *Sea M^A el matroide asociado a las columnas de A , y $(M^A)^*$ su matroide dual. Luego, si B es un Gale dual de A y M_B el matroide asociado a las filas de B , resulta $M_B = (M^A)^*$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{i_1, \dots, i_k\}$ una base de M_B . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{i_1, \dots, i_k\} = \{n - k + 1, \dots, n\}$, reordenando las columnas de A . Con esto, existe $C \in \mathbb{C}^{k \times k}$ inversible tal

que $BC = \begin{pmatrix} \overline{B} \\ Id_{k \times k} \end{pmatrix}$. Observemos que $A(BC) = 0$ y que $rg(BC) = k$, con lo que BC resulta un Gale dual para A . Como consecuencia de la forma de BC , las primeras $n - k$ columnas de A resultan linealmente independientes. Esto se debe a que si una combinación lineal de dichas columnas es 0, luego existe $v \in \ker(A)$ con sus últimas k coordenadas cero. Y por la forma de BC , esto sólo puede pasar trivialmente.

Recíprocamente, sea $\{i_1, \dots, i_{n-k}\}$ una base en M_A con respecto a las columnas de A . Supongamos que $\{i_1, \dots, i_{n-k}\} = \{1, \dots, n - k\}$, eventualmente reordenando las filas de B . Con esto existe $C \in \mathbb{C}^{m \times m}$ inversible tal que $CA = \begin{pmatrix} Id_{m \times m} \\ \overline{A} \end{pmatrix}$.

Un Gale dual de CA es $B' = \begin{pmatrix} -\overline{A} \\ Id_{k \times k} \end{pmatrix}$. Y como B también es un Gale dual de CA , podemos escribir $B'C' = B$ con $C' \in \mathbb{C}^{k \times k}$ inversible. Y esta escritura nos muestra que las últimas k filas de B resultan linealmente independientes, o sea $\{n - k + 1, \dots, n\}$ resulta una base en M_B .

En conclusión, vimos que β es una base en M_B sii β^c es una base en M^A . Y, por definición, esto último sucede sólo sii β es una base en $(M^A)^*$, que es lo que queríamos demostrar. \square

A continuación demostraremos un lema y una proposición que nos serán de utilidad para demostrar el teorema principal de esta sección.

Lema 2.3.3. *Los circuitos de M_B son exactamente los soportes minimales de formas lineales que se anulan en $\ker(A)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $w = (w_1, \dots, w_n) \neq 0$ en el subespacio generado por las filas de A . Con esto, w induce una forma lineal que se anula en $\ker(A)$. Si notamos por B_i a la i -ésima fila de B , resulta $0 = wB = \sum_{i=1}^n w_i B_i$. Si $sop(w) = \{i : w_i \neq 0\} = \{i_1, \dots, i_t\}$ resulta $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_t}\}$ un conjunto linealmente dependiente, y $sop(w)$ un conjunto dependiente en M_B . Recíprocamente, si miramos un conjunto dependiente en M_B , es el soporte de una forma lineal que se anula en $\ker(A)$.

Con esto, los soportes minimales de las formas lineales que se anulan en $\ker(A)$ son exactamente los conjuntos dependientes minimales en M_B , o sea sus circuitos, como queríamos ver. \square

Para poder demostrar la siguiente proposición, utilizaremos algunos conceptos relacionados con bases de Gröbner. Para una referencia, se puede revisar [CLO].

Dado $w \in \mathbb{R}^n$, definimos un orden monomial \leq_w como $\alpha \leq_w \beta$ sii $\langle \alpha, w \rangle \leq \langle \beta, w \rangle$ ($\alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^n$), y resolvemos los empates con el orden lexicográfico usual. Para que este orden esté bien definido, necesitamos que todas las componentes de w no sean negativas. Notaremos esto como $w \geq 0$.

Para $F = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, y un orden monomial \leq_w , consideramos

$$Lt_{\leq_w}(F) = c_\beta x^\beta \text{ si } \alpha \leq_w \beta \forall \alpha \in \mathcal{A}, \text{ e}$$

$$In_w(F) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}: \langle \alpha, w \rangle \text{ es máximo}} c_\alpha x^\alpha$$

Observemos que $Lt_{\leq_w}(F) = Lt_{\leq_w}(In_w(F))$, ya que el término de máximo peso de f se encuentra desempataando con el orden lexicográfico entre los términos donde $\langle \alpha, w \rangle$ es máximo.

Definamos $In_w(I) := \langle In_w(F) : F \in I, F \neq 0 \rangle$ para un ideal $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Notemos que $\langle Lt(In_w(F)) : F \in I, F \neq 0 \rangle = \langle Lt(F) : f \in I, F \neq 0 \rangle$. Con todo esto, si $\{G_1, \dots, G_t\}$ es una base de Gröbner para I , el conjunto $\{In_w(G_1), \dots, In_w(G_t)\}$ resulta una base de Gröbner para $In_w(I)$ por la observación del párrafo anterior.

Ahora bien, sea w_i el valor de la máxima coordenada de w . Consideremos $w' = -w + w_i(1, \dots, 1) \geq 0$. Como $val(c_\alpha) = 0 \forall \alpha \in \mathcal{A}$, resulta $in_w(F) = In_{w'}(F)$. Con lo que $\{In_{w'}(G_1), \dots, In_{w'}(G_t)\}$ resulta una base de Gröbner (con respecto a $\leq_{w'}$) para $in_w(I) = \langle in_w(F) : F \in I, f \neq 0 \rangle$.

Observemos que si I está generado por formas lineales homogéneas, $in_w(I)$ también será generado por formas lineales homogéneas. Más aún, $in_w(I)$ resulta un ideal primo por [CLO, 4.5.3, pág 195].

Ahora estamos en condiciones de poder demostrar:

Proposición 2.3.4. *Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal generado por formas lineales homogéneas. Entonces $w \in \mathcal{T}(I)$ sii $in_w(\ell)$ no es un monomio $\forall \ell$ forma lineal en I .*

DEMOSTRACIÓN. \Rightarrow : Esta implicación es trivial por la Observación 1.5.6, pues las formas lineales homogéneas son algunos de los polinomios en I , y resulta $in_w(\ell)(x) = \ell_w(x)$ ya que todos los coeficientes en ℓ pertenecen a \mathbb{C} .

\Leftarrow : Si $w \notin \mathcal{T}(I)$, luego existe $F \in I$, $F \neq 0$ con $in_w(F) = x^\alpha$. Por las observaciones anteriores, $in_w(I)$ resulta un ideal primo, con lo que existe $x_i \in in_w(I)$. Más aún, uno de los elementos de la base de Gröbner reducida de $in_w(I)$ debe de ser x_i . También por las observaciones anteriores, los elementos de esta base están formados por polinomios de la forma $In_w(G_j) = in_w(G_j)$, con los G_j formas lineales en I . O sea existe una forma lineal $\ell \in I$ con $in_w(\ell) = x_i$, lo que contradice nuestra hipótesis. \square

Comentario 2.3.6. La proposición anterior nos dice que si I es un ideal generado por formas lineales homogéneas, no es necesario saber que $w \in \mathcal{T}(Trop(F))$ para todo $F \in I \setminus \{0\}$, para que $w \in \mathcal{T}(I)$. Sólo es necesario chequear que w sea un cero tropical de las formas lineales $\ell \in I \setminus 0$. Esto es, que el mínimo del conjunto $\{w_i : i \in \text{sop}(\ell)\}$ se alcance al menos en dos lugares, para cualquier forma lineal no nula $\ell \in I$ con soporte minimal. Si A es una matriz de rango máximo tal que I es generado por las ecuaciones lineales inducidas por sus filas, y B es un Gale dual de A , por 2.3.3, la afirmación anterior es equivalente a pedir que el mínimo de $\{w_i : i \in \mathcal{C} \text{ circuito de } M_B\}$ se alcance al menos dos elementos de cualquier circuito $\mathcal{C} \in M_B$.

Siguiendo el razonamiento del comentario anterior, podemos enunciar y demostrar el principal teorema de este capítulo, según las ideas expresadas en [FS].

Teorema 2.3.5. *Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ el ideal generado por los polinomios homogéneos lineales inducidos por las filas de la matriz A , y la matriz B un Gale dual de A . Entonces*

$$\text{trop}(\text{Im}(B)) = \text{trop}(\text{Ker}(A)) = \mathcal{T}(I) = \mathcal{B}(M_B)$$

donde $\mathcal{B}(M_B)$ es el abanico de Bergman asociado a B .

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este teorema se basa en la equivalencia de los siguientes enunciados, donde w es cualquier vector de \mathbb{R}^n :

- (1) w es tal que $\forall \mathcal{C}$ circuito de M_B , el mínimo de $\{w_i : i \in \mathcal{C}\}$ se alcanza al menos dos veces
- (2) $w \in \mathcal{T}(I)$
- (3) $w \in \mathcal{B}(M_B)$
- (4) Todo elemento $i \in \{1, \dots, n\}$ pertenece a alguna base de $(M_B)_w$

Demostraremos (3) \iff (4) \iff (1) \iff (2) para ver estas equivalencias.

(3) \iff (4): Por definición, $w \in \mathcal{B}(M_B) \iff M_w$ no contiene ningún loop \iff todo elemento $i \in \{1, \dots, n\}$ pertenece a alguna base de M_w

(4) \iff (1): Demostraremos esta equivalencia por su negación.

Si no vale (4), luego $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ loop en M_w . Tenemos dos casos posibles:

- Si i no pertenece a ninguna base de M_B luego, por definición, $\{i\}$ resulta un circuito. Tomando $\mathcal{C} = \{i\}$, en dicho circuito el mínimo se alcanza sólo una vez, o sea no vale (1).

- Si tenemos que i pertenece a alguna base de M_B , sea β una base de M_w , o sea con w -peso maximal, y consideremos el conjunto $\tilde{\beta} = \{j \in \beta : w_i < w_j\}$. Afirmamos que $\tilde{\beta} \cup \{i\}$ es un conjunto dependiente. De no serlo, podemos completar a $\tilde{\beta} \cup \{i\}$ con un conjunto $\omega \subset \beta$ (eventualmente vacío), para obtener una base. Como i pertenece a esta base, su w -peso no resulta maximal. Con esto podemos ver que existe $s \in \beta \setminus \tilde{\beta}$ tal que $w_i + \sum_{j \in \tilde{\beta}} w_j + \sum_{j \in \omega} w_j < \sum_{j \in \tilde{\beta}} w_j + \sum_{j \in \omega} w_j + w_s$, de donde obtenemos un absurdo (como $s \in \beta \setminus \tilde{\beta}$, tenemos que $w_i \geq w_s$). Al ser $\tilde{\beta} \cup \{i\}$ un conjunto dependiente, podemos encontrar un circuito \mathcal{C} con $i \in \mathcal{C} \subset \tilde{\beta}$, donde por construcción $w_i < w_j$ para todo $j \neq i$ en \mathcal{C} . Este circuito contradice el enunciado en (1).

Supongamos ahora que no vale (1), y sea \mathcal{C} el circuito de M_B con $i \in \mathcal{C}$ y $w_i < w_j \forall j \in \mathcal{C} - \{i\}$, o sea el circuito donde se alcanza sólo una vez el mínimo de $\{w_i : i \in \mathcal{C}\}$. Si $\mathcal{C} = \{i\}$, i no pertenece a ninguna base de M_B y no puede pertenecer a ninguna base de $(M_B)_w$, contradiciendo

(4). Supongamos ahora que $C - \{i\} \neq \emptyset$. Si i aparece en alguna base ϕ de M_B , nos armaremos otra base θ , con w -peso mayor que ϕ , tal que $i \notin \theta$. Con esto, ϕ no podrá ser base de $(M_B)_w$ y se contradecirá (4).

Al ser ϕ una base, $\phi - \{i\}$ resulta independiente. Como $|\phi - \{i\}| < |\phi|$ podemos completar a $\phi - \{i\}$ a una base θ . Más aún, el elemento j que le agregamos podemos elegirlo de forma tal que $j \in C - \{i\}$. Esto se debe al hecho que como $C - \{i\}$ es independiente, existe un conjunto $\omega \subset \phi - \{i\}$ (eventualmente vacío) con $\beta = (C - \{i\}) \cup \omega$ base. Si consideramos $\phi - \{i\}$, podemos elegir $j \in \beta$ para completarlo a una base. Como $j \notin \phi - \{i\} \Rightarrow j \notin \omega$, con lo que necesariamente $j \in C - \{i\}$.

Como $w_i < w_j$ por hipótesis, $\sum_{s \in \phi - \{i\}} w_s + w_j > \sum_{s \in \phi - \{i\}} w_s + w_i$. O sea el w -peso de θ es mayor al de ϕ . Además $i \notin \theta$, como queríamos.

(1) \iff (2): Por el Lema 2.3.3, un circuito en M_B es un soporte minimal de una forma lineal que se anula en $\ker(A)$. Por la Propiedad 2.3.4, $w \notin \mathcal{T}(I)$ sii existe una forma lineal ℓ que se anula en $\ker(A)$, con $in_w(\ell)$ un monomio. Si pasa esto, tenemos que $in_w(\ell) = x_j$ con $j \in \text{sop}(\ell)$. Podemos encontrar un circuito \mathcal{C} con $j \in \mathcal{C} \subset \text{sop}(\ell)$. Por construcción el mínimo de $\{w_i : i \in \mathcal{C}\}$ se alcanza sólo en w_j , contradiciendo (1).

Recíprocamente, si $w \in \mathcal{T}(I)$ tenemos que para toda forma lineal ℓ que se anula en $\ker(A)$, $in_w(\ell)$ no es un monomio. En particular, esto pasa para todas las formas lineales que se anulan en $\ker(A)$ con soporte minimal. O sea que se cumple (1) en virtud del Lema 2.3.3. \square

Como consecuencia de la Proposición 2.3.2, podemos reformular el enunciado de este teorema sólo en términos de la matriz A .

Teorema 2.3.6. *Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ el ideal generado por los polinomios homogéneos lineales inducidos por las filas de la matriz A . Entonces*

$$\text{trop}(\text{Ker}(A)) = \mathcal{T}(I) = \mathcal{B}((M^A)^*)$$

donde $\mathcal{B}(M^A)$ es el abanico de Bergman asociado a A con respecto a sus columnas.

Fijado $w \in \mathbb{C}^n$, tenemos que $\sum_{i \in \beta} w_i$ es máximo sii $\sum_{i \notin \beta} w_i$ es mínimo sii $\sum_{i \notin \beta} -w_i$ es máximo. Con esto podemos enunciar el siguiente corolario, donde la tropicalización del ideal I generado por formas lineales homogéneas se da directamente en términos de M^A , y no de su dual.

Corolario 2.3.7. *En las condiciones del teorema anterior, tenemos que*

$$\text{trop}(\text{Ker}(A)) = \mathcal{T}(I) = \{w \in \mathbb{C}^n : (M^A)_{-w} \text{ no tiene coloops}\}.$$

Definición 2.3.7. Al conjunto

$$\mathcal{B}^*(A) = \{w \in \mathbb{C}^n : (M^A)_{-w} \text{ no tiene coloops}\}$$

se lo denomina el *coabanico de Bergman de A*.

2.4. Tropicalización de subespacios lineales y clases de peso

El objetivo de esta última sección es dar una caracterización de $\text{trop}(\text{Ker}(A)) = \mathcal{T}(I)$ en términos de clases de peso, donde el ideal I cumple las mismas condiciones de la sección anterior.

Para poder definir *clase de peso*, primero necesitamos una definición preliminar.

Definición 2.4.1. Dado $w \in \mathbb{R}^n$, notamos con $\mathcal{F}(w)$ a la única *bandera de conjuntos*

$$\emptyset =: F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_s \subsetneq F_{s+1} := [n]$$

tal que

$$w_i < w_j \iff \exists m \text{ tal que } j \in F_m \text{ pero } i \notin F_m$$

Observemos que si llamamos $F'_m = F_m - F_{m-1}$, tenemos que $w_i = w_j$ sii existe m tal que $i, j \in F'_m$.

Definición 2.4.2. Llamamos *clase de peso de la bandera \mathcal{F}* al conjunto de todos los $w \in \mathbb{R}^n$ tales que $\mathcal{F}(w) = \mathcal{F}$.

Podemos definir las clases de peso por las desigualdades e igualdades que la definen. Por ejemplo, el conjunto de los vectores $w \in \mathbb{R}^4$ que cumplen $w_1 = w_3 < w_4 < w_2$ definen una clase de peso en \mathbb{R}^4 . Su bandera correspondiente es $\mathcal{F} := \{2\} \subsetneq \{2, 4\} \subsetneq \{1, 2, 3, 4\}$.

Más aún, tenemos que $\mathcal{F}(w) = \mathcal{F}$ sii $w \in \mathbb{R}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) + \mathbb{R}_{>0}(e_2 + e_4) + \mathbb{R}_{>0}e_2$, donde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^4 . La clase de peso de \mathcal{F} resulta un cono poliedral racional abierto, y si consideramos su clausura nos queda el conjunto $\mathbb{R}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) + \mathbb{R}_{\geq 0}(e_2 + e_4) + \mathbb{R}_{\geq 0}e_2$. Notemos que en las caras de la frontera de este conjunto se realizan los conos correspondientes a banderas refinadas por $\{2\} \subsetneq \{2, 4\} \subsetneq \{1, 2, 3, 4\}$, es decir se permiten reemplazar algunas desigualdades estrictas por igualdades.

Consideremos ahora las banderas donde cada conjunto F_i es un flat de un matroide M . Las llamaremos *banderas de flats*.

Si el matroide M_B es el asociado a las filas de una matriz B , un flat F_i de M_B resulta un subconjunto de subíndices de $[n]$ con la siguiente propiedad: si $j \notin F_i$ luego $b_j \notin \langle b_s : s \in F_i \rangle$, donde notamos con b_j a la j -ésima fila de B .

Habiendo definido estos conceptos, podemos enunciar la caracterización de $\text{trop}(\text{Ker}(A)) = \mathcal{T}(I)$ en términos de clases de peso.

Teorema 2.4.1. *Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ el ideal generado por los polinomios homogéneos lineales inducidos por las filas de la matriz A , y la matriz B un Gale dual de A . Entonces $\text{trop}(\text{Ker}(A)) = \mathcal{T}(I)$ es la unión de las clases de peso de las banderas de flats de M_B .*

DEMOSTRACIÓN. Comencemos por \supseteq : Sea $\emptyset =: F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_s \subsetneq F_{s+1} := [n]$ una bandera de flats, \mathcal{F} su clase de peso, y $w \in \mathcal{F}$. Sea ℓ una forma lineal homogénea que se anula en $\text{ker}(A)$.

Sea $t = \min\{j : \text{sop}(\ell) \subset F_j\}$. Afirmamos que $2 \leq |\text{sop}(\ell) \cap F'_t|$, con lo que $\text{in}_w(\ell)$ no es un monomio, y por la Proposición 2.3.4 nos queda que $w \in \mathcal{T}(I)$. Veamos esta afirmación: Por construcción tenemos que $1 \leq |\text{sop}(\ell) \cap F'_t|$. Si sólo vale la igualdad, sea $\text{sop}(\ell) \cap F'_t = \{a\}$. Podemos encontrar un circuito \mathcal{C} con $a \in \mathcal{C} \subset \text{sop}(\ell)$. Con esto nos queda que $\mathcal{C} - F_{t-1} = \{a\}$, lo que contradice por definición que F_{t-1} sea un flat.

Veamos la otra inclusión: Sea $w \in \mathcal{T}(I)$. Miremos su clase de peso, y su bandera asociada. Sea $s = \min\{t : F_t \text{ no es un flat}\}$. Luego existe $j \in F_{s+1}$ tal que la j -ésima columna de B pertenece al subespacio generado por las columnas de B correspondientes a F_s . Con esto, el conjunto generado por las columnas de $F_s \cup \{j\}$ resulta linealmente dependiente, o sea es un conjunto dependiente en el matroide M_B . Por

el Lema 2.3.3 podemos encontrar una forma lineal ℓ que cumpla con la condición que $j \in \text{sop}(\ell) \subset F_s \cup \{j\}$. Pero por construcción resulta $w_j < w_i$ para todo $i \in F_s$, con lo que $\text{in}_w(\ell) = c_j x_j$ es un monomio, contradiciendo nuestra hipótesis. \square

Para finalizar este capítulo, y en virtud de las observaciones hechas sobre las clausuras de las clases de peso, podemos expresar el siguiente corolario.

Corolario 2.4.2. *Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ el ideal generado por los polinomios homogéneos lineales inducidos por las filas de la matriz A , y la matriz B un Gale dual de A . Entonces $\text{trop}(\text{Ker}(A)) = \mathcal{T}(I)$ es la unión de la clausura de las clases de peso de las banderas de flats maximales de M_B .*

Ejemplo 2.4.3. Si queremos tropicalizar el núcleo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

buscamos un Gale dual

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las únicas banderas de flats maximales de M_B son $\{5\} \subsetneq [5]$ y $\{1, 2, 3, 4\} \subsetneq [5]$, con lo que $\mathcal{T}(I) = \{\mathbb{R}(1, 1, 1, 1, 1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1, 1, 1, 1, 0)\} \cup \{\mathbb{R}(1, 1, 1, 1, 1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(0, 0, 0, 0, 1)\}$. Notemos que estos dos conos tienen una cara en común, con lo que nos queda

$$\text{trop}(\text{ker}(A)) = \mathbb{R}(1, 1, 1, 1, 1) + \mathbb{R}(0, 0, 0, 0, 1)$$

Ejemplo 2.4.4. Si queremos tropicalizar el núcleo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

En este caso, como el $(0, 0, 0)$ es una fila del Gale dual de A , nunca podremos formar una bandera de flats de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Con esto tenemos que $\text{trop}(\ker(A)) = \emptyset$, en concordancia con el Corolario 1.5.7 (pues $x_5 \in I$ es un monomio).

Ejemplo 2.4.5. Si queremos tropicalizar el núcleo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

tenemos que un Gale dual será:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, todas la banderas de flats de M_B serán:

- 1.- $\{1\} \subsetneq \{1, 2\} \subsetneq [6]$ y $\{2\} \subsetneq \{1, 2\} \subsetneq [6]$
- 2.- $\{1\} \subsetneq \{1, 3\} \subsetneq [6]$ y $\{3\} \subsetneq \{1, 3\} \subsetneq [6]$
- 3.- $\{1\} \subsetneq \{1, 4\} \subsetneq [6]$ y $\{4\} \subsetneq \{1, 4\} \subsetneq [6]$
- 4.- $\{1\} \subsetneq \{1, 5, 6\} \subsetneq [6]$ y $\{5, 6\} \subsetneq \{1, 5, 6\} \subsetneq [6]$
- 5.- $\{2\} \subsetneq \{2, 3\} \subsetneq [6]$ y $\{3\} \subsetneq \{2, 3\} \subsetneq [6]$
- 6.- $\{2\} \subsetneq \{2, 4\} \subsetneq [6]$ y $\{4\} \subsetneq \{2, 4\} \subsetneq [6]$
- 7.- $\{2\} \subsetneq \{2, 5, 6\} \subsetneq [6]$ y $\{5, 6\} \subsetneq \{2, 5, 6\} \subsetneq [6]$
- 8.- $\{3\} \subsetneq \{3, 4, 5, 6\} \subsetneq [6]$
- 9.- $\{4\} \subsetneq \{3, 4, 5, 6\} \subsetneq [6]$
- 10.- $\{5, 6\} \subsetneq \{3, 4, 5, 6\} \subsetneq [6]$

Resultando en $\mathbb{R}^6 / \langle (1, \dots, 1) \rangle$:

$$\begin{aligned} \text{Trop}(\ker(A)) = \mathcal{B}^*(A) = & (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_2) \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_3) \cup \\ & (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_4) \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (e_5 + e_6)) \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_2 + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_3) \cup \\ & (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_2 + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_4) \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_2 + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (e_5 + e_6)) \cup \\ & (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (e_3 + e_4 + e_5 + e_6) + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (e_4 + e_5 + e_6)) \cup \\ & (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (e_3 + e_4 + e_5 + e_6) + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (e_3 + e_5 + e_6)) \cup \\ & (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (e_3 + e_4 + e_5 + e_6) + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (e_5 + e_6)). \end{aligned}$$

Notar que en la enumeración de las clases de peso pusimos juntas a aquellas que tienen una frontera en común, con lo que se pueden expresar como un sólo cono. Por ejemplo, del caso 1.- resultan los conos

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (e_1 + e_2) + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_1) \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (e_1 + e_2) + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_2) = \\ = (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_2). \end{aligned}$$

Comentario 2.4.6. En [R] podemos encontrar la implementación de un algoritmo en C++ que calcula la tropicalización de espacios lineales en forma eficiente. La implementación, llamada TropLi, es también una herramienta para calcular vértices del polígono de Newton de \mathcal{A} -discriminantes, que estudiaremos con más precisión en el capítulo 6.

El abanico secundario y su relación con las curvas tropicales

3.1. Introducción

Para comenzar, recordaremos ciertas definiciones y relaciones entre el gráfico de una curva tropical $\mathcal{T}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ y una subdivisión regular dual (en el espacio dual $(\mathbb{R}^2)^* \simeq \mathbb{R}^2$) del *Polígono de Newton* de F , donde $F = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$, $\text{trop}(F) = f$ y todos los coeficientes de F son no nulos.

Para profundizar sobre este tema, se puede consultar en [GKZ, Capítulo 7] o [M].

Definición 3.1.1. Un *polígono entero marcado* Δ es un polígono convexo en \mathbb{R}^d , con vértices en \mathbb{Z}^d , junto con un subconjunto \mathcal{A} de los puntos de $\Delta \cap \mathbb{Z}^d$, que contenga a los vértices de Δ .

Definición 3.1.2. Una *subdivisión marcada* de un polígono Δ es una colección de polítopos marcados $T = \{(Q_1, \mathcal{A}_1), \dots, (Q_k, \mathcal{A}_k)\}$ tales que:

- $\Delta = \cup_{i=1}^k Q_i$
- $Q_i \cap Q_j$ es una cara (posiblemente vacía) tanto de Q_i como de Q_j , para todo i, j .
- $\mathcal{A}_i \subset \Delta \cap \mathbb{Z}^d$ para $i = 1, \dots, k$
- $\mathcal{A}_i \cap (Q_i \cap Q_j) = \mathcal{A}_j \cap (Q_i \cap Q_j)$ para todo i, j

Notar que no se pide que $\cup_{i=1}^k \mathcal{A}_i = \Delta \cap \mathbb{Z}^d$.

Definición 3.1.3. Llamamos el *tipo de una subdivisión marcada* a la subdivisión, o sea la colección de los Q_i sin las marcas de los \mathcal{A}_i .

Ejemplo 3.1.4. La Figura 3.1 muestra un ejemplo de una subdivisión marcada y su tipo. El subconjunto de puntos marcados en cada Q

están dibujados en negro. Los puntos de $\Delta \cap \mathbb{Z}^2$ que no están marcados, están dibujados en blanco. Usaremos esta convención a lo largo de todo el texto.

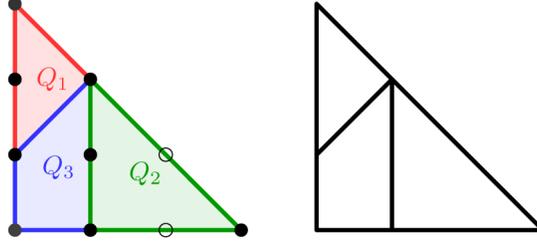


FIGURA 3.1. Una subdivisión marcada y su tipo.

Observación 3.1.5. Dado $F = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$, sean $f = \text{trop}(F)$, $c_{\alpha} = \text{val}(a_{\alpha})$, y ℓ_{α} la forma lineal $c_{\alpha} + \langle w, \alpha \rangle$. Recordemos que $w \in \mathcal{T}(f)$ sii $f(w) = \overline{\text{trop}(F)}(w) = \min\{\ell_{\alpha}(w)\}$ se alcanza al menos dos veces. Esto quiere decir que existen dos exponentes $\alpha \neq \beta$ tales que $\ell_{\alpha}(w) = \ell_{\beta}(w) \leq \ell_{\gamma}(w)$ para todo $\gamma \in \mathcal{A}$. Podemos ver estas desigualdades de la siguiente manera: fijemos $w \in \mathbb{R}^d$, y definamos la forma lineal ϕ con coeficientes en \mathbb{R} como $\phi(*) := \langle *, w \rangle + a$. Nos queda que $w \in \mathcal{T}(f)$ y $a = f(w)$ sii existen dos exponentes $\alpha \neq \beta$ con $\phi(-\alpha) = c_{\alpha}$, $\phi(-\beta) = c_{\beta}$ y $\phi(-\gamma) \leq c_{\gamma} \forall \gamma \in \mathcal{A}$. Más aún, como $\ell_{\alpha}(w) = \ell_{\beta}(w)$, tenemos que $\langle \alpha - \beta, w \rangle = c_{\beta} - c_{\alpha}$, o sea w pertenece a un hiperplano perpendicular a $\alpha - \beta$. Observemos que los coeficientes de los monomios de grado uno de la forma lineal ϕ dan un punto en este hiperplano, con lo cual dicho hiperplano queda completamente determinado.

Notemos que si tenemos una forma lineal ϕ con $c_{\gamma} < \phi(-\gamma)$ para algún $\gamma \in \mathcal{A}$, esta forma lineal no nos aportará información sobre $\mathcal{T}(f)$.

Esto nos lleva a considerar la proyección de la cápsula convexa inferior de $\{(-\alpha, c_{\alpha}) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ sobre \mathbb{R}^d . Esta proyección nos produce una subdivisión de Δ , el polígono de Newton asociado a f . Las subdivisiones obtenidas de esta manera las denominaremos *subdivisiones regulares o coherentes*. En estas subdivisiones estarán marcados los puntos $\alpha \in \mathcal{A}$ sii $(-\alpha, c_{\alpha})$ aparece en la cápsula convexa inferior de $\{(-\alpha, a_{\alpha}) : \alpha \in \mathcal{A}\}$

Ejemplo 3.1.6. Si consideramos el polinomio $F(x, y) = 1 + x + t^2x^2 + (-t^2 + t^3)x^3 + 2y - xy + ty^2 + (3+t)xy^2 + t^2xy^2 + 3t^2y^3 \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, y la valuación del Ejemplo 1.4.5, la subdivisión regular inducida es la de la Figura 3.1.

También podemos dibujar la curva tropical $\mathcal{T}(\text{trop}(F)) = \mathcal{T}(I)$, donde $I = \langle F \rangle$, (ver Figura 3.2). Las formas lineales que interpolan los puntos $(-\alpha, c_\alpha)$ son: $\phi_1 = x - y - 1$ en Q_1 , $\phi_2 = -2x - 2$ en Q_2 y $\phi_3 = 0$ en Q_3 . Con esto, los vértices de la curva tropical resultan: $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (-2, 0)$ y $v_3 = (0, 0)$.

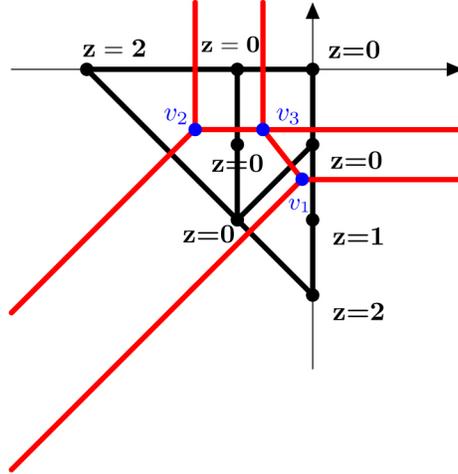


FIGURA 3.2. Gráfico de la curva tropical definida por el polinomio del Ejemplo 3.1.6.

Con todo esto, las subdivisiones regulares de Δ son duales a las curvas tropicales en el siguiente sentido: cada celda de dimensión s de la proyección de la cápsula convexa inferior de $\{(-\alpha, a_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ sobre \mathbb{R}^d , es dual a una celda de $\mathcal{T}(f)$ de dimensión $d - s$. Y ambas celdas resultan ortogonales.

En particular, para curvas planas, tenemos que cada polígono marcado de una subdivisión regular de Δ es dual a un vértice de $\mathcal{T}(f)$, y dicho vértice tiene por coordenada i -ésima al coeficiente de x_i de la forma lineal que cumple $\phi(-\alpha) = c_\alpha$ para todo punto marcado α de dicho polígono y $\phi(-\beta) < c_\beta$ para cualquier otro punto β de la subdivisión. Cada lado e de un polígono de la subdivisión es dual a un eje E de

$\mathcal{T}(f)$. Más aún, el eje E es ortogonal a su lado dual e . Por último, el eje E no es acotado sii su eje dual e está en la frontera del polígono de Newton Δ . Llamaremos *peso del eje E* a la longitud entera de su lado dual e , o sea $|e \cap \mathbb{Z}^2| - 1$. Observemos que a e lo podemos representar como un vector $\overline{\alpha\beta} = \beta - \alpha = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Con esto, el peso de E es igual al $mcd(a : b)$.

Esta dualidad implica que, teniendo una curva tropical dada, podemos deducir el tipo de la subdivisión marcada que la genera, pero no saber qué vértices estarán marcados y cuáles no. Para poder deducir esto, es indispensable contar con los coeficientes del polinomio en cuestión.

Para profundizar sobre estos temas, se puede consultar [Mi], en particular la proposición 3.11.

Definición 3.1.7. Llamemos $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ al conjunto de vectores indexados por los puntos en \mathcal{A} . Como vimos antes, un punto $u \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ induce una subdivisión regular de Δ . Decimos que dos puntos u y v en $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ son equivalentes sii inducen la misma subdivisión regular marcada de Δ . Esto define una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$, y sus clases de equivalencia resultan los interiores relativos de conos convexos. La colección de dichos conos es el *abanico secundario de Δ* .

Notemos que u y $u + \lambda(1, \dots, 1)$ están siempre relacionados, con lo que $\langle(1, \dots, 1)\rangle$ siempre está incluido en el espacio de linealidad del abanico secundario. Con esto podemos trabajar módulo este vector, y considerar en $\mathbb{R}^{s-1} = \mathbb{R}^{\mathcal{A}} / \mathbb{R} \cdot (1, \dots, 1)$ el abanico resultante, donde $|\mathcal{A}| = s$. Más aún, si consideramos a \mathbb{R}^s como un espacio que parametrice a las curvas tropicales con soporte \mathcal{A} , tenemos que si a un punto a le sumamos un múltiplo de $(1, \dots, 1)$, la curva tropical que define este nuevo punto es la misma que la definida por a , con lo que resulta natural cocientar a \mathbb{R}^s por $\mathbb{R} \cdot (1, \dots, 1)$. Por abuso de notación, llamaremos también *abanico secundario* al abanico obtenido en \mathbb{R}^{s-1} al cocientar en el abanico secundario por $\mathbb{R} \cdot (1, \dots, 1)$.

3.2. Dimensión de los conos del abanico secundario

Desde esta sección, y por el resto del capítulo, nos concentraremos en estudiar curvas tropicales planas, es decir analizaremos las variedades tropicales $\mathcal{T}(f)$ con $f \in \mathbb{T}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]$.

Sean $T = \{(Q_l, \mathcal{A}_l) : 1 \leq l \leq k\}$ una subdivisión marcada de Δ , y

$$\mathbb{L} := \{(\lambda_{ij}) \in \mathbb{R}^A : \sum_{ij} \lambda_{ij}(i, j) = 0, \sum_{ij} \lambda_{ij} = 0\}$$

el espacio de relaciones afines entre los puntos enteros de Δ .

Y, dado $1 \leq l \leq k$, sea $\mathbb{L}_{\mathcal{A}_l} := \{(\lambda_{ij}) \in \mathbb{L} : \lambda_{ij} = 0 \forall (i, j) \notin \mathcal{A}_l\}$ el espacio de relaciones afines entre los elementos de \mathcal{A}_l . Sea $\mathbb{L}_T = \sum_l \mathbb{L}_{\mathcal{A}_l}$.

Lema 3.2.1. *La codimensión del cono en el abanico secundario correspondiente a la subdivisión marcada T es $\dim(\mathbb{L}_T)$. En particular, un cono en el abanico secundario correspondiente a una subdivisión marcada tiene dimensión máxima sii la subdivisión marcada es una triangulación. O sea, cada polígono Q_i es un triángulo, y cada uno de estos triángulos los únicos puntos marcados son los vértices.*

Para una demostración de este lema, se puede ver [GKZ, Corolario 2.7].

Ejemplo 3.2.1. Siguiendo con el ejemplo de la subdivisión de la Figura 3.1, el espacio \mathbb{L} viene dado por el núcleo de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene por base a $\{(1, -1, -1, 1, 0, 0, 0, 0), (2, -1, -2, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, -2, 0, 0, 1, 0, 0), (2, 0, -3, 0, 0, 0, 1, 0), (2, -3, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\}$

Tenemos que $\mathbb{L}_{\mathcal{A}_1}$ es el subespacio generado por estos vectores, con primera, segunda, cuarta y octava coordenadas nulas. Con esto nos queda $\mathbb{L}_{\mathcal{A}_1} = \langle (0, 0, 1, 0, 0, -2, 1, 0) \rangle$.

En $\mathbb{L}_{\mathcal{A}_2}$ la primera, tercera, sexta y séptima coordenadas deben ser cero, quedando $\mathbb{L}_{\mathcal{A}_2} = \langle (0, -1, 0, 2, 1, 0, 0, 0) \rangle$.

Por último, $\mathbb{L}_{\mathcal{A}_3} = \langle (1, -1, -1, 1, 0, 0, 0, 0), (2, -1, -2, 0, 1, 0, 0, 0) \rangle$ pues debe tener un cero en las últimas tres coordenadas.

Con esto $\mathbb{L}_T = \mathbb{L}_{\mathcal{A}_1} + \mathbb{L}_{\mathcal{A}_2} + \mathbb{L}_{\mathcal{A}_3}$ resulta de dimensión 4, con lo que la codimensión del cono en el abanico secundario correspondiente a la subdivisión T de la Figura 3.1 resulta ser 4 por el Lema 3.2.1.

Observación 3.2.2. Un cono en el abanico secundario es de codimensión uno si exactamente uno de los \mathcal{A}_i de la subdivisión marcada contiene exactamente un circuito, o si varios de los \mathcal{A}_i contienen un único circuito \mathcal{C}_i , dichos circuitos resultan iguales y este (único) circuito está incluido en un lado común a esos \mathcal{A}_i . En este caso, un circuito es un conjunto de puntos enteros que es afinmente dependiente, y tal que extrayendo un punto cualquiera queda un conjunto afinmente independiente. La Figura 3.3 muestra todos los tipos de circuitos que pueden aparecer en una configuración de puntos en el plano, junto a algunas subdivisiones marcadas de codimensión uno.

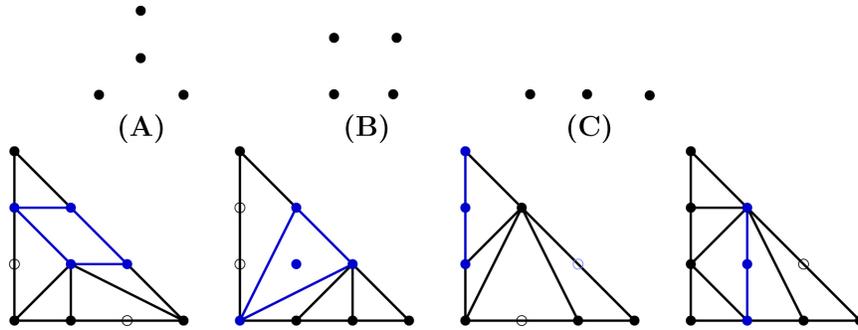


FIGURA 3.3. Circuitos planares y subdivisiones de codimensión uno.

3.3. Dimensión de los tipos de curvas tropicales

Dada una curva tropical C , hemos visto que es dual a un tipo $\alpha = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ de una subdivisión marcada. También llamaremos a α el *tipo de la curva tropical* C .

Podemos parametrizar a todas las curvas tropicales del mismo tipo, con un poliedro no acotado en \mathbb{R}^{2+b} , donde b es el número de ejes acotados de C . Esto es así pues podemos mover la curva en el plano, y cambiar la longitud de los lados acotados, sin cambiar el tipo de la curva. Sin embargo, las longitudes de los lados acotados no pueden ser cambiadas independientemente si la curva tropical tiene género $g \geq 1$.

Seamos más explícitos en este razonamiento. Supongamos que conocemos un vértice de una curva tropical C . Como conocemos al tipo de esta curva, también conocemos las direcciones de los ejes que salen de ese vértice. Con estas direcciones, podemos conocer todos los vértices adyacentes al conocido (si los hubiere) dando sólo una de sus coordenadas. Por ejemplo, la primera coordenada si el eje es horizontal, o la segunda en cualquier otro caso. Por eso necesitamos $2 + b$ coordenadas: 2 para fijar un vértice cualquiera, y b para definir los b vértices restantes. Ahora bien, si la curva tiene género $g \geq 1$, resultará que la curva tropical tiene polígonos cerrados, con lo que necesitaremos $2g$ (no necesariamente independientes) ecuaciones en \mathbb{R}^{2+b} para que cierre cada polígono. Esto se debe a que en un polígono cerrado, si consideramos los lados como vectores orientados todos en el mismo sentido, la suma de los lados da el vector nulo como resultado. O sea, tenemos que la suma de la primer coordenada de los vértices de cada polígono es igual a cero, y lo mismo para la segunda coordenada.

Definimos como *dimensión del tipo α* , y notamos $\dim(\alpha)$, a la dimensión del poliedro parametrizante de todas las curvas de tipo α .

Para el siguiente lema, recordemos que consideramos al abanico secundario de Δ como un abanico en $\mathbb{R}^A/\mathbb{R} \cdot (1, \dots, 1)$.

Lema 3.3.1. *Dada una subdivisión marcada $T = \{Q_i, \mathcal{A}_i\}$ de Δ de tipo α , tenemos que*

$$\dim(\alpha) \leq \dim(C_T)$$

donde C_T es el cono del abanico secundario al que pertenece T .

La igualdad se alcanza sí y sólo si en T todos los puntos del reticulado \mathbb{Z}^2 de Δ están marcados.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\bar{u} \in C_T$ un punto con representante $u \in \mathbb{R}^A$. A este punto le asociamos el polinomio tropical $p = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} u_\alpha \odot w^\alpha$, y con esto le asignamos una curva tropical de tipo α . Como observamos antes, si fijamos uno de los polígonos en T y el vértice correspondiente a este polígono, dando, convenientemente, una de las dos coordenadas de los otros b vértices, obtenemos una función

$$\Phi_T : C_T \rightarrow \mathbb{R}^{2+b}$$

que va de C_T al espacio que parametriza las curvas de tipo α .

Observemos que si (x, y) es un vértice de T asociado a una celda \mathcal{A}_S , donde $(i, j), (k, l)$ y (m, n) son vértices de \mathcal{A}_S , tenemos que (x, y) cumple con la ecuación

$$\begin{pmatrix} k-i & l-j \\ m-i & l-j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{ij} - u_{kl} \\ u_{ij} - u_{mn} \end{pmatrix}$$

Como $\dim(\mathcal{A}_S) = 2$, los tres vértices son afinmente independientes. Con esto, la ecuación matricial tiene solución única, y el vértice (x, y) resulta una combinación lineal única de los coeficientes u_{ij}, u_{kl} y u_{mn} . O sea, Φ_T es una transformación lineal del cono C_T en el espacio parametrizante dentro de \mathbb{R}^{2+b} . Y, por lo tanto, vale la desigualdad $\dim(\alpha) \leq \dim(C_T)$.

Sea ahora S una subdivisión con todos los puntos marcados, y veamos que Φ_S resulta un isomorfismo. Con esto se ve la igualdad buscada.

Cada curva tropical de tipo α viene de un punto u (o sea, es la curva tropical asociada al polinomio $p = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} u_\alpha \odot w^\alpha$). Este punto u está en un cono del abanico secundario, correspondiente a una subdivisión marcada de tipo α . Asumamos que hay un punto del reticulado que no está marcado en esta subdivisión. Entonces podemos “bajar” este punto hasta que toque la cápsula convexa inferior de $\{(-\alpha, u_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ sin que se modifique la curva tropical asociada a u . Con esto, toda curva en el espacio de parametrización de las curvas de tipo α viene de alguna subdivisión de tipo α , con todos sus puntos marcados. Esto muestra que Φ_S es sobreyectiva.

Recordemos que todos los puntos del reticulado \mathbb{Z}^2 en la subdivisión S están marcados. Veamos ahora que Φ_S resulta inyectiva. Para esto veamos que la curva tropical dada por $p = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} u_\alpha \odot w^\alpha$ define unívocamente a la clase \bar{u} de u en C_S . Sea v otro vector tal que $p = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} v_\alpha \odot w^\alpha$ define la misma curva tropical que u . Como definen la misma curva, los tipos de las divisiones coherentes que definen son trivialmente los mismos. Y como estamos considerando las subdivisiones con todos los puntos marcados, dichas subdivisiones resultan las mismas. Además, los vértices de las curvas tropicales resultan duales a los mismos polígonos (con todos sus puntos marcados) de la subdivisión S . Con esto, dado un

vértice (x, y) de la curva tropical, cumple que:

$$\begin{pmatrix} k-i & l-j \\ m-i & l-j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{ij} - u_{kl} \\ u_{ij} - u_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{ij} - v_{kl} \\ v_{ij} - v_{mn} \end{pmatrix}$$

para todos los vértices (i, j) , (k, l) y (m, n) en la celda dual correspondiente en S .

Con la última igualdad vemos que los tres coeficientes de u y v correspondientes a los tres vértices en consideración de dicha celda deben diferir en una misma constante $k = u_{kl} - v_{kl} = u_{ij} - v_{ij} = u_{mn} - v_{mn}$.

Pero si miramos otro punto cualquiera marcado en la celda dual al vértice (x, y) en la curva tropical, tenemos que los respectivos coeficientes en u y v deben diferir en la misma constante, pues cumplen las mismas ecuaciones.

Con este mismo análisis, llegamos a que todos coeficientes correspondientes a los puntos marcados en una celda (fija) de dimensión 2 en S , difieren en una constante. Ahora bien, dos celdas de dimensión 2 en S con una arista en común diferirán en la misma constante (la diferencia en los coeficientes correspondientes a dos puntos cualesquiera de la arista en común). Y con esto, las diferencias en todas las celdas resulta la misma, pues S es conexo. O sea, resulta $u = v + k \cdot (1, \dots, 1)$, con lo que $\bar{u} = \bar{v}$ en C_S , que es lo que queríamos ver. \square

Tropicalización de la familia de curvas planas con una singularidad en un punto fijo

4.1. Introducción

En este capítulo vamos a desarrollar las herramientas necesarias para caracterizar la tropicalización de la familia de curvas planas con soporte fijo $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ (cuya cápsula convexa es de dimensión dos), y una singularidad en un punto fijo en $(\mathbb{K}^*)^2$. Como vimos en el comienzo del Capítulo 2, la tropicalización de dicha familia se obtiene mediante una traslación de la tropicalización del núcleo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m_1 & m_2 & \dots & m_s \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3 \times s}.$$

En este capítulo atacaremos a este problema considerando el Teorema 2.4.1 y su corolario. Para esto tendremos que poder calcular las *banderas de flats* de M_B , donde B es un Gale dual de la matriz A .

Dada la matriz A , construiremos un Gale dual B de ella de la siguiente manera:

Observación 4.1.1. Usaremos (t, x, y) para las coordenadas canónicas de \mathbb{R}^3 . Elijamos tres puntos en \mathcal{A} que sean afínmente independientes (que puede hacerse pues la cápsula convexa de \mathcal{A} es de dimensión dos). Al levantar estos puntos al plano $t = 1$ también resultan afínmente independientes, pues la proyección en el plano $t = 0$ de una recta en el plano $t = 1$ es otra recta. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que esos tres puntos son m_1, m_2 y m_3 . Podemos realizar el proceso de triangulación de Gauss-Jordan con respecto a estas columnas, y obtenemos una matriz \tilde{A} con mismo Gale dual (sobre \mathbb{Q}) que A . La forma de esta nueva matriz es

$$\tilde{A} = \left(Id_{3 \times 3} \mid A_1 \right) \in \mathbb{Q}^{3 \times s}.$$

Como lo que efectuamos fue una transformación afín sobre las columnas de A , que yacen en el plano $t = 1$, tenemos que las columnas de \tilde{A} ahora yacen en el plano $t + x + y = 1$, ya que las tres primeras columnas son los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Con esta matriz \tilde{A} es fácil obtener un Gale dual B (sobre \mathbb{Q}) de A , quedando:

$$B = \begin{pmatrix} & -A_1 \\ Id_{(s-3) \times (s-3)} \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{s \times (s-3)}$$

donde $|\mathcal{A}| = s$.

Observemos que, por construcción, las primeras tres coordenadas de la i -ésima columna de B son las opuestas de los puntos transformados \tilde{m}_{i+3} .

Comentario 4.1.2. En un tal Gale dual, queremos encontrar banderas de flats maximales, o sea banderas de $s-3$ subespacios $V_i \subset \mathbb{R}^{s-3}$:

$$\{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_{s-3} = \mathbb{R}^{s-3}$$

donde cada V_i está generado por el conjunto de filas $\{b_j : j \in F_i\}$. En particular, $F_{s-3} = \{1, \dots, s\}$.

Definimos $F'_i := F_i \setminus F_{i-1}$. Con esto, cada F'_i debe de tener al menos un elemento. Como en total tenemos s vectores filas, hay 3 vectores “extras” que pueden a priori pertenecer a cualquiera de los F'_i . En el próximo lema mostramos que, de hecho, no tenemos muchas opciones.

Lema 4.1.1. *Con la notación del Comentario 4.1.2, en cada bandera maximal de flats de un Gale dual B de A , podemos tener sólo dos situaciones:*

- (a) $|F'_i| = 1$ para todo $i = 1, \dots, s-4$ y $|F'_{s-3}| = 4$, ó
- (b) $|F'_{s-3}| = 3$ y existe un $j \in \{1, \dots, s-4\}$ con $|F'_j| = 2$

En el primer caso, si $F'_{s-3} = \{a, b, c, d\}$, cualquier subconjunto propio de los puntos m_a, m_b, m_c y m_d es afínmente independiente (o sea $\{m_a, m_b, m_c, m_d\}$ es un circuito de tipo (A) o (B) como los de la Figura 3.3).

En el segundo caso, si $F'_{s-3} = \{a, b, d\}$, los puntos m_a, m_b y m_d son afínmente dependientes (o sea $\{m_a, m_b, m_d\}$ es un circuito de tipo (C)

como en la Figura 3.3). Más aún, todos los puntos m_r con $r \in F'_l$, $l > j$, están en la misma recta que m_a, m_b y m_d .

DEMOSTRACIÓN. Durante toda la demostración utilizaremos el hecho que la i -ésima fila del Gale dual B de A (con $4 \leq i \leq s$) es $b_i = e_{i-3}$, donde $\{e_1, \dots, e_{s-3}\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^{s-3} .

Para demostrar el teorema, primero probaremos que $|F'_{s-3}|$ no puede ser 2 (resp. 1). Asumamos que así lo es. Vale que $\dim(V_{s-4}) = s - 4$ por la maximalidad de la bandera de flats en consideración. Y $|F_{s-4}| = s - 2$ (resp. $s - 1$), con $V_{s-4} = \langle b_i : i \in F_{s-4} \rangle$. Tenemos dos opciones en este caso:

- (1) $\{b_r : r \in F_{s-4}\}$ puede contener $s - 4$ de los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^{s-3} y dos de los vectores “especiales” b_1, b_2, b_3 , o
- (2) puede contener $s - 5$ (resp. $s - 4$) vectores de la base canónica de \mathbb{R}^{s-3} y todos los vectores “especiales” b_1, b_2 y b_3 .

Veamos el primer caso: en el conjunto $\{b_r : r \in F_{s-4}\}$ sólo nos falta un vector canónico, digamos que es $b_{j+3} = e_j$. Con esto, los dos vectores especiales en este conjunto, digamos b_2 y b_3 , tendrán un cero en su j -ésima coordenada (si no, la dimensión de V_{s-4} sería $s - 3$). Estos dos ceros son la segunda y tercera coordenada del punto \tilde{m}_j (que es el transformado de m_j después de la realizar la construcción de B como en 4.1.1). Con esto resulta $\tilde{m}_j = (a, 0, 0)$, pero como los puntos transformados viven en el plano $t + x + y = 1$, vale que $\tilde{m}_j = (1, 0, 0)$. Así $m_j = m_1$, pues la transformación lineal afín es inyectiva, resultando una contradicción por como armamos la matriz A .

Consideremos ahora el segundo caso: Ahora faltan dos vectores canónicos en el conjunto $\{b_r : r \in F_{s-4}\}$, digamos $b_{j+3} = e_j$ y $b_{k+3} = e_k$ (resp. le falta sólo un vector canónico). Con esto, si miramos la j -ésima y la k -ésima columna de la matriz A_1 , deben de resultar l.d. (respect. el vector cero), pues esas columnas se arman con las j -ésimas y k -ésimas coordenadas de los tres vectores especiales b_1, b_2 y b_3 . Las columnas de A_1 cumplen la ecuación $t + x + y = 1$; luego, si dos son l.d. deben ser las mismas columnas, lo que es una contradicción (resp. el vector cero no cumple la ecuación).

Con esto podemos concluir que para cualquier bandera maximal de flats de B (y también para cualquier Gale dual de A) tenemos que $F'_{s-3} = 3$ ó 4 .

Tomemos, entonces, una bandera de flats maximal cualquiera. Para demostrar las afirmaciones sobre las dependencias afines vamos a utilizar otro Gale dual de A . Para esto, elijamos a y b cualesquiera en F'_{s-3} y un c que no pertenezca a este conjunto, tal que m_a, m_b y m_c resulten afínmente independientes. Usaremos estos puntos como los pivotes de la Observación 4.1.1. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a = 1, b = 2$ y $c = 3$.

Sea d un tercer vértice en F'_{s-3} , y supongamos que m_d es afínmente dependiente con m_1 y m_2 . Como la dependencia afín se conserva al aplicar la transformación de la Observación 4.1.1, $\tilde{m}_1 = (1, 0, 0)$, $\tilde{m}_2 = (0, 1, 0)$ y \tilde{m}_d son afínmente dependientes. Con esto la tercera coordenada de \tilde{m}_d resulta 0. O sea, b_3 tiene un 0 en su $(d-3)$ -ésima coordenada. Queremos probar que no puede haber un cuarto elemento en F'_{s-3} . Para eso veremos que $\{1, \dots, s\} \setminus \{1, 2, d, i\} \subset F_{s-4}$ implica que $i \in F_{s-4}$.

Primero asumamos que $i = 3$. Pero b_3 está en el subespacio generado por $\{b_i = e_{i-3} : 4 \leq i \leq s, i \neq d\}$, pues b_3 tiene un 0 en su $(d-3)$ -ésima coordenada. Con esto, si $\{1, \dots, s\} \setminus \{1, 2, d, 3\} \subset F_{s-4}$ vale que $3 \in F_{s-4}$.

Ahora asumamos que $i \neq 3$, y supongamos que $i \notin F_{s-4}$. Con esto, los $s-4$ vectores $\{b_3, b_4, \dots, b_s\} \setminus \{b_i, b_d\}$ generan el subespacio V_{s-4} de dimensión $s-4$, y los vectores de V_{s-4} tienen su $(d-3)$ -ésima componente igual a 0 ($b_d = e_{d-3}$). Con esto, la $(i-3)$ -ésima coordena de b_3 no puede ser cero también, pues en ese caso también todos los vectores de V_{s-4} tendrían 0 en su $(i-3)$ -ésima coordenada (pues $b_i = e_{i-3}$) y resultaría $\dim(V_{s-4}) \leq s-5$ (pues tenemos que $\dim(\{x_{d-3} = x_{i-3} = 0\}) = s-5$). Pero con todo esto, resulta b_i una combinación lineal de los vectores en el conjunto en consideración, y por lo tanto pertenece a V_{s-4} . Luego $i \in F_{s-4}$, lo que es una contradicción a lo que estábamos suponiendo (que $i \notin F_{s-4}$). En consecuencia, vimos que $\{1, \dots, s\} \setminus \{1, 2, d, i\} \subset F_{s-4}$ implica que $i \in F_{s-4}$. Para resumir, hemos probado que si asumimos que $1, 2$ y $d \in F'_{s-3}$ son afínmente dependientes, luego $F_{s-4} = \{1, \dots, s\} \setminus \{1, 2, d\}$, resultando $|F'_{s-3}| = 3$.

Como consecuencia del párrafo anterior, si $|F'_{s-3}| = 4$ tenemos un conjunto tal que cualquier subconjunto de 3 elementos es afínmente independiente, o sea un circuito de tipo (A) o (B) como en la Figura 3.3. Y esta es la primera afirmación de nuestro lema.

Veamos la segunda afirmación, asumiendo $F'_{s-3} = \{a, b, d\}$. Armemos el Gale dual B de A como en 4.1.1, usando como pivotes m_a, m_b y m_c , donde los tres puntos son afínmente independientes. Además pidamos $c \in F'_k$, con k maximal en el siguiente sentido: si $i \in F'_l$ con $k < l < s$, m_i resulta afínmente dependiente con m_a, m_b . Nuevamente, sin pérdida de generalidad, supondremos $a = 1, b = 2$ y $c = 3$. Con esto, $F_{s-4} = \{3, \dots, s\} \setminus \{d\}$, con $d > 3$. Al igual que antes, b_3 tiene que tener un cero en su $(d-3)$ -ésima coordenada, que corresponde a la tercera coordenada de \tilde{m}_d . O sea, $\tilde{m}_1 = (1, 0, 0), \tilde{m}_2 = (0, 1, 0)$ y \tilde{m}_d son afínmente independientes, por estar alineados en la recta $\lambda(1, -1, 0) + (1, 0, 0)$ pues $\tilde{m}_d = (t, x, 0)$ con $t+x=1$. Como la transformación de 4.1.1 es inversible, y conserva la dependencia afín en ambos sentidos, resultan m_a, m_b y m_d afínmente dependientes.

Por el mismo motivo del párrafo anterior, podemos afirmar que si m_a, m_b y m_i son afínmente dependientes, b_3 tendrá un cero en su i -ésima coordenada. Sea entonces

$$\begin{aligned} \beta &= \{b_i : i \geq 4, m_i \text{ no está en la recta que pasa por } m_1 \text{ y } m_2\} \\ &= \{e_{i-3} : i \geq 4, m_i \text{ es afínmente independiente con } m_1 \text{ y } m_2\}, \end{aligned}$$

luego b_3 resulta una combinación lineal de los elementos de β , y ninguno de los coeficientes en esta combinación lineal es cero. O sea que cualquier subconjunto de $\beta \cup \{b_3\}$ con $|\beta|$ elementos, resulta una base del subespacio generado por los elementos de $\beta \cup \{b_3\}$. Esto nos dice que si un conjunto F_l contiene $|\beta|$ de los elementos de $\beta \cup \{b_3\}$, tiene que contener a todo $\beta \cup \{b_3\}$. Por la maximalidad que cumple el k definido anteriormente, tenemos que $\beta \cup \{b_3\} \subset F_k$, pues si miramos los valores que vamos agregando para formar la bandera, o sea los $i \in F'_l$ con $k < l$, tenemos que m_a, m_b y m_i son afínmente dependientes, con lo que $i \notin \beta$. También por la maximalidad de k , tenemos que V_{k-1} no contiene a dos elementos de $\beta \cup \{b_3\}$, uno de los cuales debe ser b_3 . Esto muestra que $|F'_k| = 2$. Luego, tomando $j = k$, este índice cumple con todo lo enunciado en el punto (b) de la proposición. \square

Comentario 4.1.3. La vuelta del lema anterior también vale, en el siguiente sentido:

1. Dado un circuito $\{m_a, m_b, m_c, m_d\}$ existen banderas de flats que satisfacen $|F'_j| = 1$ para todo $j \neq s - 3$ y $F'_{s-3} = \{a, b, c, d\}$
2. Dado un circuito $\{m_a, m_b, m_d\}$ y cualquier elección de m_c y m_e que no sea colineales con m_a, m_b y m_d , existen banderas de flats que satisfacen $F'_{s-3} = \{a, b, d\}$, $F'_j = \{c, e\}$ y si $i \in F'_l$ con $l > j$ el punto m_i pertenece a la recta que pasa por m_a, m_b y m_d .

Esto se puede ver en forma similar a la demostración del Lema 4.1.1, utilizando un Gale dual apropiado. En el primer caso, se pueden tomar todos los vectores b_i con $i \notin F'_{s-3}$ como vectores canónicos, y por lo tanto podemos armar cualquier bandera de flats con ellos. En el segundo caso, podemos tomar a m_a, m_b y m_c como pivotes, y luego escogemos cualquier bandera de forma tal que c y e aparezcan en último lugar entre todos los i tales que m_i no pertenece a la recta que pasa por m_a, m_b y m_d .

4.2. Consideraciones para la clasificación de las curvas tropicales planas con una singularidad en un punto fijo

Como una consecuencia de la sección anterior, podemos intentar clasificar todos los tipos de curvas tropicales con una singularidad en un punto fijo. Para hacer esto, primero expresemos las afirmaciones sobre las banderas de flats del Lema 4.1.1 en términos de clases de peso y subdivisiones marcadas. Mantendremos la notación del Comentario 4.1.2. Por abuso de notación, al referirnos a la subdivisión regular de Δ nos estaremos refiriendo a la subdivisión inducida en $-\Delta$ según la Observación 3.1.5, y al hablar de un punto m marcado en la subdivisión inducida por u en Δ , nos estaremos refiriendo a si el punto $-m$ está marcado en la subdivisión inducida en $-\Delta$ por u .

La siguiente lista muestra las características que nos interesan de las diferentes clases de peso que obtenemos, y resume lo que podemos decir sobre las subdivisiones marcadas y sus curvas tropicales duales.

- (A) Asumamos que tenemos una bandera con $|F'_{s-3}| = 4$ y que el circuito correspondiente es de tipo (A) o (B) como en la Figura 3.3. A los puntos de dicho circuito le corresponderán los

menores coeficientes, por definición de clase de peso. Con esto, dicho triángulo, o cuadrilátero, será parte de la cápsula convexa inferior, y su proyección será parte de la subdivisión marcada para cualquier u en dicha clase de peso. Además, en el polinomio tropical que tiene a u como coeficientes, los monomios correspondientes a estos cuatro puntos tienen el mismo coeficiente. El vértice dual a esta celda será, entonces, el $(0,0)$.

Por lo tanto, la curva tropical dual tiene al punto $x_0 = (0,0)$ como un vértice de multiplicidad estrictamente mayor que uno (si miramos al triángulo con un punto interior, tiene área más grande que $1/2$), o tiene un vértice del que salen 4 ejes en dicho punto, de ser un cuadrilátero esta cara. (Ver la Figura 4.1).

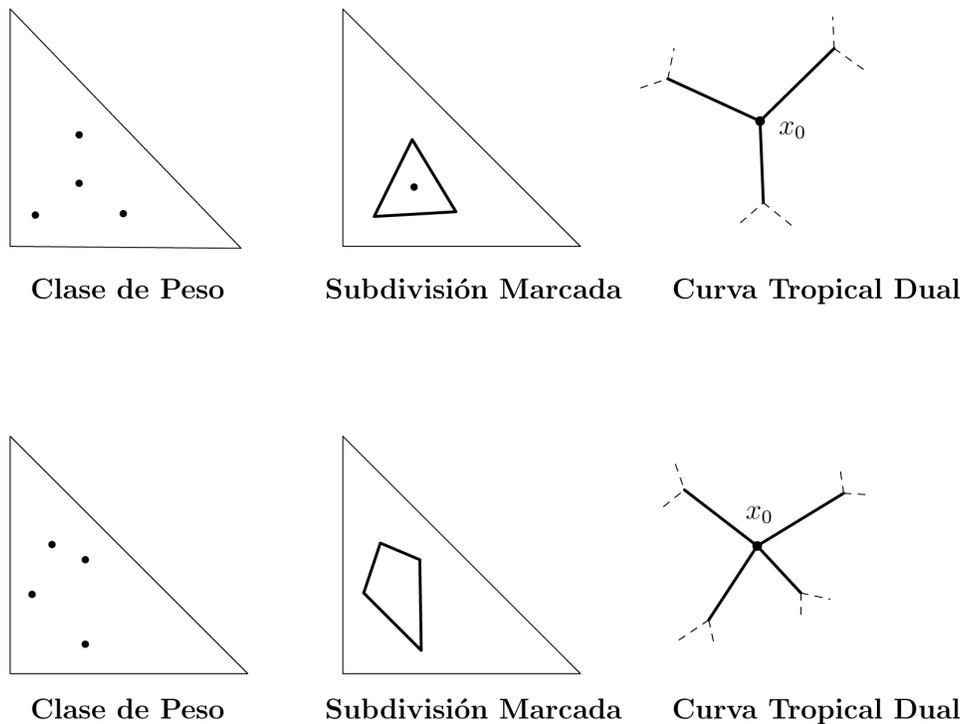
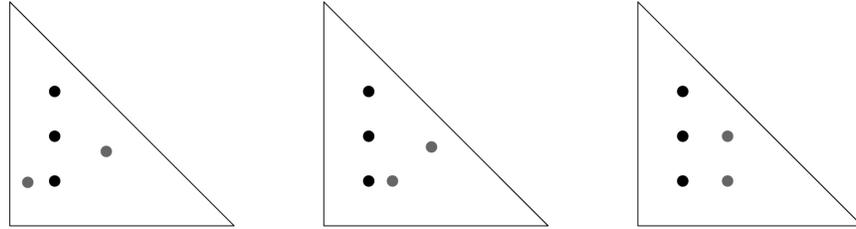


FIGURA 4.1. Clases de Peso de tipo (A) y sus curvas tropicales.

(B) Asumamos que tenemos $F'_{s-3} = \{a, b, d\}$ y $F'_j = \{c, e\}$. Los coeficientes correspondientes a a, b y c son los menores, y los de c y e son los menores del conjunto de puntos que no están alineados con m_a, m_b y m_d . Notemos que pueden haber puntos

en esta recta con coeficientes menores a los de m_c y m_e , pero no a los de m_a, m_b y m_d . En la Figura 4.2 los puntos m_a, m_b y m_d están marcados en negro, mientras que m_c y m_e están marcados en gris.



Diferentes clases de peso de tipo (B)

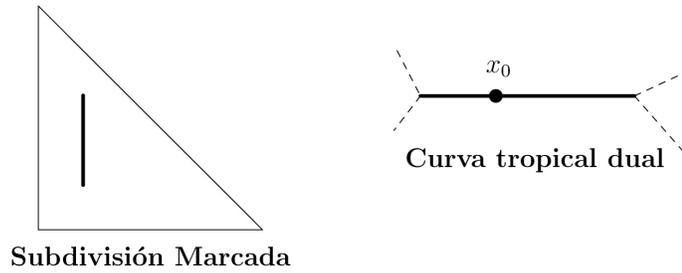


FIGURA 4.2. Clases de Peso de tipo (B) y sus curvas tropicales.

Desafortunadamente, no podemos decir mucho sobre la subdivisión en este caso. Sólo estamos seguros de que el eje formado por m_a, m_b y m_d será parte de la subdivisión. En el gráfico dual, esto significa que veremos un eje con peso al menos 2. Más aún, este eje debe pasar por el punto $x_0 = (0, 0)$. Para ver esto, calculamos los vértices (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la curva tropical, que son vértices del eje perpendicular al lado marcado que contiene a m_a, m_b y m_d . Sean $m_a = (i, j)$ y $m_b = (k, l)$, y (m, n) y (o, p) otros vértices de los polígonos que contienen en común al eje con el circuito en consideración. Por lo tanto, los vértices (x_1, y_1) y (x_2, y_2) cumplen las ecuaciones:

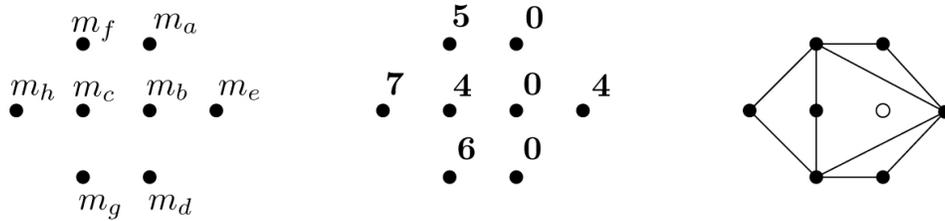
$$\begin{pmatrix} k - i & l - j \\ m - i & n - j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} k-i & l-j \\ o-i & p-j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta > 0$. Con esto, (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen al subespacio ortogonal a la primera fila de ambas matrices, con lo que resultan múltiplos. Tenemos que $\langle (m-i, n-j), (x_1, y_1) \rangle = \alpha > 0$ y $\langle (o-i, p-j), \lambda(x_1, y_1) \rangle = \beta > 0$, con lo que $\lambda < 0$ pues $\langle (o-i, p-j), (x_1, y_1) \rangle < 0$ por estar los puntos (m, n) y (o, p) en distintos lados de la recta de dirección $m_a - m_b = (k-i, l-j)$. Podemos concluir que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) resultan múltiplos con distinto sentido, y consecuentemente el eje que los contiene como vértices pasa por el origen. (Ver Figura 4.2).

Comentario 4.2.1. La razón porque no podemos decir mucho más que lo anterior es que no podemos predecir cómo serán los polígonos adyacentes al lado que pasa por m_a, m_b y m_c en la subdivisión. Es posible que los puntos m_c y m_e no sean puntos marcados en esos polígonos. Aunque tienen el menor valor posible entre los puntos que no están alineados con m_a, m_b y m_c , podría ser que no estén marcados en la subdivisión inducida. Por ejemplo, consideremos la siguiente configuración de puntos, y sea el vector u como el gráfico del medio.



Este vector está en la clase de peso

$$u_a = u_b = u_d < u_c = u_e < u_g < u_f < u_h$$

que viene de la bandera indexada por

$$\{h\} \subsetneq \{h, f\} \subsetneq \{h, f, g\} \subsetneq \{h, f, g, c, e\} \subsetneq \{h, f, g, c, e, a, b, c\}.$$

En el gráfico podemos ver la subdivisión marcada inducida por u . Notar que el punto m_c no es parte de un polígono adyacente al lado formado por m_a, m_b y m_d .

Un punto genérico en una clase de peso satisface sólo las igualdades dadas por su correspondiente bandera de flats, y estrictas desigualdades en los otros casos. Podemos describir los conos de dimensión menor de la variedad tropical $Trop(ker(A))$ transformando algunas de las desigualdades en igualdades. En esta parte, nos restringimos solamente a la clasificación de los conos de dimensión máxima (o sea los correspondientes a banderas de flats maximales).

4.3. $Trop(ker(A))$ y el abanico secundario.

Hemos visto en las secciones anteriores que todas las subdivisiones que obtenemos en nuestra familia de curvas singulares contienen un circuito (ya sea como un polígono Q_i o como la cara de un polígono Q_i). Consecuentemente, la variedad tropical $Trop(ker(A))$ vive dentro del esqueleto de codimensión uno del abanico secundario. Más aún, ninguna clase de peso que corresponde a una bandera de flats del tipo (A) de la Sección 4.2, contiene el espacio de linealidad del abanico secundario. El lema siguiente muestra que de cierta manera es el espacio de linealidad lo que falta para pasar del cono de una clase de peso a un cono de codimensión uno del abanico secundario.

Recordemos que el abanico secundario ya lo consideramos módulo el vector $(1, \dots, 1)$. Pero el abanico secundario aún contiene un *espacio de linealidad* S de dimensión 2, generado el vector v_x (formado por las x -coordenadas de los puntos m_i), y el vector v_y (formado por las y -coordenadas de los puntos m_i). Esto es así pues, mirando las formas lineales de la Observación 3.1.5, si definimos $\tilde{\phi}(x, y) := \phi(x, y) - \lambda x - \mu y$, resulta:

- $\tilde{\phi}(-\alpha) = c_\alpha + \lambda\alpha_x + \mu\alpha_y$,
- $\tilde{\phi}(-\beta) = c_\beta + \lambda\beta_x + \mu\beta_y$ y
- $\tilde{\phi}(-\gamma) \leq c_\gamma + \lambda\gamma_x + \mu\gamma_y$ para todo $\gamma \in \mathcal{A}$

O sea que las subdivisiones coherentes marcadas inducidas por un vector u y $u + \lambda v_x + \mu v_y$ resultan las mismas, con v_x y v_y los vectores generadores del subespacio S descritos en el párrafo anterior.

Notemos que, según la construcción, el espacio lineal $\mathbb{R} \cdot (1, \dots, 1)$ está siempre incluido en los conos asociados las clases de peso de las banderas de flats. Con esto, podemos trabajar módulo este espacio en

todos los conos. Y lo consideraremos de esta manera en el resto de esta sección.

Lema 4.3.1. *Sea Δ un polígono convexo en el reticulado \mathbb{Z}^2 con matriz asociada A y B un Gale dual de A , y sea Z un circuito en Δ de tipo (A) o (B) como en la Figura 3.3, o sea un circuito que consta de 4 elementos, $Z = \{a, b, c, d\}$.*

Con esto, la unión de todas las clases de peso $C_{\mathcal{F}}$ de banderas de flats \mathcal{F} de B que terminan con $F'_{s-3} = \{a, b, c, d\}$ (donde usamos la notación del Comentario 4.1.2) más el espacio de linealidad S del abanico secundario de Δ , es igual a la unión de todos los conos de codimensión uno C_T del abanico secundario de Δ correspondientes a las subdivisiones T que contienen este circuito, es decir:

$$\left(\bigcup_{\mathcal{F}} \overline{C_{\mathcal{F}}} \right) + S = \bigcup_T \overline{C_T},$$

donde la unión en la izquierda recorre todas las banderas de flats \mathcal{F} de B que terminan con $F'_{s-3} = \{a, b, c, d\}$ y la unión de la derecha recorre todas las subdivisiones T que contienen al circuito Z .

DEMOSTRACIÓN. Ya vimos en la clasificación de la sección anterior que la subdivisión marcada de un vector u en cualquier clase de peso correspondiente a tal bandera de flats contiene la circuito Z como un polígono. Con esto, la inclusión \subseteq es clara.

Ahora tomemos cualquier u en C_T . La cara correspondiente al circuito Z está incluida en un plano que interseca a la cápsula inferior considerada en 3.1.5 en esa cara. Podemos “inclinarse” este plano sumando un vector en el espacio de linealidad S , y obtenemos un vector satisfaciendo que las coordenadas de los puntos m_a, m_b, m_c y m_d sean iguales, y las mínimas entre todas. Esto muestra la otra inclusión. \square

Notemos además que el enunciado tiene sentido si pensamos en las dimensiones: el abanico secundario es de dimensión $s - 1$, con lo que el cono C_T de codimensión uno tiene dimensión $s - 2$. Los conos definidos por las clases de peso son de dimensión $s - 4$, pues si bien la bandera tiene longitud $s - 3$ estamos considerándolos módulo $(1, \dots, 1)$, por lo que la dimensión baja en uno. Y el espacio de linealidad S tiene dimensión 2, resultando la igualdad dimensional $(s - 4) + 2 = s - 2$

Observación 4.3.1. En lo que sigue, queremos entender los conos del abanico secundario de Δ que corresponden a banderas de flats (respectivamente clases de peso) del tipo (B) de la clasificación hecha en la Sección 4.2. Asumamos que tenemos una bandera \mathcal{F} de ese tipo, con $F'_{s-3} = \{a, b, d\}$ y $F'_j = \{c, e\}$ como en la demostración del Lema 4.1.1.

El caso donde los puntos m_c y m_e definen una recta paralela la recta que pasa por m_a, m_b y m_d , como en la Figura 4.3, juega un rol especial.

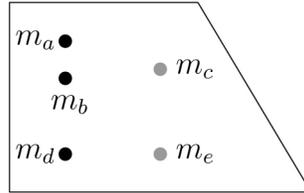


FIGURA 4.3. Una clase de peso de tipo (B) en la frontera de otras.

Sean $\mathcal{F} = \mathcal{F}(u)$, T la subdivisión de Δ tal que $u \in C_T$, y Q el polígono en T que contiene al circuito $Z = \{m_a, m_b, m_d\}$ y está del mismo lado de Z que los puntos m_c y m_e (ver Figura 4.4). Tenemos que distinguir dos subcasos: en el primero, Q contiene un vértice cuya distancia a la recta que pasa por m_a, m_b y m_d es más grande que la distancia de m_c y m_e a dicha recta; y el segundo, donde Q es el polígono generado por los vértices en Z , m_c y m_e . Para convencernos que sólo puede pasar alguna de estas dos situaciones, recordemos que $u_a = u_b = u_d < u_c = u_e < u_i$ para todo m_i vértice que no está sobre la recta generada por Z .

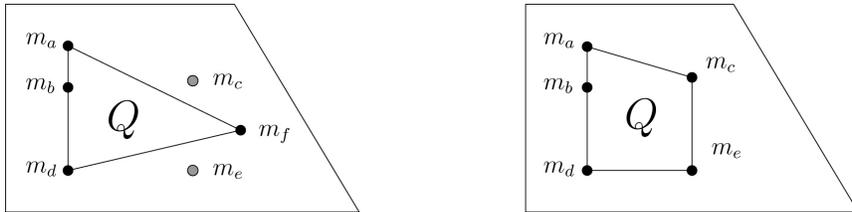


FIGURA 4.4. Dos posibilidades para clases de peso en la frontera.

Notemos que si Q está determinado por m_a, \dots, m_e luego el cono C_T está en la frontera del cono C_S para una subdivisión S como la de

la Figura 4.5, donde cuatro de los cinco puntos del reticulado forman un cuadrángulo. Estos cuadrángulos ya fueron considerados en el Lema 4.3.1, y junto con el cono C_T la clase de peso $C_{\mathcal{F}} \subset C_T$ está contenido en el borde de los conos del abanico secundario que corresponde a clases de peso del tipo (A).

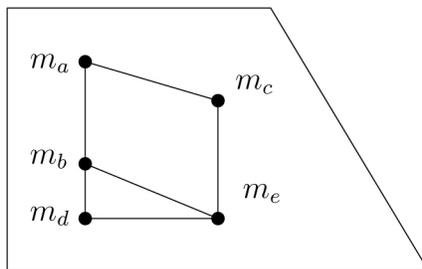


FIGURA 4.5. Una subdivisión tal que C_S contiene a C_T es su frontera.

Si en cambio Q contiene un vértice más alejado que los vértices m_c y m_e de la recta que contiene a Z , tanto el cono C_T con el cono $C_{\mathcal{F}} \subset C_T$ de la clase de peso \mathcal{F} viven en el borde de conos del abanico secundario que corresponden clases de peso de tipo (B), que se consideran en el lema siguiente.

En cualquiera de los dos casos de esta observación, no es necesario considerar estas clases de peso para obtener una descripción completa de los conos de codimensión uno del abanico secundario de Δ fijados por las clases de peso de tipo (A) o (B).

Lema 4.3.2. *Sea Δ un polígono convexo en el reticulado \mathbb{Z}^2 con matriz asociada A y B un Gale dual de A , y sea Z un circuito en Δ de tipo (C) como en la Figura 3.3, o sea un circuito que consta de tres elementos, $Z = \{a, b, d\}$.*

Luego

$$\left(\bigcup_{\mathcal{F}} \overline{C_{\mathcal{F}}} \right) + S = \bigcup_T \overline{C_T},$$

donde:

- S es el espacio de linealidad del abanico secundario de Δ ;
- la unión de la izquierda es la unión de todas las clases de peso $C_{\mathcal{F}}$ de banderas de flats \mathcal{F} de B como las consideradas en (B)

de 4.2, excepto por las consideradas en la Observación 4.3.1; esto es, consideramos sólo las banderas de flats que terminan en $F'_{s-3} = \{a, b, d\}$, tienen $F'_j = \{c, d\}$ con la recta que pasa por m_c y m_d no paralela a la que contiene los puntos m_a, m_b y m_d , mientras que todo punto m_i pertenece a esta última recta para todo $i \in F'_l$ con $l > j$;

- para la unión de la derecha diferenciaremos dos casos:
 - si Z no está contenido en la frontera de Δ , la unión de la derecha es la unión de todos los conos C_T de codimensión uno del abanico secundario de Δ que se corresponden con subdivisiones T que contienen a Z ;
 - si Z está contenido en la frontera de Δ , la unión de la derecha es la unión de todos los conos C_T de codimensión uno del abanico secundario de Δ que se corresponden con subdivisiones T que contienen a Z , excepto por aquellas T para las cuales el triángulo que contiene a Z tiene su tercer vértice en un punto a distancia minimal de Z .

La Figura 4.6 muestra parte de una triangulación correspondiente a uno de los conos de codimensión uno que desechamos en la unión de la derecha, si Z está contenido en la frontera de Δ .

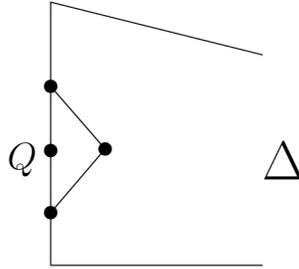


FIGURA 4.6. Triangulaciones que debemos desechar.

DEMOSTRACIÓN. Veamos \subseteq : Sea u en una de las clases de peso que estamos considerando. Con esto, u induce una subdivisión coherente de Δ que contiene a Z . Si Z está en la frontera de Δ , ambos puntos m_c y m_e están del mismo lado de la recta por Z , y sólo uno está a distancia mínima de la misma (pues la recta por m_c y m_e no es paralela a Z).

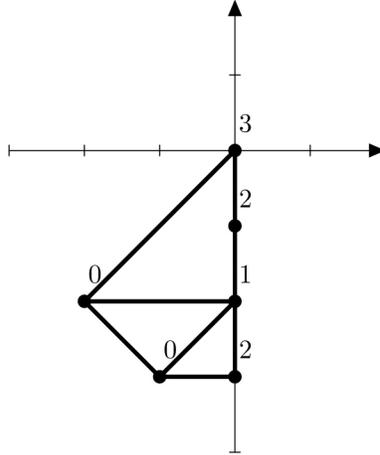
Sea m_c el punto más lejano de la recta por Z . Tenemos que las tres rectas que unen a (m_c, u_c) con (m_a, u_a) , (m_b, u_b) y (m_d, u_d) , están por debajo que cualquier punto (m_i, u_i) tal que m_i no esté en la recta por Z (esto sucede pues, por construcción de u según 4.1.1, $u_i < u_c = u_e$ implica que m_i pertenece a la recta por Z). Con esto, el triángulo en consideración forma parte de la subdivisión inducida en Δ por u , y su vértice no se encuentra a distancia minimal de la recta por Z . Si Z no está en la frontera de Δ , la inclusión es trivial.

Veamos ahora \supseteq : Para esto, podemos asumir sin pérdida de generalidad que Z está incluido en la recta $\{x = 0\}$. Podemos escribir a u como la suma de un múltiplo del vector formada por las y -coordenadas de los puntos m_i mas un vector u' con $u'_a = u'_b = u'_d$. Ahora bien, este valor puede no ser el menor del vector u' , como muestra el Ejemplo 4.3.2.

Para lograr que este valor sea el mínimo de un vector u'' que defina el mismo tipo de curva, y además obtener $u''_a = u''_b = u''_d < u''_c = u''_e < u''_i$ para todo $i \notin \{a, b, c, d, e\}$, miramos la proyección en el plano xz de la cápsula convexa de $\{(m_i, u'_i) : i \in \mathcal{A}\}$, que llamaremos Δ_{xz} . Notemos que el punto $(0, u'_a) = (0, u'_b) = (0, u'_c)$ es un vértice de ella. Esto se debe a que si $(0, j)$ pertenece a la subdivisión marcada de Δ , con u'_i la altura del punto $(0, j)$, $u'_i \geq u'_a$ pues en otro caso alguna de las rectas que une $(0, j, u'_i)$ con el punto más lejano entre (m_a, u'_a) , (m_b, u'_b) y (m_c, u'_c) , estará por debajo de la recta que une estos tres puntos, y por lo tanto Z no estaría marcado en la subdivisión, contradiciendo lo que estamos suponiendo. Si Z no está en el borde de Δ , el punto $(0, u'_a)$ estará por debajo de cualquier recta que pase por dos puntos (k, u'_i) y (l, u'_j) , con $m_i \in \{x = k\}$, $m_j \in \{x = l\}$ y $k < 0 < l$. Esto es así pues de otra manera habría dos puntos en Z , digamos m_a y m_b , que están del mismo lado de la recta que pasa por m_i y m_j , y uno de ellos, digamos m_a , se encuentra a la mayor distancia de esta recta. Como consecuencia, el punto (m_b, u'_b) estará por arriba del triángulo definido por los vértices (m_i, u'_i) , (m_j, u'_j) y (m_a, u'_a) . Como este triángulo, junto con su interior relativo, se encuentra en la cápsula convexa en consideración, el punto (m_b, u'_b) no estaría en la cápsula convexa inferior, y por lo tanto no estaría marcado en la subdivisión regular inducida, contradiciendo nuestra hipótesis.

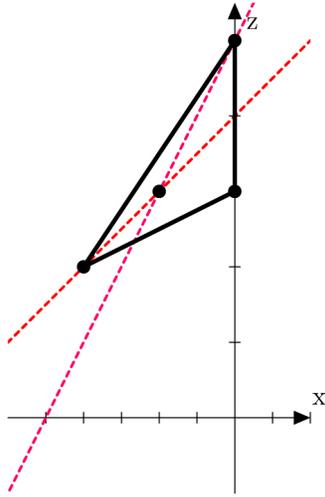
Elijamos una recta por dos puntos (k, u'_i) y (l, u'_j) como antes, pero tal que $(0, u_a)$ sea el único punto a un lado de ella. Tomemos como m_c y m_e los puntos correspondientes a (k, u'_i) y (l, u'_j) en Δ . De esta manera podemos obtener $u'' = u' + \lambda v_x$, con v_x el vector formado por las x -coordenadas de los m_i , resultando $u''_a = u''_b = u''_d < u''_c = u''_e < u''_i$ para todo $i \notin \{a, b, c, d, e\}$. Para que la clase de peso de u'' resulte como las consideradas en (b) de 4.2, sólo nos resta chequear que la recta por m_c y m_e no es paralela a la recta por Z . Esto es verificar que ambos puntos tienen distintas sus primeras coordenadas. Pero si estos puntos tuviesen la misma primera coordenada, Z formaría parte de un triángulo con vértice a distancia minimal de Z , y estos casos los eliminamos. \square

Ejemplo 4.3.2. Para ilustrar el procedimiento descrito en la segunda parte de la demostración anterior, tomemos por ejemplo el polinomio tropical $f = 3 \oplus 2 \odot y \oplus 1 \odot y^2 \oplus 2 \odot y^3 \oplus x \odot y^3 \oplus x^2 \odot y^2$, que define la siguiente subdivisión regular en su polítopo de Newton:



Tenemos que $u = (3, 2, 1, 2, 0, 0)$ y los vectores que define el espacio de linealidad resultan $v_x = (0, 0, 0, 0, 1, 2)$ y $v_y = (0, 1, 2, 3, 3, 2)$. Primero obtenemos $u' = u + v_y = (3, 3, 3, 5, 3, 2)$ y observamos que la mínima coordenada no se alcanza en los puntos correspondientes al circuito Z . La proyección Δ_{xz} nos queda:

En este ejemplo podemos considerar la recta L_1 por los puntos $(-2, 2)$ y $(-1, 3)$, o la recta L_2 por los puntos $(-1, 3)$ y el $(0, 5)$. En



el primer caso, con $\lambda = 1$, nos queda $u'' = u' + v_x = (3, 3, 3, 5, 4, 4)$, y resultan los puntos $m_c = (1, 3)$ y $m_e = (2, 2)$. En el segundo, con $\lambda = 2$, nos queda $u'' = u' + 2v_x = (3, 3, 3, 5, 5, 6)$, y $m_c = (1, 3)$ y $m_e = (0, 5)$. En ambos casos, tanto u como u'' inducen la misma subdivisión en Δ .

Clasificación de curvas tropicales planas de máximo tipo dimensional con una singularidad en un punto fijo

5.1. Introducción

Con lo visto hasta ahora, podemos ser más específicos si nos restringimos a las curvas tropicales con máximo tipo dimensional posible.

Vimos en el Lema 3.3.1 que la dimensión de un cono C_T del abanico secundario es igual a la dimensión de su tipo si la subdivisión marcada T tiene todos los puntos marcados. Con esto, podemos obtener curvas tropicales máximo dimensionales sólo si nos restringimos a las subdivisiones marcadas correspondientes a los conos de codimensión más pequeña posible (es decir, con la menor cantidad posible de circuitos), y con todos los puntos marcados. En el caso de curvas tropicales singulares, deberemos restringirnos a las subdivisiones consideradas en la clasificación 4.2 con todos los puntos de $\Delta \cap \mathbb{Z}^2$ marcados.

En los casos cubiertos en la parte (A) de dicha clasificación, los conos del abanico secundario son de codimensión uno. Pero notemos que en el caso (B), miramos conos que no están en el interior relativo de conos de dimensión máxima de la tropicalización del núcleo de A , sino que viven dentro de conos de codimensión dos del abanico secundario (ver la Observación 4.3.1). Esto es así pues, si los puntos m_c y m_e están del mismo lado que el circuito Z , al estar todos los puntos de $\Delta \cap \mathbb{Z}^2$ marcados en la subdivisión, deben estar en una recta paralela a $Z = \{m_a, m_b, m_c\}$. Esta subdivisión pertenece a un cono del abanico secundario de codimensión dos que yace en la frontera de un cono de codimensión uno estudiado en la parte (A) de la clasificación (ver Figuras 4.4 y 4.5). Estos conos de codimensión dos deben ser estudiados, pues en lo que sigue caracterizamos explícitamente sólo el interior de los conos en consideración.

Podemos relacionar las clases de peso correspondientes a estas subdivisiones en una forma similar a los Lemas 4.3.1 y 4.3.2. En este caso sólo tenemos que agregar una parte del espacio de linealidad del abanico secundario. Tenemos que agregar el espacio generado por el vector de las y -coordenadas de los m_i (si asumimos, sin restricción, que Z está sobre la recta $\{x = 0\}$). Y en la derecha de la igualdad (como en los Lemas 4.3.1 y 4.3.2) tendremos la unión sobre todos los conos C_T de codimensión 2 del abanico secundario, cuyas subdivisiones marcadas inducidas contienen al polígono $\text{conv}\{m_a, m_b, m_c, m_d, m_e\}$ y tiene a todos estos puntos marcados. Esto es así porque para cualquier vector $u \in C_T$, podemos agregar un múltiplo del vector de las y -coordenadas de los m_i para lograr que se satisfaga $u'_a = u'_b = u'_d$ y $u'_c = u'_e$.

Es decir, para estudiar curvas singulares de tipo máximo dimensional, tenemos que estudiar los conos de codimensión uno del abanico secundario según la clasificación de 4.2, y los conos de codimensión 2 que corresponden a una subdivisión marcada que contiene a un polígono $\text{conv}\{m_a, m_b, m_c, m_d, m_e\}$ con todos esos puntos marcados, y tales que m_a, m_b y m_d están sobre la misma recta, mientras que m_c y m_e pertenecen a una recta paralela a la anterior. La subdivisión inducida por u debe tener a todos los puntos m_i marcados.

5.2. Clasificación de las curvas tropicales planas de tipo dimensional máximo con una singularidad en un punto fijo en el toro

Seguiremos la clasificación de la sección 4.2 y veremos qué información sobre la curva dual podemos deducir al asumir que todos los puntos están marcados en la subdivisión.

- (a) Como en la clasificación de 4.2 (A), podemos obtener curvas tropicales con un vértice en el punto $x_0 = (0, 0)$. Este vértice puede ser dual a un triángulo con exactamente un punto interior de $\Delta \cap \mathbb{Z}^2$. En este caso, dicho vértice posee multiplicidad tres ya que cada lado del triángulo tiene longitud entera uno. Esto se debe a que están todos los puntos de $\Delta \cap \mathbb{Z}^2$ marcados en la subdivisión.

Otra opción para el $(0, 0)$ es que de él salgan 4 ramas, cuyo polígono dual es un cuadrángulo que no cubre a ningún otro punto de \mathbb{Z}^2 . En este caso, el vértice tiene multiplicidad cuatro.

- (b.1) Ahora consideremos una bandera de flats como en 4.2 (B). Como queremos que todos los puntos estén marcados, los dos puntos m_c y m_e tienen que estar a distancia minimal del circuito Z (por lo tanto a la misma distancia), y tienen que ser vértices de polígonos de la subdivisión. Como todos los puntos de $\Delta \cap \mathbb{Z}^2$ están marcados, esta distancia minimal es uno. En este caso analizamos cuando ambos puntos se encuentran en lados distintos de Z . Resolvamos las ecuaciones que nos dan los vértices (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , adyacentes al eje que pasa por el $(0, 0)$ de la curva tropical. Estos puntos son duales a dos triángulos con un lado en común, y su tercer vértice a la misma altura. Si asumimos, sin pérdida de generalidad, que el circuito Z se encuentra sobre la recta $\{x = 1\}$ y el vértice del triángulo izquierdo se encuentra en $m_c = (0, 0)$, las ecuaciones a resolver para hallar (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , quedan:

$$\lambda - \mu = x_1 + (m_a)_2 y_1 = x_1 + (m_b)_2 y_1$$

$$\lambda - \mu = -x_2 + ((m_a)_2 - (m_e)_2) y_2 = -x_2 + ((m_b)_2 - (m_e)_2) y_2$$

donde λ es la altura de los dos puntos m_c y m_e , y μ es la altura del circuito Z . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $\mu = 0 < \lambda$, quedando $(x_1, y_1) = (\lambda, 0)$ y $(x_2, y_2) = (-\lambda, 0)$. En particular, la distancia de ambos vértices al punto singular $(0, 0)$ sobre el eje de la curva tropical es la misma.

- (b.2) Sigamos considerando las banderas de flats como en 4.2 (B), pero ahora con los dos puntos m_c y m_e del mismo lado del circuito Z . Nuevamente m_c y m_e tienen que estar a distancia minimal de Z (con lo que se encuentran en una recta paralela a Z), y tienen que estar marcados en la subdivisión. Con esto, vemos un cuadrilátero con dos lados paralelos en la subdivisión. Si Z no está en el borde de Δ , debe haber un triángulo con un vértice a distancia minimal en la subdivisión, del otro lado de Z (ver Figura 5.1). Como antes, resolvemos las ecuaciones para hallar las coordenadas de los vértices correspondientes al triángulo y

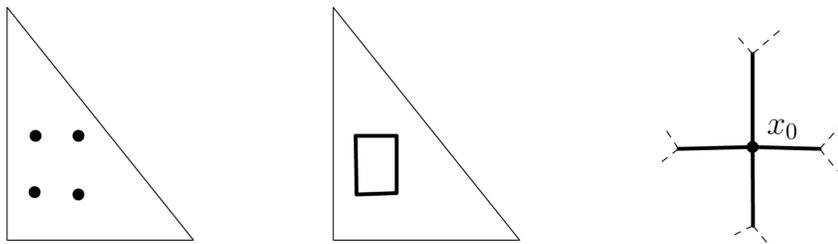
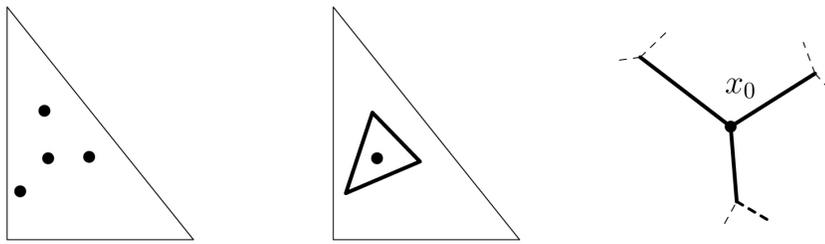
al cuadrilátero. Nuevamente, sin pérdida de generalidad, asumamos que el circuito se encuentra en la recta $\{x = 1\}$, y que el tercer vértice del triángulo se encuentra en $m_c = (0, 0)$. Las ecuaciones quedan, respectivamente:

$$\nu - \mu = x_1 + (m_a)_2 y_1 = x_1 + (m_b)_2 y_1$$

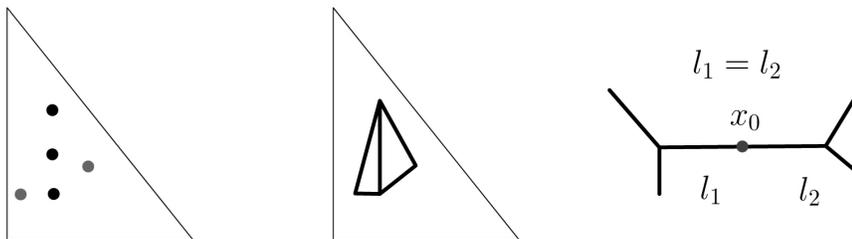
$$\lambda - \mu = -x_2 + ((m_a)_2 - (m_e)_2) y_2 = -x_2 + ((m_b)_2 - (m_e)_2) y_2$$

Si suponemos $\mu = 0 < \lambda < \nu$, nos queda que $(x_1, y_1) = (\nu, 0)$ y $(x_2, y_2) = (-\lambda, 0)$. En particular, la distancia del vértice del que salen cuatro ejes (o sea (x_2, y_2)) se encuentra a una distancia estrictamente menor al punto singular $(0, 0)$ que el vértice del que salen 3 ejes. Si Z está contenido en la frontera de Δ , sólo vemos al vértice del que salen 4 ejes, uno de ellos horizontal y no acotado, que pasa por el punto singular $(0, 0)$.

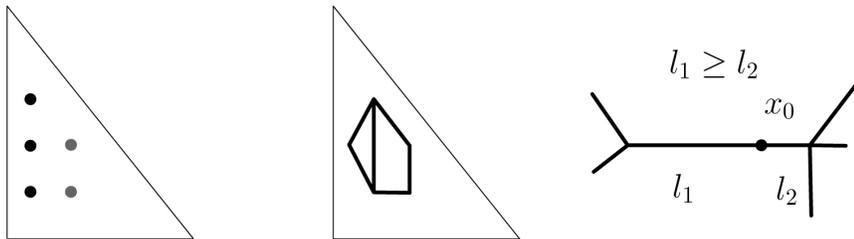
Observación 5.2.1. La variedad tropical $Trop(Ker(A))$ es de dimensión $s - 4$. En lo anterior, describimos (parte de) la variedad como subconjuntos de conos del abanico secundario (que lo estamos considerando en $\mathbb{R}^s/\mathbb{R}(1, \dots, 1)$, o sea es de dimensión $s - 1$). Los subconjuntos son reducidos en el caso (a) por dos condiciones que representa que el vértice 4-valente (resp. el vértice de multiplicidad 3) de la curva tropical tiene que ser el punto $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. En los casos cubiertos en (b.1), pedimos que un eje pase por el $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, y además que las longitudes de los dos semiejes adyacentes al $(0, 0)$ sean iguales. En ambos casos, comenzamos con un cono de codimensión uno del abanico secundario y luego quitamos un conjunto de codimensión dos. En el último caso, (b.2), comenzamos con un cono de codimensión dos del abanico secundario. Pero en este caso solo extraemos un subconjunto de codimensión uno, pues sólo requerimos que un eje pase por el $(0, 0)$. Las longitudes de los semiejes adyacentes al $(0, 0)$ tienen que satisfacer una desigualdad, pero esto no baja la dimensión. De esta manera, también describimos en el último caso curvas tropicales de tipo máximo dimensional.



Circuitos de tipo (a)



Circuitos de tipo (b.1) con m_c y m_e a ambos lados del circuito Z



Circuitos de tipo (b.2) con m_c y m_e del mismo lado del circuito Z .

FIGURA 5.1. Clasificación de las curvas tropicales máximo dimensional con al menos una singularidad en el toro.

Singularidades tropicales y derivadas de Euler

6.1. Introducción

Hasta el capítulo anterior hemos estudiado una familia particular de hipersuperficies tropicales singulares: las curvas planas, dadas por polinomios en dos variables.

A partir de este capítulo estudiaremos las hipersuperficies tropicales singulares dadas por una variedad tropical $\mathcal{T}(f) \subseteq \mathbb{R}^d$, con d cualquier número natural, $f = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i \in \mathbb{R}[w_1, \dots, w_d]$ y $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^d$ un conjunto finito de cardinal n , donde $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^d$. Lo desarrollado en el resto del texto se basa en el trabajo de A. Dickenstein y L. Tabera “Hipersuperficies tropicales singulares” [DT].

Recordemos de la Observación 3.1.5 que cualquier hipersuperficie tropical es un complejo poliedral racional. Dado un $q \in \mathcal{T}(f)$, su celda asociada σ^* es la clausura de todos los puntos $q' \in \mathcal{T}(f)$ para los cuales $f(q) = f(q')$ se alcanza en el mismo subconjunto σ de \mathcal{A} . Cada celda σ^* viene con una marcación, dada por el subconjunto σ . Con esto, una hipersuperficie tropical asociada a un polinomio tropical con un soporte fijo \mathcal{A} será un *complejo poliedral racional marcado*. Esta marcación será transparente en la notación. Consultar el comienzo de la Sección 6.3 para detalles más específicos.

Trabajaremos con polinomios de Laurent F con soporte en $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^d$ y coeficientes en un cuerpo algebraicamente cerrado \mathbb{K} de característica 0, es decir:

$$F(x) = \sum_{i \in \mathcal{A}} a_i x^i \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}].$$

Asumiremos que el cuerpo \mathbb{K} está provisto de una valuación no-archimediada de rango uno, $val : (\mathbb{K})^* \rightarrow \mathbb{R}$, y que el cuerpo residual \mathbf{k} de \mathbb{K} es también de característica cero.

Recordemos que según la Definición 1.5.1, definimos la tropicalización de F como el polinomio tropical

$$f = \text{trop}(F) = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} \text{val}(a_i) \odot w^i.$$

En lo que resta, para diferenciar a los contextos clásicos y tropicales, los elementos de \mathbb{K} , \mathbb{K}^d , y \mathbb{K}^n serán sistemáticamente notados por las letras a, b, c, x, y, z y los elementos de \mathbb{T} , \mathbb{T}^d y \mathbb{T}^n por las letras p, q, w, v, l . Los elementos de $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^d$ serán notados con la letra i .

Por último, notemos que la Definición 1.5.14 de hipersuperficie tropical singular está hecha para polinomios con cualquier cantidad de variables, con lo que seguirá siendo válida por el resto del texto.

6.2. Derivadas de Euler y su tropicalización

Sea L una *función afín entera* en \mathbb{R}^d , es decir

$$L = j_1 w_1 + \dots + j_d w_d + \beta,$$

donde $(j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d$ y $\beta \in \mathbb{Z}$.

Definiremos la derivada de Euler de un polinomio tropical f con soporte en \mathcal{A} con respecto a L como:

Definición 6.2.1. Sea $f = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i$ y $L = j_1 w_1 + \dots + j_d w_d + \beta$ una función afín entera. La *derivada de Euler* de f con respecto a L es el polinomio tropical

$$\frac{\partial f}{\partial L} = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}, L(i) \neq 0} p_i \odot w^i.$$

También tenemos las derivadas de Euler clásicas de un polinomio F con coeficientes en \mathbb{K} .

Definición 6.2.2. Sean $F = \sum_{i \in \mathcal{A}} a_i x^i \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$, y una función entera afín $L = j_1 w_1 + \dots + j_d w_d + \beta$. Asociamos a L el campo vectorial de Euler $L_\Theta = j_1 \Theta_1 + \dots + j_d \Theta_d + \beta$, donde $\Theta_j = x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ para todo $j = 1, \dots, d$. La *derivada de Euler* de F con respecto a L es el polinomio

$$\frac{\partial F}{\partial L} := L_\Theta(F) = j_1 x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + j_d x_d \frac{\partial F}{\partial x_d} + \beta F.$$

Es claro que para cualquier punto singular $b \in (\mathbb{K}^*)^d$ de $V(F)$, vale que $\frac{\partial F}{\partial L}(b) = 0$ para cualquier función afín entera L . Y notemos que si L es la función constante 1, vale que $\frac{\partial F}{\partial L} = F$.

Observación 6.2.3. Vale la igualdad

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \sum_{i \in \mathcal{A}} L(i) a_i x^i,$$

pues si $i = (i_1, \dots, i_d) \in \mathcal{A}$, vale que $j_k x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_{i \in \mathcal{A}} j_k i_k a_i x^i$ para cualquier $1 \leq k \leq d$. Sumando con respecto a k , y cambiando el orden de las sumas, queda el resultado observado.

En el lema que sigue relacionamos la derivada de un polinomio clásico F con respecto a L , con la derivada con respecto a L de su tropicalización, $f = \text{Trop}(F)$.

Lema 6.2.1. *Dado un polinomio tropical f con soporte en \mathcal{A} y una función afín entera L ,*

$$\frac{\partial f}{\partial L} = \text{Trop} \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right)$$

para cualquier polinomio F con soporte en \mathcal{A} tal que $\text{Trop}(F) = f$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos cualquier polinomio de Laurent F con $\text{Trop}(F) = f$. Por la Observación 6.2.3 vale que $\frac{\partial F}{\partial L} = \sum_{i \in \mathcal{A}} L(i) a_i x^i$. Como estamos asumiendo que el cuerpo residual de \mathbb{K} es de característica cero, nos queda que $\text{val}(L(i)) = 0$ siempre que $L(i) \neq 0$ y $\text{val}(L(i)) = \infty$ siempre que $L(i) = 0$. El resultado del lema es una consecuencia directa de la Definición 6.2.1 de la derivada con respecto a L en el contexto tropical. \square

Notemos que como \mathcal{A} es un conjunto finito, el conjunto $\{\frac{\partial f}{\partial L} | L\}$, con L recorriendo todas las posibles funciones lineales afines enteras, es finito para cualquier f con soporte en \mathcal{A} .

Ejemplo 6.2.4. Consideremos la cónica tropical

$$f = 1 \oplus 0 \odot w_1 \oplus 0 \odot w_2 \oplus 0 \odot w_1 \odot w_2 \oplus 1 \odot w_1^2 \oplus 1 \odot w_2^2,$$

y veamos si define una curva singular.

Sea $F = a_{(0,0)} + a_{(1,0)}x + a_{(0,1)}y + a_{(1,1)}xy + a_{(2,0)}x^2 + a_{(0,2)}y^2$ cualquier polinomio con $Trop(F) = f$. Queremos ver si este polinomio clásico puede tener un cero singular. Recordemos que para un polinomio homogéneo $G \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ de grado d vale la fórmula de Euler: $d \cdot G = \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial G}{\partial x_i}$. Con esto, si $b \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ y vale $\frac{\partial G}{\partial x_i}(b) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, vale también que $G(b) = 0$ y b resulta un punto singular de $V(G)$. En nuestro caso, sea F^h el polinomio homogeneizado con respecto a z de F . Luego existe $b \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ con $F_x^h(b) = F_y^h(b) = F_z^h(b) = 0$ sii

$$\det \begin{pmatrix} 2a_{(2,0)} & a_{(1,1)} & a_{(1,0)} \\ a_{(1,1)} & 2a_{(0,2)} & a_{(0,1)} \\ a_{(1,0)} & a_{(0,1)} & 2a_{(0,0)} \end{pmatrix} = 0.$$

En la expansión de este determinante, el único término que aparece con valuación cero es $2a_{(1,0)}a_{(1,1)}a_{(0,1)}$, con lo que nunca podrá anularse. De esto resulta que cualquier polinomio F , con $Trop(F) = f$, nunca tendrá un punto singular, pues si (x_0, y_0) es un cero singular de F , $(x_0, y_0, 1)$ lo será de F^h . Con todo esto podemos concluir que $\mathcal{T}(f)$ no es una hipersuperficie tropical singular.

Comentario 6.2.5. Si tomamos $L_1 = w_1$ y $L_2 = w_2$, podemos verificar directamente que $\frac{\partial F}{\partial L_1} = x \frac{\partial F}{\partial x} = a_{(1,0)}x + a_{(1,1)}xy + 2a_{(2,0)}x^2$ y $\frac{\partial F}{\partial L_2} = y \frac{\partial F}{\partial y} = a_{(0,1)}y + a_{(1,1)}xy + 2a_{(0,2)}y^2$. En el contexto tropical resulta $\frac{\partial f}{\partial L_1} = 0 \odot w_1 \oplus 0 \odot w_1 \odot w_2 \oplus 1 \odot w_1^2$ y $\frac{\partial f}{\partial L_2} = 0 \odot w_2 \oplus 0 \odot w_1 \odot w_2 \oplus 1 \odot w_2^2$.

Notar que $q = (0,0) \in \mathcal{T}(f)$ es no singular, y además q es un cero de $\frac{\partial f}{\partial L_1}$ y de $\frac{\partial f}{\partial L_2}$, es decir $q \in \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L_1}) \cap \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L_2})$. Más aún, si tomamos $L_3 = w_1 + w_2 - 2$, al calcular la derivada tropical de Euler con respecto a L_3 obtenemos $\frac{\partial f}{\partial L_3} = 1 \oplus 0 \odot w_1 \oplus 0 \odot w_2$, y también $(0,0) \in \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L_3})$. Notemos que esta última derivada de Euler es como derivar el polinomio homogeneizado, con respecto a la variable de homogenización (y evaluando ésta en 1). Todo lo expresado nos muestra que para poder detectar los puntos singulares de la hipersuperficie tropical, no basta con mirar los ceros en común del polinomio y las derivadas “respecto de las variables”. En este ejemplo, si consideramos $L_4 = w_1 - 1$ nos queda $\frac{\partial f}{\partial L_4} = 1 \oplus 0 \odot w_2 \oplus 1 \odot w_1^2 \oplus 0 \odot w_2^2$, y resulta $q \notin \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L_4})$, pues el mínimo valor de las formas lineales evaluadas en $(0,0)$ se alcanza sólo en el monomio w_2 . (Ver Figura 6.1).

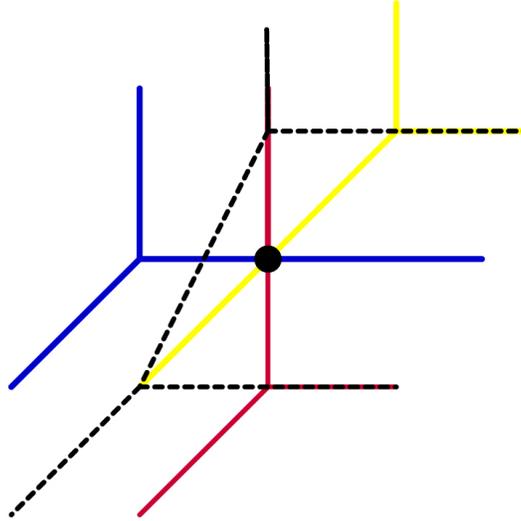


FIGURA 6.1. En amarillo $\mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L_3}\right)$, en azul $\mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L_2}\right)$ y en rojo $\mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)$. Punteado $\mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L_4}\right)$.

Comentario 6.2.6. En el Ejemplo 6.2.4 buscamos una condición para que $V(F)$ tenga un punto singular. Esta condición resultó polinomial en los coeficientes de F . Recordemos que dado un conjunto finito $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^d$, Gel'fand, Kapranov y Zelevinsky [GKZ] definieron y estudiaron las propiedades principales del \mathcal{A} -discriminante $\Delta_{\mathcal{A}}$ asociado a la familia de hipersuperficies con soporte \mathcal{A} . Sea ∇_0 la variedad de polinomios de Laurent F con coeficientes en \mathbb{K} y soporte en \mathcal{A} que definen una hipersuperficie singular en el toro $(\mathbb{K}^*)^d$. Si ∇_0 tiene codimensión uno, existe un único polinomio (salvo signo) $\Delta_{\mathcal{A}} \in \mathbb{Z}[a_i | i \in \mathcal{A}]$ tal que si $F = \sum_{i \in \mathcal{A}} a_i x^i$ tiene un punto singular en $(\mathbb{K}^*)^d$, luego $\Delta_{\mathcal{A}}((a_i)_{i \in \mathcal{A}}) = 0$. Este polinomio se conoce como el \mathcal{A} -discriminante. Si $\text{codim}(\nabla_0) > 1$, se dice que estamos en un caso *defectivo* y se define a $\Delta_{\mathcal{A}}$ como el polinomio constante 1.

Un polinomio tropical $f = \oplus_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i$ con coeficientes en \mathbb{R} define una hipersuperficie tropical singular precisamente cuando su vector de coeficientes p yace en la tropicalización $\mathcal{T}(\nabla_0)$.

El principal teorema de este capítulo es el Teorema 6.2.4, que caracteriza hipersuperficies tropicales singulares (dado un soporte fijo) en términos de las derivadas tropicales de Euler. Como vimos en el

Ejemplo 6.2.4, no es suficiente considerar las derivadas tropicales de Euler con respecto a los d ejes coordenados. No es difícil salvar este problema apelando a la noción de *base tropical* [BJSST], que damos a continuación.

Definición 6.2.7. Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$ un ideal. Recordemos que según la Definición 1.5.9, $\mathcal{T}(I) = \bigcap_{F \in I, F \neq 0} \mathcal{T}(\text{Trop}(F))$ y, según el Teorema 1.5.6, resulta $\mathcal{T}(I) = \overline{\{(val(z_1), \dots, val(z_n)) : z \in V_{\mathbb{K}^*}(I)\}}$.

Una base tropical de I es un conjunto finito de polinomios F_1, \dots, F_r que generan I , y además cumplen que $\mathcal{T}(I) = \bigcap_{i=1}^r \mathcal{T}(\text{Trop}(F_i))$.

Dado un conjunto finito en el reticulado \mathbb{Z}^d con n elementos, identificaremos en lo que sigue el espacio de polinomios con coeficientes en \mathbb{K} y soporte en \mathcal{A} con $(\mathbb{K}^*)^n$, y notaremos por $\bar{1}$ al punto $(1, \dots, 1) \in \mathbb{K}^d$. Ya hemos discutido en la introducción al Capítulo 2 como la subvariedad

$$H_1 = \{F \in (\mathbb{K}^*)^n \mid F \text{ es singular en } \bar{1}\}$$

es un espacio lineal generado por formas lineales homogéneas.

Definición 6.2.8. Notemos con \mathcal{L} al conjunto de todas las funciones lineales afines enteras $L = j_1 w_1 + \dots + j_d w_d + \beta$, tales que $\text{mcd}(j_1, \dots, j_d, \beta) = 1$, y que cumplan $\dim\langle\{L = 0\} \cap \mathcal{A}\rangle = d - 1$.

Proposición 6.2.2. Sean (v_1, \dots, v_n) variables. El conjunto finito de polinomios tropicales lineales

$$P_1 := \left\{ \bigoplus_{i \in \mathcal{A} - \{L=0\}} 0 \odot v_i \mid L \in \mathcal{L} \right\}$$

es una base tropical de $\text{Trop}(H_1)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $F = \sum_{i \in \mathcal{A}} y_i x^i \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}, y_i (i \in \mathcal{A})]$ un polinomio genérico con soporte en \mathcal{A} . Notemos que si L recorre *todas* las funciones lineales afines con coeficientes enteros, las derivadas de Euler $\frac{\partial F}{\partial L}$ son precisamente *todas* las combinaciones lineales enteras de $F, x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, x_d \frac{\partial F}{\partial x_d}$. Por lo visto en 2.1, H_1 es un subespacio lineal de \mathbb{K}^n definido por las las ecuaciones lineales (en las variables (y_1, \dots, y_n))

$F(x = \bar{1}) = 0$, y $x_j \frac{\partial F}{\partial x_j}(x = \bar{1}) = 0$, $1 \leq j \leq d$. Según lo visto en la Proposición 2.3.4, las formas lineales que se anula en H_1 forman una base tropical de H_1 , y es suficiente considerar formas lineales con coeficientes racionales (y a fortiori, enteros). Bajo estas consideraciones, tenemos que $Trop(\frac{\partial F}{\partial L}) = \bigoplus_{i \in \mathcal{A} - \{L=0\}} 0 \odot v_i$ forman una base tropical de $Trop(H_1)$. Por el Teorema 2.3.5, según [S] y [BJSST], podemos considerar sólo las formas lineales con soportes minimales para hallar una base tropical de $Trop(H_1)$. Este conjunto se corresponde con las funciones lineales afines tales que $\{L = 0\} \cap \mathcal{A}$ genera un espacio afín de dimensión máxima $d - 1$. Claramente, imponer la condición $mcd(j_1, \dots, j_d, \beta) = 1$ no restringe las posibles derivadas. \square

Hemos definido un base tropical del conjunto de polinomios con una singularidad en $\bar{1}$. Si tenemos otro punto $b \in (\mathbb{K}^*)^d$, podemos fácilmente dar una base tropical de la variedad H_b de hipersuperficies con un punto singular en b , considerando un cambio diagonal de coordenadas (recordar lo observado en 2.1.1). Esto lo podemos expresar en la siguiente proposición.

Proposición 6.2.3. *Consideremos la variedad de incidencia*

$$H = \{(F, u) \in (\mathbb{K}^*)^n \times (\mathbb{K}^*)^d \mid F \text{ es singular en } u\}.$$

Sea $F = \sum_{i \in \mathcal{A}} a_i x^i$ un polinomio genérico con soporte en \mathcal{A} , donde (x_1, \dots, x_d) y $(a_i)_{i \in \mathcal{A}}$ son variables. Luego el conjunto finito

$$P = \left\{ Trop \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right) \mid L \in \mathcal{L} \right\}$$

es una base tropical de H .

DEMOSTRACIÓN. P es un conjunto finito que define una prevariedad que contiene a $Trop(H)$. Vamos a probar que si (p, q) pertenece a la prevariedad definida por P , pertenece a la variedad de incidencia definida por H .

Sea $(p, q) \in \bigcap_{g \in P} \mathcal{T}(g)$. Luego, para cada función lineal afín $L \in \mathcal{L}$, el mínimo de $\bigoplus_{i \in \mathcal{A} - \{L=0\}} p_i \odot q_1^{i_1} \odot \dots \odot q_d^{i_d}$ se alcanza al menos dos veces. De esto se sigue que $(p_i \odot q_1^{i_1} \odot \dots \odot q_d^{i_d} \mid i \in \mathcal{A})$ es un punto de $\mathcal{T}(\bigoplus_{i \in \mathcal{A} - \{L=0\}} v_i)$ para cualquier $L \in \mathcal{L}$. Por 6.2.2 tenemos que existe un polinomio $F = \sum_{i \in \mathcal{A}} a_i x^i$, singular en $\bar{1}$ y tal que $val(a_i) = p_i + \langle q, i \rangle$.

Con todo esto, el polinomio $F_1 = \sum_{i \in \mathcal{A}} a_i t^{-\langle q, i \rangle} x^i$ tiene una singularidad en $(t^{q_1}, \dots, t^{q_a})$ y $\text{val}(a_i t^{-\langle q, i \rangle}) = p_i$. De esto resulta que el punto (p, q) pertenece a $\text{Trop}(H)$. \square

En este punto del capítulo ya contamos con todas las herramientas para demostrar la caracterización tropical de hipersuperficies tropicales singulares (dado un soporte fijo), que damos a continuación.

Teorema 6.2.4. *Sea $f = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i$ un polinomio tropical con soporte en \mathcal{A} . Sea $q \in \mathcal{T}(f)$ un punto en la hipersuperficie definida por f . Luego, q es un punto singular de $\mathcal{T}(f)$ sii $q \in \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L})$ para todo $L \in \mathcal{L}$.*

Es decir, f define una hipersuperficie tropical singular si y sólo si

$$\bigcap_{L \in \mathcal{L}} \mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right) \neq \emptyset,$$

donde \mathcal{L} es el conjunto de formas lineales afines de la Definición 6.2.8.

DEMOSTRACIÓN. Una implicación es trivial. Si q es un punto singular de $\mathcal{T}(f)$, existe un polinomio $F = \sum_{i \in \mathcal{A}} a_i x^i$ con $\text{val}(a_i) = p_i$, con una singularidad en el punto b , y $\text{val}(b) = q$. Luego, $\frac{\partial F}{\partial L}(b) = 0$ para toda $L \in \mathcal{L}$, y por lo tanto $\text{val}(b) = q \in \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L})$ para toda $L \in \mathcal{L}$.

Para la implicación en el otro sentido, sea q un punto en $\bigcap_{L \in \mathcal{L}} \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L})$. En particular, $q \in \mathcal{T}(f)$. Además, para toda función lineal afín $L \in \mathcal{L}$, el mínimo $\min_{i \in \mathcal{A}, L(i) \neq 0} (p_i + \langle q, i \rangle)$ se alcanza al menos dos veces. Esto ocurre sii para toda $L \in \mathcal{L}$ el punto $(p, q) \in \mathcal{T}(\bigoplus_{i \in \mathcal{A}, L(i) \neq 0} v_i \odot w^i)$. Se sigue de la Proposición 6.2.3 que (p, q) pertenece a la variedad de incidencia $\text{Trop}(H)$. Con esto, por el Teorema de Kapranov (1.5.6) existe un punto $(F, b) \in V(H)$ tal que F es un polinomio algebraico con soporte en \mathcal{A} y una singularidad en b tal que $\text{Trop}(F) = f$ y $\text{Trop}(b) = q$. \square

Como Corolario de este teorema, con el siguiente ejemplo veremos que podemos recuperar la información de la clasificación de las curvas tropicales singulares correspondientes al punto (B.1) de la Sección 5.2 del capítulo anterior.

Ejemplo 6.2.9. Sea $f = a \oplus 0 \odot w_1 \oplus 0 \odot w_1 \odot w_2 \oplus 0 \odot w_1 \odot w_2^2 \oplus b \odot w_1^2 \odot w_2$, que es el caso base de la clasificación (B.1) de la Sección 5.2 del capítulo anterior. Recordemos de la Observación 3.1.5 que podemos realizar el gráfico de la curva tropical $\mathcal{T}(f)$ conociendo la subdivisión coherente marcada en la cápsula convexa de \mathcal{A} (o sea, del polítopo de Newton Δ de \mathcal{A}). Esto se debe a que cada celda de dimensión s de la subdivisión coherente de Δ es dual a una celda de dimensión $s - 1$ de $\mathcal{T}(f)$, y dichas celdas resultan ortogonales. Una subdivisión coherente en Δ proviene de la proyección en \mathbb{R}^d de la cápsula convexa de los puntos del conjunto $\{(-i, p_i) : i \in \mathcal{A}\}$, donde $(p_i)_{i \in \mathcal{A}}$ es el vector de coeficientes de f . Las coeficientes de las formas lineales que definen las caras máximo dimensionales de la cápsula convexa inferior en consideración, nos dan los vértices de $\mathcal{T}(f)$ correspondientes a las celdas máximo dimensionales de la subdivisión coherente marcada en Δ .

En la Figura 6.2 podemos ver las subdivisiones inducidas (y marcadas) tanto de f -a la izquierda- como de $\frac{\partial f}{\partial L_1}$, con $L_1 = w_1 - 1$, -a la derecha-. En la misma figura podemos ver, con líneas punteadas, a los gráficos duales a estas subdivisiones correspondientes a $\mathcal{T}(f)$ y a $\mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)$. Y también incluimos las formas lineales que definen las caras de dimensión máxima de los levantados de los coeficientes i del polinomio tropical, que nos dicen que los vértices del eje horizontal de $\mathcal{T}(f)$ son los puntos $(-b, 0)$ y $(a, 0)$. Al considerar $\mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)$, vemos que $\mathcal{T}(f) \cap \mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right) = \left(\frac{a-b}{2}, 0\right)$. Se puede comprobar que si tomamos cualquier otra derivada tropical $\frac{\partial f}{\partial L}$ como en el Teorema 6.2.4, siempre quedarán dos puntos del circuito $\sigma = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$ en el borde de la cápsula convexa resultante y el eje que los une como parte de la subdivisión inducida, quedando $\left(\frac{a-b}{2}, 0\right) \in \mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)$. Con esto, $\left(\frac{a-b}{2}, 0\right)$ resulta el único punto singular de $\mathcal{T}(f)$.

Observemos que $\left(\frac{a-b}{2}, 0\right)$ es el punto medio del segmento con vértices en $(-b, 0)$ y $(a, 0)$, con lo cual recuperamos la condición métrica del capítulo anterior.

El próximo ejemplo nos muestra que si bien una curva tropical $\mathcal{T}(f)$ puede tener dos puntos singulares distintos, puede no ser posible

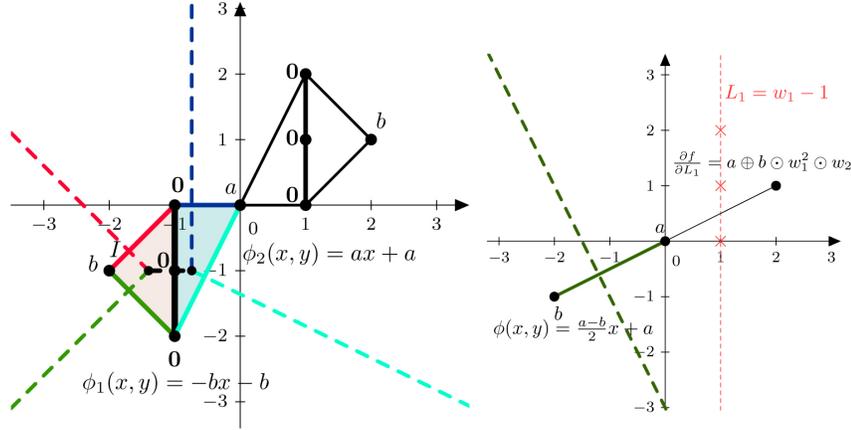


FIGURA 6.2. Gráficos de $\mathcal{T}(f)$ y $\mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L_1})$.

encontrar un polinomio $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_d]$ con $Trop(F) = f$ tal que F tenga dos puntos singulares que se tropicalicen en los puntos singulares de f .

Ejemplo 6.2.10. Sean $\mathcal{A} = \{(0, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 2)\}$, $f = 0 \oplus 0 \odot w_1 \oplus 0 \odot w_1^2 \oplus 0 \odot w_1 \odot w_2 \oplus 0 \odot w_1^2 \odot w_2^2 \oplus 6 \odot w_2^2$ y $L = w_1 - w_2$. Podemos calcular $\mathcal{T}(f) \cap \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L}) = \{(0, 0), (2, -2)\}$. Si definimos el polinomio $F_1 := -1 + 4x + (-2 + t^6)x^2 + (-2 - 2t^6)xy + x^2y^2 + t^6y^2$, verificamos fácilmente que tiene soporte \mathcal{A} , y define una curva singular en $(1, 1)$. Y $F_2 := (1 - t^2 + t^4) + (2 - 2t^2)x + x^2 + (-2 - 2t^2)xy + x^2y^2 + t^6y^2$ también tiene soporte \mathcal{A} y define una curva singular en (t^2, t^{-2}) . Como $Trop(F_1) = Trop(F_2) = f$, $val(1, 1) = (0, 0)$ y $val(t^2, t^{-2}) = (2, -2)$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, -2)$ resultan efectivamente los únicos puntos singulares de la curva tropical $\mathcal{T}(f)$, según el Teorema 6.2.4.

Ahora bien, supongamos existe un polinomio $F \in \mathbb{K}[x, y]$ tal que $F = \sum_{i \in \mathcal{A}} a_i x^i$, $Trop(F) = f$ y $V(F)$ posee dos puntos singulares $b_1 = (x_1, y_1)$ y $b_2 = (x_2, y_2)$ con $val(b_1) = (0, 0)$ y $val(b_2) = (2, -2)$. Con esto, tendremos que se cumplen las ecuaciones $F(b_1) = x \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(b_1) = y \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(b_1) = F(b_2) = x \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(b_2) = y \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(b_2) = 0$. Mirando estas ecuaciones como ecuaciones lineales en los coeficientes $(a_i)_{i \in \mathcal{A}}$, tenemos que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & x_1^2 y_1 & y_1^2 \\ 0 & x_1 & 2x_1^2 & x_1 y_1 & 2x_1^2 y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 y_1 & x_1^2 y_1 & 2y_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & x_2^2 y_2 & y_2^2 \\ 0 & x_2 & 2x_2^2 & x_2 y_2 & 2x_2^2 y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 y_2 & x_2^2 y_2 & 2y_2^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Calculando la expansión de dicho determinante, nos queda $-2y_2x_2x_1y_1(x_2^3x_1y_2^2 - x_2^4y_2y_1 - 3x_2^2x_1^2y_2^2 + x_2^4y_1^2 - 3x_2^3y_1^2x_1 + 3x_1^3y_2^2x_2 + x_1^4y_2y_1 - x_1^4y_2^2 + 3x_1^2x_2^2y_1^2 - x_1^3y_1^2x_2 - 2x_1^3x_2y_2y_1 + 2x_1x_2^3y_2y_1)$. Como $val(x_1) = val(y_1) = 0, val(x_2) = 2$ y $val(y_2) = -2$, vemos que el único término de menor valuación en la expansión del determinante es $-2x_1^5y_1y_2^3x_2$, con lo que el determinante nunca podrá ser cero, contradiciendo la suposición que estábamos haciendo sobre la existencia de un polinomio F levantado de f , tal que tenga dos singularidades tropicalizándose en los puntos singulares de $\mathcal{T}(f)$.

Observación 6.2.11. En el próximo ejemplo veremos que los puntos singulares de una curva tropical dependen no sólo de dicha curva sino, esencialmente, de la marcación del polítopo de Newton que la define.

Ejemplo 6.2.12. Construyamos un ejemplo con mismo polítopo de Newton Δ del Ejemplo 6.2.10, pero con todos los puntos marcados. Para esto, extrapolemos linealmente los coeficientes correspondientes a los puntos de $\Delta \cap \mathbb{Z}^2$ que no están marcados. Podemos tomar $\tilde{f} = 0 \oplus w_1 \oplus w_1^2 \oplus w_1 \odot w_2 \oplus w_1^2 \odot w_2^2 \oplus 6 \odot w_2^2 \oplus w_1^2 \odot w_2 \oplus 3 \odot w_2 \oplus 3 \odot w_1 \odot w_2^2$. Notemos que los tipos de las curvas tropicales definidas por f y \tilde{f} son los mismos. Más aún, el gráfico de ambas curvas es el mismo, ya que al interpolar linealmente los coeficientes que faltaban, no cambiamos la cápsula convexa inferior de $\{(-\alpha, p_\alpha) : f = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\alpha \odot w^\alpha\}$. Es fácil chequear que **todos** los puntos de $\mathcal{T}(\tilde{f})$ son puntos singulares, ya que \tilde{f} puede ser levantado al polinomio $F = (1 + x + xy + t^3y)^2$.

Ahora veremos cómo funciona el Teorema 6.2.4 en un ejemplo defectivo, donde el \mathcal{A} -discriminante tropical puede ser explícitamente calculado.

Ejemplo 6.2.13. Sea $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$, con $\alpha_1 = (0, 0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 0, 0)$, $\alpha_3 = (2, 0, 0)$, $\alpha_4 = (0, 0, 1)$, $\alpha_5 = (0, 1, 1)$ y $\alpha_6 = (0, 2, 1)$. Un polinomio clásico $F = \sum_{\alpha_i \in \mathcal{A}} a_{\alpha_i} x^{\alpha_i} \in \mathbb{K}[x, y, z]$, con soporte \mathcal{A} , puede escribirse como $F(x, y, z) = F_1(x) + zF_2(y)$ con $F_1(x)$ y $F_2(y)$ dos polinomios de grado 2 en una variable. Con esto, $V(F)$ tendrá un punto singular en el toro sii F_1 y F_2 lo tienen. Como F_1 es un polinomio en la variable x y F_2 lo es en y , la superficie formada por los coeficientes de F que hacen de $V(F)$ una variedad singular, queda determinada por dos ecuaciones en variables distintas que se deben cumplir al mismo tiempo. Esto nos muestra la naturaleza defectiva de este ejemplo. Más aún, las ecuaciones que determinan dicha superficie son

$$(6.2.14) \quad a_{\alpha_2}^2 = 4a_{\alpha_1}a_{\alpha_3} \text{ y } a_{\alpha_5}^2 = 4a_{\alpha_4}a_{\alpha_6}.$$

Pasemos ahora al análisis de la singularidad de la hipersuperficie tropical $\mathcal{T}(\text{Trop}(F))$. Observemos que \mathcal{A} es la unión de dos circuitos de dimensión uno, y la cápsula convexa de \mathcal{A} es el tetraedro con vértices en $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}$. Notemos que \mathcal{A} no contiene ningún circuito de dimensión máxima, o sea tres. El conjunto de ceros de cualquier función afín L tal que el espacio afín generado por $\{L = 0\} \cap \mathcal{A}$ tenga dimensión dos, consiste de uno de los circuitos más un punto del otro. Consideremos un polinomio tropical $f = \bigoplus_{\ell=1}^6 p_{\alpha_\ell} \odot w^{\alpha_\ell}$ con soporte en \mathcal{A} . Luego, analizando cada una de las formas lineales que definen las caras conteniendo los circuitos mencionados, tenemos que existe un punto singular $q \in \mathcal{T}(f)$ sii

$$2p_{\alpha_2} = p_{\alpha_1} + p_{\alpha_3}, \quad 2p_{\alpha_5} = p_{\alpha_4} + p_{\alpha_6}.$$

Notemos que cada una de estas ecuaciones es exactamente la tropicalización de las condiciones encontradas en las Ecuaciones (6.2.14).

6.3. Hipersuperficies tropicales marcadas y singularidades tropicales

Dado un polinomio tropical $f = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i$ con soporte \mathcal{A} , la mayoría de las (finitas) derivadas de Euler $\frac{\partial f}{\partial L}$ no proveen información relevante para detectar puntos singulares de $\mathcal{T}(f)$. En esta sección daremos más condiciones y caracterizaciones para detectar puntos singulares.

Para seguir adelante, necesitamos profundizar los conceptos vertidos en la Observación 3.1.5. Para esto, recordemos la siguiente dualidad [GKZ]. El vector de coeficientes $p = (p_i)_{i \in \mathcal{A}}$ de f define una *subdivisión coherente marcada* Π_p del polítopo de Newton Δ , que es la cápsula convexa de \mathcal{A} . Esto es, p define una colección de subconjuntos de \mathcal{A} (las *celdas marcadas*) que están en correspondencia uno a uno con los dominios de linealidad de la función afín que corta las caras de la cápsula convexa inferior del conjunto de puntos levantados $\{(-i, p_i), i \in \mathcal{A}\}$ en \mathbb{R}^{d+1} . Asumamos que una cara inferior Γ_φ es el gráfico de una función afín $\varphi(w_1, \dots, w_n) = \langle q_\varphi, w \rangle + \beta_\varphi$. La celda marcada σ_φ correspondiente a la subdivisión de Δ es el subconjunto de \mathcal{A} de todos los índices i para los cuales $p_i = \varphi(i)$.

La subdivisión marcada Π_p es combinatoriamente dual a la *variedad tropical marcada* $\mathcal{T}(f)$. Como vimos, esta variedad es un complejo poliedral que es una unión de celdas duales σ_φ^* , donde también guardamos la información de la marcación de la celda dual σ_φ , y no sólo la información geométrica de los vértices de σ_φ . Más explícitamente, la celda dual σ^* en $\mathcal{T}(f)$ de una celda determinada σ de Π_p es igual a la clausura de la unión de puntos q_φ tales que $\sigma = \sigma_\varphi$. También guardamos la información de todos los puntos marcados en σ , es decir, de *todos los puntos correspondientes a los monomios en los cuales el mínimo $f(q_\varphi)$ se alcanza* para cualquier punto q_φ en el interior relativo de σ^* . La suma de las dimensiones de un par de celdas duales es d . En particular, los vértices de $\mathcal{T}(f)$ se corresponden con celdas marcadas de Π_p de dimensión maximal d .

Ahora probaremos que cuando todas las celdas (marcadas) en la subdivisión coherente Π_p no continen ningún circuito (o sea, están formadas por puntos afínmente independientes), la hipersuperficie tropical asociada a f es no singular, como se esperaría. Como veremos, la recíproca de esta afirmación no es verdadera y está relacionada con un estudio combinatorio más complicado.

Recordemos que una configuración de puntos se dice una *pirámide* si todos sus puntos excepto uno pertenecen a un hiperplano afín. Observar que en el caso de un conjunto de puntos afínmente independientes, se cumple esta condición.

Lema 6.3.1. *Sea $q \in \mathcal{T}(f)$ un punto en el interior relativo de una celda σ^* tal que la celda dual σ en Π_p es una pirámide. Luego, q es no singular. En particular, si Π_p es una triangulación coherente, la hipersuperficie tropical $\mathcal{T}(f)$ no es singular.*

DEMOSTRACIÓN. Si σ es una pirámide, sea L el funcional lineal tal que $\{L = 0\}$ interseca a σ en una cara y deja fuera de esa intersección a sólo uno punto. Esto significa que el mínimo de $\frac{\partial f}{\partial L}$ en q se alcanza sólo en un monomio. Con esto, $q \notin \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L})$ y por lo tanto q no es un punto singular. \square

Corolario 6.3.2. *Sea σ una celda de Π_p de dimensión r . Una condición necesaria para que $q \in \sigma^*$ sea un punto singular es que el valor de $f(q)$ se alcance en, al menos, $r + 2$ monomios.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\dim(\sigma) = r$, tenemos que σ posee al menos $r + 1$ puntos. Si $|\sigma| = r + 1$, la celda resulta un simplex de dimensión r y, por lo tanto, una pirámide, con lo que $q \in \sigma^*$ no resultan un punto singular por el lema anterior. \square

Ejemplo 6.3.1. Sea $f \in \mathbb{T}[w_1, w_2, w_3]$ el polinomio tropical dado por $f = 0 \oplus 0 \odot w_1 \oplus 0 \odot w_2 \oplus 1 \odot w_3 \oplus 0 \odot w_1 \odot w_3 \oplus 0 \odot w_2 \odot w_3$. Podemos ver que el soporte de f es

$$\mathcal{A} = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}.$$

Los coeficientes de f inducen la subdivisión coherente en Δ como en la Figura 6.3, que tiene dos celdas de dimensión 3, y no es una triangulación. Una de esas celdas es un triángulo unimodular. La segunda celda de dimensión máxima contiene al circuito $Z = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ de dimensión $d - 1 = 2$, y dicha celda es una pirámide sobre el punto $(0, 0, 0)$. Ninguna celda de menor dimensión cumple con la condición necesaria del Corolario 6.3.2, salvo la que tiene por vértices a los elementos del circuito Z . Pero esta cara no puede aportar ningún punto singular, pues forma parte de la pirámide anteriormente descrita. Explícitamente, si $q \in \mathcal{T}(f)$ pertenece a la celda dual a la celda con el circuito Z , considerando el funcional afín $L = 1 - w_1 - w_2$ tenemos que $q \notin \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L})$, ya que el (mínimo) valor de $f(q)$ se sigue alcanzando sólo en el término independiente.

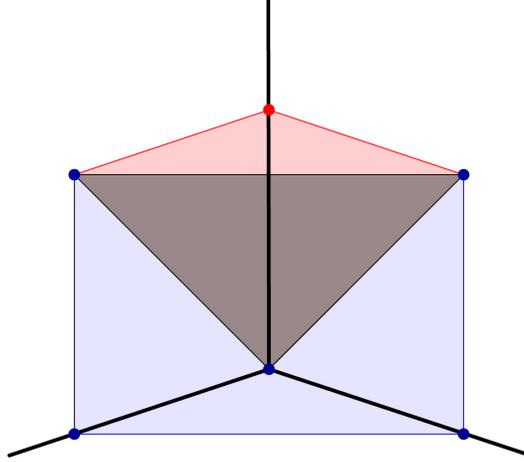


FIGURA 6.3. Subdivisión inducida por el polinomio f del Ejemplo 6.3.1.

En la práctica, cuando buscamos puntos singulares en una hipersuperficie tropical, eliminamos todas las celdas de $\mathcal{T}(f)$ que son duales a un simplex en Δ . Este procedimiento elimina la mayoría de los casos. Con las celdas restantes tenemos que chequear las derivadas parciales de Euler con respecto a los hiperplanos L que contienen un circuito de la subdivisión. No hay una caracterización combinatoria elemental para determinar si un punto es singular. En parte, esto se debe a que la situación no es completamente local. Ver [GKZ] y [DFS], y el concepto de Δ -equivalencia.

Ahora analizaremos condiciones necesarias y suficientes para que un punto $q \in \mathcal{T}(f)$ sea singular.

Teorema 6.3.3. *Sea $f = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i$ un polinomio tropical, y sea $q \in \mathcal{T}(f)$ un punto en el interior relativo de una celda σ^* . Luego, q es un punto singular si y sólo si la celda dual σ no es una pirámide y se tiene que $q \in \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L})$ para todas las funciones lineales afines L tales que $\dim(\langle \{L = 0\} \cap \mathcal{A} \rangle) = d - 1$ y $\sigma \subset \{L = 0\}$. Con esto, en el caso particular de un vértice q de $\mathcal{T}(f)$, q es singular sí y sólo si σ no es una pirámide.*

DEMOSTRACIÓN. Si q es un punto singular, σ no es una pirámide por el Lema 6.3.1. Como $q \in \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L})$ para cualquier L , por ser singular,

en particular también ocurre para las funciones lineales afines descritas en las hipótesis. Supongamos ahora que q no es un punto singular, y sea L' una función lineal afín tal que $q \notin \mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L'}\right)$. Sea $i \in \mathcal{A} \setminus \{L' = 0\}$ el único punto de \mathcal{A} en el cual $\left(\frac{\partial f}{\partial L'}\right)(q)$ se alcanza. Luego, si σ no está contenido en $\{L' = 0\}$, tenemos que $i \in \sigma$ y es el único punto de σ fuera de $\{L' = 0\}$, con lo que σ resulta una pirámide. Si $\sigma \subset \{L' = 0\}$, tomemos cualquier hiperplano con coeficientes enteros $\{L = 0\}$ tal que $\mathcal{A} \cap \{L' = 0\} \subseteq \mathcal{A} \cap \{L = 0\}$, $\mathcal{A} \cap \{L = 0\}$ genera un espacio afín de dimensión $d - 1$ e $i \notin \{L = 0\}$. Para cualquier L con estas propiedades tenemos que $q \notin \mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)$, como queríamos. \square

Corolario 6.3.4. *Como consecuencia del Teorema 6.3.3, recuperamos la clasificación correspondiente al punto (A) de la Sección 5.2, ya que un vértice en una curva tropical (o sea $\mathcal{T}(f) \subset \mathbb{R}^2$) será singular sii es un vértice del que salen 4 o más ejes, o si es un vértice trivalente de multiplicidad mayor a uno. El primer caso corresponde a celdas de dimensión 2 que son un polígono de 4 o más lados (por lo tanto no es una pirámide), y en el segundo caso el circuito es un triángulo con al menos un punto en su interior relativo en la marcación de la subdivisión coherente.*

Al igual que en el Ejemplo 6.2.9, donde recuperamos la información correspondiente al punto (B.1) de la Sección 5.2, podemos recuperar la información correspondiente al punto (B.2) de la misma Sección, como Corolario del Teorema 6.3.3. El siguiente ejemplo servirá a este propósito.

Ejemplo 6.3.2. Sea $f = \nu \oplus 0 \odot w_1 \oplus 0 \odot w_1 \odot w_2 \oplus 0 \odot w_1 \odot w_2^2 \oplus \lambda \odot w_1^2 \oplus \lambda \odot w_1^2 \odot w_2$, con $0 < \lambda < \nu$. Siguiendo la notación de la Figura 6.2 correspondiente al Ejemplo 6.2.9, en la parte superior de la Figura 6.4 podemos ver la subdivisión coherente (marcada) de Δ , y la curva tropical dual a ésta, $\mathcal{T}(f)$, en líneas punteadas. Como ya planteamos en el Ejemplo 6.2.9, los coeficientes de las formas lineales definiendo las caras de dimensión máxima de la cápsula inferior del conjunto $\{(-i, a_i) : i \in \mathcal{A}\}$ nos dan las coordenadas de los vértices de la curva tropical $\mathcal{T}(f)$.

Por el Teorema 6.3.3, para encontrar todos los puntos singulares de $\mathcal{T}(f)$ sólo tenemos que calcular $\mathcal{T}(f) \cap \mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)$, con $L = w_1 - 1$. Podemos ver en la parte inferior de la Figura 6.4 a la subdivisión (marcada) regular inducida en $\mathcal{A} \setminus \{L = 0\}$ y su curva tropical dual $\mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)$ en líneas punteadas. En la Figura 6.5 podemos ver el gráfico de $\mathcal{T}(f) \cap \mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)$, y, por lo tanto, todos los puntos singulares de f .

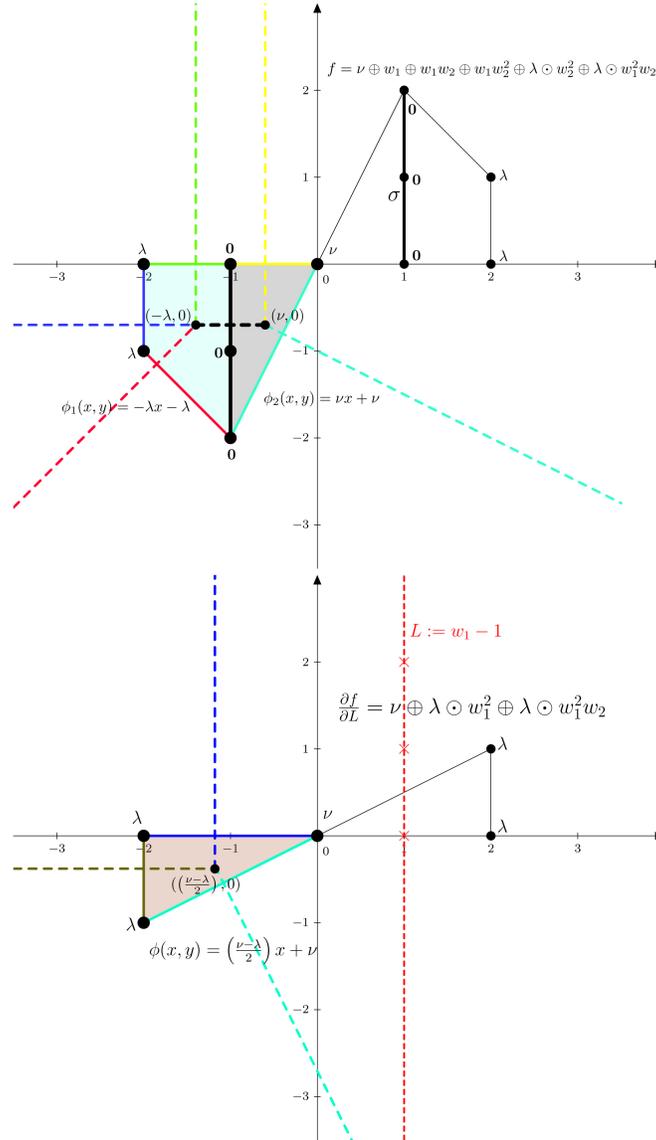


FIGURA 6.4. Subdivisión inducida, $\mathcal{T}(f)$ y $\mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)$ del Ejemplo 6.3.2.

Notemos que este ejemplo ya lo habíamos estudiado en la clasificación (B.2) de la Sección 5.2. En dicha clasificación reconocíamos sólo uno de los puntos singulares de la curva tropical: $x_0 = (0, 0)$, lo que bastaba para reconocer la curva como singular. Gracias al Teorema 6.3.3 encontramos *todos* los puntos singulares de la curva tropical: todos los puntos en el segmento cerrado $[(-\lambda, 0); (\frac{\nu-\lambda}{2}, 0)]$. Y recuperamos la condición métrica encontrada en la clasificación anterior: como $\nu > \lambda$, $(0, 0)$ resulta un punto singular que se encuentra más cerca del vértice $(-\lambda, 0)$, del que salen cuatro ejes, que del vértice trivalente $(\frac{\nu-\lambda}{2}, 0)$.

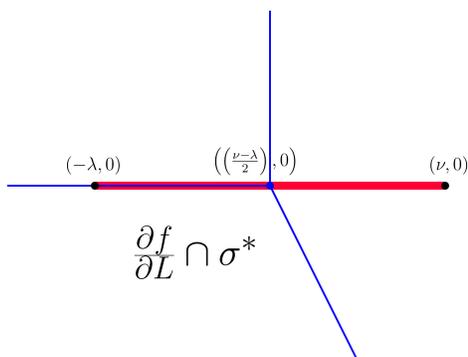


FIGURA 6.5. Puntos singulares de la curva tropical $\mathcal{T}(f)$ del Ejemplo 6.3.2.

Como una consecuencia del Teorema 6.3.3, podemos fácilmente describir los polinomios que definen hipersuperficies tropicales en el caso de 1 y 2 variables. Recordemos que, si \mathcal{A} no es defectivo, $\mathcal{T}(\text{Trop}(\Delta_{\mathcal{A}}))$ es un subabánico del abánico secundario de \mathcal{A} . En el caso más simple de una variable (o sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$), vale que $\mathcal{T}(\text{Trop}(\Delta_{\mathcal{A}}))$ es la unión de los conos en el abánico secundario que no sean de dimensión máxima (pues las únicas caras propias de \mathcal{A} son vértices). Con esto, un polinomio en una variable es singular si y sólo si la subdivisión marcada inducida no es una triangulación. Con nuestra notación, esto es un caso simple del Teorema 6.3.3, ya que todos los circuitos de \mathcal{A} tienen dimensión máxima 1.

El resultado que sigue, en el caso suave, aparece en [GKZ, Prop. 3.9, Cap. 11].

Corolario 6.3.5. *Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^2$ con n elementos. Supongamos que $p \in \mathbb{R}^n$ induce una subdivisión coherente marcada Π_p en \mathcal{A} que no es una triangulación. Luego $p \in \mathcal{T}(\text{Trop}(\Delta_{\mathcal{A}}))$ (equivalentemente, el polinomio $f = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i$ define una hipersuperficie tropical singular) en exactamente los siguientes casos:*

- i) *Existe una celda marcada de Π_p que contiene un circuito de dimensión 2.*
- ii) *Todos los circuitos contenidos en una celda de Π_p tienen dimensión afín 1, y existe una celda marcada σ de Π_p de dimensión 1 con $\#\sigma \geq 3$ con la siguiente propiedad: Sea L una función lineal afín con coeficientes enteros tal que $\sigma \subset \{L = 0\}$. Luego, $\sigma^* \cap \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L}) \neq \emptyset$.*

Notar que si estamos en las condiciones del segundo caso del Corolario anterior, $\sigma^* \cap \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L}) \neq \emptyset$ si y sólo si existe un celda σ' de dimensión 2 que contenga a σ , tal que $\sigma' \cap \{L = 0\} = \{i_1\}$ consiste de un único punto $i_1 \in \mathcal{A}$ y, asumiendo que $L(i_1) > 0$, existe otro punto $i_2 \in \mathcal{A} \setminus \sigma'$ con $L(i_2) < L(i_1)$. Esto es un caso particular del resultado más general que presentamos a continuación. Tengamos presente que siempre asumimos que la cápsula convexa del conjunto de exponentes \mathcal{A} es de dimensión máxima.

Proposición 6.3.6. *Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^d$. Sea $p \in \mathbb{R}^n$ tal que Π_p contiene una celda σ' de dimensión d , y dicha celda contiene un circuito Z de dimensión $d-1$ y es una pirámide sobre un punto i_1 . Sea L una función afín con coeficientes enteros tal que $Z \subset \sigma' \cap \{L = 0\}$ y $L(i_1) > 0$. Luego, existe un punto singular $q \in \mathcal{T}(\bigoplus_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i) \cap \{(\sigma' \cap \{L = 0\})^*\}$ con $\langle q, i_1 \rangle > 0$ sii existe $i_2 \in \mathcal{A} \setminus \sigma'$ con $L(i_2) < L(i_1)$. En particular, si Z interseca el interior de la cápsula convexa de \mathcal{A} , $\mathcal{T}(\bigoplus_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i)$ resulta singular.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos asumir que $L = j_1 w_1 + j_2 w_2 + \dots + j_d w_d + \beta$ con todos los coeficientes coprimos. Para trabajar con una notación más transparente, aplicamos una transformación lineal afín inversible a nuestra configuración de puntos \mathcal{A} para lograr $L(w) = w_1$. Notemos con $\varphi(w) = \varphi_1 w_1 + \dots + \varphi_d w_d$ a la forma lineal que interpola p sobre la celda σ' , es decir $\varphi(i) = p_i$ para todos los $i \in \sigma'$ y $\varphi(i) < p_i$ para

todos los $i \notin \sigma'$. Con esto, $p' := p_i - \varphi(i)$ define la misma subdivisión marcada, con lo que podemos asumir que $p_i = 0$ para todos los $i \in \sigma'$ y $p_i > 0$ en otro caso. De esta manera, $q = (0, \dots, 0)$ es el vértice de $\mathcal{T}(f)$ dual a σ' , y no es singular pues σ' es una pirámide. Observemos que si $q \in (\sigma' \cap \{L = 0\})^*$ luego $q = (q_1, 0, \dots, 0)$. Con esto tenemos que existirá un punto singular en $(\sigma' \cap \{L = 0\})^*$ con $\langle q, i_1 \rangle > 0$ si existe $q_1 > 0$ y dos puntos i_2, i_3 en \mathcal{A} tales que

$$\langle q, i_2 \rangle + p_{i_2} = \langle q, i_3 \rangle + p_{i_3} \leq \langle q, i \rangle + p_i$$

para todo $i \in \mathcal{A}$ con $L(i) \neq 0$. Con nuestra notación, esto se traduce a

$$q_1 L(i_2) + p_{i_2} = q_1 L(i_3) + p_{i_3} \leq q_1 L(i) + p_i$$

para todo $i \in \mathcal{A}$ con $L(i) \neq 0$. Notar que como σ' es una pirámide sobre i_1 , para cualquier punto $i_2 \in \mathcal{A}$ para el cual $L(i_1) = L(i_2)$ vale que $i_2 \notin \sigma'$ o, equivalentemente, $p_{i_2} > 0$. Asumamos primero que existe un punto $i \in \mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \sigma'$ con $L(i) < L(i_1)$. Tomemos i_2 con esa propiedad, y tal que $\frac{p_{i_2}}{L(i_1) - L(i_2)} = \min_{i \in \mathcal{A}'} \frac{p_i}{L(i_1) - L(i)}$. Luego es suficiente tomar $q_1 = \frac{p_{i_2}}{L(i_1) - L(i_2)}$ e $i_3 = i_1$. Recíprocamente, asumamos que existe un punto singular $q = (q_1, 0, \dots, 0)$ con $q_1 > 0$. Como $q \in \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L})$, existen dos puntos $i_2 \neq i_3$ tales que $q_1 L(i_2) + p_{i_2} = q_1 L(i_3) + p_{i_3} \leq q_1 L(i)$. Supongamos que $i_2 \neq i_1$. Con esto $0 < p_{i_2} \leq q_1(L(i_1) - L(i_2))$, resultando $L(i_2) < L(i_1)$, como queríamos. La condición que Z interseque el interior la cápsula convexa de \mathcal{A} garantiza la existencia de un punto $i_2 \in \mathcal{A}'$ con $L(i_2) < L(i_1)$. \square

Comentario 6.3.3. Notar que el punto i_2 en la Proposición 6.3.6 no necesita pertenecer a una celda de la subdivisión marcada Π_p .

6.4. Clases de peso y el co-abanico de Bergman de \tilde{A} .

En esta sección relacionamos las definiciones vistas hasta aquí con los resultados y definiciones en [DFS], [MMS] y [AK]. Como siempre, $f = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i$ denota un polinomio tropical con soporte \mathcal{A} .

Definición 6.4.1. Sea q en el interior de una celda $\sigma^* \subset \mathcal{T}(f)$. Definimos en forma inductiva a la *bandera de f* (con respecto a q) como la bandera de subconjuntos $\mathcal{F}(q)$ de \mathcal{A} que cumple las condiciones

$F_0(q) := \sigma \subsetneq F_1(q) \subsetneq \dots \subsetneq F_r(q)$, con $\dim\langle F_r(q) \rangle = d$ y para todo ℓ vale que $F_{\ell+1}(q) \setminus F_\ell(q)$ es el subconjunto de $\mathcal{A} \setminus \langle F_\ell(q) \rangle$ donde el polinomio tropical $\bigoplus_{i \in \mathcal{A} \setminus \langle F_\ell(q) \rangle} p_i \odot w^i$ alcanza su mínimo en q . La *clase de peso de la bandera* $\mathcal{F}(q)$ son todos los puntos $q' \in \mathcal{T}(f)$ para los cuales $\mathcal{F}(q) = \mathcal{F}(q')$.

Observación 6.4.2. En el caso de $q = (0, \dots, 0)$, tenemos que las banderas de f con respecto a q coinciden con las banderas de flats de la Definición 2.4.1. Y las clases de peso coinciden con las de la Definición 2.4.2.

Los Teoremas 6.2.4 y 6.3.3 nos brindan un algoritmo para decidir si un punto $q \in \mathcal{T}(f)$ es singular o no, que es similar al método presentando en [T2] pero que funcionan sin hipótesis restrictivas sobre \mathcal{A} . El algoritmo nos da como resultado un funcional afín L tal que $q \notin \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L})$ o “ q es un punto singular”. Primero, calculamos $F_0(q) = \sigma$. Si σ es una pirámide, existe $i \in F_0(q)$ tal que $i \notin \langle F_0(q) \setminus \{i\} \rangle$ y podemos calcular un L definiendo la cara $\langle F_0(q) \setminus \{i\} \rangle$ de $F_0(q)$, que verifica $q \notin \mathcal{T}(\frac{\partial f}{\partial L})$. Si $\dim(\langle F_0(q) \rangle) < d$, calculamos $F_1(q)$ e iteramos el proceso. Paramos cuando encontramos un L que certifique que q es no singular o cuando llegamos a calcular un F_ℓ con dimensión afín d que no sea una pirámide, con lo que q resulta singular.

Explícitamente, el algoritmo es como sigue:

Input: f un polinomio tropical con soporte \mathcal{A} , $q \in \mathcal{T}(f)$

- $\ell = 0$
- **Para ℓ desde 0 hasta d hacer**
 - ★ Calcular $\mathcal{F}_\ell(q)$ con los datos de f, q y $\bigcup_{0 \leq r < \ell-1} \mathcal{F}_r$
 - ★ **Para cada x en $\mathcal{F}_\ell(q)$ hacer**
 - ◇ **Si $x \notin \langle \{\mathcal{F}_0(q) \cup \dots \cup \mathcal{F}_\ell(q)\} \setminus \{x\} \rangle$ Luego**
 - Calcular un L que defina la cara $\{\mathcal{F}_0(q) \cup \dots \cup \mathcal{F}_\ell(q)\} \setminus \{x\}$ en la cápsula convexa de $\{\mathcal{F}_0(q) \cup \dots \cup \mathcal{F}_\ell(q)\}$.
 - **SALIDA:** L .
 - ◇ **Finalizar Si**
 - ★ **Finalizar Para**
- **Finalizar Para**
- **SALIDA:** “ q es un punto singular.”

Enumeremos los elementos i_1, \dots, i_n de \mathcal{A} , y sea $A \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ la matriz con esas columnas, en el mismo orden. Llamemos \tilde{A} a la matriz con columnas $(1, i_k)$, $1 \leq k \leq n$. Recordemos de la Sección 2.1 que $F = \sum_{i \in \mathcal{A}} a_i x^i$ es singular en $(1, \dots, 1)$ sii $(a_i)_{i \in \mathcal{A}} \in \ker(\tilde{A})$, y F tiene un cero singular en otro punto p del toro $(\mathbb{K}^*)^d$ sii $(a_i)_{i \in \mathcal{A}} \in \ker(\tilde{A}D_p)$, con D_p la matriz diagonal inversible, con $(D_p)_{jj} = p^{ij}$. Al estudiar si una hipersuperficie tropical $\mathcal{T}(f)$ es singular o no, debemos ver si el vector de coeficientes de f pertenece a la tropicalización del núcleo de alguna de estas matrices. Estas tropicalizaciones resultan una traslación de $\text{Trop}(\ker(\tilde{A}))$. En el Capítulo 2, vimos que $\mathcal{B}^*(\tilde{A}) = \text{Trop}(\ker(\tilde{A}))$ (Corolario 2.3.7).

Con las herramientas desarrolladas hasta aquí podemos redemostrar el Teorema 1.1 de [DFS]. Enunciemos este teorema:

Teorema 6.4.1 (Dickenstein-Feichtner-Sturmfels). *Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^d$ un conjunto dado, con s elementos. Luego, la tropicalización del \mathcal{A} -discriminante ∇_0 es igual a la suma de Minkowski del espacio fila de la matriz \tilde{A} y del coabanico de Bergman $\mathcal{B}^*(\tilde{A})$. Es decir,*

$$\text{Trop}(\nabla_0) = \mathcal{B}^*(\tilde{A}) + \langle \text{filas de } \tilde{A} \rangle.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $f = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i$ un polinomio tropical, y $\phi(x) = \sum_{i \in \mathcal{A}} x_i$ la forma lineal con todos sus coeficientes iguales a 1. Entonces $\Phi := \mathcal{T}(\text{Trop}(\phi))$ es el conjunto formado por todos los v en \mathbb{R}^s tales que $\min\{v_i : i \in \mathcal{A}\}$ se alcanza al menos dos veces. Con esto tenemos que

$$\mathcal{T}(f) = \{w \in \mathbb{R}^d : w \cdot A + (p)_{i \in \mathcal{A}} \in \Phi\}.$$

Y, claramente, $\mathcal{B}^*(\tilde{A}) \subseteq \Phi$.

Sea ahora $L(w) = j_1 w_1 + \dots + j_d w_d + \beta$ una forma lineal afín. Podemos asociar a L la forma lineal $\ell_L(x_1, \dots, x_s) = \sum_{i=1}^n L(i_k) x_k$. Con esto, el soporte de ℓ_L es precisamente $\mathcal{A} \setminus \{L = 0\}$. Más aún, el vector de coeficientes $(L(i_k))_{i \in \mathcal{A}}$ vive en el subespacio generado por las filas de la matriz \tilde{A} , ya que se obtiene haciendo el producto $(\beta, j_1, \dots, j_d) \cdot \tilde{A}$, y todas las formas lineales inducidas por el espacio generado por las filas de \tilde{A} (que generan el ideal de $\ker(\tilde{A})$) son de esta forma.

Notemos por v_1, \dots, v_s a variables (tropicales). La tropicalización $Trop(\ell_L)$ es

$$Trop(\ell_L)(v) = \bigoplus_{L(i_k) \neq 0} 0 \odot v_k.$$

De esto obtenemos que $q \in \mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right) = \mathcal{T}\left(\bigoplus_{\substack{L(i) \neq 0 \\ i \in \mathcal{A}}} p_i \odot w^i\right)$ si pasa que

$\min_{L(i) \neq 0} \{p_i + \langle q, i \rangle\}$ se alcanza al menos dos veces o, equivalentemente, si el vector $(p_i + \langle q, i \rangle)_{i \in \mathcal{A}} \in \mathcal{T}(Trop(\ell_L))$.

Si q es un punto singular de $\mathcal{T}(f)$, por el Teorema 6.2.4 $q \in \mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)$ para toda L función lineal afín. Por las observaciones del párrafo anterior, esto sucede sii $(p_i + \langle q, i \rangle)_{i \in \mathcal{A}} \in \mathcal{T}(Trop(\ell_L))$ para toda L . Como todas las formas lineales inducidas por el espacio generado por las filas de la matriz \tilde{A} son de la forma ℓ_L para alguna L , por la Proposición 2.3.4 nos queda que si $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_s]$ es el ideal generado por las formas lineales homogéneas inducidas por las filas de la matriz \tilde{A} entonces $(p_i + \langle q, i \rangle)_{i \in \mathcal{A}} \in \mathcal{T}(I) = \mathcal{T}(ker(\tilde{A})) = \mathcal{B}^*(\tilde{A})$.

Resumiendo, $(p)_{i \in \mathcal{A}}$ define una hipersuperficie tropical sii existe un punto $q \in \mathbb{R}^d$ tal que $(p)_{i \in \mathcal{A}} + q \cdot A = u \in \mathcal{B}^*(\tilde{A})$, que es lo mismo que pedir $p = u + (-q) \cdot A$ con $u \in \mathcal{B}^*(\tilde{A})$, o sea p es un punto en la suma de Minkowski del espacio generado por las filas de A mas el coabanico de Bergman de \tilde{A} . Como el subespacio $\langle (1, \dots, 1) \rangle$ está contenido en $Trop(ker(\tilde{A}))$, y $(1, \dots, 1)$ es la fila que le agregamos a la matriz A para obtener la matriz \tilde{A} , podemos afirmar que p es un punto en el \mathcal{A} -discriminante tropical sii p se escribe como un punto en la suma de Minkowski del espacio generado por las filas de \tilde{A} más un punto en el coabanico de Bergman de \tilde{A} , que es lo que queríamos demostrar. \square

De la demostración anterior se desprende una nueva caracterización del conjunto de todos los puntos singulares de una hipersuperficie tropical.

Corolario 6.4.2. *Sea $f = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i$ un polinomio tropical. Luego el conjunto de todos los puntos singulares de $\mathcal{T}(F)$ resulta ser*

$$Sing(\mathcal{T}(f)) = \{q \in \mathbb{R}^d : q \cdot A + p \in \mathcal{B}^*(\tilde{A})\}.$$

Analicemos la implicancia de este teorema: La bandera de conjuntos $\mathcal{F}(q)$ y las clases de peso de la Definición 6.4.1 coinciden con los de

[AK, Pág. 3]. Nuestro algoritmo puede ser modificado para decidir si $f = \sum_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i$ contiene un punto singular, es decir, si p está en el \mathcal{A} -discriminante tropical. Más aún, es posible calcular *todos* los puntos singulares. Sólo basta remarcar que como las clases de peso inducen una subdivisión más fina en el co-abanico de Bergman $\mathcal{B}^*(\tilde{A})$, también inducen una subdivisión poliedral más fina de $\mathcal{T}(f)$. Dos puntos q y q' de $\mathcal{T}(f)$ pertenecen al interior relativo de la misma celda en esta subdivisión más fina si y sólo si q, q' pertenecen a la misma clase de peso. Con esto, si σ es una celda de la subdivisión más fina de $\mathcal{T}(f)$, todos los puntos de σ son singulares, o todos son regulares. Como el número de celdas en esta subdivisión es finita y dichas celdas se pueden calcular, podemos usar un algoritmo para calcular todos los puntos singulares de $\mathcal{T}(f)$ que use esta información.

Proposición 6.4.3. *Las (finitas) clases de peso asociadas al polinomio tropical $f = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i$ con soporte \mathcal{A} , son celdas poliedrales relativamente abiertas que refinan la estructura poliedral de $\mathcal{T}(f)$ dual a la subdivisión coherente marcada Π_p . Si C es una celda en esta nueva subdivisión, todos los puntos de C son singulares o todos son regulares. El algoritmo anterior aplicado a cualquiera de los puntos de C nos permite decidir si C es un conjunto de puntos singulares o regulares.*

Terminaremos esta sección con algunos ejemplos interesantes.

Ejemplo 6.4.3. Consideremos al polinomio tropical f definido por $f = 0 \oplus 0 \odot w_1 \oplus 0 \odot w_2 \oplus 0 \odot w_1 \odot w_2 \oplus 1 \odot w_1^2 \oplus 1 \odot w_2^2$. Este polinomio f define una cónica cuyo único circuito en la subdivisión dual es el $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. Como estos puntos forman un circuito de codimensión 2, el único punto singular de f es el $(0, 0)$.

Nuestro próximo ejemplo muestra que dos vectores de coeficientes que inducen la misma subdivisión coherente de la cápsula convexa de \mathcal{A} , las banderas asociadas no necesariamente son coincidentes.

Ejemplo 6.4.4. Sean $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ con $\alpha_1 = (0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 0)$, $\alpha_3 = (0, 2)$, $\alpha_4 = (2, 0)$, $\alpha_5 = (1, 2)$ y $\alpha_6 = (-2, 0)$, y $p_v = (0, 0, 0, 0, v_1, v_2)$, con $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}_{>0}^2$ arbitrario. En este caso, p_v define la curva tropical dada por $f = 0 \oplus 0 \odot w_2 \oplus 0 \odot w_2^2 \oplus 0 \odot w_1^2 \oplus v_1 \odot w_1 \odot w_2^2 \oplus v_2 \odot w_1^{-2}$. La subdivisión marcada Π inducida por cualquier

p_v tiene tres celdas maximales: $\sigma_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $\sigma_2 = \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_4\}$ y $\sigma_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_6\}$. Por la Proposición 6.3.6 podemos afirmar que todas las curvas inducidas por cualquier v son singulares, con un punto singular en la celda dual al eje marcado $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Esto se debe a que el circuito $Z = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ es de codimensión 1, e interseca el interior del polígono de Newton de f . Sin embargo, como veremos, el número y lugar de los puntos singulares varía.

La celda σ_1 es dual al punto $(0, 0)$ en la curva $\mathcal{T}(f)$, y σ_3 es dual al punto $(\frac{v_2}{2}, 0)$. Por el Corolario 6.3.5 tendremos una singularidad si existe un punto en el segmento $[(0, 0), (\frac{v_2}{2}, 0)]$ que también pertenezca a la derivada parcial de Euler $g_v = \frac{\partial f_v}{\partial(w_1=0)} = 0 \odot w_1^2 \oplus v_1 \odot w_1 \odot w_2^2 \oplus v_2 \odot w_1^{-2}$. En dicho segmento g_v alcanza su mínimo en el $(0, 0)$ en la forma linear asociada a α_4 , y en $(\frac{v_2}{2}, 0)$ en la forma linear asociada a α_6 . Como g_v es una función continua, debe de haber un punto $(q, 0)$ donde el mínimo de g_v se alcance dos veces, con lo que este punto será una singularidad de f (cf. [MMS]). Este razonamiento funciona para cualquier hipersuperficie de dimensión d con un circuito en el interior de \mathcal{A} de dimensión $d - 1$.

Ahora bien, el gráfico de $\mathcal{T}(g_v)$ es una recta tropical con vértice en el punto $(\frac{v_2}{2}, \frac{-4v_1+v_2}{8})$, con semiejes saliendo de él con direcciones $(0, 1)$, $(-1, -2)$ y $(2, -3)$. Esto nos lleva a tres situaciones posibles (ver Figura 6.6):

- Si $-4v_1 + v_2 < 0$, existe un punto singular en $q = (\frac{v_2}{4}, 0)$. La bandera con respecto a q es: $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \subsetneq \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\} \subsetneq \mathcal{A}$.
- Si $-4v_1 + v_2 = 0$, existe un punto singular en $q = (\frac{v_2}{4}, 0)$. La bandera con respecto a q es: $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \subsetneq \mathcal{A}$
- Si $-4v_1 + v_2 > 0$, obtenemos dos puntos singulares distintos:
 - * Por el lado de la rama del semieje con dirección $(-1, -2)$ obtenemos el punto $q = (v_1, 0)$ con bandera con respecto a q : $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \subsetneq \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} \subsetneq \mathcal{A}$
 - * Por el lado de la rama del semieje con dirección $(2, -3)$ obtenemos el punto $q = (\frac{v_2-v_1}{3}, 0)$ con bandera con respecto a q : $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \subsetneq \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\} \subsetneq \mathcal{A}$

Con esto, podemos tomar valores distintos de $v, v' \in \mathbb{R}_{>0}^2$ tales que se tenga $\Pi = \Pi_v = \Pi_{v'}$ y que sea imposible de encontrar puntos singulares

$q_v, q_{v'}$ en $\mathcal{T}(f_v), \mathcal{T}(f'_v)$ para los cuales las banderas con respecto a q y q' coincidan para todo ℓ . Es decir, que se cumpla $\mathcal{F}_\ell(q_v) = \mathcal{F}_\ell(q_{v'}) \forall \ell$.

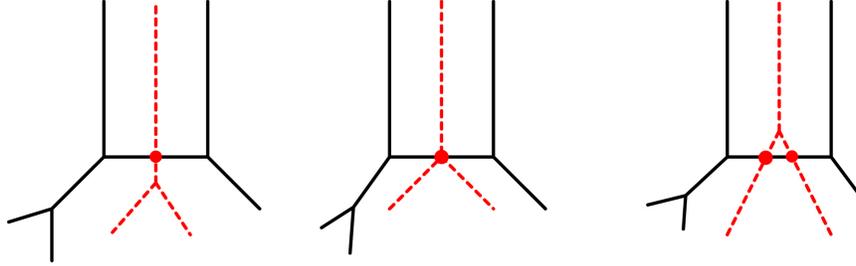


FIGURA 6.6. Casos del Ejemplo 6.4.4: $-4v_1 + v_2 < 0$ (izq.), $-4v_1 + v_2 = 0$ (centro), y $-4v_1 + v_2 > 0$ (der.). Línea llena gráfico de $\mathcal{T}(f)$, y punteada $\mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial(w_1=0)}\right)$.

El siguiente ejemplo muestra un polinomio tropical f tal que el vector de coeficientes que lo define pertenecen a un cono de codimensión uno del abanico secundario de \mathcal{A} , y $\mathcal{T}(f)$ tiene dos puntos singulares.

Ejemplo 6.4.5. Sea $f = 0 \odot w_1^2 \oplus 0 \odot w_1^2 \odot w_2 \oplus 0 \odot w_1^2 \odot w_2^2 \oplus 7 \odot w_2 \oplus 4 \odot w_1 \odot w_2 \oplus 7 \odot w_1^4 \odot w_2$. La subdivisión inducida por f es su polígono de Newton es una triangulación excepto por el circuito de exponentes $\{w_1^2, w_1^2 w_2, w_1^2 w_2^2\}$. El \mathcal{A} -discriminante del soporte de f , con los significados obvios para las variables a_{ij} , es

$$\begin{aligned}
& 16a_{11}^4 a_{21}^6 - 128a_{01} a_{11}^2 a_{21}^7 + \underline{256a_{01}^2 a_{21}^8} - 192a_{11}^4 a_{20} a_{21}^4 a_{22} + 1536a_{01} a_{11}^2 \\
& a_{20} a_{21}^5 a_{22} - \underline{4096a_{01}^2 a_{20} a_{21}^6 a_{22}} + 768a_{11}^4 a_{20}^2 a_{21}^2 a_{22}^2 - 6144a_{01} a_{11}^2 a_{20}^2 a_{21}^3 \\
& a_{22}^2 + \underline{24576a_{01}^2 a_{20}^2 a_{21}^4 a_{22}^2} - 1024a_{11}^4 a_{20}^3 a_{22}^3 + 8192a_{01} a_{11}^2 a_{20}^3 a_{21} a_{22}^3 - \\
& \underline{65536a_{01}^2 a_{20}^3 a_{21}^3 a_{22}^2} + \underline{65536a_{01}^2 a_{20}^4 a_{22}^4} + 216a_{11}^6 a_{21}^3 a_{41} - 2016a_{01} a_{11}^4 a_{21}^4 \\
& a_{41} + 5632a_{01}^2 a_{11}^2 a_{21}^5 a_{41} - 4096a_{01}^3 a_{21}^6 a_{41} + 2592a_{11}^6 a_{20} a_{21} a_{22} a_{41} - \\
& 20736a_{01} a_{11}^4 a_{20} a_{21}^2 a_{22} a_{41} + 28672a_{01}^2 a_{11}^2 a_{20} a_{21}^3 a_{22} a_{41} + 16384a_{01}^3 a_{20} a_{21}^4 \\
& a_{22} a_{41} + 4608a_{01} a_{11}^4 a_{20}^2 a_{22} a_{41} - 204800a_{01}^2 a_{11}^2 a_{20}^2 a_{21} a_{22}^2 a_{41} + 65536a_{01}^3 \\
& a_{20}^2 a_{21}^2 a_{22}^2 a_{41} - 262144a_{01}^3 a_{20}^3 a_{22}^3 a_{41} + 729a_{11}^8 a_{41}^2 - 7776a_{01} a_{11}^6 a_{21} a_{41}^2 + \\
& 27648a_{01}^2 a_{11}^4 a_{21}^2 a_{41}^2 - 38912a_{01}^3 a_{11}^2 a_{21}^3 a_{41}^2 + 24576a_{01}^4 a_{21}^4 a_{41}^2 - 55296a_{01}^2 \\
& a_{11}^4 a_{20} a_{22} a_{41}^2 + 122880a_{01}^3 a_{11}^2 a_{20} a_{21} a_{22} a_{41}^2 + 65536a_{01}^4 a_{20} a_{21}^2 a_{22} a_{41}^2 + \\
& 393216a_{01}^4 a_{20}^2 a_{22}^2 a_{41}^2 - 13824a_{01}^3 a_{11}^4 a_{41}^3 + 73728a_{01}^4 a_{11}^2 a_{21} a_{41}^3 - 65536 \\
& a_{01}^5 a_{21}^2 a_{41}^3 - 262144a_{01}^5 a_{20} a_{22} a_{41}^3 + 65536a_{01}^6 a_{41}^4.
\end{aligned}$$

La mínima valuación de los términos en el \mathcal{A} -discriminante se alcanza para cualquier elección de coeficientes a_{ij} (con las debidas valuaciones dados por los coeficientes de f), en los cinco monomios subrayados del \mathcal{A} -discriminante. Observemos que tres de esos monomios $a_{01}^2 a_{20}^2 a_{21}^4 a_{22}^2$, $a_{01}^2 a_{20} a_{21}^6 a_{22}$ y $a_{01}^2 a_{20}^3 a_{21}^2 a_{22}^3$ pertenecen a la cápsula convexa de los otros dos: $a_{01}^2 a_{21}^8$ y $a_{01}^2 a_{20}^4 a_{22}^4$. Con esto, los exponentes de los monomios del \mathcal{A} -discriminante donde el mínimo se alcanza pertenecen a un eje, y el vector de coeficientes de f pertenece a una celda maximal de la tropicalización de la variedad del \mathcal{A} -discriminante. Los puntos singulares de esta curva son $(3, 0)$ y $(-1, 0)$ (ver la Figura 6.7). Dos levantamientos de la curva y los puntos singulares son: $t^7 x^4 y + x^2 y^2 + (-3t^{13} + t - 2)x^2 y + x^2 + (2t^{16} - 2t^4)xy + t^7 y$ con una singularidad en $(t^3, 1)$, y $t^7 x^4 y + x^2 y^2 + (t^9 - 3t^5 - 2)x^2 y + x^2 + (-2t^8 + 2t^4)xy + t^7 y$ con una singularidad en $(1/t, 1)$.

6.5. Dimensión de celdas de $\mathcal{T}(f)$ con todos sus puntos singulares

Para finalizar este capítulo, y el presente trabajo, enunciaremos (y probaremos) el Teorema 1.1 de [MMS2], que relaciona la codimensión

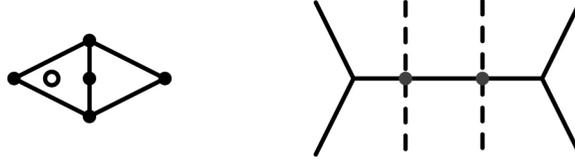


FIGURA 6.7. Subdivisión marcada del polígono de Newton y curva singular del Ejemplo 6.4.5 (en trazo continuo), y $\mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial(w_1-2)}\right)$ (punteado).

del cono del abanico secundario a la que pertenece la subdivisión de una hipersuperficie tropical singular, con la dimensión de las celdas con todos sus puntos singulares de la hipersuperficie. Los resultados de este Teorema se basan en las implicancias del Teorema 6.4.1 [DFS, 1.1].

Para esto vamos a necesitar ciertas definiciones previas, recordando que consideramos al abanico secundario en el espacio $\mathbb{R}^s/(1, \dots, 1)$, donde $s = \#\mathcal{A}$, y que notamos por \tilde{A} a la matriz que tiene por columnas a los vectores $(1, i)$ donde $i \in \mathcal{A}$ y por A a la matriz que tiene por columnas a los vectores $i \in \mathcal{A}$.

Definición 6.5.1. Para un punto $u \in \mathbb{R}^s/(1, \dots, 1)$, notaremos con $C(u)$ al único cono del abanico secundario tal que u pertenece al interior relativo de dicho cono. Observar que si S es el espacio de linealidad del abanico secundario, luego $C(u + s) = C(u)$ para todo $s \in S$.

Llamaremos *defectiva* a una clase de peso $C \subseteq \text{Trop}(\ker(\tilde{A}))$ si existe un punto $u \in C + S$ con $\dim(C + S) < \dim(C(u))$.

Observación 6.5.2. Si C es una clase de peso y $u \in C$ es tal que $C(u)$ tiene codimensión uno en el abanico secundario, C es defectiva sii $\langle C \rangle \cap S \neq 0$, donde $\langle C \rangle$ es el mínimo espacio lineal que contiene a la clase de peso C .

Asumamos que C es una clase de peso no-defectiva. Con esto, $C + S$ está contenido en conos del abanico secundario de dimensión menor o igual a $\dim(C + S)$. El conjunto de todos los puntos $u \in C$ tales que $\dim(C + S) > \dim(C(u))$ es claramente de dimensión menor a la de C .

Definición 6.5.3. Un punto $p \in \mathcal{B}^*(\tilde{A}) + S \subseteq \mathbb{R}^s/(1, \dots, 1)$ en el \mathcal{A} -discriminante tropical se dirá *genérico* si **no** puede ser escrito como $p = u + s$ donde $s \in S$ es un punto del espacio de linealidad del

abanico secundario, y $u \in C$ es un punto en una clase de peso en $\mathcal{B}^*(\tilde{A}) = \text{Trop}(\ker(\tilde{A}))$ tal que C es defectiva, o no es de máxima dimensión en $\text{Trop}(\ker(\tilde{A}))$, o $\dim(C + S) > \dim(C(u))$. Una hipersuperficie definida por un polinomio f tal que su vector de coeficientes es un punto genérico, será llamada una *hipersuperficie tropical singular genérica*.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el Teorema 1.1 de [MMS2]:

Teorema 6.5.1. *Sea f un polinomio tropical definiendo una hipersuperficie tropical singular genérica. Asumamos que la subdivisión marcada coherente inducida por f corresponde a un cono de dimensión c en el abanico secundario. Luego el conjunto de puntos singulares de $\mathcal{T}(f)$ es una unión de finitos poliedros de dimensión $c - 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea p un punto genérico en el \mathcal{A} -discriminante tropical. Se sigue de la definición de genericidad que podemos escribir a p como una suma $u + s$ con $u \in \mathcal{B}^*(\tilde{A}) = \text{Trop}(\ker(\tilde{A}))$ y $s \in S$. Podemos suponer que la clase de peso C de $\text{Trop}(\ker(\tilde{A}))$ que contiene a u en su interior relativo es de dimensión máxima y satisface que $\dim(C + S) = \dim(C(u))$. Supongamos que $C(u) = C(p)$ es un cono de codimensión c del abanico secundario. Notemos que la representación de p como una suma como la anterior no es única. Primero, podría haber distintas clases de peso C en $\text{Trop}(\ker(\tilde{A}))$ con las que podamos escribir a p como la suma de un vector en C y un vector en S . Segundo, aún si fijásemos un cono C , podría seguir habiendo distintas representaciones de p como la suma de un vector en ese C y un vector en S . Por ahora fijemos una clase de peso C que nos permita tener una representación de p como $p = u + s$ con $u \in C$ y $s \in S$.

Por el Teorema de Bieri-Groves (ver demostración en [BG]), podemos afirmar que $\dim(\text{Trop}(\ker(\tilde{A}))) = \dim(\ker(\tilde{A})) = s - 1 - (d + 1)$ por ser \tilde{A} de rango máximo. Como $u \in C$ pertenece a una clase de peso máximo dimensional, tenemos que

$$\begin{aligned} \dim(C + S) &= \dim(C) + \dim(S) - \dim(\langle C \rangle \cap S) \\ &= [s - 1 - (d + 1)] + d - \dim(\langle C \rangle \cap S) \\ &= \dim(C(u)) = s - 1 - c. \end{aligned}$$

Se sigue que $\dim(\langle C \rangle \cap S) = c - 1$. Con esto existe un poliedro $H \subset C$, de dimensión $c - 1$, tal que para todo $h \in H$ tenemos que $u + h \in C$. De esta manera podemos escribir a u también como $u = (u + h) - h$, donde el primer sumando está en C y el segundo está en S . Consecuentemente, podemos escribir $p = (u + h) + (s - h)$ y esas son las únicas posibilidades de representar a p como la suma de un vector en la clase de peso $C \subseteq \mathcal{B}^*(\tilde{A})$ y un vector en S . Esto se debe a que si tenemos otra forma de escribir a $p = c + s' = u + s$ bajo esas mismas condiciones, luego $c = u + (s - s')$ con $u \in C$ y $s - s' \in S$ (por ser un espacio lineal). Si $s - s' \notin \langle C \rangle$, resultaría $\dim(C + S) > \dim(C(u)) = \dim(C(c))$, contradiciendo que $\dim(C(u))$ es máxima. Con todo esto nos queda $s - s' \in \langle C \rangle \cap S$, resultando $s - s' = h \in H$, como queríamos.

Por el Colorario 6.4.2 tenemos que si $f = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} p_i \odot w^i$, los puntos singulares de $\mathcal{T}(f)$ son los puntos $q \in \mathbb{R}^d$ que cumplen la condición $p + q \cdot A \in \mathcal{B}^*(\tilde{A})$. Del párrafo anterior podemos inferir que f define una hipersuperficie tropical que es singular en todos los puntos x_{H-s} , donde x_{H-s} denota la preimagen del conjunto $H - s$ por la transformación lineal biyectiva que asigna $x \in \mathbb{R}^d$ a $v(x) = x \cdot A$. Como v^{-1} manda al poliedro $H - s$ de dimensión $c - 1$ a otro poliedro de la misma dimensión, se sigue que todos los puntos singulares de la hipersuperficie $\mathcal{T}(f)$ que obtenemos descomponiendo a p como la suma de un vector en C y un vector en S pertenecen a un poliedro de dimensión $c - 1$. Como vimos antes pueden haber distintas (pero finitas) clases de peso C en $\mathcal{B}^*(\tilde{A}) = \text{Trop}(\ker(\tilde{A}))$ tales que podemos escribir a p como la suma de un vector en C y un vector en S , y de todo esto se sigue que el conjunto de puntos singulares de la hipersuperficie tropical $\mathcal{T}(f)$ es una unión finita de poliedros de dimensión $c - 1$. \square

Bibliografía

- [AK] F. Ardila y C. J. Kilvans. *The Bergman complex of a matroid and phylogenetic trees*, J. Combin. Theory Ser. B, 96(1):38-49, 2006.
- [AM] M.F. Atiyah y I.G. Macdonald, 1980. *Introducción al Álgebra Conmutativa*, Reverté.
- [BG] R. Bieri y J. R. J. Groves. *The geometry of the set of characters induced by valuations*. J. Reine Angew. Math., 347:168-195, 1984.
- [BGW] A. Borovik, I. M. Gelfand y N. White *Coxeter Matroids*, Progress in Mathematics 216, Birkhäuser Boston, 2003.
- [BJSST] T. Bogart, A. N. Jensen, D. Speyer, B. Sturmfels, y R. R. Thomas. *Computing tropical varieties*, J. Symbolic Comput., 42(1-2):54-73, 2007.
- [CLO] D. Cox, J. Little y D. O’Shea. *Ideals, varieties and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
- [DFS] A. Dickenstein, E. M. Feichtner y B. Sturmfels. *Tropical Discriminants*, J. Amer. Math. Soc., 20(4):1111-1133, 2007.
- [DT] A. Dickenstein y L. F. Tabera. *Singular Tropical Hypersurfaces*, Discrete & Computational Geometry. DOI: 10.1007/s00454-011-9364-6. arXiv:1012.5812v2.
- [EKL] M. Einsiedler, M.M. Kapranov, y D. Lind, *Non-archimedean amoebas and tropical varieties*, J. Reine Angew. Math. 601(2006), 139-157.
- [FS] E. M. Feichtner y B. Sturmfels. *Matroid polytopes, nested sets and Bergman fans*, Port. Math. (N.S.) 62 (2005), no. 4, 437-468
- [GKZ] I.M. Gelfand, M.M.Kapranov y A.V. Zelevinsky, 1994. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*, Birkhäuser Boston Inc.
- [M] G. Mikhalkin, 2005. *Enumerative Tropical Geometry in \mathbb{R}^2* , J. Amer. Math Soc., 18:313-377, arXiv:math.AG/0312530
- [Mi] G. Mikhalkin. *Enumerative tropical geometry in \mathbb{R}^2* , J. Amer. Math. Soc., 18:313/377, 2005. arXiv:math.AG/0312530.

- [MMS] H. Markwig, T. Markwig y E. Shustin. *Tropical curves with a singularity in a fixed point*. Manuscripta Mathematica (30 June 2011), pp. 1-36. doi:10.1007/s00229-011-0471-8. arXiv:0909.1827, 2009.
- [MMS2] H. Markwig, T. Markwig y E. Shustin. *Tropical surface singularities*. arXiv:1106.2676.
- [Os] D. Ochse. *The relation between the tropical A-discriminant and the secondary fan*, 2009.
- [Ox] J. Oxley. *Matroid Theory*, Oxford University Press, New York, 1992.
- [R] F. Rincón. *Computing Tropical Linear Spaces*. arXiv:1109.4130. Software TropLi disponible en: <http://math.berkeley.edu/felipe/tropli/>.
- [S] B. Sturmfels. *Solving systems of polynomial equations*, volume 97 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 2002.
- [T] L. F. Tabera. *Constructive proof of extended Kapranov Theorem*, arXiv:0810.4907v1 [math.AC].
- [T2] L. F. Tabera. *Tropical plane geometric constructions: a transfer technique in tropical geometry*. rev. Mat. Iberoamericanam 27(1): 181-232, 2011.
- [W] R.J. Walker, 1950. *Algebraic Curves*, Springer-Verlag.
- [Wh] N. White *Theory of Matroids*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 26, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.