



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Estimaciones de error a priori y a posteriori para la versión hp
del método de elementos finitos

Verónica Moreno

Directora: Dra. María Gabriela Armentano

Marzo 2010

Agradecimientos

A mi directora, María Gabriela Armentano, primero por ser tan buena docente y hacer que me guste tanto el análisis numérico, en especial el tema en el que estamos trabajando. Por ser una excelente directora y persona, por la cantidad de horas dedicada a mis consultas, por ayudarme tanto con mis tristes redacciones. Y por sobre todas las cosas, por el esfuerzo para que esto sea posible antes del primero de abril.

A mi familia por bancarme en los momentos mas tensos de la carrera, a mis papas Franca y Marcos por adelantarme el regalo con el que estoy haciendo este trabajo. A mis hermanos Lucila, Carolina, Pilar, Franquita y Marquitos. A Marto y Lucila por prestarme su internet!

A Fer, la persona mas importante en mi vida, por alentarme siempre, por ocuparte de todas las tareas domésticas cuando yo tengo que estudiar. Te amo feo. Le quiero agradecer también a su familia por ponerse tan contentos con cada una de mis materias aprobadas.

A mis amigas de toda la vida, Jose, Guada, Flor, Dani, Luli, Lu y Bel. Por entender todos mis faltazos porque tenía que estudiar.

A mis amigos de la facu, en especial a Mateo, Ale y Yanu, por escuchar y compartir ideas. Por hacer que los fines de semana de estudio sean divertidos.

A las personas que les debo todo lo que aprendí: los profesores, en especial a Esteban Andruchow, Julio Rossi, Alejandro Petrovich, Marcela Almeida, Pablo Solernó, María Gabriela Armentano, Malena Becker, Victoria Paternostro, Daniel Galicer, Lisi D'Alfonso, Susana Puddu, Ignacio Ojea, Mariela Sued, María Eugenia Szretter, Daniela Rodriguez, Daniel Gorin, Julián Fernández Bonder, Manuel Maurette, Javier Etcheverry.

Quiero agradecer especialmente a Mario Scheble por su invaluable ayuda con los ejemplos numéricos.

Contents

Introducción	5
Chapter 1. La versión <i>hp</i> de método de elementos finitos	7
1. Planteo del problema	7
2. El método de aproximación	9
3. El error de aproximación del método <i>hp</i>	11
Chapter 2. Estimaciones de Error a posteriori	23
2. Resultados técnicos	24
3. Indicador local del error	38
Chapter 3. Experimentos numéricos	51
1. Estrategia de refinamiento adaptativo	51
2. Ejemplos Numéricos	53
Bibliography	65

Introducción

Uno de los métodos mas usados para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales es el método de elementos finitos, cuya aplicación se ha extendido a prácticamente todos los campos en los que se utilizan modelos basados en ecuaciones diferenciales.

En la forma más habitual del método de elementos finitos, llamada “versión h ”, se considera una partición en triángulos o cuadriláteros del dominio donde está planteada la ecuación diferencial, y se aproxima la solución de la ecuación diferencial (dada en su forma débil) por una función restringida a cada triángulo o cuadrilátero es un polinomio de grado fijo, con el propósito de ir mejorando la aproximación a medida que la partición se hace mas fina, i.e, el tamaño de la malla tiende a cero (ver, por ejemplo, [13, 14]). Desde hace unos años otras variantes del método de elementos finitos, llamadas “versión p ” y “versión hp ”, cobraron interés. En la “versión p ” la malla se mantiene fija mientras se busca mejorar la aproximación aumentando el grado del polinomio en cada triángulo o cuadrilátero (ver [9]). En la llamada “versión hp ”, que estudiaremos en esta tesis, se admiten ambas opciones, es decir, refinar la malla y/o ir aumentando el grado del polinomio (ver, por ejemplo, [8, 9]).

Para mejorar la eficiencia y la confiabilidad de los métodos numéricos, y en particular de los métodos de elementos finitos en cualquiera de sus variantes, es fundamental el análisis del error de aproximación. Las estimaciones de error se dividen basicamente en dos tipos: las “a priori” y las “a posteriori”. Las primeras tienen como objetivo demostrar la convergencia de los métodos, obtener el orden del error y determinar de que depende el error (ver, por ejemplo, [13, 14] para la versión h y [9] para las versiones p y hp). En cambio, las estimaciones “a posteriori” tienen como objetivo dar información cuantitativa del error y son la base de los métodos adaptativos o de refinamiento automático de mallas (ver [1, 22] para la versión h y [2, 20] para la versión p y hp).

Los procesos adaptativos basados en indicadores a posteriori del error juegan actualmente un rol muy relevante en la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Para la versión h del método de elementos finitos existen numerosos trabajos concernientes al desarrollo de estimadores de error y métodos adaptativos eficientes para una amplia gama de problemas (ver, por ejemplo, [1, 4, 15, 16, 22] y sus referencias). Sin embargo la bibliografía sobre esquemas adaptativos para la versión hp es aún muy escasa y presenta varios interrogantes aún en los problemas más sencillos (ver, por ejemplo, [2, 3, 20, 21] y sus referencias). Una de las principales dificultades

de la adaptatividad hp reside en que la aproximación puede ser mejorada de dos formas diferentes, subdividiendo los elementos o incrementando el grado del polinomio.

En el primer capítulo de este tesis, vamos a introducir la versión hp del método de elementos finitos para el problema modelo de Poisson, y siguiendo los trabajos de Babuska y Suri [8, 9] presentaremos un análisis a priori del error que nos va a permitir garantizar la convergencia del método y el orden del mismo.

Por otro lado, en el capítulo 2 vamos a presentar las estimaciones a posteriori del error. Mostraremos un indicador local del error de tipo residual el cual puede ser calculado localmente utilizando la solución obtenida numericamente [20]. Analizaremos la equivalencia de este estimador con la norma energía del error. En particular, probaremos la fiabilidad global y la eficacia local, ambas salvo terminos de mayor orden, la última con una constante que lamentablemente depende del grado del polinomio en cada elemento. Es importante señalar que hasta el momento, estimaciones de fiabilidad y eficiencia con constantes independientes del grado del polinomio no han sido aún obtenidas para ningún estimador de error para el método hp . Sin embargo, los experimentos numéricos sugieren que el estimador propuesto indica correctamente los elementos con mayor error.

Por último en el capítulo 3, presentamos un algoritmo hp adaptativo y un ejemplo de su aplicación al problema modelo estudiado en los capítulos previos. El problema principal en adaptatividad hp es decidir si, en aquellos elementos marcados mediante el indicador local del error propuesto en el capítulo 2, refinar h o p en cada elemento marcado para ser refinado. Muchas estrategias de refinamiento hp están basadas en estimar explícitamente la regularidad local de la solución, ver por ejemplo [2, 3, 12]. Nosotros seguiremos la estrategia dada por Wolmuth y Melenk en [20], que está basada en la comparación del estimador del error actual de un elemento con un predictor del error obtenido en un paso anterior.

Concluimos la tesis presentando varios ejemplos numéricos que muestran la buena performance del algoritmo propuesto.

CHAPTER 1

La versión *hp* de método de elementos finitos

En este capítulo introduciremos la versión *hp* del método de elementos finitos para un problema modelo y presentaremos las estimaciones de error a priori las cuales, permiten establecer no solo la convergencia del método sino también el orden del mismo.

1. Planteo del problema

Consideremos el siguiente problema modelo: Hallar una función u que cumpla:

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio poligonal, Γ es el borde de Ω , y $f \in L^2(\Omega)$.

Dado un conjunto $D \subseteq \Omega$, denotaremos por $\|\cdot\|_{m,D}$, y $|\cdot|_{m,D}$ las normas y seminormas, respectivamente, en los espacios de Sobolev $H^m(D)$, esto es funciones de $L^2(D)$ con derivada distribucional hasta el orden m en $L^2(D)$. En todos los casos omitiremos el D cuando no resulte necesario explicitarlo. Por $H_0^1(D)$ entenderemos el espacio de funciones en $H^1(D)$ con traza nula.

El Problema Variacional asociado a (1.1.1) es encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ que cumpla:

$$(1.1.2) \quad a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\text{donde } a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{y} \quad L(v) = \int_{\Omega} f v$$

Veamos ahora que el Problema Variacional tiene única solución, para ver esto vamos a usar el Teorema de Lax Milgram. Para ello recordemos antes algunas definiciones: Sea H un espacio de Hilbert y sea $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$:

Definición: a es **bilineal** si cada una de las aplicaciones

$$\begin{aligned} v &\rightarrow a(u, v) \\ u &\rightarrow a(u, v) \end{aligned}$$

es lineal de $H \rightarrow \mathbb{R}$

Definición: a es **continua** si existe una constante C tal que $|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H$

Definición: a es **coercitiva** si existe una constante $K > 0$ tal que $a(v, v) \geq K\|v\|_H^2 \forall v \in H$

TEOREMA 1.1. *Teorema de Lax Milgram*

Sea H un espacio de Hilbert y sea $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coercitiva. Entonces para toda $L \in H'$ existe una única $u \in H$ tal que:

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H$$

donde $H' = \{f : H \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es lineal y acotada}\}$.

Sabemos que H_0^1 es un espacio de Hilbert, entonces por el teorema de Lax Milgram, para probar la existencia y unicidad del Problema Variacional, basta ver que $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ es una forma bilineal, continua y coercitiva en H_0^1 y que $L : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}, L(v) = \int_{\Omega} f v \in (H_0^1)'$

Es claro que a es bilineal dado que integrar y derivar son operaciones lineales. Para ver que es continua notemos que:

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v|$$

y usando la desigualdad de Hölder resulta

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2$$

y como $\|\nabla u\|_2 \leq \|u\|_H$ concluimos que a es continua con constante igual a 1.

Ahora debemos ver que a es coercitiva. Para ello vamos a hacer uso de la siguiente Desigualdad de Poincaré.

TEOREMA 1.2. *Desigualdad de Poincaré*

Sea Ω un dominio Lipschitz y $u \in H_0^1(\Omega)$ entonces, $\exists C > 0 : \|u\|_2 \leq C \|\nabla u\|_2$

Luego,

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \|\nabla u\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 \end{aligned}$$

y usando ahora la desigualdad de Poincaré tenemos que:

$$a(u, u) \geq \frac{1}{2} \frac{1}{C} \|u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2$$

Tomando $K = \min(\frac{1}{2} \frac{1}{C}, \frac{1}{2})$ nos queda:

$$a(u, u) \geq K(\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2) = K\|u\|_H^2$$

donde $H = H_0^1(\Omega)$.

Por otro lado, es claro que $L : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}, L(v) = \int_{\Omega} f v \in (H_0^1)'$

Por lo tanto queda demostrada la existencia y unicidad de solución del Problema Variacional.

2. El método de aproximación

Vamos a considerar un subespacio $\mathbb{V}$ de H_0^1 de dimensión finita y vamos a buscar la solución del siguiente problema: (Problema Variacional Discreto)
encontrar $u \in \mathbb{V}$ que cumpla:

$$(1.2.3) \quad a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

donde $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ y $L(v) = \int_{\Omega} f v$.

Veamos que este problema variacional discreto también tiene única solución. Para ver esto notemos primero que al ser $\mathbb{V}$ de dimensión finita es un subespacio cerrado, por lo tanto también es un espacio de Hilbert. Las propiedades de bilinealidad, continuidad y coercitividad las heredan cualquier subespacio del espacio H que estemos considerando. Por lo tanto $\mathbb{V}$ es un espacio de Hilbert y $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ es un operador bilineal, continuo y coercitivo en $\mathbb{V}$. También vale que $L : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}, L(v) = \int_{\Omega} f v \in (\mathbb{V})'$. En consecuencia, por el Teorema de Lax Milgram queda demostrado que el Problema Variacional Discreto tiene única solución.

Nuestra aproximación va a ser la solución de (1.2.3), que la notamos u_{FE} .

El problema ahora es como elegir el subespacio $\mathbb{V}$ y como “refinarlo” para que las aproximaciones sean “mejores”.

Elección del subespacio $\mathbb{V}$.

Sean:

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega} &= \sup\{\text{diam}(B) : B \text{ es una bola en } \Omega\} \\ h_{\Omega} &= \text{diam}(\Omega) \end{aligned}$$

Notamos por $\mathcal{P}_p(\Omega)$ al conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a p y por $\mathcal{Q}_p(\Omega)$ al conjunto de todos los polinomios que en cada variable tiene grado menor a igual a p .

Sea $\mathcal{T} = \{K\}$, donde $K \subset \Omega$ es un triángulo o un paralelogramo abierto. Decimos que $\mathcal{T}$ es una malla (usualmente llamada triangulación cuando K es un triángulo) si $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}} \overline{K}$ y cada par $K_1, K_2 \in \mathcal{T}$ elementos distintos, tienen en común un lado entero, un vértice o tienen intersección vacía.

Sea $\mathcal{M} = \{\mathcal{T}^h\}, h \geq 0$ una familia de mallas: $\mathcal{T}^h = \{K\}$ donde el parámetro h mide el “tamaño” de la malla, i.e.,

$$(1.2.4) \quad h = \max(h_K : K \in \mathcal{T}^h, \mathcal{T}^h \in \mathcal{M})$$

Vamos a suponer que la familia $\{\mathcal{T}^h\}$ es regular, o sea, existen constantes σ, τ independientes de h tal que

$$(1.2.5) \quad \frac{h}{h_K} \leq \tau$$

$$(1.2.6) \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$$

Definimos los elementos de referencia $\widehat{K}$, que puede ser $\widehat{K} = Q = (0, 1)^2$ o $\widehat{K} = T = \{(x_1, x_2) | 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 - x_1\}$. Sea F_K una transformación afín que manda $\widehat{K}$ en K , donde $\widehat{K} = Q$ si K es un paralelogramo, o $\widehat{K} = T$ si K es un triángulo.

Notamos a $\mathcal{V}_p^h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ al conjunto de funciones u que satisfacen que si u_K es la restricción de u a $K \in \mathcal{T}^h$, entonces cumple que $u_K \circ F_K \in \mathcal{Q}_p(Q)$ si K es un paralelogramo, $u_K \circ F_K \in \mathcal{P}_p(T)$ si K es un triángulo.

Vamos a elegir $\mathbb{V} = \mathcal{V}_p^h(\Omega)$. La versión hp del método de elementos finitos consiste en, para p y h fijos, encontrar $u_p^h \in \mathcal{V}_p^h(\Omega)$ tal que:

$$(1.2.7) \quad a(u_p^h, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_p^h(\Omega)$$

donde $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ y $L(v) = \int_{\Omega} f v$

Observemos que la dimensión de $\mathcal{V}_p^h(\Omega)$ es finita, y por lo dicho anteriormente hay un única solución de (1.2.7). La idea es entonces construir una sucesión de espacios $\mathcal{V}_p^h$ obtenidos ya sea por “refinamiento de la malla” (i.e, disminuir el valor de h) o por aumentar el grado del polinomio aproximante en cada elemento (i.e. aumentar el valor de p) de forma tal que la respectiva sucesión de soluciones de (1.2.7) converja a la solución del problema variacional (1.1.2) cuando $h \rightarrow 0$ o $p \rightarrow +\infty$.

3. El error de aproximación del método hp

En esta sección presentaremos las estimaciones a priori del error del método *hp* de elementos finitos siguiendo los resultados de Babuska & Suri [6, 7, 8].

Primero vamos a presentar algunos resultados previos que utilizaremos para llevar a cabo nuestras estimaciones.

LEMA 3.1. *Sea $\widehat{K} = Q$ o $\widehat{K} = T$ el cuadrado o triángulo de referencia. Sea $\mathcal{R}_p(\widehat{K}) = \mathcal{Q}_p(\widehat{K})$ si $\widehat{K} = Q$ o $\mathcal{R}_p(\widehat{K}) = \mathcal{P}_p(\widehat{K})$ si $\widehat{K} = T$. Sea $u \in H^k(\widehat{K})$, $k \geq 0$.*

Entonces existe una familia de operadores $\{\hat{\pi}_p\}$, $p = 1, 2, 3, \dots$, $\hat{\pi}_p : H^k(\widehat{K}) \rightarrow \mathcal{R}_p(\widehat{K})$ tal que para todo $0 \leq q \leq k$

$$(1.3.8) \quad \|u - \hat{\pi}_p u\|_{q, \widehat{K}} \leq Cp^{-(k-q)} \|u\|_{k, \widehat{K}}$$

$$(1.3.9) \quad |(u - \hat{\pi}_p u)(x)| \leq Cp^{-(k-1)} \|u\|_{k, \widehat{K}} \quad k > 1, \quad x \in \widehat{K}$$

Observemos que tiene sentido evaluar a u , pues dado que $\widehat{K}$ es Lipschitz, $n = 2$, $p = 2$ y $k > 1$, entonces vale el Teorema de Inmersión de Sobolev, por lo cual u tiene representante continuo.

La constante en (1.3.8) y (1.3.9) es independiente de u y de p , pero depende de k .

Más aún, si $u \in \mathcal{R}_p(\widehat{K})$, entonces $\hat{\pi}_p(u) = u$

Demostración: La demostración de este Lema es una adaptación de la demostración dada en [6]. Acá vamos a dar una idea de la demostración.

Sea $r_0 > 1$ que cumpla que $\widehat{K} \subset R(r_0)$, donde

$$R(r_0) = \{(x_1, x_2) | |x_1| \leq r_0, |x_2| \leq r_0\}$$

Como $\widehat{K}$ es un dominio Lipschitz, existe un operador de extensión T que manda $H^k(\widehat{K})$ en $H^k(R(2r_0))$ tal que

$$(1.3.10) \quad Tu = 0 \text{ en } R(2r_0) - R\left(\frac{3}{2}r_0\right)$$

$$\|Tu\|_{k, R(2r_0)} \leq C \|u\|_{k, \widehat{K}}$$

La constante C es independiente de u .

Sea Φ una función biyectiva de $R(\frac{\pi}{2})$ en $R(2r_0)$:

$$R(2r_0) \ni (x_1, x_2) = \Phi(\xi_1, \xi_2) = (2r_0 \sin \xi_1, 2r_0 \sin \xi_2)$$

Tenemos:

$$(1.3.11) \quad \tilde{R} = \Phi^{-1}[R(\frac{3}{2}r_0)] \subset R(\frac{\pi}{2})$$

donde Φ^{-1} es la función inversa de Φ .

Sea $v = Tu$ y

$$V(\xi) = v(\Phi(\xi))$$

Por (1.3.10) y (1.3.11), se ve fácilmente que

$$\text{Soporte de } V(\xi) \subset \widetilde{R}$$

Como

$$V(\xi_1, \xi_2) = v(\Phi(\xi_1, \xi_2)) = v(2r_0 \sin \xi_1, 2r_0 \sin \xi_2)$$

podemos desde su defición extenderla periodicamente de manera natural y en consecuencia podemos asumir que

$$V \in H_{PER}^k(R(\pi))$$

donde $H_{PER}^k(R(\kappa))$ denota las funciones de $H^k(R(\kappa))$ que tienen período 2κ . Usando (1.3.10) se tiene que

$$\|V\|_{k, R(\pi)} \leq C \|u\|_{k, \widehat{K}}$$

notemos que $V(\xi)$ es una función simétrica con respecto a las lineas $\xi_i = \pm \frac{\pi}{2}, i = 1, 2$

Expandamos V en su serie de Fourier

$$V(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} a_{j,l} e^{i(j\xi_1 + l\xi_2)}$$

Para cualquier $p \geq 1$ definimos:

i) para $\widehat{K} = Q$

$$\hat{\pi}_p V = \sum_{|j| \leq p} \sum_{|l| \leq p} a_{j,l} e^{i(j\xi_1 + l\xi_2)}$$

ii) para $\widehat{K} = T$

$$\hat{\pi}_p V = \sum_{|j|+|l| \leq p} a_{j,l} e^{i(j\xi_1 + l\xi_2)}$$

Luego, utilizando estimaciones de error para desarrollos de Fourier (ver [6] para más detalles) obtenemos, para $0 \leq q \leq k$, que:

$$\|V - \hat{\pi}_p V\|_{q, R(\pi)} \leq Cp^{-(k-p)} \|u\|_{k, \hat{K}}$$

$$|(V - \hat{\pi}_p V(\xi))| \leq Cp^{-(k-1)} \|u\|_{k, \hat{K}}$$

La demostración del Lema concluye observando que: $(\hat{\pi}_p V)(\Phi^{-1}(x)) \in \mathcal{R}_p(\hat{K})$ y Φ es una función regular de $R(r_0)$ ($r_0 < \frac{\pi}{2}$) en $\hat{K}$. □

Enunciaremos ahora dos resultados, clásicos en la bibliografía de elementos finitos [14], que nos serán de utilidad para llevar a cabo nuestras estimaciones de error

LEMA 3.2. *Sean Ω y Ω^h dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal que existe una transformación afín $F(x) = B(x) + b$ de Ω en Ω^h tal que $F(\Omega) = \Omega^h$. Sean $\text{diam}(\Omega) = 1$, $\rho_\Omega = K$, $\text{diam}(\Omega^h) = h$, $\rho_{\Omega^h} = \bar{K}h$. Si $\hat{v} \in H^m(\Omega)$ con m entero, $m \geq 0$, entonces $v = \hat{v} \circ F^{-1} \in H^m(\Omega^h)$ y además:*

$$(1.3.12) \quad |v|_{m, \Omega^h} \leq Ch^{\frac{n}{2}-m} |\hat{v}|_{m, \Omega}$$

$$(1.3.13) \quad |\hat{v}|_{m, \Omega} \leq Ch^{m-\frac{n}{2}} |v|_{m, \Omega^h}$$

donde $|\cdot|_{m, \Omega}$ es la seminorma en $H^m(\Omega)$, o sea :

$$|u|_{m, \Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

La constante C depende de K y de $\bar{K}$ pero no de Ω , h y de v .

Para ver la demostración, ir al Teorema 3.1.2 de [14].

TEOREMA 3.1. *Existe una constante C tal que*

$$(1.3.14) \quad \forall v \in H^{k+1}(\Omega), \quad \inf_{p \in \mathcal{P}_k(\Omega)} \|v + p\|_{k+1, \Omega} \leq C|v|_{k+1, \Omega}$$

la cosntante C depende sólo de Ω .

Para ver la demostración ir al Teorema 3.1.1. de [14].

LEMA 3.3. *Sean Ω y Ω^h triángulos o paralelogramos, supongamos que satisfacen las condiciones del Lema (3.2). Entonces para cualquier $\hat{u} \in H^k(\Omega)$ y la correspondiente $u = \hat{u} \circ F^{-1} \in H^k(\Omega^h)$, $k \geq 0$, se cumple:*

$$(1.3.15) \quad \inf_{\hat{p} \in \mathcal{R}_p(\Omega)} \| \hat{u} - \hat{p} \|_{k,\Omega} \leq Ch^{\mu-1} \| u \|_{k,\Omega_h}$$

donde $\mu = \min(p+1, k)$ y C depende de $K, \bar{K}, k$ pero es independiente de p y de u .

Demostración: Observemos que estamos en el caso $n = 2$.

Primero demostraremos el caso $k = 0$: observemos que en este caso $\mu = k = 0$ y $|\cdot|_{k,\Omega} = \|\cdot\|_{k,\Omega}$. Tomando $\hat{p} = 0$, obtenemos

$$\inf_{\hat{p} \in \mathcal{R}_p(\Omega)} \| \hat{u} - \hat{p} \|_{k,\Omega} \leq \| \hat{u} \|_{k,\Omega} = |\hat{u}|_{k,\Omega}$$

y usando (1.3.13) tenemos que:

$$|\hat{u}|_{k,\Omega} \leq Ch^{k-1} |u|_{k,\Omega_h} = Ch^{k-1} \| u \|_{k,\Omega_h}$$

y recordando que $k = \mu$ obtenemos:

$$\inf_{\hat{p} \in \mathcal{R}_p(\Omega)} \| \hat{u} - \hat{p} \|_{k,\Omega} \leq Ch^{\mu-1} \| u \|_{k,\Omega_h}$$

Ahora consideramos el caso $k > 0$, con k un número entero :

Notemos primero que como $\mathcal{P}_p(\Omega) \subset \mathcal{Q}_p(\Omega)$ tenemos que

$$\inf_{\hat{p} \in \mathcal{Q}_p(\Omega)} \| \hat{u} - \hat{p} \|_{k,\Omega} \leq \inf_{\hat{p} \in \mathcal{P}_p(\Omega)} \| \hat{u} - \hat{p} \|_{k,\Omega}$$

Por ende basta demostrar el resultado para el caso $\mathcal{R}_p(\Omega) = \mathcal{P}_p(\Omega)$.

Por simple aplicación de la desigualdad triangular tenemos que:

$$\inf_{\hat{p} \in \mathcal{P}_p(\Omega)} \| \hat{u} - \hat{p} \|_{k,\Omega} \leq \inf_{\hat{p} \in \mathcal{P}_p(\Omega)} \left\{ \| \hat{u} - \hat{p} \|_{\mu,\Omega} + \sum_{i=\mu+1}^k |\hat{u}|_{i,\Omega} + \sum_{i=\mu+1}^k |\hat{p}|_{i,\Omega} \right\}$$

donde $\sum_{i=\mu+1}^k = 0$ si $k < \mu + 1$.

Veamos ahora que $\sum_{i=\mu+1}^k |\hat{p}|_{i,\Omega} = 0$

i) Si $\mu = k$ entonces $k < \mu + 1$ y $\sum_{i=\mu+1}^k = 0$

ii) Si $\mu \neq k$ entonces $\mu = p + 1$ y como $\hat{p} \in \mathcal{P}_p(\Omega)$ resulta que $|\hat{p}|_{i,\Omega} = 0$ para $i \geq p + 1$ y en consecuencia $|\hat{p}|_{i,\Omega} = 0$ para $i \geq \mu + 1$.

Entonces llegamos a:

$$\begin{aligned} \inf_{\hat{p} \in \mathcal{P}_p(\Omega)} \| \hat{u} - \hat{p} \|_{k,\Omega} &\leq \inf_{\hat{p} \in \mathcal{P}_p(\Omega)} \left\{ \| \hat{u} - \hat{p} \|_{\mu,\Omega} + \sum_{i=\mu+1}^k |\hat{u}|_{i,\Omega} \right\} \\ &= \inf_{\hat{p} \in \mathcal{P}_p(\Omega)} \{ \| \hat{u} - \hat{p} \|_{\mu,\Omega} \} + \sum_{i=\mu+1}^k |\hat{u}|_{i,\Omega} \end{aligned}$$

Si $\mu = 0$, estamos en el caso $k = 0$ analizado antes. Si $\mu \geq 1$, desde su definición es claro que $\mu - 1 \leq p$ y por ende

$$\mathcal{P}_{\mu-1}(\Omega) \subset \mathcal{P}_p(\Omega)$$

Luego,

$$\inf_{\hat{p} \in \mathcal{P}_p(\Omega)} \| \hat{u} - \hat{p} \|_{\mu,\Omega} \leq \inf_{\hat{p} \in \mathcal{P}_{\mu-1}(\Omega)} \| \hat{u} - \hat{p} \|_{\mu,\Omega}$$

y usando la inecuación (1.3.14)

$$\inf_{\hat{p} \in \mathcal{P}_{\mu-1}(\Omega)} \| \hat{u} - \hat{p} \|_{\mu,\Omega} \leq C |\hat{u}|_{\mu,\Omega}$$

por lo tanto:

$$\inf_{\hat{p} \in \mathcal{P}_p(\Omega)} \{ \| \hat{u} - \hat{p} \|_{\mu,\Omega} \} + \sum_{i=\mu+1}^k |\hat{u}|_{i,\Omega} \leq C \sum_{i=\mu}^k |\hat{u}|_{i,\Omega}$$

Luego, para cualquier valor de μ , tenemos:

$$(1.3.16) \quad \inf_{\hat{p} \in \mathcal{P}_p(\Omega)} \| \hat{u} - \hat{p} \|_{k,\Omega} \leq C \sum_{i=\mu}^k |\hat{u}|_{i,\Omega}$$

ahora, usando la inecuación (1.3.13) en el lado derecho de (1.3.16) obtenemos

$$\inf_{\hat{p} \in \mathcal{P}_p(\Omega)} \| \hat{u} - \hat{p} \|_{k,\Omega} \leq C \sum_{i=\mu}^k h^{i-1} |u|_{i,\Omega^h}$$

suponiendo que $h < 1$, tenemos que $h^{i-1} \leq h^{\mu-1}$ y usando que $|u|_{i,\Omega^h} \leq \| u \|_{k,\Omega^h}$, para $\mu \leq i \leq k$, resulta

$$\inf_{\hat{p} \in \mathcal{P}_p(\Omega)} \| \hat{u} - \hat{p} \|_{k,\Omega} \leq Ch^{\mu-1} \| u \|_{k,\Omega^h}$$

Quedando demostrado el Lema para k entero.

Para cualquier otro valor de k el resultado se obtiene por argumentos clásicos de interpolación. $\square$

LEMA 3.4. Sea K un triángulo o paralelogramo con vértices A_i que satisface las condiciones (1.2.4), (1.2.5) y (1.2.6), sea $h = \text{diam}(K)$. Sea $u \in H^k(K)$. Entonces existe una constante C que depende de k, τ, σ pero no depende de u, p, h y una secuencia $z_p^h \in \mathcal{R}_p(K)$ $p = 1, 2, \dots$ tal que para todo $0 \leq q \leq k$

$$(1.3.17) \quad \|u - z_p^h\|_{q,K} \leq C \frac{h^{\mu-q}}{p^{k-q}} \|u\|_{k,K}, \quad k \geq 0$$

$$(1.3.18) \quad |(u - z_p^h)(x)| \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{k-1}} \|u\|_{k,K}, \quad k > 1, \quad x \in K$$

$$\mu = \min(p+1, k)$$

Si $k > \frac{3}{2}$, entonces podemos asumir que $z_p^h(A_i) = u(A_i)$.

Más aún, para $t = \frac{1}{2}$

$$\|u - z_p^h\|_{t,\gamma} \leq C \frac{h^{\mu-t}}{p^{k-1}} \|u\|_{k,K}$$

donde $\|\cdot\|_{t,\gamma}$ denota la norma del espacio de interpolación $(H^0(\gamma), H_0^1(\gamma))$ con γ cualquier lado de K .

Demostración: Sea F_K la transformación afín de $\widehat{K}$ en K , donde $\widehat{K} = T$ o $\widehat{K} = Q$ según corresponda. Definimos $\hat{u} = u \circ F_K$, es claro que $\hat{u} \in H^k(\widehat{K})$.

Sea $\hat{\pi}_p : H^k(\widehat{K}) \rightarrow \mathcal{R}_p(\widehat{K})$ el operador introducido en el Lema 3.1. Definimos

$$\pi_p^h : H^k(K) \rightarrow \mathcal{R}_p(K)$$

como

$$\pi_p^h u = \hat{\pi}_p(\hat{u}) \circ F_K^{-1}$$

Sea $0 \leq q \leq k$, usando el Lema 3.1 tenemos que

$$\|\hat{u} - \hat{\pi}_p \hat{u}\|_{q,\widehat{K}} = \|(\hat{u} - \hat{p}) - \hat{\pi}_p(\hat{u} - \hat{p})\|_{q,\widehat{K}} \leq Cp^{-(k-q)} \|\hat{u} - \hat{p}\|_{k,\widehat{K}} \quad \forall \hat{p} \in \mathcal{R}_p(\widehat{K})$$

y en consecuencia

$$\|\hat{u} - \hat{\pi}_p \hat{u}\|_{q,\widehat{K}} \leq Cp^{-(k-q)} \inf_{\hat{p} \in \mathcal{R}_p(\widehat{K})} \|\hat{u} - \hat{p}\|_{k,\widehat{K}}$$

Ahora, usando el Lema 3.3 obtenemos

$$(1.3.19) \quad \|\hat{u} - \hat{\pi}_p \hat{u}\|_{q, \hat{K}} \leq Cp^{-(k-q)} h^{\mu-1} \|u\|_{k, K}$$

Sea $0 \leq m \leq q \leq k$, en virtud de la inecuación (1.3.12)

$$|u - \pi_p^h u|_{m, K} \leq Ch^{1-m} |\hat{u} - \hat{\pi}_p \hat{u}|_{m, \hat{K}}$$

Como $|\hat{u} - \hat{\pi}_p \hat{u}|_{m, \hat{K}} \leq \|\hat{u} - \hat{\pi}_p \hat{u}\|_{q, \hat{K}}$ podemos afirmar que

$$|u - \pi_p^h u|_{m, K} \leq Ch^{1-m} \|\hat{u} - \hat{\pi}_p \hat{u}\|_{q, \hat{K}}$$

usando ahora la inecuación (1.3.19) obtenemos:

$$|u - \pi_p^h u|_{m, K} \leq Ch^{1-m} p^{-(k-q)} h^{\mu-1} \|u\|_{k, K} = Ch^{\mu-m} p^{-(k-q)} \|u\|_{k, K}$$

y asumiendo que $h < 1$ resulta:

$$\begin{aligned} \|u - \pi_p^h u\|_{q, K} &\leq \sum_{m=0}^q |u - \pi_p^h u|_{m, K} \leq \sum_{m=0}^q Ch^{\mu-m} p^{-(k-q)} \|u\|_{k, K} \\ &\leq Ch^{\mu-q} p^{-(k-q)} \|u\|_{k, K} \end{aligned}$$

Análogamente, para $k > 1$ y $\hat{x} \in \hat{K}$ usando el Lema 3.1 y el Lema 3.3 resulta:

$$|(\hat{u} - \hat{\pi}_p \hat{u})(\hat{x})| \leq Cp^{-(k-1)} \inf_{\hat{p} \in \mathcal{P}_p(S)} \|\hat{u} - \hat{p}\|_{k, \hat{K}} \leq Cp^{-(k-1)} h^{\mu-1} \|u\|_{k, K}$$

Tomando $z_p^h = \pi_p^h$ se tiene (1.3.17) y (1.3.18).

Si $k > \frac{3}{2}$, modificamos z_p^h como está hecho en el Teorema 4.1 de [6]. Obtenemos $z_p^h(A_i) = u(A_i)$ y por interpolación :

$$\|u - z_p^h\|_{t, \gamma} \leq Ch^{\mu-t} p^{-(k-t)} \|u\|_{k, K}$$

donde γ es cualquier lado de K .

□

El siguiente resultado de extensión, cuya demostración se sigue de los Teoremas 7.4 y 7.5 del apéndice de [7], nos será de utilidad para llevar a cabo nuestras estimaciones.

LEMA 3.5. *Sea $\hat{K} = Q$ o $\hat{K} = T$ y sea $\gamma = \overline{A_1 A_2}$ un lado de $\hat{K}$. Sea $\psi \in \mathcal{R}_p(\gamma)$ tal que $\psi(A_i) = 0$ para $i = 1, 2$. Entonces existe una extensión $v \in \mathcal{R}_p(\hat{K})$ tal que $v = \psi$ en γ , $v = 0$ en $\partial\hat{K} \setminus \gamma$ y*

$$\|v\|_{1, \hat{K}} \leq C \|\psi\|_{\frac{1}{2}, \gamma}$$

donde la constante C es independiente de p y de ψ .

El siguiente Teorema constituye la herramienta fundamental para obtener las estimaciones a priori del error del método hp .

TEOREMA 3.2. Sea u la solución de (1.1.2), $u \in H^k(\Omega)$, $k > \frac{3}{2}$. Entonces para $p \geq 1$ y $h > 0$, existen $\varphi_p^h \in \mathcal{V}_p^h(\Omega)$ tal que

$$\|u - \varphi_p^h\|_{1,\Omega} \leq C \frac{h^{(\mu-1)}}{p^{(k-1)}} \|u\|_{k,\Omega}$$

$$\mu = \min(p+1, k)$$

Demostración: Llamemos $\mathcal{T}^h = \{K\}$. Sea $(z_p^h)_K \in \mathcal{R}_p(K)$ la función definida en el Lema 3.4, entonces como $k > \frac{3}{2}$ tenemos que $(z_p^h)_K = u$ en todos los vértices de K .

Sea $\gamma = \overline{K_1} \cap \overline{K_2}$ y sean N_1 y N_2 los puntos finales de γ . Sea $w_{K_1,K_2} = (z_p^h)_{K_1} - (z_p^h)_{K_2}$, es claro que w_{K_1,K_2} es un polinomio en γ de grado a lo sumo p y además $w_{K_1,K_2}(N_i) = 0$, $i = 1, 2$.

Ahora la idea es transformar $\overline{K_1} \cup \overline{K_2}$ en $\widehat{K_1} \cup \widehat{K_2}$, donde $\widehat{K_1}$ y $\widehat{K_2}$ son imágenes congruentes a Q o T según corresponda, mediante una transformación continua y lineal a trozos F . En particular F cumple $F(K_1) = \widehat{K_1}$, $F(K_2) = \widehat{K_2}$ y $\widehat{\gamma} = F(\gamma) = \widehat{K_1} \cap \widehat{K_2}$.

Siguiendo la notación introducida en el Lema 3.4 llamamos $\hat{v} = v \circ F_{K_1}$. Por (1.3.19) podemos afirmar que:

$$\|\hat{u} - (\hat{z}_p^h)_{K_1}\|_{1,\widehat{K_1}} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{k-1}} \|u\|_{k,K_1}$$

y análogamente:

$$\|\hat{u} - (\hat{z}_p^h)_{K_2}\|_{1,\widehat{K_2}} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{k-1}} \|u\|_{k,K_2}$$

También siguiendo la demostración del Lema 3.4 tenemos:

$$\|\hat{w}_{K_1,K_2}\|_{\frac{1}{2},\widehat{\gamma}} \leq \|\hat{u} - (\hat{z}_p^h)_{K_1}\|_{\frac{1}{2},\widehat{\gamma}} + \|\hat{u} - (\hat{z}_p^h)_{K_2}\|_{\frac{1}{2},\widehat{\gamma}} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{k-1}} (\|u\|_{k,K_1} + \|u\|_{k,K_2}).$$

Ahora nuestro propósito es extender $\hat{w}_{K_1,K_2}$ a todo $\widehat{K_1}$ de manera tal que sea 0 en $\partial\widehat{K_1} \setminus \widehat{\gamma}$ para luego pegar bien a $(z_p^h)_{K_1}$ y $(z_p^h)_{K_2}$ en γ y en el resto de los bordes no modificarlas.

Por Lema 3.5, podemos afirmar que existe $\hat{\psi} \in \mathcal{R}_p(\widehat{K_1})$ tal que:

$$\begin{aligned} \|\hat{\psi}\|_{1,\widehat{K_1}} &\leq C \|\hat{w}_{K_1,K_2}\|_{\frac{1}{2},\widehat{\gamma}} \\ \hat{\psi} &= \hat{w}_{K_1,K_2} \quad \text{en } \widehat{\gamma} \\ \hat{\psi} &= 0 \quad \text{en } \partial\widehat{K_1} \setminus \widehat{\gamma} \end{aligned}$$

Definamos $(\hat{z}_p^h)_{K_1} = (z_p^h)_{K_1} - \hat{\psi} \circ F_{K_1}^{-1}$. Entonces $(\hat{z}_p^h)_{K_1} = (z_p^h)_{K_2}$ en γ y además $(\hat{z}_p^h)_{K_1} = (z_p^h)_{K_1}$ en $\partial K_1 \setminus \gamma$, notemos que esto último nos garantiza que en aquellos lados de los cuadrados o triángulos donde ya fueron pegadas con continuidad, sigan quedando con continuidad.

Usando el Lema 3.4 tenemos que :

$$\|(\tilde{z}_p^h)_{K_1} - u\|_{1,K_1} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{k-1}} (\|u\|_{k,K_1} + \|u\|_{k,K_2}).$$

Repitiendo este procedimiento para cada par de figuras (paralelogramos o triángulos) que tengan lado en común podemos construir $(\tilde{z}_p^h)_K$ en cada K .

Finalmente si $\partial K \cap \Gamma = \gamma \neq \emptyset$ tenemos que modificar $(z_p^h)_K$ para que $(z_p^h)_K = 0$ en γ .

Definamos φ_p^h tal que la restricción a K coincida con $(\tilde{z}_p^h)_K$, entonces $\varphi_p^h \in \mathcal{V}_p^h(\Omega)$ y

$$\|u - \varphi_p^h\|_{1,\Omega} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{k-1}} \|u\|_{k,\Omega}$$

y el Lema quedo demostrado. □

Vamos a analizar ahora el caso en que $u \in H^k(\Omega)$ con $1 < k \leq \frac{3}{2}$.

TEOREMA 3.3. *Sea u la solución de (1.1.2), $u \in H^k(\Omega)$, con $1 < k \leq \frac{3}{2}$. Entonces para $p \geq 1$ y $h > 0$, existen $\varphi_p^h \in \mathcal{V}_p^h(\Omega)$ tal que*

$$\|u - \varphi_p^h\|_{1,\Omega} \leq C \frac{h^{(\mu-1)}}{p^{(k-1)}} \|u\|_{k,\Omega}$$

$$\mu = \min(p+1, k)$$

Demostración: Como se muestra en [5], para cualquier $t > 0$ y $m > 1$, la función u se puede descomponer de manera tal que:

$$u = v^t + w^t$$

con

$$v^t \in H_0^1(\Omega) \quad y \quad w^t \in H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

y para cualquier $m > k > 1$

$$(1.3.20) \quad \|v^t\|_{1,\Omega} \leq t^{k-1} \|u\|_{k,\Omega}$$

$$(1.3.21) \quad \|w^t\|_{m,\Omega} \leq t^{k-m} \|u\|_{k,\Omega}$$

Sea $2 \geq m > \frac{3}{2}$. Entonces por el Teorema 3.2 existe $\varphi_p^h \in \mathcal{V}_p^h(\Omega)$ tal que:

$$\|w^t - \varphi_p^h\|_{1,\Omega} \leq C \frac{h^{m-1}}{p^{m-1}} \|w^t\|_{m,\Omega}$$

ya que para $p \geq 1$, $\min(p+1, m) = m$.

Luego,

$$\|u - \varphi_p^h\|_{1,\Omega} \leq \|v^t\|_{1,\Omega} + \|w^t - \varphi_p^h\|_{1,\Omega} \leq C \left(t^{k-1} + \frac{h^{m-1}}{p^{m-1}} t^{k-m} \right) \|u\|_{k,\Omega}.$$

Eligiendo $t = \frac{h}{p}$ tenemos:

$$\|u - \varphi_p^h\|_{1,\Omega} \leq C \left(\frac{h}{p} \right)^{k-1} \|u\|_{k,\Omega} = C \frac{h^{\mu-1}}{p^{k-1}} \|u\|_{q,\Omega}$$

ya que

$$\mu = \min(p+1, k) = k, \quad \text{pues } k \leq \frac{3}{2}$$

□

Observemos que la hipótesis de que Ω sea un dominio Lipshitz se usa en la demostración de las descomposiciones (1.3.20) y (1.3.21).

El siguiente Lema, el cual es consecuencia del Lema de Cea (ver, por ejemplo, [13, 14]) nos permitirá, junto a los Teoremas 3.2 y 3.3, arribar a las estimaciones de error deseadas.

LEMA 3.6. : *Sea u la solución del Problema Variacional (1.1.2) y sea $u_p^h \in \mathcal{V}_p^h(\Omega)$ la solución de (1.2.7), entonces:*

$$\|u - u_p^h\|_{1,\Omega} \leq C \|u - v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in \mathcal{V}_p^h(\Omega)$$

Demostración: primero demostremos que:

$$a(u - u_p^h, u - u_p^h) \leq a(u - v, u - v)$$

para todo $v \in \mathcal{V}_p^h(\Omega)$.

En efecto:

$$a(u - u_p^h, u - u_p^h) = a(u - u_p^h, u) - a(u - u_p^h, u_p^h) = a(u - u_p^h, u)$$

pues $a(u - u_p^h, u_p^h) = 0$. Sumando y restando $v \in \mathcal{V}_p^h(\Omega)$

$$a(u - u_p^h, u) = a(u - u_p^h, u - v) + a(u - u_p^h, v) = a(u - u_p^h, u - v)$$

pues $a(u - u_p^h, v) = 0$.

Por lo tanto:

$$a(u - u_p^h, u - u_p^h) = a(u - u_p^h, u - v)$$

$$\begin{aligned}
a(u - u_p^h, u - v) &= \int_{\Omega} \nabla(u - u_p^h) \cdot \nabla(u - v) \leq \left| \int_{\Omega} \nabla(u - u_p^h) \cdot \nabla(u - v) \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |\nabla(u - u_p^h) \cdot \nabla(u - v)| \leq \int_{\Omega} |\nabla(u - u_p^h)| \cdot |\nabla(u - v)|
\end{aligned}$$

y aplicando la desigualdad de Hölder resulta:

$$a(u - u_p^h, u - v) \leq \|\nabla(u - u_p^h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)} = (a(u - u_p^h, u - u_p^h))^{\frac{1}{2}} (a(u - v, u - v))^{\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto :

$$a(u - u_p^h, u - u_p^h) \leq (a(u - u_p^h, u - u_p^h))^{\frac{1}{2}} (a(u - v, u - v))^{\frac{1}{2}}$$

y por ende

$$a(u - u_p^h, u - u_p^h) \leq a(u - v, u - v)$$

Ahora, de la coercitividad de a sabemos que existe una constante $C_2 > 0$ tal que:

$$\|u - u_p^h\|_{1,\Omega}^2 \leq \frac{1}{C_2} a(u - u_p^h, u - u_p^h)$$

y usando el resultado que demostramos recién y la continuidad de a tenemos que cualquiera sea $v \in \mathcal{V}_p^h(\Omega)$

$$\|u - u_p^h\|_{1,\Omega}^2 \leq \frac{C_1}{C_2} \|u - v\|_{1,\Omega}^2$$

donde C_1 es la constante de continuidad.

□

El siguiente Teorema establece las estimaciones a priori del error del método hp y en particular nos permite concluir la convergencia del método y el orden con que converge.

TEOREMA 3.4. *Sea $u \in H^k(\Omega)$, $k > 1$ la solución de (1.1.2), y sea $u_p^h \in \mathcal{V}_p^h(\Omega)$ la solución de elementos finitos (1.2.7). Entonces:*

$$\|u - u_p^h\|_{1,\Omega} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{k-1}} \|u\|_{k,\Omega}$$

$$\mu = \min(p + 1, k)$$

donde la constante C es independiente de u , p y h pero depende de Ω , τ y σ .

Demostración: Es una consecuencia inmediata del Lema de Cea y de los Teoremas 3.2 y 3.3, pues

$$\| u - u_p^h \|_{1,\Omega} \leq \frac{C_1}{C_2} \| u - \varphi_p^h \|_{1,\Omega} \leq C \frac{h^{(\mu-1)}}{p^{(k-1)}} \| u \|_{k,\Omega}$$

donde $\varphi_p^h \in \mathcal{V}_p^h(\Omega)$ es la función introducida en los Teoremas 3.2 y 3.3 y $\mu = \min(p+1, k)$.

□

CHAPTER 2

Estimaciones de Error a posteriori

En este capítulo, siguiendo el trabajo [20] de Melenk & Wolmuth, presentamos un estimador de error a posteriori de tipo residual para el problema (1.1.2) y probamos su confiabilidad y eficiencia mostrando su equivalencia con la norma energía del error salvo términos de mayor orden. Cabe señalar que la constante de equivalencia resulta ser sub-óptima dado que depende del grado del polinomio, como suele suceder en los métodos *hp* existentes en la bibliografía (ver, por ejemplo, [2, 3])

Siguiendo la notación del capítulo 1, llamamos $\hat{K}$ al elemento de referencia, que puede ser el cuadrado de referencia

$$\hat{K} = Q = (0, 1)^2$$

o el triángulo de referencia

$$\hat{K} = T = \{(x_1, x_2) | 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 - x_1\}$$

En Ω usamos una familia de mallas $\{\mathcal{T}^h\}$ regular. Vamos a asumir que la malla es γ -shape regular, esto quiere decir que cumple con lo siguiente:

$$(2.1.22) \quad h_K^{-1} \|F'_K\| + h_K \| (F'_K)^{-1} \| \leq \gamma.$$

Esto implica que los elementos vecinos tienen lados comparables; esto es, que existe una constante (otra vez llamanada γ) tal que

$$(2.1.23) \quad \gamma^{-1} h_K \leq h_{K'} \leq \gamma h_K, \quad K, K' \in \mathcal{T}^h \text{ con } \overline{K} \cap \overline{K'} \neq \emptyset.$$

En cada malla $\mathcal{T}^h$, vamos a asociarle a cada elemento $K \in \mathcal{T}^h$ un grado (máximo) polinomial $p_K \in \mathbb{N}_0$. Vamos a denotar por $\mathbf{p} = \{p_K\}$ la familia de grados polinomiales

Luego podemos definir los espacios $S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}^h, \Omega)$, $S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}^h, \Omega)$ de polinomios a trozos de la manera usual:

$$(2.1.24) \quad \begin{aligned} S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}^h, \Omega) &:= \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_K \circ F_K \in \mathcal{R}_{p_K}(\hat{K})\}, \\ S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}^h, \Omega) &:= S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}^h, \Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

donde $\mathcal{R}_{p_K}(\hat{K})$ es el definido en el Capítulo 1.

Con referencia a los grados polinomiales, será conveniente suponer que los grados polinomiales de elementos vecinos son comparables:

$$(2.1.25) \quad \gamma^{-1}(p_K + 1) \leq p_{K'} + 1 \leq \gamma(p_K + 1), \quad K, K' \in \mathcal{T}^h \text{ con } \overline{K} \cap \overline{K'} \neq \emptyset.$$

La aproximación discreta de (1.1.2) es obtenida de la manera usual:

Encontrar $u_{FE} \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}^h, \Omega)$ tal que

$$(2.1.26) \quad a(u_{FE}, v) = L(v) \quad \forall v \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}^h, \Omega).$$

Notemos que el espacio $S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}^h, \Omega)$ difiere del espacio $\mathcal{V}_p^h(\Omega)$ en vista de que ahora el grado del polinomio puede variar de un elemento (triángulo o paralelogramo) al otro, incluso elementos con un mismo p_K pueden tener distintas distribuciones de grados en los lados del elemento y de allí la importancia de la hipótesis 2.1.25.

Sea $p = \min \mathbf{p}$, en vista de los resultados obtenidos en el cap. 1 podemos afirmar que:

TEOREMA 1.5. *Sea $u \in H^k(\Omega)$, $k > 1$ la solución de (1.1.2), y sea u_{FE} la solución de elementos finitos (2.1.26). Entonces:*

$$\|u - u_{FE}\|_{1,\Omega} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{k-1}} \|u\|_{k,\Omega}$$

$$\mu = \min(p + 1, k)$$

donde la constante C es independiente de u , p y h .

2. Resultados técnicos

En esta sección presentaremos una serie de resultados que son las herramientas técnicas necesarias para la obtención de las estimaciones a posteriori del error.

2.1. interpolación hp-Clément. Vamos a presentar dos operadores de interpolación hp-Clément, ambos nos proveen una aproximación de funciones de H^1 por polinomios a trozos. El segundo operador, además, nos permite imponer condiciones de borde a los polinomios a trozos.

Vamos a asumir en nuestra definición del operador de interpolación hp-Clément que la malla $\mathcal{T}^h$ se extiende a una malla de $\mathbb{R}^2$ γ -shape regular.

Nuestras suposiciones sobre la malla $\mathcal{T}^h$ son las siguientes:

(C1) Nuestra malla $\mathcal{T}^h$ es una malla de $\mathbb{R}^2$ que es γ shape regular, y es compatible con Ω , o sea: $\mathcal{T}^h|_{\Omega}$ es una malla de Ω .

(C2) Sea $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ abierto. La malla $\mathcal{T}^h$ es compatible con Γ_D , o sea $\overline{\Gamma_D} \cap \bigcup_{K \in \mathcal{T}^h} \partial K$ es una colección de bordes enteros y cerrados de $\mathcal{T}^h$.

Con el fin de formular los Teoremas que siguen, vamos a introducir la siguiente notación para cada vértice V de la malla $\mathcal{T}^h$:

$$\begin{aligned}
(2.2.27) \quad & \omega_V^0 := \{V\}, \\
& \omega_V^j := \bigcup \{\bar{K} \mid K \in \mathcal{T}^h \text{ y } \bar{K} \cap \omega_V^{j-1} \neq \emptyset\}, \quad j \geq 1, \\
& h_V := \max \{h_K \mid V \in \bar{K}\}, \\
& p_V := \max \{p_K + 1 \mid V \in \bar{K}\}, \\
& \varepsilon_V := \{\text{todos los lados } e \text{ de } \mathcal{T}^h \text{ tal que } V \text{ es un punto final de } e\},
\end{aligned}$$

TEOREMA 2.1. *Supongamos que se cumple (C1) y sea $\mathcal{N}$ el conjunto de todos los vértices de $\mathcal{T}^h$. Sea $\mathbf{p}$ la distribución de los grados polinomiales, que supongamos que cumple (2.1.25). Entonces existe una constante $C > 0$, que depende sólo de γ , y un operador lineal*

$$I : H_{loc}^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}^h, \mathbb{R}^2)$$

tal que para todo vértice $V \in \mathcal{N}$ y para todo lado $e \in \varepsilon_V$

$$\|u - Iu\|_{L^2(\omega_V^1)} + \frac{h_V}{p_V} \|\nabla Iu\|_{L^2(\omega_V^1)} + \sqrt{\frac{h_V}{p_V}} \|u - Iu\|_{L^2(e)} \leq C \frac{h_V}{p_V} \|\nabla u\|_{L^2(\omega_V^4)}.$$

En el siguiente Teorema, presentamos una modificación del Teorema anterior que es mejor para tratar problemas Dirichlet. Para $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ que satisface (C2) introducimos los espacios

$$\begin{aligned}
(2.2.28) \quad & H_{D,\mathbf{p}}^1 := \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2) \mid u|_{\Gamma_D} = v|_{\Gamma_D} \text{ para algún } v \in S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}^h, \mathbb{R}^2)\}, \\
& H_{D,0}^1 := \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma_D} = 0\}
\end{aligned}$$

Luego podemos formular

TEOREMA 2.2. *Supongamos que se cumple (C1), (C2). Sea $\mathbf{p}$ un vector de grados polinomiales que satisface (2.1.25). Luego, existe un operador lineal $I : H_{D,\mathbf{p}}^1 \rightarrow S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}^h, \mathbb{R}^2)$ y una constante $C > 0$ que depende sólo de γ tal que*

1. $Iu|_{\Gamma_D} = u|_{\Gamma_D}$
2. *para todo vértices V y para todo $e \in \varepsilon_V$*

$$\|u - Iu\|_{L^2(\omega_V^1)} + \frac{h_V}{p_V} \|\nabla Iu\|_{L^2(\omega_V^1)} + \sqrt{\frac{h_V}{p_V}} \|u - Iu\|_{L^2(e)} \leq C \frac{h_V}{p_V} \|\nabla u\|_{L^2(\omega_V^4)}.$$

En [19] puede verse una demostración detallada de los dos Teoremas previos.

OBSERVACIÓN 2.1. *Notemos que el caso en el que tenemos condiciones de borde Dirichlet homogéneas, o sea, la aproximación de funciones $u \in H_0^1(\Omega)$ por $S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}^h, \Omega)$ está incluido en el Teorema anterior, y esto se puede ver fácilmente extendiendo la*

función $u \in H_0^1(\Omega)$ a todo $\mathbb{R}^2$ por cero en $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. Además, se puede ver que en el caso de condiciones de bordes homogéneas, el factor $\|\nabla u\|_{L^2(\omega_V^s)}$ puede ser reemplazado por $\|\nabla u\|_{L^2(\omega_V^4)}$.

2.2. Estimaciones inversas. El análisis de los indicadores del error, que introduciremos en la sección 3 del presente capítulo, requiere estimaciones inversas polinomiales en espacios de Sobolev con pesos.

Los siguientes dos Lemas son fundamentales para la obtención de las estimaciones inversas deseadas.

LEMA 2.1. *Sean α y β dos números reales tal que $-1 < \alpha < \beta$. Luego, la siguiente inecuación se cumple para todo polinomio π_p de grado p de una variable*

$$\int_{-1}^1 \pi_p^2(y)(1-y^2)^\alpha dy \leq Cp^{2(\beta-\alpha)} \int_{-1}^1 \pi_p^2(y)(1-y^2)^\beta dy$$

donde $C = C(\alpha, \beta)$.

Demostración:

Vamos a usar algunas propiedades de los polinomios de Jacobi, estas se pueden encontrar en, por ejemplo: Bernardy y Maday, 1996, Sección 19 [11].

Las derivadas de los polinomios de Jacobi $J_n^{\alpha, \alpha'}$ son ortogonales entre ellas para la medida $(1-y^2)^{\alpha+1} dy$ y satisfacen

$$\int_{-1}^1 (J_n^{\alpha, \alpha'})^2(y)(1-y^2)^{\alpha+1} dy \geq C(n + \frac{1}{2})$$

Entonces, escribiendo cada π_p como $\sum_{n=1}^{p+1} \alpha_n J_n^{\alpha, \alpha'}$, obtenemos

$$\int_{-1}^1 \pi_p^2(y)(1-y^2)^{\alpha+1} dy \geq C \sum_{n=1}^{p+1} \alpha_n^2 (n + \frac{1}{2})$$

Vamos a usar ahora lo que está demostrado en [11], Teorema 19.3:

$$(2.2.29) \quad \int_{-1}^1 (J_n^{\alpha, \alpha'})^2(y)(1-y^2)^\alpha dy \leq Cn^2$$

esto implica que

$$(2.2.30) \quad \begin{aligned} \int_{-1}^1 \pi_p^2(y)(1-y^2)^\alpha dy &\leq C \left(\sum_{n=1}^{p+1} |\alpha_n| \left(\int_{-1}^1 (J_n^{\alpha, \alpha'})^2(y)(1-y^2)^\alpha dy \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &\leq C \left(\sum_{n=1}^{p+1} |\alpha_n| n \right)^2 \end{aligned}$$

y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$(2.2.31) \quad \begin{aligned} \int_{-1}^1 \pi_p^2(y)(1-y^2)^\alpha dy &\leq C \left(\sum_{n=1}^{p+1} \alpha_n^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \left(\sum_{n=1}^{p+1} \frac{n^2}{n + \frac{1}{2}} \right) \\ &\leq Cp^2 \int_{-1}^1 \pi_p^2(y)(1-y^2)^{\alpha+1} dy \end{aligned}$$

Luego, tenemos demostrado el Lema para el caso $\beta = \alpha + 1$.

Repitiendo el mismo argumento podemos ver que el resultado también es cierto cuando la diferencia entre β y α es un entero positivo.

Finalmente, cuando $\beta - 1 < \alpha < \beta$, dado que α se puede escribir como $\alpha = \frac{\beta-1}{p'} + \frac{\beta}{p''}$ con $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} = 1$ y $\frac{1}{p'} = \beta - \alpha < 1$. Luego, el resultado se obtiene aplicando la desigualdad de Hölder a

$$\int_{-1}^1 \pi_p^2(y)(1-y^2)^\alpha dy \leq \int_{-1}^1 \pi_p^{\frac{2}{p'}}(y)(1-y^2)^{\frac{\beta-1}{p'}} \pi_p^{\frac{2}{p''}}(y)(1-y^2)^{\frac{\beta}{p''}}$$

y usando lo probado para el caso $\beta - 1$ y β .

□

LEMA 2.2. *Sea α un número real no negativo. Luego para todo polinomio π_p de grado p se cumple que*

$$\int_{-1}^1 \pi_p'^2(y)(1-y^2)^{2\alpha} dy \leq Cp^{2(2-\alpha)} \int_{-1}^1 \pi_p^2(y)(1-y^2)^\alpha dy$$

donde $C = C(\alpha)$.

Demostración: ver el trabajo [10], fórmula (2.27).

□

Con el fin de formular el Lema que sigue, vamos a definir en el intervalo $\hat{I} = (0, 1)$ la siguiente función de peso.

$$\Phi_{\hat{I}}(x) := x(1-x).$$

Luego tenemos las siguientes estimaciones inversas:

LEMA 2.3. *Sea $-1 < \alpha < \beta$, $\delta \in [0, 1]$ y sea $\Phi_{\hat{I}}$ la función que acabamos de definir. Luego existen constantes $C_1, C_3 = C(\alpha, \beta), C_2 = C(\delta) > 0$ tal que para todo $p \in \mathbb{N}$ y todo polinomio π_p de grado p*

- (i) $\int_0^1 \Phi_{\hat{I}}^\alpha(x) \pi_p^2(x) dx \leq C_1 p^{2(\beta-\alpha)} \int_0^1 \Phi_{\hat{I}}^\beta(x) \pi_p^2(x) dx$,
- (ii) $\int_0^1 \Phi_{\hat{I}}^{2\delta}(x) (\pi_p'(x))^2 dx \leq C_2 p^{2(2-\delta)} \int_0^1 \Phi_{\hat{I}}^\delta(x) \pi_p^2(x) dx$,
- (iii) $\int_0^1 \Phi_{\hat{I}}(x) (\pi_p'(x))^2 dx \leq C_3 p^2 \int_0^1 \pi_p^2(x) dx$,

(iv) *Más aún, si además se cumple $\pi_p(\partial\hat{I}) = 0$ o sea $\pi_p(0) = 0$ y $\pi_p(1) = 0$, entonces $\int_0^1 (\pi'_p(x))^2 dx \leq C_3 p^2 \int_0^1 \Phi_{\hat{I}}^{-1} \pi_p^2(x) dx$.*

Demostración

Vamos a demostrar (i) y (ii) que son los resultados que vamos a usar, para ver las demostraciones de (iii) y (iv) mirar [12].

La demostración de (i) es un corolario directo del Lema 2.1. Haciendo el cambio de variables $x = \frac{y+1}{2}$ tenemos

$$\int_{-1}^1 \pi_p^2(y)(1-y^2)^\alpha dy = \int_0^1 \pi_p^2(2x-1)(1-(2x-1)^2)^\alpha 2dx = \int_0^1 \tilde{\pi}_p^2(x)(x(1-x))^\alpha C_\alpha dx$$

$$\int_{-1}^1 \pi_p^2(y)(1-y^2)^\beta dy = \int_0^1 \pi_p^2(2x-1)(1-(2x-1)^2)^\beta 2dx = \int_0^1 \tilde{\pi}_p^2(x)(x(1-x))^\beta C_\beta dx$$

luego,

$$\int_0^1 \tilde{\pi}_p^2(x)(x(1-x))^\alpha C_\alpha dx \leq Cp^{2(\beta-\alpha)} \int_0^1 \tilde{\pi}_p^2(x)(x(1-x))^\beta C_\beta dx$$

lo que implica que

$$\int_0^1 \tilde{\pi}_p^2(x)(x(1-x))^\alpha dx \leq Cp^{2(\beta-\alpha)} \int_0^1 \tilde{\pi}_p^2(x)(x(1-x))^\beta dx$$

como esto vale para todo π_p , y recordando la definición de $\Phi_{\hat{I}}$, obtenemos lo que queríamos, i. e.,

$$\int_0^1 \pi_p^2(x)\Phi_{\hat{I}}^\alpha(x)dx \leq Cp^{2(\beta-\alpha)} \int_0^1 \pi_p^2(x)\Phi_{\hat{I}}^\beta(x)dx$$

donde $C = C(\alpha, \beta)$.

En forma análoga se demuestra (ii) como corolario directo del Lema 2.2.

□

La función de peso $\Phi_{\hat{I}}$ del Lema anterior está caracterizada por $\Phi_{\hat{I}}(x) \sim \text{dist}(x, \partial\hat{I})$. Ahora vamos a generalizar el Lema anterior a más dimensiones. Para esto definimos la función de peso

$$\Phi_{\hat{K}}(\hat{x}) := \text{dist}(\hat{x}, \partial\hat{K})$$

donde $\hat{K}$ es el cuadrado de referencia o el triángulo de referencia. El Lema análogo al anterior, pero en dos dimensiones, es el siguiente:

TEOREMA 2.3. *Sea $\hat{K}$ el cuadrado o el triángulo de referencia y sea $\Phi_{\hat{K}}$ la función que acabamos de definir. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que cumplan $-1 < \alpha < \beta$ y $\delta \in [0, 1]$. Luego, existen contantes $C_1, C_3 = C(\alpha, \beta)$ y $C_2 = C(\delta) > 0$ tal que para todo polinomio $\pi_p \in \mathcal{Q}_p$ se tiene*

- (i) $\int_{\hat{K}} (\Phi_{\hat{K}})^\alpha \pi_p^2 d\hat{x}d\hat{y} \leq C_1 p^{2(\beta-\alpha)} \int_{\hat{K}} (\Phi_{\hat{K}})^\beta \pi_p^2 d\hat{x}d\hat{y},$
- (ii) $\int_{\hat{K}} (\Phi_{\hat{K}})^{2\delta} |\nabla \pi_p|^2 d\hat{x}d\hat{y} \leq C_2 p^{2(2-\delta)} \int_{\hat{K}} (\Phi_{\hat{K}})^\delta \pi_p^2 d\hat{x}d\hat{y},$
- (iii) $\int_{\hat{K}} \Phi_{\hat{K}} |\nabla \pi_p|^2 d\hat{x}d\hat{y} \leq C_3 p^2 \int_{\hat{K}} |\pi_p|^2 d\hat{x}d\hat{y},$
- (iv) Si además se tiene que $\pi_p = 0$ en $\partial \hat{K}$, entonces
 $\int_{\hat{K}} |\nabla \pi_p|^2 d\hat{x}d\hat{y} \leq C_3 p^2 \int_{\hat{K}} (\Phi_{\hat{K}})^\delta |\pi_p|^2 d\hat{x}d\hat{y}.$

Ahora vamos a generalizar los items (i) y (ii) del Teorema anterior (que son los que vamos a usar) para el caso $K \in \mathcal{T}^h$. Para eso vamos a definir

$$\Phi_K := \Phi_{\hat{K}} \circ F_K^{-1}$$

donde F_K es una transformación afín que manda $\hat{K}$ en K . Para poder hacer la generalización necesitamos el siguiente Lema.

LEMA 2.4. Sean $\mathcal{D}$ y $\hat{\mathcal{D}}$ dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ afinmente equivalentes (existe F transformación afín inversible tal que $F(\hat{\mathcal{D}}) = \mathcal{D}$, $F(\hat{x}) = B\hat{x} + c$). Entonces

$$\|B\| \leq \frac{h_{\mathcal{D}}}{\rho_{\mathcal{D}}} \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{h_{\hat{\mathcal{D}}}}{\rho_{\hat{\mathcal{D}}}}$$

donde la norma de la matriz B es la norma usual (norma 2).

Demostración: Vamos a ver la estimación para $\|B\|$ (la otra es análoga).

$$\|B\| = \sup_{\hat{w} \in \hat{\mathcal{D}}, \hat{w} \neq 0} \frac{\|B\hat{w}\|}{\|\hat{w}\|} = \sup_{\hat{w} \in \hat{\mathcal{D}}, \hat{w} \neq 0} \|B \frac{\hat{w} \rho_{\hat{\mathcal{D}}}}{\|\hat{w}\|}\| \frac{1}{\rho_{\hat{\mathcal{D}}}}$$

llamando $\hat{z} = \frac{\hat{w} \rho_{\hat{\mathcal{D}}}}{\|\hat{w}\|}$ obtenemos

$$\|B\| = \sup_{\hat{z} \in \hat{\mathcal{D}}, \|\hat{z}\| = \rho_{\hat{\mathcal{D}}}} \|B\hat{z}\| \frac{1}{\rho_{\hat{\mathcal{D}}}}$$

como $\|\hat{z}\| = \rho_{\hat{\mathcal{D}}}$, entonces $\exists \hat{x} \hat{y} \in \hat{\mathcal{D}}$ con $\hat{z} = \hat{x} - \hat{y}$. Luego

$$\|B\hat{z}\| = \|B\hat{x} - B\hat{y}\| = \|F(\hat{x}) - F(\hat{y})\| = \|x - y\|$$

para algún $x, y \in \mathcal{D}$. Entonces

$$\|B\| \leq \sup_{x, y \in \mathcal{D}} \|x - y\| \frac{1}{\rho_{\hat{\mathcal{D}}}} = \frac{h_{\mathcal{D}}}{\rho_{\hat{\mathcal{D}}}}$$

En el caso en que $\hat{\mathcal{D}} = \hat{K}$ y $\mathcal{D} = K$, este Lema nos dice que si $F(\hat{x}) = B\hat{x} + c$ es una transformación afín de $\hat{K}$ en K , entonces

$$\|B\| \leq \frac{h_K}{\rho_{\hat{K}}} \leq Ch_K$$

TEOREMA 2.4. Sea $K \in \mathcal{T}^h$, sea $\Phi_K = \Phi_{\hat{K}} \circ F_K^{-1}$. Sean α, β, δ cumpliendo las hipótesis del Teorema (2.3). Luego existen $C_1 = C(\alpha, \beta)$ y $C_2 = C(\delta) > 0$ tal que para todo polinomio $\pi_p \in \mathcal{Q}_p$

- (i) $\int_K \Phi_K^\alpha \pi_p^2 dx dy \leq C_1 p^{2(\beta-\alpha)} \int_K \Phi_K^\beta \pi_p^2 dx dy,$
- (ii) $\int_K \Phi_K^{2\delta} |\nabla \pi_p|^2 dx dy \leq C_2 \frac{1}{h_K^2} p^{2(2-\delta)} \int_K \Phi_K^\delta \pi_p^2.$

Demostración: Para demostrar (i) sólo necesitamos usar el Teorema de cambio de variables.

$$\int_K \Phi_K^\alpha \pi_p^2 dx dy = \int_{\hat{K}} (\Phi_K \circ F_K)^\alpha (\pi_p \circ F_K)^2 |\det B| d\hat{x} d\hat{y}$$

observemos que $\Phi_K \circ F_K = \Phi_{\hat{K}}$. Luego aplicamos el item (i) del Teorema 2.3 y obtenemos:

$$\int_K \Phi_K^\alpha \pi_p^2 dx dy \leq C p^{2(\beta-\alpha)} |\det B| \int_{\hat{K}} \Phi_{\hat{K}}^\beta (\pi_p \circ F_K)^2 d\hat{x} d\hat{y}$$

usando el Teorema de cambio de variables de nuevo, obtenemos

$$|\det B| \int_{\hat{K}} \Phi_{\hat{K}}^\beta (\pi_p \circ F_K)^2 d\hat{x} d\hat{y} = |\det B| \int_K \Phi_K^\beta \pi_p^2 |\det B^{-1}| dx dy = \int_K \Phi_K^\beta \pi_p^2 dx dy$$

luego

$$\int_K \Phi_K^\alpha \pi_p^2 dx dy \leq C p^{2(\beta-\alpha)} \int_K \Phi_K^\beta \pi_p^2 dx dy$$

Para demostrar (ii), además del Teorema de cambio de variables, vamos a utilizar el Lema 2.4. Observemos que

$$\pi_p = (\pi_p \circ F_K) \circ F_K^{-1}$$

y usando la regla de la cadena, tenemos

$$\nabla \pi_p = (\nabla(\pi_p \circ F_K) \circ F_K^{-1}) B^{-1}$$

aplicando ahora el Teorema de cambio de variables

$$\begin{aligned} \int_K \Phi_K^{2\delta} |\nabla \pi_p|^2 dx dy &= \int_{\hat{K}} \Phi_{\hat{K}}^{2\delta} |\nabla(\pi_p \circ F_K) B^{-1}|^2 |\det B| d\hat{x} d\hat{y} \\ &\leq \|B^{-1}\|^2 \int_{\hat{K}} \Phi_{\hat{K}}^{2\delta} |\nabla(\pi_p \circ F_K)|^2 |\det B| d\hat{x} d\hat{y} \end{aligned}$$

aplicando ahora el item (ii) del Teorema 2.3

$$\|B^{-1}\|^2 \int_{\hat{K}} \Phi_{\hat{K}}^{2\delta} |\nabla(\pi_p \circ F_K)|^2 |\det B| d\hat{x} d\hat{y} \leq C p^{2(2-\delta)} \|B^{-1}\|^2 \int_{\hat{K}} \Phi_{\hat{K}}^\delta (\pi_p \circ F_K)^2 |\det B| d\hat{x} d\hat{y}$$

y volviendo a aplicar el Teorema de cambio de variables resulta

$$C p^{2(2-\delta)} \|B^{-1}\|^2 \int_{\hat{K}} \Phi_{\hat{K}}^\delta (\pi_p \circ F_K)^2 |\det B| d\hat{x} d\hat{y} = C p^{2(2-\delta)} \|B^{-1}\|^2 \int_K \Phi_K^\delta \pi_p^2 dx dy$$

Resumiendo

$$\int_K \Phi_K^{2\delta} |\nabla \pi_p|^2 dx dy \leq Cp^{2(2-\delta)} \|B^{-1}\|^2 \int_K \Phi_K^\delta \pi_p^2 dx dy$$

Ahora acotamos $\|B^{-1}\|$, usando el Lema 2.4

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{h_{\hat{K}}}{\rho_K}$$

y usando la regularidad de la malla $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$ tenemos

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{C}{h_K}$$

Entonces

$$\int_K \Phi_K^{2\delta} |\nabla \pi_p|^2 dx dy \leq Cp^{2(2-\delta)} \frac{1}{h_K^2} \int_K \Phi_K^\delta \pi_p^2 dx dy$$

quedando así el Teorema demostrado. $\square$

Finalmente, necesitamos un resultado que nos permita extender una función definida sobre un lado a todo el dominio. Para eso definimos en el conjunto $\hat{e} = (0, 1) \times \{0\}$ la siguiente función de peso

$$\Phi_{\hat{e}}(\hat{x}, 0) = \Phi_{\hat{f}}(\hat{x})$$

Vamos a notar $\Phi_{\hat{e}}(\hat{x}, 0) = \Phi_{\hat{e}}(\hat{x})$.

LEMA 2.5. Sean $\hat{K}$ el cuadrado o el triángulo de referencia, $\alpha \in (1/2, 1]$. Sean $\Phi_{\hat{e}}, \Phi_{\hat{K}}$ como las definimos antes. Luego existe $C_\alpha > 0$ tal que, para todo polinomio $\pi_p \in \mathcal{R}_p(\hat{K})$ y para todo $\epsilon \in [0, 1]$ existe una extensión $v_{\hat{e}} \in H^1(\hat{K})$ tal que

- (i) $v_{\hat{e}}|_{\hat{e}} = \pi_p \cdot \Phi_{\hat{e}}^\alpha(\hat{x})$ y $v_{\hat{e}}|_{\partial\hat{K} \setminus \hat{e}} = 0$;
- (ii) $\|v_{\hat{e}}\|_{L^2(\hat{K})}^2 \leq C_\alpha \epsilon \left\| \pi_p \Phi_{\hat{e}}^{\alpha/2} \right\|_{L^2(\hat{e})}^2$;
- (iii) $\|\nabla v_{\hat{e}}\|_{L^2(\hat{K})}^2 \leq C_\alpha (\epsilon p^{2(2-\alpha)} + \epsilon^{-1}) \left\| \pi_p \Phi_{\hat{e}}^{\alpha/2} \right\|_{L^2(\hat{e})}^2$.

Demostración

Vamos a empezar con el caso en que $\hat{K}$ es el cuadrado de referencia, o sea $\hat{K} = Q = (0, 1)^2$. Sea $\pi(\hat{x}) = \pi_p(\hat{x}, 0)$, entonces π es un polinomio de grado p de una variable y entonces podemos aplicar el Lema 2.3 para este polinomio. La extensión $v_{\hat{e}}$ se define de la siguiente manera

$$v_{\hat{e}}(\hat{x}, \hat{y}) = \pi(\hat{x}) \Phi_{\hat{e}}(\hat{x})^\alpha (1 - \hat{y})^\alpha e^{-\hat{y}/\epsilon}$$

obviamente satisface la condición (i):

$$v_{\hat{e}}(\hat{x}, 0) = \pi(\hat{x}) \Phi_{\hat{e}}^\alpha(\hat{x}) (1 - 0)^\alpha e^{-0/\epsilon} = \pi(\hat{x}) \Phi_{\hat{e}}^\alpha(\hat{x}) (1)(1) = \pi(\hat{x}) \Phi_{\hat{e}}^\alpha(\hat{x})$$

para ver que $v_{\hat{e}}|_{\partial\hat{K}\setminus\hat{e}} = 0$ tenemos que ver que: $v_{\hat{e}}(\hat{x}, 1) = 0$ para $\hat{x} \in [0, 1]$, $v_{\hat{e}}(0, \hat{y}) = 0$ para $\hat{y} \in [0, 1]$, y $v_{\hat{e}}(1, \hat{y}) = 0$ para $\hat{y} \in [0, 1]$.

$$v_{\hat{e}}(\hat{x}, 1) = \pi(\hat{x})\Phi_{\hat{e}}^{\alpha}(\hat{x})(1-1)^{\alpha}e^{-1/\epsilon} = 0$$

$$v_{\hat{e}}(0, \hat{y}) = \pi(0)\Phi_{\hat{e}}(0)^{\alpha}(1-\hat{y})^{\alpha}e^{-\hat{y}/\epsilon}$$

y como $\Phi_{\hat{e}}(0) = \Phi_{\hat{f}}(0) = 0$, entonces $v_{\hat{e}}(0, \hat{y}) = 0$

$$v_{\hat{e}}(1, \hat{y}) = \pi(1)\Phi_{\hat{e}}(1)^{\alpha}(1-\hat{y})^{\alpha}e^{-\hat{y}/\epsilon}$$

y como $\Phi_{\hat{e}}(1) = \Phi_{\hat{f}}(1) = 0$, entonces $v_{\hat{e}}(1, \hat{y}) = 0$.

Veamos que $v_{\hat{e}}$ también satisface la condición (ii). Usando Fubini,

$$\|v_{\hat{e}}\|_{L^2(\hat{K})}^2 = \int_0^1 \pi^2(\hat{x})\Phi_{\hat{e}}^{2\alpha}(\hat{x}) d\hat{x} \int_0^1 (1-\hat{y})^{2\alpha}e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y}$$

analicemos cada factor por separado:

Para el segundo factor, usando que $(1-\hat{y})^{2\alpha} \leq 1$ para $\hat{y} \in (0, 1)$ tenemos que

$$\int_0^1 (1-\hat{y})^{2\alpha}e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y} \leq \int_0^1 e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y} = \epsilon/2 (1 - e^{-2/\epsilon}) \leq \epsilon/2$$

Mientras que para el primer factor

$$\int_0^1 \pi^2(\hat{x})\Phi_{\hat{e}}^{2\alpha}(\hat{x}) d\hat{x} = \int_0^1 \pi^2(\hat{x})\Phi_{\hat{e}}^{\alpha}(\hat{x})\Phi_{\hat{e}}^{\alpha}(\hat{x}) d\hat{x}$$

usando que $\Phi_{\hat{e}}(\hat{x}) = \hat{x}(1-\hat{x}) \leq 1/4$ nos queda que

$$(2.2.32) \quad \int_0^1 \pi^2(\hat{x})\Phi_{\hat{e}}^{2\alpha}(\hat{x}) d\hat{x} \leq (1/4)^{\alpha} \left\| \pi_p \Phi_{\hat{e}}^{\alpha/2} \right\|_{L^2(\hat{e})}^2$$

En consecuencia,

$$\|v_{\hat{e}}\|_{L^2(\hat{K})}^2 \leq C_{\alpha}\epsilon \left\| \pi_p \Phi_{\hat{e}}^{\alpha/2} \right\|_{L^2(\hat{e})}^2$$

Para ver (iii) vamos a usar las siguientes acotaciones.

$$\partial_{\hat{x}} v_{\hat{e}}(\hat{x}) = (\pi'(\hat{x})\Phi_{\hat{e}}(\hat{x})^{\alpha} + \pi(\hat{x})\alpha\Phi_{\hat{e}}(\hat{x})^{\alpha-1}\Phi'_{\hat{e}}(\hat{x})) (1-\hat{y})^{\alpha}e^{-\hat{y}/\epsilon}$$

mirando la definición de $\Phi_{\hat{e}}$, vemos que $\Phi'_{\hat{e}} = 1 - 2\hat{x}$, luego, reemplazando en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\partial_{\hat{x}} v_{\hat{e}}(\hat{x}) = (\pi'(\hat{x})\Phi_{\hat{e}}(\hat{x})^{\alpha} + \pi(\hat{x})\alpha\Phi_{\hat{e}}(\hat{x})^{\alpha-1}(1-2\hat{x})) (1-\hat{y})^{\alpha}e^{-\hat{y}/\epsilon}$$

luego, usando Fubini:

$$\|\partial_{\hat{x}} v_{\hat{e}}\|_{L^2(Q)}^2 = \left\| \pi' \Phi_{\hat{e}}^{\alpha} + \pi \alpha \Phi_{\hat{e}}^{\alpha-1} (1-2\hat{x}) \right\|_{L^2(\hat{e})}^2 \left\| (1-\hat{y})^{\alpha} e^{-\hat{y}/\epsilon} \right\|_{L^2((0,1))}^2$$

y usando desigualdad triangular resulta

$$(2.2.33) \quad \begin{aligned} \left\| \pi' \Phi_{\hat{e}}^{\alpha} + \pi \alpha \Phi_{\hat{e}}^{\alpha-1} (1 - 2\hat{x}) \right\|_{L^2(\hat{e})}^2 &\leq \left(\left\| \pi' \Phi_{\hat{e}}^{\alpha} \right\|_{L^2(\hat{e})} + \left\| \alpha \pi \Phi_{\hat{e}}^{\alpha-1} (1 - 2\hat{x}) \right\|_{L^2(\hat{e})} \right)^2 \\ &\leq 2 \left(\left\| \pi' \Phi_{\hat{e}}^{\alpha} \right\|_{L^2(\hat{e})}^2 + \left\| \alpha \pi \Phi_{\hat{e}}^{\alpha-1} (1 - 2\hat{x}) \right\|_{L^2(\hat{e})}^2 \right) \end{aligned}$$

observando que:

$$\left\| \alpha \pi \Phi_{\hat{e}}^{\alpha-1} (1 - 2\hat{x}) \right\|_{L^2(\hat{e})}^2 = \int_0^1 (\alpha \pi(\hat{x}) \Phi_{\hat{e}}^{\alpha-1}(\hat{x}) (1 - 2\hat{x}))^2 \leq \alpha^2 \left\| \pi \Phi_{\hat{e}}^{\alpha-1} \right\|_{L^2(\hat{e})}^2$$

Luego,

$$\left\| \pi' \Phi_{\hat{e}}^{\alpha} + \pi \alpha \Phi_{\hat{e}}^{\alpha-1} (1 - 2\hat{x}) \right\|^2 \leq C_{\alpha} \left(\left\| \pi' \Phi_{\hat{e}}^{\alpha} \right\|_{L^2(\hat{e})}^2 + \left\| \pi \Phi_{\hat{e}}^{\alpha-1} \right\|_{L^2(\hat{e})}^2 \right)$$

Analicemos ahora el otro factor:

$$\left\| (1 - \hat{y})^{\alpha} e^{-\hat{y}/\epsilon} \right\|_{L^2((0,1))}^2 = \int_0^1 (1 - \hat{y})^{2\alpha} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y}$$

Cuando vimos (ii) demostramos que esto es $\leq \epsilon/2$.

Luego,

$$\left\| \partial_{\hat{x}} v_{\hat{e}} \right\|_{L^2(Q)}^2 \leq C_{\alpha} \left(\left\| \pi' \Phi_{\hat{e}}^{\alpha} \right\|_{L^2(\hat{e})}^2 + \left\| \pi \Phi_{\hat{e}}^{\alpha-1} \right\|_{L^2(\hat{e})}^2 \right) \epsilon$$

Usando (i) y (ii) del Lema 2.3 tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \pi \Phi_{\hat{e}}^{\alpha-1} \right\|_{L^2(\hat{e})}^2 &\leq C_{\alpha} p^{2(2-\alpha)} \left\| \pi \Phi_{\hat{e}}^{\alpha/2} \right\|_{L^2(\hat{e})}^2 \\ \left\| \pi' \Phi_{\hat{e}}^{\alpha} \right\|_{L^2(\hat{e})}^2 &\leq C_{\alpha} p^{2(2-\alpha)} \left\| \pi \Phi_{\hat{e}}^{\alpha/2} \right\|_{L^2(\hat{e})}^2 \end{aligned}$$

Luego,

$$(2.2.34) \quad \left\| \partial_{\hat{x}} v_{\hat{e}} \right\|_{L^2(Q)}^2 \leq C_{\alpha} \epsilon p^{2(2-\alpha)} \left\| \pi_p \Phi_{\hat{e}}^{\alpha/2} \right\|_{L^2(\hat{e})}^2$$

Calculemos ahora $\partial_{\hat{y}} v_{\hat{e}}$

$$\partial_{\hat{y}} v_{\hat{e}}(\hat{x}, \hat{y}) = -\pi(\hat{x}) \Phi_{\hat{e}}^{\alpha} \left(\alpha (1 - \hat{y})^{\alpha-1} e^{-\hat{y}/\epsilon} + (1 - \hat{y})^{\alpha} e^{-\hat{y}/\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \right)$$

usando Fubini y desigualdad triangular:

$$\left\| \partial_{\hat{y}} v_{\hat{e}} \right\|_{L^2(Q)}^2 \leq \left\| \pi \Phi_{\hat{e}}^{\alpha} \right\|_{L^2((0,1))}^2 \left(\left\| \alpha (1 - \hat{y})^{\alpha-1} e^{-\hat{y}/\epsilon} \right\|_{L^2((0,1))}^2 + \left\| (1 - \hat{y})^{\alpha} e^{-\hat{y}/\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \right\|_{L^2((0,1))}^2 \right)$$

Analicemos los términos que están adentro del paréntesis,

El segundo término ya fue analizado y tenemos que

$$\left\| (1 - \hat{y})^\alpha e^{-\hat{y}/\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \right\|_{L^2((0,1))}^2 = \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^1 (1 - \hat{y})^{2\alpha} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y} \leq \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\epsilon}{2} = C\epsilon^{-1}$$

Analicemos el primer término:

$$\left\| \alpha^2 (1 - \hat{y})^{\alpha-1} e^{-\hat{y}/\epsilon} \right\|_{L^2((0,1))}^2 = \int_0^1 \alpha^2 (1 - \hat{y})^{2(\alpha-1)} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y}$$

Observemos que para calcular esta integral no podemos hacer un cálculo directo, pues el integrando tiene una singularidad en $\hat{y} = 1$ ya que podría ser $\alpha - 1 < 0$. Separamos la integral en suma de dos integrales y calculamos cada una por separado

$$\int_0^{1-\epsilon} \alpha^2 (1 - \hat{y})^{2(\alpha-1)} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y} + \int_{1-\epsilon}^1 \alpha^2 (1 - \hat{y})^{2(\alpha-1)} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y}$$

Calculamos la integral de la izquierda,

$$\int_0^{1-\epsilon} \alpha^2 (1 - \hat{y})^{2(\alpha-1)} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y} \leq \alpha^2 \epsilon^{2(\alpha-1)} \int_0^{1-\epsilon} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y} \leq \alpha^2 \epsilon^{2(\alpha-1)} \int_0^1 e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y}$$

para la primer desigualdad se usa que $(1 - \hat{y})^{2(\alpha-1)} \leq (1 - (1 - \epsilon))^{2(\alpha-1)}$ para y entre 0 y $1 - \epsilon$; y usando otra vez que $\int_0^1 e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y} \leq \epsilon/2$, obtenemos

$$\int_0^{1-\epsilon} \alpha^2 (1 - \hat{y})^{2(\alpha-1)} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y} \leq \alpha^2 \epsilon^{2(\alpha-1)} \epsilon/2 = C_\alpha \epsilon^{2\alpha-1}$$

Calculamos ahora la integral de la derecha,

$$\int_{1-\epsilon}^1 \alpha^2 (1 - \hat{y})^{2(\alpha-1)} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y} = \lim_{M \rightarrow 1^-} \int_{1-\epsilon}^M \alpha^2 (1 - \hat{y})^{2(\alpha-1)} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y}$$

observemos que el límite existe pues $\int_{1-\epsilon}^M \alpha^2 (1 - \hat{y})^{2(\alpha-1)} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y}$ es función creciente de M , pero podría ser infinito, demostremos que no es éste el caso, o sea que el límite es finito.

$$\int_{1-\epsilon}^M \alpha^2 (1 - \hat{y})^{2(\alpha-1)} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y} \leq \int_{1-\epsilon}^M \alpha^2 (1 - \hat{y})^{2(\alpha-1)} d\hat{y}$$

ya que $e^{-2\hat{y}/\epsilon} \leq 1$ en el intervalo de integración. Supongamos $1/2 < \alpha < 1$, entonces $-1 < 2(\alpha - 1) < 0$ y podemos integral de la siguiente manera

$$\int_{1-\epsilon}^M \alpha^2 (1 - \hat{y})^{2(\alpha-1)} d\hat{y} = \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} (\epsilon^{2\alpha-1} - (1 - M)^{2\alpha-1})$$

Luego,

$$\lim_{M \rightarrow 1^-} \int_{1-\epsilon}^M \alpha^2 (1-\hat{y})^{2(\alpha-1)} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y} \leq \lim_{M \rightarrow 1^-} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} (\epsilon^{2\alpha-1} - (1-M)^{2\alpha-1}) = \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} \epsilon^{2\alpha-1}$$

Quedando entonces demostrado para el caso $\alpha \neq 1$ que

$$\int_{1-\epsilon}^1 \alpha^2 (1-\hat{y})^{2(\alpha-1)} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y} \leq C_\alpha \epsilon^{2\alpha-1}$$

El caso $\alpha = 1$ es trivial.

Luego,

$$\int_0^{1-\epsilon} \alpha^2 (1-\hat{y})^{2(\alpha-1)} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y} + \int_{1-\epsilon}^1 \alpha^2 (1-\hat{y})^{2(\alpha-1)} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y} \leq C_\alpha \epsilon^{2\alpha-1} + C_\alpha \epsilon^{2\alpha-1} \leq C_\alpha \epsilon^{2\alpha-1}$$

O sea,

$$\|\alpha^2 (1-\hat{y})^{\alpha-1} e^{-\hat{y}/\epsilon}\|_{L^2((0,1))}^2 = \int_0^1 \alpha^2 (1-\hat{y})^{2(\alpha-1)} e^{-2\hat{y}/\epsilon} d\hat{y} \leq C_\alpha \epsilon^{2\alpha-1}$$

Juntando esta acotación con la que calculamos antes,

$$\begin{aligned} & \|\pi \Phi_{\hat{e}}^\alpha\|_{L^2((0,1))}^2 \left(\|\alpha (1-\hat{y})^{\alpha-1} e^{-\hat{y}/\epsilon}\|_{L^2((0,1))}^2 + \left\| (1-\hat{y})^\alpha e^{-\hat{y}/\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \right\|_{L^2((0,1))}^2 \right) \\ & \leq \|\pi \Phi_{\hat{e}}^\alpha\|_{L^2((0,1))}^2 (C_\alpha \epsilon^{2\alpha-1} + C \epsilon^{-1}) \leq \|\pi \Phi_{\hat{e}}^\alpha\|_{L^2((0,1))}^2 C_\alpha (\epsilon^{2\alpha-1} + \epsilon^{-1}) \end{aligned}$$

Luego

$$\|\partial_y v_{\hat{e}}\|_{L^2(Q)}^2 \leq \|\pi \Phi_{\hat{e}}^\alpha\|_{L^2((0,1))}^2 C_\alpha (\epsilon^{2\alpha-1} + \epsilon^{-1})$$

usando (2.2.32) resulta

$$(2.2.35) \quad \|\partial_{\hat{y}} v_{\hat{e}}\|_{L^2(Q)}^2 \leq \|\pi \Phi_{\hat{e}}^{\alpha/2}\|_{L^2((0,1))}^2 C_\alpha (\epsilon^{2\alpha-1} + \epsilon^{-1})$$

Y ahora podemos calcular lo que queriamos, de (2.2.34) y (2.2.35) tenemos que

$$\|\nabla v_{\hat{e}}\|_{L^2(\hat{K})}^2 \leq C_\alpha \|\pi \Phi_{\hat{e}}^{\alpha/2}\|_{L^2((0,1))}^2 [\epsilon p^{2(2-\alpha)} + \epsilon^{-1+2\alpha} + \epsilon^{-1}]$$

observemos que $\epsilon^{-1+2\alpha} \leq \epsilon \leq \epsilon p^{2(2-\alpha)}$, entonces

$$\|\nabla v_{\hat{e}}\|_{L^2(\hat{K})}^2 \leq C_\alpha \|\pi \Phi_{\hat{e}}^{\alpha/2}\|_{L^2((0,1))}^2 [\epsilon p^{2(2-\alpha)} + \epsilon^{-1}]$$

como queriamos demostrar.

El resultado para el cuadrado de referencia Q implica el resultado para el triángulo de referencia T , en efecto, usando transformaciones bilineales, vemos que (i)-(iii) también valen si reemplazamos Q por el subconjunto de T : $Q' := \{(x, y) | y < x < 1 - y, 0 < y < 1/4\}$.

Sea $v_{\hat{e}}$ una función que satisface (i)-(iii) en $\hat{K} = Q'$. La función que queremos en T se obtiene extendiendo la función a T por cero en $T \setminus Q'$. Esto concluye la demostración. $\square$

Nuestro objetivo ahora es demostrar un Lema análogo al anterior para el caso $K \in \mathcal{T}^h$. Para eso vamos a necesitar del siguiente Lema, en el cual vamos a considerar una transformación afín particular: sea e un lado de K , sean p_1 y p_2 los extremos de e . Sea p_3 el otro punto tal que forma un lado de K con p_1 , sea B la matriz $B = (p_2 - p_1 | p_3 - p_1)$, observemos que $|\det(B)| = C|K|$, definimos $F_K(\hat{x}) = B\hat{x} + p_1$; esta transformación afín manda $\hat{K}$ en K y $\hat{e}$ en e .

LEMA 2.6. *Sean $K \in \mathcal{T}^h$, $w : K \rightarrow \mathbb{R}$, e un lado de K y F_K la función que definimos recién. Entonces*

$$\int_e w^2 dl = \int_{\hat{e}} (w \circ F_K)^2 |e| dl$$

donde $dl = \text{diferencial de longitud}$.

Demostración Sea $r(s) = (p_2 - p_1)s + p_1$, $s \in [0, 1]$, una parametrización de e . Luego

$$\int_e w^2 dl = \int_0^1 w(r(s))^2 \|r'(s)\| ds$$

calculemos $\|r'(s)\| = \|p_2 - p_1\| = |e|$. Y observando que $r(s) = F_K(s, 0)$, llamamos $z(s) = (s, 0)$ que es una parametrización de $\hat{e}$. Luego

$$\int_e w^2 dl = \int_0^1 (w \circ F_K)(z(s))^2 |e| ds$$

y usando que $1 = \|z'(s)\|$, nos queda lo que queremos. $\square$

Ahora estamos en condiciones de generalizar el Lema 2.5. Definimos para $e \in K$

$$\Phi_e := \Phi_{\hat{e}} \circ F_K^{-1}$$

donde F_K es la transformación afín definida para el lema anterior, que manda $\hat{K}$ en K y $\hat{e}$ en e .

LEMA 2.7. *Sea $K \in \mathcal{T}^h$, $\alpha \in (1/2, 1]$. Luego existe una constante $C_\alpha > 0$ tal que para todo polinomio $\pi_p \in \mathcal{R}_p$ y para todo $\epsilon \in (0, 1]$ existe una extensión $v_e \in H^1(K)$ tal que*

- (i) $v_e|_e = \pi_p \cdot \Phi_e^\alpha$ y $v_e|_{\partial K \setminus e} = 0$;
- (ii) $\|v_e\|_{L^2(K)}^2 \leq C_\alpha \epsilon \|\pi_p \Phi_e^{\alpha/2}\|_{L^2(e)}^2 h_K$;
- (iii) $\|\nabla v_e\|_{L^2(K)}^2 \leq C_\alpha (\epsilon p^{2(2-\alpha)} + \epsilon^{-1}) \|\pi_p \Phi_e^{\alpha/2}\|_{L^2(e)}^2 \frac{1}{h_K}$.

Demostración: Sea F_K la transformación afín definida como en el Lema anterior. Defino $\tilde{\pi}_p = \pi_p \circ F_K$. Entonces por el Lema 2.5 existe $v_{\hat{e}} \in H^1(\hat{K})$ que cumple los items (i), (ii) y (iii) del Lema con $\pi_p = \tilde{\pi}_p$. Defino $v_e = v_{\hat{e}} \circ F_K^{-1}$. Calculemos $v_e|_e$, sea $p \in e$

$$v_e(p) = v_{\hat{e}}(F_K^{-1}(p)) = \tilde{\pi}_p(F_K^{-1}(p)) \cdot \Phi_{\hat{e}}(F_K^{-1}(p))^\alpha = \pi_p \cdot \Phi_e^\alpha$$

y queda demostrado el item (i). En las ecuaciones anteriores usamos que $(F_K^{-1}(p)) \in \hat{e}$.

Calculemos $\|v_e\|_{L^2(e)}^2$

$$\|v_e\|_{L^2(e)}^2 = \int_K v_e^2 = \int_{\hat{K}} (v_e \circ F_K)^2 |det(B)| = \|v_{\hat{e}}\|_{L^2(\hat{K})}^2 |det(B)|$$

aca usamos el Teorema de cambio de variables. Usando (ii) del Lema 2.5

$$\|v_e\|_{L^2(e)}^2 \leq |det(B)| C_\alpha \epsilon \|\tilde{\pi}_p \Phi_{\hat{e}}^\alpha\|_{L^2(\hat{e})}^2$$

usando el Lema 2.6

$$\|\tilde{\pi}_p \Phi_{\hat{e}}^\alpha\|_{L^2(\hat{e})}^2 = \frac{1}{|e|} \|\pi_p \Phi_e^\alpha\|_{L^2(e)}^2$$

luego

$$\|v_e\|_{L^2(e)}^2 \leq |det(B)| C_\alpha \epsilon \frac{1}{|e|} \|\pi_p \Phi_e^\alpha\|_{L^2(e)}^2$$

mirando la definición de F_K se ve que $|det(B)| = C|K| \leq Ch_K^2$. Luego

$$\|v_e\|_{L^2(e)}^2 \leq C_\alpha \frac{h_K^2}{|e|} \epsilon \|\pi_p \Phi_e^\alpha\|_{L^2(e)}^2$$

por ultimo, usamos que $|e| \geq \rho_K$, y que, por regularidad de la malla, $\rho_K \geq Ch_K$ quedando así demostrado el item (ii).

Finalmente, calculamos $\|\nabla v_e\|_{L^2(K)}^2$

$$\|\nabla v_e\|_{L^2(K)}^2 = \int_K |\nabla v_e|^2 = \int_{\hat{K}} |\nabla v_{\hat{e}} B^{-1}|^2 |det(B)|$$

aca usamos que $\nabla v_e = (\nabla v_{\hat{e}} \circ F_K^{-1}) B^{-1}$ y luego usamos el Teorema de cambio de variables. Aplicando ahora desigualdad trianguar, obtenemos

$$\|\nabla v_e\|_{L^2(K)}^2 \leq \|B^{-1}\|^2 |det(B)| \int_{\hat{K}} |\nabla v_{\hat{e}}|^2 = \|B^{-1}\|^2 |det(B)| \|\nabla v_{\hat{e}}\|_{L^2(\hat{K})}^2$$

usando ahora el item (iii) del Lema 2.5 tenemos que

$$\|\nabla v_e\|_{L^2(K)}^2 \leq \|B^{-1}\|^2 |det(B)| C_\alpha (\epsilon p^{2(2-\alpha)} + \epsilon^{-1}) \|\tilde{\pi}_p \Phi_{\hat{e}}^\alpha\|_{L^2(\hat{e})}^2$$

usando otra vez el Lema 2.6

$$\|\nabla v_e\|_{L^2(K)}^2 \leq \frac{\|B^{-1}\|^2 |\det(B)|}{|e|} C_\alpha (\epsilon p^{2(2-\alpha)} + \epsilon^{-1}) \|\pi_p \Phi_e^\alpha\|_{L^2(e)}^2$$

dado que como mencionamos antes $\frac{|\det(B)|}{|e|} \leq Ch_K$, usando el Lema 2.4 obtenemos

$$\|\nabla v_e\|_{L^2(K)}^2 \leq \frac{1}{h_K} C_\alpha (\epsilon p^{2(2-\alpha)} + \epsilon^{-1}) \|\pi_p \Phi_e^\alpha\|_{L^2(e)}^2$$

y queda demostrado el item (iii). □

3. Indicador local del error

En esta sección vamos a introducir un estimador del error a posteriori y vamos a demostrar su fiabilidad y eficiencia.

Introducimos unas notaciones que vamos a usar en la definición y el análisis del estimador del error. Para $K \in \mathcal{T}^h$ denotamos por $\mathcal{E}_K$ el conjunto de lados de K que no es un segmento del $\partial\Omega$ y definimos $\mathcal{E} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}^h} \mathcal{E}_K$ el conjunto de todos los lados interiores de $\mathcal{T}^h$.

Para todo lado $e \in \mathcal{E}$ elegimos un vector normal y unitario n_e y denotamos a los elementos que componen este lado K_{in} y K_{out} , con n_e apuntando hacia afuera de K_{in} .

Para u_{FE} definimos

$$\left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e = \nabla(u_{FE}|_{K_{out}}) \cdot n_e - \nabla(u_{FE}|_{K_{in}}) \cdot n_e$$

que corresponde al salto de la derivada normal de u_{FE} a lo largo del lado e . Notemos que este valor es independiente de la elección de K_{in} y K_{out} .

De (1.1.2) y (2.1.26) sabemos que

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ a(u_{FE}, v) &= \int_{\Omega} \nabla u_{FE} \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in S_0^{\mathbf{p}}(\Omega, \mathcal{T}^h) \end{aligned}$$

de esto se deduce que si llamamos $e = u - u_{FE}$, entonces e cumple

$$(2.3.36) \quad a(e, v) = 0 \quad \forall v \in S_0^{\mathbf{p}}(\Omega, \mathcal{T}^h)$$

Por otro lado, para $v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(e, v) = \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla v = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K \nabla e \cdot \nabla v$$

integrando por partes resulta

$$\begin{aligned}
(2.3.37) \quad a(e, v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left(- \int_K \Delta e \cdot v + \int_{\partial K} \frac{\partial e}{\partial n} \cdot v \right) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left(- \int_K (\Delta u - \Delta u_{FE}) \cdot v + \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v - \int_{\partial K} \frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \cdot v \right)
\end{aligned}$$

recordando que $-\Delta u = f$ y observando que las derivadas direccionales de u se compensan en los lados interiores, obtenemos:

$$a(e, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K (f + \Delta u_{FE}) \cdot v + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v - \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_{\partial K} \frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \cdot v$$

usando que $v \in H_0^1$ y mirando la definición de $\left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n}\right]_e$ podemos escribir

$$(2.3.38) \quad a(e, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K (f + \Delta u_{FE}) \cdot v + \sum_{e \in \mathcal{E}} \int_e \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n}\right]_e \cdot v$$

a esta ecuación la llamaremos **ecuación del error**.

De la coercitividad de a sabemos que

$$\begin{aligned}
(2.3.39) \quad \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq Ca(u - u_{FE}, u - u_{FE}) \\
&= C(a(u - u_{FE}, u - u_{FE} - I(u - u_{FE})) + a(u - u_{FE}, I(u - u_{FE})))
\end{aligned}$$

usando que el interpolador de Clément $I(u - u_{FE}) \in S_0^{\mathbf{p}}(\Omega, \mathcal{T}^h)$ y (2.3.36) tenemos que

$$\|u - u_{FE}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq Ca(u - u_{FE}, u - u_{FE} - I(u - u_{FE}))$$

llamemos $w = u - u_{FE} - I(u - u_{FE})$, luego la ecuación anterior puede escribirse como

$$\|u - u_{FE}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq Ca(e, w)$$

usando ahora la ecuación del error se tiene que

$$\begin{aligned}
(2.3.40) \quad \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K (f + \Delta u_{FE}) \cdot w + \sum_{e \in \mathcal{E}} \int_e \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n}\right]_e \cdot w \right) \\
&\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \|f + \Delta u_{FE}\|_{L^2(K)} \|w\|_{L^2(K)} + \sum_{e \in \mathcal{E}} \left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n}\right]_e \right\|_{L^2(e)} \|w\|_{L^2(e)} \right)
\end{aligned}$$

Sea V_K un vértice tal que $K \in \omega_{V_K}^1$ y sea V_e un vértice tal que $e \in \mathcal{E}_{V_e}$, estas elecciones son arbitrarias pero fijas. Por el Teorema 2.2 existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|w\|_{L^2(K)} \leq \|w\|_{L^2(\omega_{V_K}^1)} = \|(u - u_{FE}) - I(u - u_{FE})\|_{L^2(\omega_{V_K}^1)} \leq C \frac{h_{V_K}}{p_{V_K}} |u - u_{FE}|_{H_0^1(\omega_{V_K}^j)}$$

y

$$\|w\|_{L^2(e)} = \|(u - u_{FE}) - I(u - u_{FE})\|_{L^2(e)} \leq C \sqrt{\frac{h_{V_e}}{p_{V_e}}} |u - u_{FE}|_{H_0^1(\omega_{V_e}^j)}$$

entonces

$$(2.3.41) \quad \begin{aligned} \|u - u_{FE}\|_{H_0^1}^2 &\leq C \left[\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \frac{h_{V_K}}{p_{V_K}} |u - u_{FE}|_{H_0^1(\omega_{V_K}^j)} \|f + \Delta u_{FE}\|_{L^2(K)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{e \in \mathcal{E}} \left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \right\|_{L^2(e)} \sqrt{\frac{h_{V_e}}{p_{V_e}}} |u - u_{FE}|_{H_0^1(\omega_{V_e}^j)} \right] \end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de definir el indicador local del error.

Para cada $K \in \mathcal{T}^h$ definimos el estimador del error $\eta_{\alpha;K}$, $\alpha \in [0, 1]$, como

$$\eta_{\alpha;K}^2 := \eta_{\alpha;B_K}^2 + \eta_{\alpha;E_K}^2$$

El primer término es el residuo interno pesado dado por

$$\eta_{\alpha;B_K}^2 := \frac{h_K^2}{p_K^2} \|(f_{p_K} + \Delta u_{FE}) \Phi_K^{\alpha/2}\|_{L^2(K)}^2$$

donde f_{p_K} es la $L^2(K)$ -proyección de f en el espacio de polinomios de grado $p_K - 1$. Recordemos que

$$\Phi_K = \Phi_{\hat{K}} \circ F_K^{-1}$$

donde F_K es una transformación afín que manda $\hat{K}$ en K .

El segundo término es el residuo del borde pesado

$$\eta_{\alpha;E_K}^2 := \sum_{e \subset \partial K \cap \Omega} \frac{h_e}{2p_e} \left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \Phi_e^{\alpha/2} \right\|_{L^2(e)}^2$$

donde h_e es la longitud del lado e y $p_e := \max(p_{K_1}, p_{K_2})$, donde K_1 y K_2 son los dos elementos que comparten el lado e .

Recordemos que

$$\Phi_e = \Phi_{\hat{e}} \circ F_K^{-1}$$

donde F_K es, como antes, la transformación afín que manda $\hat{K}$ en K , y $\hat{e}$ en e .

Como es usual el indicador global del error está dado por la suma de las contribuciones locales

$$\eta_{\alpha;\Omega}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \eta_{\alpha;K}^2$$

El siguiente Lema nos permite acotar el error en término de estos estimadores.

LEMA 3.1. *Sea $\alpha \in [0, 1]$. Luego, existe una constante $C > 0$ independiente de h y de $\mathbf{p}$ tal que*

$$\|u - u_{FE}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left[p_K^{2\alpha} \eta_{\alpha;K}^2 + \frac{h_K^2}{p_K^2} \|f_{p_K} - f\|_{L^2(K)}^2 \right]$$

Demostración

De la desigualdad (2.3.41), restando adecuadamente f_{p_K} obtenemos

$$\|u - u_{FE}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left(\eta_{0;B_K}^2 + \frac{h_K^2}{p_K^2} \|f - f_{p_K}\|_{L^2(K)}^2 + \eta_{0;E_K}^2 \right) \right)^{1/2} \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

En este paso, se usa el hecho de que cada elemento K y cada lado e está contenido en un número finito de $\omega_{V_K}^j$ y $\omega_{V_e}^j$. Más aún, las hipótesis (2.1.23) y (2.1.25) garantizan que la constante C es independiente del tamaño de la malla y del orden de aproximación.

Finalmente, usamos las acotaciones inversas para acotar $\eta_{0;B_K}$, $\eta_{0;E_K}$ por $\eta_{\alpha;B_K}$, $\eta_{\alpha;E_K}$. Recordemos que

$$\eta_{\alpha;E_K}^2 := \sum_{e \subset \partial K \cap \Omega} \frac{h_e}{2p_e} \left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \right\|_{L^2(e)}^2$$

llamo $\pi_p = \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e$, sea F_K la transformación considerada en el Lema 2.6, este Lema nos dice que

$$\|\pi_p\|_{L^2(e)}^2 = |e| \|\pi_p \circ F_K\|_{L^2(\hat{e})}^2$$

aplicando ahora el ítem (i) del Lema 2.3 con $\alpha = 0$ y $\beta = \alpha$ tenemos que

$$\int_{\hat{e}} (\pi_p \circ F_K)^2 \leq Cp^{2\alpha} \int_{\hat{e}} \Phi_{\hat{e}}^\alpha (\pi_p \circ F_K)^2$$

volviendo a aplicar el Lema 2.6 tenemos

$$\|\pi_p\|_{L^2(e)}^2 \leq Cp^{2\alpha} \|\pi_p \Phi_e^{\alpha/2}\|_{L^2(e)}$$

Resumiendo, hemos probado que

$$\left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \right\|_{L^2(e)}^2 \leq Cp^{2\alpha} \left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \Phi_e^{\alpha/2} \right\|_{L^2(e)}^2$$

lo que implica

$$(2.3.42) \quad \eta_{0;E_K}^2 \leq Cp_K^{2\alpha} \eta_{\alpha;E_K}^2$$

Recordemos la definición de

$$\eta_{0;B_K}^2 = \frac{h_K^2}{p_K^2} \|f_{p_K} - \Delta u_{FE}\|_{L^2(K)}^2$$

Aplicando el item (i) del Teorema 2.4 con $\alpha = 0$ y $\beta = \alpha$ y $\pi_p = f_{p_K} - \Delta u_{FE}$ nos queda

$$\|\pi_p\|_{L^2(K)}^2 = \int_K \pi_p^2 \leq Cp^{2\alpha} \int_K \Phi_K^\alpha \pi_p^2 = Cp^{2\alpha} \|\Phi_K^{\alpha/2} \pi_p\|_{L^2(K)}^2$$

luego,

$$(2.3.43) \quad \eta_{0;B_K}^2 \leq Cp_K^{2\alpha} \eta_{\alpha;B_K}^2.$$

De (2.3.42) y (2.3.43), se tiene

$$\|u - u_{FE}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left(p_K^{2\alpha} \eta_{\alpha;B_K}^2 + \frac{h_K^2}{p_K^2} \|f - f_{p_K}\|_{L^2(K)}^2 + p_K^{2\alpha} \eta_{\alpha;E_K}^2 \right) \right)^{1/2} \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

lo que completa la demostración. $\square$

OBSERVACIÓN 3.1. *Notemos que la cota superior del error dada en el Lema 3.1 depende de $\mathbf{p}$ si $\alpha \neq 0$ y que este hecho es consecuencia de las estimaciones inversas para polinomios.*

El siguiente Lema provee una acotación por arriba del residuo interno pesado $\eta_{\alpha;B_K}$ en términos del error de elementos finitos. La acotación es independiente de $\mathbf{p}$ sólo cuando $\alpha = 1$.

LEMA 3.2. *Sean $\alpha \in [0, 1]$, $\epsilon > 0$. Luego, existe una constante $C(\epsilon) > 0$ independiente de h , $\mathbf{p}$, y de $K \in \mathcal{T}^h$ tal que*

$$\eta_{\alpha;B_K}^2 \leq C(\epsilon) \left\{ p_K^{2(1-\alpha)} \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K)}^2 + p_K^m \frac{h_K^2}{p_K^2} \|f_{p_K} - f\|_{L^2(K)}^2 \right\}$$

donde $m = \max\{1 + 2\epsilon - 2\alpha, 0\}$.

Demostración: Definimos $v_K := (f_{p_K} + \Delta u_{FE})\Phi_K^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, extendiendola por cero en $\Omega \setminus K$, luego

$$\begin{aligned} \|v_K \Phi_K^{-\alpha/2}\|_{L^2(K)}^2 &= \int_K v_K^2 \Phi_K^{-\alpha} dx dy = \int_K (f_{p_K} + \Delta u_{FE}) \Phi_K^\alpha v_K \Phi_K^{-\alpha} dx dy \\ (2.3.44) \quad &= \int_K (f_{p_K} + \Delta u_{FE}) v_K dx dy \\ &= \int_K (f + \Delta u_{FE}) v_K dx dy + \int_K (f_{p_K} - f) v_K dx dy \end{aligned}$$

acotemos el primer término. Aplicando el Teorema de Green

$$\begin{aligned} \int_K (f + \Delta u_{FE}) v_K &= - \int_K \Delta(u - u_{FE}) v_K \\ &= \int_K \nabla(u - u_{FE}) \cdot \nabla(v_K) - \int_{\partial K} \frac{\partial(u - u_{FE})}{\partial n} \cdot v_K \end{aligned}$$

como $v_K|_{\partial K} = 0$ entonces

$$\begin{aligned} (2.3.45) \quad \int_K (f + \Delta u_{FE}) v_K &= \int_K \nabla(u - u_{FE}) \cdot \nabla(v_K) \\ &\leq \|\nabla(u - u_{FE})\|_{L^2(K)} \|\nabla(v_K)\|_{L^2(K)} \leq \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K)} |v_K|_{H_0^1(K)} \end{aligned}$$

Para acotar el segundo término usamos Hölder

$$\int_K (f_{p_K} - f) v_K dx dy \leq \|(f_{p_K} - f) \Phi_K^{\alpha/2}\|_{L^2(K)} \|v_K \Phi_K^{-\alpha/2}\|_{L^2(K)}$$

Resumiendo

$$(2.3.46) \quad \|v_K \Phi_K^{-\alpha/2}\|_{L^2(K)}^2 \leq \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K)} |v_K|_{H_0^1(K)} + \|(f_{p_K} - f) \Phi_K^{\alpha/2}\|_{L^2(K)} \|v_K \Phi_K^{-\alpha/2}\|_{L^2(K)}$$

Ahora vamos a considerar en más detalle la seminorma de v_K .

$$|v_K|_{H_0^1(K)}^2 = \int_K |\nabla v_K|^2 dx dy$$

calculemos ∇v_K

$$\nabla v_K = (\nabla(f_{p_K} + \Delta u_{FE})) \Phi_K^\alpha + (f_{p_K} + \Delta u_{FE}) \nabla(\Phi_K^\alpha)$$

luego,

$$\begin{aligned} (2.3.47) \quad |\nabla v_K|^2 &\leq 2 |(\nabla(f_{p_K} + \Delta u_{FE})) \Phi_K^\alpha|^2 + 2 |(f_{p_K} + \Delta u_{FE}) \nabla(\Phi_K^\alpha)|^2 \\ &= 2 |(\nabla(f_{p_K} + \Delta u_{FE}))|^2 \Phi_K^{2\alpha} + 2 (f_{p_K} + \Delta u_{FE})^2 |\nabla(\Phi_K^\alpha)|^2 \end{aligned}$$

entonces

$$|v_K|_{H_0^1(K)}^2 \leq 2 \int_K |(\nabla(f_{p_K} + \Delta u_{FE}))|^2 \Phi_K^{2\alpha} + 2 \int_K (f_{p_K} + \Delta u_{FE})^2 |\nabla(\Phi_K^\alpha)|^2$$

acotemos $|\nabla(\Phi_K^\alpha)|^2$

$$(2.3.48) \quad \nabla(\Phi_K^\alpha) = \alpha(\Phi_K)^{\alpha-1} \nabla(\Phi_K) = \alpha(\Phi_K)^{\alpha-1} \nabla(\Phi_{\hat{K}} \circ F_K^{-1}) B^{-1}$$

luego,

$$|\nabla(\Phi_K^\alpha)|^2 \leq C_\alpha \Phi_K^{2(\alpha-1)} |\nabla(\Phi_{\hat{K}} \circ F_K^{-1})|^2 \|B^{-1}\|^2$$

usando el Lema 2.4 se tiene $\|B^{-1}\|^2 \leq \frac{C}{h_K^2}$, luego

$$|\nabla(\Phi_K^\alpha)|^2 \leq C_\alpha \Phi_K^{2(\alpha-1)} |\nabla \Phi_{\hat{K}}|_{\infty, \hat{K}} \frac{C}{h_K^2}$$

entonces

$$|v_K|_{H_0^1(K)}^2 \leq 2 \int_K |(\nabla(f_{p_K} + \Delta u_{FE}))|^2 \Phi_K^{2\alpha} + \frac{C_\alpha}{h_K^2} \int_K (f_{p_K} + \Delta u_{FE})^2 \Phi_K^{2(\alpha-1)}$$

usando el item (ii) del Teorema 2.4 para acotar la integral de la izquierda

$$|v_K|_{H_0^1(K)}^2 \leq C \frac{p_K^{2(2-\alpha)}}{h_K^2} \int_K (f_{p_K} + \Delta u_{FE})^2 \Phi_K^\alpha + \frac{C_\alpha}{h_K^2} \int_K (f_{p_K} + \Delta u_{FE})^2 \Phi_K^{2(\alpha-1)}$$

para $\alpha > 1/2$, podemos usar el item (i) del Teorema 2.4 para acotar la integral de la derecha

$$|v_K|_{H_0^1(K)}^2 \leq C \frac{p_K^{2(2-\alpha)}}{h_K^2} \int_K (f_{p_K} + \Delta u_{FE})^2 \Phi_K^\alpha + C \frac{p_K^{2(2-\alpha)}}{h_K^2} \int_K (f_{p_K} + \Delta u_{FE})^2 \Phi_K^\alpha$$

entonces, tenemos que

$$|v_K|_{H_0^1(K)}^2 \leq C \frac{p_K^{2(2-\alpha)}}{h_K^2} \int_K (f_{p_K} + \Delta u_{FE})^2 \Phi_K^\alpha = C p_K^{2(1-\alpha)} \frac{p_K^2}{h_K^2}$$

lo que implica

$$|v_K|_{H_0^1(K)} \leq C p_K^{(1-\alpha)} \frac{p_K}{h_K} \|v_K \Phi_K^{-\alpha/2}\|_{L^2(K)}$$

usando esta acotación en la ecuación (2.3.46), obtenemos

$$\|v_K \Phi_K^{-\alpha/2}\|_{L^2(K)} \leq C \left(\|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K)} p_K^{1-\alpha} \frac{p_K}{h_K} + \|(f_{p_K} - f) \Phi_K^{\alpha/2}\|_{L^2(K)} \right)$$

como por definición $\|v_K \Phi_K^{-\alpha/2}\|_{L^2(K)} = \frac{p_K}{h_K} \eta_{\alpha; B_K}$, tenemos

$$(2.3.49) \quad \eta_{\alpha; B_K} \leq C \left(p_K^{1-\alpha} \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K)} + \frac{h_K}{p_K} \|f_{p_K} - f\|_{L^2(K)} \right)$$

Para obtener la acotación por arriba en el caso $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ vamos a usar primero el item (i) del Teorema 2.4 y luego la acotación (2.3.49). Para $\beta > 1/2$, por el item (i) del Teorema 2.4

$$\begin{aligned}
(2.3.50) \quad \frac{p_K}{h_K} \eta_{\alpha; B_K} &= \|(f_{p_K} - \Delta u_{FE}) \Phi_K^{\alpha/2}\|_{L^2(K)} = \left(\int_K (f_{p_K} - \Delta u_{FE})^2 \Phi_K^\alpha \right)^{1/2} \\
&\leq \left(C p_K^{2(\beta-\alpha)} \int_K \Phi_K^\beta (f_{p_K} - \Delta u_{FE})^2 \right)^{1/2} = C p_K^{\beta-\alpha} \frac{p_K}{h_K} \eta_{\beta; B_K}
\end{aligned}$$

ahora podemos usar (2.3.49) para $\eta_{\beta; B_K}$ ya que $\beta > 1/2$, y obtenemos

$$(2.3.51) \quad \frac{p_K}{h_K} \eta_{\alpha; B_K} \leq C p_K^{\beta-\alpha} \frac{p_K}{h_K} \left(p_K^{1-\beta} \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K)} + \frac{h_K}{p_K} \|f_{p_K} - f\|_{L^2(K)} \right)$$

simplificando

$$\begin{aligned}
(2.3.52) \quad \eta_{\alpha; B_K} &\leq C p_K^{\beta-\alpha} \left(p_K^{1-\beta} \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K)} + \frac{h_K}{p_K} \|f_{p_K} - f\|_{L^2(K)} \right) \\
&= C \left(p_K^{1-\alpha} \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K)} + p_K^{\beta-\alpha} \frac{h_K}{p_K} \|f_{p_K} - f\|_{L^2(K)} \right)
\end{aligned}$$

tomando $\beta = 1/2 + \epsilon$, $\epsilon > 0$

$$\eta_{\alpha; B_K} \leq C(\epsilon) \left(p_K^{1-\alpha} \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K)} + p_K^{1/2+\epsilon-\alpha} \frac{h_K}{p_K} \|f_{p_K} - f\|_{L^2(K)} \right)$$

lo que completa la demostración. $\square$

Para obtener una cota superior del indicador del error local $\eta_{\alpha; K}$, tenemos que considerar también la contribución del lado $\eta_{\alpha; E_K}$. Introducimos el conjunto

$$\omega_K := \bigcup \{K' \mid K' \text{ y } K \text{ tienen al menos un lado en común}\}.$$

LEMA 3.3. Sea $\alpha \in [0, 1]$, $\delta > 0$. Luego existe $C(\delta) > 0$ independiente de h y de $\mathbf{p}$, y $K \in \mathcal{T}^h$ tal que

$$\eta_{\alpha; E_K}^2 \leq C p_K^m \left(p_K \|u - u_{FE}\|_{H^1(\omega_K)} + p_K^{2\delta} \frac{h_K^2}{p_K^2} \|f_{p_K} - f\|_{L^2(\omega_K)}^2 \right)$$

donde $m = \max\{1 - 2\alpha + 2\delta, 0\}$

Demostración: Primero vamos a considerar el caso $\alpha > 1/2$ para poder aplicar el Lema 2.7. Sea e un lado interior de K , sea $K_1 \in \mathcal{T}^h$ tal que $\partial K_1 \cap \partial K = e$ (K_1 existe pues e es interior). Sea $\pi = [\frac{\partial u_{FE}}{\partial n}]_e$, es un polinomio en cada $K \in \mathcal{T}^h$, entonces puedo aplicar el Lema 2.7: existen $w_e^K \in H^1(K)$ y $w_e^{K_1} \in H^1(K_1)$ cumpliendo (i), (ii), y (iii) de ese Lema. Llamamos $K_e = K \cup K_1$. Definimos w_e en K_e del siguiente modo: $w_e|_K = w_e^K$ y $w_e|_{K_1} = w_e^{K_1}$, como $w_e^K|_e = w_e^{K_1}|_e$ es claro que w_e es continua y además

$w_e|_{\partial K_e} = 0$. Extendiendo w_e por 0 en $\Omega \setminus K_e$ se tiene $w_e \in H_0^1(\Omega)$. Tenemos entonces que

$$\left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \Phi_e^{\alpha/2} \right\|_{L^2(e)}^2 = \|w_e \Phi_e^{-\alpha/2}\|_{L^2(e)}^2 = \int_e w_e^2 \Phi_e^{-\alpha} = \int_e \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e w_e$$

como

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e &= \nabla(u_{FE}|_{K_{out}}) \cdot n_e - \nabla(u_{FE}|_{K_{in}}) \cdot n_e \\ (2.3.53) \quad &= -\frac{\partial(u_{FE}|_{K_{out}})}{\partial n} - \frac{\partial(u_{FE}|_{K_{in}})}{\partial n} \end{aligned}$$

entonces

$$\left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \Phi_e^{\alpha/2} \right\|_{L^2(e)}^2 = - \int_e \frac{\partial(u_{FE}|_{K_{out}})}{\partial n} \cdot w_e - \int_e \frac{\partial(u_{FE}|_{K_{in}})}{\partial n} \cdot w_e$$

usando el Teorema de Green,

$$\begin{aligned} \left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \Phi_e^{\alpha/2} \right\|_{L^2(e)}^2 &= - \int_{K_{out}} \nabla u_{FE} \cdot \nabla w_e - \int_{K_{in}} \nabla u_{FE} \cdot \nabla w_e \\ (2.3.54) \quad &- \int_{K_{out}} \Delta u_{FE} \cdot w_e - \int_{K_{in}} \Delta u_{FE} \cdot w_e \\ &= - \int_{K_e} \nabla u_{FE} \cdot \nabla w_e - \int_{K_e} \Delta u_{FE} \cdot w_e \end{aligned}$$

Ahora sumando y restando f en el segundo término resulta

$$\int_{K_e} \Delta u_{FE} \cdot w_e = \int_{K_e} (f + \Delta u_{FE}) \cdot w_e + \int_{K_e} (-f) \cdot w_e$$

usando que $-f = \Delta u$ tenemos

$$\int_{K_e} \Delta u_{FE} \cdot w_e = \int_{K_e} (f + \Delta u_{FE}) \cdot w_e + \int_{K_e} \Delta u \cdot w_e$$

si aplicamos el Teorema de Green al segundo término, este queda

$$\int_{K_e} \Delta u \cdot w_e = \int_{\partial K_e} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot w_e - \int_{K_e} \nabla u \cdot \nabla w_e$$

como $w_e|_{\partial K_e} = 0$ nos queda

$$\int_{K_e} \Delta u \cdot w_e = - \int_{K_e} \nabla u \cdot \nabla w_e$$

entonces

(2.3.55)

$$\begin{aligned} \left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \Phi_e^{\alpha/2} \right\|_{L^2(e)}^2 &= - \int_{K_e} \nabla u_{FE} \cdot \nabla w_e - \int_{K_e} (f + \Delta u_{FE}) \cdot w_e + \int_{K_e} \nabla u \cdot \nabla w_e \\ &= \int_{K_e} \nabla(u - u_{FE}) \cdot \nabla w_e - \int_{K_e} (f + \Delta u_{FE}) \cdot w_e \end{aligned}$$

usando Hölder

(2.3.56)

$$\left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \Phi_e^{\alpha/2} \right\|_{L^2(e)}^2 \leq \|u - u_{FE}\|_{H^1(K_e)} \|w_e\|_{H_0^1(K_e)} + \|f + \Delta u_{FE}\|_{L^2(K_e)} \|w_e\|_{L^2(K_e)}$$

Usando los items (ii) y (iii) del Lema 2.7, y el hecho de que los lados vecinos son comparables, tenemos

$$\begin{aligned} |w_e|_{H_0^1(K_e)}^2 &\leq C \frac{1}{h_K} (\epsilon p_K^{2(2-\alpha)} + \epsilon^{-1}) \left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \Phi_e^{\alpha/2} \right\|_{L^2(e)}^2 \\ \|w_e\|_{L^2(K_e)}^2 &\leq C h_K \epsilon \|w_e\|_{L^2(K_e)} \left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \Phi_e^{\alpha/2} \right\|_{L^2(e)}^2 \end{aligned}$$

usando estas acotaciones en (2.3.56), obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \Phi_e^{\alpha/2} \right\|_{L^2(e)} &\leq C \left\{ \left(\frac{1}{h_K} (\epsilon p_K^{2(2-\alpha)} + \epsilon^{-1}) \right)^{1/2} \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K_e)} \right. \\ &\quad \left. + (h_K \epsilon)^{1/2} \|f + \Delta u_{FE}\|_{L^2(K_e)} \right\} \end{aligned}$$

esto implica que

$$\begin{aligned} \left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \Phi_e^{\alpha/2} \right\|_{L^2(e)}^2 &\leq C \left\{ \frac{1}{h_K} (\epsilon p_K^{2(2-\alpha)} + \epsilon^{-1}) \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K_e)}^2 \right. \\ &\quad \left. + h_K \epsilon \|f + \Delta u_{FE}\|_{L^2(K_e)}^2 \right\} \end{aligned}$$

sumando y restando f_{p_K}

$$\begin{aligned} (2.3.57) \quad \left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \Phi_e^{\alpha/2} \right\|_{L^2(e)}^2 &\leq C \left\{ \frac{1}{h_K} (\epsilon p_K^{2(2-\alpha)} + \epsilon^{-1}) \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K_e)}^2 \right. \\ &\quad \left. + h_K \epsilon \|f - f_{p_K}\|_{L^2(K_e)}^2 + h_K \epsilon \|f_{p_K} + \Delta u_{FE}\|_{L^2(K_e)}^2 \right\} \end{aligned}$$

observemos que

$$\|f_{p_K} + \Delta u_{FE}\|_{L^2(K_e)}^2 = \eta_{0;B_{K_1}}^2 \frac{p_{K_1}^2}{h_{K_1}^2} + \eta_{0;B_K}^2 \frac{p_K^2}{h_K^2}$$

y por la ecuación (2.3.51), con $\beta = 1/2 + \delta$

$$\eta_{0;B_K}^2 \frac{p_K^2}{h_K^2} \leq C(\alpha, \delta) \left(p_K^{2(1-\alpha)} \frac{p_K^2}{h_K^2} \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K)}^2 + p_K^{1+2\delta-2\alpha} \|f_{p_K} - f\|_{L^2(K)}^2 \right)$$

Lo mismo podemos hacer en K_1 , y como los elementos vecinos son comparables, tenemos

$$\|f_{p_K} - \Delta u_{FE}\|_{L^2(K_e)}^2 \leq C \left(p_K^{2(1-\alpha)} \frac{p_K^2}{h_K^2} \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K_e)}^2 + p_K^{1+2\delta-2\alpha} \|f_{p_K} - f\|_{L^2(K_e)}^2 \right)$$

usando esta acotación en la ecuación (2.3.57), obtenemos

$$\left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \Phi_e^{\alpha/2} \right\|_{L^2(e)}^2 \leq C \left\{ \left(\frac{1}{h_K} (\epsilon p_K^{2(2-\alpha)} + \epsilon^{-1}) + h_K \epsilon p_K^{2(1-\alpha)} \frac{p_K^2}{h_K^2} \right) \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K_e)}^2 + (h_K \epsilon p_K^{1+2\delta-2\alpha}) \|f - f_{p_K}\|_{L^2(K_e)}^2 \right\}$$

esto vale para todo $\epsilon > 0$, eligiendo $\epsilon = \frac{1}{p_K^2}$, tenemos

$$\left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n} \right]_e \Phi_e^{\alpha/2} \right\|_{L^2(e)}^2 \leq C \left\{ \left(\frac{p_K^{2(1-\alpha)}}{h_K} + \frac{p_K^2}{h_K} + \frac{p_K^{2(1-\alpha)}}{h_K} \right) \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K_e)}^2 + \left(\frac{h_K}{p_K} p_K^{2\delta-2\alpha} \right) \|f - f_{p_K}\|_{L^2(K_e)}^2 \right\}$$

usando que $\frac{h_e}{p_e} \leq C \frac{h_K}{p_K}$, $\|u - u_{FE}\|_{H_0^1(K_e)} \leq \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(\omega_K)}$ y $\|f_{p_K} - f\|_{L^2(K_e)} \leq \|f_{p_K} - f\|_{L^2(\omega_K)}$, tenemos

$$\eta_{\alpha;E_K}^2 \leq C(\alpha) \left\{ (p_K^{1-2\alpha} + p_K + p_K^{1-2\alpha}) \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(\omega_K)}^2 + \frac{h_K^2}{p_K^2} p_K^{2\delta-2\alpha} \|f_{p_K} - f\|_{L^2(\omega_K)}^2 \right\}$$

ahora, usamos que $1 - 2\alpha \leq 1$ y que $2\delta - 2\alpha \leq 2\delta$

$$(2.3.58) \quad \eta_{\alpha;E_K}^2 \leq C(\alpha) \left\{ p_K \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(\omega_K)}^2 + \frac{h_K^2}{p_K^2} p_K^{2\delta} \|f_{p_K} - f\|_{L^2(\omega_K)}^2 \right\}$$

luego, queda demostrado el Lema para $\alpha > 1/2$ pues $1 \leq p_K^m$.

Veamos ahora el caso $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Llamando $\beta = 1/2 + \delta$, usando las acotaciones del Lema 2.4, como vimos antes, se puede demostrar que

$$\eta_{\alpha;E_K}^2 \leq C(\alpha, \delta) p_K^{2(\beta-\alpha)} \eta_{\beta;E_K}^2$$

y usando el resultado para β , tenemos

$$(2.3.59) \quad \eta_{\alpha;E_K}^2 \leq C(\alpha, \delta) p_K^{1+2\delta-2\alpha} \left\{ p_K \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(\omega_K)}^2 + \frac{h_K^2}{p_K^2} p_K^{2\delta} \|f_{p_K} - f\|_{L^2(\omega_K)} \right\}$$

esto concluye la demostración. $\square$

De los Lemas 3.1, 3.2 y 3.3, se deduce el siguiente Teorema que establece la confiabilidad y eficiencia del estimador

TEOREMA 3.1. *Sea $\alpha \in [0, 1]$, $\epsilon > 0$. Luego existen $C_1, C_2 > 0$ independientes de $h, \mathbf{p}$ tal que*

$$\begin{aligned} \|u - u_{FE}\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C_1 \sum_{K \in T^h} \left(p_K^{2\alpha} \eta_{\alpha;K} + \frac{h_K^2}{p_K^2} \|f - f_{p_K}\|_{L^2(K)}^2 \right) \\ \eta_{\alpha;K}^2 &\leq C_2(\epsilon) p_K^m \left(p_K \|u - u_{FE}\|_{H_0^1(\omega_K)}^2 + \frac{h_K^2}{p_K^2} p_K^{2\epsilon} \|f_{p_K} - f\|_{L^2(\omega_K)} \right) \end{aligned}$$

donde $m = \max(1 - 2\alpha + 2\epsilon, 0)$. $\square$

CHAPTER 3

Experimentos numéricos

En este capítulo, seguiremos la estrategia dada por Melenk y Wolmuth en [20] y presentaremos un algoritmo adaptativo de refinamiento, basado en el estimador local del error estudiado en el capítulo anterior, y mostraremos ejemplos que ponen de manifiesto la buena performance del algoritmo propuesto.

Notemos que si reemplazamos las funciones Φ_K^α , definidas en el capítulo previo, por $C_{\alpha;K}\Phi_K^\alpha$ y Φ_e^α por $C_{\alpha;e}\Phi_e^\alpha$, todas las estimaciones del capítulo anterior siguen valiendo.

Por ende, siempre se pueden elegir las constantes de forma tal que

$$\int_K C_{\alpha;K}\Phi_K^\alpha dx dy = 1, \quad \int_e C_{\alpha;e}\Phi_e^\alpha dx = 1.$$

En lo que sigue, nosotros vamos a tomar $\alpha = 0$.

1. Estrategia de refinamiento adaptativo

Muchos códigos adaptativos de h-FEM usan la estrategia de un valor promedio para determinar cuáles elementos deberían ser refinados. En esta estrategia, el valor promedio $\bar{\eta}_0$ está definido por

$$(3.1.60) \quad \bar{\eta}_0^2 := \frac{1}{\#\mathcal{T}^h} \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \eta_{0;K}^2$$

y todos los elementos K con $\eta_{0;K}^2 \geq \sigma \bar{\eta}_0^2$ son marcados para ser refinados ($\sigma \in (0, 1)$ es un parámetro). La estrategia del valor promedio está motivada por la idea de que asintóticamente el error debería estar distribuido uniformemente a través de todos los elementos. El refinamiento consiste en refinar h o en refinar p . En el caso que tengamos que refinar p en un elemento K , el grado p_K del elemento K es incrementado en 1 y el elemento K sigue fijo. Si tenemos que refinar h en K , el elemento K es dividido en cuatro subelementos, y estos subelementos K_s , $1 \leq s \leq 4$, heredan el grado que tenía K , o sea $p_{K_s} := p_K$. Para que la malla siga siendo admisible, es posible que muchos elementos que en principio no fueron marcados para un refinamiento h , queden ahora divididos en dos o tres subelementos. Por esto, en general tenemos que $K = \cup_{j=1}^k K'_j$ con $k = 2, 3$ o 4 .

El problema principal en adaptatividad hp es decidir si refinar h o p en un elemento K marcado para ser refinado. Muchas estrategias de refinamiento hp están basadas en

estimar explícitamente la regularidad local de la solución, ver por ejemplo [2, 3, 12]. Nosotros proponemos un enfoque modificado, que está basado en la comparación del estimador del error actual de un elemento con un predictor del error obtenido en un paso anterior.

Describamos ahora el predictor de cada paso de refinamiento, si en un paso hicimos un refinamiento h en un elemento $K = \cup_{j=1}^k K'_j$ con $k = 2, 3$ o 4 , luego el predictor del indicador es definido así:

$$(\eta_{0;K'_j}^{pred})^2 := \gamma_h \left(\frac{|K'_j|}{|K|} \right)^{p_K+1} \eta_{0;K}^2$$

donde γ_h es un parámetro de control a ser determinado. Por otro lado, si en un paso anterior hicimos un refinamiento p en el elemento K , luego el predictor del indicador está definido por:

$$\left(\eta_{0;K}^{pred} \right)^2 := \gamma_p \eta_{0;K}^2,$$

donde $\gamma_p \in (0, 1)$ es un factor de reducción elegido arbitrariamente.

Finalmente para los elementos que no fueron refinados en el paso previo

$$\left(\eta_{0;K}^{pred} \right)^2 := \gamma_n \left(\eta_{0;K}^{pred} \right)^2,$$

donde γ_n es un factor de reducción o de amplificación también elegido arbitrariamente.

En todos los casos, se procede a un refinamiento h si el indicador del error $\eta_{0;K}$ es más grande que el predictor del indicador $\eta_{0;K}^{pred}$ y sino a un refinamiento p .

Con todo esto, llegamos al siguiente algoritmo

Algoritmo de refinamiento

Si $\eta_{0;K}^2 \geq \sigma \bar{\eta}_0^2$ entonces
 si $\eta_{0;K}^2 \geq \left(\eta_{0;K}^{pred}\right)^2$ entonces
 subdividir K en 4 subelementos K'_j , $1 \leq j \leq 4$
 subdividir los elementos necesarios para que la malla quede admisible
 $p'_{K_j} := p_K$
 $\left(\eta_{0;K'_j}^{pred}\right)^2 := \gamma_h \left(\frac{|K'_j|}{|K|}\right)^{p_K+1} \eta_{0;K}^2$
 sino
 $p_K := p_K + 1$
 $\left(\eta_{0;K}^{pred}\right)^2 := \gamma_p \eta_{0;K}^2$
 fin
 sino
 $\left(\eta_{0;K}^{pred}\right)^2 := \gamma_n \left(\eta_{0;K}^{pred}\right)^2$
 fin

2. Ejemplos Numéricos

Vamos a aplicar el algoritmo adaptativo al problema modelo (1.1.1) con dos dominios distintos: el cuadrado $Q = (0, 1) \times (0, 1)$ y el dominio en forma de L , $\Omega_L = (-1, 1)^2 \setminus (0, 1)^2$.

En ambos casos vamos a elegir $\eta_{0;K}^{pred} := 0$ en todos los elementos K de la malla inicial, por esto en el primer paso se hace un refinamiento h en todos los elementos.

Los parámetros elegidos en los dos ejemplos son:

$$\begin{aligned} \sigma &= 0.9 \\ \gamma_h &= 20 \\ \gamma_p &= 0.5 \\ \gamma_n &= 2 \end{aligned}$$

Los diferentes colores, presentes en todas las figuras, indican los grados del polinomio en cada elemento de la malla.

En [17, 18] Guo y Babuska muestran que una combinación apropiada en la elección de h y p permite obtener un radio de convergencia

$$|e|_{1,\Omega} \leq C e^{-\alpha\sqrt{N}},$$

donde N es el número de grados de libertad en la aproximación de elementos finitos. Presentaremos gráficos del logaritmo del error (o del estimador) vs. el número de grados de libertad que muestran que dicho radio de convergencia es alcanzado.

2.1. Ejemplo 1: Dominio cuadrado. Consideremos el problema (1.1.1) en Q con solución exacta $u(x, y) = x(1-x)y(1-y)(x+y)^{3/2}$, que tiene una leve singularidad en el origen.

En la Figura 1 mostramos la malla inicial, inicialmente tomamos grado 1 en todos los elementos. Las Figuras 2 -3 muestran distintas mallas obtenidas con el algoritmo hp adaptativo hasta el paso 14.

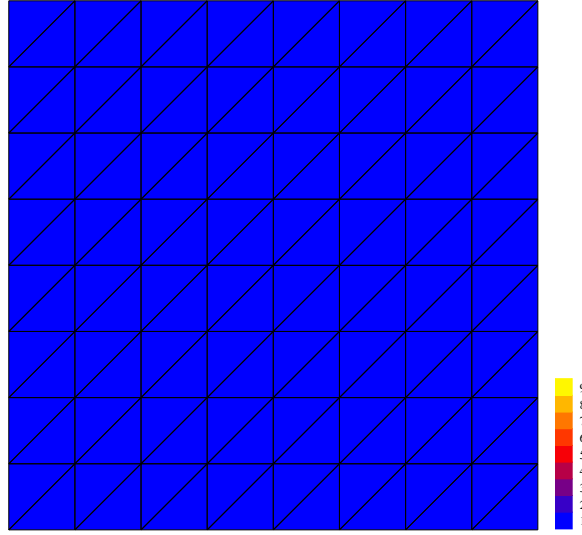


FIGURE 1. Dominio y malla inicial

La Figura 4 muestra un gráfico de la solución y las curvas de nivel de la solución del problema (1.2.3).

Por último la Figura 5 nos da los gráficos del error $\|u - u_{FE}\|_{1,\Omega}$ y del logaritmo del error versus $\sqrt{N}$.

2.2. Ejemplo 2: Dominio en forma de L. En este caso consideramos el problema modelo (1.1.1) con $f = 1$ en el dominio L-shaped $\Omega_L = (-1, 1)^2 \setminus (0, 1)^2$. A diferencia del caso anterior no conocemos la solución analítica.

En la Figura 6 mostramos la malla inicial, inicialmente tomamos grado 1 en todos los elementos. Las Figuras 7 -12 muestran distintas mallas obtenidas con el algoritmo hp adaptativo hasta el paso 30.

En la Figura 13 se muestra una secuencia de zooms de la malla del paso 30 alrededor del ángulo reentrante.

La Figura 14 nos da el gráfico de $\log \eta_\Omega$ versus $\sqrt{N}$, que nos muestra que el estimador de error η_Ω alcanza dicho radio exponencial de convergencia para nuestro problema modelo.

Por último la Figura 15 muestra las curvas de nivel de la solución del problema 1.2.3.

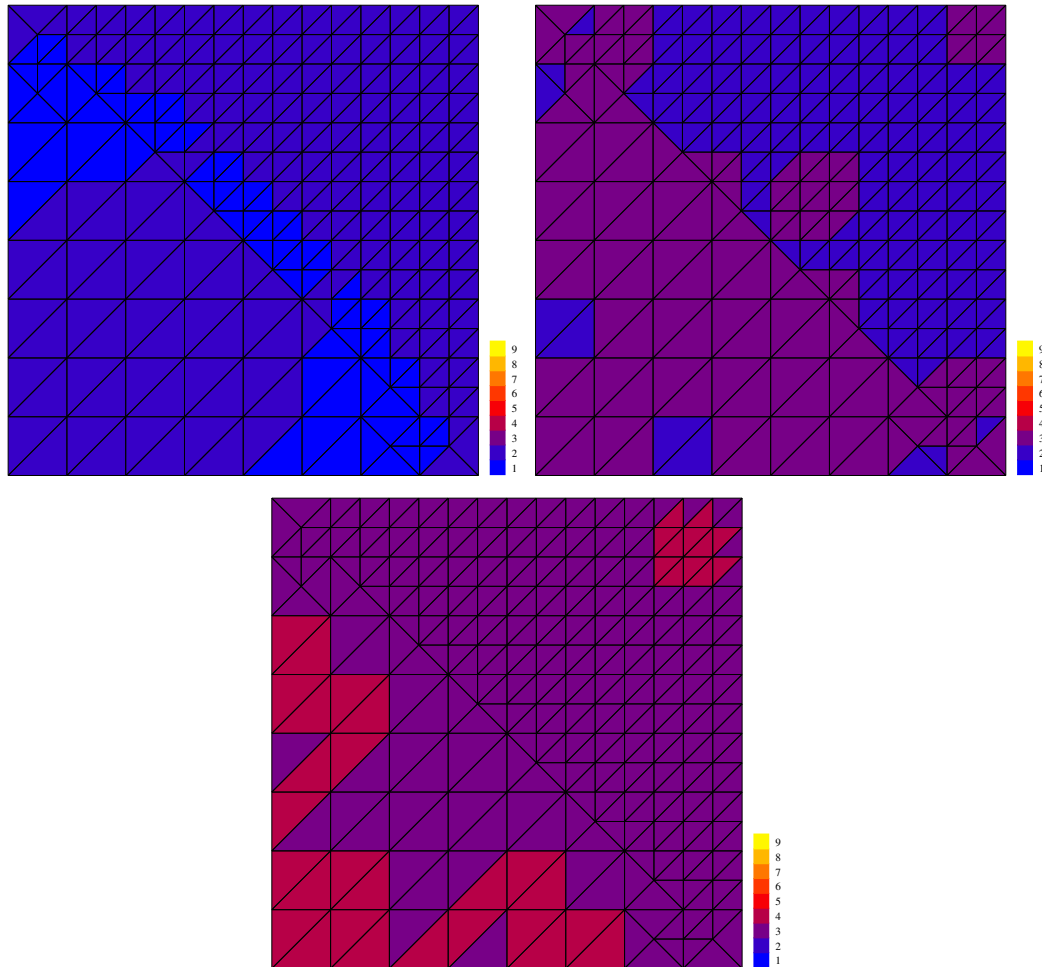


FIGURE 2. Malla después de 2, 4 y 6 refinamientos

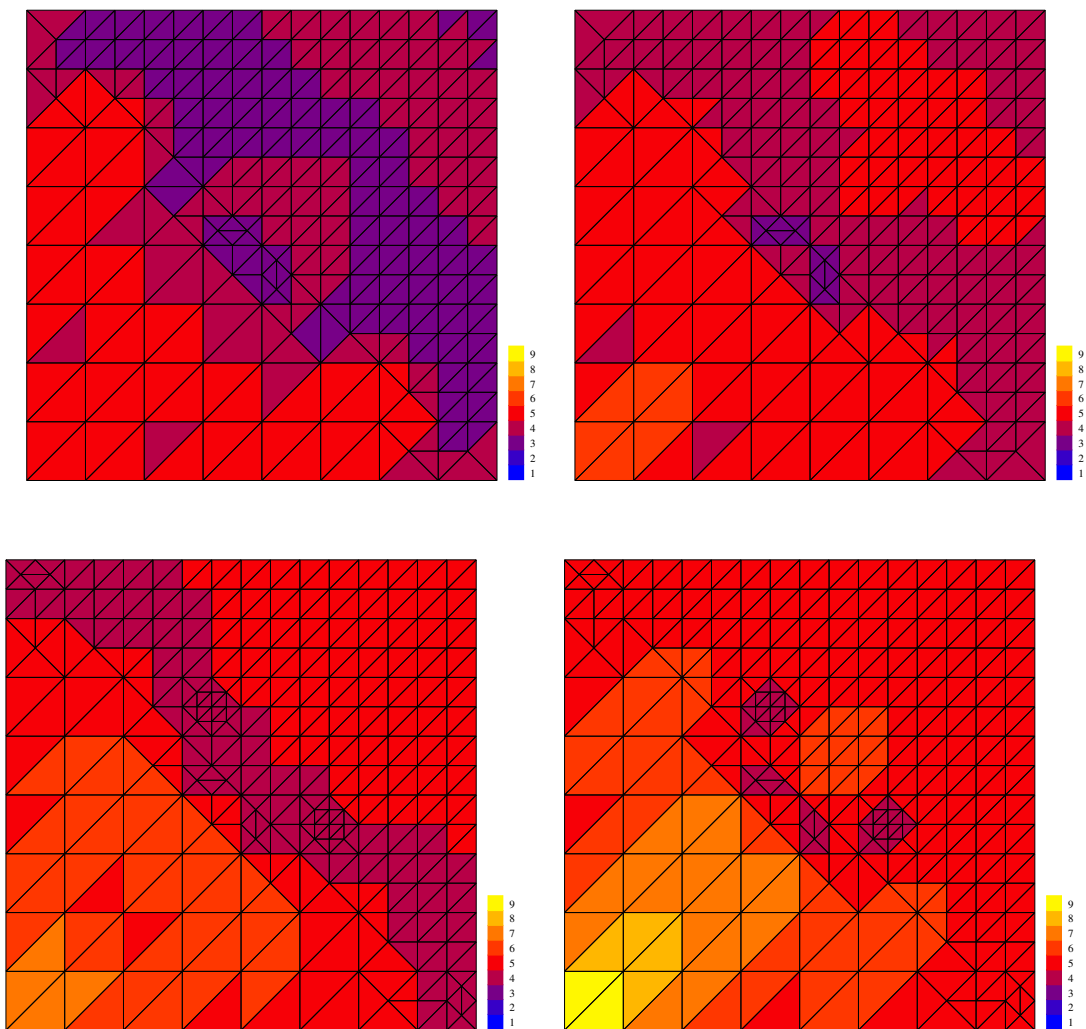


FIGURE 3. Malla después de 8, 10 , 12 y 14 refinamientos

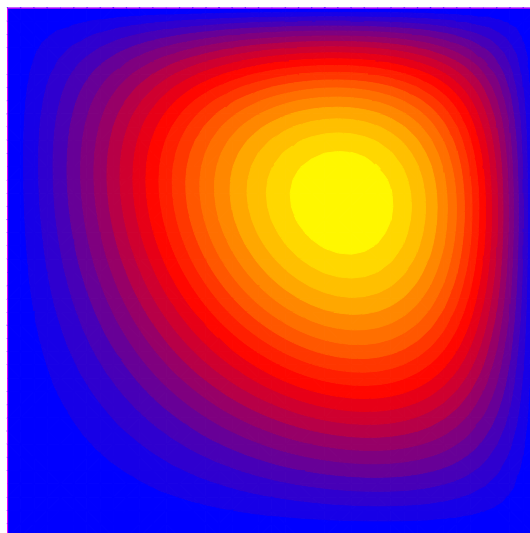
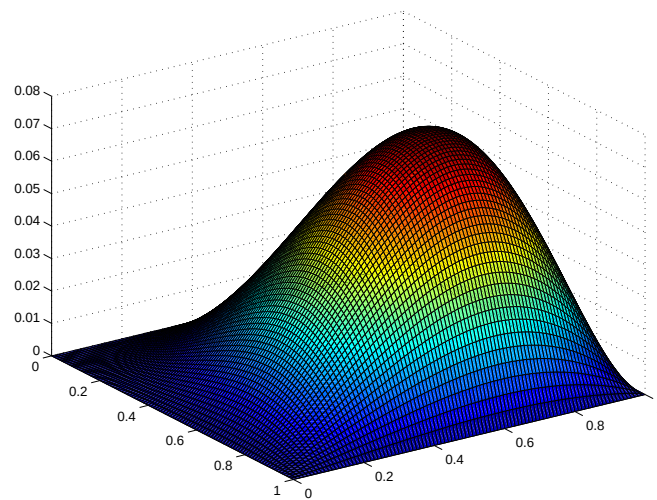


FIGURE 4. Solución numérica y curvas de nivel de la solución

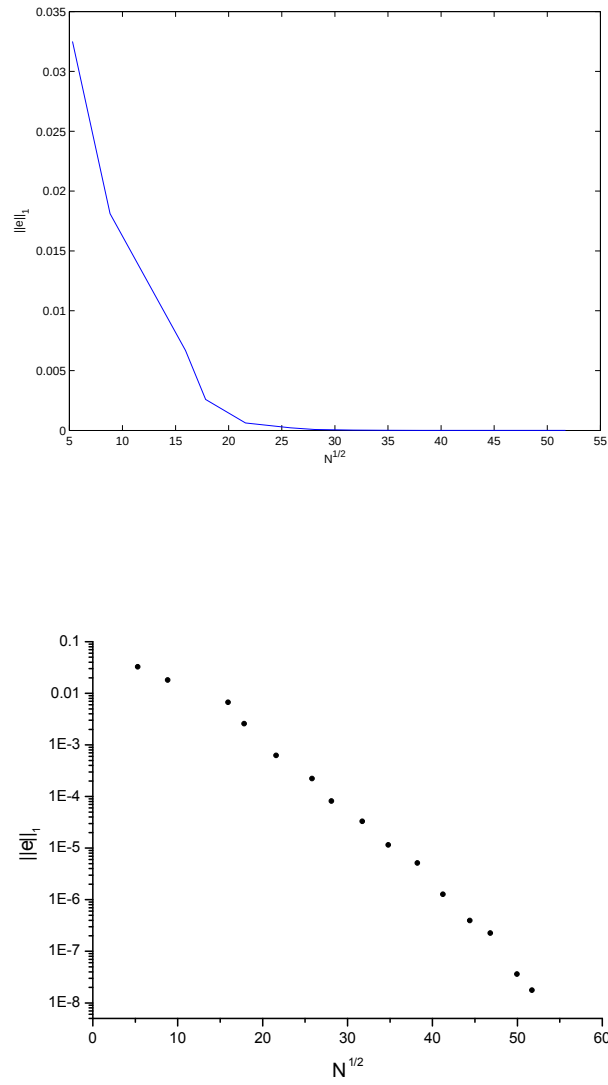


FIGURE 5. $\|u - u_{FE}\|_{1,\Omega}$ vs. $N^{1/2}$ (arriba) y $\log(\|u - u_{FE}\|_{1,\Omega})$ vs. $N^{1/2}$ (abajo)

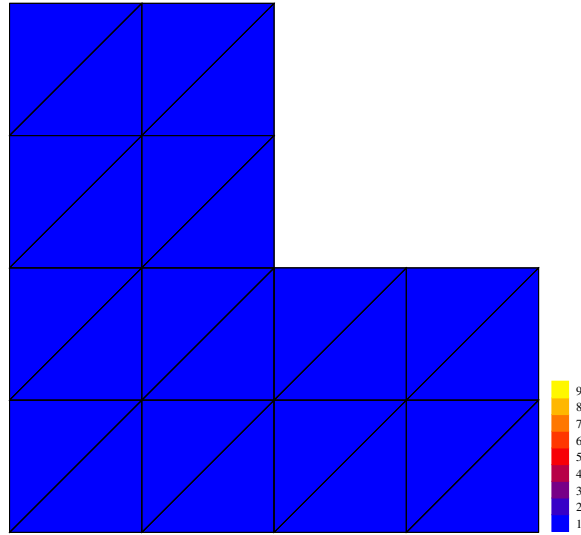


FIGURE 6. Dominio y malla inicial

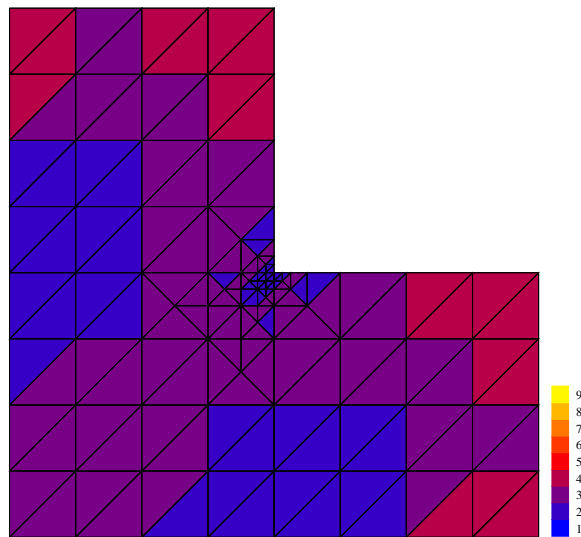


FIGURE 7. Malla después de 5 refinamientos

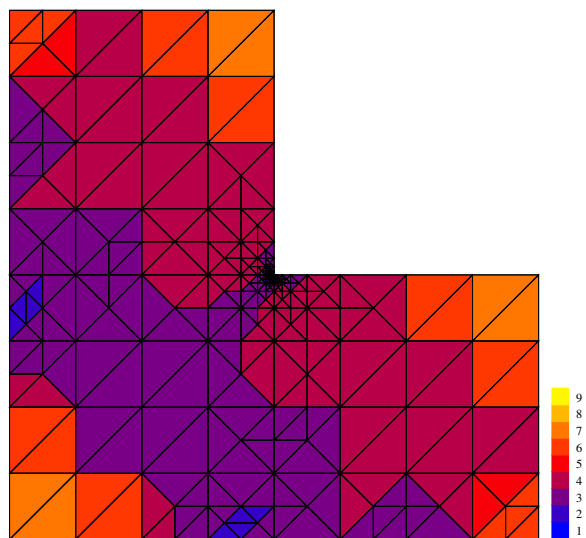


FIGURE 8. Malla después de 10 refinamientos

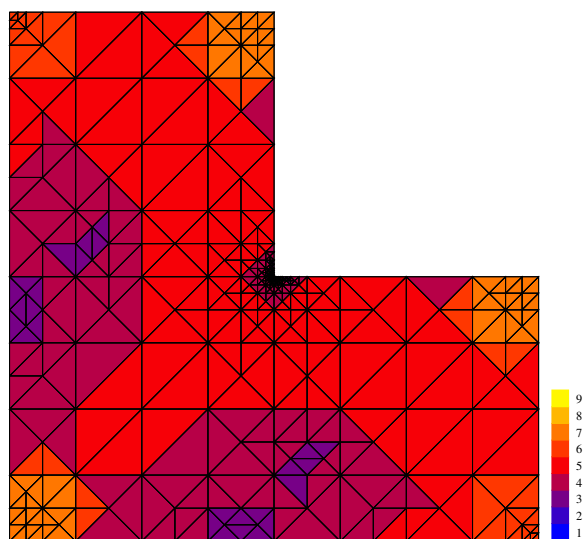


FIGURE 9. Malla después de 15 refinamientos

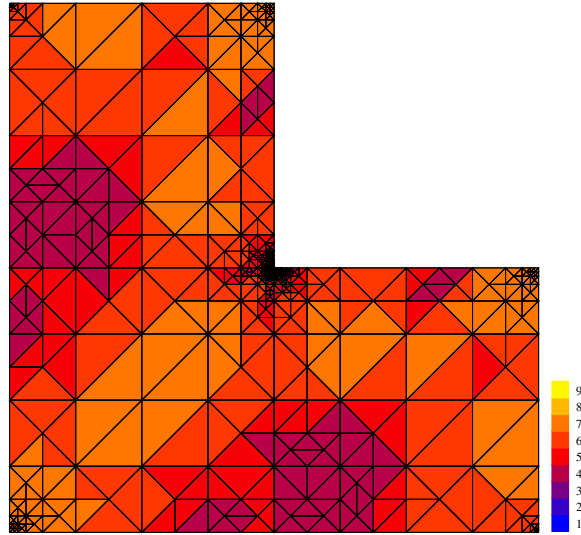


FIGURE 10. Malla después de 20 refinamientos

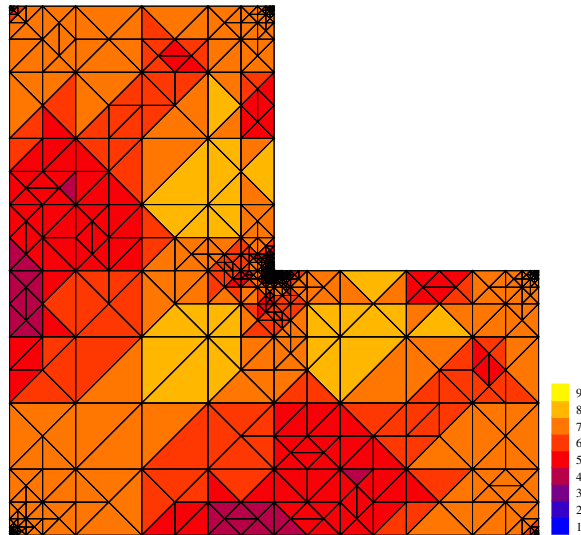


FIGURE 11. Malla después de 25 refinamientos

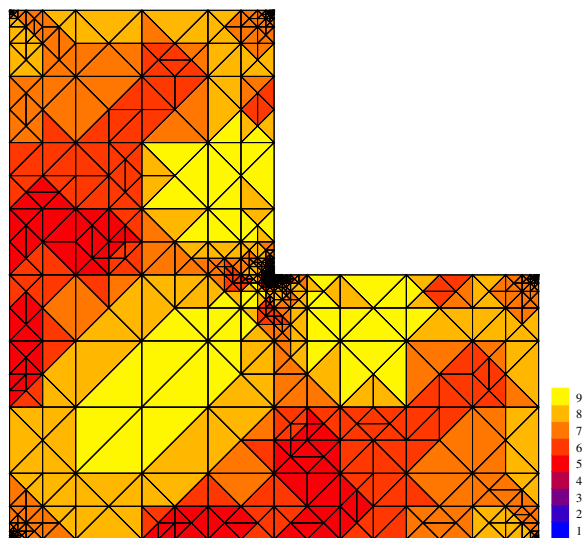


FIGURE 12. Malla después de 30 refinamientos

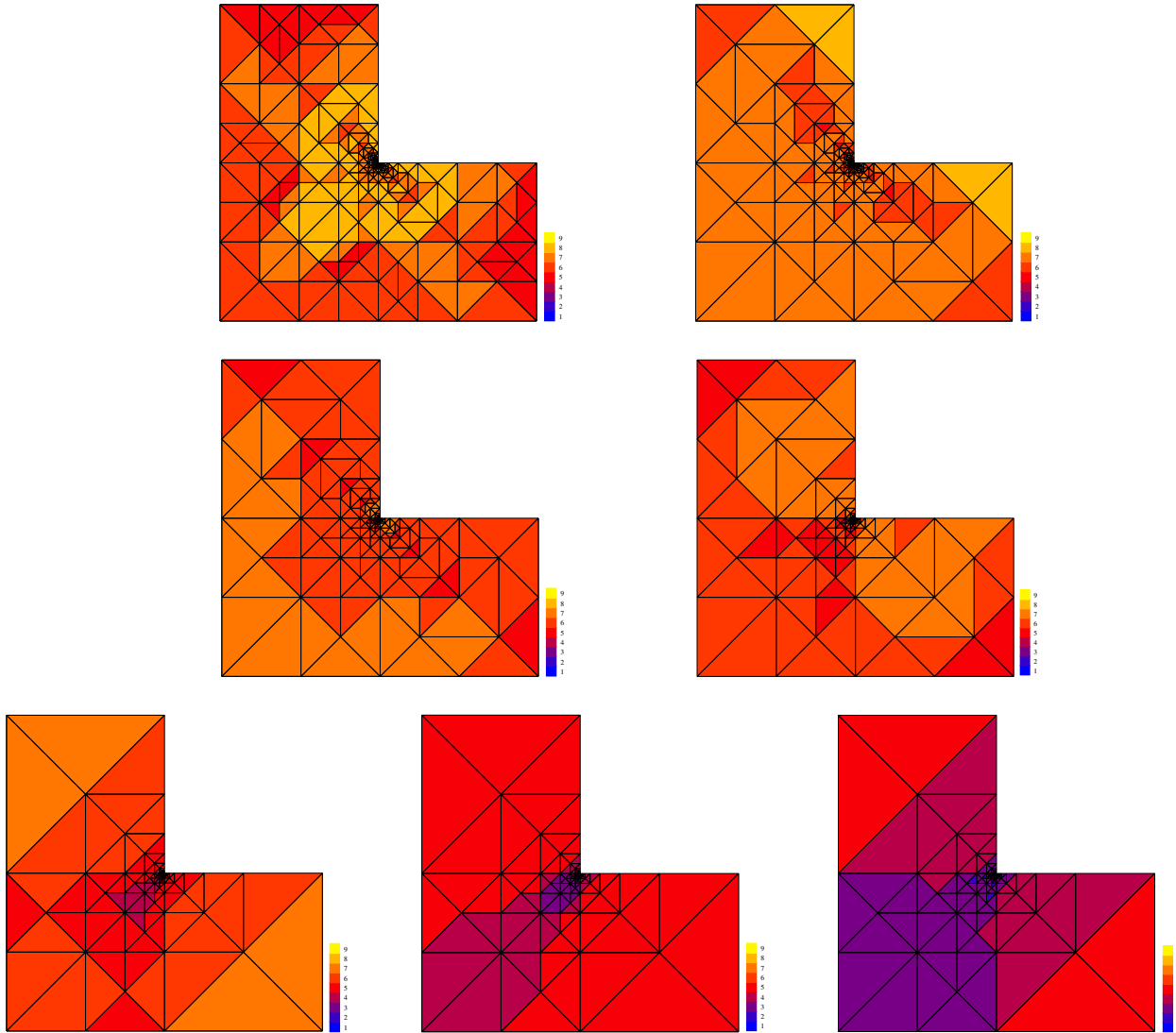


FIGURE 13. Sucesivos zoom, en el ángulo reentrante, de la malla del paso 30

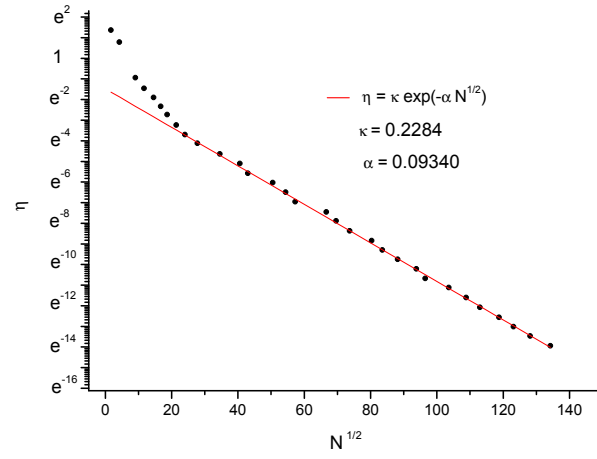
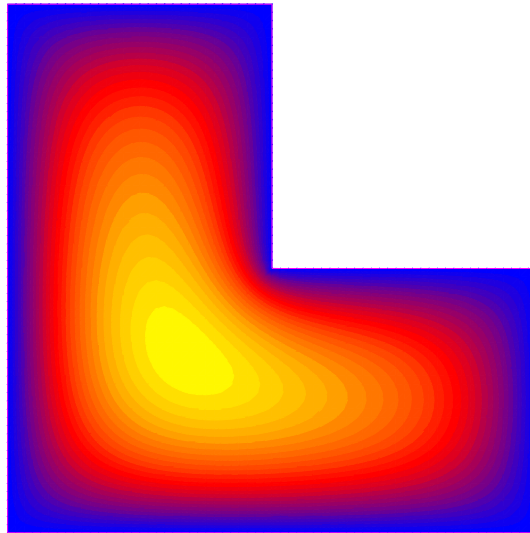
FIGURE 14. $\log \eta_\Omega$ vs. $N^{1/2}$ 

FIGURE 15. Curvas de nivel de la solución

Bibliography

- [1] M. AINSWORTH AND J. T. ODEN, *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis* Wiley, 2000.
- [2] M. AINSWORTH, B. SENIOR *Aspects of an adaptive hp-finite element method: Adaptive strategy, conforming approximation and efficient solvers* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 150, pp. 65-87, 1997.
- [3] M. AINSWORTH, B. SENIOR *An adaptive refinement strategy for hp-finite-element computations*, Appl. Numer. Math., vol. 26, pp. 165-178, 1998.
- [4] M. G. ARMENTANO, C. PADRA, *A posteriori error estimates for the Steklov eigenvalue problem*, Appl. Numer. Math., vol. 58, pp. 593-601, 2008.
- [5] I. BABUSKA, R. B. KELLOGG, J. PITKARANTA *Direct and inverse error estimates for the finite element method.*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 18 , pp. 515-545, 1981.
- [6] I. BABUSKA, M. SURI, *The Optimal convergence rate of the p-version of the finite element method*. Tech. Note BN-1045, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, Oct. 1985.
- [7] I. BABUSKA, M. SURI, *The h-p version of the finite element method with quasiuniform meshes*. Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, Mayo 1986.
- [8] I. BABUSKA, M. SURI, *The h-p version of the finite element method with quasiuniform meshes.*, M2AN, vol. 21 (2) , pp. 199-238, 1987.
- [9] I. I. BABUSKA, M. SURI, *The p and h-p versions of the finite element method, basic principles and properties*, SIAM Review, vol. 36, pp. 578-632, 1994.
- [10] C. BERNARDI *Indicateurs d'erreur en h - N version des éléments spectraux*, Model. math. Anal. Num, vol. 30 , pp 1-38, 1996.
- [11] C. BERNARDI, Y. MADAY *Spectral methods in:* Handbook of Numerical Analysis, Vol. 5, eds. P.G.Ciarlet and J.L. Lions, North-Holland, Amsterdam, 1997.
- [12] C. BERNARDI, R.J. OWENS, J. VALENCIANO *An error indicator for mortar element solutions to the Stokes problem*, IMA J. Numer. Anal., vol. 21, pp. 857-886, 2001.
- [13] S. BRENNER, L. R. SCOTT , *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [14] P. G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Holland, 1978
- [15] R. G. DURÁN, L. GASTALDI, C. PADRA, *A posteriori error estimators for mixed approximations of eigenvalue problems*, Math. Mod. Meth. Appl. Sci., vol. 9, pp. 1165-1178, 1999.
- [16] R. G. DURÁN, C. PADRA, R. RODRIGUEZ, *A posteriori error estimates for the finite element approximation of eigenvalue problems*. Math. Mod. Meth. Appl. Sci., vol 13, pp. 1219-1229, 2003.
- [17] B. Q. GUO, I. BABUSKA, *The h-p version of the finite element method. Part 1: The basic approximation results*, journal = Comput. Mech., vol. 1, pp. 21-41, 1986.
- [18] B. Q. GUO, I. BABUSKA, *The h-p version of the finite element method. Part 2: General results and applications*, Comput. Mech., vol. 1, pp. 203-220, 1986.
- [19] J. M. MELENK, B.I. WOLMUTH, *On residual-based a posteriori error estimation in hp-FEM*, Technical Report 436, Math.-Nat. Fakultt, Universitt Augsburg, Augsburg, Germany, 2001.

- [20] J. M. MELENK, B.I. WOLMUTH, *On residual-based a posteriori error estimation in hp-FEM* Advances in Computational Mathematics. vol. 15, pp. 311-331, 2001.
- [21] J. E. TARANCON, F. J. FUENMAYOR, L. BAEZA, *An a posteriori error estimator for the p- and hp-versions of the finite element method*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., vol. 62, pp. 1-18, 2005.
- [22] sc R. VERFÜRTH, *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*, Wiley & Teubner, 1996.