



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Pequeñas perturbaciones en espacios finitos

Manuela Ana Cerdeiro

Director: Elías Gabriel Minian

Marzo de 2010

A Oma.

Introducción

Los espacios topológicos con finitos puntos modelan los tipos de homotopía de los poliedros compactos. Esto permite aplicar métodos combinatorios para el estudio topológico y de los invariantes algebraicos de una clase extensa e importante de espacios, que incluye a los CW-complejos compactos y a las variedades diferenciables compactas. En este sentido, destacamos las contribuciones de R. E. Stong y M. C. McCord y, más recientemente, de J. A. Barmak y E. G. Minian. Comenzamos esta tesis repasando los principales resultados, clásicos y recientes, de la teoría de espacios finitos. Luego estudiamos cómo se reflejan a nivel geométrico algunas pequeñas perturbaciones hechas sobre un espacio finito a partir de su presentación combinatoria.

En 1937 P. S. Alexandroff advirtió una correspondencia entre los espacios topológicos finitos y los conjuntos preordenados, estableciendo un punto de interacción entre la geometría y la combinatoria. En los años 60 Stong continuó con el estudio de los espacios finitos, estableciendo algunos de los resultados básicos y fundamentales de esta teoría ([17]). Stong introdujo las nociones de puntos lineales y colineales y probó que los tipos homotópicos de los espacios finitos pueden ser estudiados en forma puramente combinatoria. Otro de los aportes fundamentales para la teoría de espacios finitos fue realizado por McCord, también en los años 60, quien en [13] relacionó los espacios finitos con los poliedros compactos. Concretamente, McCord mostró, mediante dos aplicaciones funtoriales explícitas, que los tipos homotópicos débiles de los espacios finitos coinciden con los tipos homotópicos de los CW-complejos compactos.

Los trabajos de McCord y Stong sugieren que los espacios finitos pueden ser una gran herramienta para estudiar problemas geométricos: por medio de la relación entre poliedros y espacios finitos, la estrategia es traducir un problema geométrico en un problema de espacios finitos y luego aplicar la combinatoria propia de estos objetos para dar una solución al problema geométrico original.

El trabajo de Stong se encuadra dentro de lo que Barmak y Minian denominaron *métodos de reducción de un punto* ([3]). Se trata de quitar un punto y comparar la geometría del espacio resultante con la del original. Al mismo tiempo, se intenta traducir estos movimientos elementales al contexto de los complejos simpliciales. Los puntos lineales y colineales de Stong, a los que luego J. P. May ([11]) llamó *up beat*

points y *down beat points*, constituyen el primer método de reducción conocido: dos espacios finitos tienen el mismo tipo homotópico si y sólo si se puede llegar de uno a otro quitando o agregando *beat points*.

Recientemente, Barmak y Minian desarrollaron nuevos métodos de reducción de un punto. En [4] introdujeron la noción de *weak point* y de homotopía simple para espacios finitos. Dos espacios finitos tienen el mismo tipo homotópico simple si se puede llegar de uno al otro quitando o agregando *weak points*. En ese trabajo se probó que los tipos de homotopía simple de espacios finitos se corresponden exactamente con los tipos homotópicos simples de los poliedros que modelan. En [3] introdujeron la noción de γ -*points*. Al quitar uno de estos puntos se obtiene un subespacio cuya inclusión es una equivalencia homotópica débil, lo que se traduce a nivel simplicial en una equivalencia homotópica.

En esta tesis estudiamos dos maneras de obtener un espacio finito a partir de otro, perturbando la topología del espacio y no el conjunto subyacente. El espacio obtenido con estos movimientos no es un subespacio del original, pues tiene los mismos elementos pero más abiertos. Una vez modificada la topología de un espacio X para obtener un nuevo espacio Y , comparamos las propiedades homológicas y homotópicas de X con las de Y .

En el capítulo 1 recordamos varias definiciones y propiedades básicas de los poliedros, que se usan luego en relación con los espacios finitos.

El capítulo 2 se centra en los espacios finitos. Repasamos las primeras definiciones y la relación entre éstos y los complejos simpliciales finitos. Exponemos en este capítulo los resultados fundamentales de la teoría de espacios finitos, incluyendo los métodos de reducción de un punto.

En el capítulo 3 estudiamos la siguiente situación. Dado X un espacio finito, le quitamos una relación a su poset asociado, y comparamos a X con el espacio resultante. Presentamos resultados con respecto a los grupos de homología (3.1.1, 3.1.3, 3.1.7) y a los grupos de homotopía (3.2.3, 3.2.4).

Por último, en el capítulo 4, consideramos el diagrama de Hasse asociado a un espacio X y relacionamos su topología con la del espacio que se obtiene al quitar una arista del diagrama. Esta situación difiere en general de la estudiada en el capítulo 3 y es un tanto más complicada para investigar. El caso en que el espacio X tiene altura 1 es fácil de analizar, y lo hacemos en la primera sección. Luego obtenemos algunos resultados para el caso general. Entre otras cosas obtenemos resultados comparando el grupo fundamental de los espacios y sus grupos de homología. Los resultados más importantes exhibidos en los capítulos 3 y 4, que relacionan la topología de un espacio finito X con la del espacio que se obtiene quitando una arista o una relación, son originales.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por sostenerme mientras estudié, en especial a mi mamá, la principal responsable de todo esto.

A Ana Reinhardt, quien sembró mi primera curiosidad por la matemática (y por la música).

A mis compañeros Patricia Bechara, Eugenia Rodríguez y Pablo Vena, con los que compartí tantas horas de estudio y tantas meriendas.

A Martín Savransky, Nicolás Sirolli y Santiago Saglietti, a los que acudí muchas veces con dudas, y siempre me ayudaron con entusiasmo.

A Jonathan Barmak, Nicolás Capitelli y Matías del Hoyo, que me ayudaron a pensar en estos temas y en la presentación de este texto.

A Marco Farinati y Andrea Solotar, muchas gracias por leer este trabajo y por enriquecerlo con sus ideas y comentarios.

A Gabriel Minian por guiarme, por enseñarme matemática con tanta pasión y habilidad, y por contagiarme con su energía.

Índice general

1. Poliedros	7
1.1. Definiciones	7
1.2. Homotopía de Complejos Simpliciales	15
1.3. Homología de Complejos Simpliciales	17
2. Espacios Topológicos Finitos	24
2.1. Definiciones	24
2.2. Relación entre los espacios finitos y los complejos simpliciales	28
2.2.1. Links y stars	30
2.3. Equivalencias débiles y modelos finitos	31
2.4. Métodos de reducción de un punto	32
3. Sacando una relación	35
3.1. Homología	37
3.2. Homotopía	43
4. Sacando una arista	46
4.1. Espacios de altura uno	47
4.2. Resultados en el caso general	48

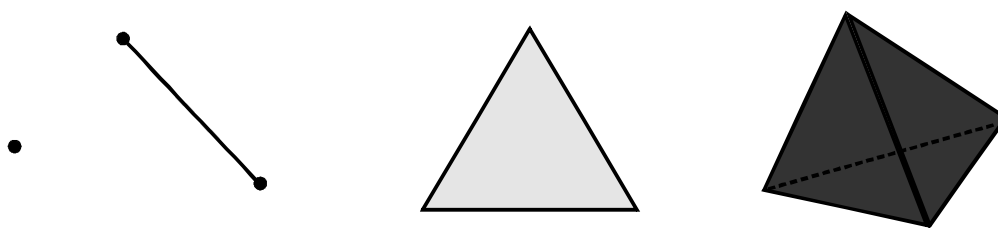
Capítulo 1

Poliedros

1.1. Definiciones

Una vasta clase de espacios topológicos se puede describir y analizar combinatoriamente. Un ejemplo de espacios de este tipo son los que llamaremos *poliedros*, que se obtienen pegando ciertos bloques de forma muy simple. Cada bloque es la cápsula convexa de un determinado conjunto de puntos, como por ejemplo un segmento o un triángulo. Cuando dos bloques se pegan, la intersección es siempre una cara común a ambos.

Las referencias para esta sección y la siguiente son principalmente [15], [16], [7] y [6].



Algunos símplices.

Se puede trabajar con la estructura combinatoria de los poliedros, que viene dada por los que llamaremos *complejos simpliciales*, y luego sacar conclusiones sobre los espacios topológicos. Para eso es que en esta sección introduciremos algunas nociones sobre los complejos simpliciales, y sobre cómo se relacionan con los poliedros, que serán sus realizaciones geométricas. Trataremos de tener en mente la geometría de los poliedros, aunque estemos trabajando con los complejos simpliciales, que son objetos de naturaleza más combinatoria y abstracta.

Definición 1.1.1. Una *combinación convexa* de puntos de \mathbb{R}^n es una combinación lineal cuyos coeficientes son no negativos y suman 1.

La *cápsula convexa* de un subconjunto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ es el menor convexo que lo contiene o, equivalentemente, el conjunto de las combinaciones convexas de elementos de V .

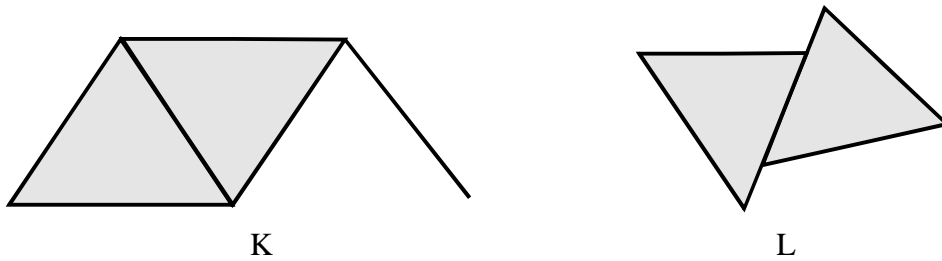
Un subconjunto $\{v_0, v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es *afínmente independiente* si cada vez que $\sum_{i=0}^k \lambda_i v_i = 0$ y $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 0$ se tiene que $\lambda_i = 0$ para todo $0 \leq i \leq k$. Esta condición implica que si dos combinaciones convexas de los puntos $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ coinciden, entonces los coeficientes coinciden. Es decir que la escritura en la cápsula convexa de $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ es única.

Un subconjunto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ está en *posición general* si cada subconjunto de V de cardinal menor o igual a $n + 1$ es afínmente independiente.

Definición 1.1.2. Un *símplex geométrico* es la cápsula convexa de un conjunto vértices incluidos en \mathbb{R}^n , para algún n , y de manera que sean afínmente independientes. Si el conjunto de vértices que determinan el símplex σ es $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, notaremos $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ y diremos que σ es un n -símplex, o que tiene *dimensión* n .

Una *cara* de un símplex geométrico es la cápsula convexa de un subconjunto de sus vértices. Cuando τ es una cara de σ notamos $\tau \leq \sigma$.

Un *complejo simplicial geométrico* K es un conjunto de símplexes geométricos (no necesariamente incluidos en un mismo espacio \mathbb{R}^n) tales que cada cara de un símplex de K sea un símplex de K , y cada intersección de dos símplexes de K sea una cara común a ambos.



El dibujo de la izquierda representa un complejo simplicial K . En cambio L no es un complejo simplicial, porque los triángulos se intersecan en un tramo de una cara de cada uno.

La *dimensión* del complejo simplicial es el máximo, si existe, de las dimensiones de sus símplexes. Si el complejo es vacío, su dimensión es -1 , y si las dimensiones de sus símplexes no están acotadas, su dimensión es infinita.

Definición 1.1.3. Un *complejo simplicial abstracto* K consiste en un conjunto K^0 de *vértices*, y un conjunto de subconjuntos finitos no vacíos de K^0 , llamados *símplexes*. Además, cada vértice es un símplex, y cada subconjunto (no vacío) de un símplex es también un símplex. En el futuro, para decir que σ es un símplex del complejo K , notaremos $\sigma \in K$.

Definición 1.1.4. Cuando un símplex $\tau \in K$ esté contenido en otro símplex σ , es decir que el conjunto de vértices que lo determinan es un subconjunto de los vértices de σ , diremos que τ es *cara* de σ , y notaremos $\tau \leq \sigma$.

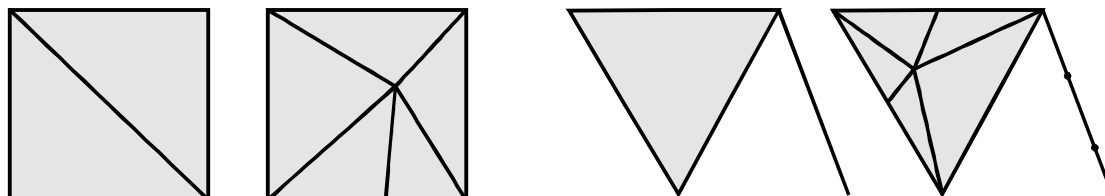
Si además $\tau \neq \sigma$, diremos que es una *cara propia*, y notaremos $\tau \lessdot \sigma$, y si no existe ν tal que $\tau \lessdot \nu \lessdot \sigma$, diremos que es una *cara inmediata*, y notaremos $\tau \prec \sigma$.

Observemos que en la definición abstracta de complejo simplicial no hizo falta hacer ninguna aclaración sobre la intersección de dos símplexes del complejo, pues como conjuntos siempre se van a intersecar en una cara común a ambos.

Observación 1.1.5. Cada símplex geométrico tiene un único conjunto de vértices afínmente independiente que lo generan. Así, todo complejo simplicial geométrico determina un complejo simplicial abstracto, identificando cada símplex geométrico con el conjunto de vértices que lo forman.

Definición 1.1.6. La *realización geométrica* de un complejo geométrico K , que notaremos $|K|$, es un espacio topológico cuyo conjunto subyacente es la unión de los símplexes de K . Cada símplex hereda una topología como subespacio de algún \mathbb{R}^n , y la topología de $|K|$ es la final respecto de los símplexes. Es decir que dado $U \subseteq K$ es abierto si y sólo si $U \cap \sigma$ es abierto en σ para todo $\sigma \in K$.

A los espacios topológicos que son la realización geométrica de algún complejo simplicial se les dice *poliedros*. Cada complejo simplicial cuya realización sea el espacio X es una *triangulación* de X .



En el dibujo vemos cómo un mismo espacio topológico puede tener distintas triangulaciones.

Definición 1.1.7. Sea K un complejo simplicial abstracto y finito. Si $n = \dim K$, se puede elegir un conjunto de puntos del cardinal de K^0 que se encuentren en posición general, dentro de un \mathbb{R}^m , con $m \geq 2n + 1$. Así, identificando cada vértice con el punto que le corresponde, y cada símplex con la cápsula convexa de sus vértices, se obtiene un *complejo simplicial geométrico asociado a K* , al que también notaremos K . Este complejo geométrico no es único, pero sí lo es salvo isomorfismos simpliciales.

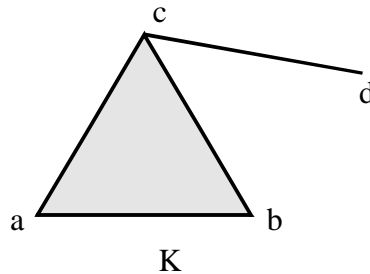
A la realización geométrica de este complejo geométrico la llamaremos *realización geométrica* del complejo abstracto original, y la notaremos $|K|$. Dado un símplex $\sigma \in K$, notaremos $|\sigma|$ al símplex que le asociamos en la realización geométrica.

Esta construcción no es única, pero lo es salvo homeomorfismos lineales a trozos.

Ejemplo. Sean $K^0 = \{*\}$ y $K = \{\{*\}\}$, entonces K es un complejo simplicial, con un solo vértice y un solo símplex. También es complejo simplicial el complejo vacío, que no tiene vértices.

Ejemplo 1.1.8. El conjunto $K = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ es un complejo simplicial, con vértices $K^0 = \{a, b\}$.

Ejemplo 1.1.9. Sea $K^0 = \{a, b, c, d\}$ y sea K el conjunto de símplexes $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}$, entonces K es un complejo simplicial. Pero no lo sería si $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ o $\{a, c\}$ no hubieran sido incluidos entre los símplexes.



Los vértices de un complejo K son sus 0-símplexes, y es por esto que, al describir un complejo, bastará con decir cuáles son sus símplexes.

En este texto trabajaremos únicamente con complejos simpliciales finitos, es decir que tienen finitos símplexes o, equivalentemente, finitos vértices. Sin embargo, la definición no exige finitud, y de hecho los complejos no finitos también se estudian, y dan lugar a más espacios topológicos descriptos combinatoriamente.

Observación 1.1.10. Si un complejo simplicial es finito, entonces su realización geométrica es un espacio topológico compacto.

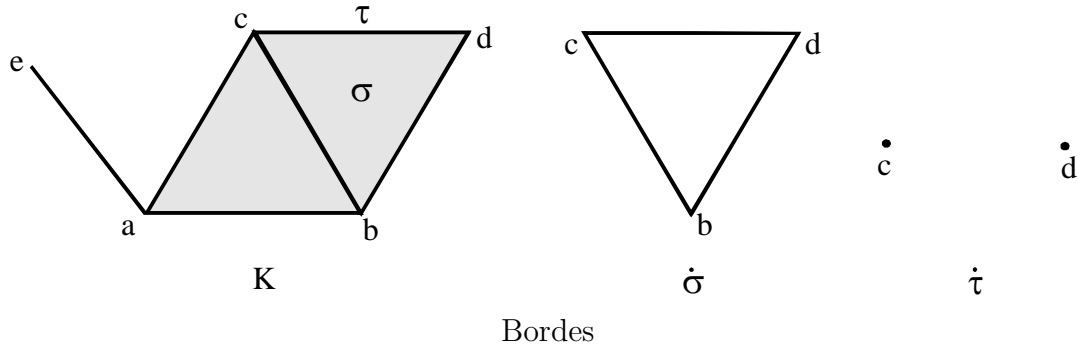
Definición 1.1.11. Sea $L \subseteq K$, diremos que es un *subcomplejo* si es cerrado por caras, o sea que cada vez que $\sigma \in L$ y τ es cara de σ , $\tau \in L$. Es decir, L es un complejo simplicial contenido en K .

Ejemplo. En el ejemplo 1.1.9, $L = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$ es un subcomplejo de K , mientras que $M = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$ no lo es.

Ejemplo. Dado un símplex $\sigma \in K$, el conjunto $\{\tau : \tau \leq \sigma\}$ es un subcomplejo de K . Lo notaremos σ , al igual que al símplex.

Definición 1.1.12. Dado $\sigma \in K$, llamaremos *borde* de σ al subcomplejo $\dot{\sigma} = \{\tau \in K \text{ tal que } \tau \leq \sigma\}$.

Notemos que $\dot{\sigma} = \sigma \setminus \{\sigma\}$.



Observación 1.1.13. El borde de un símplex abstracto se corresponde con la frontera del símplex geométrico, es decir, las combinaciones convexas de los vértices donde algún coeficiente es cero.

Observación 1.1.14. Siempre que τ es cara de σ , $\dim \tau \leq \dim \sigma$. Además, si $\tau \prec \sigma$, se tiene que $\dim \tau = \dim \sigma - 1$, así que, para todo símplex σ , vale que $\dim \hat{\sigma} = \dim \sigma - 1$.

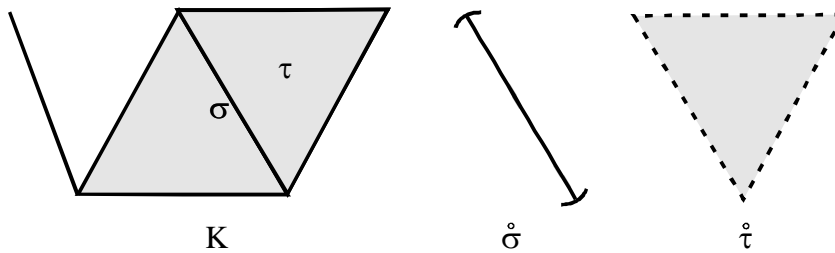
Definición 1.1.15. Diremos que $\sigma \in K$ es un símplex maximal si no está contenido en ningún otro símplex.

Si un símplex $\sigma \in K$ tiene dimensión máxima, entonces es un símplex maximal. Sin embargo, no siempre los símplexes maximales tienen dimensión máxima.

Ejemplo. En el ejemplo 1.1.8, K tiene un único símplex maximal, $\{a, b\}$. En el ejemplo 1.1.9 los símplexes maximales de K son $\{a, b, c\}$ y $\{c, d\}$.

Definición 1.1.16. Dado un símplex σ geométrico, el *interior* de σ , al que notaremos por $\hat{\sigma}$ es el conjunto de combinaciones convexas que no están en el borde del símplex, es decir que los coeficientes de los vértices de σ son todos positivos.

El interior de un símplex siempre es abierto dentro del símplex, pero en general no lo es en la realización del complejo simplicial. Sólo cuando el símplex es maximal en K , su interior es abierto en $|K|$.



Los interiores de algunos símplexes.

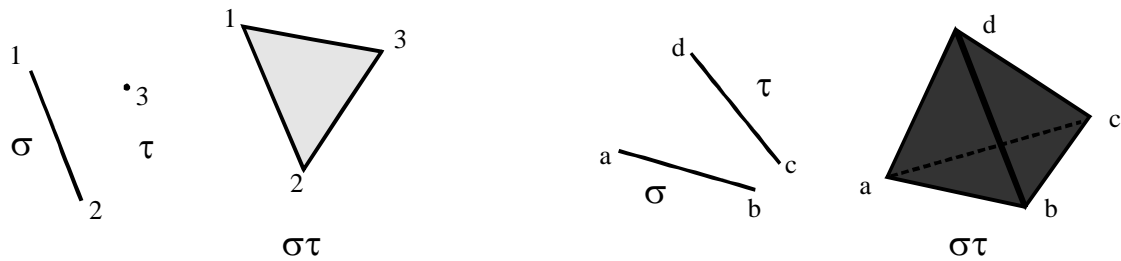
Observación 1.1.17. Dados dos símplexes distintos $\sigma, \tau \in K$, $\overset{\circ}{\sigma} \cap \overset{\circ}{\tau} = \emptyset$.

Si para un par de símplexes de K se tiene $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, entonces $\tau \leq \sigma$.

Dado $x \in |K|$ existe un único $\sigma \in K$ tal que $x \in \overset{\circ}{\sigma}$, es decir que se escribe de forma única como combinación convexa de vértices de K con coeficientes positivos.

Definición 1.1.18. Dados dos símplexes abstractos disjuntos, $\sigma, \tau \in K$, el *join* de ellos es un nuevo símplex, que notaremos $\sigma\tau$, y que es la unión de τ y σ . En general, $\sigma\tau$ no tiene por qué ser un símplex de K .

Es claro que $\dim \sigma\tau = \dim \sigma + \dim \tau + 1$.

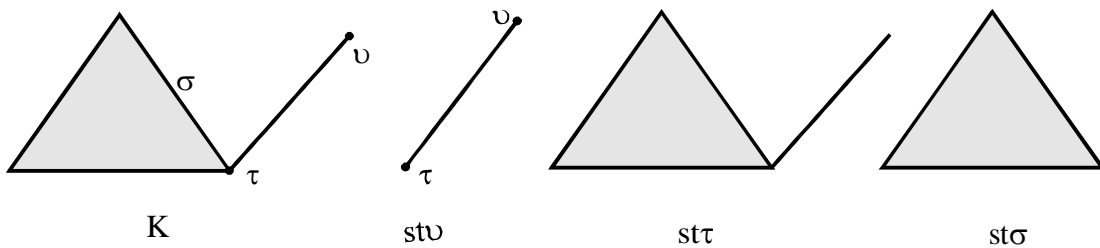


Joins

Geoméricamente, el join entre dos símplexes es la unión de todos los segmentos que unen un punto de uno de ellos con un punto del otro. Es decir, es la cápsula convexa de la unión de ambos símplexes.

Definición 1.1.19. Dado un símplex $\sigma \in K$, definimos el *star* de σ como $\text{st } \sigma = \{\tau \in K \text{ tal que existe } \nu \in K \text{ con } \sigma \leq \nu, \tau \leq \nu\}$.

Claramente, $\text{st } \sigma$ es un subcomplejo de K , y $\sigma \in \text{st } \sigma$.



Stars

Proposición 1.1.20. Para todo $v \in K^0$, el subcomplejo $\text{st } v$ es un entorno del vértice.

Demostración. Sea $U = \bigcup_{v \in \sigma} \overset{\circ}{\sigma}$, entonces $v \in U \subseteq \text{st } v$.

Veamos que U es abierto. Sean $\tau \in K$ y $x \in U \cap \tau$, entonces $x \in \overset{\circ}{\sigma} \cap \tau$ para un σ tal que $v \in \sigma$. Esto implica que $\sigma \leq \tau$ y, por lo tanto, $v \in \tau$. Es decir que los

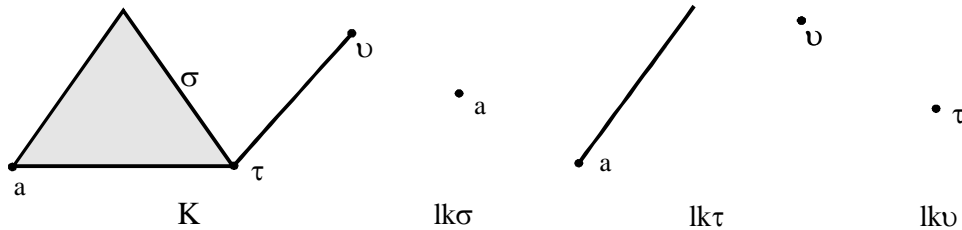
símplices que intersecan a U son los que tienen al vértice v . Entonces, dado $\nu \in K$, $\nu \setminus U = \bigcup \{\tau : \tau \leq \nu, v \in \tau\}$, que es cerrado, por ser unión finita de cerrados. Así, $\nu \cap U$ es abierto en ν para todo $\nu \in K$. \square

Definición 1.1.21. Al abierto $\bigcup_{v \in \sigma} \overset{\circ}{\sigma}$ se lo llama *star abierto de v* y se lo nota $\overset{\circ}{st}\sigma$.

Los stars abiertos de los vértices cubren todo el complejo, es decir, $|K| = \bigcup_{v \in K^0} \overset{\circ}{st}v$.

Definición 1.1.22. Dado $\sigma \in K$, definimos su *link* como $lk\sigma = \{\tau \in K \text{ tal que } \tau \cap \sigma = \emptyset \text{ y } \sigma\tau \in K\}$.

El link de un símplex es siempre un subcomplejo de K .



Links

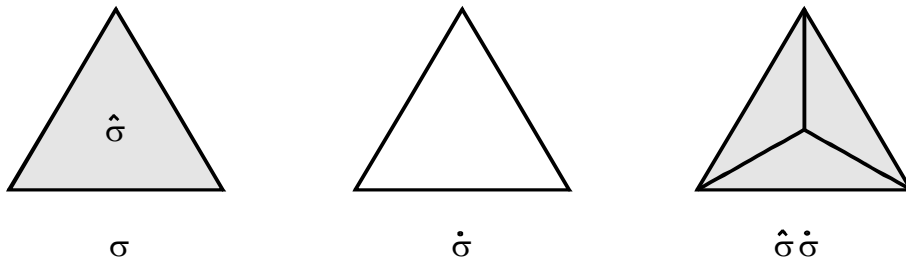
Definición 1.1.23. Dados dos complejos simpliciales K y L disjuntos, se define el *join* de los complejos como $KL = K \cup L \cup \{\sigma\tau : \sigma \in K, \tau \in L\}$, que tiene por vértices a $(KL)^0 = K^0 \cup L^0$.

Cuando K es un vértice v , a este join también se lo llama *cono* de L con vértice v .

Cuando K es un complejo de dos vértices sin ningún otro símplex, entonces al join se lo llama *suspensión de L* .

Definición 1.1.24. El *baricentro* de un símplex geométrico $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ es el punto del interior de σ que tiene todas sus coordenadas iguales, es decir, $\hat{\sigma} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i$.

Observación 1.1.25. Todo símplex geométrico σ es el cono topológico de su borde y su baricentro, es decir $\sigma = \hat{\sigma}\hat{\sigma}$.



Proposición 1.1.26. *Dado $\sigma \in K$, los complejos σ y $\text{lk } \sigma$ son disjuntos, y además vale $\sigma \text{ lk } \sigma = \text{st } \sigma$.*

Demostración. Es claro que son disjuntos, y que ambos están incluidos en $\text{st } \sigma$. Sean $\tau \in \sigma$ y $\nu \in \text{lk } \sigma$. Como $\tau \leq \sigma$ y $\sigma \cap \nu = \emptyset$, entonces $\tau \cap \nu = \emptyset$, y además el join $\tau\nu$ es una cara de $\sigma\nu$, por lo que pertenece al complejo K . Además, el simplex $\sigma\nu$ contiene a ambos, σ y $\tau\nu$, así que $\tau\nu \in \text{st } \sigma$.

Sea ahora $\tau = \{v_0, \dots, v_m\} \in \text{st } \sigma$, y veamos que debe estar en $\sigma \text{ lk } \sigma$. Si $\tau \cap \sigma = \emptyset$ o $\tau \leq \sigma$, listo. Supongamos que $\tau \cap \sigma = \{v_0, \dots, v_l\}$, es decir que $\{v_{l+1}, \dots, v_m\} \cap \sigma = \emptyset$. Llamemos μ y ν a estos dos simples. Entonces $\mu \in \sigma$, $\nu \in \text{lk } \sigma$, y $\tau = \mu\nu \in \sigma \text{ lk } \sigma$. \square

Corolario 1.1.27. *La realización geométrica del star de todo simplex es un cono topológico, pues $\text{st } \sigma = \sigma \text{ lk } \sigma = \widehat{\sigma} \text{ lk } \sigma$.*

Observación 1.1.28. Otras formas equivalentes de describir al star y al link de un simplex son $\text{st } \sigma = \bigcup_{\sigma \leq \nu} \nu$ (esta última es una unión de subcomplejos de K), y $\text{lk } \sigma = \{\tau \in \text{st } \sigma \text{ tal que } \sigma \cap \tau = \emptyset\}$.

Definición 1.1.29. Un *morfismo simplicial* $f : K \rightarrow L$ es una función entre los vértices $f : K^0 \rightarrow L^0$ que induce una función entre los complejos, es decir que si $\{v_0, \dots, v_k\}$ es un simplex de K , entonces $\{f(v_0), \dots, f(v_k)\}$ es un simplex de L .

Todo complejo tiene su morfismo identidad, y la composición de morfismos simpliciales es siempre un morfismo simplicial.

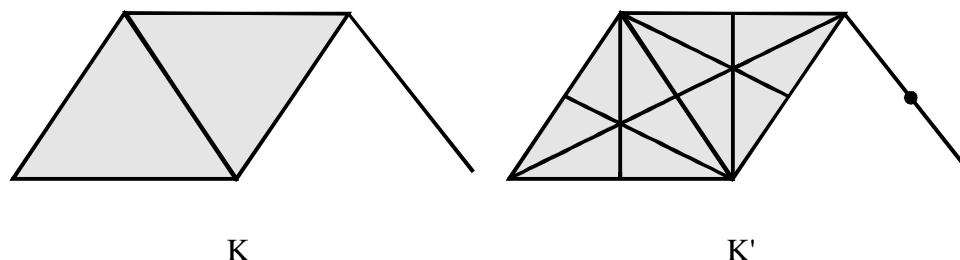
Ejemplo. Sean $K = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}\}$ y $L = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$, y sea $f : K \rightarrow L$ definida por $f(a) = 1, f(b) = 1, f(c) = 3, f(d) = 2$. Entonces f es un morfismo simplicial. Sin embargo g , definida por $g(a) = 1, g(b) = 2, g(c) = 3, g(d) = 3$ no es un morfismo simplicial, porque $\{g(a), g(b), g(c)\}$ no es un simplex de L .

Definición 1.1.30. Sea K un complejo simplicial, y sea $|K| \subseteq \mathbb{R}^n$ una realización geométrica de K . Una *subdivisión* de K es un complejo simplicial L con realización geométrica $|L| \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que para todo simplex $\tau \in L$, $|\tau| \subseteq |\sigma|$ para un simplex $\sigma \in K$ y para todo simplex $\sigma \in K$, $|\sigma|$ es unión de simples de L .

Siempre que L es una subdivisión de K , se tiene que $|L| = |K|$.

Definición 1.1.31. Sea K un complejo simplicial, con realización geométrica $|K|$. La *subdivisión baricéntrica* de K , a la que notaremos K' , es el complejo simplicial que tiene por vértices a los baricentros de los simples de K , es decir, $(K')^0 = \{\widehat{\sigma} : \sigma \in K\}$ y por simples a los generados por $\{\widehat{\sigma}_0, \widehat{\sigma}_1, \dots, \widehat{\sigma}_k\}$ con $\sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_k \in K$.

La realización geométrica $|K|$ induce una realización geométrica de K' tal que K' resulta efectivamente una subdivisión de K .



Un complejo simplicial K y su subdivisión baricéntrica K' .

También se puede definir la subdivisión baricéntrica de manera combinatoria. Dado un complejo simplicial K , se define K' como el complejo cuyos vértices son los símplexes de K y cuyos símplexes son las cadenas de símplexes de K , es decir, $(K')^0 = K$ y $K' = \{\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k\} : \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_k\}$.

La relación entre una y otra definición se obtiene identificando, en el contexto combinatorio, cada símplex con su baricentro.

1.2. Homotopía de Complejos Simpliciales

Repasemos algunas propiedades homotópicas de los complejos simpliciales, y algunos teoremas que nos serán útiles en los próximos capítulos. En las siguientes secciones notaremos, como es usual, con el mismo nombre al complejo simplicial y al espacio topológico asociado.

Definición 1.2.1. Dado un complejo simplicial K y dados dos vértices $v, w \in K^{(0)}$, decimos que hay un camino de aristas de v a w si existe una sucesión $v = v_0, v_1, \dots, v_n = w$ de vértices de K tales que $\{v_{i-1}, v_i\} \in K$ para todo i .

Proposición 1.2.2. Sea K un complejo simplicial, entonces K es conexo si y sólo todo par de vértices se une por un camino de aristas.

Demostración. Para todo vértice v , $\overset{\circ}{\text{st}}v$ es un entorno de v dentro del cual todo otro vértice se une a v por un camino de aristas. Además, todo punto de K está en el star abierto de algún vértice. Así que esta propiedad se cumple localmente; cuando K es conexo, se debe cumplir en todo el espacio.

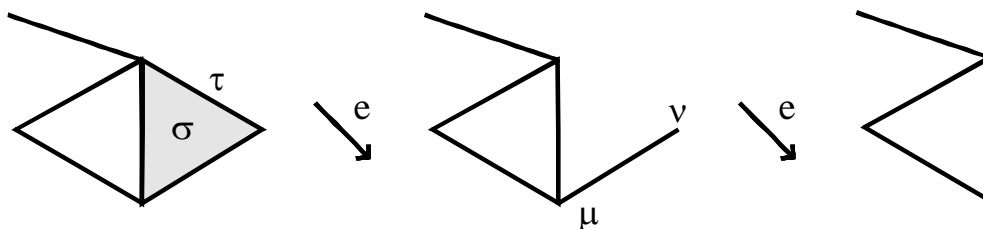
Para ver la otra implicación basta notar que todo punto del espacio K se une por un camino a cualquier vértice de un símplex que lo contenga. \square

Definición 1.2.3. Dados $\sigma \in K$ y una cara $\tau \leq \sigma$, diremos que τ es una cara libre si no es cara de ningún otro símplex.

Si τ es cara libre de σ , entonces σ es un símplex maximal, y $\dim \tau = \dim \sigma - 1$.

Definición 1.2.4. Si τ es una cara libre de σ , entonces $L = K \setminus \{\sigma, \tau\}$ resulta ser un subcomplejo simplicial de K . En este caso diremos que hay un colapso simplicial

elemental de K a L , o que hay una *expansión simplicial elemental* de L a K , y notaremos $K \searrow_e L$ o $L \nearrow_e K$. Una sucesión finita de colapsos simpliciales elementales forman un *colapso simplicial*, y una sucesión finita de expansiones simpliciales elementales forman una *expansión simplicial*.



Dos colapsos simpliciales elementales.

Observación 1.2.5. Un colapso simplicial elemental $K \searrow_e L$ implica que $|L| \hookrightarrow |K|$ es un retracto por deformación fuerte, y una sucesión finita de colapsos y expansiones entre K y L implican que K y L tienen el mismo tipo homotópico.

Definición 1.2.6. Una *arista* en el complejo simplicial K es un 1-símplex orientado, es decir, un par ordenado (v, w) de vértices de K tal que $\{v, w\} \in K$. El origen de la arista $a = (v, w)$ es $\sigma(a) = v$ y su fin es $f(a) = w$.

Un *camino de aristas* en K será una sucesión finita de aristas que se pueden concatenar, es decir, $a_0 a_1 \cdots a_n$ con $f(a_{i-1}) = \sigma(a_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$. El origen del camino $\zeta = a_0 a_1 \cdots a_n$ es $\sigma(\zeta) = \sigma(a_0)$ y su fin es $f(\zeta) = f(a_n)$. El camino se dirá *cerrado* si $f(\zeta) = \sigma(\zeta)$.

Dos caminos de aristas ζ, η serán *elementalmente equivalentes* cuando haya vértices u, v, w pertenecientes a un símplex en K tales que los caminos (u, w) y $(u, v)(v, w)$ formen parte de uno y otro, y se llamarán *equivalentes* cuando haya una sucesión finita de caminos que los tenga por extremos, donde cada camino sea elementalmente equivalente al siguiente. Cuando dos caminos sean equivalentes, notaremos $\zeta \sim \eta$, y ésta es una relación de equivalencia. Cuando $f(\zeta) = \sigma(\eta)$, los caminos se pueden concatenar.

Lema 1.2.7. Si dos caminos son equivalentes, comparten origen y fin.

Si $\zeta \sim \tilde{\zeta}$ y $\eta \sim \tilde{\eta}$, entonces $\zeta \eta \sim \tilde{\zeta} \tilde{\eta}$, siempre que la concatenación tenga sentido. Para todo camino η se tiene $(\sigma(\eta), \sigma(\eta)) \eta (f(\eta), f(\eta)) \sim \eta$.

Mediante la concatenación de caminos, y por las propiedades mencionadas, queda definido un grupoide, que notaremos $\mathcal{A}(K)$, que tiene por objetos a los vértices de K y por morfismos a las clases de caminos de aristas. El morfismo inverso a la clase de una arista (v, w) es la clase de la arista (w, v) y análogamente se invierten los caminos en general.

Fijando un vértice $v \in K$, y considerando las clases de caminos de aristas que comienzan y terminan en v , se obtiene un grupo, que notaremos $\mathcal{A}(K, v)$.

El siguiente resultado, que asegura que ésta es una descripción abstracta del grupo fundamental de K , se puede encontrar en [16].

Teorema 1.2.8. *Dados un complejo simplicial K y un vértice $v \in K$, los grupos $\pi_1(|K|, v)$ y $\mathcal{A}(K, v)$ son isomorfos.*

Teorema 1.2.9 (Teorema de Van Kampen para complejos simpliciales). *Sea K un complejo simplicial que es la unión de dos subcomplejos, L y M , con $L \cap M \neq \emptyset$. Sea $x \in |M| \cap |L|$, entonces hay un epimorfismo $\pi_1(|L|, x) * \pi_1(|M|, x) \longrightarrow \pi_1(|K|, x)$.*

Los siguientes resultados, que se pueden encontrar en [8], involucran la topología de las realizaciones de los complejos simpliciales.

Teorema 1.2.10. *Dados un complejo simplicial K y un subcomplejo A de K , resulta que $K \times \{0\} \cup A \times I$ es un retracto por deformación de $K \times I$.*

Corolario 1.2.11. *Dados un complejo simplicial K y un subcomplejo A de K , el par (K, A) tiene la propiedad de extensión de homotopías, es decir, si H es una homotopía con dominio $A \times I$ tal que $H|_{A \times \{0\}}$ se extiende a K , entonces H se extiende a $K \times I$.*

Teorema 1.2.12. *Sean L y K dos complejos simpliciales, y sea $A \subseteq K$ un subcomplejo. Dos funciones de adjunción $f, g : A \longrightarrow L$ que son homotópicas inducen espacios de adjunción homotópicamente equivalentes, más aún $K \cup_f L \simeq_{he} K \cup_g L$ rel L .*

Teorema 1.2.13 (Whitehead). *Toda equivalencia homotópica débil entre poliedros es una equivalencia homotópica.*

1.3. Homología de Complejos Simpliciales

En esta sección repasamos la definición de homología simplicial, junto con algunos resultados sobre homología. Las referencias para homología simplicial y su relación con la singular son [15] y [16]. Los resultados sobre el join y la homología del join se pueden encontrar en [14].

Definición 1.3.1. Dado un símplex $\sigma \in K$, dos formas de ordenar sus vértices se dirán equivalentes si difieren en una permutación par. Cada clase de orden por esta relación se llamará *orientación* del símplex. Así, para cada símplex de dimensión positiva, hay dos orientaciones posibles. Al símplex $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ dotado de la orientación dada por (v_0, v_1, \dots, v_n) lo notaremos $[v_0, v_1, \dots, v_n]$.

Dado un complejo simplicial K , queremos definir el *complejo de cadenas asociado a K* , al que notaremos $C_*(K)$. Fijemos, para cada símplex de K , una orientación. Para cada $n \geq 0$, sea C_n el grupo abeliano libre generado por los n -símplices orientados de K , con la identificación $[v_1, v_0, v_2, \dots, v_n] = -[v_0, v_1, v_2, \dots, v_n]$. Para $n < 0$ definimos $C_n = 0$.

El morfismo de borde, $d_n : C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$, se define por $d_n[v_0, \dots, v_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]$ si $n > 0$. Cuando $n \leq 0$ d_n el morfismo es el nulo.

Observación 1.3.2. El par (C_*, d_*) es un complejo de cadenas, pues

$$\begin{aligned} d_{n-1}d_n[v_0, \dots, v_n] &= \sum_{i=0}^n (-1)^i d_{n-1}[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n] = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n] + \sum_{j=i+1}^n (-1)^{j-1} [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n] \right) = \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n] + \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n] \end{aligned}$$

y esta última suma da cero.

Definición 1.3.3. Dado un complejo simplicial K , se define la *homología simplicial de K* como la homología del complejo de cadenas de K , es decir, $H_n(K) = \ker d_n / \text{im } d_{n+1}$.

Observación 1.3.4. Si $\dim(K) = k$, entonces $H_n(K) = 0$ para todo $n > k$.

Proposición 1.3.5. Para todo complejo simplicial K , se tiene $H_0(K) = \mathbb{Z}^r$, donde r es la cantidad de componentes conexas de K .

Demostración. Recordemos que $d_1 : C_1(K) \longrightarrow C_0(K)$ viene dado por $d_1[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$. Es decir que en el cociente $C_0 / \text{im } d_1$ se identifican los pares de vértices que forman una arista. Así que, por la proposición 1.2.2, se identifican los vértices que pertenecen a una misma componente conexa. Así, el grupo $H_0(K)$ es abeliano libre generado por un vértice de cada componente conexa. \square

Definición 1.3.6. El *complejo de cadenas aumentado* asociado a un complejo simplicial K es el que coincide con el complejo de cadenas en los grados no negativos, y tiene, además, al grupo \mathbb{Z} en el lugar -1 . El morfismo de borde $C_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$ es el que manda a cada vértice al 1, y se suele llamar *morfismo de aumentación*.

La *homología simplicial reducida* de K es la homología de este nuevo complejo de cadenas, y se la nota \widetilde{H}_* .

Observación 1.3.7. La homología simplicial reducida coincide con la homología simplicial en los grados positivos, y $\widetilde{H}_0 \oplus \mathbb{Z} = H_0$.

Definición 1.3.8. Sean K un complejo simplicial y A un subcomplejo de K . Se define el *complejo de cadenas relativo* al par (K, A) como $C_n(K, A) = C_n(K)/C_n(A)$, con el morfismo de borde inducido por el morfismo de borde del complejo de cadenas de K .

Observación 1.3.9. El cociente $C_n(K)/C_n(A)$ es un grupo abeliano libre, generado por las clases de los símlices orientados de K que no están en A .

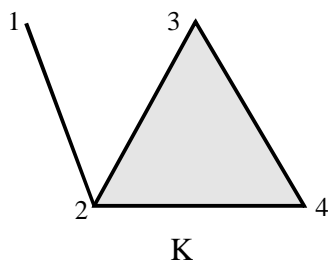
Definición 1.3.10. La *homología simplicial relativa* del par (K, A) es la homología del complejo simplicial relativo.

El siguiente teorema, que relaciona la homología relativa del par (K, A) con la homología de los complejos K y A , se encuentra demostrado por ejemplo en [8].

Teorema 1.3.11. *Dados un complejo simplicial K y un subcomplejo A , se tiene una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(K) \longrightarrow H_n(K, A) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0(K, A) \longrightarrow 0$$

Ejemplo. Sea K el siguiente complejo simplicial.



Calculemos la homología de K . Por el resultado previo, sabemos que $H_0(K) = \mathbb{Z}$. Además, $C_1(K)$ está generado por $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[2, 4]$, $[3, 4]$, y $C_2(K)$ por $[2, 3, 4]$. La imagen del morfismo d_2 está generada por $[2, 3] - [2, 4] + [3, 4]$, y coincide con el núcleo de d_1 . El morfismo d_2 es monomorfismo, pues no se anula en el generador, por lo tanto $H_2(K) = 0$. Así,

$$H_n(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Aunque la definición de homología simplicial depende de la combinatoria del complejo, se puede ver que es un invariante topológico del espacio subyacente. Es decir que dos triangulaciones de un mismo espacio tienen la misma homología simplicial. Más aún, vale el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en [15].

Teorema 1.3.12. *La homología simplicial de un complejo simplicial coincide con la homología singular de su realización geométrica.*

Recordemos el siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar en [15], y luego veamos un resultado análogo para complejos simpliciales y subcomplejos.

Teorema 1.3.13 (Teorema de Mayer-Vietoris). *Sea X un espacio topológico, y sean A y B subespacios tales que $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, entonces se tiene una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

Teorema 1.3.14 (Teorema de Mayer-Vietoris para complejos simpliciales). *Si un complejo simplicial K es la unión de dos subcomplejos, L y M , entonces hay una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow H_n(L \cap M) \longrightarrow H_n(L) \oplus H_n(M) \longrightarrow H_n(K) \longrightarrow H_{n-1}(L \cap M) \longrightarrow \cdots$$

Si además $L \cap M \neq \emptyset$, se tiene también una sucesión análoga en la homología reducida

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(L \cap M) \longrightarrow \tilde{H}_n(L) \oplus \tilde{H}_n(M) \longrightarrow \tilde{H}_n(K) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(L \cap M) \longrightarrow \cdots$$

Demostración. Sean $i_1 : L \cap M \hookrightarrow L$, $i_2 : L \cap M \hookrightarrow M$, $j_1 : L \hookrightarrow K$, y $j_2 : M \hookrightarrow K$ las inclusiones. Cada uno de estos morfismos induce un morfismo de complejos. Es decir que tenemos los siguientes diagramas, que además son conmutativos

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ i_1 \nearrow & & \searrow j_1 \\ L \cap M & & K \\ i_2 \searrow & & \nearrow j_2 \\ & M & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & C_*(L) & \\ i_{1*} \nearrow & & \searrow j_{1*} \\ C_*(L \cap M) & & C_*(K) \\ i_{2*} \searrow & & \nearrow j_{2*} \\ & C_*(M) & \end{array}$$

Para cada $n \geq 0$ se tiene una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C_n(L \cap M) \xrightarrow{\varphi} C_n(L) \oplus C_n(M) \xrightarrow{\psi} C_n(K) \longrightarrow 0$$

donde $\varphi(\sigma) = (i_{1*}(\sigma), -i_{2*}(\sigma))$ para $\sigma \in C_n(L \cap M)$ y $\psi(\tau, \nu) = j_{1*}(\tau) + j_{2*}(\nu)$ para $\tau \in C_n(L), \nu \in C_n(M)$.

Además, al ser todos morfismos de complejos, se tiene en realidad una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow C_*(L \cap M) \xrightarrow{\varphi_*} C_*(L) \oplus C_*(M) \xrightarrow{\psi_*} C_*(K) \longrightarrow 0$$

y ésta induce la sucesión exacta larga del enunciado.

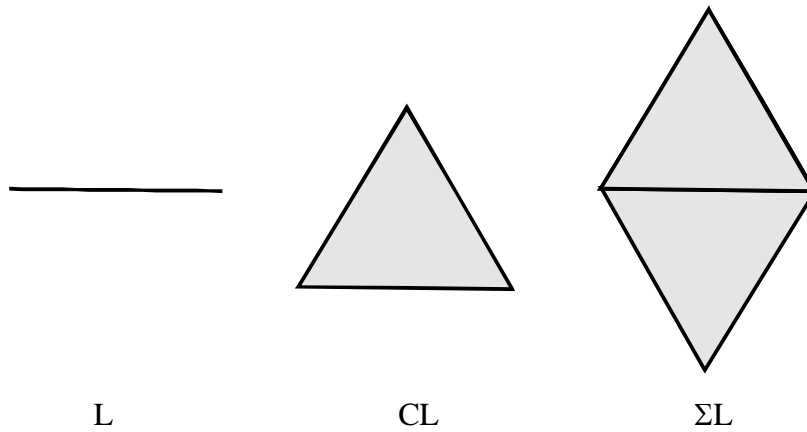
Para obtener la sucesión en homología reducida hay que hacer lo mismo, pero con el complejo aumentado. \square

Queremos traducir la noción de join a espacios topológicos, y luego usarla para calcular la homología de un join de complejos simpliciales, mediante la realización geométrica.

Definición 1.3.15. El *join* de dos espacios topológicos K y L se define como $KL = K \times L \times I / \sim$, donde I es el intervalo $[0, 1]$ y la relación \sim es la que identifica $(x, y, 0) \sim (\tilde{x}, y, 0)$, $(x, y, 1) \sim (x, \tilde{y}, 1)$ para todo $x, \tilde{x} \in K, y, \tilde{y} \in L$.

Cuando el espacio K es un punto x , al join lo llamaremos *cono* de L , y lo notaremos CL .

Cuando el espacio K es la esfera S^0 , lo llamaremos *suspensión* de L , y lo notaremos ΣL .



Un complejo L , su cono y su suspensión.

Observemos que al hacer el producto con el intervalo, estamos considerando los segmentos que unen puntos de K con puntos de L , pues a la terna (x, y, t) se la puede pensar como $tx + (1 - t)y$, y lo que la relación \sim identifica se debe a que $0x + 1y = 0\tilde{x} + 1y$.

En [15] se puede encontrar el siguiente resultado, que afirma que la definición del join de complejos simpliciales se traduce, mediante la realización geométrica, en la definición que dimos del join de espacios topológicos.

Proposición 1.3.16. *Dados dos complejos simpliciales finitos K y L , la realización geométrica del join es homeomorfa al join de sus realizaciones geométricas, es decir $|KL| \simeq |K||L|$.*

Teorema 1.3.17 (Fórmula de Künneth para la homología de un join). *Si K y L son espacios topológicos, entonces la homología reducida del join de los espacios verifica la siguiente fórmula.*

$$\tilde{H}_{r+1}(KL) \simeq \sum_{i+j=r} \tilde{H}_i(K) \otimes \tilde{H}_j(L) \oplus \sum_{i+j=r-1} \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\tilde{H}_i(K), \tilde{H}_j(L))$$

Demostración. Sea $X = KL = K \times L \times I / \sim$, donde $(x, y, 0) \sim (\tilde{x}, y, 0)$ y $(x, y, 1) \sim (x, \tilde{y}, 1)$. Sea π la proyección al cociente y sean $A = \pi\{t \geq \frac{1}{2} - \varepsilon\}$ y $B = \pi\{t \leq \frac{1}{2}\}$.

Aplicando el teorema de Mayer-Vietoris a $X = \dot{A} \cup \dot{B}$, se tiene

$$\dots \xrightarrow{\phi} \tilde{H}_{r+1}(X) \longrightarrow \tilde{H}_r(A \cap B) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}_r(A) \oplus \tilde{H}_r(B) \xrightarrow{\phi} \tilde{H}_r(X) \longrightarrow \dots$$

Notemos que K es un retracto por deformación de A , L de B , y $K \times L$ de $A \cap B$. Así que $\tilde{H}_r(A) = \tilde{H}_r(K)$, $\tilde{H}_r(B) = \tilde{H}_r(L)$ y $\tilde{H}_r(A \cap B) = \tilde{H}_r(K \times L)$. Veamos que el morfismo ϕ es nulo. Para eso, basta ver que las inclusiones $K \hookrightarrow X$, $L \hookrightarrow X$ son homotópicamente nulas.

Si definimos $i_1 : K \longrightarrow K \times L \times I$, $i_1(x) = (x, y, 1)$ e $i_0 : K \longrightarrow K \times L \times I$, $i_0(x) = (x, y, 0)$ para un $y \in L$ fijo, entonces la primera inclusión es $f = \pi i_1 : K \longrightarrow KL$. Además $i_0 \simeq i_1$ vía $H(x, t) = (x, y, t)$, y por lo tanto $\pi i_1 \simeq \pi i_0$. Pero la función $g = \pi i_0$ es constante. Así, f es homotópica en X a una constante. Análogamente se prueba que $L \hookrightarrow X$ es homotópicamente nula.

Reemplazando estos datos en la sucesión, obtenemos

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_{r+1}(X) \longrightarrow \tilde{H}_r(K \times L) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}_r(K) \oplus \tilde{H}_r(L) \longrightarrow 0$$

Así que $\tilde{H}_{r+1}(X) \simeq \ker \psi$. Por el teorema de Eilenberg Zilber (ver [16]), la homología del producto $K \times L$ es la homología del complejo $S_*(K) \otimes S_*(L)$, así que, por la fórmula de Künneth (ver [8]), vale lo siguiente.

$$H_r(K \times L) = \sum_{i+j=r} H_i(K) \otimes H_j(L) \oplus \sum_{i+j=r-1} \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_i(K), H_j(L))$$

Por otro lado, si $r > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} & \sum_{i+j=r} H_i(K) \otimes H_j(L) \oplus \sum_{i+j=r-1} \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_i(K), H_j(L)) = \\ & H_r(K) \oplus H_r(L) + \sum_{i+j=r} \tilde{H}_i(K) \otimes \tilde{H}_j(L) \oplus \sum_{i+j=r-1} \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\tilde{H}_i(K), \tilde{H}_j(L)) \end{aligned}$$

En el Tor reemplazamos simplemente homología por homología reducida porque H_0 es siempre libre, y por lo tanto el sumando se anula, sin importar el rango.

De modo que $\tilde{H}_{r+1}(KL)$ es isomorfo al núcleo de

$$H_r(K) \oplus H_r(L) + \sum_{i+j=r} \tilde{H}_i(K) \otimes \tilde{H}_j(L) \oplus \sum_{i+j=r-1} \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\tilde{H}_i(K), \tilde{H}_j(L)) \xrightarrow{\psi} H_r(K) \oplus H_r(L)$$

de donde se obtiene la fórmula del enunciado. \square

Observación 1.3.18. Si consideramos la homología con coeficientes en un cuerpo k , el Tor se va a anular siempre, y así tendremos la siguiente fórmula.

$$\tilde{H}_{r+1}(KL) = \sum_{i+j=r} \tilde{H}_i(K) \otimes \tilde{H}_j(L)$$

De ahora en más consideraremos siempre homología con coeficientes en un cuerpo k , y usaremos esta fórmula para la homología del join.

En el caso particular de una suspensión, se llega al siguiente resultado.

Corolario 1.3.19. *Dado un espacio topológico K , la homología de la suspensión de K viene dada por*

$$\tilde{H}_n(\Sigma K) = \tilde{H}_{n-1}(K), \quad n > 0$$

De todas formas, este resultado se puede demostrar también usando la sucesión de Mayer-Vietoris.

Capítulo 2

Espacios Topológicos Finitos

2.1. Definiciones

Los *espacios topológicos finitos*, es decir, espacios topológicos de cardinal finito, sirven para estudiar espacios mucho más generales, pues los tipos homotópicos débiles de los espacios finitos abarcan todos los tipos homotópicos débiles de los CW-complejos finitos. Además los espacios finitos tienen una fuerte relación con los conjuntos parcialmente ordenados finitos, que llamaremos *posets*, mediante la cual heredan una estructura combinatoria que los hace más accesibles. En esta sección introduciremos algunas propiedades de los espacios finitos y de la relación entre ellos y los posets.

Las referencias para esta sección y la siguiente son los trabajos fundacionales [13] y [17], las notas inéditas [11], y las tesis de Barmak, [1] y [2].

Recordemos los primeros axiomas de separación en espacios topológicos.

Definición 2.1.1. Un espacio topológico X es T_0 si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe, o bien un abierto U de X tal que $x \in U, y \notin U$, o un abierto V tal que $x \notin V, y \in V$.

Un espacio es T_1 si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe un abierto U tal que $x \in U, y \notin U$. Esta condición equivale a que los conjuntos unipuntuales sean cerrados.

Un espacio es T_2 si para cada par de puntos $x, y \in X$ existen abiertos U y V tales que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Claramente, si un espacio es T_2 entonces es T_1 y si es T_1 es T_0 .

El hecho de que en los espacios T_1 los puntos sean cerrados, hace que los espacios finitos T_1 sean poco interesantes, pues son discretos. Por eso, la propiedad que se les pide a los espacios finitos es sólo la de T_0 .

Definición 2.1.2. Dado un espacio topológico finito X , y dado $x \in X$, la intersección de todos los abiertos que contienen a x es claramente un abierto, y es el menor

que contiene a x . Lo llamaremos *abierto minimal de x* , y lo notaremos U_x .

Es claro que los abiertos U_x son una base para la topología de X .

Ahora veamos cómo se relacionan los espacios finitos con los posets.

Definición 2.1.3. Dado un espacio finito, definimos una relación de la siguiente manera: $x \leq y$ sii $x \in U_y$. Esta relación resulta en general reflexiva y transitiva, es decir, un preorden. Además, el espacio es T_0 si y sólo si la relación es antisimétrica.

En realidad, esta construcción puede hacerse en cualquier espacio topológico donde la intersección arbitraria de abiertos sea abierta. Pero nosotros trabajaremos sólo con los finitos.

Recíprocamente, dado un conjunto finito con un preorden (X, \leq) , se puede definir una topología en X , generada por la base $U_x = \{y \in X : y \leq x\}$, y resultará T_0 si y sólo si \leq es un orden.

Estas dos construcciones inducen una correspondencia uno a uno entre los espacios topológicos finitos y los conjuntos finitos con un preorden, y una entre los espacios finitos T_0 y los posets finitos.

En adelante trabajaremos únicamente con espacios T_0 , y sus posets asociados.

Así como llamamos $U_x = \bigcap \{U : x \in U, U \text{ es abierto}\} = \{y \in X : y \leq x\}$, llamaremos $F_x = \bigcap \{F : x \in F, F \text{ es cerrado}\} = \{y \in X : y \geq x\}$, y $C_x = \{y \in X : y \text{ es comparable con } x\}$. Además notaremos $\widehat{U}_x = U_x \setminus \{x\}$, $\widehat{F}_x = F_x \setminus \{x\}$, y $\widehat{C}_x = C_x \setminus \{x\}$.

Dados dos elementos comparables $x < y$ de X , tiene sentido hablar del intervalo que forman, es decir, $(x, y) = \{z \in X : x < z < y\}$, o $[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$.

Observación 2.1.4. Un conjunto $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si para todo $x \in U$, vale $y \leq x \Rightarrow y \in U$. Análogamente, un conjunto $F \subseteq X$ es cerrado si y sólo si para todo $x \in F$ vale $y \geq x \Rightarrow y \in U$.

Notemos que para todo $x \in X$, F_x es el menor cerrado que contiene a x , es decir que es la clausura del conjunto $\{x\}$. Además, $C_x = F_x \cup U_x$, y en general C_x no es abierto ni cerrado.

Los siguientes resultados muestran cómo la correspondencia entre posets y espacios finitos es compatible con más propiedades de sus estructuras.

Proposición 2.1.5. *Una función entre espacios finitos es continua si y sólo si preserva el orden.*

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ continua y sean $a \leq b$ en X . Como f es continua y $U_{f(b)}$ es abierto, $f^{-1}(U_{f(b)})$ es también abierto. Pero $b \in f^{-1}(U_{f(b)})$, entonces $a \in f^{-1}(U_{f(b)})$, por ser $a \leq b$.

Recíprocamente, sea f un morfismo de orden y sean V un abierto de Y y $b \in f^{-1}(V)$, veamos que $U_b \subseteq f^{-1}(V)$. Si $a \leq b$, entonces $f(a) \leq f(b)$, así que $f(a) \in U_{f(b)}$. Como V es abierto y $f(b) \in V$, entonces $U_{f(b)} \subseteq V$. Por lo tanto, $f(a) \in V$ o sea que $a \in f^{-1}(V)$. \square

Corolario 2.1.6. Sean X un espacio finito e Y un subconjunto del conjunto subyacente. Restringiendo el orden de X , se obtiene el orden en Y que lo hace subespacio topológico. Es decir, la topología del subespacio es la que corresponde al orden restringido al subconjunto.

Proposición 2.1.7. Sea X un espacio finito. Dos elementos $x, y \in X$, están en la misma componente conexa si y sólo si existe una sucesión $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ tal que para cada i los elementos x_{i-1} y x_i son comparables.

Demostración. Sea $x \in X$ y sea A el conjunto de los $y \in X$ que se conectan con x con una sucesión como la del enunciado. Entonces A es abierto y cerrado, pues cada para todo $y \in A$, vale que $U_y \subseteq A, F_y \subseteq A$, así que si un elemento z no pertenece a A , no puede pertenecer a la componente conexa de x .

Para ver la otra implicación, observemos que las componentes conexas de un espacio son siempre cerradas. Como nuestro espacio es finito, también han de ser abiertas. Sea $x \in X$, como su componente conexa es abierta, contiene a U_x , y por ser cerrada contiene a F_x . De modo que si dos elementos son comparables, están en la misma componente. Esto implica que cualquier sucesión como la mencionada está incluida dentro de una componente conexa. \square

Observación 2.1.8. Claramente, el conjunto de los elementos que se conectan con un x dado mediante tales sucesiones, es la componente conexa de x .

Proposición 2.1.9. Un espacio finito es conexo si y sólo si es arcoconexo.

Demostración. Por lo probado anteriormente, basta ver que, dados $x, y \in X$ con $x < y$, hay un camino que los une. Sea $\gamma : I \rightarrow X$ definida por $\gamma(t) = x$ para todo $0 \leq t < 1$ y $\gamma(1) = y$. Para ver que es continua basta ver que $\gamma^{-1}(U_z)$ es abierto para todo $z \in X$. Si $z \geq y$, entonces $\gamma^{-1}(U_z) = I$, si $z \geq x, z \not\geq y$, entonces $\gamma^{-1}(U_z) = [0, 1)$, y en el resto de los casos $\gamma^{-1}(U_z) = \emptyset$. \square

Definición 2.1.10. Dadas dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$, diremos que $f \leq g$ si para todo $x \in X$ vale que $f(x) \leq g(x)$, y que f y g son comparables si $f \leq g$ ó $g \leq f$.

La siguiente caracterización de funciones homotópicas en espacios finitos se encuentra en [2].

Proposición 2.1.11. Dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas si y sólo si existe una sucesión $f = f_0, f_1, \dots, f_n = g$ tal que para todo $i > 0$ las funciones f_{i-1} y f_i son comparables.

Corolario 2.1.12. Sea X un espacio finito con elemento máximo o mínimo, entonces X es contráctil.

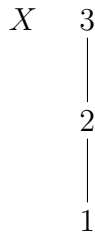
Demostración. La función identidad es menor o igual a la función constantemente x , si x es el máximo, y mayor o igual a la misma, si x es el mínimo, por lo que resultan homotópicas. \square

Definición 2.1.13. Una manera de representar un espacio finito es mediante su *diagrama de Hasse*. El diagrama es un digrafo que tiene por puntos a los elementos del conjunto, y una arista de extremo inferior x y extremo superior z cada vez que $x < z$ pero no exista ningún y tal que $x < y < z$. En estos casos, diremos que z cubre a x , y lo notaremos $x \prec z$.

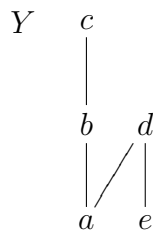
Definición 2.1.14. Dado un espacio finito X , se define su *altura* como

$$h(X) = \max\{\#\{x_0, x_1, \dots, x_n\} : \text{tal que } \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ es una cadena en } X\} - 1.$$

Por ejemplo, sea $X = \{1, 2, 3\}$ con el orden $1 < 2 < 3$. El espacio tiene altura 2 y su diagrama de Hasse es el siguiente.

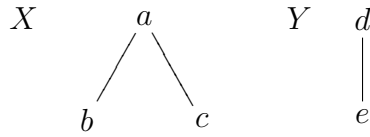


Si $Y = \{a, b, c, d, e\}$ con $a < b < c, a < d, e < d$, entonces $h(Y) = 2$ y su diagrama es

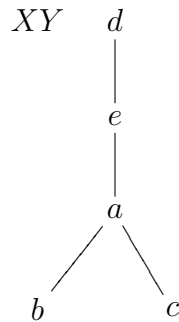


Definición 2.1.15. Dados dos posets X e Y , el *join* de X con Y , al que notaremos XY , tiene como conjunto subyacente a la unión disjunta de los dos conjuntos. El orden en XY es el siguiente: dentro de X y de Y , es el orden original de cada espacio; además, se tiene $x < y$ para todo $x \in X, y \in Y$.

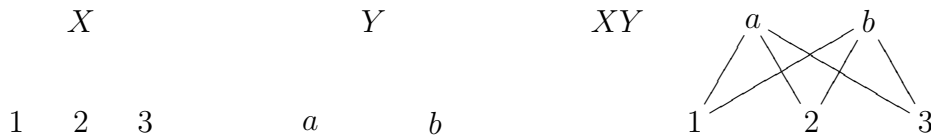
Ejemplo. Sean X e Y los espacios dados por estos dos diagramas



es decir, $X = \{a, b, c\}$ con $b < a, c < a$, $Y = \{d, e\}$ con $e < d$. Entonces en XY el orden viene dado por $b < a, c < a, e < d, a < d, a < e, b < d, b < e, c < d, c < e$, así que su diagrama es



Ejemplo 2.1.16. En cambio, si $X = \{1, 2, 3\}$ sin ninguna relación estricta, es decir, discreto, e $Y = \{a, b\}$, también discreto, entonces $XY = \{1, 2, 3, a, b\}$, con $\{1 < a, 1 < b, 2 < a, 2 < b, 3 < a, 3 < b\}$. Los diagramas de estos posets son los siguientes



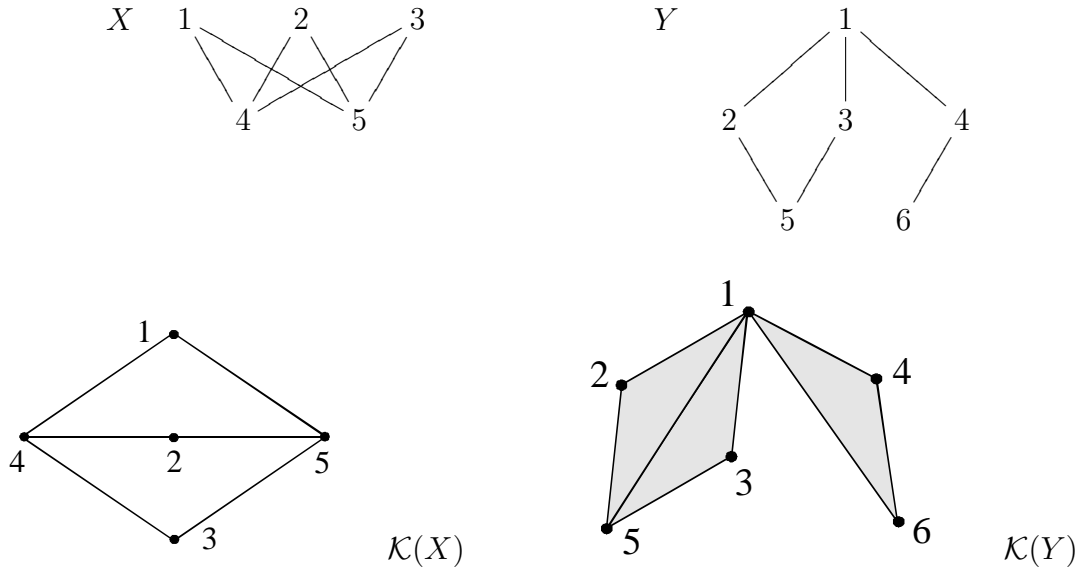
Definición 2.1.17. Cuando el espacio Y es un único punto, el join XY se llama *cono* de X .

Cuando el espacio Y es un conjunto discreto de dos puntos, como en el ejemplo 2.1.16, el join XY se llama *suspensión* de X .

2.2. Relación entre los espacios finitos y los complejos simpliciales

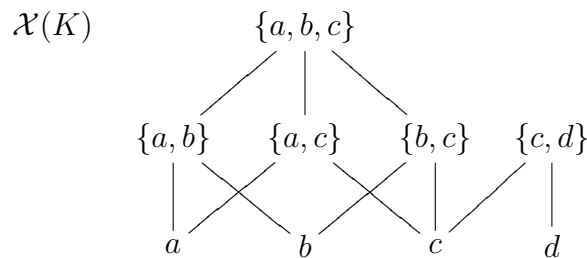
Establecemos aquí la correspondencia entre espacios finitos y complejos simpliciales finitos. Ésta fue desarrollada por McCord en [13].

Definición 2.2.1. Dado un espacio finito X , definimos su complejo simplicial asociado, al cual notaremos $\mathcal{K}(X)$, como el que tiene por vértices a los elementos de X y por símlices a sus cadenas. Es decir, $\mathcal{K}(X)^{(0)} = X$, $\mathcal{K}(X) = \{\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq X$ tales que x_i, x_j son comparables para todo $i, j\}$.



Recíprocamente, dado un complejo simplicial K , definimos su poset asociado como el que tiene por elementos a los símlices de K , con el orden dado por la inclusión. A este poset lo notaremos $\mathcal{X}(K)$.

Si el complejo K es el que tiene los símlices $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}\}$, entonces su poset asociado tiene el siguiente diagrama.



Estas dos aplicaciones no son mutuamente inversas, pero sí establecen una relación importante entre los complejos simpliciales y los espacios finitos, la cual brinda una nueva forma de estudiar combinatoriamente a estos últimos.

Dado un complejo simplicial K , $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ es la subdivisión baricéntrica de K , es decir, $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = K'$.

Observación 2.2.2. Si X es un espacio finito, $h(X) = \dim \mathcal{K}(X)$. Si K es un complejo simplicial, $\dim K = h(\mathcal{X}(K))$.

A partir de esta última observación, surge la siguiente definición.

Definición 2.2.3. Dado un espacio finito X , se define su *subdivisión baricéntrica* como $X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$.

Definición 2.2.4. Dada una función continua entre espacios finitos $f : X \rightarrow Y$, se define su morfismo simplicial asociado, $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ como el que coincide con f en los vértices. $\mathcal{K}(f)$ es efectivamente un morfismo simplicial pues, como f preserva el orden, también debe preservar cadenas.

Análogamente, dado un morfismo simplicial $f : K \rightarrow L$, le asignaremos una función continua, $\mathcal{X}(f) : \mathcal{X}(X) \rightarrow \mathcal{X}(Y)$ definida por $\mathcal{X}(f)(\sigma) = f(\sigma)$. Claramente $\mathcal{X}(f)$ preserva el orden y, por lo tanto, es continua.

Los siguientes resultados, que relacionan la topología de X con la de $\mathcal{K}(X)$, y la de K con la de $\mathcal{X}(K)$, se pueden encontrar en [13], [10] y [2], y se deben a M. C. McCord.

Proposición 2.2.5. (i) Dado un espacio finito X , hay una equivalencia homotópica débil entre $\mathcal{K}(X)$ y X .

(ii) Dada una función continua entre espacios finitos $f : X \rightarrow Y$, f es una equivalencia homotópica débil si y sólo si $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ lo es.

(iii) Dado un complejo simplicial K , hay una equivalencia homotópica débil entre K y $\mathcal{X}(K)$.

(iv) Dado un morfismo simplicial $f : K \rightarrow L$, f es una equivalencia homotópica débil si y sólo si $\mathcal{X}(f) : \mathcal{X}(K) \rightarrow \mathcal{X}(L)$ lo es.

Corolario 2.2.6. Dado un espacio finito X , hay una equivalencia homotópica débil entre X y $\mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$.

2.2.1. Links y stars

Veamos cómo se traducen los links y stars con las aplicaciones \mathcal{X} y \mathcal{K} . En los próximos capítulos nos será útil saber describirlos en uno y otro contexto.

Proposición 2.2.7. Sea X un espacio finito, y sea $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ un símplex de $\mathcal{K}(X)$, es decir, una cadena en X .

- El conjunto $\bigcap_{0 \leq i \leq n} C_{x_i}$ es un subespacio de X , y su complejo asociado es $\text{st } \sigma$.
- Suponiendo que $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, el join $\widehat{U}_{x_0}(x_0, x_1)(x_1, x_2) \dots (x_{n-1}, x_n)\widehat{F}_{x_n}$ es un subespacio de X cuyo complejo asociado es $\text{lk } \sigma$.

Corolario 2.2.8. *En particular, si $\sigma = \{x\}$, entonces $\text{st } \sigma = \mathcal{K}(C_x)$ y $\text{lk } \sigma = \mathcal{K}(\widehat{C}_x)$, y si $\sigma = \{a, b\}$ con $a \prec b$, entonces $\text{st } \sigma = \mathcal{K}(U_a F_b)$ y $\text{lk } \sigma = \mathcal{K}(\widehat{U}_a \widehat{F}_b)$.*

Proposición 2.2.9. *Sea K un complejo simplicial, y sea $\sigma \in K$.*

- *Mediante la aplicación \mathcal{X} , el subcomplejo $\text{st } \sigma$ de K se corresponde con el conjunto $\{\tau \in \mathcal{X}(K) \text{ tal que } \{\sigma, \tau\} \text{ está acotado superiormente}\}$.*
- *El link de σ se corresponde con el conjunto $\{\tau \in \mathcal{X}(K) \text{ tal que } \{\sigma, \tau\} \text{ está acotado superiormente, pero no inferiormente}\}$.*

2.3. Equivalencias débiles y modelos finitos

En esta sección repasamos la noción de equivalencia homotópica débil y el rol que desempeñan los espacios finitos como modelos de tipo de homotopía débil.

Definición 2.3.1. Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ se dice *equivalencia homotópica* si existe una función $g : Y \longrightarrow X$ tal que las composiciones fg y gf son homotópicas a las identidades correspondientes, es decir, $fg \simeq 1_Y$, $gf \simeq 1_X$.

Dos espacios se dicen *homotópicamente equivalentes*, o que tienen el mismo *tipo homotópico*, si hay una equivalencia homotópica entre ellos.

Ésta es una relación de equivalencia.

Un espacio se dice *contráctil* si tiene el tipo homotópico de un punto.

Definición 2.3.2. Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ se dice *equivalencia homotópica débil* si los morfismos inducidos $f_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$ son isomorfismos, para todo $n \geq 0$ y para todo $x_0 \in X$.

Observación 2.3.3. Las equivalencias homotópicas son equivalencias homotópicas débiles.

El que haya una equivalencia homotópica débil de X a Y no implica que haya una de Y a X , y es por eso que esto no define una relación de equivalencia.

Definición 2.3.4. Dos espacios X y Y se dicen *débilmente equivalentes* si existe un tercer espacio Z y dos equivalencias débiles $f : Z \longrightarrow X$, $g : Z \longrightarrow Y$.

Se puede ver que ésta es una relación de equivalencia.

Un espacio se dice *homotópicamente trivial* si es débilmente equivalente a un punto.

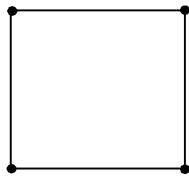
Definición 2.3.5. Dado un espacio topológico X y un espacio topológico finito Y , diremos que Y es un *modelo finito* de X si tiene su mismo tipo homotópico débil.

En particular, todo espacio finito es un modelo finito de su complejo simplicial asociado.

Ejemplo. El espacio que tiene dos puntos no comparables, es homeomorfo a la esfera S^0 , así que es un modelo finito de la misma. La suspensión de este espacio finito, que tiene el diagrama



es un modelo de S^1 , pues su complejo simplicial asociado es homeomorfo a S^1 .

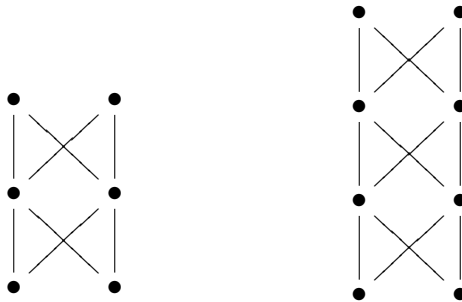


$\mathcal{K}(X)$

Observación 2.3.6. Dados dos espacios finitos X e Y , se tiene que $\mathcal{K}(XY) = \mathcal{K}(X)\mathcal{K}(Y)$.

Corolario 2.3.7. Si llamamos X al espacio finito de dos puntos, entonces el join de $n + 1$ copias de X es un modelo finito de la esfera S^n .

Aquí tenemos un modelo de S^2 y uno de S^3 .



Por último, recordemos este resultado, que se puede encontrar en [8].

Teorema 2.3.8. Si f es una equivalencia homotópica débil, entonces induce isomorfismos entre los grupos de homología.

2.4. Métodos de reducción de un punto

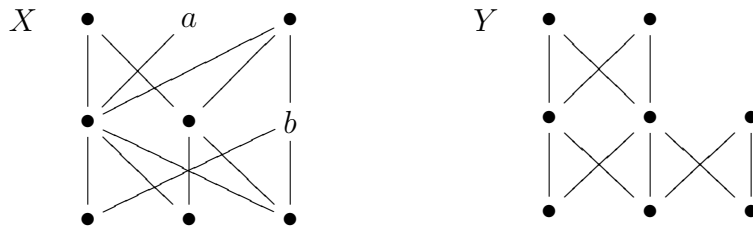
Los métodos de reducción de un punto consisten en quitar de un espacio finito un punto y obtener un nuevo espacio que es equivalente, en cierto sentido, al original. En esta sección repasaremos tres tipos de puntos: *beat points*, *weak points* y γ -*points*.

Los resultados que usaremos sobre los *beat points* se deben a R. E. Stong, quien los definió en [17]. Los *weak points*, que generalizan a los *beat points*, fueron introducidos por J. A. Barmak y E. G. Minian en [4], y los γ -*points*, que generalizan a estos últimos, en [3].

Definición 2.4.1. Sea X un espacio finito, y sea $x \in X$. Diremos que x es un *up beat point* si \widehat{F}_x tiene un mínimo, y que es un *down beat point* si \widehat{U}_x tiene máximo. Si x es un *up beat point* o un *down beat point*, diremos que es un *beat point*. Si un espacio Y se obtiene de quitar a X un *beat point*, diremos que hay un *colapso fuerte elemental* de X a Y , y notaremos $X \searrow^e Y$. Una sucesión finita de colapsos fuertes elementales dan lugar a un *colapso fuerte*, que se nota $X \searrow Y$.

En el diagrama de Hasse, un *beat point* es un punto que tiene una sola arista hacia arriba o una sola hacia abajo. Veamos algunos ejemplos.

En el espacio X , a es un *down beat point* y b es un *up beat point*, y el espacio Y no tiene ningún *beat point*.



Proposición 2.4.2. Si x es un *beat point* de X , entonces $X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ es un retracto por deformación fuerte.

Demostración. Si \tilde{x} es el máximo de \widehat{U}_x , basta considerar la retracción $r : X \rightarrow X \setminus \{x\}$ definida por $r(x) = \tilde{x}$ y $r|_{X \setminus \{x\}} = id$. Si \widehat{F}_x tiene mínimo, la prueba es análoga. \square

Definición 2.4.3. Sea X un espacio finito, y sea $x \in X$. Diremos que x es un *up weak point* si \widehat{F}_x es contráctil, y que es un *down weak point* si \widehat{U}_x es contráctil. Si x es un *up weak point* o un *down weak point*, diremos que es un *weak point*. Si un espacio Y se obtiene de quitarle a X *weak points*, diremos que X *colapsa* a Y y notaremos $X \searrow Y$. Dos espacios finitos se dirán *simplemente equivalentes* si uno se obtiene del otro agregando y quitando *weak points*.

Observación 2.4.4. Los *beat points* son siempre *weak points*, pues los espacios con máximo o mínimo son contráctiles.

El siguiente resultado se puede encontrar en [2].

Proposición 2.4.5. El *join* de dos espacios topológicos es contráctil si y sólo si uno de ellos lo es.

En consecuencia, un punto x es un *weak point* si y sólo si \widehat{C}_x es contráctil, pues $\widehat{C}_x = \widehat{U}_x \widehat{F}_x$.

El siguiente resultado se debe a M. C. McCord, y se puede encontrar en [12].

Teorema 2.4.6. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Si \mathcal{U} es una base de abiertos de Y , y las restricciones $f : f^{-1}(U) \rightarrow U$ son equivalencias homotópicas débiles para todo $U \in \mathcal{U}$, entonces f es una equivalencia homotópica débil.*

Proposición 2.4.7. *Si x es un weak point de X , entonces $X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil.*

Demostración. Para todo $y \in X$ la restricción $i : i^{-1}(U_y) \rightarrow U_y$ es una equivalencia homotópica por ser contráctiles su dominio y su codominio, así que, por el teorema 2.4.6, la inclusión es una equivalencia homotópica débil. \square

Definición 2.4.8. Sea X un espacio finito y sea $x \in X$. Diremos que x es un γ -point si \widehat{C}_x es homotópicamente trivial.

Observación 2.4.9. Los *weak points* son siempre γ -points.

Como se puede ver en [3], el join de dos espacios, uno de los cuales es homotópicamente trivial, es también homotópicamente trivial, pero no es cierto que si el join lo es, uno de los dos deba serlo. Así que, a diferencia de los *weak points*, dado un $x \in X$, que x sea γ -point no es equivalente a que uno entre \widehat{U}_x y \widehat{F}_x sea homotópicamente trivial.

Los tres resultados siguientes se encuentran en [4]

Proposición 2.4.10. *Si x es un γ -point de X , entonces la inclusión $X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil.*

La siguiente proposición nos garantiza que los γ -points no se pueden generalizar más, si se quiere que la inclusión $X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ sea una equivalencia homotópica débil.

Proposición 2.4.11. *Sea X un espacio finito y sea $x \in X$ un elemento que no es maximal ni minimal. Si la inclusión $X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil, entonces x es un γ -point.*

Para terminar este capítulo, recordamos el resultado más importante que relaciona la teoría de homotopía simple de poliedros con la de espacios finitos.

Teorema 2.4.12. *Si X colapsa a Y , entonces $\mathcal{K}(X)$ colapsa a $\mathcal{K}(Y)$. Más aún, dos espacios finitos X e Y son simplemente equivalentes si y sólo si sus poliedros asociados $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$ lo son.*

Si un complejo simplicial K colapsa a L , entonces $\mathcal{X}(K)$ colapsa a $\mathcal{X}(L)$. Más aún, dos complejos simpliciales son simplemente equivalentes si y sólo si sus espacios finitos asociados, mediante el funtor \mathcal{X} , lo son.

Capítulo 3

Sacando una relación

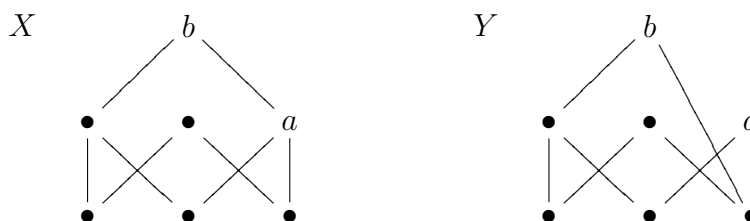
Sea X un espacio finito y conexo, y sean $a, b \in X$ tales que $a \prec b$. En este capítulo comparamos la homología y la homotopía del espacio X con las del espacio Y , que se obtiene al sacarle a X la relación $a < b$. Notemos que Y es efectivamente un espacio T_0 . Para ver que la relación de Y es transitiva observemos que, si $x \leq y, y \leq z$ en Y , entonces $x \leq y, y \leq z$ en X , por lo que $(x, z) \neq (a, b)$, así que $x \leq z$ en Y por la transitividad original.

Los resultados de este capítulo son originales.

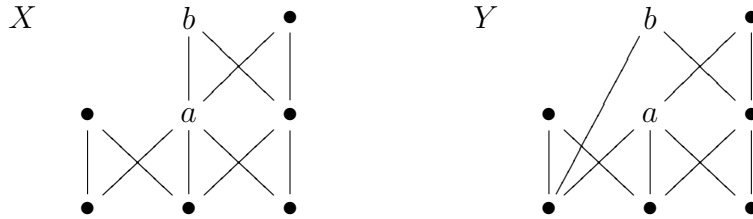
Observación 3.0.13. La diferencia en los diagramas de Hasse de X e Y no es tan fácil de describir. No sólo falta la arista de extremos a y b , sino que posiblemente haya nuevas aristas. Los elementos menores que a siguen siendo menores que b en Y , pero podría ser que alguno de ellos sólo se comparara con b a través de a . Éste es el caso en el que aparece en Y una arista nueva: la de extremos x y b , con cada $x \prec a$, tal que $\nexists c \neq a$ con $x < c < b$.

Veamos algunos ejemplos.

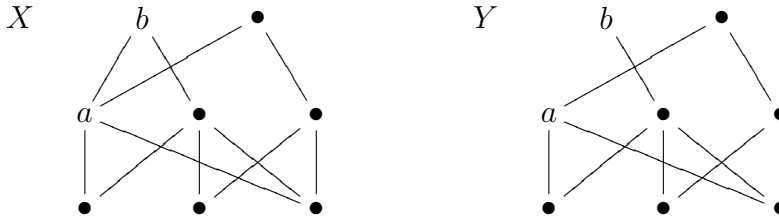
De X quitamos la relación $a < b$, obtenemos el espacio Y . Estos son sus diagramas de Hasse.



Este es otro ejemplo.



Y ahora vemos uno donde no hay en Y nuevas aristas.



Claramente Y no es un subespacio de X , pues tiene los mismos elementos, y más abiertos, pero el complejo $\mathcal{K}(Y)$ es un subcomplejo de $\mathcal{K}(X)$. Al comparar estos dos complejos simpliciales, obtendremos relaciones entre los espacios finitos.

Proposición 3.0.14. *Sea X un espacio finito al cual se le quita una relación $a < b$ con $a \prec b$, para obtener el espacio Y . Entonces $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(Y) \coprod_{\dot{\sigma} \text{ lk } \sigma} \text{st } \sigma$, donde σ es el 1-símplex $\{a, b\} \in \mathcal{K}(X)$, y $\text{st } \sigma$ es el star del símplex σ dentro del complejo $\mathcal{K}(X)$, y $\dot{\sigma}$ su borde, es decir, $\dot{\sigma} = \{\{a\}, \{b\}\}$.*

Demostración. Si $\tau = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{K}(Y)$ con $x_0 < \dots < x_n$ en X , entonces $(x_{i-1}, x_i) = (a, b)$ para algún i , es decir que $\sigma \leq \tau$ y por lo tanto $\tau \in \text{st } \sigma$. Así, $\mathcal{K}(X)$ es la unión de estos dos subcomplejos.

Sea ahora $\tau = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$, de manera que $\{x_0, \dots, x_n\}$ es una cadena en Y , y $\{x_0, \dots, x_n, a, b\}$ es una cadena en X . Esto significa que $\{a, b\} \not\subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, y que x_i se compara con a y con b para todo i , es decir, $x_i \leq a$ o $x_i \geq b$ para todo i . Si, $\{a, b\} \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \emptyset$, entonces $\tau \in \text{lk } \sigma$. Si $\{a, b\} \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \{a\}$, entonces $\tau = \{a\}\nu$ con $\nu \in \text{lk } \sigma$, y si $\{a, b\} \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \{b\}$, entonces $\tau = \{b\}\nu$ con $\nu \in \text{lk } \sigma$. Así que en cualquiera de los casos se cumple $\tau \in \dot{\sigma} \text{ lk } \sigma$. Por último, es claro que $\dot{\sigma} \text{ lk } \sigma \subseteq \mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$.

□

3.1. Homología

Dado que $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(Y) \coprod_{\dot{\sigma} \text{ lk } \sigma} \text{st } \sigma$ y que $\dot{\sigma} \text{ lk } \sigma \neq \emptyset$, se puede aplicar el teorema de Mayer-Vietoris para complejos simpliciales, y así obtener la siguiente sucesión exacta en homología

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(\dot{\sigma} \text{ lk } \sigma) \longrightarrow \tilde{H}_n(\mathcal{K}(Y)) \oplus \tilde{H}_n(\text{st } \sigma) \longrightarrow \tilde{H}_n(\mathcal{K}(X)) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(\dot{\sigma} \text{ lk } \sigma) \longrightarrow \cdots$$

Algunos de estos términos los conocemos. En primer lugar, como $\text{st } \sigma$ es un cono, sabemos que es contráctil, y por lo tanto acíclico. Por otro lado, como cada espacio finito es débilmente equivalente a su complejo simplicial asociado, éstos comparten los grupos de homología, es decir que $H_*(\mathcal{K}(X)) = H_*(X)$, y $H_*(\mathcal{K}(Y)) = H_*(Y)$.

Si reemplazamos estos datos en la sucesión, obtenemos

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(\dot{\sigma} \text{ lk } \sigma) \longrightarrow \tilde{H}_n(Y) \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(\dot{\sigma} \text{ lk } \sigma) \longrightarrow \cdots$$

Además, $\dot{\sigma}$ es la esfera 0-dimensional, así que $\dot{\sigma} \text{ lk } \sigma$ es la suspensión de $\text{lk } \sigma$. El complejo $\text{lk } \sigma$ es, a su vez, el join de los complejos $\mathcal{K}(\hat{F}_b)$ y $\mathcal{K}(\hat{U}_a)$. Recordemos que estamos considerando los grupos de homología con coeficientes en un cuerpo k , por lo que no hay parte de torsión y, por la fórmula Künneth para la homología de un join, se tiene

$$\tilde{H}_n(\dot{\sigma} \text{ lk } \sigma) = \tilde{H}_{n-1}(\text{lk } \sigma) = \sum_{i+j=n-2} \tilde{H}_i(\hat{U}_a) \otimes \tilde{H}_j(\hat{F}_b)$$

Observación 3.1.1. Si $\text{lk } \sigma \neq \emptyset$, entonces $\dot{\sigma} \text{ lk } \sigma$ es conexo, así que hay un epimorfismo $H_1(Y) \longrightarrow H_1(X)$.

Proposición 3.1.2. Sea X un espacio finito de altura n , y sean $a \prec b$ en X . Sea Y el espacio obtenido al quitar la relación $a < b$. Si X tiene homología nula en grado n , lo mismo se cumple para Y .

Observemos que esto no es obvio, pues en general $h(Y) = h(X) = n$.

Demostración. Reemplazando en la sucesión exacta $H_n(X) = 0$ y $H_{n+1}(X) = 0$ (por dimensión), obtenemos

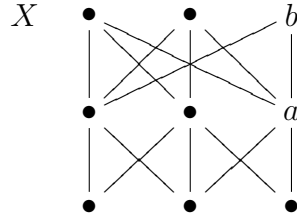
$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_n(\dot{\sigma} \text{ lk } \sigma) \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

de donde se sigue que

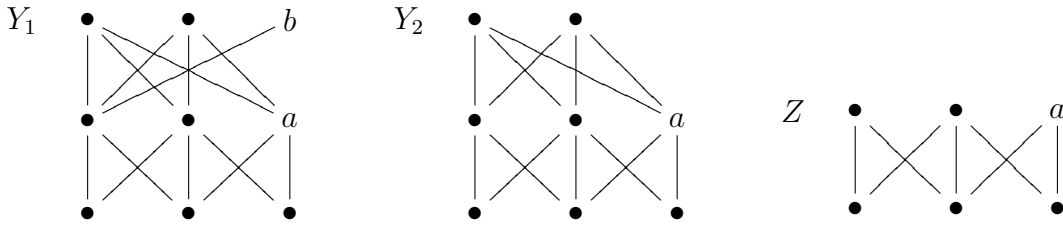
$$\tilde{H}_n(Y) = \tilde{H}_n(\dot{\sigma} \text{ lk } \sigma) = \tilde{H}_{n-1}(\text{lk } \sigma)$$

pero $\text{lk } \sigma$ es un complejo simplicial de dimensión menor o igual a $n - 2$, así que $\tilde{H}_{n-1}(\text{lk } \sigma) = 0$ y entonces $\tilde{H}_n(Y) = 0$. \square

Ejemplo. Sea X el siguiente espacio



Le quitamos la relación $a < b$, y obtenemos el espacio Y_1 , al cual le quitamos b , que es un *beat point*.



El espacio Y_2 es la suspensión de Z , que es un modelo de $S^1 \vee S^1$, y sabemos que Z tiene homología no nula en grado 1, así que Y_2 tiene homología no nula en grado dos. Por lo que vimos recién, esto implica que $H_2(X) \neq 0$.

Teorema 3.1.3. Sea X un espacio finito, y sean $a \prec b$ en X tales que $\widehat{U}_a \neq \emptyset$ y $\widehat{F}_b \neq \emptyset$, es decir que a no es minimal y b no es maximal. Sea Y el espacio obtenido al quitar la relación $a < b$.

Si Y tiene homología nula en grados 0, 1 y 2, esto es cierto también para X .

Más aún, si al sacar varias relaciones, una a una, en cada paso verificando la misma condición anterior, el espacio resultante tiene homología nula en los grados menores que 3, entonces X también.

Demostración. Probemos la primera afirmación. Para $n \leq 2$ sabemos que $\widetilde{H}_n(Y) = 0$ y $\widetilde{H}_{n-1}(Y) = 0$, por lo tanto, en la sucesión exacta tenemos

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \widetilde{H}_n(X) \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}(\partial \text{lk } \sigma) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

de modo que, si $n \leq 2$,

$$\widetilde{H}_n(X) = \widetilde{H}_{n-1}(\partial \text{lk } \sigma) = \widetilde{H}_{n-2}(\text{lk } \sigma) = \sum_{i+j=n-3} \widetilde{H}_i(\widehat{U}_a) \otimes \widetilde{H}_j(\widehat{F}_n).$$

Como los complejos \widehat{U}_a y \widehat{F}_n no son vacíos, $\widetilde{H}_i(\widehat{U}_a) = 0$ y $\widetilde{H}_j(\widehat{F}_n) = 0$ para $i < 0$ o $j < 0$. Así que, si $n < 3$, se tiene que $\widetilde{H}_n(X) = 0$.

Ahora, si al sacar varias relaciones, en cada paso verificando la condición mencionada, se llega a un espacio cuya homología en los grados menores que 3 es nula, entonces, por lo que ya hemos probado, el espacio del paso anterior tenía también homología nula en esos grados, y así, inductivamente, se llega al espacio original. \square

Observación 3.1.4. Para que se cumpla la hipótesis $\widehat{U}_a \neq \emptyset$ y $\widehat{F}_b \neq \emptyset$, el espacio X tiene que tener altura al menos 3, así que en este resultado no se tratan todos los grupos de homología del espacio X .

Observación 3.1.5. Si X es acíclico y de altura 2, debido a la sucesión exacta de la página 37, se tiene que $\widetilde{H}_*(Y) = \widetilde{H}_*(\dot{\sigma} \text{lk } \sigma) = \widetilde{H}_{*-1}(\text{lk } \sigma)$, y $\text{lk } \sigma$ es un conjunto discreto. Si suponemos que no es vacío, entonces

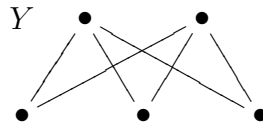
$$\widetilde{H}_r(Y) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ \mathbb{Z}^{\#(\text{lk } \sigma)-1} & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Si en cambio $\text{lk } \sigma = \emptyset$, entonces $\widetilde{H}_*(Y) = \widetilde{H}_*(\dot{\sigma}) = \widetilde{H}_*(S^0)$, es decir que

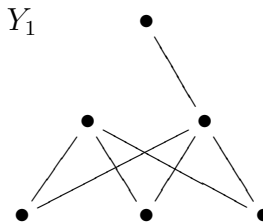
$$\widetilde{H}_r(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{si } r > 0 \end{cases}$$

Cuando se quiera calcular la homología de un espacio finito, una forma de hacerlo es intentar agregar relaciones hasta llegar a algo acíclico, y usar este último resultado.

Ejemplo. Sea Y el poset cuyo diagrama de Hasse es el siguiente

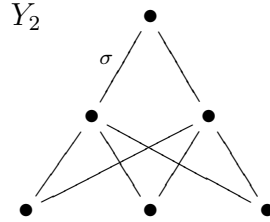


Le agregamos a Y un elemento con una relación, y obtenemos Y_1



y al ser este elemento un *beat point* de Y_1 , sabemos que las homologías de Y e Y_1

coinciden. Ahora agregamos una relación más y obtenemos Y_2



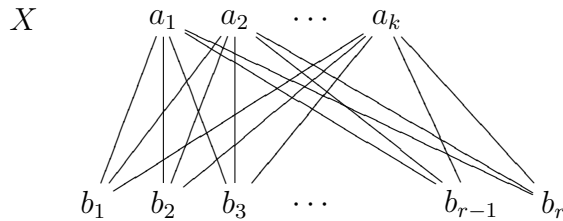
Como Y_2 tiene máximo, es contráctil y por lo tanto acíclico. A partir de este dato, podemos calcular fácilmente la homología de Y_1 . Como $\# \text{lk } \sigma = 3$, se tiene que

$$\tilde{H}_r(Y_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq 1 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

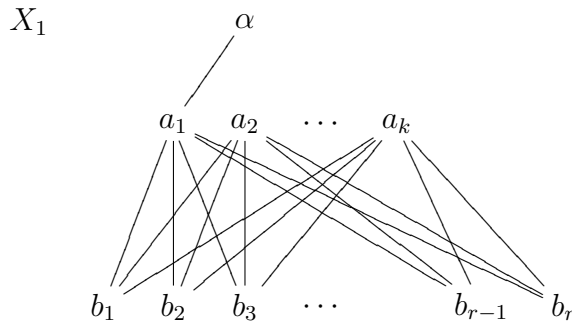
Y, por lo tanto

$$\tilde{H}_r(Y) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq 1 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

Ejemplo. También podemos, con un método similar, calcular la homología de un join de dos espacios discretos (finitos) cualesquiera. Sea X el join entre k puntos a_1, \dots, a_k y r puntos b_1, \dots, b_r .



Agregamos un punto, α , mayor a a_1 . Al poset obtenido con este cambio lo llamamos X_1 . Observemos que α es un *beat point* de X_1 , así que las homologías de X y X_1 coinciden.



Ahora agregamos la relación $a_2 < \alpha$ y obtenemos un nuevo poset, X_2 , pero ya no conservamos la homología. Siguiendo, llegamos a X_{k-1} , que tiene las relaciones

$a_1 < \alpha, a_2 < \alpha, \dots, a_{k-1} < \alpha$ y le agregamos la última relación $a_k < \alpha$, obteniendo X_k que resulta contráctil, y por lo tanto acíclico, por tener máximo. Usando este hecho, podemos calcular fácilmente la homología de X_{k-1} . Llamemos σ_i a la arista de X_i correspondiente a la relación $a_i < \alpha$, entonces tenemos

$$\tilde{H}_n(X_{k-1}) = \tilde{H}_{n-1}(\text{lk}(\sigma_k)) = \tilde{H}_{n-1}\left(\prod_{i=1}^r *\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ \mathbb{Z}^{r-1} & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Ahora podemos calcular la homología de X_{k-2} . Ya sabemos que, por tener dimensión 2, $\tilde{H}_n(X_{k-1}) = 0$ para $n > 2$. Por otro lado, mirando la última parte de la sucesión exacta, tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_2(X_{k-1}) & \longrightarrow & \tilde{H}_1(\dot{\sigma}_{k-1} \text{lk}(\sigma_{k-1})) & \longrightarrow & \tilde{H}_1(X_{k-2}) & \longrightarrow & \tilde{H}_1(X_{k-1}) \\ & & \longrightarrow & & \tilde{H}_0(X_{k-2}) & \longrightarrow & \tilde{H}_0(X_{k-1}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

que, reemplazando los datos ya conocidos, resulta ser

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{r-1} \longrightarrow \tilde{H}_1(X_{k-2}) \longrightarrow \mathbb{Z}^{r-1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{H}_0(X_{k-2}) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

y de esto se sigue que

$$\tilde{H}_n(X_{k-2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ \mathbb{Z}^{2(r-1)} & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Inductivamente, obtenemos

$$\tilde{H}_n(X_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ \mathbb{Z}^{(k-1)(r-1)} & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Y, por último, sabemos que $\tilde{H}_n(X_1) = \tilde{H}_n(X)$.

Este ejemplo es sólo a modo ilustrativo, ya que este mismo resultado se puede obtener en forma más directa usando la característica de Euler, o usando la fórmula de Künneth para la homología del join de dos espacios.

En este ejemplo lo que estuvimos usando es que, al ser X un join de espacios, con el de arriba discreto, los elementos maximales comparten el mismo abierto minimal, que es el espacio de abajo. Así, el agregar cada relación coincidió con agregar una arista al diagrama de Hasse.

Definición 3.1.6. Llamaremos *H-point* a un punto $x \in X$ tal que \hat{C}_x es acíclico, es decir que $\tilde{H}_*(\hat{C}_x) = 0$.

Teorema 3.1.7. La inclusión $X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ induce isomorfismos en \tilde{H}_* si y sólo si x es un *H-point*.

Demostración. Sabemos que $\mathcal{K}(Z) \simeq_{we} Z$ para todo espacio finito Z , de modo que, para todo n ,

$$\tilde{H}_n(X, X \setminus \{x\}) = \tilde{H}_n(\mathcal{K}(X), \mathcal{K}(X \setminus \{x\}))$$

además, la inclusión $|\mathcal{K}(X \setminus \{x\})| \hookrightarrow |\mathcal{K}(X)| \setminus \{x\}$ es un retracto por deformación fuerte. Por otro lado, como x es un vértice de $|\mathcal{K}(X)|$, se tiene que

$$\tilde{H}_n(|\mathcal{K}(X)|, |\mathcal{K}(X)| \setminus \{x\}) = \tilde{H}_n(\text{st } x, \text{lk } x)$$

Además, al ser $\text{st } x$ acíclico, y dada la sucesión exacta de homología relativa del teorema 1.3.11, resulta que

$$\tilde{H}_n(\text{st } x, \text{lk } x) = \tilde{H}_{n-1}(\text{lk } x)$$

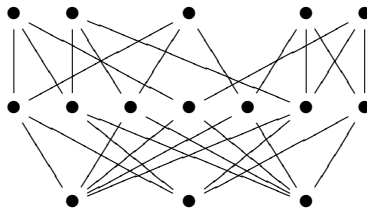
y, por supuesto, $\text{lk}(x, \mathcal{K}(X)) = \mathcal{K}(\hat{C}_x)$. Luego, vale que

$$\tilde{H}_n(X, X \setminus \{x\}) = \tilde{H}_n(\mathcal{K}(X), \mathcal{K}(X \setminus \{x\})) = \tilde{H}_{n-1}(\text{lk}(x, \mathcal{K}(X))) = \tilde{H}_{n-1}(\hat{C}_x)$$

□

Observación 3.1.8. Uno se podría preguntar, teniendo en cuenta la relación entre *beat points* y espacios contráctiles, si será cierto que para todo espacio finito acíclico se pueden quitar, uno a uno, *H-points* hasta llegar a un punto. Esto es claramente equivalente, por el resultado recién probado, a que todo espacio acíclico contenga un *H-point*.

La respuesta es lamentablemente negativa. Un contraejemplo es este espacio finito homotópicamente trivial, y por lo tanto acíclico, que se obtiene a partir de una estructura del Dunce Hat (ver [3]), pero que no tiene ningún *H-point*, como se puede verificar fácilmente.



Observación 3.1.9. Primero, observemos que, por la sucesión exacta que obtuvimos al comienzo de la sección, dado un espacio X acíclico al que se le quita una relación $a < b$, con $a \prec b$, se tienen isomorfismos $\tilde{H}_n(\dot{\sigma} \text{lk } \sigma) \rightarrow \tilde{H}_n(Y)$. De modo que la arista tiene un link acíclico en $\mathcal{K}(X)$ si y sólo si el espacio resultante Y es acíclico.

Siguiendo este razonamiento de la observación anterior, surge la duda sobre si habrá en todo espacio acíclico, un par de puntos $a \prec b$ tales que $\text{lk}(\{a, b\})$ es acíclico.

La respuesta es nuevamente negativa, y el mismo ejemplo sirve para verlo. En el modelo del Dunce Hat que dibujamos, el link de todo simplex $\sigma = \{a, b\}$ con $a \prec b$ es un conjunto discreto de más de un punto, así que no es acíclico.

3.2. Homotopía

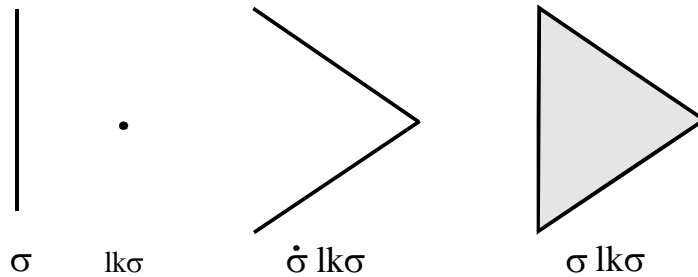
Nuevamente consideramos un espacio finito X conexo, y el espacio Y , que se obtiene al quitarle a X la relación $a < b$, con $a \prec b$ en X . En esta sección comparamos estos dos espacios en cuanto a sus propiedades homotópicas.

Proposición 3.2.1. *Sea X un espacio finito, y sean $a \prec b$ en X . Sea σ el 1-símplex $\{a, b\} \in \mathcal{K}(X)$. Si $\text{lk } \sigma$ es un punto, entonces $X \simeq_{he} Y$.*

Demostración. Recordemos que cuando $a \prec b$, se tiene que $\text{lk}\{a, b\} = \mathcal{K}(\widehat{F}_b \widehat{U}_a)$. Entonces, si $\#\text{lk } \sigma = 1$, algún extremo de la arista es un *beat point*. Supongamos por ejemplo que $\#\widehat{U}_a = 1, \widehat{F}_b = \emptyset$, es decir, que a es un *beat point*. Entonces $X \setminus \{a\} \hookrightarrow X$ es un retracto por deformación fuerte. Además, mirado en Y , a sigue siendo un *beat point*, así que $Y \setminus \{a\} \hookrightarrow Y$ también es un retracto por deformación fuerte. Por último, es claro que $X \setminus \{a\} = Y \setminus \{a\}$, y así $X \simeq_{he} X \setminus \{a\} = Y \setminus \{a\} \simeq_{he} Y$. El caso en que $\#\widehat{F}_b = 1, \widehat{U}_a = \emptyset$ es análogo. \square

Proposición 3.2.2. *Sea X un espacio finito, y sean $a \prec b$ en X . Sea σ la arista $\{a, b\} \in \mathcal{K}(X)$. Si $\text{lk } \sigma$ es un punto, entonces hay un colapso simplicial elemental de $\mathcal{K}(X)$ a $\mathcal{K}(Y)$.*

Demostración. Recordemos que $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(Y) \coprod_{\dot{\sigma} \text{lk } \sigma} \text{st } \sigma$. Como $\text{lk } \sigma$ es un punto, $\text{st } \sigma$ es un 2-símplex maximal en $\mathcal{K}(X)$, y $\dot{\sigma} \text{lk } \sigma$ son dos de sus aristas. La tercera, que es $\{a, b\}$, es una cara libre de este 2-símplex en el complejo $\mathcal{K}(X)$. \square



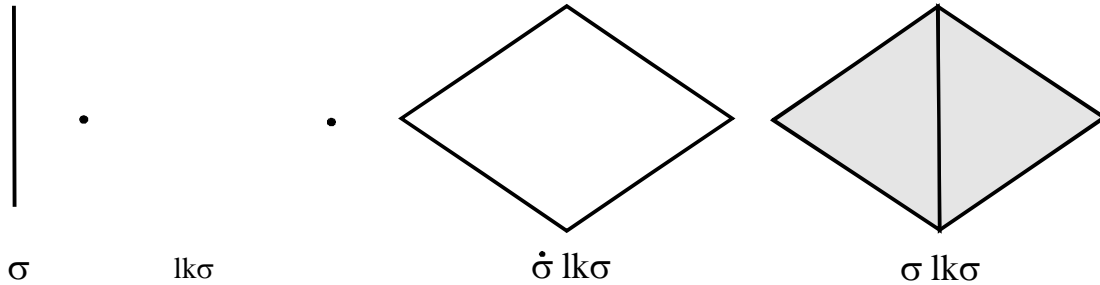
Estos últimos dos resultados implican que hay una equivalencia homotópica entre $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$. Sin embargo, son esencialmente distintos entre sí, y no hay uno más fuerte. El primero afirma una equivalencia homotópica a nivel de espacios finitos, más aún, que ambos espacios colapsan fuertemente a un espacio en común. El segundo, en cambio, afirma que los complejos simpliciales asociados a los dos espacios tienen el mismo tipo de homotopía simple, pero no es más débil que el primero, pues entre los complejos hay un solo movimiento elemental.

Proposición 3.2.3. *Sea X un espacio finito, y sean $a \prec b$ en X . Sea Y el espacio obtenido al quitar la arista $a-b$ del diagrama de X . Si $\widehat{F}_b \widehat{U}_a$ es contráctil, entonces $X \simeq_{we} Y$. En particular, $\mathcal{K}(X) \simeq_{he} \mathcal{K}(Y)$.*

Demostración. Recordemos que el join de dos espacios finitos es contráctil si y sólo si alguno de ellos lo es. Como $\widehat{F}_b \widehat{U}_a$ es contráctil, entonces alguno de los extremos de la arista es un *weak point*. Supongamos que b lo es, o sea que \widehat{F}_b es contráctil. En ese caso, b también resulta ser un *weak point* de Y . De modo que $X \simeq_{we} X \setminus \{b\} = Y \setminus \{b\} \simeq_{we} Y$. \square

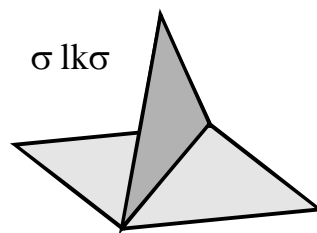
Proposición 3.2.4. *Si $\text{lk } \sigma$ es un conjunto discreto de dos puntos, $\pi_1(\mathcal{K}(X))$ es un cociente de $\pi_1(\mathcal{K}(Y))$.*

Demostración. En este caso, $\dot{\sigma} \text{lk } \sigma$ es un subcomplejo de $\mathcal{K}(Y)$ formado por cuatro aristas, que forman el perímetro de un cuadrado, y $\text{st } \sigma$ es ese cuadrado, pero lleno.

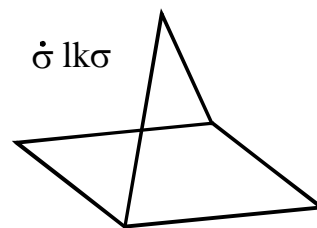


Así que para llegar de $\mathcal{K}(Y)$ a $\mathcal{K}(X)$ hay que adjuntar una 2-celda. Sabemos cómo cambia el π_1 en estos casos. Si llamamos α a la curva que parametriza el perímetro de este cuadrado, sabemos que $\pi_1(\mathcal{K}(X)) = \pi_1(\mathcal{K}(Y))/N[\alpha]$, donde $N[\alpha]$ es el subgrupo normal generado por el elemento $[\alpha]$. \square

Observación 3.2.5. Si, en cambio, $\text{lk } \sigma$ es un conjunto discreto de tres puntos $\{x, y, z\}$, entonces $\text{st } \sigma = \sigma \text{lk } \sigma$ tiene esta forma



y la intersección con $\mathcal{K}(Y)$ es $\dot{\sigma} \text{lk } \sigma$, que tiene esta forma



Esto es, adjuntamos al complejo $\mathcal{K}(Y)$ dos 2-celdas. Las funciones de adjunción son las que parametrizan cada pedazo de $\partial \text{lk } \sigma$, es decir, $\dot{\sigma}\{x, y\}$ y $\dot{\sigma}\{y, z\}$. En este caso también es cierto que $\pi_1(\mathcal{K}(X))$ es un cociente de $\pi_1(\mathcal{K}(Y))$, donde ahora el grupo por el que se divide es $N[\alpha, \beta]$, el normal generado por las funciones de adjunción.

Inductivamente se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.2.6. *Si $\text{lk } \sigma$ es un conjunto discreto, entonces $\pi_1(\mathcal{K}(X))$ es un cociente de $\pi_1(\mathcal{K}(Y))$, de modo que $\pi_1(X)$ es un cociente de $\pi_1(Y)$.*

Capítulo 4

Sacando una arista

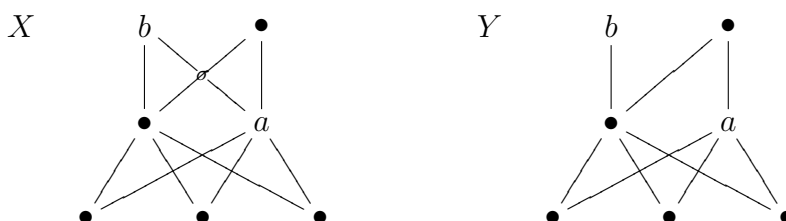
Sea X un espacio finito conexo, y sean $a, b \in X$ tales que $a \prec b$. Estudiaremos qué sucede con el espacio X si se quita de su diagrama de Hasse la arista $a-b$. Al hacer esto, es claro que el diagrama resultante representa a un nuevo espacio finito T_0 , al que llamaremos Y .

El espacio Y no es, en estos casos, un subespacio de X , pero $\mathcal{K}(Y)$ es un sub-complejo de $\mathcal{K}(X)$. Llamaremos σ a la arista $a-b$.

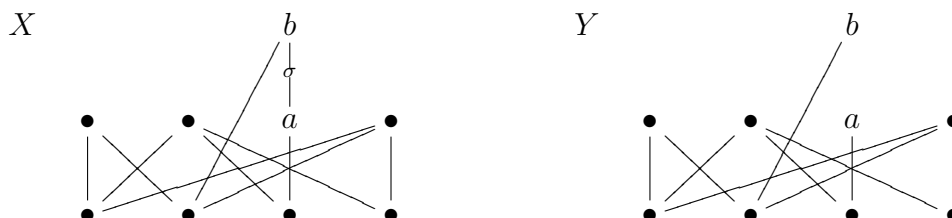
Los resultados de este capítulo son también originales.

Veamos algunos dibujos.

Aquí X e Y son de altura 2, y ambos son conexos.



En este otro ejemplo, X es de altura 2, pero Y es de altura 1.



Observemos que cuando X tiene altura 1, quitar la arista $a-b$ equivale a quitar la relación $a < b$, pero en dimensiones mayores se pueden perder algunas relaciones

más. Al igual que en la sección previa, en este caso también se puede verificar que $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(Y) \cup \text{st } \sigma$, pero ahora la intersección de estos dos subcomplejos no es tan fácil de describir. Analizaremos algunos casos.

4.1. Espacios de altura uno

Supongamos que el espacio X es conexo y tiene altura $h(X) = 1$, es decir que $\dim \mathcal{K}(X) = 1$. Entonces el tipo homotópico débil de X está determinado por su característica de Euler. Más específicamente, si $\chi(X) = n$, entonces $X \simeq_{we} \bigvee_{i=1}^{1-n} S^1$. Además, por tener X altura 1, es muy fácil calcular $\chi(X)$: las únicas cadenas de longitud 1 son las de pares de extremos de aristas de su diagrama. Así que $\chi(X) = \#(X) - \#\{\text{aristas de su diagrama}\}$. De modo que $\chi(Y) = \chi(X) + 1$.

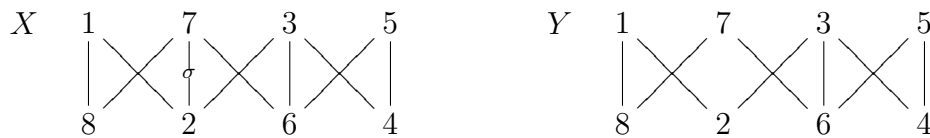
Si Y es también conexo, como $\chi(Y) = \chi(X) + 1$, entonces $Y \simeq_{we} \bigvee_{i=1}^{-n} S^1$, o sea, una circunferencia menos que X .

Veamos algunos ejemplos.

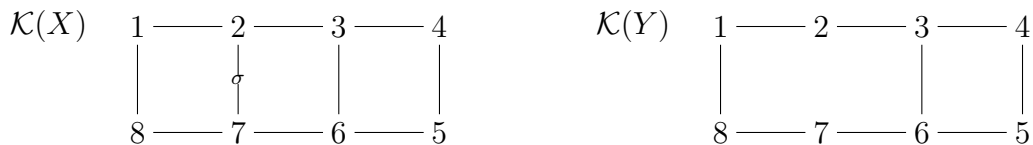
Ejemplo. Si X es el siguiente modelo de S^1 , es claro que Y resulta contráctil.



Ejemplo. Si X es el siguiente, $\chi(X) = -2$. Sacando la arista σ de extremos 2-7 obtenemos Y , con $\chi(Y) = -1$.



Por estar en dimensión 1, no es difícil dibujar los complejos $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$, y ver que $\mathcal{K}(X) \simeq_{he} \bigvee_{i=1}^3 S^1$, y $\mathcal{K}(Y) \simeq_{he} \bigvee_{i=1}^2 S^1$, es decir, una esfera menos.



Veamos qué puede pasar si Y no es conexo. Es claro que estará formado por dos componentes conexas $Y = Y_1 \amalg Y_2$, de altura menor o igual a 1. Se tiene, además, que $\chi(Y_1) + \chi(Y_2) = \chi(X) + 1$, y así $Y_1 \simeq_{we} \bigvee_{i=1}^k S^1$ e $Y_2 \simeq_{we} \bigvee_{i=1}^m S^1$, con $1 - k + 1 - m = n + 1$, es decir, $k + m = 1 - n$.

Proposición 4.1.1. *Sea X un espacio finito de altura 1. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones.*

- (i) X es contráctil.
- (ii) X es homotópicamente trivial.
- (iii) X es conexo y $\chi(X) = 1$.

Demostración. Las implicaciones $i \Rightarrow ii$ y $ii \Rightarrow iii$ son claras.

Veamos ahora que si $\chi(X) = 1$, entonces X debe tener un *beat point*. Si llamamos A al conjunto de aristas del diagrama de X , y A_x al de las que tienen a x en un extremo, entonces $A = \bigcup_{x \in X} A_x$, y $\#A = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} \#A_x$, porque estaríamos contando cada arista dos veces, una por cada extremo. Como $\chi(X) = 1$, entonces $\#A = \#X - 1 < \#X$. Entonces debe haber algún x tal que $\#A_x < 2$. Como X es conexo, hay un x con $\#A_x = 1$, es decir, un *beat point*.

Una vez probado esto, hagamos inducción en $\#X$. En el paso inductivo, sea X de cardinal n con $\chi(X) = 1$, entonces tiene un *beat point* x , así que es homotópicamente equivalente a $X \setminus \{x\}$. Pero $\chi(X \setminus \{x\}) = \chi(X) = 1$, pues del diagrama se quitaron un punto y una arista, y este espacio tiene cardinal $n - 1$, así que es contráctil. \square

4.2. Resultados en el caso general

Consideremos ahora espacios X conexos y de altura mayor que 1, y supongamos además que el espacio resultante Y es también conexo.

Proposición 4.2.1. *Sea X un espacio finito conexo, y sean $a, b \in X$ tales que $a \prec b$, b es maximal y a es minimal. Supongamos, además, que el espacio Y es conexo. Entonces $\mathcal{K}(X) \simeq_{he} \mathcal{K}(Y) \vee S^1$.*

Demostración. Como b es maximal y a es minimal, se tiene que $st \sigma = \sigma$ y $\mathcal{K}(Y) \cap st \sigma = \dot{\sigma} = \{\{a\}, \{b\}\}$. Esto significa que $\mathcal{K}(X)$ se obtiene de $\mathcal{K}(Y)$ adjuntando una 1-celda, con la función de adjunción $f : S^0 \rightarrow \mathcal{K}(Y)$, $f(-1) = a$, $f(1) = b$. Como Y es conexo, $\mathcal{K}(Y)$ es arcoconexo. Mediante el camino que va de a a b en $\mathcal{K}(Y)$, se obtiene una homotopía entre la función f y la constante a . Esto implica que el espacio obtenido es homotópicamente equivalente al que se obtiene de adjuntar la 1-celda mediante la constante, es decir que $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(Y) \cup_f st \sigma \simeq_{he} \mathcal{K}(Y) \cup_{\{a\}} I = \mathcal{K}(Y) \vee S^1$. \square

Proposición 4.2.2. *Sea X un espacio de altura 2, y sean $a \prec b$ con b maximal. Al sacar la arista $a-b$, la característica de Euler varía según la siguiente fórmula.*

$$\chi(Y) = \chi(X) - \#\widehat{U}_a + \#\left(U_a \setminus \bigcup_{\substack{c \prec b \\ c \neq a}} U_c\right)$$

Demostración. Si $\widehat{U}_a = \emptyset$, o sea que a es minimal, entonces la única cadena que se pierde es la cadena $\{a, b\}$, de longitud 1, de modo que $\chi(Y) = \chi(X) + 1$.

Si $\widehat{U}_a = \{x\}$, entonces se pierden las cadenas $\{a, b\}$, $\{x, b\}$ y $\{x, a, b\}$, así que $\chi(Y) = \chi(X) + 1$.

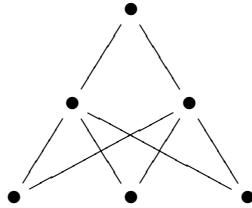
Supongamos que \widehat{U}_a es un conjunto con k puntos (que deben ser minimales). En este caso, las cadenas de longitud 1 de Y son las de X salvo las de la forma $\{x, b\}$, con x tal que no existe otra forma de conectarlo con b que no sea a través de a . Es decir que $x \leq a$ pero $x \not\leq c$ para ningún otro $c \prec b, c \neq a$, o sea, $x \in U_a \setminus \bigcup_{\substack{c \prec b \\ c \neq a}} U_c$. Las

cadenas de longitud 2 de Y son las de X , salvo las de la forma $\{x, a, b\}$, con $x < a$, o sea, $x \in \widehat{U}_a$. Sólo queda contar estos conjuntos. \square

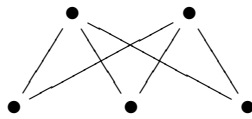
Observación 4.2.3. En particular, la característica de Y está acotada en el siguiente sentido: si $\#\widehat{U}_a = k$, entonces los posibles valores son

$$\chi(Y) = \chi(X) + i \quad 1 - k \leq i \leq 1$$

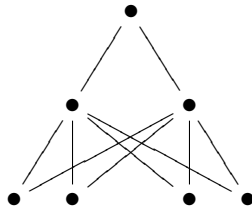
Ejemplo. Si X tiene el siguiente diagrama



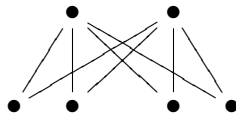
sabemos que $\chi(X) = 1$ porque X es contráctil. Si sacamos una de las aristas superiores, y quitando un *beat point*, obtenemos



cuya característica es fácil de calcular, y es -1. Análogamente, si X es

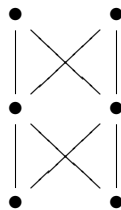


y quitamos una de las aristas superiores y el *beat point* resultante, obtenemos



cuya característica es -2 . En general, si X es un poset de este tipo, pero con k elementos minimales (es decir que $\#\widehat{U}_a = k$), entonces su característica es 1 y la de Y es $2 - k$, de modo que $\chi(Y) = \chi(X) + 1 - k$. O sea que todos estos son ejemplos en los que la cota inferior se alcanza.

Ejemplo. El otro extremo también se alcanza, incluso en posets homogéneos, es decir, cuyas cadenas maximales tienen todas la misma longitud. Si X es el siguiente modelo de S^2 , sabemos que $\chi(X) = 0$.



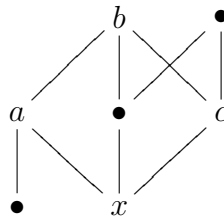
Si quitamos una de las aristas superiores, obtenemos un espacio contráctil, de modo que $\chi(Y) = 1 = \chi(X) + 1$, que es la cota superior que teníamos.

Con estos ejemplos vimos que las cotas obtenidas son óptimas.

Cuando sacamos una arista de extremos a y b del diagrama de Hasse de X , además de perderse la relación $a < b$, se pierden alguna de las relaciones $x < b$, con $x \in U_a$. Esto nos lleva a la siguiente definición.

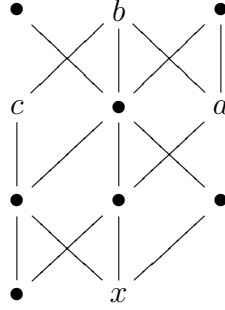
Definición 4.2.4. Dados $a < b$ en X , diremos que la arista $a-b$ está en un *rombo* del diagrama de X si existe un elemento $x \in U_a \cap \bigcup_{\substack{c < b \\ c \neq a}} U_c$.

Este nombre se debe a que el diagrama de Hasse de X contiene un subespacio similar a un rombo. Por ejemplo, en el siguiente poset, la arista a, b está en un rombo.



En dimensión 2, los rombos siempre se ven similares al del ejemplo previo, y por eso son fáciles de localizar. En dimensión 1 no hay rombos, claramente.

Y en dimensión mayor que 2, un rombo puede ser algo distinto, como por ejemplo el del siguiente diagrama.



Lema 4.2.5. *Sea X un espacio finito conexo y sean $a, b \in X$, con $a \prec b$ y b maximal. Si llamamos $\sigma = \{a, b\} \in \mathcal{K}(X)$ e Y es el espacio finito que se obtiene al quitarla del diagrama de X , entonces la intersección $\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$ es conexa si y sólo si la arista a - b está en un rombo.*

Demostración. Supongamos que existe un $x \in U_a \cap \bigcup_{\substack{c \prec b \\ c \neq a}} U_c$, y veamos que todo $y \in \mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$ se conecta con x a través de símlices de $\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$.

- Si $y = a$, entonces $\{x, y\} \in \mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$, pues $x < y$ en Y , y $\{x, y, a, b\} = \{x, a, b\}$ es una cadena en X .
- Si $y = b$, también se tiene $\{x, y\} \in \mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$, porque $b > x$ en Y por hipótesis, y $\{x, y, a, b\} = \{x, a, b\}$ es una cadena en X .
- Si $y \neq a, b$, entonces y debe ser menor que a , tanto en X como en Y . En este caso, afirmamos que $\{x, a\}, \{y, a\} \in \mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$. Por el primer caso, ya sabemos que $\{x, a\} \in \mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$. Por otro lado, $\{y, a\} \in \mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$ porque $y < a$ en Y , y el conjunto $\{y, a, b\}$ es una cadena en X .

Recíprocamente, si suponemos que $\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$ es conexo, en particular a y b conectan en este complejo. Esto significa que debe existir una sucesión $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ tal que para todo i vale $\{x_{i-1}, x_i\} \in \mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$. Además, si $x_i = x_{i+k}$, se puede cortar esta sucesión, omitiendo x_{i+1}, \dots, x_{i+k} , y por eso podemos suponer que los x_i son todos distintos. Tenemos entonces que para todo i , $\{x_{i-1}, x_i\} \in \text{st } \sigma$, es decir que $\{x_{i-1}, x_i, a, b\} \in \mathcal{K}(X)$, lo cual implica que, salvo los extremos, el resto de la sucesión está incluido en \widehat{U}_a , pues son elementos que se deben comparar en X con ambos a y b . Por lo tanto, el anteúltimo elemento, x_{n-1} , es comparable con ambos en Y , y así la arista está en un rombo.

□

Proposición 4.2.6. *Sea X un espacio finito conexo, y sean $a \prec b$ en X , con b maximal. Si la arista a - b está en un rombo, entonces se tiene un epimorfismo $\pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X)$.*

Demostración. Aplicamos el teorema de Van Kampen al complejo $\mathcal{K}(X)$ y a sus subcomplejos $\mathcal{K}(Y)$ y $\text{st}(\sigma)$. Cada uno es conexo, y el lema previo nos garantiza la conexión de la intersección. Al ser todos complejos simpliciales, esto equivale a que sean arcoconexos. Obtenemos entonces un epimorfismo $\pi_1(Y) * \pi_1(\text{st } \sigma) \longrightarrow \pi_1(X)$. Como además $\text{st } \sigma$ es contráctil, se tiene que $\pi_1(\text{st } \sigma)$ es trivial, y el resultado se sigue. \square

El siguiente corolario se deduce fácilmente de este resultado, pero podemos demostrarlo también usando Mayer-Vietoris.

Corolario 4.2.7. *Si la arista $a-b$ está en un rombo, entonces se tiene un epimorfismo $H_1(Y) \longrightarrow H_1(X)$.*

Demostración. Sabemos que $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(Y) \cup \text{st } \sigma$. Entonces podemos usar el teorema de Mayer-Vietoris para complejos simpliciales, y obtenemos

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_1(\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma) \longrightarrow \tilde{H}_1(Y) \oplus \tilde{H}_1(\text{st } \sigma) \longrightarrow \tilde{H}_1(X) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma) \longrightarrow \dots$$

Como $\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$ es arcoconexo, $\tilde{H}_0(\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma) = 0$ y como $\text{st } \sigma$ es contráctil, $H_1(\text{st } \sigma) = 0$, así que nos queda

$$\dots \longrightarrow H_1(Y) \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

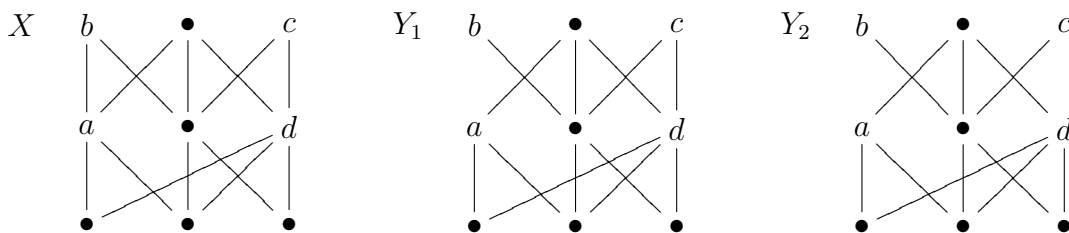
\square

Además, usando la proposición 4.2.6 o el corolario 4.2.7 inductivamente, se obtiene este resultado.

Corolario 4.2.8. *Sea X un poset conexo de altura 2 y supongamos que se quitan n aristas del diagrama de Hasse de X , de a una por vez, contenidas en cada paso en un rombo. Si el espacio Y_n resultante cumple que $\pi_1(Y_n) = 0$, entonces también se anula $\pi_1(X)$. Lo mismo vale si se reemplaza π_1 por H_1 .*

Demostración. Basta con observar que en cada paso se obtuvo un epimorfismo $\pi_1(Y_{j+1}) \rightarrow \pi_1(Y_j)$, o $H_1(Y_{j+1}) \rightarrow H_1(Y_j)$, y componerlos. \square

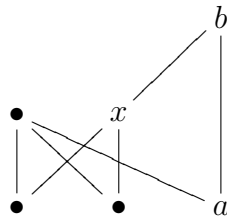
Ejemplo. Sea X el siguiente poset.



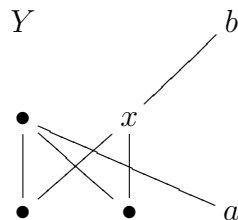
Al quitar la arista $a-b$, obtenemos Y_1 , al cual luego le quitamos la arista $c-d$ para llegar a Y_2 , que es contráctil, porque b y c son *beat points*, y al sacarlos, el espacio resultante tiene máximo. De esto se deduce, por el resultado anterior, que $\pi_1(X) = 0$.

Observación 4.2.9. En los resultados previos vimos que cuando la intersección $\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$ es conexa, se obtiene un epimorfismo en los grupos de homotopía y homología. Veamos con un ejemplo que si la intersección no fuera conexa, podría no existir tal epimorfismo.

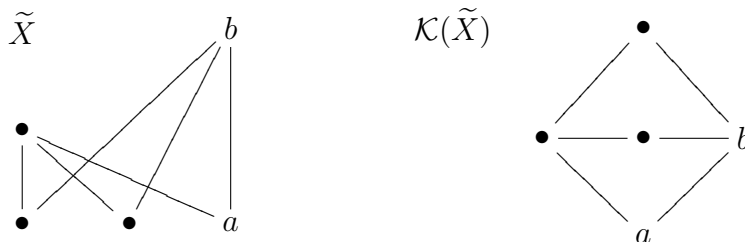
Ejemplo. Sea X el siguiente poset,



notemos que la arista $a-b$ no está en un rombo (de hecho, cuando a es minimal, la arista no puede estar en un rombo), y por lo tanto la intersección $\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$ no es conexa. Si quitamos la arista $a-b$, obtenemos el espacio Y , con el siguiente diagrama.



Veamos que en este caso no puede haber un epimorfismo $H_1(Y) \rightarrow H_1(X)$. Para eso, calculemos el tipo homotópico débil de cada espacio. Como x es un *beat point* de X , lo quitamos, y obtenemos un espacio homotópicamente equivalente, \tilde{X} , cuyo complejo simplicial asociado es homotópicamente equivalente a $S^1 \vee S^1$. Así, $X \simeq_{we} S^1 \vee S^1$.



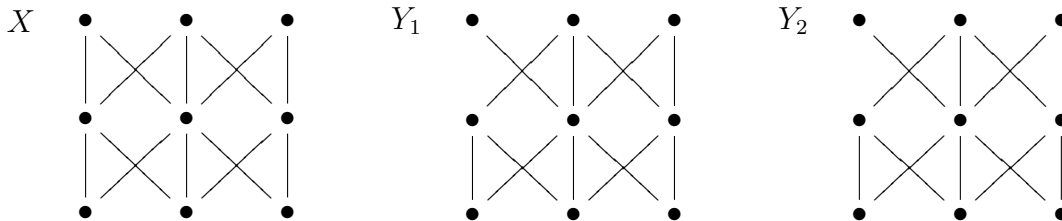
Por otro lado, es fácil ver que $Y \simeq_{we} S^1$. Así que es imposible que haya un epimorfismo $H_1(Y) \rightarrow H_1(X)$.

Ejemplo. También tenemos un ejemplo donde a no es minimal, la intersección no es conexa, y no hay tal epimorfismo.



Vemos que la arista $a-b$ no está en ningún rombo. Como a y c son *beat points* del espacio X , el mismo resulta débilmente equivalente a S^1 . Por otro lado, Y es claramente contráctil. De modo que no puede existir tal epimorfismo.

Ejemplo. Usando estos últimos resultados y la característica de Euler, se puede a veces calcular la homología de un espacio de altura 2. Por ejemplo, partiendo del siguiente espacio X , quitamos una arista y obtenemos Y_1 , repetimos y obtenemos Y_2 .

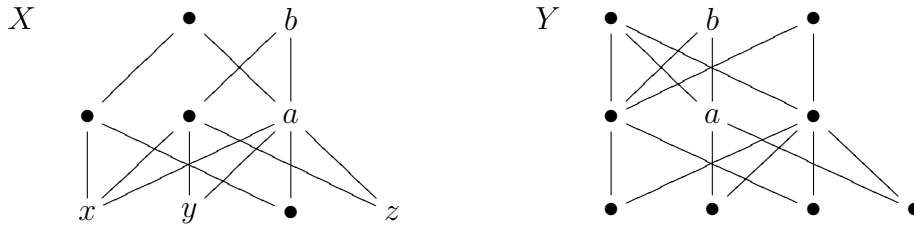


En cada paso, la arista que se quitó pertenecía a un rombo.

Como Y_2 es contráctil, sabemos que $H_1(Y_1) = 0$, y por lo tanto $H_1(X) = 0$ también. Además, sabemos que $\chi(Y_2) = \chi(Y_1) - \#(\widehat{U}_a) + \#(U_a \setminus U_c)$. Reemplazando los datos que ya conocemos, tenemos que $1 = \dim H_2(Y_1) - 0 + 1 - 2 + 1$, de modo que $\dim H_2(Y_1) = 1$. Y usando de nuevo la misma fórmula, tenemos que $2 = \dim H_2(X) - 0 + 1 - 2 + 1$, así que $\dim H_2(X) = 2$.

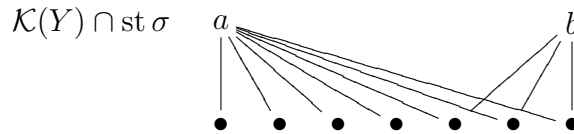
Definición 4.2.10. Sea X un poset de altura 2, y sean $a \prec b$ en X , con b maximal. Diremos que la arista $a-b$ está en k rombos si $\#(U_a \cap \bigcup_{\substack{c \prec b \\ c \neq a}} U_c) = k$.

Es decir, estamos contando cuántos $x < a$ siguen siendo menores que b en el espacio Y . Por ejemplo, en el siguiente poset X , $k = 3$, porque la arista $a-b$ forma rombos con x , con y , y con z . En cambio en Y , se tiene que $k = 0$, porque la arista no está en ningún rombo.



Proposición 4.2.11. *Sea X de altura 2 y conexo, y sean $a \prec b$ en X . Si la arista $a-b$, que llamamos σ , está en k rombos, con $k > 0$, entonces $\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$ es un complejo simplicial de dimensión 1 homotópicamente equivalente a $\bigvee_{i=1}^{k-1} S^1$.*

Demostración. Los vértices de este complejo son los comparables con a y con b en X , en el star de σ , o sea que son los elementos de $U_a \cup \{b\}$. Los símlices, por estar en $\mathcal{K}(Y)$, no pueden contener al conjunto $\{a, b\}$, y es por eso que el conjunto no tiene 2-símlices. Los 1-símlices son todos los de la forma $\{x, a\}$, con $x \in \widehat{U}_a$, y los de la forma $\{x, b\}$ con $x \in \widehat{U}_a$, y $x < b$ en Y . Es decir que el complejo, que se ve así,



es un grafo de $\#U_a + 1$ vértices, y $\#(\widehat{U}_a) + k$ aristas, de modo que su característica de Euler es $2 - k$. Así, debe ser homotópicamente equivalente a $\bigvee_{i=1}^{k-1} S^1$. \square

Sabiendo el tipo homotópico del complejo $\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$, conocemos su homología, la cual podemos reemplazar en la sucesión de Mayer-Vietoris, y así obtener información sobre las homologías de los espacios X e Y .

Corolario 4.2.12. *Sea X un poset conexo de altura 2, y sean $a \prec b$ en X , con b maximal, entonces hay un monomorfismo $H_2(Y) \rightarrow H_2(X)$.*

Demostración. Recordemos que, por Mayer-Vietoris, la siguiente es una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow \widetilde{H}_2(\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma) \rightarrow \widetilde{H}_2(Y) \rightarrow \widetilde{H}_2(X) \rightarrow \widetilde{H}_1(\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma) \rightarrow \dots$$

Sabemos que, si la arista está en 1 o más rombos, el complejo $\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$ es de dimensión 1. Si la arista no está en ningún rombo, el complejo puede tener dimensión 1 ó 0, según si a es minimal o no. En cualquier caso, se tiene que $\widetilde{H}_2(\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma) = 0$, y se sigue el resultado. \square

Corolario 4.2.13. *Con las mismas hipótesis del corolario anterior, si la arista $a-b$ está en exactamente un rombo, entonces $H_*(Y) = H_*(X)$.*

Demostración. Basta recordar que en este caso el complejo $\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$ es contráctil y por lo tanto acíclico, y nuevamente usar la sucesión de Mayer-Vietoris. \square

Corolario 4.2.14. *Si la arista $a-b$ no está en ningún rombo, entonces $H_1(X) \neq 0$.*

Demostración. Dado que la arista no está en ningún rombo, el complejo $\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma$ es disconexo, con dos componentes contráctiles, U_a y $\{b\}$, así que tiene homología reducida nula en grados positivos, y no nula en grado cero. Pero Y es conexo, así que $\tilde{H}_0(Y) = 0$, con lo cual, la exactitud de

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_1(Y) \longrightarrow \tilde{H}_1(X) \longrightarrow \tilde{H}_1(\mathcal{K}(Y) \cap \text{st } \sigma) \longrightarrow \tilde{H}_0(Y) \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow \cdots$$

implica que $H_1(X) \neq 0$. \square

Bibliografía

- [1] J. A. Barmak, *Espacios topológicos finitos*, Tesis de Licenciatura, UBA (2006).
- [2] J. A. Barmak, *Topología algebraica de espacios topológicos finitos y aplicaciones*, Tesis de Doctorado, UBA (2009).
- [3] J. A. Barmak, E. G. Minian, *One-point reductions of finite spaces, h-regular CW-complexes and collapsability*, Algebraic & Geometric Topology 8, pp. 1763-1780 (2008).
- [4] J. A. Barmak, E. G. Minian, *Simple homotopy types and finite spaces*, Advances in Mathematics 218, pp. 87-104 (2008).
- [5] R. Brown, *Topology and grupoids*, BookSurge LLC (2006).
- [6] N. Capitelli, E. G. Minian, *Notas de topología combinatoria*, Reunión Anual 2009 de la Unión Matemática Argentina.
- [7] L. C. Glaser, *Geometrical combinatorial topology I*, Van Nostrand Reinhold (1970).
- [8] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press (2002).
- [9] J. P. May, *A concise course in algebraic topology*, University of Chicago Press (1999).
- [10] J. P. May, *Finite spaces and simplicial complexes*, Notes for REU (2003). Disponible en <http://www.math.uchicago.edu/~may/MISCMaster.html>.
- [11] J. P. May, *Finite topological spaces*, Notes for REU (2003). Disponible en <http://www.math.uchicago.edu/~may/MISCMaster.html>.
- [12] M. C. McCord, *Homotopy type comparison of a space with complexes associated with its open covers*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 18, No. 4, pp. 705-708 (1967).
- [13] M. C. McCord, *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*, Duke Mathematical Journal, Vol. 33, No. 3, pp. 465-474 (1966).

- [14] J. Milnor, *Construction of universal bundles II*, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 63, No. 3, pp. 430-436 (1956).
- [15] J. R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley (1984).
- [16] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill (1966).
- [17] R. E. Stong, *Finite topological spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 123, No. 2, pp. 325-340 (1966).
- [18] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press (1994).