UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Álgebras (a, b)-Koszul y álgebras (a, b)-cuasi Koszul

Tesis presentada para optar al título de Doctora de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Andrea Alejandra Rey

Director de tesis: Dra. Andrea Leonor Solotar

Buenos Aires, 29 de junio de 2009

Álgebras (a, b)-Koszul y álgebras (a, b)-cuasi Koszul

Resumen

La definición de álgebra de Koszul fue dada por S. Priddy (ver [P]). Se trata de álgebras que poseen propiedades muy interesantes desde el punto de vista homológico.

En [B1], R. Berger introduce las álgebras de Koszul "generalizadas". Su interés por esta clase de álgebras está motivado por el hecho de que las álgebras Artin-Schelter regulares de dimensión global tres que están generadas en grado uno son precisamente de este tipo.

Las álgebras allí estudiadas por R. Berger son de la forma $A = T(V)/I$ donde V es un k-espacio vectorial, $T(V)$ su álgebra tensorial e I es un ideal bilátero generado por elementos homogéneos de grado s. Nuestro interés consiste en considerar el caso en que el ideal I está generado por elementos homogéneos de dos grados distintos a, b con $2 < a < b$.

En este trabajo se generalizan algunos resultados probados en [B1], se muestran ejemplos de álgebras (a, b)-Koszul y se da una resolución proyectiva minimal del álgebra A considerada como A-bimódulo que permite calcular en ciertos casos sus grupos de homología de Hochschild.

Por otro lado, se generalizan resultados de [GMMVZ], introduciendo las nociones de álgebra y de módulo (a, b)-cuasi Koszul. Finalmente, aplicando estos resultados, se puede caracterizar el álgebra de Yoneda para álgebras (a, b)-Koszul.

Palabras clave: Homología, Hochschild, Koszul, resoluciones.

(a, b)-Koszul algebras and (a, b)-quasi Koszul algebras

Abstract

The definition of Koszul algebras was given by S. Priddy (see [P]). These algebras have very interesting homological properties.

R. Berger defined "generalized" Koszul algebras in [B1]. His interest in this class of algebras comes from the fact that it includes Artin-Schelter regular algebras of global dimension three generated in degree one.

He considered algebras of type $A = T(V)/I$ where I is a two-sided ideal generated by homogeneous elements of degree s. We are interested in the case that the ideal I is generated by homogeneous elements of two different degrees, a, b both greater than 2.

In this thesis we generalize some results proven in [B1], exhibit examples of (a, b)-Koszul algebras and construct a projective minimal resolution of the algebra A considered as an A-bimodule, which allows us to compute in some cases its Hochschild homology groups.

We also generalise results obtained in [GMMVZ], introducing in this way the notions of (a, b)-quasi Koszul algebras and modules. Finally, using these results, we describe the Ext algebra of an (a, b)-Koszul algebra and its Yoneda product.

Key words: Homology, Hochschild, Koszul, resolutions.

Agradecimientos

Comienzo agradeciendo a mis padres quienes me dieron la oportunidad de poder acceder a una educación, sacrificando incluso muchos de sus deseos personales.

En cuanto a la formación académica, rescato en primer lugar a la Dra. Sonia Trepode que fue quien me orientó y me inició dentro del álgebra homólogica, siempre con esa generosidad que la caracteriza y preocupándose para que el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Mar del Plata crezca. En segundo lugar, fue muy importante la presencia de mi directora, la Dra. Andrea Solotar quien no sólo supo guiarme profesionalmente sino en más de una oportunidad, en lo personal. Agradezco también a la Dra. María Andrea Gatica, mi amiga, con quien publiqué mi primer trabajo y compartí muchos congresos y muchas experiencias. La persona con la cual empecé mi plan de Tesis, el Dr. Eduardo Marcos, fue muy importante en este camino porque me enseñó un montón de cosas y porque hizo de mi estadía en San Pablo una experiencia inolvidable. Al Dr. Gabriel Minian por su buena predisposición y por sus interesantes sugerencias y comentarios.

Continúo por mis compañeros de trabajo: Dr. Mariano Suárez-Álvarez y Dr. Marco Farinati, siempre ofreciendo su ayuda; Dr. Estanislao Herscovich, mi amigo querido que siempre estuvo a mi lado cuando lo necesitaba, Dra. Joana Terra y Dra. Ana Forte que en los últimos cuatrimestres fueron mis compañeras de cátedra y supieron escuchar mis angustias y ansiedades.

Reconozco el gran esfuerzo y dedicación de la Dra. Cristina Lopez con todos los doctorandos.

A mi suegra, Gladys, por ayudarme con la comida para que pudiera trabajar más tiempo y por el cariño que me brinda, así como las buenas palabras de Stephanie.

A todas esas personas que me estoy olvidando pero que pusieron su granito de arena en estos años y a aquellas que me hicieron mal y colocaron trabas en el camino, porque en definitiva de las cosas feas uno también aprende.

Finalmente, gracias a vos mi amor por estar conmigo, por tu paciencia, por tus cuidados, por tu compañía y por hacerme feliz. Te regalo el esfuerzo de la promesa que te hice.

Índice

Capítulo 1

Introducción

La noción de álgebra de Koszul y sus generalizaciones han tenido un importante desarrollo en los últimos años (ver por ejemplo [BGS2] y [F]) debido a sus numerosas aplicaciones en geometría algebraica, teoría de Lie, grupos cuánticos, topología algebraica y combinatoria (ver [HL]). Se trata, dicho sin entrar en detalles, de k-álgebras graduadas provistas de una resolución graduada libre minimal. Estas álgebras fueron originalmente definidas por Priddy en 1970 [P]. La estructura de las álgebras de Koszul está descripta de manera muy clara en [PP].

Existen numerosas definiciones equivalentes de álgebra de Koszul. Las más utilizadas son las siguientes.

Sean k un cuerpo y A una k-álgebra graduada conexa, finitamente generada en grado 1. Sea $E(A) = \bigoplus_{m,\,n} E^{n,m}(A) = \bigoplus_{m,\,n} Ext_A^{n,m}(k, k)$ el álgebra bigraduada de Yoneda asociada (donde n es el grado cohomológico y $-m$ es el grado interno heredado de la graduación de A). Sea $E^n(A) = \bigoplus_m E^{n,m}(A)$. Entonces A se dice de Koszul si satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

(i) $E^{n,m}(A) = 0$ si $n \neq m$.

(ii) $E(A)$ está generada como álgebra por $E^{1,1}(A)$.

Recientemente, R. Berger definió la noción de álgebra N-Koszul [B1]. Si $N = 2$, se obtiene la noción clásica de álgebra de Koszul. La definición de Berger es la siguiente:

Una k-álgebra A es N-Koszul si $E^{n,m}(A) = 0$ para $m \neq \delta(n)$, donde $\delta(n) = \frac{(n-1)}{2}N + 1$ si n es impar y $\delta(n) = \frac{n}{2}N$ si n es par. En particular, un álgebra N-Koszul debe tener todas las relaciones que la definen en grado N y cada $E^n(A)$ es *puro*, en el sentido que en la descomposición $E^n(A) = \bigoplus_{m,\,n} E^{n,m}(A)$ hay un único sumando directo no nulo: $E^{n,\delta(n)}(A)$.

Esta definición fue utilizada entre otros en [BG] y [GMMVZ].

En diversos trabajos los autores demuestran similaridades entre las nociones de álgebra de Koszul y N-Koszul (ver [B1], [GMMVZ], [BG], [FV]). Sin embargo, la restricción impuesta por la N-homogeneidad de las relaciones es artifical y causa problemas variados. En particular, la clase de álgebras N-Koszul, para $N > 2$, no es cerrada con respecto a extensiones de Öre graduadas, extensiones regulares normales, o productos tensoriales.

Por otra parte, sería deseable calcular una resolución proyectiva minimal de un álgebra de caminos truncada cuyas relaciones estuvieran generadas por elementos homogéneos de grados distintos, por ejemplo, el álgebra conmutativa $A = \frac{k\langle x,y\rangle}{\langle xy-yx, J^N\rangle}$, donde J^N es el conjunto de caminos de longitud N en $k\langle x, y\rangle$ a partir de la información que se obtiene de las álgebras $B = k[x, y]$ y $C = \frac{k\langle x,y\rangle}{\langle J^N\rangle}$, las cuales son de Koszul y N-Koszul respectivamente. La propiedad de ser N-Koszul está descripta también en [GMMVZ], donde los autores estudian álgebras de la forma $A = T_{A_0}(A_1)/I$, con $A_0 = k\times\cdots\times k$, A_1 un A_0-bimódulo e I un ideal bilátero generado por elementos homogéneos de grado N de $T_{A_0}(A_1)$. Naturalmente, nace la idea de generalizar la definición de álgebra N-Koszul a álgebras de este tipo, es decir cocientes de álgebras tensoriales sobre un espacio vectorial de dimensión finita divididas por un ideal generado por elementos homogéneos de dos grados distintos. Cuando uno de esos grados es 2 se requiere de otras técnicas para su estudio; no trataremos ese caso. En el momento de terminar esta tesis, E. Green y E. Marcos publicaron el preprint [GM], que trata precisamente esa situación. En el presente trabajo consideraremos ideales I generados por elementos homogéneos de grados a y b tales que $2 < a < b$, motivados por ejemplos citados más adelante.

Por otra parte R. Berger probó en [B1] los siguientes resultados (*Theorem* 2.11 y *Proposition* 2.12 de [B1] respectivamente), respecto de los cuales no entraremos en detalles en la Introducción.

Teorema 1.1. *Sea $A = T(V)/I$ un álgebra s-homogénea sobre V, con R como espacio de relaciones (lo cual significa que R es un conjunto minimal de generadores de I). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A es de Koszul.

(ii) No hay obstrucción al construir (en la categoría de A-módulos a izquierda $\mathbb{Z}$-graduados y acotados inferiormente) una resolución proyectiva pura

$$\cdots \longrightarrow K_i \xrightarrow{\delta_i} K_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_1 \xrightarrow{\delta_1} K_0 \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0$$

de k siguiendo el proceso descripto en [B1].

(iii) Se satisface la condición (ec) (introducida en [B1]), y para cualquier $j \geq 1$, se tiene la distributividad de las ternas (E, F, G) para $n \geq (j + 1)s$ y la distributividad de las ternas (E', F', G') para $n \geq (j + 1)s + 1$, donde

$$\begin{aligned}
E &= V^{(n-js)} \otimes J_{js}\\
F &= I_{n-js} \otimes V^{(js)}\\
G &= V^{(n-(j+1)s+1)} \otimes I_{2s-2} \otimes V^{((j-1)s+1)}\\
E' &= V^{(n-js-1)} \otimes J_{js+1}\\
F' &= I_{n-js-1} \otimes V^{(js+1)}\\
G' &= V^{(n-(j+1)s)} \otimes R \otimes V^{(js)}.
\end{aligned}$$

Proposición 1.2. *Para que un álgebra s-homogénea A sea de Koszul, es necesario y suficiente que su complejo de Koszul a izquierda (o a derecha) sea exacto en grados positivos.*

Lógicamente, la generalización de la definición de álgebras N-Koszul a álgebras que son cocientes de álgebras tensoriales sobre un espacio vectorial de dimensión finita por un ideal generado por elementos homogéneos de grados a y b ($2 < a < b$) obtenida, debería ser compatible con la definición dada por R. Berger (ver *Definition* 2.10 de [B1]).

Sin embargo, si se generaliza naturalmente la noción de álgebra N-Koszul a un álgebra tensorial dividida por un ideal generado por elementos homogéneos de grados a y b siguiendo el trabajo

[B1], observamos que las álgebras de la forma $A = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x^a, y^b\rangle}$ no satisfacen esta nueva definición. Como uno está interesado en estudiar estas álgebras es que se obtiene una generalización diferente siguiendo el trabajo [GMMVZ] que incluye estrictamente al anterior. En otras palabras, esta observación nos condujo a definir las nociones de álgebra (a,b)-Koszul y de álgebra (a,b)-cuasi Koszul respectivamente. La familia de álgebras (a,b)-cuasi Koszul contiene estrictamente a la familia de álgebras (a,b)-Koszul.

A continuación daremos algunas definiciones que utilizaremos en el resto de la tesis.

En adelante A será siempre una k-álgebra graduada, $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$.

Definición 1.3. *Sean $s \in \mathbb{N}$, A una k-álgebra y M un A-módulo $\mathbb{Z}$-graduado. Diremos que M es **s-concentrado** (respectivamente **s-puro**) en grados $l_1, \cdots, l_s$ si existen enteros no negativos $l_1 < \cdots < l_s$ tales que $M = M_{l_1} \oplus \cdots \oplus M_{l_s}$ (respectivamente $M = AM_{l_1} + \cdots + AM_{l_s}$).*

Dado $i \in \mathbb{N}_0$, sea $n_s(i) \in \mathbb{N}$ definido por:

$$n_s(i) = \begin{cases} js & \text{si } \ i = 2j \\ js + 1 & \text{si } \ i = 2j+1. \end{cases}$$

Definición 1.4. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, V un k-espacio vectorial de dimensión finita e I un ideal bilátero de $T(V)$, el álgebra $A = T(V)/I$ se dice (a,b)**-homogénea** si I tiene un conjunto de generadores formado por elementos homogéneos de grados a o b.*

Definición 1.5. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $2 < a < b$ y un espacio de relaciones para el ideal bilátero I tal que $R = R_a \oplus R_b$ con R_a y R_b excluyentes, diremos que un álgebra (a,b)-homogénea A, es (a,b)**-Koszul** (generalizada) si el espacio vectorial graduado $\mathrm{Tor}_i^A(k,k)$ es 2-puro en grados $n_a(i)$ y $n_b(i)$ para todo $i \geq 2$.*

Definición 1.6. *Sean A_0 un k-espacio vectorial de dimensión finita, A_1 un A_0-bimódulo e I un ideal bilátero de $T_{A_0}(A_1)$ tales que $2 < a < b$ y $A = T_{A_0}(A_1)/I$. Se dice que A es un álgebra (a,b)**-cuasi Koszul** si A_0 admite una resolución proyectiva minimal graduada*

$$\cdots \longrightarrow P_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0$$

donde P_i está generado en grados

$$\begin{cases} \sigma_j(i) = ja + (\frac{i}{2} - j)b & 0 \leq j \leq \frac{i}{2} \quad \text{si } \ i \ \text{ es par}, \\ \sigma_j(i) = ja + (\frac{i-1}{2} - j)b + 1 & 0 \leq j \leq \frac{i-1}{2} \quad \text{si } \ i \ \text{ es impar}. \end{cases}$$

La primera parte del trabajo consiste en recopilar información ya existente sobre el tema y que será de utilidad para el desarrollo del mismo. Recordaremos entonces definiciones y resultados referentes a módulos graduados, propiedades específicas sobre espacios vectoriales, propiedades homológicas, álgebra de Yoneda. Las referencias para esta parte son: [A2], [B2], [C], [W] y [Z]. Asímismo, dedicaremos un capítulo a recordar resultados sobre las álgebras de Koszul clásicas.

Luego de dar la definición de álgebras (a,b)-Koszul, encontraremos condiciones equivalentes a la misma. Algunas de estas condiciones se vinculan con la propiedad de que cierto reticulado sea distributivo. Las referencias que hemos utilizado para reticulados distributivos son: [BMu], [J] y [O]. Generalizamos la noción de que una terna sea distributiva a que sea multidistributiva, ya que las ternas multidistributivas juegan un rol fundamental para obtener condiciones equivalentes a la definición de que un álgebra sea (a,b)-Koszul.

Damos a continuación ejemplos de álgebras (a,b)-Koszul.

Luego definimos el álgebra opuesta A° y el álgebra dual $A^!$ de un álgebra (a,b)-homogénea A y probamos que A° es (a,b)-Koszul si y sólo si A lo es. Sin embargo, vemos que esto no es válido para $A^!$. También construimos una resolución por A-bimódulos de un álgebra (a,b)-Koszul. Esta construcción es útil para calcular la homología de Hochschild del álgebra. Para completar este capítulo, calculamos explícitamente las dimensiones de los k-espacios vectoriales $\mathrm{HH}_i(A)$ de acuerdo a la graduación heredada del álgebra A.

El trabajo [CS] presenta la noción de que un álgebra sea $\mathcal{K}_2$ como una posible generalización de la noción de álgebra N-Koszul. Probamos que un álgebra (a,b)-homogénea con $2 < a < b$ es (a,b)-cuasi Koszul si y sólo si es $\overline{\mathcal{K}}_2$. En este mismo trabajo se prueba un resultado que permite determinar fácilmente cuándo un álgebra monomial es $\mathcal{K}_2$, el cual nos permite mostrar que las álgebras $A = \frac{k\langle x,y\rangle}{\langle x^a, y^b\rangle}$ y mas generalmente $A = \frac{k\langle x_1,\cdots,x_t\rangle}{I}$ con $I = \langle x_i^{\alpha_i} \;\;/\;\; 1 \leq i \leq t\rangle$ donde $t \geq 2$ y $(\alpha_1,\cdots,\alpha_t) \in \{0,a,b\}^t$ bajo ciertas condiciones sobre los α_i son $\overline{\mathcal{K}}_2$, y por lo tanto (a,b)-cuasi Koszul.

Introducimos la definición de A-módulos (a,b)-cuasi Koszul y estudiamos mediante ello el comportamiento del producto de los módulos de extensión. Finalmente, damos una descripción explícita del álgebra de Yoneda de un álgebra (a,b)-Koszul y mostramos un ejemplo de álgebra (a,b)-cuasi Koszul cuya álgebra de Yoneda no es $\overline{\mathcal{K}}_2$.

Capítulo 2

Conceptos generales

En este capítulo introduciremos notación, daremos algunos resultados homológicos básicos sobre álgebras y módulos graduados así como también ciertos resultados sobre espacios vectoriales que serán luego utilizados a lo largo del trabajo.

Al término de este capítulo, definiremos el álgebra de Yoneda y mostraremos algunos ejemplos.

Recalcamos que todos los módulos que aparecen son A-módulos $\mathbb{Z}$-graduados.

2.1 Álgebras graduadas

Sea k un cuerpo. Una **k-álgebra graduada** A es una familia $\{A_n\}_{n\geq 0}$ de k-módulos con un producto bilineal $A_n \otimes_k A_m \to A_{n+m}$ y un elemento unidad $1 \in A_0$, esto implica que A_0 y $\bigoplus_{n\geq 0} A_n$ son k-álgebras asociativas con unidad. A se dice **graduada conmutativa** si para cada $\alpha \in A_n$ y $\beta \in A_m$, se tiene que $\alpha\beta = (-1)^{nm}\beta\alpha$. Una **$k$-álgebra diferencial graduada** es una k-álgebra graduada A provista de un morfismo $d : A_n \to A_{n-1}$ tal que $d^2 = 0$ y que satisface la regla de Leibnitz:

$$d(\alpha\beta) = d(\alpha)\beta + (-1)^n \alpha d(\beta)$$

para $\alpha \in A_n$, $\beta \in A$.

Ejemplo. Sea V un k-espacio vectorial graduado tal que $V = V_1$; es decir, V está concentrado en grado 1. Si consideramos el álgebra tensorial de V sobre k, $T = T(V) = \bigoplus_{n\geq 0} T_n$, donde $T_n = V^{\otimes n}$ y T resulta una k-álgebra graduada generada en grado uno. Sea I un ideal bilátero graduado propio de A, el álgebra cociente $A = T(V)/I$ es un álgebra graduada con la graduación $A_n = \frac{V^{\otimes n}}{I_n}$. Recíprocamente, toda álgebra graduada generada en grado uno y **conexa** (es decir, $A_0 = k$) puede identificarse vía un isomorfismo de álgebras con un álgebra de este tipo. En la geometría algebraica (ver [E]) y en los grupos cuánticos (ver [M1]) nos encontramos con varios ejemplos de álgebras **cuadráticas**; es decir, álgebras de la forma $A = T(V)/I$ tales que I está generado por elementos de grado dos ($I = \langle R\rangle$, con $R \subseteq V^{\otimes 2}$). Este concepto se ha extendido al caso en que I está generado por un espacio vectorial contenido en $V^{\otimes s}$, y en este caso A se dice **s-homogénea**. Las álgebras simétrica y exterior también son ejemplos de álgebras cuadráticas. En [B1], el autor está interesado en estudiar propiedades de las álgebras regulares de Artin-Schelter, que resultan análogas a álgebras de polinomios no conmutativas. Dentro de esta familia de álgebras también encontramos ejemplos de álgebras cuadráticas y cúbicas (ver [AS], [ATV]).

2.2 Módulos graduados

Durante esta sección A denotará un álgebra $\mathbb{N}_0$-graduada. Suponemos que $A_0 = k$, es decir que A es **conexa**. Un A-módulo a izquierda M se dice **$\mathbb{Z}$-graduado** si $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ y $A_m M_n \subseteq M_{n+m}$. Notaremos por A-grMod la categoría abeliana de A-módulos a izquierda M que son $\mathbb{Z}$-graduados. Los morfismos en esta categoría son las aplicaciones A-lineales que conservan el grado; es decir, aplicaciones homogéneas de grado cero $f : M \to N$ tales que $f(M_n) \subseteq N_m$. Un A-módulo a izquierda graduado M se dice **acotado inferiormente** si existe un número entero m tal que $M_n = 0$ para todo $n < m$. Los A-módulos a izquierda graduados y acotados inferiormente forman una categoría abeliana llamada la categoría graduada acotada inferiormente de A, que es una subcategoría plena de A-grMod; es decir, los morfismos de esta categoría son los homomorfismos de módulos que preservan la graduación.

El morfismo k-lineal $\varepsilon : A \to k$ dado por $\varepsilon|_{A_0} = 1_{A_0}$ y $\varepsilon(A_i) = 0$ para todo $i \geq 1$, da a k una estructura de A-módulo a izquierda, $a\lambda := \varepsilon(a)\lambda$ para $a \in A$ y $\lambda \in k$.

Dado $l \in \mathbb{Z}$ y un A-módulo graduado M, se define el módulo graduado $M[l]$ cuyo grupo abeliano subyacente es M y la acción de A está dada como antes, graduado por $(M[l])_n = M_{n+l}$. Un módulo M se dice **libre-graduado** si tiene una base formada por elementos homogéneos. Si M es acotado inferiormente, entonces M es libre-graduado si y sólo si es isomorfo a una suma directa de A-módulos de la forma $A[-l_i]$, donde los grados l_i (con posibles repeticiones) forman un conjunto que está acotado inferiormente, pues M está acotado inferiormente.

Recordemos un resultado general del producto tensorial:

Sean R un anillo, M un R-módulo a izquierda libre con base $(e_i)_{i\in\mathcal{I}}$ y N un R-módulo a derecha. Entonces todo elemento de $N \otimes_R M$ se escribe de manera única como $\sum_i n_i \otimes_R e_i$ donde la familia (n_i) está finitamente soportada.

Sea V un k-espacio vectorial graduado y consideremos el A-módulo a izquierda graduado $M = A \otimes_k V$. Podemos tomar una base homogénea $(v_i)_{i\in\mathcal{I}}$ del espacio V. Por el resultado que enunciamos anteriormente, $(1 \otimes_k v_i)_{i\in\mathcal{I}}$ forma una base homogénea del A-módulo M. Luego, M es libre-graduado y de esta manera obtenemos ejemplos de módulos libre-graduados. Más aún, todo A-módulo a izquierda libre-graduado M resulta isomorfo como módulo a $A \otimes_k V$, pues si $(m_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es una base homogénea de M, entonces $(1 \otimes_A m_i)_{i\in\mathcal{I}}$ forma una base homogénea del k-espacio vectorial graduado $k \otimes_A M$. La afirmación se sigue del isomorfismo de A-módulos $\varphi : A \otimes_k (k \otimes_A M) \to M$ dado por $\varphi(1 \otimes_k (1 \otimes_A m_i) = m_i$.

Definición 2.1 ([B2], [C]). *Un epimorfismo $f : M \to M'$ en A-grMod se dice **esencial** si para todo morfismo $g : N \to M$ tal que $f \circ g$ es suryectivo, entonces g es suryectivo.*

Enunciaremos y probaremos a continuación algunos resultados que involucran la noción de epimorfismo esencial y que serán aplicados en otras secciones de este trabajo.

Proposición 2.2 ([B2]). ***(Lema de Nakayama versión graduada)*** *Sea M un A-módulo a izquierda graduado sobre los enteros no negativos. Si $k \otimes_A M = 0$ entonces M es el módulo nulo.*

Demostración. Denotemos $I(A) = \sum_{n \geq 1} A_n$. Es un resultado conocido que el morfismo $\varphi : M \to k \otimes_A M$ definido para $m \in M$ como $\varphi(m) = 1 \otimes m$, induce un isomorfismo entre los A-módulos $\frac{M}{I(A)\cdot M}$ y $k \otimes_A M$. Luego, por hipótesis, $M = I(A) \cdot M$. Supongamos que M es no nulo y consideremos el menor entero l tal que $M_l \neq 0$. La inclusión $M_l \subseteq I(A) \cdot M$ implica una contradicción ya que todos los elementos de $I(A)$ son de grado positivo. Más precisamente, si $m \in M_l$ no es nulo entonces existen elementos no nulos $a_i \in I(A)$ y $m'_i \in M$ tales que $m = \sum_i a_i m'_i$ y $\mathrm{gr}(m'_i) < l$, y por lo tanto $M_{\mathrm{gr}(m'_i)} \neq 0$. $\square$

Corolario 2.3 ([B2], [C]). *Si $f : M \to M'$ es un morfismo en la categoría de A-módulos graduados por los enteros no negativos, la aplicación asociada $k \otimes_A M \to k \otimes_A M'$ es suryectiva si y sólo si f es suryectivo.*

Demostración. Es claro que la suryectividad de la aplicación f implica la de $1 \otimes_A f$. Recíprocamente, tenemos que la sucesión

$$M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f \longrightarrow 0$$

es exacta. Si aplicamos el funtor exacto a derecha $k \otimes_A -$ obtenemos la exactitud de

$$k \otimes_A M \longrightarrow k \otimes_A M' \longrightarrow k \otimes_A \mathrm{Coker}\, f \longrightarrow 0.$$

Como la primera aplicación es un epimorfismo, por la Proposición 2.2, $\mathrm{Coker}\, f = 0$ siendo así f un epimorfismo. $\square$

Proposición 2.4 ([C]). *Sea $f : M \to M'$ un morfismo. La aplicación $\overline{f} = 1_k \otimes_A f : k \otimes_A M \to k \otimes_A M'$ es un isomorfismo si y sólo si f es un epimorfismo esencial.*

Demostración. Supongamos que $\overline{f}$ es un isomorfismo, entonces es biyectivo, en particular, es suryectivo y por el Corolario 2.3 tenemos que f es un epimorfismo.

Veamos ahora que f es esencial; para ello sea $g : N \to M$ un morfismo tal que $f \circ g$ es suryectivo, entonces el morfismo composición

$$k \otimes_A N \xrightarrow{1 \otimes g} k \otimes_A M \xrightarrow{1 \otimes f} k \otimes_A M'$$

es suryectivo debido a que el funtor $k \otimes_A -$ es exacto a derecha. Por otro lado, como $\overline{f}$ es biyectivo, $1 \otimes g$ también es suryectivo y si seguimos el mismo razonamiento hecho anteriormente para f, deducimos que g es suryectivo y así, f es esencial.

Recíprocamente, si $f : M \to M'$ es un epimorfismo esencial, sabemos que el morfismo $\overline{f}$ es suryectivo, mostremos entonces que su núcleo se anula. Sea N su núcleo, el cual es un subespacio vectorial graduado del espacio vectorial graduado $k \otimes_A M$, luego existe un subespacio suplementario $T \subseteq k \otimes_A M$ tal que $N \oplus T = k \otimes_A M$. Tomemos una base homogénea de T de la forma $\mathcal{B} = \{t_i\}$ donde $t_i = \sum_j \mu^i_j \otimes m^i_j$ con $\mu^i_j \in k$ y $m^i_j \in M$. Esta base puede levantarse a M considerando el levantado de cada t_i como el elemento $\sum_j \mu^i_j m^i_j \in M$ donde $\mu^i_j m^i_j := \mu^i_j 1 \cdot m^i_j$, $(1 \in A)$. Notemos X al A-submódulo graduado de M generado por $\{\sum_j \mu^i_j m^i_j\}$. Sea g la inclusión $X \hookrightarrow M$. Sea $\sum_h \lambda_h \otimes m'_h \in k \otimes_A M'$, como $\overline{f}$ es suryectivo y $k \otimes_A M = N \oplus T$, existen $n \in N$ y $\eta_i \in k$ tales que $\sum_h \lambda_h \otimes m'_h = \overline{f}(n + \sum_i \eta_i \otimes t_i) = \overline{f}(n) + \overline{f}(\sum_i \eta_i \otimes t_i) = \overline{f}(\sum_i \eta_i \otimes t_i) = \overline{f}(\sum_i \eta_i (\sum_j \mu^i_j \otimes m^i_j)) = \sum_{i,\,j} \eta_i \mu^i_j \otimes f(m^i_j) = \sum_{i,\,j} \eta_i \otimes f(\mu^i_j m^i_j) = [1_k \otimes (f \circ g)](\sum_i \eta_i \otimes (\sum_j \mu^i_j m^i_j)$. Luego, la aplicación $f \circ g$ induce el morfismo suryectivo $1_k \otimes (f \circ g) : k \otimes_A X \to k \otimes_A M'$; entonces, por el Corolario 2.3, $f \circ g$ es suryectivo y debido a que f es esencial, concluimos que g es suryectivo, por lo tanto es biyectivo. Luego, g induce una biyección $k \otimes_A X \to k \otimes_A M$, lo que prueba que $N = 0$ pues g es la inclusión. $\square$

Lema 2.5 ([C]). *Sea $f : M \to M'$ un epimorfismo esencial. Si M' es un módulo proyectivo en la categoría graduada entonces f es un isomorfismo.*

Demostración. Si M' es proyectivo en la categoría graduada, existe un A-submódulo N de M tal que $M = \operatorname{Ker} f \oplus N$. La composición $N \overset{inc}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{f} M'$ es un epimorfismo. Como f es un epimorfismo esencial, la inclusión $N \hookrightarrow M$ es un epimorfismo, con lo cual es un isomorfismo y así, $\operatorname{Ker} f = 0$. □

Proposición 2.6 ([B1], [C]). *Un módulo M es proyectivo en la categoría graduada si y sólo si M es libre-graduado.*

Demostración. Si M es libre-graduado entonces $M \simeq \bigoplus_{l_i} A[-l_i]$. Luego, M es A-proyectivo como módulo graduado.

Recíprocamente, consideremos una k-base homogénea de $k \otimes_A M$ y a partir de ella deduzcamos una base de M como A-módulo graduado. Los elementos de esta base inducida originan un sistema de elementos de M que definen un morfismo $f : F \to M$ (donde F es libre-graduado con base dada por este sistema de elementos) tal que la aplicación asociada $\overline{f} : k \otimes_A F \to k \otimes_A M$ es biyectiva. Por la Proposición 2.4, tenemos que f es un epimorfismo esencial.

Ahora, como M es proyectivo en la categoría graduada, por el Lema 2.5 f es un isomorfismo. Luego, como F es libre-graduado e isomorfo a M, M también es libre-graduado. □

Definición 2.7 ([B2]). *Sea M un objeto en A-grMod. Una cápsula proyectiva de M es un par (P, f) tal que $P \in A$-grMod es proyectivo como A-módulo graduado, y $f : P \to M$ es un morfismo suryectivo esencial.*

Observación 2.8. *En la categoría de A-módulos a izquierda se define análogamente la cápsula proyectiva de un módulo en esa categoría.*

Observar que si M es un A-módulo proyectivo graduado, $(M, 1_M)$ es una cápsula proyectiva de M.

Ejemplo. ([B2])

(i) Sea M un módulo puro en grado l; es decir, $M = AM_l$. Entonces la aplicación A-lineal $f : A \otimes_k M_l \to M$ inducida naturalmente por la inyección canónica de M_l en M, es una cápsula proyectiva.

(ii) Supongamos que A está generada en grado 1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea el A-submódulo $M = \bigoplus_{i \geq n} A_i$ de A. Entonces M es puro en grado n. El ejemplo anterior muestra que la aplicación canónica $A \otimes_k A_n \to M$ es una cápsula proyectiva de M.

Proposición 2.9 ([C]). *Todo A-módulo graduado M tiene cápsula proyectiva en la categoría graduada y la misma es única salvo isomorfismos.*

Demostración. Sea $\varphi : M \to k \otimes_A M$ definida para $m \in M$ como $\varphi(m) = 1 \otimes m$. Debido a que $k \otimes_A M$ es un k-espacio vectorial graduado, existe una aplicación k-lineal $\phi : k \otimes_A M \to M$ (ver la demostración de la Proposición 2.6) que conserva el grado y tal que la composición

$$k \otimes_A M \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\varphi} k \otimes_A M$$

es la identidad. Si tensorizamos por A tenemos el siguiente morfismo de A-módulos graduados:

$$A \otimes_k (k \otimes_A M) \xrightarrow{1_A \otimes \phi} A \otimes_k M.$$

Si componemos este morfismo con la aplicación $A \otimes_k M \to M$ que da a M estructura de A-módulo, obtenemos un morfismo A-lineal que conserva el grado:

$$A \otimes_k (k \otimes_A M) \longrightarrow M, \tag{2.2.1}$$

y si aplicamos el funtor $k \otimes_A -$, obtenemos un morfismo k-lineal graduado $k \otimes_A M \simeq k \otimes_A A \otimes_k (k \otimes_A M) \longrightarrow k \otimes_A M$. Es fácil ver que este morfismo es la identidad.

Tenemos entonces, por la Proposición 2.4, que la aplicación (2.2.1) es un epimorfismo esencial. Además, $A \otimes_k (k \otimes_A M)$ es libre-graduado y por lo tanto es proyectivo en la categoría graduada. Notemos por $P \xrightarrow{f} M$ a esta cápsula proyectiva.

Veamos ahora la unicidad de la cápsula proyectiva en la categoría graduada. Para ello supongamos que existe un epimorfismo esencial $f' : P' \to M$ con P' un A-módulo proyectivo graduado. Visto en un diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists g"'] \arrow[d, "f"] & \\ P' \arrow[r, "f'"'] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Como P es proyectivo como módulo graduado y f' es un epimorfismo, sabemos que existe $g : P \to P'$ tal que $f = f' \circ g$ y como f' es esencial, g también es un epimorfismo y al ser $f' \circ g$ esencial, g también resulta un isomorfismo por el Lema 2.5. □

Enunciamos la siguiente proposición para cuya demostración nos referimos a [C].

Proposición 2.10 ([C]). *Sea $\mathcal{P}_\bullet$ una resolución proyectiva minimal de un A-módulo a izquierda $\mathbb{Z}$-graduado M. Entonces las diferenciales de los complejos $k \otimes_A \mathcal{P}_\bullet$ y $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{P}_\bullet, k)$ son nulas.*

Una consecuencia inmediata de este resultado es que M tiene una resolución proyectiva minimal en la categoría graduada:

$$\cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0. \tag{2.2.2}$$

La condición de minimalidad dice que cada epimorfismo $P_i \to \operatorname{Im} d_i$ inducido por d_i es esencial. Cualquier resolución proyectiva minimal de M es isomorfa a (2.2.2) y cualquier resolución proyectiva de M contiene a una resolución proyectiva minimal como sumando directo.

Enunciaremos el siguiente teorema para cuya demostración nos referimos a [B2].

Teorema 2.11 ([B2]). *Sea $M \in A$-grMod, acotado inferiormente. Toda cápsula proyectiva (P, f) de M es tal que P es libre-graduado y acotado inferiormente. Si A y M son localmente finitos, P es localmente finito. Si M es de tipo finito, entonces P es de tipo finito. Además, P es puro en grado l si y sólo si M lo es.*

Dado un A-módulo a izquierda graduado M, en [B2] el autor muestra una manera de construir una cápsulo proyectiva (P, f) de M. Enunciaremos brevemente este resultado en términos generales y nos referimos a dicho trabajo para más detalles. Sea $n \in \mathbb{Z}$ tal que $M_i = 0$ si $i < n$, y $M_n \neq 0$. Se define inductivamente la siguiente sucesión de k-espacios vectoriales:

$$X_n = M_n,$$
$$M_i = (AM_n + \cdots + AM_{i-1})_i \oplus X_i, \text{ si } i > n.$$

De la definición se deduce inmediatamente que $AM_n + \cdots + AM_i = AX_n + \cdots + AX_i$, para $i \geq n$. Consideremos ahora la proyección natural $\epsilon : A \to k$ cuyo núcleo es $\mathcal{I} = \bigoplus_{m \geq 1} A_m$, entonces para $i \geq n$

$$(\mathcal{I}M)_i = (AM_n + \cdots + AM_{i-1})_i.$$

Además, la aplicación canónica $X_i \to \left(\frac{M}{\mathcal{I}M}\right)_i$ es biyectiva. Luego, (P, f) donde $P = \bigoplus_{i \geq n} A \otimes_k X_i$ y $f : P \to M$ es la aplicación natural, resulta una cápsula proyectiva de M. En particular, si M es un A-módulo de tipo finito, entonces los espacios vectoriales X_i son no nulos para un número finito de índices.

Observación 2.12 ([B2]). *Sea M un objeto en A-grMod no necesariamente acotado inferiormente. Podemos definir el A-módulo libre-graduado $P = A \otimes_k (k \otimes_A M)$ y el morfismo $f : P \to M$ como $f(1 \otimes_k (1 \otimes_A m)) = \phi(1 \otimes_A m)$ donde $m \in M$ y ϕ está dado como en la demostración de la Proposición 2.9. Notemos que f depende siempre de la elección de una sección ϕ de φ. Sin embargo, f podría no ser suryectivo (en [B2] se da un ejemplo).*

Definición 2.13. *Un módulo M para el cual existen enteros no negativos $l_1 < \cdots < l_s$ tales que $M = M_{l_1} \oplus \cdots \oplus M_{l_s}$ (respectivamente $M = AM_{l_1} + \cdots + AM_{l_s}$) se dice **$s$-concentrado** (respectivamente **s-puro**) en grados $l_1, \cdots, l_s$.*

Observación 2.14. *Si $s = 1$, llamaremos simplemente módulo concentrado o puro según corresponda, lo cual es compatible con las definiciones introducidas en [B1].*

Observación 2.15. *Algunos autores (ver por ejemplo [GMMVZ]) dicen que si un A-módulo M es tal que $M = AM_{l_1} + \cdots + AM_{l_s}$ entonces está generado en grados $l_1, \cdots, l_s$. Esto coincide con la definición de s-puro.*

En ambos casos, si M no es el módulo nulo, los enteros $l_1, \cdots, l_s$ tales que $M_{l_1}, \cdots, M_{l_s}$ son no nulos están unívocamente determinados. Es claro que todo módulo s-concentrado en grados $l_1, \cdots, l_s$ es s-puro en grados $l_1, \cdots, l_s$. Todo módulo s-concentrado en grados $l_1, \cdots, l_s$ es isomorfo a una suma directa de A-módulos de la forma $k[-l_1] \oplus \cdots \oplus k[-l_s]$ que denotaremos $k[-l_1, \cdots, -l_s]$. Todo A-módulo proyectivo en la categoría graduada, M, s-puro en grados $l_1, \cdots, l_s$ es isomorfo a una suma directa de copias de $A[-l_1, \cdots, -l_s]$ y es isomorfo a $(A \otimes_k M_{l_1}) \oplus \cdots \oplus (A \otimes_k M_{l_s})$ donde M_{l_i} es un A-módulo concentrado en grado l_i.

Observemos que los módulos simples en la categoría graduada son de la forma $k[-l]$, por lo tanto, todo módulo s-concentrado es un módulo semisimple.

Probaremos ahora ciertos resultados para A-módulos que serán empleados más adelante.

Proposición 2.16. *Sea $f : M \to M'$ un epimorfismo en la categoría graduada. Supongamos que M es s-puro en grados $l_1, \cdots, l_s$. Entonces M' es s-puro en grados $l_1, \cdots, l_s$. Además, f es esencial si y sólo si los morfismos $f_{l_i} : M_{l_i} \to M'_{l_i}$ inducidos por f son biyectivos para $1 \leq i \leq s$.*

Demostración. Sea $m' \in M'$, como f es un epimorfismo, existe $m \in M$ tal que $f(m) = m'$. Al ser M s-puro en grados $l_1, \cdots, l_s$; $m = a_1 m_1 + \cdots + a_s m_s$ con $a_i \in A$ y $m_i \in M_{l_i}$ para $1 \leq i \leq s$. Así, $m' = a_1 f(m_1) + \cdots + a_s f(m_s)$ donde $f(m_i) \in M'_{l_i}$ pues f preserva grados. Luego, M' es s-puro en grados $l_1, \cdots, l_s$.

El Lema de Nakayama en la categoría graduada dice que f es esencial si y sólo si el morfismo lineal

$$\overline{f} : k \otimes_A M \longrightarrow k \otimes_A M'$$

inducido por f es biyectivo. Sin embargo, el hecho de que M y M' sean s-puros implica que $k \otimes_A M$ y $k \otimes_A M'$ son canónicamente isomorfos a $k \otimes M_{l_1} + \cdots + k \otimes M_{l_s}$ y $k \otimes M'_{l_1} + \cdots + k \otimes M'_{l_s}$ respectivamente, pues $k \otimes_A M = k \otimes_A (AM_{l_1} + \cdots + AM_{l_s}) \simeq k \otimes_A AM_{l_1} + \cdots + k \otimes_A AM_{l_s} \simeq k \otimes M_{l_1} + \cdots + k \otimes M_{l_s}$. Entonces, a través de estas identificaciones, $\overline{f}$ deviene f_{l_i} entre M_{l_i} y M'_{l_i} para $1 \leq i \leq s$.

Recordaremos ahora los siguientes resultados elementales.

Lema 2.17. *Sean M y N dos A-módulos. Entonces existe un isomorfismo de A-módulos*

$$\frac{M+N}{M} \simeq \frac{N}{N\cap M}.$$

Lema 2.18. *Sean I, N y M A-módulos tales que $I \subseteq N \subseteq M$, $N/I \simeq M/I$ y el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"] & M \arrow[d, "\pi'"] \\ N/I \arrow[r, "\sim"] & M/I. \end{tikzcd}$$

Entonces $N = M$.

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook] & N/I \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi'"] & M/I \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Por el Lema de los cinco, la inclusión $N \hookrightarrow M$ es un isomorfismo. Luego, $N = M$. $\square$

Corolario 2.19. *Sean N, N_1, N_2 y M A-módulos tales que $N = N_1 + N_2 \subseteq M$ y $\frac{N_2}{N_1\cap N_2} \simeq \frac{M}{N_1}$ vía el morfismo $n_2 + (N_1 \cap N_2) \mapsto n_2 + N_1$. Entonces, $N = M$.*

Demostración. Se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} N = N_1 + N_2 \arrow[rr, hook] \arrow[d, "\pi"] & & M \arrow[d, "\pi'"] \\ \frac{N_1+N_2}{N_1} \arrow[r, "\sim"] & \frac{N_2}{N_2\cap N_1} \arrow[r, "\sim"] & M/N_1. \end{tikzcd}$$

Es decir que si n_1 y n_2 pertenecen respectivamente a N_1 y N_2,

$$\begin{tikzcd} n_1 + n_2 \arrow[rr] \arrow[d] & & n_1 + n_2 \arrow[d] \\ {[n_1 + n_2]} \arrow[r] & \overline{n_2} \arrow[r] & \overline{n_2} = \overline{n_2}. \end{tikzcd}$$

La última igualdad se debe a que $n_1 \in N_1$ y así $\pi'(n_1 + n_2) = \pi'(n_2)$. Luego el diagrama es conmutativo y $N/N_1 \simeq M/N_1$ y por el Lema 2.18, tenemos que $N = M$. $\square$

Lema 2.20. *Sean I, J, M y N k-espacios vectoriales tales que $I \subseteq M$, $J \subseteq N$, $I \subseteq J$ y $M \subseteq N$. Supongamos además que*

$$\begin{aligned} \phi : M/I &\longrightarrow N/J \\ \overline{m} &\longmapsto [m] \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Entonces $M \cap J = I$.

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, hook, "i_I"] \arrow[d, hook, "i"] & M \arrow[r, "\pi_I"] \arrow[d, hook, "i'"] & M/I \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & J \arrow[r, hook, "i_J"] & N \arrow[r, "\pi_J"] & N/J \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $\phi(\overline{m}) = [m]$ si $\overline{m}$ denota la clase de m en M/I y $[m]$ denota la clase de m en N/J. Esta aplicación está bien definida ya que si $\overline{m} = \overline{m'}$, entonces $m - m' \in I \subseteq J$, con lo cual $[m] = [m']$.

Es claro que el diagrama es conmutativo. Así,

$$\operatorname{Ker} \pi_J i' = \operatorname{Ker} \pi_J|_M = M \cap J.$$

Por otro lado,

$$\operatorname{Ker} \phi\pi_I = \operatorname{Ker} \pi_I = I.$$

La primera igualdad se debe a que ϕ es un isomorfismo. Por la conmutatividad del diagrama, tenemos que $\pi_J i' = \phi\pi_I$. Luego, $M \cap J = I$. □

2.3 Propiedades sobre espacios vectoriales

En esta sección veremos algunos resultados técnicos que serán útiles en varias demostraciones a lo largo de este trabajo.

Lema 2.21. *Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita y sea $W \subseteq V^{(n)}$ un subespacio. Si existe $m > 0$ tal que $V^{(m)} \otimes W = 0$, entonces $W = 0$.*

Demostración. Sea $\{v_1, \cdots, v_s\}$ una base de V, entonces $V^{(n)}$ tiene una base de la forma $\{v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n} \ / \ i_l \in \{1, \cdots, s\}, \quad 1 \leq l \leq n\}$. Sea además, $\{w_1, \cdots, w_t\}$ una base de W. Extendemos esta base a una base $\{w_1, \cdots, w_t, w_{t+1}, \cdots, w_{s^n}\}$ de $V^{(n)}$. Entonces el elemento $\underbrace{v_1 \otimes \cdots \otimes v_1}_{m\text{-veces}} \otimes w_1$ es parte de una base de $V^{(m)} \otimes V^{(n)}$ y es nulo porque está en $V^{(m)} \otimes W$. Esto lleva a una contradiciión, luego $W = 0$. □

Lema 2.22. *Sea W un subespacio de $V^{(n)}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y sea $\sum\limits_i \lambda_i x_i \otimes z_i \in V^{(m)} \otimes W$ no nulo, donde $x_i = \sum\limits_{j\,=\,(j_1,\cdots,j_m)} \mu^i_j v_{j_1} \cdots v_{j_m}$ con $\mu^i_j \in k$ y $v_{j_t} \in \mathcal{B}$, la base fijada para V. Entonces $\sum\limits_{\substack{i \\ j\,=\,(j_1,\cdots,j_m)}} \lambda_i \mu^i_j z_i \in W$.*

Demostración. Sea $f : V^{(m)} \to k$ la aplicación lineal tal que $f(v_{i_1} \cdots v_{i_m}) = 1$ para todo $v_{i_h} \in \mathcal{B}$. Consideremos la aplicación lineal $\overline{f}$ dada por:

$$\begin{aligned} \overline{f} := f \otimes 1 : V^{(m)} \otimes W &\longrightarrow k \otimes W \simeq W \\ v_{i_1} \cdots v_{i_m} \otimes z_i &\longmapsto f(v_{i_1} \cdots v_{i_m}) \otimes z_i = 1 \otimes z_i \leftrightarrow z_i. \end{aligned}$$

Observemos que $f(\sum\limits_{j\,=\,(j_1,\cdots,j_m)} \mu^i_j v_{j_1} \cdots v_{j_m}) = \sum\limits_{j\,=\,(j_1,\cdots,j_m)} \mu^i_j$. Concluimos de este modo que $\overline{f}\big(\sum\limits_i \lambda_i \sum\limits_{j\,=\,(j_1,\cdots,j_m)} \mu^i_j v_{j_1} \cdots v_{j_m} \otimes z_i\big) = \sum\limits_{\substack{i \\ j\,=\,(j_1,\cdots,j_m)}} \lambda_i \mu^i_j z_i \in W$. □

Observación 2.23. *Un razonamiento análogo vale para $W \otimes V^{(m)}$ y también si tomamos cualquier base de V.*

Corolario 2.24. *Sean W y W' subespacios de $V^{(m)}$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Si $V^{(m)} \otimes W \subseteq V^{(m)} \otimes W'$, entonces $W \subseteq W'$.*

Demostración. Sea $w \in W$, elegimos $v \in V^{(m)}$ no nulo. Luego, el vector no nulo $v \otimes w \in V^{(m)} \otimes W$ y por lo tanto $v \otimes w \in V^{(m)} \otimes W'$. Por el Lema 2.22, resulta que $w \in W'$. □

Si consideramos el álgebra $A = T(V)/I$ donde V es un k-espacio vectorial de dimensión finita, notamos I_n a la componente en grado n del ideal bilátero graduado I.

Lema 2.25. *Sea $\underline{v} = \sum_{i=(i_1,\cdots,i_n)} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_n} \in I_{n-1} \otimes V$, donde $\lambda_i \in k$ y $v_{i_j} \in V$ $(1 \leq j \leq n)$. Supongamos que $v_{i_n} \neq v_{i'_n}$ si $i_n \neq i'_n$. Entonces, para todo $i = (i_1, \cdots, i_n)$, $\lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}} \in I_{n-1}$.*

Demostración. Por el Lema 2.22 y la Observación 2.23, tenemos que $\sum_{i=(i_1,\cdots,i_n)} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}} \in I_{n-1}$.

Fijemos $\tilde{i} = (\tilde{i}_1, \cdots, \tilde{i}_n)$ y consideremos $\underline{w} = \big(\sum_{i=(i_1,\cdots,i_n)} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}}\big) \otimes v_{\tilde{i}_n} \in I_{n-1} \otimes V$. Entonces $\underline{v} - \underline{w} = \sum_{\substack{i=(i_1,\cdots,i_n)\\ (i_1,\cdots,i_n)\neq(\tilde{i}_1,\cdots,\tilde{i}_n)}} (\lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}}) \otimes (v_{i_n} - v_{\tilde{i}_n}) \in I_{n-1} \otimes V$ y es no nulo. Por lo tanto, $\sum_{\substack{i=(i_1,\cdots,i_n)\\ (i_1,\cdots,i_n)\neq(\tilde{i}_1,\cdots,\tilde{i}_n)}} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}} \in I_{n-1}$. Luego,

$$\sum_{i=(i_1,\cdots,i_n)} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}} - \sum_{\substack{i=(i_1,\cdots,i_n)\\ (i_1,\cdots,i_n)\neq(\tilde{i}_1,\cdots,\tilde{i}_n)}} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}} = \lambda_{\tilde{i}} v_{\tilde{i}_1} \cdots v_{\tilde{i}_{n-1}} \in I_{n-1}.$$

Como $\tilde{i}$ fue elegido arbitrariamente, se sigue el resultado. □

Observación 2.26. *Sea $\underline{v} = \sum_{i=(i_1,\cdots,i_n)} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_n} \in I_{n-1} \otimes V$ no nulo y supongamos que existen i e i' distintos tales que $v_{i_n} = v_{i'_n}$. Si reagrupamos la suma, $\underline{v} = \sum_{j=(j_1,\cdots,j_n)} \big(\sum_{\{i/v_{i_n}=v_{j_n}\}} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}}\big) \otimes v_{j_n}$ donde $v_{j_n} \neq v_{j'_n}$ si $j \neq j'$. Por el Lema 2.25, $\sum_{\{i/v_{i_n}=v_{j_n}\}} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}} \in I_{n-1}$ para todo j. Al ser I un ideal, deducimos que $\sum_{i=(i_1,\cdots,i_n)} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}} \in I_{n-1}$.*

2.4 Álgebra y producto de Yoneda

En esta sección recordaremos la definición del álgebra de Yoneda y de su producto, junto con ejemplos y resultados conocidos. Durante la misma k denotará un cuerpo, A una k-álgebra no necesariamente graduada, A-mod la categoría de A-módulos a izquierda finitamente generados y $\mathfrak{r}$ el radical de Jacobson del álgebra A.

Definición 2.27. *Sea A una k-álgebra y M un A-módulo graduado a izquierda. Se define el* ***radical (de Jacobson)*** *de M como el submódulo de M que resulta de la intersección de todos los submódulos maximales de M, y notamos* $\operatorname{rad}(M)$.

Recordemos el siguiente resultado conocido:

Teorema 2.28 ([A2]). *Sea A una k-álgebra artiniana y sea M un A-módulo. Entonces,* $\mathrm{rad}(M) = \mathrm{rad}(A)M$.

Definición 2.29 ([Z]). *Sean M y N en A-mod. Una* ***extensión de largo*** n *de M por N es una sucesión exacta de A-módulos y morfismos de A-módulos*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{g_n} M_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} \cdots \longrightarrow M_0 \xrightarrow{g_0} M \longrightarrow 0.$$

Dadas dos extensiones de largo n de M por N,

$$\begin{aligned} \xi :\ & 0 \longrightarrow N \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ \eta :\ & 0 \longrightarrow N \longrightarrow M'_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

decimos que ξ **está relacionada con** η y notamos $\xi \rightsquigarrow \eta$, si existe un diagrama conmutativo en $\mathrm{Mod}\, A$ de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, equal] & M_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "g'_n"] & M'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M'_1 \arrow[r, "g'_1"] & M'_0 \arrow[r, "g'_0"] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Observación 2.30. *La relación $\rightsquigarrow$ no es necesariamente de equivalencia. Mostraremos este hecho en el próximo ejemplo.*

Miramos entonces la relación de equivalencia generada por $\rightsquigarrow$; es decir, ξ es **equivalente** a η si existe una sucesión de extensiones de largo n de M por N, $\xi = \xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_t = \eta$ tal que $\xi_i \rightsquigarrow \xi_{i+1}$ o $\xi_{i+1} \rightsquigarrow \xi_i$ para $0 \leq i \leq t-1$. El conjunto de clases de equivalencia de extensiones de largo n de M por N se denota $\mathrm{Ext}^n_A(M,N)$. Si M y N están en A-mod, se pueden considerar las extensiones de M por N en A-mod y la equivalencia entre ellas. Notar que una extensión en A-mod puede ser equivalente a otra en la cual los módulos que intervienen no sean finitamente generados.

Es conocido que para construir $\mathrm{Ext}^n_A(M,N)$ podemos tomar una resolución proyectiva de M por A-módulos

$$\cdots \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0,$$

aplicar luego el funtor $\mathrm{Hom}_A(-,N)$,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_0,N) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_A(P_1,N) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_n,N) \xrightarrow{d_n^*} \mathrm{Hom}_A(P_{n+1},N) \longrightarrow \cdots$$

donde $d_n^*(f) = f \circ d_n$ y calcular entonces $\mathrm{Ext}^n_A(M,N) = \frac{\mathrm{Ker}\, d^*_{n+1}}{\mathrm{Im}\, d^*_n}$.

Ejemplo. Consideremos el carcaj Q descripto por

$$\bullet_1 \xrightarrow{\alpha} \bullet_2 \xrightarrow{\beta} \bullet_3.$$

Sea $A = kQ$ el álgebra de caminos. A es hereditaria; es decir, $\mathrm{gldim}(A) \leq 1$. Listamos a continuación los A-módulos simples y los A-módulos proyectivos e inyectivos indescomponibles:

$S_1 : k \to 0 \to 0$	$P_1 : k \to k \to k$	$I_1 : k \to 0 \to 0$
$S_2 : 0 \to k \to 0$	$P_2 : 0 \to k \to k$	$I_2 : k \to k \to 0$
$S_3 : 0 \to 0 \to k$	$P_3 : 0 \to 0 \to k$	$I_3 : k \to k \to k$

donde los morfismos son nulos salvo los que van del cuerpo en sí mismo, que son iguales a la identidad. Por otro lado, observemos que P_1/S_3 es isomorfo a I_2. Sean además, las extensiones:

$$\xi:\ 0 \longrightarrow S_3 \xrightarrow{i} P_2 \xrightarrow{g} P_1/S_3 \xrightarrow{\pi} S_1 \longrightarrow 0$$
$$\eta:\ 0 \longrightarrow S_3 \xrightarrow{1} S_3 \xrightarrow{0} S_1 \xrightarrow{1} S_1 \longrightarrow 0$$

donde $g(0,\lambda_1,\lambda_2) = (0,\lambda_1,0)$.

Sabemos que $[\xi] = [\eta] = 0$ pues $\mathrm{Ext}^2_A(S_1,S_3) = 0$. Sin embargo notemos lo siguiente: como el único morfismo de P_2 en S_3 es el nulo, no existen morfismos de extensiones de ξ en η,

$$\begin{tikzcd}
\xi: & 0 \arrow[r] & S_3 \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & P_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "0"] & P_1/S_3 \arrow[r, "\pi"] & S_1 \arrow[r] & 0 \\
\eta: & 0 \arrow[r] & S_3 \arrow[r, "1"] & S_3 \arrow[r, "0"] & S_1 \arrow[r, "1"] & S_1 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Luego, $\xi \not\rightsquigarrow \eta$. Por otro lado, tampoco existen morfismos de extensiones de η en ξ, porque el único morfismo posible de S_1 en P_1/S_3 es el nulo,

$$\begin{tikzcd}
\eta: & 0 \arrow[r] & S_3 \arrow[r, "1"] \arrow[d, equal] & S_3 \arrow[r, "0"] & S_1 \arrow[r, "1"] \arrow[d, dashed, "0"] & S_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\xi: & 0 \arrow[r] & S_3 \arrow[r, "i"] & P_2 \arrow[r, "g"] & P_1/S_3 \arrow[r, "\pi"] & S_1 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Luego, $\eta \not\rightsquigarrow \xi$.

Consideremos ahora la siguiente 2-extensión de S_3 por S_1:

$$\rho : 0 \longrightarrow S_3 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} P_2 \oplus S_3 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \end{smallmatrix}\right)} P_1 \xrightarrow{\pi} S_1 \longrightarrow 0.$$

Existe un morfismo de extensiones de ρ en η:

$$\begin{tikzcd}
\rho: & 0 \arrow[r] & S_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_2 \oplus S_3 \arrow[r] \arrow[d, "(0\ \ 1)"] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & S_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\eta: & 0 \arrow[r] & S_3 \arrow[r] & S_3 \arrow[r] & S_1 \arrow[r] & S_1 \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

por lo tanto $\rho \rightsquigarrow \eta$. Por otro lado, también existe un morfismo de extensiones:

$$\begin{tikzcd}
\rho: & 0 \arrow[r] & S_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_2 \oplus S_3 \arrow[r] \arrow[d, "(1\ \ i)"] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & S_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\xi: & 0 \arrow[r] & S_3 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1/S_3 \arrow[r] & S_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto, $\rho \rightsquigarrow \xi$. Tenemos así la sucesión ξ, ρ, η. Construimos entonces explícitamente una equivalencia entre ξ y η.

Proposición 2.31 ([Z]). *Sea A una k-álgebra de dimensión finita y sean M un A-módulo y N un A-módulo semisimple. Consideramos*

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0 \qquad (2.4.1)$$

una resolución proyectiva minimal del A-módulo M; es decir, $\mathrm{Im}\, d_n \subseteq \mathrm{rad}(P_{n-1})$, que coincide con $\mathfrak{r}P_{n-1}$ porque A es artiniana. Entonces, para cualquier $n \geq 0$,

$$\mathrm{Ext}^n_A(M,N) \simeq \mathrm{Hom}_A(P_n,N).$$

Demostración. Por definición, el resultado es trivial en el caso $n = 0$. Sea ahora $n > 0$. La minimalidad de la resolución (2.4.1) implica que para cada n, $\operatorname{Im} d_{n+1} \subseteq \mathfrak{r}P_n$. Dado $\xi \in \operatorname{Hom}_A(P_n, N)$, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\xi"] & P_{n-1} \arrow[dl, "\eta"] \\ & N & \end{tikzcd} .$$

Como N es semisimple, $\mathfrak{r}P_n \subseteq \operatorname{Ker} \xi$, por lo tanto $\xi d_{n+1} = 0$. Luego, $\operatorname{Hom}_A(P_n, N) \subseteq \operatorname{Ker} d^*_{n+1}$ y vale la igualdad. Además, si $n \geq 1$ y $\eta \in \operatorname{Hom}_A(P_{n-1}, N)$, resulta $\eta d_n = 0$ puesto que $\operatorname{Im} d_n \subseteq \mathfrak{r}P_{n-1}$, luego $\operatorname{Im} d^*_n = 0$ para cada n. Esto implica que $\operatorname{Ext}^n_A(M, N) = \operatorname{Ker} d^*_{n+1} = \operatorname{Hom}_A(P_n, N)$. $\square$

Recordemos el siguiente resultado conocido en la categoría de A-módulos (no graduados):

Lema 2.32 ([A2]). *Sean P y M dos A-módulos finitamente generados. Si P es proyectivo y $f : P \to M$ es un epimorfismo, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *f es una cápsula proyectiva.*

(ii) $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{rad}(P)$.

Demostración. Es sabido que si f es un epimorfismo entonces $f(\operatorname{rad}(P)) \subseteq \operatorname{rad}(M)$. Luego, f induce un morfismo $\overline{f} : \frac{P}{\operatorname{rad}(P)} \to \frac{M}{\operatorname{rad}(M)}$.

Supongamos que f es una cápsula proyectiva y por lo tanto, $\overline{f}$ es un isomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_P"] & M \arrow[d, "\pi_M"] \\ \frac{P}{\operatorname{rad}(P)} \arrow[r, "\overline{f}"] & \frac{M}{\operatorname{rad}(M)}, \end{tikzcd} \tag{2.4.2}$$

donde π_P y π_M son las proyecciones canónicas. Si $x \in P$ es tal que $f(x) = 0$ entonces $\overline{f}\pi_P(x) = \pi_M f(x) = 0$. Como $\overline{f}$ es un isomorfismo resulta que $x \in \operatorname{Ker} \pi_P = \operatorname{rad}(P)$.

Recíprocamente, supongamos que $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{rad}(P)$. Usando la conmutatividad del diagrama (2.4.2) y el hecho que π_P, π_M y f son epimorfismos, deducimos que $\overline{f}$ es un epimorfismo. Para probar que $\overline{f}$ es un monomorfismo consideremos $x + \operatorname{rad}(P) \in \operatorname{Ker} \overline{f}$. Luego,

$$\pi_M f(x) = \overline{f}\pi_P(x) = \overline{f}(x + \operatorname{rad}(P)) = 0,$$

y por lo tanto $x \in \operatorname{rad}(M)$. Se puede probar que en realidad $f(\operatorname{rad}(P)) = \operatorname{rad}(M)$ (ver *Proposition* 1.3 *(VII)* de [A2]). Sea $y \in \operatorname{rad}(P)$ tal que $f(x) = f(y)$, entonces $x - y \in \operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{rad}(P)$. Luego, $x \in \operatorname{rad}(M)$. $\square$

Observación 2.33. *Si consideramos el resultado análogo a este lema para la versión graduada, como en una resolución proyectiva de la forma (2.4.1), $\operatorname{Im} d_n = \operatorname{Ker} d_{n-1}$, por el Lema 2.32 la definición de minimalidad para resoluciones dada como consecuencia de la Proposición 2.9 y la introducida en la Proposición 2.31 son equivalentes.*

Nuestro próximo objetivo es recordar la definición del producto

$$\operatorname{Ext}^n_A(L, K) \otimes \operatorname{Ext}^m_A(M, L) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{n+m}_A(M, K).$$

donde L, K y M son A-módulos. Para ello, consideramos dos clases de extensiones en $\mathrm{Ext}^n_A(L,K)$ y $\mathrm{Ext}^m_A(M,L)$ representadas por ξ y η respectivamente:

$$\xi:\ 0 \longrightarrow K \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_1 \xrightarrow{s} B_0 \xrightarrow{f} L \longrightarrow 0$$
$$\eta:\ 0 \longrightarrow L \xrightarrow{g} C_{m-1} \xrightarrow{h} \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Tomamos

$$\xi\eta:\quad 0 \longrightarrow K \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{s} B_0 \xrightarrow{gf} C_{m-1} \xrightarrow{h} \cdots \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Veamos que esta sucesión es exacta, para lo cual sólo basta con verificar que $\mathrm{Im}\, gf = \mathrm{Ker}\, h$ y $\mathrm{Ker}\, gf = \mathrm{Im}\, s$. Ambas igualdades son inmediatas porque f es un epimorfismo y g un monomorfismo. Se define así, $[\xi][\eta] := [\xi\eta]$. Éste es el llamado **producto de Yoneda**.

Ejemplo. Sean Q el carcaj dado por

$$\bullet_1 \xrightarrow{\alpha} \bullet_2 \xrightarrow{\beta} \bullet_3$$

e I el ideal generado por $\beta\alpha$ en $A = kQ$. Sea $\Gamma = kQ/I$. En el ejemplo anterior ya explicitamos los módulos simples y los proyectivos e inyectivos indescomponibles de A. Para Γ, estos módulos están dados por:

$$\begin{array}{lll} S_1 : k \to 0 \to 0 & P_1 : k \to k \to 0 & I_1 : k \to 0 \to 0 \\ S_2 : 0 \to k \to 0 & P_2 : 0 \to k \to k & I_2 : k \to k \to 0 \\ S_3 : 0 \to 0 \to k & P_3 : 0 \to 0 \to k & I_3 : 0 \to k \to k \end{array}$$

donde, como antes, los morfismos son nulos salvo los que van del cuerpo en sí mismo que son iguales a la identidad. Observemos que los únicos módulos que difieren para las álgebras A y Γ son P_1 e I_3. Sean $[\xi] \in \mathrm{Ext}^1_A(S_2,S_3)$, $[\xi'] \in \mathrm{Ext}^1_\Gamma(S_2,S_3)$, $[\eta] \in \mathrm{Ext}^1_A(S_1,S_2)$ y $[\eta'] \in \mathrm{Ext}^1_\Gamma(S_1,S_2)$ representadas por:

$$\xi:\ 0 \longrightarrow S_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow 0$$
$$\eta:\ 0 \longrightarrow S_2 \longrightarrow I_2 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0.$$

Entonces en $\mathrm{Ext}^2_A(S_1,S_3)$ y en $\mathrm{Ext}^2_\Gamma(S_1,S_3)$, la clase $[\xi\eta]$ está representada por

$$\xi\eta:\quad 0 \longrightarrow S_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow I_2 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0.$$

Ya vimos que sobre A, $[\xi][\eta] = 0$. Sin embargo, sobre Γ,

$$0 \longrightarrow S_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow I_2 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva (puesto que $S_3 = P_3$ e $I_2 = P_1$) minimal del Γ-módulo S_1, entonces $[\xi][\eta] \neq 0$ y $\mathrm{pdim}_\Gamma(S_1) = 2$.

Definición 2.34 (Ver por ejemplo [GMV1]). *Se define el **álgebra de Yoneda de** A como* $E(A) = \bigoplus_{n\,\geq\,0} \mathrm{Ext}^n_A(A/\mathfrak{r}, A/\mathfrak{r})$ *con estructura multiplicativa dada por el producto de Yoneda.*

Observación 2.35 ([Z]). *También se puede describir la estructura multiplicativa de $E(A)$ usando resoluciones proyectivas minimales: sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ resoluciones proyectivas minimales de los A-módulos L y M respectivamente. Sean η y ξ representantes de clases en $\operatorname{Ext}_A^m(M, L)$ y $\operatorname{Ext}_A^n(L, K)$ respectivamente. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Q_{m+n} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "l_n"] & \cdots \arrow[r] & Q_m \arrow[r] \arrow[d, dashed, "l_0"] \arrow[dr, "\eta"] & \cdots & \\
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & L \arrow[r] & 0 \\
& K & & & &
\end{tikzcd}$$

donde $l_0, \cdots, l_n$ denotan los sucesivos levantamientos de η. Entonces $[\xi] \cdot [\eta] := [\xi \circ l_n]$. Esta forma de multiplicar las extensiones no depende ni de los representantes ni de los levantamientos elegidos (ver Capítulo "Les sept calculus du produit de composition" de [B6]). De hecho, si K es un A-módulo semisimple, entonces $\xi \circ l_n$ es un elemento de $\operatorname{Ext}_A^{n+m}(M, K)$, puesto que es un elemento de $\operatorname{Hom}_A(Q_{n+m}, K)$ y es posible así utilizar la Proposición 2.31.

2.5 Propiedades homológicas

Comenzamos la sección recordando la siguiente definición:

Definición 2.36 ([BGS1], [GMV1]). *Sea M un A-módulo graduado. Una **resolución proyectiva graduada** de M es una resolución proyectiva*

$$\cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0,$$

*tal que P_i es un A-módulo graduado y los d_i son morfismos de grado cero. Esta resolución se dice **minimal** si $\operatorname{Im} d_i \subseteq \operatorname{rad}(P_{i-1})$.*

Sea V un k-espacio vectorial graduado concentrado en grado 1. Fijamos $\{v_1, \cdots, v_s\}$ una base homogénea para V. Consideramos un ideal bilátero graduado I de $T(V)$. Notemos $I = \underset{n \geq 0}{\oplus} I_n$ a su descomposición según la graduación y supongamos que I está generado por elementos homogéneos de grado mayor o igual a 2. El álgebra graduada $A = T(V)/I$ está generada por $A_1 = V$. De ahora en más, cualquier tensor será sobre el cuerpo k, salvo que se aclare lo contrario. Durante esta sección cada vez que se diga que un módulo es proyectivo será en la categoría de A-módulos graduados. Comencemos a construir una resolución proyectiva minimal del módulo trivial k en la categoría graduada. La proyección canónica $\epsilon : A \to k$ es una cápsula proyectiva de k pues A es proyectivo como A-módulo y $\operatorname{Ker} \epsilon = \bigoplus_{n \geq 1} A_n = \operatorname{rad}(A)$. Además,

$$\begin{aligned} \mu : A \otimes_k V &\longrightarrow \operatorname{Ker} \epsilon \\ \overline{a} \otimes v &\longmapsto \overline{av} \end{aligned}$$

es una cápsula proyectiva de $\operatorname{Ker} \epsilon$, ya que $\operatorname{Ker} \mu = A \otimes R \subseteq \bigoplus_{n \geq 2} A_n = \operatorname{rad}\big(\bigoplus_{n \geq 1} A_n\big) = \operatorname{rad}(A \otimes_k V)$, donde R es el k-espacio vectorial generado por los generadores del ideal I. Obtenemos así un morfismo de A-módulos graduados $d_1 : A \otimes_k V \to A$ al componer μ con la inclusión canónica del núcleo en A. Claramente, $\operatorname{Ker} d_1$ se anula en grados menores que el mínimo de los grados de los generadores de I.

Para cada $n \geq 2$, elegimos un subespacio R_n de I_n que sea suplementario de $I_{n-1} \otimes V + V \otimes I_{n-1}$. Tenemos de esta forma que:

$$\begin{aligned} I_2 &= (I_1 \otimes V) + (V \otimes I_1) \oplus R_2 = R_2 \ \text{ pues } \ I_1 = 0 \\ I_n &= \Big(\sum_{\substack{i+j+l=n \\ 2 \leq j < n}} V^{(i)} \otimes R_j \otimes V^{(l)} \Big) \oplus R_n \ \text{ para } \ n > 2. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Demostraremos este último hecho haciendo inducción sobre n. Si $n = 2$ ya está probado en 2.5.1. Si $n = 3$, es inmediato. Supongamos entonces que la afirmación es válida para $n \geq 3$ y calculemos I_{n+1}

$$I_n \otimes V + V \otimes I_n =_{\text{H.I.}} \Big(\sum_{\substack{i+j+l=n \\ 2 \leq j < n}} V^{(i)} \otimes R_j \otimes V^{(l)} \oplus R_n \Big) \otimes V +$$

$$V \otimes \Big(\sum_{\substack{i+j+l=n \\ 2 \leq j < n}} V^{(i)} \otimes R_j \otimes V^{(l)} \oplus R_n \Big) = \sum_{\substack{i+j+l=n \\ 2 \leq j < n}} V^{(i)} \otimes R_j \otimes V^{(l+1)} + R_n \otimes V +$$

$$\sum_{\substack{i+j+l=n \\ 2 \leq j < n}} V^{(i+1)} \otimes R_j \otimes V^{(l)} + V \otimes R_n = \sum_{\substack{h+r+t=n+1 \\ 2 \leq r < n+1}} V^{(h)} \otimes R_r \otimes V^{(t)}.$$

Concluimos de este modo que $I_{n+1} = (I_n \otimes V + V \otimes I_n) \oplus R_{n+1} = \Big(\sum_{\substack{h+r+t=n+1 \\ 2 \leq r < n+1}} V^{(h)} \otimes R_r \otimes V^{(t)} \Big) \oplus R_{n+1}$.

Tenemos así que el ideal I está generado por el subespacio vectorial graduado $R = \sum_{n \geq 2} R_n$. De este modo, toda base homogénea de R es una familia minimal de generadores de I y recíprocamente, toda familia minimal de generadores homogéneos de I da origen a un subespacio vectorial graduado R que verifica (2.5.1). Diremos entonces que R es un **espacio de relaciones** de A.

Consideremos la aplicación $\varphi : R \to A \otimes V$ dada por la composición de la inclusión $R \hookrightarrow T(V)_{\geq 1} \simeq T(V) \otimes V$ con la proyección $T(V) \otimes V \to A \otimes V$, es decir la aplicación definida por $\varphi(r) = \varphi(\sum_{j=(j_1,\cdots,j_n)} \lambda_j v_{j_1} \cdots v_{j_n}) = \sum_{j=(j_1,\cdots,j_n)} \overline{\lambda_j v_{j_1} \cdots v_{j_{n-1}}} \otimes v_{j_n}$, donde $r \in R_n$ y los vectores v_{j_h} pertenecen a una base del k-espacio vectorial V. Sea $r \in R_n$ tal que $\varphi(r) = 0$. El Lema 2.25 asegura que $\sum_{i=(i_1,\cdots,i_n)} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}}$ pertenece a I_{n-1}. Concluimos luego que $r \in I_{n-1} \otimes V$ y debido a que R_n e $I_{n-1} \otimes V$ están en suma directa, resulta que $r = 0$ y la aplicación es inyectiva.

Extendemos esta aplicación por linealidad a un morfismo $d_2 : A \otimes R \to A \otimes V$ de A-módulos graduados. Esto significa que si $\alpha \in A$ y $r \in R$, el morfismo A-lineal queda definido por $d_2(\alpha \otimes r) = \sum_{j=(j_1,\cdots,j_n)} \overline{\lambda_j \alpha v_{j_1} \cdots v_{j_{n-1}}} \otimes v_{j_n}$. Para el morfismo d_1 definido al comienzo de esta sección, estudiemos $\operatorname{Ker} d_1$. Es claro que este núcleo se anula en grados 0 y 1, tal como observamos antes, pues I puede ser no nulo sólo en grados mayores o iguales que 2. Dado $n \geq 2$,

$$(\operatorname{Ker} d_1)_n = \frac{I_n}{I_{n-1} \otimes V} = \frac{I_{n-1} \otimes V + \sum_{2 \leq i \leq n} V^{(n-i)} \otimes R_i}{I_{n-1} \otimes V} = (\operatorname{Im} d_2)_n$$

Proposición 2.37 (Proposition 2.5, [B2]). *Se tiene una resolución proyectiva minimal de k como A-módulo graduado que comienza por*

$$A \otimes R \xrightarrow{d_2} A \otimes V \xrightarrow{d_1} A \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0. \tag{2.5.2}$$

En particular, $\operatorname{Tor}_0^A(k,k) = k$, $\operatorname{Tor}_1^A(k,k) = V$ *y* $\operatorname{Tor}_2^A(k,k) = R$.

Demostración. Por lo hecho anteriormente, sólo resta probar que $d_2 : A \otimes R \to \operatorname{Ker} d_1$ es una cápsula proyectiva.

Primero observemos que $A \otimes R$ es A-proyectivo pues A es playo como k-módulo porque k es un cuerpo. Por otro lado, $\operatorname{rad}(A \otimes R) = \operatorname{rad}(A)R = \sum_{i \geq 1} A_i R$. Estudiemos $\operatorname{Ker} d_2$ grado a grado. Como R puede ser no nulo sólo en grados mayores o iguales que 2, lo mismo sucede para $\operatorname{Ker} d_2$. Sea entonces $n \geq 2$ y sean v_{i_h} elementos de una base de V $(1 \leq h \leq n)$,

$$\begin{aligned} d_2\Big(&\sum_{\substack{i=(i_1,i_2)\\ \operatorname{gr}(\overline{\alpha_i})=n-2}} \overline{\alpha_i} \otimes v_{i_1} v_{i_2} + \cdots + \sum_{\substack{i=(i_1,\cdots i_n)\\ \operatorname{gr}(\overline{\alpha_i})=0}} \overline{\alpha_i} \otimes v_{i_1} \cdots v_{i_n}\Big) \\ = &\sum_{\substack{i=(i_1,i_2)\\ \operatorname{gr}(\overline{\alpha_i})=n-2}} \overline{\alpha_i v_{i_1}} \otimes v_{i_2} + \cdots + \sum_{\substack{i=(i_1,\cdots i_n)\\ \operatorname{gr}(\overline{\alpha_i})=0}} \overline{\alpha_i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}}} \otimes v_{i_{n-1}}. \end{aligned}$$

Por cuestiones de grado, $\sum_{\substack{i=(i_1,i_2)\\ \operatorname{gr}(\alpha_i)=n-2}} \alpha_i v_{i_1}, \sum_{\substack{i=(i_1,i_2,i_3)\\ \operatorname{gr}(\alpha_i)=n-3}} \alpha_i v_{i_1} v_{i_2}, \cdots, \sum_{\substack{i=(i_1,\cdots i_n)\\ \operatorname{gr}(\alpha_i)=0}} \alpha_i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}} \in I_{n-1}$ para que este elemento se anule, pues observemos que si existen cancelaciones entre elementos cuyas segundas componentes coincidan este hecho no se modifica. Por lo tanto:

$$(\operatorname{Ker} d_2)_n = \frac{(V^{(n-2)} \otimes R_2 + \cdots + R_n) \cap (I_{n-1} \otimes V)}{I_{n-2} \otimes R_2 + \cdots + I_2 \otimes R_{n-2}}. \tag{2.5.3}$$

Es claro entonces que todo elemento en este núcleo es tal que sus últimas coordenadas pertenecen a R. Vimos que sin embargo; $R \simeq k \otimes R$ no está contenido en el núcleo. Luego, $\operatorname{Ker} d_2 \subseteq \operatorname{rad}(A \otimes R)$ y así tenemos una cápsula proyectiva.

Si aplicamos el funtor $k \otimes_A -$ a la sucesión (2.5.2), obtenemos

$$\begin{tikzcd} k \otimes_A A \otimes_k R \arrow[r, "1\otimes d_2"] \arrow[d, "\wr"] & k \otimes_A A \otimes_k V \arrow[r, "1\otimes d_1"] \arrow[d, "\wr"] & k \otimes_A A \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 . \\ R & V & k & \end{tikzcd}$$

Por cuestiones de grado, tenemos que $1 \otimes d_2 = 0 = 1 \otimes d_1$. Luego, $\operatorname{Tor}_0^A(k,k) = k$ y $\operatorname{Tor}_1^A(k,k) = V$. Este comienzo de resolución sigue con la aplicación $A \otimes_k W \xrightarrow{d_3} A \otimes_k R$ donde $A \otimes_k W \xrightarrow{d_3} \operatorname{Ker} d_2$ es una cápsula proyectiva. Es claro que $\operatorname{Ker} d_2$ puede ser no nulo sólo en grados mayores o iguales que 3 (pues R puede ser no nulo sólo en grados mayores o iguales que 2 y un elemento de grado 2 se descompone en uno de grado 1 en A y en otro perteneciente a V, pero los elementos de grado 1 no se anulan en A). Luego, W puede ser no nulo sólo en grados mayores o iguales que 3.

Por minimalidad, $\operatorname{Im} d_3 = \operatorname{Ker} d_2 \subseteq \operatorname{rad}(A \otimes R)$. Entonces, podemos definir el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} k \otimes_A A \otimes_k W \arrow[r, "1\otimes d_3"] & k \otimes_A A \otimes_k R \arrow[d, "f", "\wr"'] \\ k \otimes_k W \arrow[u, "g", "\wr"'] \arrow[r, "d_3^*"] & k \otimes_k R. \end{tikzcd}$$

La imagen de $1 \otimes d_3$ consiste de elementos de la forma $\sum_i \lambda_i \otimes r_i$ con $\lambda_i \in k$ y $r_i \in \operatorname{rad}(A \otimes R)$, entonces para todo i existen $\overline{\beta_i} \in A$ y $s_i \in R$ tales que $\operatorname{gr}(\overline{\beta_i})$ es mayor o igual que 1 y $r_i = \sum_j \overline{\beta_j^i} s_j^i$.

Al componer con f, $f\big(\sum_i \lambda_i \otimes r_i\big) = \sum_{i,j} \lambda_i \overline{\beta^i_j} \otimes s^i_j = 0$, si utilizamos la estructura de k como A-módulo. Como g es un isomorfismo, tenemos que $d_3^* = 0$. Luego, $\mathrm{Tor}_2^A(k,k) = R$. □

Supongamos ahora que I está generado por elementos homogéneos de grado mayor o igual que s; es decir, $R = \sum_{n \geq s} R_n$. Definimos el entero $n_s(i)$ para cada $i \geq 0$ como

$$n_s(i) = \begin{cases} js & \text{si } i = 2j \\ js+1 & \text{si } i = 2j+1. \end{cases}$$

Probaremos a continuación una serie de Lemas elementales.

Lema 2.38. *Sea $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números enteros no negativos tal que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = s$ y $a_i \geq a_{i-2} + s$ para $i \geq 2$. Entonces $a_i \geq \frac{i}{2}s$ si i es par y $a_i \geq \frac{i-1}{2}s + 1$ si i es impar. Equivalentemente, $a_i \geq n_s(i)$.*

Demostración. Haremos inducción en i. Para a_0, a_1 y a_2 la propiedad resulta trivial. Supongamos válida la propiedad para $i \geq 2$ par, entonces $a_{i+2} \geq a_i + s \geq \frac{i}{2}s + s = \frac{i+2}{2}s$. En forma análoga para $i \geq 3$ impar, si usamos la hipótesis inductiva, $a_{i+2} \geq a_i + s \geq \frac{i-1}{2}s + 1 + s = \frac{i+1}{2}s + 1$. □

Lema 2.39. *Sea $A = T(V)/I$ y*

$$\cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva graduada minimal. Sea $\overline{M_i}$ la matriz que define la transformación lineal d_i, entonces la matriz producto $M_i M_{i-1}$ tiene entradas en el ideal I.

Demostración. Como tenemos una resolución se sigue que $d_{i-1}d_i = 0$, luego $\overline{M_{i-1}M_i}$ es la matriz nula. Entonces si $\overline{m_{lj}} = (\overline{M_{i-1}M_i})_{lj}$, $m_{lj} \in I$. □

Lema 2.40. *Sea $A = T(V)/I$ tal que el ideal I está generado por elementos homogéneos de grado mayor o igual que s. Sea*

$$\cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva graduada minimal. Si consideramos la sucesión de números a_i definida por el menor grado de los generadores de P_i, entonces $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ satisface las hipótesis del Lema 2.38.

Demostración. Sabemos por la Proposición 2.37 que P_0 y P_1 están generados en grado 0 y 1 respectivamente y que $P_2 = A \otimes R$ donde R es un espacio de relaciones para el ideal I el cual está generado por elementos homogéneos de grado mayor o igual que s. Luego, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_2 = s$. Sea $x \in P_i$ un generador no nulo tal que $\mathrm{gr}(x) = a_i$, por el Lema 2.39 $M_{i-1}M_i(x) = \sum_j \iota_j x_j$ donde $\iota_j \in I$ y $x_j \in P_{i-2}$. Luego, $a_i = \mathrm{gr}(\iota_j x_j) = \mathrm{gr}(\iota_j) + \mathrm{gr}(x_j) \geq s + a_{i-2}$. □

Si combinamos los Lemas 2.40 y 2.38 obtenemos la siguiente Proposición:

Proposición 2.41 (Proposition 2.6, [B2]). *Supongamos que $R = \sum_{n \geq s} R_n$, $s \geq 2$. Sea $\mathcal{P}$ una resolución proyectiva minimal del A-módulo trivial k. Entonces, para todo $i \geq 2$, el A-módulo graduado P_i puede ser no nulo sólo en grados mayores o iguales que $n_s(i)$.*

Observación 2.42. *El caso $s = 2$ de la Proposición 2.41 fue probado en [BGS2].*

Corolario 2.43 ([B2]). *Supongamos que $R = \sum_{n \geq s} R_n$ para un entero $s \geq 2$. Entonces, para todo $i \geq 2$, el espacio vectorial graduado $\mathrm{Tor}_i^A(k,k)$ puede ser no nulo sólo en grados mayores o iguales que $n_s(i)$, mientras que el espacio vectorial graduado $\mathrm{Ext}_A^i(k,k)$ puede ser no nulo sólo en grados menores o iguales que $-n_s(i)$.*

Demostración. Sea la siguiente resolución proyectiva minimal de k

$$\cdots \longrightarrow A \otimes Q_i \xrightarrow{d_i} A \otimes Q_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A \otimes R \xrightarrow{d_2} A \otimes V \xrightarrow{d_1} A \xrightarrow{d_0} k \longrightarrow 0.$$

Si aplicamos el funtor $k \otimes_A -$, resulta el siguiente complejo

$$\cdots \longrightarrow Q_i \xrightarrow{1_k \otimes_A d_i} Q_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R \xrightarrow{1_k \otimes_A d_2} V \xrightarrow{1_k \otimes_A d_1} k \longrightarrow 0.$$

Análogamente a lo hecho en la demostración de la Proposición 2.37, vemos que $1_k \otimes_A d_i = 0$, luego, $\mathrm{Tor}_A^i(k,k) = Q_i$. Por la Proposición 2.41, este último puede ser no nulo sólo en grados mayores o iguales que $n_s(i)$. □

Sea M un A-módulo graduado acotado inferiormente y sea $\mathcal{P}$ una resolución proyectiva minimal de M como A-módulo graduado. Dados dos A-módulos graduados N y N', se definen los siguientes k-espacios vectoriales:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_A(N,N')_d &= \{f \in \mathrm{Hom}_A(N,N') \ / \ f(N_i) \subseteq N'_{i+d}, \ \ i \in \mathbb{Z}\},\\
\underline{\mathrm{Hom}}_A(N,N') &= \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(N,N')_d,\\
\mathrm{hom}_A(N,N') &= \mathrm{Hom}_A(N,N')_0.
\end{aligned}$$

Para todo A-módulo a derecha M', no necesariamente graduado,

$$\mathrm{Ext}_A^i(M,M') = \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_A(\mathcal{P},M')).$$

Si M' es un A-módulo graduado, notamos

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Ext}}_A^i(M,M') &= \mathrm{H}^i(\underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathcal{P},M')),\\
\mathrm{ext}_A^i(M,M') &= \mathrm{H}^i(\mathrm{hom}_A(\mathcal{P},M')).
\end{aligned}$$

Es claro que $\underline{\mathrm{Ext}}_A^i(M,M')$ es un k-módulo graduado, cuya graduación notaremos como $\mathrm{Ext}_A^{i,j}(M,M')$ con $j \in \mathbb{Z}$. Tenemos que

$$\mathrm{Ext}_A^{i,0}(M,M') = \mathrm{ext}_A^i(M,M');$$

y en general,

$$\underline{\mathrm{Ext}}_A^{i,j}(M,M') = \mathrm{ext}_A^i(M,M'[j]) = \mathrm{ext}_A^i(M[-j],M'). \tag{2.5.4}$$

Por definición, $\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,M') \subseteq \mathrm{Hom}_A(M,M')$. Supongamos que M es de tipo finito y sea $\{m_1, \cdots, m_t\}$ un conjunto de generadores de M como A-módulo; es decir, $M = Am_1 + \cdots Am_t$. Resulta evidente que cualquier morfismo $f \in \mathrm{Hom}_A(M,M')$ queda definido por los elementos $f(m_1), \cdots, f(m_t)$. Para cada i tal que $1 \leq i \leq t$, consideramos el morfismo

$$\begin{array}{rccc}
f_i: & Am_i & \to & M'\\
 & am_i & \mapsto & af(m_i).
\end{array}$$

Entonces, $f = f_1 + \cdots + f_t$ donde $f_i \in \mathrm{Hom}_A(M, M')_{\mathrm{gr}(f(m_i))-\mathrm{gr}(m_i)}$ para $1 \leq i \leq t$.

Luego, si M es de tipo finito, tenemos que

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, M') = \mathrm{Hom}_A(M, M')$$

y por lo tanto,

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(M, M') = \mathrm{Ext}^i_A(M, M').$$

Proposición 2.44 ([B2]). *El complejo $k \otimes_A \mathcal{P}$ tiene diferencial nula. En particular, el espacio vectorial graduado $\mathrm{Tor}^A_i(k, M)$ es isomorfo a $k \otimes_A P_i$ y el A-módulo graduado P_i es isomorfo a $A \otimes_k (\mathrm{Tor}^A_i(k, M))$ para todo i.*

Demostración. Sea $Z_i = \mathrm{Ker}\, d_i$. La diferencial $d_{i+1} : P_{i+1} \to P_i$ se factoriza, debido a la minimalidad, por el epimorfismo esencial $f_{i+1} : P_{i+1} \to Z_i$ y la inclusión $g_i : Z_i \hookrightarrow P_i$.

La composición

$$(1 \otimes f_i) \circ (1 \otimes g_i) : k \otimes_A Z_i \longrightarrow k \otimes_A P_i \longrightarrow k \otimes_A Z_{i-1}$$

es nula ya que $d_i(Z_i) = 0$. Como la f_i es un epimorfismo esencial, por la Proposición 2.4 $1 \otimes f_i$ es un isomorfismo. Luego, $1 \otimes g_i$ es nula y así, $d_{i+1} = (1 \otimes f_i) \circ (1 \otimes g_i)$ también es nula. Para calcular $\mathrm{Tor}^A_i(k, M)$, aplicamos el funtor $k \otimes_A -$ a la resolución y obtenemos que $\mathrm{Tor}^A_i(k, M) = \frac{\mathrm{Ker}\, 1 \otimes d_i}{\mathrm{Im}\, 1 \otimes d_{i+1}} = k \otimes_A P_i$ pues las diferenciales son nulas. De aquí resulta,

$$A \otimes_k (\mathrm{Tor}^A_i(k, M)) = A \otimes_k k \otimes_A P_i \simeq P_i.$$

□

Proposición 2.45 ([B2]). *El complejo $\underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathcal{P}, k)$ tiene diferencial nula. En particular, el espacio vectorial graduado $\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(M, k)$ es isomorfo a $\underline{\mathrm{Hom}}_A(P_i, k)$.*

Demostración. Sea $\phi : P_i \to k[n]$ un morfismo de A-módulos graduados. Queremos ver que ϕd_{i+1} es nula. Supongamos entonces que no. Como su imagen está contenida en k, $\phi \circ d_{i+1}$ tiene que ser suryectiva. Luego, $1 \otimes_A (\phi d_{i+1})$ también es suryectiva. Sin embargo,

$$1 \otimes_A (\phi d_{i+1}) = (1 \otimes \phi) \circ (1 \otimes_A d_{i+1}) = 0$$

porque $1_k \otimes_A d_{i+1} = 0$.

Finalmente vemos que

$$\mathrm{Ext}^i_A(M, k) = \mathrm{H}^i(\underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathcal{P}, k)) = \frac{\mathrm{Ker}\, 1_k \otimes_A d_i}{\mathrm{Im}\, 1_k \otimes_A d_{i-1}} = \underline{\mathrm{Hom}}_A(P_i, k).$$

□

Observación 2.46 ([B2]). *Como $P_i \simeq A \otimes_k (k \otimes_A P_i)$ como A-módulos (ver Proposition 2.3 de [B2]), vemos que*

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}_A(P_i, k) &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_A(A \otimes_k k \otimes_A P_i, k) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_k(k \otimes_A P_i, \mathrm{Hom}_A(A, k)) \\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_k(k \otimes_A P_i, k)\end{aligned}$$

donde el segundo isomorfismo es el de adjunción. Tenemos así que

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(M, k) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_k(k \otimes_A P_i, k) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_k(\mathrm{Tor}^A_i(k, M), k).$$

Los isomorfismos se deben a las Proposiciones 2.45 y 2.44 respectivamente. Concluimos que

$$\mathrm{Ext}^{i,j}_A(M, k) \simeq (\mathrm{Tor}^A_{i,-j}(k, M))^*$$

para $j \in \mathbb{Z}$.

Capítulo 3

Álgebras de Koszul

En este capítulo recordaremos la definición de álgebras de Koszul introducida por Priddy en su trabajo [P] de 1970, quien se inspiró para definirlas en una propiedad homológica interesante que Koszul probó a comienzos de la década del '50 para álgebras de polinomios. Enunciaremos resultados conocidos y ejemplos para los cuales citaremos referencias, ya que en este capítulo no incluiremos ninguna demostración ni resultado original.

Durante todo este capítulo A denotará una k-álgebra graduada de la forma $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$. Asímismo, cada vez que consideremos un módulo proyectivo, se sobreentenderá que es proyectivo en la categoría de A-módulos graduados.

3.1 Resultados generales

Definición 3.1 ([BGS1], [GMV1]). *Sea M un A-módulo graduado. Una resolución proyectiva graduada de M*

$$\cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0,$$

*se dice **lineal** si cada P_i está generado en grado i.*

A partir de ahora nos restringiremos al caso en que $A_0 = k \times \cdots \times k$. Esta consideración simplifica los cálculos pues es un resultado conocido que, bajo esta hipótesis, $\operatorname{rad}(A) = \bigoplus_{n \geq 1} A_n$.

Definición 3.2 (Ver por ejemplo [BGS1], [GMV1]). *Sea A un álgebra graduada generada en grados 0 y 1. A se dice de **Koszul** si $A/\operatorname{rad}(A) = A_0$ admite una resolución lineal como A-módulo.*

A lo largo de estos años se han probado varios resultados equivalentes a esta definición. El siguiente teorema enuncia alguno de ellos.

Teorema 3.3 ([BGS1]). *Un álgebra A es de Koszul si se satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes:*

(i) Su álgebra de Yoneda $E(A)$ está generada en grados 0 y 1, donde $E(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \operatorname{Ext}^n_A(A_0, A_0)$ con estructura multiplicativa dada por el producto de Yoneda.

(ii) A admite una resolución lineal como A^e-módulo. En este caso se dice que A es un A^e-módulo de Koszul.

(iii) *Si A es de dimensión finita, su carcaj asociado coindice con el carcaj asociado al álgebra $E(A)$.*

(iv) *A^{op} es de Koszul.*

(v) *$H_A(x)P_A(-x) = 1$, donde $H_A(x) = \sum_{n \geq 0} \dim_k(A_n)x^n$ y $P_A(x) = \sum_{n \geq 0} \dim_k(\operatorname{Ext}^n_A(k,k))x^n$ son las series de Hilbert y Poincaré de A, respectivamente.*

(vi) *$\operatorname{Ext}^{n,m}_A(A_0, A_0) = 0$ si $n \neq m$, donde n denota el grado cohomológico y $-m$ el grado heredado de la graduación de A.*

Enunciaremos a continuación algunos ejemplos conocidos de álgebras de Koszul, para más detalles nos referimos a los trabajos [BGS1], [F], [GMV1], entre otros.

Ejemplo.

(i) Las álgebras cuadráticas de dimensión global 2.

(ii) Las álgebras hereditarias.

(iii) Si A y B son álgebras de Koszul, entonces $A \otimes_k B$ también lo es.

(iv) El anillo de polinomios $k[x_1, \cdots, x_n]$, como caso particular de *(iii)*.

(v) Si A es de Koszul, entonces A^e también lo es, como caso particular de *(iii)*.

(vi) Sea $q \in k$ no nulo tal que no es raíz de la unidad. $A = \frac{k\langle x,y\rangle}{\langle x^2, xy+qyx, y^2\rangle}$ fue el primer contraejemplo conocido a la conjetura de Happel: "La dimensión global de un álgebra de dimensión finita sobre k es finita si y sólo si su dimensión cohomológica de Hochschild lo es" [BGMS]. En este trabajo, los autores muestran que $\operatorname{HH}^i(A) = 0$ para $i \geq 3$ mientras que A tiene dimensión global infinita. Sin embargo, la dimensión homológica de Hochschild de A es infinita. Este hecho origina una nueva conjetura: "La dimensión global de un álgebra es finita si y sólo si su dimensión homológica de Hochschild lo es". Esta conjetura fue probada para álgebras conmutativas, para álgebras monomiales y para álgebras truncadas (que en particular son álgebras monomiales) en cuyo caso la conjetura es también equivalente a que el carcaj del álgebra no posea ciclos orientados, (ver [Ci], [H]).

Es un resultado conocido que:

Proposición 3.4 ([BGS1])**.** *Si A es un álgebra de Koszul, entonces A es cuadrática.*

Sin embargo, la recíproca de este resultado no se satisface en general como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Consideremos el carcaj Q

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dr, "c"] & & \\
1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[ur, "b"] \arrow[dr, "d"'] & & 4 \arrow[r, "f"] & 6. \\
 & & 5 \arrow[ur, "e"'] & &
\end{tikzcd}$$

Sea A el álgebra cuadrática $A = \frac{kQ}{\langle ba, fe, cb-ed\rangle}$. Es conocido dentro de la bibliografía clásica del tema (ver por ejemplo [BGS1], [GMV1]) que la definición de álgebra de Koszul es equivalente al hecho que todo módulo simple sobre tal álgebra admite una resolución lineal (pues la resolución proyectiva minimal de una suma directa de módulos es la suma directa de las resoluciones de cada uno de los módulos).

Volviendo a nuestro caso, es simple verificar que se tiene la siguiente resolución proyectiva minimal del módulo simple S_1:

$$0 \longrightarrow P_6 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0. \tag{3.1.1}$$

Resulta claro que S_1 y P_1 están generados en grado 0, P_2 está generado en grado 1 y P_3 está generado en grado 3, mientras que P_6 está generado en grado 4. Luego, 3.1.1 no es lineal y por lo tanto, A no puede ser de Koszul.

Como la noción de álgebras de Koszul se restringe al caso de álgebras cuadráticas, Berger generaliza esta noción a álgebras N-homogéneas; es decir, álgebras de la forma $A = T(V)/I$ donde V es un k-espacio vectorial de dimensión finita e I es un ideal generado por elementos homogéneos de grado N.

Definición 3.5 ([B1]). *Un álgebra N-homogénea $A = T(V)/I$ se dice N-Koszul si para todo $i \geq 3$, el espacio vectorial graduado $\mathrm{Tor}_i^A(k,k)$ es puro en grado* $n(i) = \begin{cases} \frac{i}{2}N & \text{si } i \text{ es par,} \\ \frac{i-1}{2}N + 1 & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$

Por otro lado, en [GMMVZ] se da una generalización para la definición introducida por Berger:

Definición 3.6 ([GMMVZ]). *Un álgebra graduada $A = T_{A_0}(A_1)/I$ generada en grados 0 y 1 se dice N-Koszul si el A-módulo A_0 admite una resolución proyectiva graduada en la cual el i-ésimo módulo proyectivo está generado en grado* $\delta(i) = \begin{cases} \frac{i}{2}N & \text{si } i \text{ es par,} \\ \frac{i-1}{2}N + 1 & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$

Finalizamos este capítulo dando algunos ejemplos de álgebras N-Koszul que fueron extraidos de [GMMVZ].

Ejemplo.

(i) Sea A_0 un anillo semisimple y sea A_1 un A_0-bimódulo finitamente generado. Sea $A = T_{A_0}(A_1)/I$ donde I es un ideal generado por elementos de grado N. Si la dimensión global de A es 2, entonces A es N-Koszul.

(ii) Sea $A = kQ/I$ donde I es el ideal generado por todos los caminos de longitud N, para algún $N \geq 2$. A es un álgebra N-Koszul.

Capítulo 4

Álgebras (a, b)-Koszul

El objetivo de este capítulo es generalizar algunos resultados del trabajo [B1] para álgebras N-Koszul, extendiendo este concepto para álgebras que son cocientes de un álgebra tensorial sobre un espacio vectorial de dimensión finita por ciertos ideales.

Definiremos la noción de álgebra (a, b)-Koszul y construiremos una resolución proyectiva graduada minimal de k como módulo sobre un álgebra (a, b)-Koszul dada. Estudiaremos después condiciones equivalentes a la definición de álgebra (a, b)-Koszul, una de las cuales involucra la noción de módulo de torsión.

Otro concepto que aparecerá en este capítulo es la distributividad de retículos. Dedicaremos tres secciones a estudiar estructuras algebraicas, subreticulados distributivos de un reticulado modular y distributividad de reticulados propiamente dicha.

Luego probaremos que cierta familia de álgebras que notaremos $\tilde{A}_{a,b}$ está formada por álgebras (a, b)-Koszul. También analizaremos cómo la noción de álgebra (a, b)-Koszul repercute en el álgebra opuesta y en el álgebra dual de un álgebra dada.

Concluiremos con la construcción de una resolución de $\tilde{A}_{a,b}$ como $\tilde{A}_{a,b}$-bimódulo, lo cual permitirá calcular sus grupos de homología de Hochschild. Finalmente calcularemos las dimensiones de los k-espacios vectoriales $\mathrm{HH}_n(\tilde{A}_{a,b})$.

4.1 Notación

Durante todo el trabajo k denotará un cuerpo y V un k-espacio vectorial de dimensión finita con base $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_s\}$ fija. El producto tensorial $V^{\otimes n}$ con $n \geq 0$ será denotado $V^{(n)}$.

Definición 4.1. *Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita. Sean $S \subseteq V^{(n)}$ y $T \subseteq V^{(m)}$ subespacios para $n < m$ números naturales. Decimos que S y T son **excluyentes** si $\Big(\sum\limits_{i+j+n=m} V^{(i)} \otimes S \otimes V^{(j)}\Big) \cap T = 0$.*

Observación 4.2. *Decir que dos k-espacios vectoriales S y T son excluyentes es equivalente a decir que el ideal bilátero generado por S tiene intersección nula con T.*

Ejemplo. Sea $V = \langle x, y \rangle$. Si $S = \langle xy + yx \rangle$ y $T = \langle xy^2 + yxy \rangle$, entonces no son excluyentes. Tampoco son excluyentes los espacios $S = \langle x^3, yx^2 \rangle$ y $T = \langle x^3y + yx^2y \rangle$. Por el contrario, $S = \langle x^n \rangle$ y $T = \langle y^m \rangle$ sí son espacios excluyentes.

Fijamos dos números naturales a y b tales que $2 < a < b$ y un subespacio R del álgebra tensorial $T(V)$, tal que $R = R_a \oplus R_b$ donde R_a es un subespacio de $V^{(a)}$ y R_b es un subespacio de $V^{(b)}$. Supondremos de ahora en más que R_a y R_b son excluyentes.

El ideal bilátero $I = I(R)$ generado por R en el álgebra tensorial $T(V)$ es $\mathbb{N}_0$-graduado, es decir $I = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} I_n$, donde:

$$\begin{aligned}
I_n &= 0 && \text{si } n < a,\\
I_n &= \sum_{i+j+a=n} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} && \text{si } a \leq n < b,\\
I_n &= \sum_{i+j+a=n} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} + \sum_{h+l+b=n} V^{(h)} \otimes R_b \otimes V^{(l)} && \text{si } b \leq n.
\end{aligned}$$

Ejemplo. Sea $V = \langle x, y\rangle$ y sea $R = \langle x^3, y^5\rangle$. En este caso $a = 3$, $b = 5$, $R_a = \langle x^3\rangle$ y $R_b = \langle y^5\rangle$. Así,

$$\begin{aligned}
&I_0 = 0,\ \ I_1 = 0,\ \ I_2 = 0,\ \ I_3 = \langle x^3\rangle,\ \ I_4 = \langle x^4, yx^3, x^3y\rangle,\\
&I_5 = \langle x^5, xyx^3, yx^4, y^2x^3, x^4y, x^3yx, x^3y^2, yx^3y, y^5\rangle,\ \ \cdots
\end{aligned}$$

R se llama un **espacio de relaciones** del álgebra $A = T(V)/I$. El álgebra A es $\mathbb{N}_0$-graduada. Sus componentes son los subespacios vectoriales $A_n = V^{(n)}/I_n$. De este modo vemos que A está generada por V, y por lo tanto está generada en grado 1. Claramente, $A_n = V^{(n)}$ para $0 \leq n < a$.

4.2 Resoluciones puras del cuerpo de base

Nuestro objeto de estudio en este capítulo, consistirá como en el capítulo anterior, en álgebras de la forma $A = T(V)/I$ donde V es un espacio vectorial de dimensión finita con base $\mathcal{B}$ fijada, y R es un espacio de relaciones para I, de la forma $R = R_a \oplus R_b$ con $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $2 < a < b$. Además R_a y R_b son subespacios de $V^{(a)}$ y $V^{(b)}$ respectivamente tales que R_a y R_b son excluyentes.

Fijemos las siguientes notaciones:

- $R_a \subseteq V^{(a)}$ es un subespacio con base $\mathcal{B}_a = \{r_1, \cdots, r_p\}$, y cada r_i se escribe unívocamente como $r_i = \sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \lambda^i_j v_{j_1} \cdots v_{j_a}$ con $v_{j_h} \in \mathcal{B}$ (recordar que $\mathcal{B}$ es una base de V ya fijada) y $\lambda^i_j \in k$ para $1 \leq i \leq p$.

- $R_b \subseteq V^{(b)}$ es un subespacio con base $\mathcal{B}_b = \{s_1, \cdots, s_{p'}\}$, y cada s_i se escribe unívocamente como $s_i = \sum_{j=(j_1,\cdots,j_b)} \mu^i_j v_{j_1} \cdots v_{j_b}$ con $v_{j_h} \in \mathcal{B}$ y $\mu^i_j \in k$ para $1 \leq i \leq p'$.

Observación 4.3. *El concepto de espacio de relaciones según se da en [B1] involucra el concepto de minimalidad. Supongamos que $R = R_a \oplus R_b$ es un espacio de relaciones para el ideal I, y consideremos que R es un conjunto minimal de generadores. La condición de minimalidad implica que R_a y R_b son excluyentes. En efecto, supongamos que existe v no nulo tal que $v \in (\sum_{i+j+a=b} V^{(i)} \oplus R_a \oplus V^{(j)}) \cap R_b$. Entonces $v = \sum_{h=1}^{p'} \lambda_h s_h$ con $\lambda_h \in k$, $1 \leq h \leq p'$, no todos nulos. Sea $\lambda_{h'} \neq 0$, resulta que $s_{h'} = v - \frac{1}{\lambda_{h'}} \sum_{\substack{h=1\\ h \neq h'}}^{p'} \lambda_h s_h$ y como v pertenece al ideal bilátero generado por R_a, R no es un conjunto minimal de generadores.*

Definición 4.4. *Sea M un A-módulo a izquierda $\mathbb{Z}$-graduado y sea*

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0 \tag{4.2.1}$$

*una resolución proyectiva graduada minimal del A-módulo M. Decimos que (4.2.1) es una **resolución proyectiva pura** si para algún $s \in \mathbb{N}$ fijo, vale que P_n es s-puro, para todo $n \geq 0$. Es decir, para cada P_n existen enteros $t_1, \cdots, t_s$ (con s fijo) tales que P_n está generado en grados $t_1, \cdots, t_s$.*

Observación 4.5. *Todo módulo admite una resolución proyectiva pura. Esta resolución se puede tomar minimal en la categoría de A-módulos graduados. (Ver [GMV1].)*

Ahora queremos saber cómo construir una resolución proyectiva pura del módulo trivial k. La proyección natural $\epsilon : A \to k$ es una cápsula proyectiva de k y $\operatorname{Ker}\epsilon = \bigoplus_{n \geq 1} A_n$, que es puro en grado 1 con $(\operatorname{Ker}\epsilon)_1 = V$.

En las siguientes secciones describiremos los núcleos de los morfismos de una resolución de k como A-módulo.

4.2.1 Descripción de $\operatorname{Ker}\delta_1$

El morfismo $A \otimes V \to \operatorname{Ker}\epsilon$ inducido por la inclusión $V \hookrightarrow \operatorname{Ker}\epsilon$ (es decir, el morfismo lineal $\overline{\alpha}\otimes v \mapsto \overline{\alpha v}$) es una cápsula proyectiva de $\operatorname{Ker}\epsilon$. Si incluimos $\operatorname{Ker}\epsilon$ en A, conseguimos $\delta_1 : A\otimes V \to A$ definido por $\delta_1(\overline{\alpha} \otimes v) = \overline{\alpha v}$ y extendido linealmente, donde $v \in V$ y $\overline{\alpha}$ denota la clase en A del elemento $\alpha \in T(V)$. Claramente $(\operatorname{Ker}\delta_1)_n = 0$ para $n < a$ pues en ese caso $\alpha v \notin I$.

Comenzaremos por estudiar en detalle el módulo $\operatorname{Ker}\delta_1$ y para ello miraremos grado a grado.

Primer caso: grado $n = a$.

Tenemos que $(\operatorname{Ker}\delta_1)_a \subseteq A_{a-1} \otimes V = V^{(a-1)} \otimes V$. Para familias finitas $(\overline{\alpha_i})$ y (w_i) con $\overline{\alpha_i} \in A_{a-1}$ y $w_i \in V$, si $\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes w_i \in \operatorname{Ker}\delta_1$ entonces $0 = \delta_1\big(\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes w_i\big) = \overline{\sum_i \alpha_i w_i}$ lo cual implica que $\sum_i \alpha_i w_i \in R_a$ debido a que este elemento tiene grado a. Si bien $\sum_i \alpha_i w_i \in V^{(a)}$, hemos omitido los tensores.

Dados $\beta_i \in A_{a-1}$, si $\overline{\alpha_i} = \overline{\beta_i}$ entonces $\overline{\alpha_i - \beta_i} = 0$, con lo cual $\alpha_i = \beta_i$, pues tienen grado $a-1$. Definimos ahora los morfismos k-lineales φ y ψ siguientes:

$$\begin{array}{ccc}
(\operatorname{Ker}\delta_1)_a & \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} & R_a \\
\\
\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes w_i & \longmapsto & \sum_i \alpha_i w_i, \\
\sum_{j = (j_1, \cdots, j_a)} \overline{\lambda^i_j v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a} & \longleftarrow & r_i.
\end{array}$$

La aplicación φ está bien definida por lo anterior y la buena definición de ψ se debe a que $\delta_1\big(\sum_{j = (j_1, \cdots, j_a)} \overline{\lambda^i_j v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a}\big) = \overline{r_i} = 0$ en A.

Veamos ahora que las composiciones son las identidades correspondientes.

- En primer lugar, $\varphi(\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes w_i) = \sum_i \alpha_i w_i$ y como $\sum_i \alpha_i w_i \in R_a$, existen únicos $\gamma_l \in k$ tales que $\sum_i \alpha_i w_i = \sum_{l=1}^{p} \gamma_l r_l = \sum_{l=1}^{p} \gamma_l \big(\sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \lambda_j^l v_{j_1} \cdots v_{j_a}\big)$ y teniendo en cuenta los grados, $\psi(\sum_i \alpha_i w_i) = \sum_{\substack{l=1 \\ j=(j_1,\cdots,j_a)}}^{p} \overline{\gamma_l \lambda_j^l v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a} = \sum_i \overline{\alpha_i} \otimes w_i$.
- Por otro lado,
$$r_i \overset{\psi}{\mapsto} \sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \overline{\lambda_j^i v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a} \overset{\varphi}{\mapsto} r_i.$$

Luego, vimos que como espacios vectoriales,
$$(\operatorname{Ker} \delta_1)_a \simeq R_a.$$

Observemos que en realidad, este isomorfismo es una igualdad que describe de forma distinta al mismo elemento.

Segundo caso: grado n tal que $a < n < b$.

Tenemos que $(\operatorname{Ker} \delta_1)_n \subseteq A_{n-1} \otimes V = \frac{V^{(n-1)}}{I_{n-1}} \otimes V$. Si $\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes w_i \in (\operatorname{Ker} \delta_1)_n$, $0 = \delta_1\big(\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes w_i\big) = \overline{\sum_i \alpha_i w_i}$ en A y como este elemento tiene grado n, $\sum_i \alpha_i w_i$ pertenece a I_n. Vimos que

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i+j+a=n} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} = \sum_{i+j+a=n-1} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V + V^{(n-a)} \otimes R_a \\ &= I_{n-1} \otimes V + V^{(n-a)} \otimes R_a. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Definimos ahora el morfismo
$$\begin{array}{ccc} (\operatorname{Ker} \delta_1)_n & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & \frac{I_{n-1} \otimes V + V^{(n-a)} \otimes R_a}{I_{n-1} \otimes V} \\ \sum_i \overline{\alpha_i} \otimes w_i & \longmapsto & [\sum_i \alpha_i w_i]. \end{array}$$

Esta aplicación está bien definida por (4.2.2) y porque si $\overline{\alpha_i} = \overline{\beta_i}$ entonces $\alpha_i - \beta_i \in I_{n-1}$ lo que implica que $[\alpha_i \otimes w_i - \beta_i \otimes w_i] = 0$. Por lo tanto, $\overline{\varphi}(\overline{\alpha_i} \otimes w_i) = [\alpha_i w_i] = [\beta_i w_i] = \overline{\varphi}(\overline{\beta_i} \otimes w_i)$.
Definimos además la aplicación
$$I_{n-1} \otimes V + V^{(n-a)} \otimes R_a \xrightarrow{\psi} (\operatorname{Ker} \delta_1)_n$$

como la restricción del morfismo k-lineal
$$\begin{array}{ccc} V^{(n)} & \to & A_{n-1} \otimes V \\ v_{i_1} \cdots v_{i_n} & \mapsto & \overline{v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}}} \otimes v_{i_n}. \end{array}$$

Para ver que $\operatorname{Im} \psi \subseteq \operatorname{Ker} \delta_1$, sea $v_{i_1} \cdots v_{i_{n-a}} \otimes r_i \in V^{(n-a)} \otimes R_a$, $\psi(v_{i_1} \cdots v_{i_{n-a}} \otimes r_i) = \sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \overline{\lambda_j^i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-a}} v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a}$, entonces si aplicamos la diferencial, obtenemos que $\delta_1\big(\sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \overline{\lambda_j^i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-a}} v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a}\big) = \overline{v_{i_1} \cdots v_{i_{n-a}} r_i} = 0$ en A pues $r_i \in R_a$.

Sea ahora $\sum_i \gamma_i \iota_i \otimes v_i \in I_{n-1} \otimes V$, podemos escribir a este elemento de la siguiente manera $\sum_i \gamma_i (\sum_{j=(j_1,\cdots,j_{n-1})} \eta_j^i v_{j_1} \cdots v_{j_{n-1}}) \otimes v_i$, entonces

$$\psi(\sum_i \gamma_i (\sum_{j=(j_1,\cdots,j_{n-1})} \eta_j^i v_{j_1} \cdots v_{j_{n-1}}) \otimes v_i) =$$

$$\sum_i \overline{\gamma_i (\sum_{j=(j_1,\cdots,j_{n-1})} \eta_j^i v_{j_1} \cdots v_{j_{n-1}})} \otimes v_i = \sum_i \overline{\gamma_i \iota_i} \otimes v_i = 0.$$

Podemos considerar $\overline{\psi}$, la aplicación inducida por ψ en el cociente $\frac{I_{n-1}\otimes V + V^{(n-a)}\otimes R_a}{I_{n-1}\otimes V}$. Veamos que las composiciones $\overline{\varphi}\circ\overline{\psi}$ y $\overline{\psi}\circ\overline{\varphi}$ son las respectivas identidades. Nuevamente, observamos que en realidad tenemos una igualdad.

- Sean $\gamma_h^l, \eta_t, \lambda_q^t \in k$, $\iota_j \in I_{n-1}$, $v_{h_u} \in \mathcal{B}$ y $r_t \in R_a$. Observemos antes de realizar el cálculo correspondiente que si $\sum_l x_l \otimes y_l \in V^{(n-a)} \otimes R_a$ entonces existen $\gamma_h^l, \eta_t, \lambda_q^t \in k$ y $v_{h_1}, \cdots, v_{h_{n-a}}, v_{q_1}, \cdots, v_{q_a} \in V$ tales que $\sum_l x_l \otimes y_l = \sum_{\substack{l,t \\ h=(h_1,\cdots,h_{n-a}) \\ q=(q_1,\cdots,q_a)}} \gamma_h^l \eta_t \lambda_q^t v_{h_1} \cdots v_{h_{n-a}}$ $\otimes v_{q_1} \cdots v_{q_a}$, donde las sumas son finitas.
  Veamos ahora las composiciones. Dado $\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes w_i \in (\operatorname{Ker} \delta_1)_n$, como $\overline{\varphi}(\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes w_i) \in \frac{I_{n-1}\otimes V + V^{(n-a)}\otimes R_a}{I_{n-1}\otimes V}$, existen $\gamma_j, \eta_t, \mu_h^l \in k$, $\iota_j \in I_{n-1}$ y $r_t = \sum_{q=(q_1,\cdots,q_a)} \lambda_q^t v_{q_1} \cdots v_{q_a} \in R_a$ tales que:

$$\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes w_i \overset{\overline{\varphi}}{\mapsto} [\sum_i \alpha_i w_i] = [\sum_j \gamma_j \iota_j \otimes w_j + \sum_{\substack{l,t \\ h=(h_1,\cdots,h_{n-a}) \\ q=(q_1,\cdots,q_a)}} \mu_h^l \eta_t \lambda_q^t v_{h_1} \cdots v_{h_{n-a}} \otimes v_{q_1} \cdots v_{q_a}]$$

$$= [\sum_{\substack{l,t \\ h=(h_1,\cdots,h_{n-a}) \\ q=(q_1,\cdots,q_a)}} \mu_h^l \eta_t \lambda_q^t v_{h_1} \cdots v_{h_{n-a}} \otimes v_{q_1} \cdots v_{q_a}] \overset{\overline{\psi}}{\mapsto}$$

$$\sum_{\substack{l,t \\ h=(h_1,\cdots,h_{n-a}) \\ q=(q_1,\cdots,q_a)}} \overline{\mu_h^l \eta_t \lambda_q^t v_{h_1} \cdots v_{h_{n-a}} v_{q_1} \cdots v_{q_{a-1}}} \otimes v_{q_a}.$$

  En el caso en que fijado un i, $\alpha_i = \iota_j$ para algún j, tendríamos que $\overline{\alpha_i} = 0$. Por lo tanto, $\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes v_i = \sum_{\substack{l,t \\ h=(h_1,\cdots,h_{n-a}) \\ q=(q_1,\cdots,q_a)}} \overline{\mu_h^l \eta_t \lambda_q^t v_{h_1} \cdots v_{h_{n-a}} v_{q_1} \cdots v_{q_{a-1}}} \otimes v_{q_a}$ y así $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}$ es la identidad.
- Por otro lado, sea $v_{i_1} \cdots v_{i_{n-a}} \otimes r_i \in V^{(n-a)} \otimes R_a$ donde $r_i = \sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \lambda_j^i v_{j_1} \cdots v_{j_a}$ como antes, entonces

$$[v_{i_1} \cdots v_{i_{n-a}} \otimes r_i] \overset{\overline{\psi}}{\mapsto} \sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \overline{\lambda_j^i v_{i_1} \cdots v_{i_{n-a}} v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a} \overset{\overline{\varphi}}{\mapsto} [v_{i_1} \cdots v_{i_{n-a}} r_i].$$

  Sea $\iota \otimes v \in I_{n-1} \otimes V$, tenemos que $[\iota \otimes v] = 0$ y $\overline{\psi}$ se anula trivialmente en este elemento.

Luego, vimos que

$$(\operatorname{Ker}\delta_1)_n \simeq \frac{I_{n-1}\otimes V + V^{(n-a)}\otimes R_a}{I_{n-1}\otimes V}.$$

Tercer caso: grado $n = b$.

Tenemos que $(\operatorname{Ker}\delta_1)_b \subseteq A_{b-1}\otimes V = \frac{V^{(b-1)}}{I_{b-1}}\otimes V$. Notemos además que en I_{b-1} no aparece R_b por cuestiones de grado. Si $\sum_i \overline{\alpha_i}\otimes w_i \in (\operatorname{Ker}\delta_1)_b$, $0 = \delta_1\big(\sum_i \overline{\alpha_i}\otimes w_i\big) = \overline{\sum_i \alpha_i w_i}$ en A y como este elemento tiene grado b, deducimos que

$$\sum_i \alpha_i w_i \in I_b = \sum_{i+j+a=b} V^{(i)}\otimes R_a\otimes V^{(j)} + R_b = I_{b-1}\otimes V + V^{(b-a)}\otimes R_a + R_b. \qquad (4.2.3)$$

Definimos ahora $\overline{\varphi} : (\operatorname{Ker}\delta_1)_b \longrightarrow \frac{I_{b-1}\otimes V + V^{(b-a)}\otimes R_a + R_b}{I_{b-1}\otimes V}$ como sigue: si $\sum_i \overline{\alpha_i}\otimes w_i \in (\operatorname{Ker}\delta_1)_b$, $\overline{\varphi}\big(\sum_i \overline{\alpha_i}\otimes w_i\big) := [\sum_i \alpha_i w_i]$. Si $\overline{\alpha_i} = \overline{\beta_i}$ entonces $\alpha_i - \beta_i \in I_{b-1}$ lo que implica que $[\alpha_i w_i] = [\beta_i w_i]$. Usando este hecho y (4.2.3), $\overline{\varphi}$ está bien definida.

Definimos además $\psi : I_{b-1}\otimes V + V^{(b-a)}\otimes R_a + R_b \longrightarrow (\operatorname{Ker}\delta_1)_b$ como la restricción del morfismo k-lineal:

$$\begin{array}{ccc} V^{(n)} & \to & A_{n-1}\otimes V \\ v_{i_1}\cdots v_{i_n} & \mapsto & \overline{v_{i_1}\cdots v_{i_{n-1}}}\otimes v_{i_n}. \end{array}$$

Como R_a y R_b son excluyentes, tenemos que $(V^{(b-a)}\otimes R_a)\cap R_b = 0$. Más aún, análogamente a lo hecho para el segundo caso, es claro que ψ se anula en $(I_{b-1}\otimes V)$. Notemos que

- $\delta_1\big(\sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \overline{\lambda^i_j v_{i_1}\cdots v_{i_{b-a}} v_{j_1}\cdots v_{j_{a-1}}}\otimes v_{j_a}\big) = \overline{v_{i_1}\cdots v_{i_{b-a}} r_i} = 0$ en A pues $r_i \in R_a$.
- $\delta_1\big(\sum_{h=(h_1,\cdots,h_b)} \overline{\mu^i_h v_{h_1}\cdots v_{h_{b-1}}}\otimes v_{h_b}\big) = \overline{s_i} = 0$ en A pues $s_i \in R_b$.

Luego, ψ está bien definida, $\operatorname{Im}\psi \subseteq \operatorname{Ker}\delta_1$ y ψ induce una aplicación en el cociente por $I_{n-1}\otimes V$ que notaremos por $\overline{\psi}$.

Veamos finalmente que las composiciones $\overline{\varphi}\circ\overline{\psi}$ y $\overline{\psi}\circ\overline{\varphi}$ son las identidades.

- Sean $\mu^l_h, \eta_t, \lambda^t_q, \rho_c, \gamma^c_m \in k$, $v_{h_u}, v_{p_{u'}} \in \mathcal{B}$, $r_t \in R_a$ y $s_c \in R_b$. Dado $\sum_i \overline{\alpha_i}\otimes w_i \in (\operatorname{Ker}\delta_1)_b$, sabemos que $\sum_i \alpha_i w_i \in I_{b-1}\otimes V + V^{(b-a)}\otimes R_a + R_b$ pero como $\overline{\varphi}$ toma valores en el cociente de este espacio por $I_{b-1}\otimes V$, es claro que, $\pi\big(\sum_i \alpha_i w_i\big) = [\sum_i \alpha_i w_i] = [\sum_{\substack{l,t \\ h=(h_1,\cdots,h_{b-a})}} \mu^l_h v_{h_1}\cdots v_{h_{b-a}}\otimes \eta_t r_t + \sum_c \rho_c s_c]$ y utilizando las escrituras de los elementos r_t y s_c en las bases elegidas para R_a y R_b respectivamente, tenemos lo siguiente:

$$\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes w_i \overset{\overline{\varphi}}{\mapsto} [\sum_i \alpha_i w_i] = [\sum_{\substack{l,\,t \\ h=(h_1,\cdots,h_{b-a})}} \mu_h^l v_{h_1}\cdots v_{h_{b-a}} \otimes \eta_t r_t + \sum_c \rho_c s_c]$$

$$= [\sum_{\substack{l,\,t \\ h=(h_1,\cdots,h_{b-a}) \\ q=(q_1,\cdots,q_a)}} \mu_h^l \eta_t \lambda_q^t v_{h_1}\cdots v_{h_{b-a}} \otimes v_{q_1}\cdots v_{q_a} + \sum_{\substack{c \\ m=(m_1,\cdots,m_b)}} \rho_c \gamma_m^c v_{m_1}\cdots v_{m_b}]$$

$$\overset{\overline{\psi}}{\mapsto} \sum_{\substack{l,\,t \\ h=(h_1,\cdots,h_{b-a}) \\ q=(q_1,\cdots,q_a)}} \overline{\mu_h^l \eta_t \lambda_q^t v_{h_1}\cdots v_{h_{b-a}} v_{q_1}\cdots v_{q_{a-1}}} \otimes v_{q_a} +$$

$$\sum_{\substack{c \\ m=(m_1,\cdots,m_b)}} \overline{\rho_c \gamma_m^c v_{m_1}\cdots v_{m_{b-1}}} \otimes v_{m_b} = \sum_i \overline{\alpha_i} \otimes w_i.$$

Usando en la última igualdad que si $\alpha_i \in I_{b-1}$, su clase se anula.

- Por otro lado, si $v_{i_1}\cdots v_{i_{b-a}} \otimes r_i \in V^{(b-a)} \otimes R_a$ y $s_i \in R_b$ tenemos lo siguiente:

$$[v_{i_1}\cdots v_{i_{b-a}} \otimes r_i] \overset{\overline{\psi}}{\mapsto} \sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \overline{\lambda_j^i v_{i_1}\cdots v_{i_{b-a}} v_{j_1}\cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a} \overset{\overline{\varphi}}{\mapsto} [v_{i_1}\cdots v_{i_{b-a}} r_i]$$

y

$$[s_i] \overset{\overline{\psi}}{\mapsto} \sum_{h=(h_1,\cdots,h_b)} \overline{\mu_h^i v_{h_1}\cdots v_{h_{b-1}}} \otimes v_{h_b} \overset{\overline{\varphi}}{\mapsto} [s_i].$$

Luego, tenemos el siguiente isomorfismo de k-espacios vectoriales:

$$(\mathrm{Ker}\,\delta_1)_b \simeq \frac{I_{b-1}\otimes V + V^{(b-a)}\otimes R_a + R_b}{I_{b-1}\otimes V}.$$

Cuarto caso: grado $n > b$.

Se trata del mismo modo, pero obviaremos los detalles ya que se repiten los mismos argumentos. Tenemos entonces que $(\mathrm{Ker}\,\delta_1)_n \subseteq A_{n-1}\otimes V = \frac{V^{(n-1)}}{I_{n-1}} \otimes V$. Observemos que en I_{n-1} ahora aparece R_b.

De modo análogo a lo hecho anteriormente, se puede ver que $(\mathrm{Ker}\,\delta_1)_n$ es isomorfo a $\frac{I_{n-1}\otimes V + V^{(n-a)}\otimes R_a + V^{(n-b)}\otimes R_b}{I_{n-1}\otimes V}$.

Resumimos la información obtenida hasta el momento:

- $(\mathrm{Ker}\,\delta_1)_n = 0$ si $n < a$,
- $(\mathrm{Ker}\,\delta_1)_a \simeq R_a$,
- $(\mathrm{Ker}\,\delta_1)_n \simeq \frac{I_{n-1}\otimes V + V^{(n-a)}\otimes R_a}{I_{n-1}\otimes V}$ si $a < n < b$,
- $(\mathrm{Ker}\,\delta_1)_b \simeq \frac{I_{b-1}\otimes V + V^{(b-a)}\otimes R_a + R_b}{I_{b-1}\otimes V}$,

- $(\mathrm{Ker}\,\delta_1)_n \simeq \frac{I_{n-1}\otimes V + V^{(n-a)}\otimes R_a + V^{(n-b)}\otimes R_b}{I_{n-1}\otimes V}$ si $n > b$.

El lema que enunciaremos a continuación es una versión de un resultado para el caso no graduado probado en [B5], que relaciona los generadores de un ideal con el segundo elemento de una resolución minimal. En dicho trabajo las álgebras consideradas son álgebras de caminos asociadas a carcajes sin ciclos orientados.

Lema 4.6. *El A-módulo $\mathrm{Ker}\,\delta_1$ es 2-puro en grados a y b.*

Demostración. Sabemos que $\mathrm{Ker}\,\delta_1$ es 2-puro en grados a y b si y sólo si existen módulos M_a y M_b concentrados en grados a y b respectivamente tales que $\mathrm{Ker}\,\delta_1 = AM_a + AM_b$. Definimos la siguiente aplicación:

$$A \otimes R_a \oplus A \otimes R_b \xrightarrow{\rho} \mathrm{Ker}\,\delta_1$$

para $\overline{\alpha_i}, \overline{\beta_h} \in A$, $v_{j_l}, v_{t_{l'}} \in V$ con $1 \le l \le a$ y $1 \le l' \le b$, dada por

$$\rho\left(\sum_{\substack{i\\ j=(j_1,\cdots,j_a)}} \overline{\alpha_i}\lambda_j^i v_{j_1}\cdots v_{j_a} + \sum_{\substack{h\\ t=(t_1,\cdots,t_b)}} \overline{\beta_h}\mu_t^h v_{t_1}\cdots v_{t_b}\right) =$$
$$\sum_{\substack{i\\ j=(j_1,\cdots,j_a)}} \overline{\lambda_j^i\alpha_i v_{j_1}\cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a} + \sum_{\substack{h\\ t=(t_1,\cdots,t_b)}} \overline{\mu_t^h\beta_h v_{t_1}\cdots v_{t_{b-1}}} \otimes v_{t_b}.$$

Si calculamos

$$\delta_1\left(\sum_{\substack{i\\ j=(j_1,\cdots,j_a)}} \overline{\lambda_j^i\alpha_i v_{j_1}\cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a} + \sum_{\substack{h\\ t=(t_1,\cdots,t_b)}} \overline{\mu_t^h\beta_h v_{t_1}\cdots v_{t_{b-1}}} \otimes v_{t_b}\right)$$
$$= \sum_{\substack{i\\ j=(j_1,\cdots,j_a)}} \overline{\lambda_j^i\alpha_i v_{j_1}\cdots v_{j_{a-1}}v_{j_a}} + \sum_{\substack{h\\ t=(t_1,\cdots,t_b)}} \overline{\mu_t^h\beta_h v_{t_1}\cdots v_{t_{b-1}}v_{t_b}}$$
$$= \overline{\sum_i \alpha_i \sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \lambda_j^i v_{j_1}\cdots v_{j_a}} + \overline{\sum_h \beta_h \sum_{t=(t_1,\cdots,t_b)} \mu_t^h v_{t_1}\cdots v_{t_b}} = 0.$$

La nulidad de este elemento se debe a que el primer sumando pertenece a $A \otimes R_a$ y el segundo a $A \otimes R_b$. Luego, ρ está bien definida.

Queremos definir ahora una inversa para ρ, $\theta : \mathrm{Ker}\,\delta_1 \to A \otimes R_a \oplus A \otimes R_b$. Lo hacemos grado a grado:

- si $n < a$, $(\mathrm{Ker}\,\delta_1)_n = 0$,
- si $n = a$, $(\mathrm{Ker}\,\delta_1)_a \simeq R_a$ y definimos $\theta(r) := \overline{1}r \in A_0 \otimes R_a$,
- si $a < n < b$,

$$(\mathrm{Ker}\,\delta_1)_n \simeq \frac{I_{n-1}\otimes V + V^{(n-a)}\otimes R_a}{I_{n-1}\otimes V} \simeq \frac{V^{(n-a)}\otimes R_a}{(I_{n-1}\otimes V)\cap(V^{(n-a)}\otimes R_a)} = A_{n-a}\otimes R_a,$$

- si $n \geq b$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{Ker}\delta_1)_n &\simeq \frac{I_{n-1}\otimes V + V^{(n-a)}\otimes R_a + V^{(n-b)}\otimes R_b}{I_{n-1}\otimes V}\\
&\simeq \frac{V^{(n-a)}\otimes R_a \oplus V^{(n-b)}\otimes R_b}{(I_{n-1}\otimes V)\cap (V^{(n-a)}\otimes R_a \oplus V^{(n-b)}\otimes R_b)} = A_{n-a}\otimes R_a \oplus A_{n-b}\otimes R_b.
\end{aligned}
$$

Las sumas en esta última expresión son directas ya que R_a y R_b son excluyentes. Por las expresiones obtenidas para $\operatorname{Ker}\delta_1$ en cada grado, resulta que es 2-puro en grados a y b. □

4.2.2 Descripción de $\operatorname{Ker}\delta_2$, condiciones extras y ternas distributivas

Nuestro próximo objetivo es definir una cápsula proyectiva para el A-módulo $\operatorname{Ker}\delta_1$, cuyo epimorfismo en $\operatorname{Ker}\delta_1$ denotaremos δ_2. Luego, buscaremos condiciones para que el A-módulo $\operatorname{Ker}\delta_2$ sea 2-puro.

El morfismo $A\otimes R \to \operatorname{Ker}\delta_1$ inducido por la inclusión $R \hookrightarrow \operatorname{Ker}\delta_1$ es una cápsula proyectiva para $\operatorname{Ker}\delta_1$. Como $\operatorname{Ker}\delta_1$ está incluido en $A\otimes V$, al restringir a $\operatorname{Ker}\delta_1$ el morfismo k-lineal que envía un tensor elemental $\overline{\alpha}\otimes v\otimes w$ donde $v\in V^{(a-1)}$ o $v\in V^{(b-1)}$ y $w\in V$, al elemento $\overline{\alpha v}\otimes w$ obtenemos $\delta_2 : A\otimes R \to A\otimes V$. Construimos así el comienzo de una resolución de la forma

$$A\otimes R \xrightarrow{\delta_2} A\otimes V \xrightarrow{\delta_1} A\otimes k \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0.$$

Observemos que k y V están concentrados en grados 0 y 1 respectivamente y que R es 2-concentrado en grados a y b. Definimos ahora:

$$
\begin{aligned}
J_n^a &= \bigcap_{i+j+a=n} V^{(i)}\otimes R_a\otimes V^{(j)} && \text{para } n\geq a,\\
J_n^b &= \bigcap_{s+t+b=n} V^{(s)}\otimes R_b\otimes V^{(t)} && \text{para } n\geq b.
\end{aligned}
$$

Notemos que J_n^a y J_n^b están concentrados en grado n.

Lema 4.7. *Sean $\lambda_i\in k$, $x_i\in V^{(n)}\setminus\{0\}$ y $\mathcal{B}=\{v_1,\cdots,v_t\}$ una base de un k espacio vectorial W. Si $\sum_{i=1}^{m}\overline{\lambda_i x_i}\otimes w_i = 0$ en $A_n\otimes V$, con $w_i\in\mathcal{B}$, entonces $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\in I_n$.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{i=1}^{m}\overline{\lambda_i x_i}\otimes w_i = 0$. Si existe $v_j\in\mathcal{B}$ tal que $w_i = v_j$ para todo i, $1\leq i\leq m$, resulta $0=\sum_{i=1}^{m}\overline{\lambda_i x_i}\otimes w_i = \big(\sum_{i=1}^{m}\overline{\lambda_i x_i}\big)\otimes v_j$ y deducimos que $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\in I_n$.

En caso contrario, vemos lo siguiente:

$$0=\sum_{i=1}^{m}\overline{\lambda_i x_i}\otimes w_i = \sum_{\{i/w_i=v_1\}}\overline{\lambda_i x_i}\otimes v_1+\cdots+\sum_{\{i/w_i=v_t\}}\overline{\lambda_i x_i}\otimes v_t.$$

Por la independencia lineal, notemos que no se pueden cancelar términos de una suma con los de otra, es decir que cada suma se anula por separado. Entonces, $\sum_{\{i/w_i=v_1\}}\lambda_i x_i,\cdots,\sum_{\{i/w_i=v_t\}}\lambda_i x_i\in I_n$ por el caso anterior. Luego, $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\in I_n$. □

Vemos que $\operatorname{Ker}\delta_2$ se anula en grados menores que a pues $A\otimes R \subseteq \bigoplus_{n\geq a}(A\otimes R)_n$. Veamos qué sucede en grado a: para ello, sea $\sum_i \gamma_i\otimes r_i$ con $\gamma_i\in k$ y $r_i\in R_a$ tal que $0=\delta_2\big(\sum_i\gamma_i\otimes r_i\big) = \sum_{\substack{i\\ j=(j_1,\cdots,j_a)}} \overline{\gamma_i\lambda^i_j v_{j_1}\cdots v_{j_{a-1}}}\otimes v_{j_a}\in A_{a-1}\otimes V = V^{(a-1)}\otimes V$. Entonces $\sum_i\gamma_i\otimes r_i=0$.

Queremos analizar ahora $(\operatorname{Ker}\delta_2)_n$ para $n\geq a+1$.

- Si $n=a+1$, sean $\gamma_i\in k$, $z_i\in V$, $x_i\in R_a$, $x_i=\sum_j\eta^i_j r_j$. Observemos que incluso en el caso $b=a+1$, no puede aparecer R_b en $(\operatorname{Ker}\delta_2)_{a+1}$. Si $\sum_i\overline{\gamma_i z_i}\otimes x_i\in(\operatorname{Ker}\delta_2)_{a+1}$,

$$0=\delta_2\big(\sum_i\overline{\gamma_i z_i}\otimes x_i\big) = \sum_{\substack{i,j\\ h=(h_1,\cdots,h_a)}} \overline{\gamma_i\eta^i_j\lambda^j_h z_i v_{h_1}\cdots v_{h_{a-1}}}\otimes v_{h_a}\in A_a\otimes V=\frac{V^{(a)}}{R_a}\otimes V.$$

  Si $\overline{z_i v_{h_1}\cdots v_{h_{a-1}}} = \overline{z'_i v_{h'_1}\cdots v_{h'_{a-1}}}$, se tiene que $z_i v_{h_1}\cdots v_{h_{a-1}} - z'_i v_{h'_1}\cdots v_{h'_{a-1}}\in R_a$ y para que haya cancelaciones debe ser $v_{h_a}=v_{h'_a}$. Entonces, usando el Lema 2.25, resulta que $\sum_{\substack{i,j\\ h=(h_1,\cdots,h_a)}}\gamma_i\eta^i_j\lambda^j_h z_i v_{h_1}\cdots v_{h_{a-1}}\in R_a$. Por lo tanto, $(\operatorname{Ker}\delta_2)_{a+1}\subseteq (V\otimes R_a)\cap(R_a\otimes V) = J^a_{a+1}$. La inclusión en el otro sentido es trivial porque

$$\delta_2\big(\sum_i\overline{\gamma_i x_i}\otimes z_i\big) = \sum_{\substack{i,j\\ h=(h_1,\cdots h_a)}}\overline{\gamma_i\eta^i_j\lambda^j_h v_{h_1}\cdots v_{h_a}}\otimes z_i = 0,$$

  pues $\sum_{\substack{i,j\\ h=(h_1,\cdots,h_a)}}\gamma_i\eta^i_j\lambda^j_h v_{h_1}\cdots v_{h_a}$ pertenece a R_a.

- Sea $2\leq m\leq a-1$ y $n=a+m\leq b$, tenemos que $(\operatorname{Ker}\delta_2)_n\subseteq A_m\otimes R_a=\frac{V^{(m)}}{I_m}\otimes R_a = V^{(m)}\otimes R_a$. Si $n=b$ y $\sum_i\gamma_i s_i\in R_b$, donde s_i son elementos en la base fijada para R_b (recordar que $1\leq i\leq p'$, en lo que sigue omitiremos estos límites para simplificar la notación), $0=\delta_2\big(\sum_i\gamma_i s_i\big) = \sum_{\substack{i\\ j=(j_1,\cdots,j_b)}}\overline{\gamma_i\mu^i_j v_{j_1}\cdots v_{j_{b-1}}}\otimes v_{j_b}$ y así, $\sum_{\substack{i\\ j=(j_1,\cdots,j_b)}}\overline{\gamma_i\mu^i_j v_{j_1}\cdots v_{j_{b-1}}}\in I_{n-1}$, por el Lema 4.7. Observar que R_b no aparece en I_{n-1} y que R_a y R_b son excluyentes por hipótesis general. Por lo tanto, $A_0\otimes R_b\cap(\operatorname{Ker}\delta_2)_b=0$. Si $0=\delta_2\left(\sum_{\substack{i\\ j=(j_1,\cdots,j_a)}}\overline{\lambda_i\mu^i_j z_{i_1}\cdots z_{i_m}}\otimes v_{j_1}\cdots v_{j_a}\right) = \sum_{\substack{i\\ j=(j_1,\cdots,j_a)}}\overline{\lambda_i\mu^i_j z_{i_1}\cdots z_{i_m} v_{j_1}\cdots v_{j_{a-1}}}\otimes v_{j_a}\in A_{n-1}\otimes V$ entonces, por el Lema 4.7 resulta que $\sum_{\substack{i\\ j=(j_1,\cdots,j_a)}}\lambda_i\mu^i_j z_{i_1}\cdots z_{i_m}v_{j_1}\cdots v_{j_{a-1}}\in I_{n-1}$.

  Por lo tanto, $(\operatorname{Ker}\delta_2)_n\subseteq (V^{(m)}\otimes R_a)\cap\big(\sum_{i+j=m-1}V^{(i)}\otimes R_a\otimes V^{(j)}\otimes V\big)$. La inclusión en el otro sentido es trivial si razonamos análogamente al caso $n=a+1$.

- Sea $2 \leq m \leq a-1$ y $n = a+m = b+l < 2a-1$ con $l \geq 1$. En este caso vemos que $(\operatorname{Ker}\delta_2)_n \subseteq (A_m \otimes R_a) \oplus (A_l \otimes R_b) = V^{(m)} \otimes R_a \oplus V^{(l)} \otimes R_b$ pues $I_m = 0 = I_l$ ya que $l < m \leq a-1$. Si

$$0 = \delta_2 \left(\sum_{\substack{i \\ j\,=\,(j_1,\cdots,j_a)}} \overline{\gamma_i \lambda_j^i z_{i_1} \cdots z_{i_m}} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_a} + \sum_{\substack{t \\ u\,=\,(u_1,\cdots,u_b)}} \overline{\eta_t \mu_u^t x_{t_1} \cdots x_{t_l}} \otimes v_{u_1} \cdots v_{u_b} \right)$$
$$= \sum_{\substack{i \\ j\,=\,(j_1,\cdots,j_a)}} \overline{\gamma_i \lambda_j^i z_{i_1} \cdots z_{i_m} v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a} + \sum_{\substack{t \\ u\,=\,(u_1,\cdots,u_b)}} \overline{\eta_t \mu_u^t x_{t_1} \cdots x_{t_l} v_{u_1} \cdots v_{u_{b-1}}} \otimes v_{u_b},$$

concluimos entonces que

$$\sum_{\substack{i \\ j\,=\,(j_1,\cdots,j_a)}} \gamma_i \lambda_j^i z_{i_1} \cdots z_{i_m} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}} + \sum_{\substack{t \\ u\,=\,(u_1,\cdots,u_b)}} \eta_t \mu_u^t x_{t_1} \cdots x_{t_l} \otimes v_{u_1} \cdots v_{u_{b-1}} \in I_{n-1}.$$

Por lo tanto,

$$(\operatorname{Ker}\delta_2)_n \subseteq (V^{(m)} \otimes R_a) \cap \big(\sum_{i+j+a=n-1} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V \big) \oplus (V^{(l)} \otimes R_b) \cap \big(\sum_{h+t+b=n-1} V^{(h)} \otimes R_b \otimes V^{(t)} \otimes V \big).$$

La inclusión en el otro sentido es trivial por el mismo razonamiento que ya hemos empleado anteriormente.

Teniendo en cuenta que

$$(\operatorname{Ker}\delta_2)_n = 0 \;\text{ si }\; n \leq a \;\text{ y }\; (\operatorname{Ker}\delta_2)_{a+1} = J_{a+1}^a,$$

la cápsula proyectiva de $\operatorname{Ker}\delta_2$ contiene a $A \otimes J_{a+1}^a$ pero también puede contener módulos s-puros en grados mayores.

Para $n = a+m$ con $2 \leq m \leq \min\{a-1, b-a\}$, ya vimos que

$$(\operatorname{Ker}\delta_2)_n = (V^{(m)} \otimes R_a) \cap \big(\sum_{i+j=m-1} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V \big) \tag{4.2.4}$$

y este espacio contiene a $V^{(m-1)} \otimes J_{a+1}^a$. Así,

$$(\operatorname{Ker}\delta_2)_n = A_{m-1} \otimes J_{a+1}^a \Longleftrightarrow (V^{(m)} \otimes R_a) \cap \big(\sum_{i+j=m-1} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V \big) = V^{(m-1)} \otimes J_{a+1}^a. \tag{4.2.5}$$

Notemos que si la igualdad del lado derecho en (4.2.5) se satisface para $m = a-1$, entonces para $2 \leq t \leq m-2$,

$$(V^{(m)} \otimes R_a) \cap (V^{(m-t)} \otimes R_a \otimes V^{(t)} + \cdots + V^{(m-1)} \otimes R_a \otimes V) \subseteq V^{(m-1)} \otimes J_{a+1}^a. \tag{4.2.6}$$

Por el Corolario 2.24, obtenemos (4.2.5) para $2 < m < a-1$.

En el caso en que $n = a + m = b + l$ con $1 \leq l \leq 2a - b - 1$, tenemos que $(\mathrm{Ker}\, \delta_2)_n$ es igual a

$$[(V^{(m)} \otimes R_a) \oplus (V^{(l)} \otimes R_b)] \cap \big(\sum_{i+j=m-1} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V + \sum_{s+t=l-1} V^{(s)} \otimes R_b \otimes V^{(t)} \otimes V \big),$$

que contiene a $(V^{(m-1)} \otimes J^a_{a+1}) \oplus (V^{(l-1)} \otimes J^b_{b+1})$. Consideremos ahora las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} (V^{(m)} \otimes R_a) \cap \big(\sum_{i+j=m-1} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V \big) &= V^{(m-1)} \otimes J^a_{a+1}, \\ (V^{(l)} \otimes R_b) \cap \big(\sum_{s+t=l-1} V^{(s)} \otimes R_b \otimes V^{(t)} \otimes V \big) &= V^{(l-1)} \otimes J^b_{b+1}. \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

En forma análoga a lo desarrollado anteriormente, se puede ver que si (4.2.7) se satisface para $l = b - 1$, también se satisface para todo l menor o igual que $b - 2$. Observemos además que (4.2.7) implica la igualdad del lado derecho en (4.2.5).

Las relaciones (4.2.7) para $m = a - 1$ y $l = b - 1$ se llaman **condiciones extras** y las denotaremos por *(c.e.)*.

Observación 4.8. *Es fácil ver que pedir que valgan las (c.e.) es equivalente a pedir que valgan las siguientes inclusiones:*

$$\begin{aligned} (V^{(a-1)} \otimes R_a) \cap \big(\sum_{i+j=a-2} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V \big) &\subseteq V^{(a-2)} \otimes J^a_{a+1}, \\ (V^{(b-1)} \otimes R_b) \cap \big(\sum_{s+t=b-2} V^{(s)} \otimes R_b \otimes V^{(t)} \otimes V \big) &\subseteq V^{(b-2)} \otimes J^b_{b+1}. \end{aligned}$$

Nos dedicaremos ahora a estudiar ciertas condiciones de distributividad que resultarán equivalentes a las *(c.e.)*.

Definición 4.9 ([B1], [J], [O]). *Una terna (E, F, G) de subespacios de un espacio vectorial dado se dice **distributiva** si*

$$E \cap (F + G) = (E \cap F) + (E \cap G). \tag{4.2.8}$$

Observación 4.10. *Como la inclusión del segundo término en el primero vale siempre, para que una terna sea distributiva alcanza con pedir solamente la otra inclusión.*

Definición 4.11. *Una terna de subespacios de un espacio vectorial dado, de la forma $(E \oplus E', F_1 + \cdots + F_t, G_1 + \cdots + G_{t'})$ se dice **multidistributiva** si*

$$\begin{aligned} &(E \oplus E') \cap (F_1 + \cdots + F_t + G_1 + \cdots G_{t'}) \\ &\qquad = (E \cap F_1) + \cdots + (E \cap F_t) \oplus (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'}). \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Proposición 4.12. *Las (c.e.) se satisfacen si y sólo si para $2 \leq m \leq a - 1$ y $2 \leq l \leq b - 1$ las ternas*

$$(V^{(m)} \otimes R_a, R_a \otimes V^{(m)}, \sum_{i+j=m-2} V \otimes V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V), \tag{4.2.10}$$

$$(V^{(l)} \otimes R_b, R_b \otimes V^{(l)}, \sum_{s+t=l-2} V \otimes V^{(s)} \otimes R_b \otimes V^{(t)} \otimes V)$$

son distributivas y valen las inclusiones

$$\begin{aligned} (V^{(m)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(m)}) &\subseteq V^{(m-1)} \otimes R_a \otimes V, \\ (V^{(l)} \otimes R_b) \cap (R_b \otimes V^{(l)}) &\subseteq V^{(l-1)} \otimes R_b \otimes V. \end{aligned}$$

Demostración. Sean $E = V^{(m)} \otimes R_a$, $F = R_a \otimes V^{(m)}$ y $G = \sum_{i+j=m-2} V \otimes V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V$. Supongamos que las *(c.e.)* se satisfacen. Entonces, en (4.2.7) $E \cap (F+G) = V^{(m-1)} \otimes J^a_{a+1} \subseteq E \cap G \subseteq (E \cap F) + (E \cap G)$. El razonamiento para b es análogo.

Recíprocamente, por la distributividad de la primera terna y la primera inclusión para m tal que $2 \le m \le a-1$, vemos que

$$\begin{aligned}
&(V^{(a-2)} \otimes R_a) \cap \big(\sum_{i+j=a-3} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V\big)\\
&= (V^{(a-2)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(a-2)}) + (V^{(a-2)} \otimes R_a) \cap \big(\sum_{i+j=a-4} V \otimes V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V\big)\\
&\subseteq (V^{(a-3)} \otimes R_a \otimes V) + V \otimes [(V^{(a-3)} \otimes R_a) \cap \big(\sum_{i+j=a-4} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V\big)]\\
&= (V^{(a-3)} \otimes R_a \otimes V) + V \otimes [(V^{(a-3)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(a-3)}) +\\
&(V^{(a-3)} \otimes R_a) \cap \big(\sum_{i+j=a-5} V \otimes V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V\big)]\\
&\subseteq (V^{(a-3)} \otimes R_a \otimes V) + V \otimes [(V^{(a-4)} \otimes R_a \otimes V) +\\
&(V^{(a-3)} \otimes R_a) \cap \big(\sum_{i+j=a-5} V \otimes V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V\big)]\\
&= (V^{(a-3)} \otimes R_a \otimes V) + V^{(2)} \otimes [V^{(a-5)} \otimes R_a \otimes V +\\
&(V^{(a-4)} \otimes R_a) \cap \big(\sum_{i+j=a-5} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V\big)]\\
&= (V^{(a-3)} \otimes R_a \otimes V) + V^{(2)} \otimes [(V^{(a-4)} \otimes R_a) \cap \big(\sum_{i+j=a-5} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V\big)].
\end{aligned}$$

Vemos que en general $(V^{(a-3)} \otimes R_a \otimes V) + V^{(s-3)} \otimes [(V^{(a-s+1)} \otimes R_a) \cap \big(\sum_{i+j=a-s} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V\big)] \subseteq (V^{(a-3)} \otimes R_a \otimes V) + V^{(s-3)} \otimes [V^{(a-s)} \otimes R_a \otimes V + (V^{(a-s+1)} \otimes R_a) \cap \big(\sum_{i+j=a-s} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V\big)] = (V^{(a-3)} \otimes R_a \otimes V) + V^{(s-3)} \otimes [(V^{(a-s+1)} \otimes R_a) \cap \big(\sum_{i+j=a-s} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V\big)]$ con $3 \le s \le a$ y por lo tanto

$$V^{(a-3)} \otimes R_a \otimes V \subseteq V^{(a-3)} \otimes J^a_{a+1}.$$

Entonces vale la primera relación de (4.2.7). Para la segunda relación de (4.2.7) se procede de la misma manera. □

Lema 4.13. *Para $2 \le m \le a-1$ y $2 \le l \le b-1$, se satisfacen las inclusiones*

$$(V^{(m)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(m)}) \subseteq V^{(m-1)} \otimes R_a \otimes V, \tag{4.2.11}$$

$$(V^{(l)} \otimes R_b) \cap (R_b \otimes V^{(l)}) \subseteq V^{(l-1)} \otimes R_b \otimes V,$$

si y sólo si valen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
(V^{(m)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(m)}) &= J^a_{a+m},\\
(V^{(l)} \otimes R_b) \cap (R_b \otimes V^{(l)}) &= J^b_{b+l}.
\end{aligned}$$

Demostración. Para la condición necesaria tenemos la inclusión $J^a_{a+m} \subseteq (V^{(m)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(m)})$. Probaremos a continuación la inclusión en el otro sentido haciendo inducción sobre m. Si $m = 2$, la igualdad se reduce a lo siguiente:

$$J^a_{a+2} = (V^{(2)} \otimes R_a) \cap (V \otimes R_a \otimes V) \cap (R_a \otimes V^{(2)}) = (V^{(2)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(2)}),$$

utilizamos aquí la inclusión (4.2.11) que es válida por hipótesis. Supongamos ahora válida la inclusión para $m < a-1$ y sea $\sum_{i=(i_1,\cdots,i_{a+m+1})} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_{a+m+1}} \in (V^{(m+1)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(m+1)})$, entonces $\sum_{i=(i_1,\cdots,i_{a+m+1})} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_a} \in R_a$ y $\sum_{i=(i_1,\cdots,i_{a+m+1})} \lambda_i v_{i_{m+2}} \cdots v_{i_{a+m+1}} \in R_a$, pero por la inclusión (4.2.11), además vale que $\sum_{i=(i_1,\cdots,i_{a+m+1})} \lambda_i v_{i_{m+1}} \cdots v_{i_{a+m}} \in R_a$ si $m+1 \leq a-1$. Luego, $\sum_{i=(i_1,\cdots,i_{a+m+1})} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_{a+m}} \in (R_a \otimes V^{(m)}) \cap (V^{(m)} \otimes R_a) = J^a_{a+m}$ por hipótesis inductiva. Entonces, podemos concluir que $\sum_{i=(i_1,\cdots,i_{a+m+1})} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_{a+m+1}} \in \bigcap_{h+j=m} V^{(h)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \otimes V$ y como también pertenece a $R_a \otimes V^{(m+1)}$ resulta que este elemento pertenece a J^a_{a+m+1} y se satisface la igualdad deseada.

Se procede análogamente para probar la igualdad que involucra a J^b_{b+l}.

La implicación recíproca resulta trivial pues valen las inclusiones:

$$J^a_{a+m} \subseteq V^{(m-1)} \otimes R_a \otimes V, \quad J^a_{b+l} \subseteq V^{(l-1)} \otimes R_b \otimes V.$$

□

La proposición que probaremos a continuación da una equivalencia en términos de distributividad y multidistributividad para ternas y de las *(c.e.)*, para decidir cuándo $\operatorname{Ker} \delta_2$ es 2-puro. El objetivo será luego generalizar esta equivalencia para los morfismos de la resolución en grados superiores.

Proposición 4.14. *Supongamos que vale la segunda igualdad de las (c.e.); es decir,*

$$(V^{(b-1)} \otimes R_b) \cap \Big(\sum_{s+t=b-2} V^{(s)} \otimes R_b \otimes V^{(t)} \otimes V \Big) = V^{(b-2)} \otimes J^b_{b+1}.$$

Entonces, $\operatorname{Ker} \delta_2$ *es 2-puro en grados $a+1$ y $b+1$ si y sólo si (4.2.5) se satisface y para todo $n \geq 2a$, las ternas (E, F, G) y $(E' \oplus E'', F' + G', F'' + G'')$ son distributivas y multidistributivas respectivamente donde:*

$$\begin{aligned}
E &= V^{(n-a)} \otimes R_a, \\
F &= R_a \otimes V^{(n-a)} + \cdots + V^{(n-2a)} \otimes R_a \otimes V^{(a)}, \\
G &= V^{(n-2a+1)} \otimes R_a \otimes V^{(a-1)} + \cdots + V^{(n-a-1)} \otimes R_a \otimes V, \\
E' &= V^{(n-a)} \otimes R_a, \\
F' &= R_a \otimes V^{(n-a)} + \cdots + V^{(n-2a)} \otimes R_a \otimes V^{(a)} + R_b \otimes V^{(n-b)} + \cdots + V^{(n-a-b)} \otimes R_b \otimes V^{(a)}, \\
G' &= V^{(n-2a+1)} \otimes R_a \otimes V^{(a-1)} + \cdots + V^{(n-a-1)} \otimes R_a \otimes V, \\
E'' &= V^{(n-b)} \otimes R_b, \\
F'' &= R_a \otimes V^{(n-a)} + \cdots + V^{(n-a-b)} \otimes R_a \otimes V^{(b)} + R_b \otimes V^{(n-b)} + \cdots + V^{(n-2b)} \otimes R_b \otimes V^{(b)}, \\
G'' &= V^{(n-2b+1)} \otimes R_b \otimes V^{(b-1)} + \cdots + V^{(n-b-1)} \otimes R_b \otimes V.
\end{aligned}$$

Si el supraíndice es negativo consideramos que el espacio correspondiente es el nulo.

Demostración. Ya hemos visto que vale la igualdad

$$(\operatorname{Ker}\delta_2)_n = A_{m-1}\otimes J^a_{a+1} \quad \text{para} \quad n = m+a, \quad \text{donde} \quad 2\le m\le \min\{a-1, b-a\},$$

si y sólo si vale (4.2.5). Supongamos ahora que las *(c.e.)* se satisfacen y fijemos un número natural $n \geq 2a$. Queremos estudiar $(\operatorname{Ker}\delta_2)_n$.

(i) Si $n \leq b$, $(\operatorname{Ker}\delta_2)_n \subseteq A_{n-a}\otimes R_a$. Observemos que si $n = b$, $A_{n-b} = A_0 = k$ y si $s \in R_b$, no puede ser que $\delta_2(s) = 0$, pues

$$0 = \delta_2(s) = \delta_2\left(\sum_{\substack{l\,=\,1\\ h\,=\,(h_1,\cdots,h_b)}}^{p'} \eta_l\mu^l_h v_{h_1}\cdots v_{h_b}\right) = \sum_{\substack{l\,=\,1\\ h\,=\,(h_1,\cdots,h_b)}}^{p'} \overline{\eta_l\mu^l_h v_{h_1}\cdots v_{h_{b-1}}}\otimes v_{h_b}$$

implica que $\sum\limits_{\substack{l\,=\,1\\ h\,=\,(h_1,\cdots,h_b)}}^{p'} \eta_l\mu^l_h v_{h_1}\cdots v_{h_{b-1}} \in I_{b-1}$ pero entonces R_a y R_b no serían excluyentes.

Sean $\overline{\alpha_i}\in A_{n-a}$, $\rho_i \in R_a$, tales que $0 = \delta_2\big(\sum_i \overline{\alpha_i}\otimes\rho_i\big) = \delta_2\left(\sum\limits_{\substack{i,\,h\\ j\,=\,(j_1,\cdots,j_a)}} \gamma^i_h\lambda^h_j\overline{\alpha_i}\otimes v_{j_1}\cdots v_{j_a}\right)$ $= \sum\limits_{\substack{i,\,h\\ j\,=\,(j_1,\cdots,j_a)}} \overline{\gamma^i_h\lambda^h_j\alpha_i v_{j_1}\cdots v_{j_{a-1}}}\otimes v_{j_a}$. Entonces, $\sum\limits_{\substack{i,\,h\\ j\,=\,(j_1,\cdots,j_a)}} \gamma^i_h\lambda^h_j\alpha_i v_{j_1}\cdots v_{j_{a-1}} \in I_{n-1}$.

Sea ahora el subespacio de $T(V)$:

$$N_n = (V^{(n-a)}\otimes R_a)\cap(I_{n-1}\otimes V) = (V^{(n-a)}\otimes R_a)\cap(V^{(n-a-1)}\otimes R_a\otimes V+\cdots+R_a\otimes V^{(n-a)}).$$

Tenemos que $(\operatorname{Ker}\delta_2)_n \subseteq \frac{N_n}{I_{n-a}\otimes R_a}$. La inclusión en el otro sentido es trivial utilizando el mismo argumento que en casos anteriores.

(ii) Si $n > b$, $(\operatorname{Ker}\delta_2)_n \subseteq (A_{n-a}\otimes R_a)\oplus(A_{n-b}\otimes R_b)$. Sean $\overline{\alpha_i}\in A_{n-a}$, $\overline{\beta_h}\in A_{n-b}$, $\rho_i\in R_a$ y $\theta_h \in R_b$, si

$$\begin{aligned}
0 &= \delta_2\big(\sum_i \overline{\alpha_i}\otimes\rho_i + \sum_h \overline{\beta_h}\otimes\theta_h\big)\\
&= \delta_2\left(\sum_{\substack{i,\,t\\ j\,=\,(j_1,\cdots,j_a)}} \gamma^i_t\lambda^t_j\overline{\alpha_i}\otimes v_{j_1}\cdots v_{j_a} + \sum_{\substack{h,\,m\\ l\,=\,(l_1,\cdots,l_b)}} \eta^h_m\mu^m_l\overline{\beta_h}\otimes v_{l_1}\cdots v_{l_b}\right)\\
&= \sum_{\substack{i,\,t\\ j\,=\,(j_1,\cdots,j_a)}} \gamma^i_t\lambda^t_j\overline{\alpha_i v_{j_1}\cdots v_{j_{a-1}}}\otimes v_{j_a} + \sum_{\substack{h,\,m\\ l\,=\,(l_1,\cdots,l_b)}} \eta^h_m\mu^m_l\overline{\beta_h v_{l_1}\cdots v_{l_{b-1}}}\otimes v_{l_b},
\end{aligned}$$

entonces $\sum\limits_{\substack{i,\,t\\ j\,=\,(j_1,\cdots,j_a)}} \gamma^i_t\lambda^t_j\alpha_i v_{j_1}\cdots v_{j_{a-1}} + \sum\limits_{\substack{h,\,m\\ l\,=\,(l_1,\cdots,l_b)}} \eta^h_m\mu^m_l\beta_h v_{l_1}\cdots v_{l_{b-1}} \in I_{n-1}$.

Como

$$\begin{aligned} I_{n-1} =& V^{(n-a-1)} \otimes R_a + V^{(n-a-2)} \otimes R_a \otimes V + \cdots + R_a \otimes V^{(n-a-1)} + \\ & V^{(n-b-1)} \otimes R_b + V^{(n-b-2)} \otimes R_b \otimes V + \cdots + R_b \otimes V^{(n-b-1)}, \end{aligned}$$

$I_{n-1} \otimes V$ contiene al subespacio

$$\begin{aligned} N_n =& (V^{(n-a)} \otimes R_a \oplus V^{(n-b)} \otimes R_b) \cap (V^{(n-a-1)} \otimes R_a \otimes V + \\ & V^{(n-a-2)} \otimes R_a \otimes V^{(2)} + \cdots + R_a \otimes V^{(n-a)} + \\ & V^{(n-b-1)} \otimes R_b \otimes V + V^{(n-b-2)} \otimes R_b \otimes V^{(2)} + \cdots + R_b \otimes V^{(n-b)}). \end{aligned}$$

Tenemos así la igualdad

$$(\operatorname{Ker} \delta_2)_n = \frac{N_n}{I_{n-a} \otimes R_a \oplus I_{n-b} \otimes R_b}.$$

Para mostrar la distributividad y multidistributividad de las ternas, observamos que:

$$\begin{aligned} E \cap (F+G) &= N_n && \text{en el caso } \textit{(i)}, \\ (E' \oplus E'') \cap (F' + F'' + G' + G'') &= N_n && \text{en el caso } \textit{(ii)}. \end{aligned}$$

Si (E,F,G) y $(E' \oplus E'', F' + F'', G' + G'')$ son ternas distributivas y multidistributivas respectivamente, al satisfacerse las *(c.e.)*, analizaremos de la siguiente manera:

- Si $n \leq b$, $N_n = E \cap (F+G) = (E \cap F) + (E \cap G) =_{\text{(c.e.)}} (I_{n-a} \otimes R_a) + (V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1})$. Luego, caracterizamos al núcleo de la siguiente forma

$$(\operatorname{Ker} \delta_2)_n = \frac{N_n}{I_{n-a} \otimes R_a} = \frac{V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1}}{(V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1}) \cap (I_{n-a} \otimes R_a)} \overset{\varphi}{\simeq} \frac{V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1}}{I_{n-a-1} \otimes J^a_{a+1}} = A_{n-a-1} J^a_{a+1},$$

  donde para definir φ observamos que la identidad de $V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1}$ puede pasar al cociente como

$$\varphi : \frac{V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1}}{I_{n-a-1} \otimes J^a_{a+1}} \longrightarrow \frac{V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1}}{(I_{n-a} \otimes R_a) \cap (V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1})},$$

  y resulta un epimorfismo. Podemos además construir un isomorfismo de k-espacios vectoriales entre el dominio y el codominio de φ (ver [B1]), luego, por razones de dimensión, φ es un isomorfismo.

- Si $n > b$, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} E' \cap F' &= I_{n-a} \otimes R_a, \\ E'' \cap F'' &= I_{n-b} \otimes R_b, \\ E' \cap G' &= V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1}, \\ E'' \cap G'' &= V^{(n-b-1)} \otimes J^b_{b+1}, \end{aligned}$$

donde las dos últimas se deben a las *(c.e.)*. Caracterizamos al núcleo como sigue,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Ker}\delta_2)_n &= \frac{N_n}{I_{n-a}\otimes R_a \oplus I_{n-b}\otimes R_b}\\
&= \frac{(I_{n-a}\otimes R_a + V^{(n-a-1)}\otimes J^a_{a+1}) \oplus (I_{n-b}\otimes R_b + V^{(n-b-1)}\otimes J^b_{b+1})}{I_{n-a}\otimes R_a \oplus I_{n-b}\otimes R_b}\\
&\simeq \frac{I_{n-a}\otimes R_a + V^{(n-a-1)}\otimes J^a_{a+1}}{I_{n-a}\otimes R_a} \oplus \frac{I_{(n-b)}\otimes R_b + V^{(n-b-1)}\otimes J^b_{b+1}}{I_{n-b}\otimes R_b}\\
&\simeq \frac{V^{(n-a-1)}\otimes J^a_{a+1}}{(V^{(n-a-1)}\otimes J^a_{a+1})\cap (I_{n-a}\otimes R_a)} \oplus \frac{V^{(n-b-1)}\otimes J^b_{b+1}}{(V^{n-b-1}\otimes J^b_{b+1})\cap (I_{n-b}\otimes R_b)}\\
&\simeq \frac{V^{(n-a-1)}\otimes J^a_{a+1}}{I_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1}} \oplus \frac{V^{(n-b-1)}\otimes J^b_{b+1}}{I_{n-b-1}\otimes J^b_{b+1}} \simeq A_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1} \oplus A_{n-b-1}\otimes J^b_{b+1},
\end{aligned}$$

donde el isomorfismo para la parte que involucra a R_b es análogo al del caso anterior.

Concluimos de este modo que $\operatorname{Ker}\delta_2$ es 2-puro en grados $a+1$ y $b+1$.

Recíprocamente, si $\operatorname{Ker}\delta_2$ es 2-puro en grados $a+1$ y $b+1$, entonces $(\operatorname{Ker}\delta_2)_n = A_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1} \oplus A_{n-b-1}\otimes J^b_{b+1}$, por lo tanto usando la doble implicación que observamos al comienzo de la demostración, vale (4.2.5).

Supongamos que $n > b$, luego $(\operatorname{Ker}\delta_2)_n \subseteq A_{n-a}\otimes R_a \oplus A_{n-b}\otimes R_b$ mediante la aplicación:

$$\begin{array}{ccc}
A_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1} \oplus A_{n-b-1}\otimes J^b_{b+1} & \hookrightarrow & A_{n-a}\otimes R_a \oplus A_{n-b}\otimes R_b\\
(\overline{\alpha}\otimes v\otimes r, \overline{\beta}\otimes w\otimes s) & \longmapsto & (\overline{\alpha v}\otimes r, \overline{\beta w}\otimes s)
\end{array}$$

donde $\overline{\alpha}\in A_{n-a-1}$, $\overline{\beta}\in A_{n-b-1}$; $v,w\in V$, $r\in R_a$ y $s\in R_b$. Sabemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{N_n}{I_{n-a}\otimes R_a \oplus I_{n-b}\otimes R_b} &= A_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1} \oplus A_{n-b-1}\otimes J^b_{b+1}\\
&= \frac{V^{(n-a-1)}\otimes J^a_{a+1}}{I_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1}} \oplus \frac{V^{(n-b-1)}\otimes J^b_{b+1}}{I_{n-b-1}\otimes J^b_{b+1}}.
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Por otro lado, las siguientes inclusiones son triviales:

$$\begin{aligned}
V^{(n-a-1)}\otimes J^a_{a+1} &\subseteq I_{n-a}\otimes R_a + V^{(n-a-1)}\otimes J^a_{a+1},\\
I_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1} &\subseteq I_{n-a}\otimes R_a,\\
V^{(n-b-1)}\otimes J^b_{b+1} &\subseteq I_{n-b}\otimes R_b + V^{(n-b-1)}\otimes J^b_{b+1},\\
I_{n-b-1}\otimes J^b_{b+1} &\subseteq I_{n-b}\otimes R_b.
\end{aligned}$$

Luego, por el Lema 2.20 tenemos las igualdades:

$$\begin{aligned}
(V^{(n-a-1)}\otimes J^a_{a+1})\cap (I_{n-a}\otimes R_a) &= I_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1},\\
(V^{(n-b-1)}\otimes J^b_{b+1})\cap (I_{n-b}\otimes R_b) &= I_{n-b-1}\otimes J^b_{b+1}.
\end{aligned}$$

Así, (4.2.12) equivale a lo siguiente:

$$\frac{V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1}}{(V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1}) \cap (I_{n-a} \otimes R_a)} \oplus \frac{V^{(n-b-1)} \otimes J^b_{b+1}}{(V^{(n-b-1)} \otimes J^b_{b+1}) \cap (I_{n-b} \otimes R_b)}$$
$$\simeq \frac{(V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1}) + (I_{n-a} \otimes R_a)}{I_{n-a} \otimes R_a} \oplus \frac{(V^{(n-b-1)} \otimes J^b_{b+1}) + (I_{n-b} \otimes R_b)}{I_{n-b} \otimes R_b}.$$

Luego, por el Lema 2.18,

$$\begin{aligned} N_n &= V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1} + I_{n-a} \otimes R_a \oplus V^{(n-b-1)} \otimes J^b_{b+1} + I_{n-b} \otimes R_b \\ &= (E' \cap F') + (E' \cap G') \oplus (E'' \cap F'') + (E'' \cap G''). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la terna es multidistributiva. El caso $n \leq b$ es análogo e inclusive más sencillo ya que la parte que involucra a b no aparece. $\square$

4.2.3 Descripción de $\operatorname{Ker} \delta_3$

A partir de ahora suponemos que $\operatorname{Ker} \delta_2$ es 2-puro en grados $a+1$ y $b+1$. Una cápsula proyectiva para $\operatorname{Ker} \delta_2$ es $(A \otimes J^a_{a+1}) \oplus (A \otimes J^b_{b+1}) \to \operatorname{Ker} \delta_2$, inducida por los morfismos canónicos inyectivos $J^a_{a+1} \hookrightarrow \operatorname{Ker} \delta_2$ y $J^b_{b+1} \hookrightarrow \operatorname{Ker} \delta_2$. Si incluimos a $\operatorname{Ker} \delta_2$ en $A \otimes R$, tenemos el morfismo

$$\delta_3 : (A \otimes J^a_{a+1}) \oplus (A \otimes J^b_{b+1}) \longrightarrow A \otimes R$$

definido por la composición de los dos morfismos anteriores,

$$(\overline{\alpha} \otimes v \otimes w, \overline{\alpha'} \otimes v' \otimes w') \longmapsto \overline{\alpha v} \otimes w + \overline{\alpha' v'} \otimes w'$$

donde $\overline{\alpha}, \overline{\alpha'} \in A$; $v, v' \in V$; $w \in V^{(a)}$ y $w' \in V^{(b)}$.

Estudiemos ahora $\operatorname{Ker} \delta_3$. Observemos primero que si $\overline{\alpha_i}, \overline{\alpha'_j} \in A$, $x_i, x'_j \in V$, $y_i \in R_a$ e $y'_j \in R_b$ son tales que $\sum_i \overline{\alpha_i x_i} \otimes y_i + \sum_j \overline{\alpha'_j x'_j} \otimes y'_j = 0$, entonces $\sum_i \overline{\alpha_i x_i} \otimes y_i = 0$ y $\sum_j \overline{\alpha'_j x'_j} \otimes y'_j = 0$ pues R_a y R_b son excluyentes y, por lo tanto, no pueden cancelarse entre sí términos que pertenecen a las distintas sumas. Luego, se puede describir cada sumando de $\operatorname{Ker} \delta_3$.

Lo primero que notamos es que $(\operatorname{Ker} \delta_3)_n = 0$ si $n < 2a$ pues para que se anule la imagen de δ_3 debe pasar que $\operatorname{gr}\left(\sum_i \overline{\alpha_i x_i}\right) \geq a$, lo que implica que $\operatorname{gr}\left(\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes x_i \otimes y_i\right) \geq 2a$.

Describamos $(\operatorname{Ker} \delta_3)_{2a}$: sean $\overline{\alpha_i} \in A_{a-1}$, $\overline{\beta_j} \in A_{2a-b-1}$, $u_i, u'_j \in V$, $\rho_i \in R_a$, $\theta_j \in R_b$ tales que

$$0 = \delta_3\big(\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes u_i \otimes \rho_i + \sum_j \overline{\beta_j} \otimes u'_j \otimes \theta_j\big) = \sum_i \overline{\alpha_i u_i} \otimes \rho_i + \sum_j \overline{\beta_j u'_j} \otimes \theta_j.$$

Esto es absurdo si existe j tal que $\overline{\beta_j u'_j} \neq 0$ porque el grado de $\overline{\beta_j u'_j}$ es $2a-b$, y la ecuación anterior lo fuerza a tener grado mayor o igual que a, pero $2a - b < a$. Concluimos que $\sum_i \alpha_i u_i \in I_a = R_a$.

Por lo tanto,

$$(\operatorname{Ker} \delta_3)_{2a} = (V^{(a-1)} \otimes J^a_{a+1}) \cap (R_a \otimes V^{(a)}).$$

Como en los casos anteriores, la inclusión del segundo término en el primero es clara.

Como $\operatorname{Ker} \delta_2$ es 2-puro en grados $a+1$ y $b+1$, por la Proposición 4.14, se satisface (4.2.5) y por la Proposición 4.12 vale la inclusión

$$(V^{(a-1)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(a-1)}) \subseteq V^{(a-2)} \otimes R_a \otimes V. \tag{4.2.13}$$

Por lo tanto, $(V^{(a-1)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(a-1)}) = J^a_{2a-1}$, por el Lema 4.13. Entonces caracterizamos al núcleo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ker} \delta_3)_{2a} &= (V^{(a-1)} \otimes R_a \otimes V) \cap (V^{(a)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(a)}) \\ &= [(V^{(a-1)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(a-1)})] \otimes V \cap (V^{(a)} \otimes R_a) \\ &= (J^a_{2a-1} \otimes V) \cap (V^{(a)} \otimes R_a) = J^a_{2a}.\end{aligned}$$

Sea ahora n tal que $2a < n < a+b$, entonces $(\operatorname{Ker} \delta_3)_n \subseteq A_{n-a-1} \otimes J^a_{a+1} \oplus A_{n-b-1} \otimes J^b_{b+1}$. En realidad, $(\operatorname{Ker} \delta_3)_n \cap (A_{n-b-1} \otimes J^b_{b+1}) = 0$ debido a que R_a y R_b son excluyentes y a que $n-b-1 < a+b-b-1 = a-1$, luego $n-b-1 < a$.

Consideremos ahora $\overline{\alpha_i} \in A_{n-a-1}$, $u_i \in V$, $r_i \in \mathcal{B}_a$, la base fijada para R_a. Si

$$0 = \delta_3\big(\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes u_i \otimes r_i\big) = \sum_i \overline{\alpha_i u_i} \otimes r_i,$$

entonces $\sum_i \alpha_i u_i \in I_{n-a}$ por el Lema 4.7. Luego,

$$(\operatorname{Ker} \delta_3)_n = \frac{N_n}{I_{n-a-1} \otimes J^a_{a+1}},$$

donde

$$\begin{aligned}N_n =&(V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1}) \cap (V^{(n-2a)} \otimes R_a \otimes V^{(a)} + \cdots + R_a \otimes V^{(n-a)}) \\ =&(V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1}) \cap [(V^{(n-2a-1)} \otimes R_a \otimes V^{(a+1)} + \cdots + R_a \otimes V^{(n-a)}) + (V^{(n-2a)} \otimes R_a \otimes V^{(a)})] \\ =&(V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1}) \cap (I_{n-a-1} \otimes V^{(a+1)} + V^{(n-2a)} \otimes R_a \otimes V^{(a)}).\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $a+b \leq n < 2b$, entonces $(\operatorname{Ker} \delta_3)_n \subseteq A_{n-a-1} \otimes J^a_{a+1} \oplus A_{n-b-1} \otimes J^b_{b+1}$. Consideremos $\overline{\alpha_i} \in A_{n-a-1}$, $\overline{\beta_j} \in A_{n-b-1}$, $u_i, u'_j \in V$, $r_i \in \mathcal{B}_a$, $s_j \in \mathcal{B}_b$. Si

$$0 = \delta_3\big(\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes u_i \otimes r_i + \sum_j \overline{\beta_j} \otimes u'_j \otimes s_j\big) = \sum_i \overline{\alpha_i u_i} \otimes r_i + \sum_j \overline{\beta_j u'_j} \otimes s_j,$$

entonces $\sum_i \alpha_i u_i \in I_{n-a}$ y $\sum_j \beta_j u'_j \in I_{n-b}$. Luego, caracterizamos al núcleo como

$$(\operatorname{Ker} \delta_3)_n = \frac{N_n}{I_{n-a-1} \otimes J^a_{a+1} \oplus I_{n-b-1} \otimes J^b_{b+1}},$$

donde

$$\begin{aligned}N_n =&(V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1} \oplus V^{(n-b-1)} \otimes J^b_{b+1}) \cap (I_{n-a} \otimes V^{(a)} + I_{n-b} \otimes V^{(b)}) \\ =&(V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1} \oplus V^{(n-b-1)} \otimes J^b_{b+1}) \cap \\ &(V^{(n-2a)} \otimes R_a \otimes V^{(a)} + V^{(n-2a-1)} \otimes R_a \otimes V^{(a+1)} + \cdots + R_a \otimes V^{(n-a)} + \\ &V^{(n-a-b)} \otimes R_b \otimes V^{(a)} + V^{(n-a-b-1)} \otimes R_b \otimes V^{(a+1)} + \cdots + R_b \otimes V^{(n-b)} + \\ &V^{(n-a-b)} \otimes R_a \otimes V^{(b)} + V^{(n-a-b-1)} \otimes R_a \otimes V^{(b+1)} + \cdots + R_a \otimes V^{(n-a)}).\end{aligned}$$

Observamos que $n-b<b$, por lo tanto R_b no aparece en I_{n-b}. Así,

$$\begin{aligned} N_n =&(V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1} \oplus V^{(n-b-1)} \otimes J^b_{b+1}) \cap (I_{n-a-1} \otimes V^{(a+1)} + V^{(n-2a)} \otimes R_a \otimes V^{(a)} + \\ & V^{(n-a-b)} \otimes R_b \otimes V^{(a)} + I_{n-b-1} \otimes V^{(b+1)} + V^{(n-a-b)} \otimes R_a \otimes V^{(b)}). \end{aligned}$$

Supongamos finalmente que $n \geq 2b$, entonces $(\operatorname{Ker}\delta_3)_n \subseteq A_{n-a-1} \otimes J^a_{a+1} \oplus A_{n-b-1} \otimes J^b_{b+1}$. Consideremos ahora $\overline{\alpha_i} \in A_{n-a-1}$, $\overline{\beta_j} \in A_{n-b-1}$, $u_i, u'_j \in V$, $r_i \in \mathcal{B}_a$, $s_j \in \mathcal{B}_b$. Si

$$0 = \delta_3\big(\sum_i \overline{\alpha_i} \otimes u_i \otimes r_i + \sum_j \overline{\beta_j} \otimes u'_j \otimes s_j\big) = \sum_i \overline{\alpha_i u_i} \otimes r_i + \sum_j \overline{\beta_j u'_j} \otimes s_j,$$

entonces $\sum_i \alpha_i u_i \in I_{n-a}$ y $\sum_j \beta_j u'_j \in I_{n-b}$. Luego, el núcleo es

$$(\operatorname{Ker}\delta_3)_n = \frac{N_n}{I_{n-a-1} \otimes J^a_{a+1} \oplus I_{n-b-1} \otimes J^b_{b+1}},$$

donde

$$\begin{aligned} N_n =&(V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1} \oplus V^{(n-b-1)} \otimes J^b_{b+1}) \cap (I_{n-a} \otimes V^{(a)} + I_{n-b} \otimes V^{(b)}) \\ =&(V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1} \oplus V^{(n-b-1)} \otimes J^b_{b+1}) \cap \\ & (I_{n-a-1} \otimes V^{(a+1)} + V^{(n-2a)} \otimes R_a \otimes V^{(a)} + V^{(n-a-b)} \otimes R_b \otimes V^{(a)} + \\ & I_{n-b-1} \otimes V^{(b+1)} + V^{(n-b-a)} \otimes R_a \otimes V^{(b)} + V^{(n-2b)} \otimes R_b \otimes V^{(b)}). \end{aligned}$$

Definición 4.15. *Una* 4*-upla* (E, F, G, H) *se dice* ***distributiva*** *si se satisface la siguiente igualdad:*

$$E \cap (F + G + H) = (E \cap F) + (E \cap G) + (E \cap H).$$

Además, una 4*-upla* $(E \oplus E', F + F', G + G', H + H')$ *se dice* ***multidistributiva*** *si se satisface:*

$$\begin{aligned} &(E \oplus E') \cap (F + F' + G + G' + H + H') = \\ &\qquad [(E \cap F) + (E \cap G) + (E \cap H)] \oplus [(E' \cap F') + (E' \cap G') + (E' \cap H')]. \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Ejemplo. Sea $A = T(V)/I$ donde $V = k\langle x, y\rangle$ y el ideal I tiene por espacio de relaciones a $R = R_3 \oplus R_4$ con $R_3 = \langle x^3\rangle$ y $R_4 = \langle x^2y^2\rangle$. Observar que R_a y R_b son excluyentes. Así, $a = 3$ y $b = 4$. Observemos cómo son los siguientes subespacios:

$$\begin{aligned} J^3_4 &= (V \otimes R_3) \cap (R_3 \otimes V) = \langle x^4\rangle \\ J^4_5 &= (V \otimes R_4) \cap (R_4 \otimes V) = 0. \end{aligned}$$

Consideremos $n = a + b = 7$ y veamos que valen las *(c.e.)*. Tanto en esta verificación como en las demás de este estilo, notaremos en las columnas correspondientes a cada espacio vectorial interviniente, los elementos de una base para tal espacio. Por abuso de notación, obviaremos los tensores en los elementos pero los notaremos de forma tal que marquen el espacio al cual pertenecen. Asímismo, subrayaremos cada elemento que aparezca en la intersección para visualizar más fácilmente una base para dicho espacio intersección. Observemos además que alcanza con analizar sólo estos elementos pues todos ellos son parte de una base para el espacio total $V^{(l)}$ del cual son subespacios los espacios que intervienen en los cálculos.

En este caso particular, tenemos que $m = a - 1 = 2$ y de este modo la intersección:

$$
\begin{array}{ccccccc}
(V^{(2)} \otimes R_3) & \cap & (R_3 \otimes V^{(2)} & + & V \otimes R_3 \otimes V) & = & \langle x^5, yx^4 \rangle \\
\underline{x^2x^3} & & \underline{x^3x^2} & & \underline{xx^3x} & & \\
xyx^3 & & x^3xy & & xx^3y & & \\
\underline{yxx^3} & & x^3yx & & \underline{yx^3x} & & \\
y^2x^3 & & x^3y^2 & & yx^3y & &
\end{array}
$$

Por otro lado, $V \otimes J_4^3 = \langle x^5, yx^4 \rangle$.

En el caso en que $l = b - 1 = 3$,

$$
\begin{array}{ccccccc}
(V^{(3)} \otimes R_4) & \cap & (R_4 \otimes V^{(3)} & + & V \otimes R_4 \otimes V^{(2)} & + & V^{(2)} \otimes R_4 \otimes V) \\
x^3x^2y^2 & & x^2y^2x^3 & & xx^2y^2x^2 & & x^2x^2y^2x \\
x^2yx^2y^2 & & x^2y^2x^2y & & xx^2y^2xy & & xyx^2y^2x \\
xyxx^2y^2 & & x^2y^2xyx & & xx^2y^2yx & & yxx^2y^2x \\
yx^2x^2y^2 & & x^2y^2yx^2 & & xx^2y^2y^2 & & y^2x^2y^2x \\
xy^2x^2y^2 & & x^2y^2xy^2 & & yx^2y^2x^2 & & x^2x^2y^2y \\
yxyx^2y^2 & & x^2y^2yxy & & yx^2y^2xy & & xyx^2y^2y \\
y^2xx^2y^2 & & x^2y^2y^2x & & yx^2y^2yx & & yxx^2y^2y \\
y^3x^2y^2 & & x^2y^2y^3 & & yx^2y^2y^2 & & y^2x^2y^2y
\end{array}
$$

Vemos así que la intersección es nula y coincide con $V^{(2)} \otimes J_5^4$ que también se anula.

Veamos ahora que para δ_3, la 4-upla $(E \oplus E', F + F', G + G', H + 0)$ es multidistributiva, donde:

$$
\begin{array}{llll}
E = V^{(3)} \otimes J_4^3, & F = I_3 \otimes V^{(4)} = R_3 \otimes V^{(4)}, & G = V \otimes R_3 \otimes V^{(3)}, & H = R_4 \otimes V^{(3)}, \\
E' = V^{(2)} \otimes J_5^4 = 0, & F' = I_2 \otimes V^{(5)} = 0, & G' = R_3 \otimes V^{(4)}. &
\end{array}
$$

Entonces,

$$
\begin{array}{ccccccc}
(E \oplus E') & \cap & (F + F' & + & G + G' & + & H) \\
\underline{x^3x^4} & & \underline{x^3x^4} & & \underline{xx^3x^3} & & x^2y^2x^3 \\
x^2yx^4 & & x^3x^3y & & xx^3x^2y & & x^2y^2x^2y \\
xyxx^4 & & x^3x^2yx & & xx^3xyx & & x^2y^2xyx \\
\underline{yx^2x^4} & & x^3xyx^2 & & xx^3yx^2 & & x^2y^2yx^2 \\
xy^2x^4 & & x^3yx^3 & & xx^3xy^2 & & x^2y^2xy^2 \\
yxyx^4 & & x^3x^2y^2 & & xx^3yxy & & x^2y^2yxy \\
y^2xx^4 & & x^3xyxy & & xx^3y^2x & & x^2y^2y^2x \\
y^3x^4 & & x^3xy^2x & & xx^3y^3 & & x^2y^2y^3 \\
 & & x^3y^2x^2 & & \underline{yx^3x^3} & & \\
 & & x^3xy^2x & & yx^3x^2y & & \\
 & & x^3xy^3 & & yx^3xyx & & \\
 & & x^3yxy^2 & & yx^3yx^2 & & \\
 & & x^3y^2xy & & yx^3xy^2 & & \\
 & & x^3y^4 & & yx^3yxy & & \\
 & & x^3yx^2y & & yx^3y^2x & & \\
 & & x^3yxyx & & yx^3y^3 & & \\
 & & & & x^3yx^3 & & \\
 & & & & x^3yx^2y & & \\
 & & & & x^3yxyx & & \\
 & & & & x^3y^2x^2 & & \\
 & & & & x^3yxy^2 & & \\
 & & & & x^3y^2xy & & \\
 & & & & x^3y^3x & & \\
 & & & & x^3y^4 & &
\end{array}
$$

Vemos de este modo que la intersección es igual al subespacio $\langle x^7, yx^6\rangle$. Por otro lado, en la suma $(E \cap F) + (E \cap G) + (E \cap H) + (E' \cap F') + (E' \cap G')$, observemos que el primer sumando es el espacio generado por x^7, el segundo es el subespacio generado por yx^6 y x^7, y los demás son nulos. Concluimos así que la 4-upla es multidistributiva.

Ejemplo. Sea ahora $A = k\langle x, y\rangle / I$ donde $R = R_3 \oplus R_4$ es un espacio de relaciones para el ideal I con $R_3 = \langle x^3\rangle$ y $R_4 = \langle y^3x\rangle$. Es claro que R_a y R_b son excluyentes. El elemento y^3x^4 pertenece al subespacio $(V^{(3)} \otimes R_3 \otimes V) \cap (V^{(4)} \otimes R_3) \cap (R_4 \otimes V^{(3)})$. Vemos entonces que esta intersección puede ser no nula.

A continuación definiremos, con las notaciones anteriores, nuevas condiciones que serán utilizadas más adelante, que llamaremos **condiciones extras de nulidad** y escribiremos *(c.e.n.)*:

$$(V^{(b-1)} \otimes R_a \otimes V) \cap (V^{(b)} \otimes R_a) \cap (R_b \otimes V^{(a)}) = 0, \tag{4.2.15}$$

$$(V^{(a-1)} \otimes R_b \otimes V) \cap (V^{(a)} \otimes R_b) \cap (R_a \otimes V^{(b)}) = 0. \tag{4.2.16}$$

Mostremos un ejemplo en el cual estas condiciones se cumplen:

Ejemplo. Sea $A = k\langle x, y\rangle / I$, donde el ideal I está generado por $R = R_3 \oplus R_4$, $R_3 = \langle yx^2\rangle$ y $R_4 = \langle y^4\rangle$. Observemos para simplificar los cálculos que si $a = 3$ y $b = 4$:

- $(V^{(b)} \otimes R_a) \cap (R_b \otimes V^{(a)}) = R_b \otimes R_a$.

- $(V^{(a)} \otimes R_b) \cap (R_a \otimes V^{(b)}) = R_a \otimes R_b$.

Luego, $\{y^5x^2\}$ e $\{yx^2y^4\}$ son bases para $R_b \otimes R_a$ y $R_a \otimes R_b$ respectivamente. Sin embargo, $y^5x^2 \notin V^{(b-1)} \otimes R_a \otimes V$ e $yx^2y^4 \notin V^{(a-1)} \otimes R_b \otimes V$. Concluimos así que se satisfacen las *(c.e.n.)*.

La siguiente proposición muestra que a partir de ciertos datos de $\operatorname{Ker}\delta_2$ y de la verificación de las *(c.e.)* y las *(c.e.n.)* podemos obtener información sobre $\operatorname{Ker}\delta_3$.

Proposición 4.16. *Supongamos que $\operatorname{Ker}\delta_2$ es 2-puro en grados $a+1$ y $b+1$, y que se satisfacen las (c.e.n.) y la segunda relación de las (c.e.). Entonces, $\operatorname{Ker}\delta_3$ es 2-puro en grados $2a$ y $2b$ si y sólo si para todo $n \geq 2a+1$, las 4-uplas (E,F,G,H) y $(E\oplus E', F+F', G+G', H+H')$ son respectivamente distributiva y multidistributiva, donde*

$$\begin{aligned}
E &= V^{(n-a-1)} \otimes J^a_{a+1}, & E' &= V^{(n-b-1)} \otimes J^b_{b+1},\\
F &= I_{n-a-1} \otimes V^{(a+1)}, & F' &= I_{n-b-1} \otimes V^{(b+1)},\\
G &= V^{(n-2a)} \otimes R_a \otimes V^{(a)}, & G' &= V^{(n-a-b)} \otimes R_a \otimes V^{(b)},\\
H &= V^{(n-a-b)} \otimes R_b \otimes V^{(a)}, & H' &= V^{(n-2b)} \otimes R_b \otimes V^{(b)}.
\end{aligned}$$

Antes de demostrar este resultado, observemos lo siguiente:

Observación 4.17. *(i) Si $n < b+1$ entonces $E' = 0$.*

(ii) Si $n < a+b$ entonces $H = G' = H' = 0$.

(iii) Si $n < 2b$ entonces $H' = 0$.

Demostración. Comencemos por probar que la condición es suficiente. Para ello supongamos válidas la distributividad y la multidistributividad de las 4-uplas según corresponda. Ya vimos que valen las igualdades:

$$(\operatorname{Ker}\delta_3)_n = 0 \text{ si } n < 2a, \qquad (\operatorname{Ker}\delta_3)_{2a} = J^a_{2a}.$$

Además, si $2a < n < a+b$, tenemos el subespacio

$$\begin{aligned}
N_n &= E \cap (F+G) = (E\cap F) + (E \cap G)\\
&= I_{n-a-1} \otimes J^a_{a+1} + V^{(n-2a)} \otimes [(V^{(a-1)} \otimes R_a \otimes V) \cap (V^{(a)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(a)})]\\
&= I_{n-a-1} \otimes J^a_{a+1} + V^{(n-2a)} \otimes J^a_{2a}.
\end{aligned}$$

Análogamente a la demostración de la Proposición 4.14, se prueba que $(\operatorname{Ker}\delta_3)_n = A_{n-2a} \otimes J^a_{2a}$.

Para el caso en que $a+b \leq n < 2b$, consideremos el subespacio

$$\begin{aligned}
N_n =& (E\oplus E') \cap (F+F'+G+G'+H)\\
=& (E\cap F) + (E\cap G) + (E \cap H) \oplus (E'\cap F') + (E' \cap G')\\
=& I_{n-a-1} \otimes J^a_{a+1} + V^{(n-2a)} \otimes [(V^{(a-1)} \otimes R_a \otimes V) \cap (V^{(a)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(a)})] +\\
& V^{(n-a-b)} \otimes \underbrace{[(V^{(b-1)} \otimes R_a \otimes V) \cap (V^{(b)} \otimes R_a) \cap (R_b \otimes V^{(a)})]}_{=0 \text{ (c.e.n.)}} \oplus\\
& I_{n-b-1} \otimes J^b_{b+1} + V^{(n-b-a)} \otimes \underbrace{[(V^{(a-1)} \otimes R_b \otimes V) \cap (V^{(a)} \otimes R_b) \cap (R_a \otimes V^{(b)})]}_{=0 \text{ (c.e.n)}}\\
=& I_{n-a-1} \otimes J^a_{a+1} + V^{(n-2a)} \otimes J^a_{2a} \oplus I_{n-b-1} \otimes J^b_{b+1}.
\end{aligned}$$

La demostración de que $(\operatorname{Ker}\delta_3)_n = A_{n-2a}\otimes J^a_{2a}$ es análoga a la de la Proposición 4.14. Observemos que como $(\operatorname{Ker}\delta_3)_n = \frac{N_n}{I_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1}\oplus I_{n-b-1}\otimes J^b_{b+1}}$, la clase de cualquier elemento en $I_{n-b-1}\otimes J^b_{b+1}$ se anula en $(\operatorname{Ker}\delta_3)_n$.

Finalmente, resta analizar el caso en que $n \geq 2b$, en el cual procedemos del mismo modo y usamos además el Lema 4.13, para obtener:

$$N_n = (I_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1} + V^{(n-2a)}\otimes J^a_{2a}) \oplus (I_{n-b-1}\otimes J^b_{b+1} + V^{(n-2b)}\otimes J^b_{2b}).$$

Notemos que los sumandos que involucran grados relacionados con b se analizan como en la situación análoga que involucra a a, debido a que valen las *(c.e.)*. Luego, $\operatorname{Ker}\delta_3$ es 2-puro en grados $2a$ y $2b$.

Recíprocamente, si $\operatorname{Ker}\delta_3$ es 2-puro en grados $2a$ y $2b$, entonces valen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{Ker}\delta_3)_n = 0 && \text{si } n < 2a,\\
&(\operatorname{Ker}\delta_3)_n = A_{n-2a}\otimes J^a_{2a} && \text{si } 2a \leq n < 2b,\\
&(\operatorname{Ker}\delta_3)_n = A_{n-2a}\otimes J^a_{2a}\oplus A_{n-2b}\otimes J^b_{2b} && \text{si } n \geq 2b.
\end{aligned}$$

De manera análoga a lo hecho para δ_2, obtenemos:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Ker}\delta_3)_n &= \frac{(E\oplus E')\cap(F+F'+G+G'+H+H')}{I_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1}\oplus I_{n-b-1}\otimes J^b_{b+1}}\\
&= A_{n-2a}\otimes J^a_{2a}\oplus A_{n-2b}\otimes J^b_{2b} = \frac{V^{(n-2a)}\otimes J^a_{2a}}{I_{n-2a}\otimes J^a_{2a}} \oplus \frac{V^{(n-2b)}\otimes J^b_{2b}}{I_{n-2b}\otimes J^b_{2b}}\\
&= \frac{E\cap G}{I_{n-2a}\otimes J^a_{2a}} \oplus \frac{E\cap H}{I_{n-a-b}\otimes R_b\otimes R_a} \oplus \frac{E'\cap H'}{I_{n-a-b}\otimes R_a\otimes R_b} \oplus \frac{E'\cap G'}{I_{n-2b}\otimes J^b_{2b}}\\
&= \frac{E\cap G}{I_{n-2a}\otimes J^a_{2a}} \oplus \frac{E'\cap G'}{I_{n-2b}\otimes J^b_{2b}}.
\end{aligned}$$

La última igualdad vale pues $E\cap H = E'\cap H' = 0$ como fue probado anteriormente para el análisis de N_n.

Ahora, debido a que $E\cap F = I_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1}$ y como $I_{n-2a}\otimes J^a_{2a} \subseteq I_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1}$, por el Lema 2.20, se satisface la igualdad $(E\cap G)\cap(I_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1}) = I_{n-2a}\otimes J^a_{2a}$.

Así, podemos realizar el siguiente cálculo:

$$\frac{E\cap G}{I_{n-2a}\otimes J^a_{2a}} = \frac{E\cap G}{(E\cap G)\cap(I_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1})} \simeq \frac{(E\cap G)+(E\cap F)}{I_{n-a-1}\otimes J^a_{a+1}}.$$

Los casos que involucran a grados relacionados con b y a los subespacios E', F', G' y H' son análogos. Vemos así que las 4-uplas son respectivamente distributiva y multidistributiva. $\square$

4.2.4 Descripción de $\operatorname{Ker}\delta_i$ para $i > 3$

Para estudiar el subespacio $\operatorname{Ker}\delta_i$ con $i > 3$ necesitamos agregar las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
(V^{(b-1)}\otimes R_a)\cap(R_b\otimes V^{(a-1)}+\cdots+V^{(a-2)}\otimes R_b\otimes V) = 0,\\
(V^{(a-1)}\otimes R_b)\cap(R_a\otimes V^{(b-1)}+\cdots+V^{(b-2)}\otimes R_a\otimes V) = 0,
\end{aligned}$$

que denominaremos **condiciones extras cruzadas** y denotaremos *(c.e.c.)*. Observemos que si se satisface la primera condición de las *(c.e.c.)* y $b-a+1 \leq t \leq b-2$ resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= (V^{(b-1)} \otimes R_a) \cap (R_b \otimes V^{(a-1)} + \cdots + V^{(a-2)} \otimes R_b \otimes V) \\ &\supseteq (V^{(b-1)} \otimes R_a) \cap (V^{(b-1-t)} \otimes R_b \otimes V^{(a-b+t)} + \cdots + V^{(a-2)} \otimes R_b \otimes V) \\ &= V^{(b-1-t)} \otimes [(V^{(t)} \otimes R_a) \cap (R_b \otimes V^{(a-b+t)} + \cdots + V^{(a-b-1+t)} \otimes R_b \otimes V)]. \end{aligned}$$

Luego,

$$(V^{(t)} \otimes R_a) \cap (R_b \otimes V^{(t+a-b)} + \cdots + V^{(t+a-b-1)} \otimes R_b \otimes V) = 0.$$

Análogamente, se prueba que si se satisface la segunda condición de las *(c.e.c.)* y $b-a+1 \leq t \leq a-2$,

$$(V^{(t)} \otimes R_b) \cap (R_a \otimes V^{(t-a+b)} + \cdots + V^{(t-a+b-1)} \otimes R_a \otimes V) = 0.$$

En la demostración del Teorema 4.19 que enunciaremos más adelante aparecerán ciertas intersecciones que pueden no ser nulas como veremos en el siguiente ejemplo. Es decir que las *(c.e.c.)* no siempre se satisfacen.

Ejemplo. Consideremos $i = 4$, $a = 3$, $b = 4$ y $n = 8$ (siguiendo la notación del Teorema 4.19). En este caso, $\frac{i}{2}a = 6$. Sea $A = \frac{k\langle x,y\rangle}{I}$ donde I está generado por $R = R_3 \oplus R_4$, $R_3 = \langle x^2y, xyx, yx^2\rangle$ y $R_4 = \langle x^4, xyx^2, yx^3, y^2x^2, x^3y, xyxy, yx^2y, y^2xy, x^2yx, xy^2x, yxyx, y^3x\rangle$. Queremos calcular la siguiente intersección

$$(V^{(2)} \otimes J_6^3) \cap (R_4 \otimes V^{(4)}) = (V^{(2)} \otimes R_3 \otimes V^{(3)}) \cap (V^{(3)} \otimes R_3 \otimes V^{(2)}) \cap (V^{(4)} \otimes R_3 \otimes V) \cap (V^{(5)} \otimes R_3) \cap (R_4 \otimes V^{(4)}).$$

La intersección $(R_3 \otimes V^{(3)}) \cap (V \otimes R_3 \otimes V^{(2)}) \cap (V^{(2)} \otimes R_3 \otimes V) \cap (V^{(3)} \otimes R_3)$ está generada por el conjunto $\{x^2yx^2y, xyx^2yx, yx^2yx^2\}$. Obtenemos de este modo una base para el subespacio $V^{(2)} \otimes J_6^3$ formada por los vectores $\{x^2x^2yx^2y, xyx^2yx^2y, yxx^2yx^2y, y^2x^2yx^2y, x^2xyx^2yx, xyxyx^2yx, yxxyx^2yx, y^2xyx^2yx, x^2yx^2yx^2, xyyx^2yx^2, yxyx^2yx^2, y^2yx^2yx^2\}$.

Vemos que R_3 y R_4 son excluyentes y que la intersección de $R_4 \otimes V^{(4)}$ con $V^{(2)} \otimes J_6^3$ es no nula.

Utilizaremos las ideas desarrolladas hasta el momento para calcular en general los núcleos de los morfismos δ_i. Recordemos nuevamente que hemos fijado en un principio una base $\mathcal{B}$ para V y por ende, tenemos bases inducidas de los espacios $V^{(m)}$ con $m \geq 2$. Definimos como sigue los morfismos δ_i ($i > 3$) de la resolución minimal.

- Si i **es par**,

$$\delta_i : A \otimes J^a_{\frac{i}{2}a} \oplus A \otimes J^b_{\frac{i}{2}b} \longrightarrow A \otimes J^a_{\frac{i-2}{2}a+1} \oplus A \otimes J^b_{\frac{i-2}{2}b+1}, \tag{4.2.17}$$

  queda definida por las restricciones al dominio de δ_i de los morfismos

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}} &\longmapsto \overline{\alpha v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}}, \\ \overline{\beta} \otimes v_{h_1} \cdots v_{h_{\frac{i}{2}b}} &\longmapsto \overline{\beta v_{h_1} \cdots v_{h_{b-1}}} \otimes v_{h_b} \cdots v_{h_{\frac{i}{2}b}}, \end{aligned}$$

  donde $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in A$, y $v_{j_1} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}}$ y $v_{h_1} \cdots v_{h_{\frac{i}{2}b}}$ pertenecen a las bases inducidas de $V^{(\frac{i}{2}a)}$ y $V^{(\frac{i}{2}b)}$ respectivamente. Extendemos luego por linealidad. Observemos que la buena definición se debe a las siguientes inclusiones:

$$J^a_{\frac{i}{2}a} \subseteq V^{(a-1)} \otimes J^a_{\frac{i-2}{2}a+1}, \qquad J^b_{\frac{i}{2}b} \subseteq V^{(b-1)} \otimes J^b_{\frac{i-2}{2}b+1}.$$

- Si i **es impar**,

$$\delta_i : A \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a+1} \oplus A \otimes J^b_{\frac{i-1}{2}b+1} \longrightarrow A \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a} \oplus A \otimes J^b_{\frac{i-1}{2}b}, \tag{4.2.18}$$

queda definida a partir de las restricciones de los morfismos

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}} &\longmapsto \overline{\alpha v_{j_1}} \otimes v_{j_2} \cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}}, \\ \overline{\beta} \otimes v_{h_1} \cdots v_{h_{\frac{i-1}{2}b+1}} &\longmapsto \overline{\beta v_{h_1}} \otimes v_{h_2} \cdots v_{h_{\frac{i-1}{2}b+1}}, \end{aligned}$$

donde $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in A$, y $v_{j_1} \cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}}$ y $v_{h_1} \cdots v_{h_{\frac{i-1}{2}b}}$ pertenecen a las bases inducidas de $V^{(\frac{i-1}{2}a+1)}$ y $V^{(\frac{i-1}{2}b+1)}$ respectivamente y extendiendo luego por linealidad. La buena definición se debe a las siguientes inclusiones:

$$J^a_{\frac{i-1}{2}a+1} \subseteq V \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a}, \qquad J^b_{\frac{i-1}{2}b+1} \subseteq V \otimes J^b_{\frac{i-1}{2}b}.$$

Comenzaremos a estudiar en detalle el subespacio $\operatorname{Ker} \delta_i$.

• **Caso i par**
Calculemos la imagen al aplicar el morfismo:

$$\begin{aligned} &\delta_i \left(\sum_{j=(j_1,\cdots,j_{\frac{i}{2}a})} \overline{\alpha_j} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}} + \sum_{h=(h_1,\cdots,h_{\frac{i}{2}b})} \overline{\beta_h} \otimes v_{h_1} \cdots v_{h_{\frac{i}{2}b}} \right) \\ &= \sum_{j=(j_1,\cdots,j_{\frac{i}{2}a})} \overline{\alpha_j v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}} + \sum_{h=(h_1,\cdots,h_{\frac{i}{2}b})} \overline{\beta_h v_{h_1} \cdots v_{h_{b-1}}} \otimes v_{h_b} \cdots v_{h_{\frac{i}{2}b}}. \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Para que la imagen se anule, cada una de las sumas debe anularse pues la condición de que R_a y R_b sean excluyentes impide la cancelación de términos cruzados. Miremos grado a grado, recordando que

$$(\operatorname{Ker} \delta_i)_n \subseteq A_{n-\frac{i}{2}a} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a} \oplus A_{n-\frac{i}{2}b} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b}.$$

Si $n < \frac{i}{2}a$, $(\operatorname{Ker} \delta_i)_n = 0$. Supongamos entonces que $n \geq \frac{i}{2}a$. Para que el elemento dado por (4.2.19) se anule, debe suceder que:

$$\sum_{j=(j_1,\cdots j_{\frac{i}{2}a})} \alpha_j v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}} \in I_{n-\frac{i-2}{2}a-1} \;\text{ y } \sum_{h=(h_1,\cdots h_{\frac{i}{2}b})} \beta_h v_{h_1} \cdots v_{h_{b-1}} \in I_{n-\frac{i-2}{2}b-1}.$$

Resulta que $I_{n-\frac{i-2}{2}a-1} = 0$, pues $n - \frac{i-2}{2}a - 1 < a$. Luego, $(\operatorname{Ker} \delta_i)_n = 0$.

Si $n = \frac{i}{2}a + 1$, $(\operatorname{Ker} \delta_i)_{\frac{i}{2}a+1} \subseteq (A \otimes J^a_{\frac{i}{2}a})_{\frac{i}{2}a+1} \oplus (A \otimes J^b_{\frac{i}{2}b})_{\frac{i}{2}b+1} = (A_1 \otimes J^a_{\frac{i}{2}a}) \oplus 0$. Luego,

$$(\operatorname{Ker} \delta_i)_{\frac{i}{2}a+1} = (A_1 \otimes J^a_{\frac{i}{2}a}) \cap (I_a \otimes J^a_{\frac{i-2}{2}a+1}) = (V \otimes J^a_{\frac{i}{2}a}) \cap (R_a \otimes J^a_{\frac{i-2}{2}a+1}) = J^a_{\frac{i}{2}a+1}.$$

Sea ahora $n = \frac{i}{2}a + m$ con $2 \leq m \leq a - 1$. Para $m < \frac{i}{2}(b - a)$ tenemos que distinguir entre los dos casos que detallaremos a continuación.

- Si $m+a-1<b$, en este caso R_b no aparece en el ideal I_{m+a-1}, entonces el núcleo satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ker}\delta_i)_n &= (V^{(m)}\otimes J^a_{\frac{i}{2}a})\cap(I_{m+a-1}\otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)})\\ &= (V^{(m)}\otimes J^a_{\frac{i}{2}a})\cap[(R_a\otimes V^{(m-1)}+\cdots+V^{(m-1)}\otimes R_a)\otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}]\\ &\subseteq [(V^{(m)}\otimes R_a)\cap(R_a\otimes V^{(m)}+\cdots+V^{(m-1)}\otimes R_a\otimes V)]\otimes V^{(\frac{i-2}{2}a)}\\ &= V^{(m-1)}\otimes J^a_{a+1}\otimes V^{(\frac{i-2}{2}a)}.\end{aligned}$$

  Así, si un elemento está en la intersección que caracteriza al núcleo, sus últimas coordenadas deben pertenecer a $R_a\otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}$ y a $V\otimes J^a_{\frac{i}{2}a}$; luego, $(\operatorname{Ker}\delta_i)_n\subseteq V^{(m-1)}\otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1}$. La inclusión en el otro sentido es trivial pues $J^a_{\frac{i}{2}a+1}\subseteq V\otimes J^a_{\frac{i}{2}a}$ y $V^{(m-1)}\otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1}\subseteq V^{(m-1)}\otimes R_a\otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}\subseteq I_{m+a-1}\otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}$.

- Si $m+a-1\geq b$,

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ker}\delta_i)_n =&(V^{(m)}\otimes J^a_{\frac{i}{2}a})\cap[(R_a\otimes V^{(m-1)}+\cdots+V^{(m-1)}\otimes R_a)\otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}+\\ &(R_b\otimes V^{(m+a-b-1)}+\cdots+V^{(m+a-b-1)}\otimes R_b)\otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}].\end{aligned}$$

Si $m=\frac{i}{2}(b-a)$, entonces $n=\frac{i}{2}b$ e $I_{n-\frac{i-2}{2}b-1}=I_{b-1}$. Luego,

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ker}\delta_i)_{\frac{i}{2}b} =&(V^{(\frac{i}{2}(b-a))}\otimes J^a_{\frac{i}{2}a}\oplus J^b_{\frac{i}{2}b})\cap[(R_a\otimes V^{(\frac{i}{2}(b-a)-1)}+\cdots+V^{(\frac{i}{2}(b-a)-1)}\otimes R_a)\otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}+\\ &(R_b\otimes V^{(\frac{i-2}{2}(b-a)-1)}+\cdots+V^{(\frac{i-2}{2}(b-a)-1)}\otimes R_b)\otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}].\end{aligned}$$

Consideremos ahora el caso en que $m>\frac{i}{2}(b-a)$, en el cual podrían aparecer los subespacios que involucran a R_b. Tenemos entonces la siguiente caracterización para el núcleo:

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ker}\delta_i)_n =&(V^{(m)}\otimes J^a_{\frac{i}{2}a}\oplus V^{(n-\frac{i}{2}b)}\otimes J^b_{\frac{i}{2}b})\cap(I_{n-\frac{i-2}{2}a-1}\otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}+I_{n-\frac{i-2}{2}b-1}\otimes V^{(\frac{i-2}{2}b+1)})\\ =&(V^{(m)}\otimes J^a_{\frac{i}{2}a}\oplus V^{(n-\frac{i}{2}b)}\otimes J^b_{\frac{i}{2}b})\cap[(V^{(m-1)}\otimes R_a+V^{(m-2)}\otimes R_a\otimes V+\cdots+\\ &R_a\otimes V^{(m-1)})\otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}+(V^{(m+a-b-1)}\otimes R_b+V^{(m+a-b-2)}\otimes R_b\otimes V+\cdots+\\ &R_b\otimes V^{(m+a-b-1)})\otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}+(V^{(n-a-\frac{i-2}{2}b-1)}\otimes R_a+\\ &V^{(n-a-\frac{i-2}{2}b-2)}\otimes R_a\otimes V+\cdots+R_a\otimes V^{(n-a-\frac{i-2}{2}b-1)})\otimes V^{(\frac{i-2}{2}b+1)}+\\ &(V^{(n-\frac{i}{2}b-1)}\otimes R_b+V^{(n-\frac{i}{2}b-2)}\otimes R_b\otimes V+\cdots+R_b\otimes V^{(n-\frac{i}{2}b-1)})\otimes V^{(\frac{i-2}{2}b+1)}].\end{aligned}$$

Observemos que $V^{(m)}=A_m$ y $V^{(n-\frac{i}{2}b)}=A_{n-\frac{i}{2}b}$ porque $n-\frac{i}{2}b<n-\frac{i}{2}a\leq a-1$. Además, como $n-\frac{i-2}{2}b-1>b-1$, R_b aparece en $I_{n-\frac{i-2}{2}b-1}$.

Finalmente, analizamos el caso $n\geq\frac{i+2}{2}a$. En particular, $n-\frac{i}{2}a\geq a$, por lo cual habrá que dividir por las relaciones correpondientes en cada grado. Tenemos entonces la siguiente descripción:

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ker}\delta_i)_n &= \frac{N_n}{I_{n-\frac{i}{2}a}\otimes J^a_{\frac{i}{2}a}} && \text{si } n<\frac{i}{2}b+a,\\ (\operatorname{Ker}\delta_i)_n &= \frac{N_n}{I_{n-\frac{i}{2}a}\otimes J^a_{\frac{i}{2}a}\oplus I_{n-\frac{i}{2}b}\otimes J^b_{\frac{i}{2}b}} && \text{si } n\geq\frac{i}{2}b+a,\end{aligned}$$

donde

$$N_n = (V^{(n-\frac{i}{2}a)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a} \oplus V^{(n-\frac{i}{2}b)} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b}) \cap (I_{n-\frac{i-2}{2}a-1} \otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)} + I_{n-\frac{i-2}{2}b-1} \otimes V^{(\frac{i-2}{2}b+1)}),$$

y $V^{(n-\frac{i}{2}b)} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b} = 0$ si $n < \frac{i}{2}b$.

• **Caso i impar** Observemos que los casos $i = 1$ e $i = 3$ ya fueron estudiados. Entonces, para $i > 3$,

$$\begin{aligned} &\delta_i\left(\sum_{j=(j_1,\cdots,j_{\frac{i-1}{2}a+1})} \overline{\alpha_j} \otimes v_{j_1}\cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}} + \sum_{h=(h_1,\cdots,h_{\frac{i-1}{2}b+1})} \overline{\beta_h} \otimes v_{h_1}\cdots v_{h_{\frac{i-1}{2}b+1}}\right) \\ &= \sum_{j=(j_1,\cdots,j_{\frac{i-1}{2}a+1})} \overline{\alpha_j v_{j_1}} \otimes v_{j_2}\cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}} + \sum_{h=(h_1,\cdots,h_{\frac{i-1}{2}b+1})} \overline{\beta_h v_{h_1}} \otimes v_{h_2}\cdots v_{h_{\frac{i-1}{2}b+1}}. \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

Para que el resultado se anule, cada una de las sumas debe ser nula pues no se pueden cancelar términos cruzados ya que R_a y R_b son excluyentes. Miremos nuevamente grado a grado:

$$(\operatorname{Ker}\delta_i)_n \subseteq A_{n-\frac{i-1}{2}a-1} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a+1} \oplus A_{n-\frac{i-1}{2}b-1} \otimes J^b_{\frac{i-1}{2}b+1}.$$

Si $n < \frac{i-1}{2}a+1$, $(\operatorname{Ker}\delta_i)_n = 0$. Supongamos entonces que $n \geq \frac{i-1}{2}a+1$.

Para que un elemento esté en el núcleo, debe satisfacerse que

$$\sum_{j=(j_1,\cdots,j_{\frac{i-1}{2}a+1})} \alpha_j v_{j_1} \in I_{n-\frac{i-1}{2}a} \text{ y que } \sum_{h=(h_1,\cdots,h_{\frac{i-1}{2}b+1})} \beta_h v_{h_1} \in I_{n-\frac{i-1}{2}b}.$$

Así, es claro que si $n \leq \frac{i+1}{2}a-1$ entonces $(\operatorname{Ker}\delta_i)_n = 0$.

Por otro lado, describimos al núcleo en grado $\frac{i+1}{2}a$ como sigue:

$$\begin{aligned} (\operatorname{Ker}\delta_i)_{\frac{i+1}{2}a} &= (V^{(a-1)} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a+1}) \cap (R_a \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a)}) \\ &= (V^{(a-1)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i-3}{2}a+1)}) \cap (V^{(a)} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a}) \cap (R_a \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a)}). \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

Como $\operatorname{Ker}\delta_2$ es 2-puro en grados $a+1$ y $b+1$, por la Proposición 4.14 se satisface (4.2.5), y por la Proposición 4.12, tenemos la inclusión $(V^{(a-1)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(a-1)}) \subseteq V^{(a-2)} \otimes R_a \otimes V$. Además, por el Lema 4.13, vale que $(V^{(a-1)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(a-1)}) = J^a_{2a-1}$. Así, en (4.2.21),

$$\begin{aligned} (\operatorname{Ker}\delta_i)_{\frac{i+1}{2}a} &= \{[(V^{(a-1)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(a-1)})] \otimes V^{(\frac{i-3}{2}a+1)}\} \cap (V^{(a)} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a}) \\ &= (J^a_{2a-1} \otimes V^{(\frac{i-3}{2}a+1)}) \cap (V^{(a)} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a}) = J^a_{\frac{i+1}{2}a}. \end{aligned}$$

Observemos que como $a < b$, no aparecen los subespacios que involucran a R_b y que sólo aparecen relaciones en la descripción de $(\operatorname{Ker}\delta_i)_n$ si $n > \frac{i+1}{2}a$.

Para $n \geq \frac{i+1}{2}a+1$,

$$(\operatorname{Ker}\delta_i)_n = \frac{N_n}{I_{n-\frac{i-1}{2}a-1} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a+1}} \qquad \text{si } n < a + \frac{i-1}{2}b+1,$$

$$(\operatorname{Ker}\delta_i)_n = \frac{N_n}{I_{n-\frac{i-1}{2}a-1} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a+1} \oplus I_{n-\frac{i-1}{2}b-1} \otimes J^b_{\frac{i-1}{2}b+1}} \qquad \text{si } n \geq a + \frac{i-1}{2}b+1,$$

donde

- $N_n = (V^{(n-\frac{i-1}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a+1}) \cap [(R_a \otimes V^{(n-\frac{i+1}{2}a-1)} + \cdots + V^{(n-\frac{i+1}{2}a-1)} \otimes R_a) \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a+1)} + V^{(n-\frac{i+1}{2}a)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a)}]$, si $n < \min\{\frac{i-1}{2}b+1, \frac{i-1}{2}a+b\}$.

- $N_n = (V^{(n-\frac{i-1}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a+1}) \cap [(R_a \otimes V^{(n-\frac{i+1}{2}a-1)} + \cdots + V^{(n-\frac{i+1}{2}a-1)} \otimes R_a) \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a+1)} + (R_b \otimes V^{(n-\frac{i-1}{2}a-b-1)} + \cdots + V^{(n-\frac{i-1}{2}a-b-1)} \otimes R_b) \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a+1)} + V^{(n-\frac{i+1}{2}a)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a)} + V^{(n-\frac{i-1}{2}a-b)} \otimes R_b \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a)}]$, si $\frac{i-1}{2}a + b \leq n < \frac{i-1}{2}b+1$.

  Observemos que si $n = \frac{i-1}{2}a+b$ entonces el término $(R_b \otimes V^{(n-\frac{i-1}{2}a-b-1)} + \cdots + V^{(n-\frac{i-1}{2}a-b-1)} \otimes R_b) \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a+1)}$ es por definición nulo.

- $N_n = (V^{(n-\frac{i-1}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a+1} \oplus V^{(n-\frac{i-1}{2}b-1)} \otimes J^b_{\frac{i-1}{2}b+1}) \cap \{[(R_a \otimes V^{(n-\frac{i+1}{2}a-1)} + \cdots + V^{(n-\frac{i+1}{2}a-1)} \otimes R_a) \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a+1)}] + [(R_b \otimes V^{(n-\frac{i-1}{2}a-b-1)} + \cdots + V^{(n-\frac{i-1}{2}a-b-1)} \otimes R_b) \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a+1)}] + [V^{(n-\frac{i+1}{2}a)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a)}] + [V^{(n-\frac{i-1}{2}a-b)} \otimes R_b \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a)}] + [(R_a \otimes V^{(n-a-\frac{i-1}{2}b-1)} + \cdots + V^{(n-a-\frac{i-1}{2}b-1)} \otimes R_a) \otimes V^{(\frac{i-1}{2}b+1)}] + [(R_b \otimes V^{(n-\frac{i+1}{2}b-1)} + \cdots + V^{(n-\frac{i+1}{2}b-1)} \otimes R_b) \otimes V^{(\frac{i-1}{2}b+1)}] + [V^{(n-a-\frac{i-1}{2}b)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i-1}{2}b)}] + [V^{(n-\frac{i+1}{2}b)} \otimes R_b \otimes V^{(\frac{i-1}{2}b)}]\}$, si $n \geq \frac{i-1}{2}b$.

  Observemos que el segundo espacio que aparece en la intersección puede escribirse como $\sum_{l=1}^{8} F_l$ donde F_l denota al l-ésimo término de esta suma. Luego, consideremos las siguientes posibilidades:

  - Si $n < \frac{i-1}{2}a + b$ entonces $n < \frac{i+1}{2}b$ y así, $F_2 = F_4 = F_6 = F_8 = 0$. Además, como $i \neq 3$, resulta $n < a + \frac{i-1}{2}b$ y por lo tanto $F_5 = F_7 = 0$. Concluimos finalmente que $N_n = F_1 + F_3$.
  - Si $n = \frac{i-1}{2}a + b$, entonces $n < \frac{i+1}{2}b$ y así, $N_n = F_1 + F_3 + F_4 + F_5 + F_7$.
  - Supongamos finalmente que $n > \frac{i-1}{2}a + b$. En este caso,

$$N_n = \begin{cases} F_1 + F_2 + F_3 + F_4 & \text{si } \; n < \frac{i+1}{2}b, \\ F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_7 & \text{si } \; n = a + \frac{i-1}{2}b, \\ F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_7 & \text{si } \; a + \frac{i-1}{2}b < n < \frac{i+1}{2}b, \\ F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8 & \text{si } \; n \geq \frac{i+1}{2}b. \end{cases}$$

Observación 4.18. *Resumimos la información obtenida hasta ahora.*
*Si i **es par**, consideramos los siguientes espacios:*

- $E_a = V^{(n-\frac{i}{2}a)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a}$,
- $E_b = V^{(n-\frac{i}{2}b)} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b}$,
- $F_1 = (R_a \otimes V^{(n-\frac{i+2}{2}a)} + \cdots + V^{(n-\frac{i+2}{2}a)} \otimes R_a) \otimes V^{(\frac{i}{2}a)}$,
- $F_2 = V^{(n-\frac{i+2}{2}a+1)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i}{2}a-1)} + \cdots + V^{(n-\frac{i}{2}a-1)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}$,
- $F_3 = (R_b \otimes V^{(n-\frac{i}{2}a-b)} + \cdots + V^{(n-\frac{i}{2}a-b)} \otimes R_b) \otimes V^{(\frac{i}{2}a)}$,
- $F_4 = (R_a \otimes V^{(n-a-\frac{i}{2}b)} + \cdots + V^{(n-a-\frac{i}{2}b)} \otimes R_a) \otimes V^{(\frac{i}{2}b)}$,
- $F_5 = (R_b \otimes V^{(n-\frac{i+2}{2}b)} + \cdots + V^{(n-\frac{i+2}{2}b)} \otimes R_b) \otimes V^{(\frac{i}{2}b)}$,

- $F_6 = V^{(n-\frac{i+2}{2}b+1)} \otimes R_b \otimes V^{(\frac{i}{2}b-1)} + \cdots + V^{(n-\frac{i}{2}b-1)} \otimes R_b \otimes V^{(\frac{i-2}{2}b+1)}$,
- $F_7 = V^{(n-\frac{i}{2}a-b+1)} \otimes R_b \otimes V^{(\frac{i}{2}a-1)} + \cdots + V^{(n-\frac{i-2}{2}a-b-1)} \otimes R_b \otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}$,
- $F_8 = V^{(n-a-\frac{i}{2}b+1)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i}{2}b-1)} + \cdots + V^{(n-a-\frac{i-2}{2}b-1)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i-2}{2}b+1)}$.

En este caso podemos describir al espacio N_n para $n \geq \frac{i+2}{2}a$ de acuerdo a los siguientes casos:

(1) $n < \frac{i}{2}a + b - 1$,

  (1.1) $n < \frac{i}{2}b$, $N_n = E_a \cap (F_1 + F_2)$,

  (1.2) $n \geq \frac{i}{2}b$, $N_n = (E_a \oplus E_b) \cap (F_1 + F_2)$,

(2) $n = \frac{i}{2}a + b - 1$,

  (2.1) $n < \frac{i}{2}b$, $N_n = E_a \cap (F_1 + F_2 + F_7)$,

  (2.2) $n \geq \frac{i}{2}b$, $N_n = (E_a \oplus E_b) \cap (F_1 + F_2 + F_7)$,

(3) $n \geq \frac{i}{2}a + b$,

  (3.1) $n < \frac{i}{2}b$, $N_n = E_a \cap (F_1 + F_2 + F_3 + F_7)$,

  (3.2) $n \geq \frac{i}{2}b$,

   (3.2.1) $n < \frac{i+2}{2}b - 1$,

    (3.2.1.1) $n < a + \frac{i}{2}b - 1$, $N_n = (E_a \cap E_b) \cap (F_1 + F_2 + F_3 + F_7)$,

    (3.2.1.2) $n = a + \frac{i}{2}b - 1$, $N_n = (E_a \cap E_b) \cap (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_7)$,

    (3.2.1.3) $n \geq a + \frac{i}{2}b$, $N_n = (E_a \cap E_b) \cap (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_7 + F_8)$,

   (3.2.2) $n = \frac{i+2}{2}b - 1$, $N_n = (E_a \oplus E_b) \cap (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_6 + F_7 + F_8)$,

   (3.2.3) $n > \frac{i+2}{2}b$, $N_n = (E_a \cap E_b) \cap (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8)$.

*Si i **es impar**, consideramos los siguientes espacios:*

- $E_a = V^{(n-\frac{i-1}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a+1}$,
- $E_b = V^{(n-\frac{i-1}{2}b-1)} \otimes J^b_{\frac{i-1}{2}b+1}$,
- $F_1 = (R_a \otimes V^{(n-\frac{i+1}{2}a-1)} + \cdots + V^{(n-\frac{i+1}{2}a-1)} \otimes R_a) \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a+1)}$,
- $F_2 = (R_b \otimes V^{(n-\frac{i-1}{2}a-b-1)} + \cdots + V^{(n-\frac{i-1}{2}a-b-1)} \otimes R_b) \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a+1)}$,
- $F_3 = V^{(n-\frac{i+1}{2}a)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a)}$,
- $F_4 = V^{(n-\frac{i-1}{2}a-b)} \otimes R_b \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a)}$,
- $F_5 = (R_a \otimes V^{(n-a-\frac{i-1}{2}b-1)} + \cdots + V^{(n-a-\frac{i-1}{2}b-1)} \otimes R_a) \otimes V^{(\frac{i-1}{2}b+1)}$,
- $F_6 = (R_b \otimes V^{(n-\frac{i+1}{2}b-1)} + \cdots + V^{(n-\frac{i+1}{2}b-1)} \otimes R_b) \otimes V^{(\frac{i-1}{2}b+1)}$,
- $F_7 = V^{(n-a-\frac{i-1}{2}b)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i-1}{2}b)}$,
- $F_8 = V^{(n-\frac{i+1}{2}b)} \otimes R_b \otimes V^{(\frac{i-1}{2}b)}$.

Podemos describir al espacio N_n para $n > \frac{i+1}{2}a$ de acuerdo a los siguientes casos:

(1) $n < \frac{i-1}{2}b + 1$,

(1.1) $n < \frac{i-1}{2}a + b$, $N_n = E_a \cap (F_1 + F_3)$,

(1.2) $n = \frac{i-1}{2}a + b$, $N_n = E_a \cap (F_1 + F_3 + F_4)$,

(1.3) $n > \frac{i-1}{2}a + b$, $N_n = E_a \cap (F_1 + F_2 + F_3 + F_4)$.

(2) $n \geq \frac{i-1}{2}b + 1$,

(2.1) $n < \frac{i-1}{2}a + b$, $N_n = (E_a \oplus E_b) \cap (F_1 + F_3)$,

(2.2) $n = \frac{i-1}{2}a + b$, $N_n = (E_a \oplus E_b) \cap (F_1 + F_3 + F_4)$,

(2.3) $n > \frac{i-1}{2}a + b$,

(2.3.1) $n < a + \frac{i-1}{2}b$, $N_n = (E_a \oplus E_b) \cap (F_1 + F_2 + F_3 + F_4)$,

(2.3.2) $a + \frac{i-1}{2}b \leq n < \frac{i+1}{2}b$, $N_n = (E_a \oplus E_b) \cap (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_7)$,

(2.3.3) $n \geq \frac{i+1}{2}b$, $N_n = (E_a \oplus E_b) \cap (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8)$.

Para comprender mejor lo que hemos resumido en la Observación 4.18, miremos cuándo se anulan los espacios F_l en el caso en que i es par 8el caso i impar es análogo):

- F_1 y F_2 nunca se anulan si $n \geq \frac{i+2}{2}a$,
- $F_3 = 0$ si y sólo si $n < \frac{i}{2}a + b$,
- $F_4 = 0$ si y sólo si $n < a + \frac{i}{2}b$,
- $F_5 = 0$ si y sólo si $n < \frac{i+2}{2}b$,
- $F_6 = 0$ si y sólo si $n < \frac{i+2}{2}b - 1$, o equivalentemente para $n \leq \frac{i+2}{2}b$,
- $F_7 = 0$ si y sólo si $n < \frac{i}{2}a + b - 1$, o equivalentemente para $n \leq \frac{i}{2}a + b$,
- $F_8 = 0$ si y sólo si $n \leq a + \frac{i}{2}b$.

Además, como $\frac{i-2}{2}a < \frac{i-2}{2}b$ si $i \neq 2$ (el caso $i = 2$ fue desarrollado previamente), resulta que $\frac{i}{2}a + b < \frac{i}{2}b + a$, luego no aparecen los términos correspondientes a estos grados en el subespacio N_n.

Teorema 4.19. *Sea $i \geq 4$. Supongamos que para todo j tal que $j < i$, $\operatorname{Ker}\delta_j$ es 2-puro en los siguientes grados:*

$$\begin{cases} \frac{j}{2}a + 1 \ \text{ y } \ \frac{j}{2}b + 1 & \text{si } j \text{ es par,} \\ \frac{j+1}{2}a \ \text{ y } \ \frac{j+1}{2}b & \text{si } j \text{ es impar.} \end{cases}$$

Supongamos además que se satisfacen las (c.e.), las (c.e.n.) y las (c.e.c.).

Para que $\operatorname{Ker}\delta_i$ sea 2-puro en grados:

$$\begin{cases} \frac{i}{2}a + 1 \ \text{ e } \ \frac{i}{2}b + 1 & \text{si } i \text{ es par,} \\ \frac{i+1}{2}a \ \text{ e } \ \frac{i+1}{2}b & \text{si } i \text{ es impar,} \end{cases}$$

es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes condiciones:

- *Si i es par:*

  (i) (E_a, B_1, B_2) *es distributiva para* $n = \frac{i}{2}a + m$, *con* $\max\{2, b-a+1\} \leq m < \min\{a, \frac{i}{2}(b-a)\}$,

  (ii) $(E_a \oplus E_b, B_1 + B_2, B_3 + B_4)$ *es multidistributiva para* $n = \frac{i}{2}a + m$, *con* $\max\{2, \frac{i}{2}(b-a)\} \leq m \leq a-1$,

  (iii) $(E_a \oplus E_b, (F_1 + F_3) + F_2 + F_7, (F_4 + F_5) + F_6 + F_8)$ *es multidistributiva para cualquier* $n \geq \frac{i+2}{2}a$.

- *Si i es impar, la condición es:*

  (i) $(E_a \oplus E_b, (F_1+F_2)+F_3+F_4, (F_5+F_6)+F_7+F_8)$ *es multidistributiva para todo* $n \geq \frac{i+1}{2}a+1$.

Donde E_a*,* E_b *y* F_l*,* $1 \leq l \leq 8$*, están definidos como en la Observación 4.18 y*

$$
\begin{aligned}
B_1 &= (V^{(n-\frac{i}{2}a-1)} \otimes R_a + \cdots + R_a \otimes V^{(n-\frac{i}{2}a-1)}) \otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)},\\
B_2 &= (V^{(n-\frac{i-2}{2}a-b-1)} \otimes R_b + \cdots + R_b \otimes V^{(n-\frac{i-2}{2}a-b-1)}) \otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)},\\
B_3 &= (V^{(n-a-\frac{i-2}{2}b-1)} \otimes R_a + \cdots + R_a \otimes V^{(n-a-\frac{i-2}{2}b-1)}) \otimes V^{(\frac{i-2}{2}b+1)},\\
B_4 &= (V^{(n-\frac{i}{2}b-1)} \otimes R_b + \cdots + R_b \otimes V^{(n-\frac{i}{2}b-1)}) \otimes V^{(\frac{i-2}{2}b+1)}.
\end{aligned}
$$

Demostración.

Caso 1: i par. Sabemos que

$$(\operatorname{Ker}\delta_i)_n = 0 \ \text{ si } \ n \leq \frac{i}{2}a, \qquad (\operatorname{Ker}\delta_i)_{\frac{i}{2}a+1} = J^a_{\frac{i}{2}a+1}.$$

También vimos que para $n = \frac{i}{2}a + m$, con $2 \leq m \leq a-1$, se verifican los siguientes resultados:

- Si $m < \min\{\frac{i}{2}(b-a), b-a+1\}$, entonces

$$(\operatorname{Ker}\delta_i)_n = V^{(m-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1} = A_{m-1} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1}.$$

- Si $b-a+1 \leq m < \frac{i}{2}(b-a)$, entonces

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{Ker}\delta_i)_n &= E_a \cap (B_1 + B_2)\\
&=_{\text{dist.}} (E_a \cap B_1) + (E_a \cap B_2) \subseteq E_a \cap B_1 = V^{(m-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1},
\end{aligned}
\tag{4.2.22}
$$

  donde la inclusión es válida ya que:

$$
\begin{aligned}
E_a \cap B_2 &= (V^{(m)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a}) \cap [(V^{(m+a-b-1)} \otimes R_b + \cdots + R_b \otimes V^{(m+a-b-1)}) \otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}]\\
&\subseteq [(V^{(m)} \otimes R_a) \cap (R_b \otimes V^{(m+a-b)} + \cdots + V^{(m+a-b-1)} \otimes R_b \otimes V)] \otimes V^{(\frac{i-2}{2}a)}\\
&=_{\text{(c.e.c.)}} 0.
\end{aligned}
$$

  Además, la inclusión en el otro sentido se satisface pues $V^{(m-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1} = E_a \cap B_1 \subseteq E_a \cap (B_1 + B_2)$. Luego, $(\operatorname{Ker}\delta_i)_n = A_{m-1} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1}$.

- Si $m \geq \frac{i}{2}(b-a)$, entonces describimos al núcleo como sigue:

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ker}\,\delta_i)_n &= (E_a \oplus E_b) \cap (B_1 + B_2 + B_3 + B_4) \\ &=_{\text{multidist.}} (E_a \cap B_1 + E_a \cap B_2) \oplus (E_b \cap B_3 + E_b \cap B_4) \\ &= V^{(m-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1} \oplus V^{(n-\frac{i}{2}b-1)} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b+1} \\ &= A_{m-1} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1} \oplus A_{n-\frac{i}{2}b-1} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b+1}.\end{aligned}$$

  Observemos que en la anteúltima igualdad empleamos el mismo razonamiento que en el caso anterior para el primer sumando y que el segundo sumando se deduce en forma análoga a lo desarrollado para el caso que involucra a R_a. Además, es necesario utilizar que:

$$\begin{aligned}E_b \cap B_3 =& (V^{(n-\frac{i}{2}b)} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b}) \otimes [(V^{(n-a-\frac{i-2}{2}b-1)} \otimes R_a + \cdots + R_a \otimes V^{(n-a-\frac{i-2}{2}b-1)})] \otimes V^{(\frac{i-2}{2}b+1)} \\ \subseteq& [(V^{(n-\frac{i}{2}b)} \otimes R_b) \cap (R_a \otimes V^{(n-a-\frac{i-2}{2}b)} + \cdots + V^{(n-a-\frac{i-2}{2}b-1)} \otimes R_a \otimes V)] \otimes V^{(\frac{i-2}{2}b)} = 0,\end{aligned}$$

  donde la última igualdad proviene de las *(c.e.c.)*, teniendo en cuenta que $n - \frac{i}{2}b \leq \frac{i}{2}(a-b) + a - 1 \leq a - 1$.

- Sea ahora $n \geq \frac{i+2}{2}a$. Demostraremos a continuación sólo el último de los casos descriptos en la Observación 4.18 ya que el resto es más sencillo de analizar. Para ello, observemos primero que:

  - $E_a \cap (F_1 + F_3) = I_{n-\frac{i}{2}a} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a}$.
  - $E_b \cap (F_4 + F_5) = I_{n-\frac{i}{2}b} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b}$.
  - $F_1 + F_2 + F_3 + F_7 = I_{n-\frac{i-2}{2}a-1} \otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}$.
  - $F_4 + F_5 + F_6 + F_8 = I_{n-\frac{i-2}{2}b-1} \otimes V^{(\frac{i-2}{2}b+1)}$.
  - $E_a \cap F_2 = (V^{(n-\frac{i}{2}a)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a}) \cap (V^{(n-\frac{i+2}{2}a+1)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i}{2}a-1)} + \cdots + V^{(n-\frac{i}{2}a-1)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}) = V^{(n-\frac{i+1}{2}a+1)} \otimes [(V^{(a-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a}) \cap (R_a \otimes V^{(\frac{i}{2}a-1)} + \cdots + V^{(a-2)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)})] \subseteq V^{(n-\frac{i+2}{2}a+1)} \otimes [(V^{(a-1)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(a-1)} + \cdots + V^{(a-2)} \otimes R_a \otimes V)] \otimes J^a_{\frac{i-2}{2}a} =_{\text{(c.e.)}} V^{(n-\frac{i+2}{2}a+1)} \otimes V^{(a-2)} \otimes J^a_{a+1} \otimes J^a_{\frac{i-2}{2}a} = V^{(n-\frac{i}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1}$.

    La inclusión en el otro sentido resulta trivial usando que:

$$\begin{aligned}V^{(n-\frac{i}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1} &\subseteq V^{(n-\frac{i}{2}a)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a}, \\ V^{(n-\frac{i}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1} &\subseteq V^{(n-\frac{i}{2}a-1)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}.\end{aligned}$$

    Por lo tanto, $E_a \cap F_2 = V^{(n-\frac{i}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1}$.
  - Del mismo modo, si utilizamos la segunda relación de las *(c.e.)* resulta que $E_b \cap F_6 = V^{(n-\frac{i}{2}b-1)} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b+1}$.
  - $E_a \cap F_7 = (V^{(n-\frac{i}{2}a)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a}) \cap (V^{(n-\frac{i}{2}a-b+1)} \otimes R_b \otimes V^{(\frac{i}{2}a-1)} + \cdots + V^{(n-\frac{i-2}{2}a-b-1)} \otimes R_b \otimes V^{(\frac{i-2}{2}a+1)}) \subseteq V^{(n-\frac{i}{2}a-b+1)} \otimes [(V^{(b-1)} \otimes R_a) \cap (R_b \otimes V^{(a-1)} + \cdots + V^{(a-2)} \otimes R_b \otimes V)] \otimes V^{(\frac{i-2}{2}a)} = 0$, donde la última igualdad se sigue de las *(c.e.c.)*.

– $E_b \cap F_8 = (V^{(n-\frac{i}{2}b)} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b}) \cap (V^{(n-a-\frac{i}{2}b+1)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i}{2}b-1)} + \cdots + V^{(n-a-\frac{i-2}{2}b-1)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i-2}{2}b+1)}) \subseteq V^{(n-a-\frac{i}{2}b+1)} \otimes [(V^{(a-1)} \otimes R_b) \cap (R_a \otimes V^{(b-1)} + \cdots + V^{(b-2)} \otimes R_a \otimes V)] \otimes V^{(\frac{i-2}{2}b)} = 0$ donde, nuevamente, empleamos las *(c.e.c.)* en la última igualdad.

Tenemos de este modo que

$$\begin{aligned} N_n &= (E_a \oplus E_b) \cap (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8) \\ &=_{\text{multdist.}} E_a \cap (F_1 + F_3) + E_a \cap F_2 + E_a \cap F_7 + E_b \cap (F_4 + F_5) + E_b \cap F_6 + E_b \cap F_8 \\ &= I_{n-\frac{i}{2}a} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a} + V^{(n-\frac{i}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1} + I_{n-\frac{i}{2}b} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b} + V^{(n-\frac{i}{2}b-1)} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b+1}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} (\operatorname{Ker}\delta_i)_n &= \frac{N_n}{I_{n-\frac{i}{2}a} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a} \oplus I_{n-\frac{i}{2}b} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b}} \\ &= \frac{(I_{n-\frac{i}{2}a} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a} + V^{(n-\frac{i}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1}) \oplus (I_{n-\frac{i}{2}b} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b} + V^{(n-\frac{i}{2}b-1)} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b+1})}{I_{n-\frac{i}{2}a} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a} \oplus I_{n-\frac{i}{2}b} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b}} \\ &\simeq \frac{I_{n-\frac{i}{2}a} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a} + V^{(n-\frac{i}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1}}{I_{n-\frac{i}{2}a} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a}} \oplus \frac{I_{n-\frac{i}{2}b} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b} + V^{(n-\frac{i}{2}b-1)} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b+1}}{I_{n-\frac{i}{2}b} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b}} \\ &\simeq \frac{V^{(n-\frac{i}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1}}{(I_{n-\frac{i}{2}a} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a}) \cap (V^{(n-\frac{i}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1})} \oplus \frac{V^{(n-\frac{i}{2}b-1)} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b+1}}{(I_{n-\frac{i}{2}b} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b}) \cap (V^{(n-\frac{i}{2}b-1)} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b+1})}. \end{aligned}$$

De forma análoga a la demostración de la Proposición 4.14 obtenemos la siguiente descripción para el núcleo:

$$\begin{aligned} (\operatorname{Ker}\delta_i)_n &\simeq \frac{V^{(n-\frac{i}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1}}{I_{n-\frac{i}{2}a-1} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1}} \oplus \frac{V^{(n-\frac{i}{2}b-1)} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b+1}}{I_{n-\frac{i}{2}b-1} \otimes J^b_{\frac{i}{2}+1}} \\ &= A_{n-\frac{i}{2}a-1} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1} \oplus A_{n-\frac{i}{2}b-1} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b+1}. \end{aligned}$$

De este modo hemos probado que $\operatorname{Ker}\delta_i$ es 2-puro en grados $\frac{i}{2}a+1$ e $\frac{i}{2}b+1$.

Recíprocamente, supongamos que $\operatorname{Ker}\delta_i$ es 2-puro en grados $\frac{i}{2}a+1$ e $\frac{i}{2}b+1$. Esto significa que en cada grado, el núcleo es de la forma:

$$(\operatorname{Ker}\delta_i)_n = A_{n-\frac{i}{2}a-1} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1} \oplus A_{n-\frac{i}{2}b-1} \otimes J^b_{\frac{i}{2}b+1}.$$

Para los casos en que $n = \frac{i}{2}a + m$ con $2 \leq m \leq a-1$; esta caracterización implica las distributividades enunciadas para la proposición pues tenemos el siguiente hecho:

$$E_a \cap (B_1 + B_2) = (\operatorname{Ker}\delta_i)_n = V^{(m-1)} \otimes J^a_{\frac{i}{2}a+1} = E_a \cap B_1 + E_a \cap B_2.$$

El razonamiento para el caso *(ii)* es análogo. Al considerar grados mayores, el desarrollo es similar a lo hecho para $\operatorname{Ker}\delta_2$. Obtenemos así las distributividades y las multidistributividades pedidas como condiciones equivalentes.

Caso 2: i impar.

Vimos que:

$$(\operatorname{Ker}\delta_i)_n = 0 \ \text{ si } \ n \leq \frac{i+1}{2}a - 1, \qquad (\operatorname{Ker}\delta_i)_{\frac{i+1}{2}a} = J^a_{\frac{i+1}{2}a}.$$

Supongamos ahora que $n > \frac{i+1}{2}a$. Nuevamente, como cuando i es par, demostraremos el último de los casos descriptos en la Observación 4.18. Para ello, observemos primero que:

- $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8 = I_{n-\frac{i-1}{2}a} \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a)} + I_{n-\frac{i-1}{2}b} \otimes V^{(\frac{i-1}{2}b)}$.
- $E_a \cap (F_1 + F_2) = I_{n-\frac{i-1}{2}a-1} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a+1}$.
- $E_b \cap (F_5 + F_6) = I_{n-\frac{i-1}{2}b-1} \otimes J^b_{\frac{i-1}{2}b+1}$.
- $E_a \cap F_3 = (V^{(n-\frac{i-1}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a+1}) \cap (V^{(n-\frac{i+1}{2}a)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a)}) = V^{(n-\frac{i+1}{2}a)} \otimes [(V^{(a-1)} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a+1}) \cap (R_a \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a)})] = V^{(n-\frac{i+1}{2}a)} \otimes J^a_{\frac{i+1}{2}a}$. Notemos que esta última igualdad surge de una equivalencia demostrada durante el estudio de $(\operatorname{Ker}\delta_i)_{\frac{i+1}{2}a}$.
- $E_a \cap F_4 = (V^{(n-\frac{i-1}{2}a-1)} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a+1}) \cap (V^{(n-\frac{i-1}{2}a-b)} \otimes R_b \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a)}) = V^{(n-\frac{i-1}{2}a-b)} \otimes [(V^{(b-1)} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a+1}) \cap (R_b \otimes V^{(\frac{i-1}{2}a)})] \subseteq V^{(n-\frac{i-1}{2}a-b)} \otimes [(V^{(b-1)} \otimes R_a) \cap (R_b \otimes V^{(a-1)})] \otimes V^{(\frac{i-3}{2}a+1)} \subseteq V^{(n-\frac{i-1}{2}a-b)} \otimes [(V^{(b-1)} \otimes R_a) \cap (R_b \otimes V^{(a-1)} + \cdots + V^{(a-1)} \otimes R_b)] \otimes V^{(\frac{i-3}{2}a+1)} =_{(c.e.c.)} 0$. Luego, $E_a \cap F_4 = 0$.
- Usando la segunda condición de las *(c.e.)*, de manera análoga a lo hecho para $E_a \cap F_3$, obtenemos que $E_b \cap F_8 = V^{(n-\frac{i+1}{2}b)} \otimes J^b_{\frac{i+1}{2}b}$.
- $E_b \cap F_7 = (V^{(n-\frac{i-1}{2}b-1)} \otimes J^b_{\frac{i-1}{2}b+1}) \cap (V^{(n-a-\frac{i-1}{2}b)} \otimes R_a \otimes V^{(\frac{i-1}{2}b)}) = V^{(n-a-\frac{i-1}{2}b)} \otimes [(V^{(a-1)} \otimes J^b_{\frac{i-1}{2}b+1}) \cap (R_a \otimes V^{(\frac{i-1}{2}b)})] \subseteq V^{(n-a-\frac{i-1}{2}b)} \otimes [(V^{(a-1)} \otimes R_b) \cap (R_a \otimes V^{(b-1)} + \cdots + V^{(b-2)} \otimes R_a \otimes V)] \otimes V^{(\frac{i-3}{2}b+1)} =_{(c.e.c.)} 0$. Luego, $E_b \cap F_7 = 0$.

Tenemos de este modo que

$$\begin{aligned}
N_n =& (E_a \oplus E_b) \cap (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8) \\
=& E_a \cap (F_1 + F_2) + E_a \cap F_3 + E_a \cap F_4 + E_b \cap (F_5 + F_6) + E_b \cap F_7 + E_b \cap F_8 \\
=& I_{n-\frac{i-1}{2}a-1} \otimes J^a_{\frac{i-1}{2}a+1} + V^{(n-\frac{i+1}{2}a)} \otimes J^a_{\frac{i+1}{2}a} + I_{n-\frac{i-1}{2}b-1} \otimes J^b_{\frac{i-1}{2}b+1} + V^{(n-\frac{i+1}{2}b)} \otimes J^b_{\frac{i+1}{2}b}.
\end{aligned}$$

A partir de este momento el razonamiento es análogo al del caso i par.

Obtenemos de este modo que $\operatorname{Ker}\delta_i$ es 2-puro en grados $\frac{i+1}{2}a$ e $\frac{i+1}{2}b$ si y sólo si valen las distributividades y las multidistributividades pedidas en el enunciado de la proposición. □

Veamos un ejemplo de álgebra que cumple con todas las condiciones enunciadas en el Teorema 4.19.

Ejemplo. Sea $A = \frac{k\langle x,y\rangle}{\langle x^3,y^4\rangle}$. En este caso, $R_a = \langle x^3\rangle$ y $R_b = \langle y^4\rangle$ son claramente excluyentes.

Tenemos los siguientes espacios:

$$\begin{aligned}
J^a_{a+1} &= (V \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V) = (V \otimes R_3) \cap (R_3 \otimes V) = \langle x^4\rangle, \\
J^b_{b+1} &= (V \otimes R_b) \cap (R_b \otimes V) = (V \otimes R_4) \cap (R_4 \otimes V) = \langle y^5\rangle.
\end{aligned}$$

En general, para $m \geq 3$, $J^a_m = \langle x^m\rangle$ y si $l \geq 4$, $J^b_l = \langle y^l\rangle$.

Veamos a continuación que se satisfacen las *(c.e.)*:

$$
\begin{array}{ccccc}
(V^{(2)} \otimes R_3) & \cap & (R_3 \otimes V^{(2)} & + & V \otimes R_3 \otimes V) \\
 & & & & \\
x^2x^3 & & x^3x^2 & & xx^3x \\
xyx^3 & & x^3xy & & xx^3y \\
yxx^3 & & x^3yx & & yx^3x \\
y^2x^3 & & x^3y^2 & & yx^3y
\end{array}
$$

La intersección es el espacio $\langle x^5, yx^4\rangle = V \otimes J^a_{a+1}$.

Por otro lado, calculamos $(V^{(3)} \otimes R_4) \cap (R_4 \otimes V^{(3)} + V \otimes R_4 \otimes V^{(2)} + V^{(2)} \otimes R_4 \otimes V)$ que resulta igual al espacio $\langle x^2y^5, xy^6, yxy^5, y^7\rangle = V^{(2)} \otimes J^b_{b+1}$.

Veamos ahora que las *(c.e.n.)* se satisfacen, para lo cual verificamos que las intersecciones $(V^{(3)} \otimes R_3 \otimes V) \cap (V^{(4)} \otimes R_3) \cap (R_4 \otimes V^{(3)})$ y $(V^{(2)} \otimes R_4 \otimes V) \cap (V^{(3)} \otimes R_4) \cap (R_3 \otimes V^{(4)})$ son nulas.

Finalmente, veamos que se satisfacen las *(c.e.c.)*. Calculamos para eso las intersecciones $(V^{(3)} \otimes R_3) \cap (R_4 \otimes V^{(2)} + V \otimes R_4 \otimes V)$ y $(V^{(2)} \otimes R_4) \cap (R_3 \otimes V^{(3)} + V \otimes R_3 \otimes V^{(2)} + V^{(2)} \otimes R_3 \otimes V)$. Vemos que ambas resultan nulas.

4.3 Álgebras (a, b)-Koszul

Definimos ahora las funciones $n_a, n_b : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, mediante

$n_a(2j) = ja$, $n_a(2j+1) = ja + 1$,

$n_b(2j) = jb$, $n_b(2j+1) = jb + 1$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

Sea además $K_i = A \otimes J^a_{n_a(i)} + A \otimes J^b_{n_b(i)}$ para $i \geq 0$, donde $J^a_0 = J^b_0 = k$, $J^a_1 = J^b_1 = V$ y la suma es directa si $i \geq 2$.

Definición 4.20. *Un álgebra $A = T(V)/I$ se dice (a, b)-**homogénea** si I tiene un conjunto de generadores formado por elementos homogéneos de grados a y b.*

Definición 4.21. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $2 < a < b$ y un espacio de relaciones para el ideal bilátero I tal que $R = R_a \oplus R_b$ con R_a y R_b excluyentes, diremos que un álgebra (a, b)-homogénea A, es (a, b)-**Koszul** (generalizada) si el espacio vectorial graduado $\mathrm{Tor}^A_i(k, k)$ es 2-puro en grados $n_a(i)$ y $n_b(i)$ para todo $i \geq 2$.*

Observación 4.22. *Si $a = b$ y quitamos la condición que R_a y R_b sean excluyentes, entonces esta definición dice que A es a-Koszul en el sentido que se da en [B1].*

Observación 4.23. *En la definición anterior consideramos a k como A-módulo a izquierda y A es (a, b)-Koszul a izquierda. Mientras que si consideramos a k como A-módulo trivial a derecha k y lo resolvemos en forma análoga; es decir tomando $K_i = J^a_{n_a(i)} \otimes A + J^b_{n_b(i)} \otimes A$, se dice que A es (a, b)-Koszul a derecha. Además A es (a, b)-Koszul a izquierda si y sólo si es (a, b)-Koszul a derecha.*

Teorema 4.24. *Sea $A = T(V)/I$ un álgebra (a, b)-homogénea ($2 < a < b$) y sea R un espacio de relaciones para I tal que $R = R_a \oplus R_b$ con R_a y R_b excluyentes. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A es (a, b)-Koszul.

(ii) No hay obstrucción para construir (en la categoría de A-módulos a izquierda graduados y acotados inferiormente) una resolución proyectiva pura de k de la forma

$$\cdots \longrightarrow K_i \xrightarrow{\delta_i} K_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_1 \xrightarrow{\delta_1} K_0 \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0 \tag{4.3.1}$$

mediante el proceso descripto en la Sección §4.2.4 con K_i definido como antes.

(iii) Se satisfacen las (c.e), las (c.e.n.), las (c.e.c.), y para cualquier $j \geq 1$ se tienen las siguientes propiedades:

- *La terna (E_a, B_1, B_2) es distributiva para todo $n < (j+1)a$.*
- *La terna $(E_a \oplus E_b, B_1 + B_2, B_3 + B_4)$ es multidistributiva para todo $n < (j+1)a$.*
- *La 4-upla $(E_1 \oplus E_2, D_1 + D_2, G_1 + G_2, H_1 + H_2)$ es multidistributiva para todo $n \geq (j+1)a$.*
- *La 4-upla $(E_1' \oplus E_2', D_1' + D_2', G_1' + G_2', H_1' + H_2')$ es multidistributiva para todo $n \geq (j+1)a+1$.*

Donde los espacios E_a, E_b, B_h $(1 \leq h \leq 4)$ son aquellos considerados en el Teorema 4.19 y el resto de los espacios son:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= V^{(n-ja)} \otimes J^a_{ja}, & E_1' &= V^{(n-ja-1)} \otimes J^a_{ja+1},\\
E_2 &= V^{(n-jb)} \otimes J^b_{jb}, & E_2' &= V^{(n-jb-1)} \otimes J^b_{jb+1},\\
D_1 &= I_{n-ja} \otimes V^{(ja)}, & D_1' &= I_{n-ja-1} \otimes V^{(ja+1)},\\
D_2 &= I_{n-jb} \otimes V^{(jb)}, & D_2' &= I_{n-jb-1} \otimes V^{(jb+1)},\\
G_1 &= V^{(n-(j+1)a+1)} \otimes I^a_{2a-2} \otimes V^{((j-1)a+1)}, & G_1' &= V^{(n-(j+1)a)} \otimes R_a \otimes V^{(ja)},\\
G_2 &= V^{(n-(j+1)b+1)} \otimes I^b_{2b-2} \otimes V^{((j-1)b+1)}, & G_2' &= V^{(n-(j+1)b)} \otimes R_b \otimes V^{(jb)},\\
H_1 &= V^{(n-ja-b+1)} \otimes I^b_{a+b-2} \otimes V^{((j-1)a+1)}, & H_1' &= V^{(n-ja-b)} \otimes R_b \otimes V^{(ja)},\\
H_2 &= V^{(n-a-jb+1)} \otimes I^a_{a+b-2} \otimes V^{((j-1)b+1)}, & H_2' &= V^{(n-a-jb)} \otimes R_a \otimes V^{(jb)}.
\end{aligned}
$$

Observación 4.25. *Antes de demostrar el teorema observemos que $E_a = E_1$ con $j = \frac{i}{2}$ si i es par y $E_a = E_1'$ con $j = \frac{i-1}{2}$ si i es impar. Análogamente con E_b. Luego, vemos que los espacios definidos dependen de un índice que no especificamos en la notación.*

Demostración. Por el Corolario 2.43, dado $i \geq 2$, $\mathrm{Tor}_i^A(k,k)$ puede ser no nulo sólo a partir de grados mayores o iguales que $n_a(i)$ para todo $i \geq 2$. Entonces, resulta evidente que puede construirse una resolución de la forma (4.3.1) si y sólo si $\mathrm{Tor}_i^A(k,k)$ es 2-puro en grados $n_a(i)$ y $n_b(i)$, pues $\mathrm{Tor}_i^A(k,k) = J^a_{n_a(i)} \oplus J^b_{n_b(i)}$ por la demostración del Corolario 2.43.

Para la condición *(iii)* consideremos además los subespacios F_l , $1 \leq l \leq 8$ del Teorema 4.19 y observemos los siguientes hechos:

- Si i es par:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E_a, & D_1 &= F_1 + F_3, & G_1 &= F_2, & H_1 &= F_7,\\
E_2 &= E_b, & D_2 &= F_4 + F_5, & G_2 &= F_6, & H_2 &= F_8.
\end{aligned}
$$

- Si i es impar:

$$
\begin{aligned}
E_1' &= E_a, & D_1' &= F_1 + F_2, & G_1' &= F_3, & H_1' &= F_4,\\
E_2' &= E_b, & D_2' &= F_5 + F_6, & G_2' &= F_8, & H_2' &= F_7.
\end{aligned}
$$

Estamos entonces en las condiciones del Teorema 4.19; es decir que las *(c.e.)*, *(c.e.n.)* y *(c.e.c.)* se verifican. $\square$

A continuación probaremos que para un álgebra A, existen ciertas condiciones equivalentes a que A sea (a, b)-Koszul.

Proposición 4.26. *Sea A una k-álgebra $\mathbb{N}_0$-graduada. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es (a, b)-Koszul.*

(ii) $\mathrm{ext}^i_A(k, k[-n]) = 0$ *si* $n \neq n_a(i)$ *y* $n \neq n_b(i)$.

(iii) *Dados dos A-módulos graduados M y N concentrados respectivamente en grados m y n, se tiene que* $\mathrm{ext}^i_A(M, N) = 0$ *si* $n \neq m + n_a(i)$ *y* $n \neq m + n_b(i)$.

Demostración. Como k es de tipo finito, (2.5.4) asegura que $\mathrm{Ext}^{i,-n}_A(k, k) = \underline{\mathrm{Ext}}^{i,-n}_A(k, k) = \mathrm{ext}^i_A(k, k[-n])$. Por la Observación 2.46 sabemos que $\mathrm{Ext}^{i,-n}_A(k, k) = (\mathrm{Tor}^A_{i,n}(k, k))^*$, siendo así evidente que *(i)* se satisface si y sólo si se satisface *(ii)*.

La implicación *(iii)* $\Rightarrow$ *(ii)* es trivial pues k está concentrado en grado 0 y $k[-n]$ está concentrado en grado $-n$.

Supongamos ahora que se verifica *(i)*, entonces k admite una resolución proyectiva graduada que denotamos por $\mathcal{P} = (P_i)_{i\geq 0}$, tal que para todo i $P_i = A \otimes Q_i$ con Q_i un k-espacio vectorial 2-concentrado en grados $n_a(i)$ y $n_b(i)$. Probemos entonces que *(iii)* es válida. Como $\mathrm{ext}^i_A(M, N) = \mathrm{ext}^i_A(M[-m], N[-m])$, podemos suponer que $m = 0$, y ya que M es suma directa de copias de k. También podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $M = k$. Por otro lado, tenemos los siguientes isomorfismos naturales,

$$\mathrm{hom}_A(P_j, N) \simeq \mathrm{hom}_A(A \otimes Q_j, N) \simeq \mathrm{hom}_k(Q_j, \mathrm{Hom}_A(A, N)) \simeq \mathrm{hom}_k(Q_j, N),$$

donde el último espacio se anula en los grados n tales que $n \neq n_a(j)$ y $n \neq n_b(j)$, luego los únicos términos posiblemente no nulos del complejo $\mathrm{hom}_A(\mathcal{P}, N)$ están en grados $n_a(j)$ y $n_b(j)$. Como

$$\mathrm{ext}^i_A(k, N) = \mathrm{H}^i(\mathrm{hom}_A(\mathcal{P}, N)) = \frac{\mathrm{Ker}\, d_i}{\mathrm{Im}\, d_{i-1}},$$

y este cociente es $\mathrm{hom}_A(P_i \otimes N)$ si $i = n_a(j)$ o $i = n_b(j)$ y es nulo en cualquier otro caso. Así, $\mathrm{ext}^i_A(k, N) = \mathrm{hom}_k(Q_i, N)$, que es nulo salvo si $n = n_a(j)$ o $n = n_b(j)$. □

Proposición 4.27. *Sea $A = T(V)/I$ un álgebra (a, b)-homogénea ($2 < a < b$) tal que admite un espacio de relaciones $R = R_a \oplus R_b$ con R_a y R_b excluyentes. Si la dimensión global de A es 2, entonces A es (a, b)-Koszul.*

Demostración. Por la Proposición 2.37, sabemos que una resolución proyectiva graduada minimal de k comienza por

$$A \otimes R \xrightarrow{\delta_2} A \otimes V \xrightarrow{\delta_1} A \xrightarrow{\delta_0} k \longrightarrow 0.$$

Como la longitud de una resolución proyectiva minimal de k es igual a la dimensión global de A, que por hipótesis es 2, resulta que

$$0 \longrightarrow A \otimes R \xrightarrow{\delta_2} A \otimes V \xrightarrow{\delta_1} A \xrightarrow{\delta_0} k \longrightarrow 0$$

es exacta y luego, es trivial que A es (a, b)-Koszul. □

Si A es un álgebra (a, b)-Koszul, el complejo (4.3.1) se llama la **resolución de Koszul** de k como A-módulo a izquierda. Esta resolución es proyectiva y minimal, ya que por construcción, se podría aplicar la Proposición 2.16 en cada paso.

Generalizaremos ahora el complejo de Koszul definido por Priddy para el caso cuadrático (ver [M1], [P]) de la siguiente manera:

Sea A un álgebra (a,b)-homogénea, definimos el siguiente complejo que llamaremos el **complejo de Koszul** de A (a izquierda):

$$\cdots \longrightarrow K_i \xrightarrow{\delta_i} K_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_1 \xrightarrow{\delta_1} K_0 \longrightarrow 0, \tag{4.3.2}$$

donde δ_i está definido como en (4.2.17) o (4.2.18) según corresponda.

Observemos que:

- Si i es par, debido a que $J^a_{\frac{i}{2}a} \subseteq R_a \otimes V^{(\frac{i-2}{2}a)}$ y que $J^b_{\frac{i}{2}b} \subseteq R_b \otimes V^{(\frac{i-2}{2}b)}$, resulta evidente que $\delta_{i-1}\delta_i = 0$. Más explícitamente, como $J^a_{\frac{i}{2}a} \subseteq R_a \otimes V^{(\frac{i-2}{2}a)}$, un elemento genérico en $A \otimes J^a_{\frac{i}{2}a}$ es combinación lineal de elementos de la forma $\overline{\alpha} \otimes r_i \otimes v_{j_{a+1}} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}}$ donde $r_i \in \mathcal{B}_a$, la base fijada para R_a. Luego, basta calcular $\delta_{i-1}\delta_i$ en estos elementos. Entonces,

$$\begin{aligned}
\delta_{i-1}(\delta_i(\overline{\alpha} \otimes r_i \otimes v_{j_{a+1}} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}})) &= \delta_{i-1}\left(\delta_i\left(\overline{\alpha} \otimes \sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \lambda^i_j v_{j_1} \cdots v_{j_a} \otimes v_{j_{a+1}} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}}\right)\right) \\
&= \sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \lambda^i_j \delta_{i-1}(\delta_i(\overline{\alpha} v_{j_1} \cdots v_{j_a} \otimes v_{j_{a+1}} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}})) \\
&= \sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \lambda^i_j \delta_{i-1}(\overline{\alpha v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a} \otimes v_{j_{a+1}} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}}) \\
&= \sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \lambda^i_j \overline{\alpha v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}} v_{j_a}} \otimes v_{j_{a+1}} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}} \\
&= \overline{\alpha \sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \lambda^i_j v_{j_1} \cdots v_{j_a}} \otimes v_{j_{a+1}} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}} = \overline{\alpha r_i} \otimes v_{j_{a+1}} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}} = 0.
\end{aligned}$$

  El otro caso resulta análogo.

- Si i es impar, debido a que $J^a_{\frac{i-1}{2}a+1} \subseteq R_a \otimes V^{(\frac{i-3}{2}a+1)}$ y que $J^b_{\frac{i-1}{2}b+1} \subseteq R_b \otimes V^{(\frac{i-3}{2}b+1)}$, resulta evidente que $\delta_{i-1}\delta_i = 0$. Se verifica análogamente al caso i par.

Luego, (4.3.2) es efectivamente un complejo.

En la categoría graduada, el complejo de Koszul está formado por módulos proyectivos: J^a_n y J^b_n son proyectivos como k-módulos, aplicamos el funtor $A \otimes_k -$ y usamos que A es k-playo. Estos módulos también son 2-puros salvo K_0 y K_1, que son puros.

Proposición 4.28. *Sea A un álgebra (a,b)-homogénea $(2 < a < b)$ tal que I admite un espacio de relaciones $R = R_a \oplus R_b$ con R_a y R_b excluyentes. A es (a,b)-Koszul si y sólo si su complejo de Koszul a izquierda (o a derecha) es exacto en grados positivos.*

Demostración. La condición necesaria es consecuencia del Teorema 4.24.

Para la implicación recíproca, supongamos que el complejo de Koszul es exacto. Apliquemos el funtor $k \otimes_A -$ a este complejo para calcular $\mathrm{Tor}^A_i(k,k)$, el cual coincide con $k \otimes_A K_i$, que es 2-puro en grados $n_a(i)$ y $n_b(i)$ para $i \geq 2$. Deducimos entonces que A es (a,b)-Koszul. □

Proposición 4.29. *Sea $A = T(V)/I$ un álgebra (a,b)-homogénea y sea R su espacio de relaciones. Supongamos que k tiene una resolución proyectiva graduada como A-módulo a izquierda de la forma*

$$\cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} k \longrightarrow 0 \tag{4.3.3}$$

tal que P_0 y P_1 son puros en grados 0 y 1 respectivamente y P_i es 2-puro en grados $n_a(i)$ y $n_b(i)$, para todo $i \geq 2$. En este caso, por definición, A es (a, b)-Koszul. Entonces existe un morfismo graduado f de la resolución (4.3.3) a la resolución de Koszul. Además, si g es otro morfismo de la resolución (4.3.3) a la resolución de Koszul, entonces $g_0 = f_0$ y dado $i \geq 1$, para todo j, $0 \leq j < n_b(i-1)$, $(g_i)_j = (f_i)_j$.

Demostración. Haremos inducción sobre i. Si $i = 0$ tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[dl, dashed, "f_0"'] \arrow[d, "d_0"] & \\ A \arrow[r, "\epsilon"] & k \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Como P_0 es proyectivo, existe un morfismo $f_0 : P_0 \to A$ tal que $\epsilon f_0 = d_0$. Además, como P_0 es puro en grado 0, alcanza con definir f_0 en grado 0 y debido a que ϵ es la identidad en grado 0, $(f_0)_0 = d_0$, con lo cual tenemos la unicidad y la suryectividad. Supongamos ahora que $f_0(p) = f_0(q)$, donde $\mathrm{gr}(p) = \mathrm{gr}(q) = 0$, entonces $p - q \in (\operatorname{Ker} d_0)_0 = 0$ con lo cual f_0 es inyectiva.

Fijemos ahora $i \geq 1$. Como se trata de dos resoluciones proyectivas de k, sabemos que existe un morfismo graduado de complejos f de la forma:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & P_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"] & P_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] & k \arrow[r] \arrow[d, "1_k"] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & K_{i+1} \arrow[r, "\delta_{i+1}"] & K_i \arrow[r, "\delta_i"] & K_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "\delta_1"] & K_0 \arrow[r, "\delta_0"] & k \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Además, f es único salvo equivalencia homotópica. Supongamos ahora que existe otro morfismo graduado de complejos g de la resolución (4.3.3) a la resolución de Koszul. La hipótesis inductiva dice que los morfismos f_t para $0 \leq t \leq i-1$ son tales que f_0 es único y f_t es uníco en grados menores que $n_b(t-1)$. Podemos construir una homotopía de contracción s (ver [W], página 36) $s_i : P_i \to K_{i+1}$; es decir, $f_i - g_i = d_{i+1}s_i + s_{i-1}d_i$. Como P_i está generado en grados $n_a(i)$ y $n_b(i)$ y K_{i+1} puede ser no nulo sólo en grados mayores o iguales que $n_a(i+1) > n_a(i)$, s_i se anula en grados menores que $n_b(i)$ y s_{i-1} se anula en grados menores que $n_b(i-1)$. Más explícitamente, sea $x \in P_i$, si $\mathrm{gr}(x) \leq n_a(i)$ resulta trivial que $s_i(x) = 0$. Supongamos ahora que $n_a(i) < \mathrm{gr}(x) < n_b(i)$, entonces $x = \alpha x'$ con $\alpha \in A$ y $x' \in (P_i)_{n_a(i)}$ y por lo tanto, $s_i(x) = \alpha s_i(x') = 0$. Así, $f_i = g_i$ en grados menores que $n_b(i-1)$. $\square$

4.4 Reticulados

La presente sección es una recopilación de resultados utilizados para el estudio de distributividad de reticulados. La información aquí desarrollada ha sido extraída del trabajo realizado por Öre, [O].

Recordamos la siguiente definición clásica:

Definición 4.30. *Sea $(\mathcal{D}, \leq, +, \cdot)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que $\mathcal{D}$ es un* ***reticulado*** *si para cada par de elementos $x, y \in \mathcal{D}$ existe el supremo $x + y$ y el ínfimo $x \cdot y$.*

Ejemplo. Sea V un k-espacio vectorial. El conjunto $\mathcal{L}(V)$ formado por los subespacios de V ordenados por la inclusión y con las operaciones de suma e intersección, es un reticulado.

Lema 4.31 ([O]). *Sean x, y, z elementos de un reticulado $\mathcal{D}$. Se satisfacen las siguientes igualdades:*

(i) $x \cdot y = y \cdot x$.	*(v)* $x + y = y + x$.
(ii) $x \cdot x = x$.	*(vi)* $x + x = x$.
(iii) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.	*(vii)* $x + (y + z) = (x + y) + z$.
(iv) $x + x \cdot y = x$.	*(viii)* $x \cdot (x + y) = x$.

Demostración. Las relaciones *(i)*, *(ii)*, *(v)* y *(vi)* son triviales por definición de ínfimo y supremo.

Para probar *(iii)* observemos que $x \cdot (y \cdot z) < x$ y $x \cdot (y \cdot z) < y \cdot z$. Además, $y \cdot z < y$ e $y \cdot z < z$. Luego, $x \cdot (y \cdot z) < x \cdot y$ y concluimos así que $x \cdot (y \cdot z) < (x \cdot y) \cdot z$. Por otro lado, $(x \cdot y) \cdot z < x \cdot y$, $x \cdot y < x$ y $x \cdot y < y$; además $(x \cdot y) \cdot z < z$. Luego, $(x \cdot y) \cdot z < y \cdot z$. Concluimos finalmente que $(x \cdot y) \cdot z < x \cdot (y \cdot z)$ y probamos la igualdad. Hemos probado la asociatividad del ínfimo, notaremos $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot y \cdot z$.

La demostración de *(vii)* es análoga a la de *(iii)*. Esta propiedad es la asociatividad del supremo, notaremos $(x + y) + z = x + y + z$.

La prueba de *(iv)* se basa en que $x + x \cdot y > x$ y, por otro lado, $x > x$ y $x > x \cdot y$, entonces $x > x + x \cdot y$, luego se verifica la igualdad. En forma análoga se prueba *(viii)*. □

Es claro el siguiente resultado:

Lema 4.32 ([O]). *Sean x e y en un reticulado $\mathcal{D}$. Si $x > y$ entonces se satisfacen las siguientes igualdades:*

(i) $x + y = x$.

(ii) $x \cdot y = y$.

Definición 4.33 ([O]). *Axioma de Dedekind: Diremos que $\mathcal{D}$ es un* ***estructura de Dedekind*** *si para toda terna de elementos x, y, z en $\mathcal{D}$ tales que $x + y > z > x$, resulta $z = x + y \cdot z$.*

Lema 4.34. *$\mathcal{L}(V)$ es una estructura de Dedekind.*

Demostración. Sean $W_1, W_2, W_3 \in \mathcal{L}(V)$ tales que $W_1 \subseteq W_3 \subseteq W_1 + W_2$. Veamos entonces que $W_3 = W_1 + (W_2 \cap W_3)$. Probaremos la doble inclusión. Sea $w \in W_3$, si $w \in W_2$, entonces $w \in W_2 \cap W_3 \subseteq W_1 + (W_2 \cap W_3)$. Por el contrario, si $w \notin W_2$, como $W_3 \subseteq W_1 + W_2$, tenemos que $w = w_1 + w_2$, con $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ y $w_1 \neq 0$. Como $w_1 \in W_1 \subseteq W_3$, entonces $w_2 \in W_3$ y por lo tanto $w_2 \in W_2 \cap W_3$, es decir que $w \in W_1 + (W_2 \cap W_3)$. La otra inclusión es trivial. □

Definición 4.35 ([O]). *Una terna (x, y, z) de elementos de un reticulado $\mathcal{D}$ satisface la* ***ley distributiva*** *si $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.*

Ejemplo. Está claro que en $\mathcal{L}(V)$ no todas las ternas de elementos verifican la ley distributiva.

Enunciaremos y probaremos a continuación algunas propiedades que se satisfacen para una estructura de Dedekind $\mathcal{D}$.

Proposición 4.36 ([O]). *Sea $\mathcal{D}$ una estructura de Dedekind, sean $x, y, z \in \mathcal{D}$.*

(i) *Si $z > x$ entonces $z \cdot (x + y) = x + y \cdot z$.*

(ii) *Sea $T_x = (x + y \cdot z) \cdot (y + z)$. Se verifica que $T_x = x \cdot (y + z) + y \cdot z$.*

(iii) *Sean x, y, z tales que $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$. Entonces se satisfacen las siguientes igualdades:*

- $x \cdot y + z \cdot x = x \cdot (z + x \cdot y)$. *Llamaremos S_x a este último elemento.*

- $x \cdot z + y \cdot x = x \cdot (y + x \cdot z)$.
- $(x + y) \cdot (x + z) = x + z \cdot (x + y)$. *Llamaremos* $\overline{S_x}$ *a este último elemento.*
- $(x + y \cdot z) \cdot (y + x \cdot z) = y \cdot z + z \cdot x + x \cdot y$. *Llamaremos* R *a este último elemento.*
- $x \cdot (y + z) + y \cdot (x + z) = (y + z) \cdot (z + x) \cdot (x + y)$. *Llamaremos* $\overline{R}$ *a este último elemento.*

Demostración.

(i) Sabemos que $x + y > z \cdot (x + y) > x \cdot (x + y)$. Si usamos que $\mathcal{D}$ es un estructura de Dedekind, vemos que $z \cdot (x + y) = x \cdot (x + y) + y \cdot (z \cdot (x + y)) = x + y \cdot z \cdot (x + y) = x + y \cdot z$.

(ii) Probamos la igualdad como sigue: $x \cdot (y + z) + y \cdot z = y \cdot z + x \cdot (y + z) = (y + z) \cdot (y \cdot z + x)$ $= (y+z) \cdot (x+y \cdot z) = (x+y \cdot z) \cdot (y+z)$ donde la segunda igualdad es válida por la propiedad anterior.

(iii) Es inmediato ver que:

- $x \cdot y + z \cdot x = x \cdot (x \cdot y + z) = x \cdot (z + x \cdot y) = S_x$.
- $x \cdot z + y \cdot x = x \cdot (x \cdot z + y) = x \cdot (y + x \cdot z)$.
- $(x + y) \cdot (x + z) = x + z \cdot (x + y)$ y $(x + z) \cdot (x + y) = x + y \cdot (x + z)$. Por lo tanto, $(x + y) \cdot (x + z) = x + y \cdot (x + z) = x + z \cdot (x + y) = \overline{S_x}$.
- $(x + y \cdot z) \cdot (x \cdot z + y) = x \cdot z + y \cdot (x + y \cdot z)$ y $y \cdot (y \cdot z + x) = y \cdot z + x \cdot y$. Por lo tanto, $x \cdot z + y \cdot (x + y \cdot z) = x \cdot z + (y \cdot z + x \cdot y) = x \cdot z + y \cdot z + x \cdot y$. Luego, $R = (x + y \cdot z) \cdot (y + x \cdot z) = y \cdot z + z \cdot x + x \cdot y$.
- $(x+z) \cdot (x \cdot (y+z)+y) = x \cdot (y+z)+y \cdot (x+z)$ y $(y+z) \cdot (y+x) = y+x \cdot (y+z)$. Por lo tanto, $(x+z) \cdot (x \cdot (y+z)+y) = (x+z) \cdot ((y+z) \cdot (y+x)) = (x+z) \cdot (y+z) \cdot (y+x)$. Entonces, $\overline{R} = (y + z) \cdot (z + x) \cdot (x + y) = x \cdot (y + z) + y \cdot (x + z)$.

Observación 4.37. *Es claro que* T_x*,* S_x*,* $\overline{S_x}$*,* R *y* $\overline{R}$ *dependen de los elementos* x, y, z*.*

Usando la hipótesis de distributividad y los resultados probados en la Proposición 4.36, tenemos que

$$\overline{S_x} = (x+y) \cdot (x+z) = x+z \cdot (x+y) = x+(x+y) \cdot z = x+(x \cdot z+y \cdot z) = x+x \cdot z+y \cdot z = x+y \cdot z, \quad (4.4.1)$$

donde la última igualdad se satisface pues $x > x \cdot z$. Análogamente,

$$\overline{S_y} = y + x \cdot z. \quad (4.4.2)$$

Si aplicamos la hipótesis de distributividad a T_z tenemos que $T_z = z \cdot (x + y) + x \cdot y = (x \cdot z + y \cdot z) + x \cdot y = x \cdot z + y \cdot z + x \cdot y = R$; y

$$T_x = (x+y \cdot z) \cdot (y+z) = (x+y) \cdot (x+z) \cdot (y+z) = \overline{R} = (y+z) \cdot (y+x) \cdot (x+z) = (y+x \cdot z) \cdot (x+z) = T_y.$$

Por otro lado, $T_x \cdot T_y = ((x+y \cdot z) \cdot (y+z)) \cdot ((y+x \cdot z) \cdot (x+z)) = (x+y \cdot z) \cdot (y+z) \cdot (y+x \cdot z) \cdot (x+z) = (x + y \cdot z) \cdot (y + x \cdot z) = R$ donde la anteúltima igualdad es válida pues $z > x \cdot z$ y $z > y \cdot z$.

Además, al ser $T_x \cdot T_y = \overline{R} \cdot \overline{R} = \overline{R}$, concluimos que $T_x = T_y = T_z = R = \overline{R}$. Más aún, observemos que $x \cdot (x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x) = x \cdot ((x + y \cdot z) \cdot (y + x \cdot z)) = x \cdot (x + y \cdot z) \cdot (y + x \cdot z)) = x \cdot (y + x \cdot z) = S_x$, donde la anteúltima igualdad es válida pues $x < x + y \cdot z$. Podemos ver que $S_x = x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x) = x \cdot (x + y) \cdot (y + z) \cdot (z + x) = x \cdot (y + z)$ y que

$S_y = y \cdot z + y \cdot x = y \cdot (x + z)$. Hemos probado así que si la terna (x, y, z) satisface la Ley distributiva, entonces todas las posibles combinaciones de ternas formadas por los elementos x, y, z la satisfacen también.

Dedekind probó que cuando el axioma de Dedekind se satisface, entonces el reticulado generado por tres elementos x, y, z, es un reticulado finito formado por los siguientes 28 elementos:

$$x + y + z;\ x + y;\ y + z;\ z + x;\ \overline{S_x};\ \overline{S_y};\ \overline{S_z};\ x + y \cdot z;\ y + z \cdot x;\ z + x \cdot y;\ \overline{R};\ x;\ y;\ z;\ T_x;\ T_y;\ T_z;$$
$$x \cdot (y + z);\ y \cdot (z + x);\ z \cdot (x + y);\ R;\ S_x;\ S_y;\ S_z;\ x \cdot y;\ y \cdot z;\ z \cdot x;\ x \cdot y \cdot z.$$

Observemos que en el caso en que la terna (x, y, z) satisface la ley distributiva, este reticulado se reduce al formado por los siguientes 18 elementos:

$$x + y + z;\ x + y;\ y + z;\ z + x;\ x + y \cdot z;\ y + z \cdot x;\ z + x \cdot y;\ x;\ y;\ z; (x + y) \cdot (y + z) \cdot (z + x);$$
$$x \cdot (y + z);\ y \cdot (z + x);\ z \cdot (x + y);\ x \cdot y);\ y \cdot z;\ z \cdot x;\ x \cdot y \cdot z.$$

4.4.1 Subreticulados distributivos de un reticulado modular

En esta sección presentamos una breve reseña del artículo de Jónsson, [J], cuyos resultados son útiles en nuestro trabajo para probar la Proposición 4.57.

Definición 4.38 ([J]). *Un reticulado $(\mathcal{D}, \leq, +, \cdot)$ se dice **distributivo** si para todo $x, y, z \in \mathcal{D}$ resulta $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.*

Definición 4.39 ([J]). *Un **reticulado modular** $\mathcal{D}$ es un reticulado $(\mathcal{D}, \leq, +, \cdot)$ que satisface la siguiente condición:*

$$x \leq z \Rightarrow x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z. \tag{4.4.3}$$

Observación 4.40. *$(\mathcal{L}(V), \subseteq, +, \cap)$ es un reticulado modular. Para probar esta afirmación consideramos $W_1, W_2, W_3 \in \mathcal{L}(V)$ tales que $W_1 \subseteq W_3$. Queremos ver que $W_1 + (W_2 \cap W_3) = (W_1 + W_2) \cap W_3$. Consideremos el elemento $w + w'$, donde $w \in W_1 \subseteq W_3$ y $w' \in W_2 \cap W_3 \subseteq W_3$, entonces $w + w' \in W_3$ y $w + w' \in W_1 + W_2$. La demostración de la otra inclusión es análoga a la del Lema 4.34.*

Lema 4.41. *Si $\mathcal{D}$ es un reticulado modular, entonces es una estructura de Dedekind.*

Demostración. Sean $x, y, z \in \mathcal{D}$ tales que $x \leq z \leq x + y$. En particular, como $\mathcal{D}$ es modular, $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z = z$. Luedo, $\mathcal{D}$ es una estructura de Dedekind.

Lema 4.42 ([J]). *Si $\mathcal{D}$ es un reticulado modular y $x, y, z \in \mathcal{D}$, entonces las siguientes igualdades son equivalentes:*

(i) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

(ii) $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

(iii) $(z + x) \cdot y = z \cdot y + x \cdot y$.

(iv) $x \cdot y + z = (x + z) \cdot (y + z)$.

(v) $y \cdot z + x = (y + x) \cdot (z + x)$.

(vi) $z \cdot x + y = (z + y) \cdot (x + y)$.

Demostración. Supongamos válida la igualdad *(i)*, y veamos que se satisface *(v)*: $(y+x)\cdot(z+x) = (y+x)\cdot z + x = y\cdot z + x\cdot z + x = y\cdot z + x$. Del mismo modo, se muestra que *(ii)* implica *(vi)* y que *(iii)* implica *(iv)*.

Por otro lado, si suponemos válida *(v)*, usando la condición (4.4.3) vemos que $z\cdot y + x\cdot y = (z\cdot y + x)\cdot y = (y+x)\cdot(z+x)\cdot y = (z+x)\cdot y$. Hemos probado entonces que *(v)* implica *(iii)*. Análogamente se prueba que *(iv)* ⇒ *(ii)* y *(vi)* ⇒ *(i)*.

Tenemos de este modo la siguiente cadena de implicaciones: *(i)* ⇒ *(v)* ⇒ *(iii)* ⇒ *(iv)* ⇒ *(ii)* ⇒ *(vi)* ⇒ *(i)*, y obtenemos así todas las equivalencias. □

Tenemos la siguiente definición clásica:

Definición 4.43. *Un **subreticulado** de un reticulado $\mathcal{D}$ es un subconjunto de $\mathcal{D}$ con el orden parcial inducido, que es estable por ínfimos y supremos.*

Observación 4.44. *Todo subreticulado de un reticulado distributivo es distributivo.*

Definición 4.45 ([J]). *Sea $\mathcal{D}$ un reticulado y sea X un subconjunto no vacío de $\mathcal{D}$. El **subreticulado generado por** X es el menor reticulado $\mathcal{D}_X$ tal que:*

(i) $X \subseteq \mathcal{D}_X$,

(ii) *si* $x, y \in X$ *entonces* $x\cdot y \in \mathcal{D}_X$,

(iii) *si* $x, y \in X$ *entonces* $x + y \in \mathcal{D}_X$.

Teorema 4.46 ([J]). *Sea X un subconjunto no vacío de un reticulado modular $\mathcal{D}$. El subreticulado $\mathcal{D}_X$ es distributivo si y sólo si se satisface:*

$$(\sum_{i=1}^{m} x_i)\prod_{j=1}^{n} y_j = \sum_{i=1}^{m}(x_i \prod_{j=1}^{n} y_j) \tag{4.4.4}$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $x_i, y_j \in X$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Demostración. Esta condición es claramente necesaria. Para ver que es suficiente, primero probemos que cualquier conjunto no vacío X que satisfaga la propiedad (4.4.4), satisface también su propiedad dual que está dada por la fórmula:

$$\prod_{i=1}^{m} x_i + \sum_{j=1}^{n} y_j = \prod_{i=1}^{m}\left(x_i + \sum_{j=1}^{n} y_j\right). \tag{4.4.5}$$

Lo probaremos por inducción sobre m. Si $m = 1$, la condición es trivial. Supongamos válida ahora la propiedad (4.4.5) para $m \ge 1$,

$$\prod_{i=1}^{m+1}\left(x_i + \sum_{j=1}^{n} y_j\right) = \left(x_{m+1} + \sum_{j=1}^{n} y_j\right)\cdot \prod_{i=1}^{m}\left(x_i + \sum_{j=1}^{n} y_j\right) =_{\text{H.I}} \left(x_{m+1} + \sum_{j=1}^{n} y_j\right)\cdot\left(\prod_{i=1}^{m} x_i + \sum_{j=1}^{n} y_j\right)$$
$$=_{(4.4.3)} \left(x_{m+1} + \sum_{j=1}^{n} y_j\right)\cdot\left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right) + \sum_{j=1}^{n} y_j =_{(4.4.4)} \prod_{i=1}^{m+1} x_i + \sum_{j=1}^{n}\left(y_j \prod_{i=1}^{m} x_i\right) + \sum_{j=1}^{n} y_j = \prod_{i=1}^{m+1} x_i + \sum_{j=1}^{n} y_j.$$

Supongamos ahora que X satisface la condición (4.4.4), entonces X está contenido en un subconjunto Y de $\mathcal{D}$ que es maximal respecto de la propiedad de satisfacer la condición (4.4.4) para todo $x_i, y_j \in Y$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$). Claramente, Y es distributivo con lo cual basta probar que Y es un subreticulado de $\mathcal{D}$.

Consideremos $u, v \in Y$ y sea $Z = Y \cup \{u \cdot v\}$. Para mostrar que Z satisface la condición (4.4.4) sólo es necesario considerar el caso en que $x_i, y_j \in Y$ para $1 \leq i \leq m-1$, $1 \leq j \leq n$ y $x_m = u \cdot v$. Para simplificar notación escribimos $x = \sum_{i=1}^{m-1} x_i$ e $y = \prod_{j=1}^{n} y_j$. Inferimos de (4.4.5) que $x_m \cdot y + x = (x_m + x) \cdot (y + x)$.

Se sigue del Lema 4.42, que al valer *(v)*, se satisface *(i)* y entonces $(x + x_m) \cdot y = x \cdot y + x_m \cdot y$ y por lo tanto, podemos calcular lo siguiente:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) y = \left(\sum_{i=1}^{m-1} x_i + x_m\right) \cdot y = \left(\sum_{i=1}^{m-1} x_i \cdot y\right) + x_m \cdot y = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot y.$$

Luego, como $Y \subseteq Z$ e Y es maximal debe ser $Y = Z$ y por lo tanto $u \cdot v \in Y$. Mediante un razonamiento análogo al aplicar dualidades, se prueba que Y es cerrado para la suma. Por lo tanto el subreticulado generado por X es distributivo pues está contenido en Y. $\square$

Teorema 4.47 ([J]). *Sea $\mathcal{D}$ un reticulado modular y sean $x, y, z \in \mathcal{D}$. El subreticulado generado por el conjunto $\{x, y, z\}$ es distributivo si y sólo si $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.*

Demostración. Por el Teorema 4.46 sabemos que $\{x, y, z\}$ genera un subreticualdo distributivo si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.
- $(z + x) \cdot y = z \cdot y + x \cdot y$.
- $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

El Lema 4.42 asegura que la primera condición implica las otras dos. $\square$

4.4.2 Distributividad de reticulados

El objetivo de esta sección es probar resultados que permiten decidir si ciertas ternas y 4-uplas son distributivas o multidistributivas. Las demostraciones de los resultados que se presentan son técnicas.

Dado un k-espacio vectorial V, recordemos que $\mathcal{L}(V)$ es un reticulado cuyos elementos mínimo y máximo son respectivamente el subespacio nulo y el espacio total V.

Observación 4.48. *Todo subreticulado de $\mathcal{L}(V)$ es modular.*

Queremos estudiar cuándo un subreticulado $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}(V)$ es:

- **distributivo**;
- **multidistributivo**; es decir, $(E \oplus E') \cap (F_1 + \cdots + F_t + G_1 + \cdots + G_{t'}) = [(E \cap F_1) + \cdots + (E \cap F_t)] \oplus [(E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'})]$ para cualesquiera $E, E', F_i, G_j \in \mathcal{T}$.

Observación 4.49. *Se prueba inmediatamente, por inducción sobre $t \geq 2$, que si un subreticulado de $\mathcal{L}(V)$ es distributivo, entonces para cualquier conjunto $\{E, F_1, \cdots, F_t\}$ de elementos del subreticulado se satisface la igualdad:*

$$E \cap (F_1 + \cdots + F_t) = (E \cap F_1) + \cdots + (E \cap F_t).$$

Sean $W_1, \cdots, W_n$ subespacios de V. Sea $\mathcal{T}$ el subreticulado generado por $W_1, \cdots, W_n$.

El siguiente resultado es un primer criterio de distributividad (ver [B1], [BF], [BGS1]). La demostración que aquí aparece es independiente de estos trabajos.

Proposición 4.50 ([B1], [BF], [BGS1]). *$\mathcal{T}$ es distributivo si y sólo si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $\mathcal{B}_i = \mathcal{B} \cap W_i$ es una base de W_i, para todo $1 \leq i \leq n$. En este caso se dice que $\mathcal{B}$ distribuye con $W_1, \cdots, W_n$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T}$ es distributivo. Haremos inducción sobre n para construir una tal base $\mathcal{B}$. Si $n = 1$, $\mathcal{T}$ es simplemente W_1, elegimos entonces una base $\mathcal{B}_1$ de W_1 y la extendemos a una base $\mathcal{B}$ de V. Es claro que $\mathcal{B} \cap W_1 = \mathcal{B}_1$.

Sea ahora $\mathcal{T}_{n-1}$ el subreticulado generado por los subespacios $W_1, \cdots, W_{n-1}$ y supongamos por hipótesis inductiva que existe una base $\widetilde{\mathcal{B}}$ de V, tal que $\widetilde{\mathcal{B}} \cap W_i$ es una base de W_i para $1 \leq i \leq n-1$. Sea ahora $\mathcal{T}$ el subreticulado generado por $W_1, \cdots, W_{n-1}, W_n$. Sea $\mathcal{B}_i = \widetilde{\mathcal{B}} \cap W_i$, $1 \leq i \leq n-1$ y sea $\mathcal{B}' = \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{B}_i$. Observemos que al estar contenido en la base $\widetilde{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}'$ es un conjunto linealmente independiente. Consideremos las siguientes situaciones:

(i) Si $\langle \mathcal{B}' \rangle \cap W_n = \{0\}$, elegimos una base $\mathcal{B}_n$ de W_n que es disjunta con $\mathcal{B}'$ y extendemos el conjunto $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}_n$ a una base $\mathcal{B}$ de V. Para simplificar la notación, supongamos que:

$$\mathcal{B}' = \{v_1, \cdots, v_h\}, \quad \mathcal{B}_n = \{w_1, \cdots, w_l\}, \quad \mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_h, w_1, \cdots, w_l, u_1, \cdots, u_m\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{B} \cap W_i = \mathcal{B}_i$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Por construcción, $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B} \cap W_i$. Sea ahora $v \in \mathcal{B} \cap W_i$ para un i fijo tal que $1 \leq i \leq n-1$. La única posibilidad es que $v \in \mathcal{B}'$, entonces $v \in \mathcal{B}_j$ para algún j tal que $1 \leq j \leq n-1$, pero $v \in W_i = \langle \mathcal{B}_i \rangle$ y así, $v \in \mathcal{B}_i$.

(ii) Si $\langle \mathcal{B}' \rangle \cap W_n \neq \{0\}$, supongamos como antes que $\mathcal{B}' = \{v_1, \cdots, v_h\}$. Entonces $\langle \mathcal{B}' \rangle = \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_h \rangle$ y como $\mathcal{T}_{n-1}$ es distributivo por la Observación 4.44, vale la propiedad:

$$\langle \mathcal{B}' \rangle \cap W_n = (\langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_h \rangle) \cap W_n = (\langle v_1 \rangle \cap W_n) + \cdots + (\langle v_h \rangle) \cap W_n).$$

Luego, $\{v_j / v_j \in W_n\}$ es una base de $\langle \mathcal{B}' \rangle \cap W_n$. Extendemos primero este conjunto a una base $\mathcal{B}_n$ de W_n, y luego el conjunto $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}_n$ a una base $\mathcal{B}$ de V para lo cual usamos la siguiente notación:

$$\mathcal{B}_n = \{v_j / v_j \in W_n\} \cup \{w_1, \cdots, w_l\}, \; \mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_h, w_1, \cdots, w_l, u_1, \cdots, u_m\}.$$

De manera análoga al caso *(i)*, se ve que $\mathcal{B} \cap W_i = \mathcal{B}_i$ para $1 \leq i \leq n-1$. Sólo restaría ver que $\mathcal{B} \cap W_n \subseteq \mathcal{B}_n$, ya que la inclusión en el otro sentido es trivial. Sea entonces $v \in \mathcal{B} \cap W_n$, luego

- Si $v \in \{v_1, \cdots, v_h\}$, como $v \in W_n$, $v \in \{v_j / v_j \in W_n\} \subseteq \mathcal{B}_n$.
- Si $v \in \{w_1, \cdots, w_l\}$, trivialmente $v \in \mathcal{B}_n$.
- Si $v \in \{u_1, \cdots, u_m\}$, como $v \in W_n$, se contradice la independencia lineal de $\mathcal{B}$.

Recíprocamente, sean E, F, G elementos del subreticulado $\mathcal{T}$ y sea $\mathcal{B}$ una base de V tal que $\mathcal{B} \cap W_i$ es base de W_i para todo i ($1 \leq i \leq n$). E, F y G se escriben respectivamente en términos de intersecciones y sumas de ciertos espacios $W_{E_1}, \cdots, W_{E_r}$; $W_{F_1}, \cdots, W_{F_s}$ y $W_{G_1}, \cdots, W_{G_t}$, donde todos los subíndices pertenecen al conjunto $\{1, \cdots, n\}$. Sea $\mathcal{B}_i = \mathcal{B} \cap W_i$ para todo $1 \leq i \leq n$;

veamos que $E \cap (F + G) \subseteq (E \cap F) + (E \cap G)$. Sea $v \in E \cap (F + G)$, entonces v puede escribirse como sigue:

$$v = \sum_{v_m \in \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_{E_i}} \alpha_m v_m = \sum_{w_p \in \bigcup_{j=1}^{s} \mathcal{B}_{F_j}} \beta_p w_p + \sum_{u_q \in \bigcup_{h=1}^{t} \mathcal{B}_{G_h}} \gamma_q u_q,$$

con $\alpha_m, \beta_p, \gamma_q \in k$. Si todos los escalares β_p y γ_q fueran nulos, v sería nulo también. Lo mismo ocurriría si se cancelaran los términos de la primera suma del lado derecho de la igualdad con los de la segunda. Supongamos entonces que existe un β_p no nulo tal que $\beta_p w_p \neq -\gamma_q u_q$ para todo $u_q \in \bigcup_{h=1}^{t} \mathcal{B}_{G_h}$. Como la escritura en términos de la base $\mathcal{B}$ es única, sabemos que existe $v_m \in \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_{E_i}$ tal que $v_m = w_p$. Concluimos de esta manera que:

$$\underbrace{\sum_{v_m \in \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_{E_i}} \alpha_m v_m - \sum_{w_p \in \bigcup_{j=1}^{s} \mathcal{B}_{F_j}} \beta_p w_p}_{\in E} = \underbrace{\sum_{u_q \in \bigcup_{h=1}^{t} \mathcal{B}_{G_h}} \gamma_q u_q}_{\in G}.$$

Análogamente, se satisface que

$$\underbrace{\sum_{v_m \in \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_{E_i}} \alpha_m v_m - \sum_{u_q \in \bigcup_{h=1}^{t} \mathcal{B}_{G_h}} \gamma_q u_q}_{\in E} = \underbrace{\sum_{w_p \in \bigcup_{j=1}^{s} \mathcal{B}_{F_j}} \beta_p w_p}_{\in F}.$$

Concluimos así que $v \in (E \cap F) + (E \cap G)$, y por lo tanto la terna es distributiva. □

Ejemplo. Sea $V = \mathbb{R}^4$ y sea $\mathcal{T}$ el subreticulado generado por los siguientes subespacios:

$$\begin{aligned} W_1 &= \langle e_1, e_2 \rangle, \\ W_2 &= \langle e_1 - e_2 \rangle, \\ W_3 &= \langle e_2, e_3 \rangle, \end{aligned}$$

donde $\{e_i\}_{i=1}^4$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Resulta evidente que la base $\mathcal{B} = \{e_1 - e_2, e_2, e_3, e_4\}$ distribuye con los espacios W_i para $i = 1, 2, 3$.

Lema 4.51. *Si la terna $(E \oplus E', F_1 + \cdots + F_t, G_1 + \cdots + G_{t'})$ es multidistributiva, entonces valen las siguientes inclusiones:*

$$\begin{aligned} E \cap (G_1 + \cdots + G_{t'}) &\subseteq E \cap (F_1 + \cdots + F_t), \\ E' \cap (F_1 + \cdots + F_t) &\subseteq E' \cap (G_1 + \cdots + G_{t'}). \end{aligned}$$

Demostración. Al ser la terna multidistributiva, se verifica la igualdad:

$$(E \oplus E') \cap (F_1 + \cdots + F_t + G_1 + \cdots + G_{t'}) = (E \cap F_1) + \cdots + (E \cap F_t) + (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'}).$$

Sea $v \in E \cap (G_1 + \cdots + G_{t'})$; entonces, $v \in (E \oplus E') \cap (F_1 + \cdots + F_t + G_1 + \cdots + G_{t'})$. Como $E \cap E' = \{0\}$, $v \in (E \cap F_1) + \cdots + (E \cap F_t) \subseteq E \cap (F_1 + \cdots + F_t)$. Análogamente se prueba la otra inclusión. □

Observación 4.52. *Sean E_1, E_2, E' elementos de un reticulado distributivo $\mathcal{T}$ tales que $E_1 \cap E' = E_2 \cap E' = 0$, entonces $(E_1 + E_2) \cap E' = E_1 \cap E' + E_2 \cap E' = 0$.*

Demostramos ahora el siguiente lema técnico:

Lema 4.53. *Sea $\mathcal{T}$ un subreticulado distributivo de $\mathcal{L}(V)$. Sean $E, E', E_1, E_2, E'_1, E'_2, F_i, G_j \in \mathcal{T}$, $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq t'$. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

(i) Si las ternas $(E \oplus E', F_1, G_1 + \cdots + G_{t'})$ y $(E \oplus E', F_2, G_1 + \cdots + G_{t'})$ son multidistributivas, entonces las ternas $(E \oplus E', F_1 + F_2, G_1 + \cdots + G_{t'})$ y $(E \oplus E', F_1 \cap F_2, G_1 + \cdots + G_{t'})$ también lo son.

(ii) Si las ternas $(E \oplus E', F_1 + \cdots + F_t, G_1)$ y $(E \oplus E', F_1 + \cdots + F_t, G_2)$ son multidistributivas, entonces las ternas $(E \oplus E', F_1 + \cdots + F_t, G_1 + G_2)$ y $(E \oplus E', F_1 + \cdots + F_t, G_1 \cap G_2)$ también lo son.

(iii) Si las ternas $(E_1 \oplus E', F_1 + \cdots + F_t, G_1 + \cdots + G_{t'})$ y $(E_2 \oplus E', F_1 + \cdots + F_t, G_1 + \cdots + G_{t'})$ son multidistributivas, entonces las ternas $((E_1 + E_2) \oplus E', F_1 + \cdots + F_t, G_1 + \cdots + G_{t'})$ y $((E_1 \cap E_2) \oplus E', F_1 + \cdots + F_t, G_1 + \cdots + G_{t'})$ también lo son.

(iv) Si las ternas $(E \oplus E'_1, F_1 + \cdots + F_t, G_1 + \cdots + G_{t'})$ y $(E \oplus E'_2, F_1 + \cdots + F_t, G_1 + \cdots + G_{t'})$ son multidistributivas, entonces las ternas $(E \oplus (E'_1 + E'_2), F_1 + \cdots + F_t, G_1 + \cdots + G_{t'})$ y $(E \oplus (E'_1 \cap E'_2), F_1 + \cdots + F_t, G_1 + \cdots + G_{t'})$ también lo son.

Demostración.

(i) Por hipótesis tenemos las siguientes igualdades:

$$(E \oplus E') \cap (F_1 + G_1 + \cdots + G_{t'}) = (E \cap F_1) + (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'}),$$
$$(E \oplus E') \cap (F_2 + G_1 + \cdots + G_{t'}) = (E \cap F_2) + (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'}).$$

Así, podemos calcular la intersección:

$$\begin{aligned}
&(E \oplus E') \cap (F_1 + F_2 + G_1 + \cdots + G_{t'}) \\
&=_{\text{dist.}} (E \oplus E') \cap (F_1 + G_1 + \cdots + G_{t'}) + (E \oplus E') \cap (F_2 + G_1 + \cdots + G_{t'}) \\
&= (E \cap F_1) + (E' \cap G_1) + \cdots (E' \cap G_{t'}) + (E \cap F_2) + (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'}) \\
&= (E \cap F_1) + (E \cap F_2) + (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'}).
\end{aligned}$$

Para probar que la terna $(E \oplus E', F_1 \cap F_2, G_1 + \cdots + G_{t'})$ es multidistributiva, alcanza con ver la siguiente inclusión:

$$(E \oplus E') \cap ((F_1 \cap F_2) + G_1 + \cdots + G_{t'}) \subseteq (E \cap F_1 \cap F_2) + (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'}).$$

Sabemos que se satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(E \oplus E') \cap ((F_1 \cap F_2) + G_1 + \cdots + G_{t'}) &\subseteq (E \oplus E') \cap (F_1 + G_1 + \cdots + G_{t'}) \\
&= (E \cap F_1) + (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'}),
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

y también que:

$$\begin{aligned}
(E \oplus E') \cap ((F_1 \cap F_2) + G_1 + \cdots + G_{t'}) &\subseteq (E \oplus E') \cap (F_2 + G_1 + \cdots + G_{t'}) \\
&= (E \cap F_2) + (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'}).
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Sea entonces $v \in (E \oplus E') \cap ((F_1 \cap F_2) + G_1 + \cdots + G_{t'})$. Por (4.4.6) y (4.4.7) sabemos que existen elementos $x \in E \cap F_1$, $y \in E \cap F_2$ y $z, w \in (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'})$ tales que $v = x + z = y + w$, entonces $x - y = w - z \in (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'})$. Pero $x, y \in E$, luego $x - y \in E$ y también $x - y \in E'$. Concluimos de este modo que $x - y = 0$, es decir que $x = y \in F_2$. Luego, $x \in E \cap F_1 \cap F_2$.

(ii) Se prueba análogamente a *(i)*.

(iii) Primero veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&((E_1 + E_2) \oplus E') \cap (F_1 + \cdots + F_t + G_1 + \cdots + G_{t'}) \\
&=_{\text{dist.}} (E_1 \oplus E') \cap (F_1 + \cdots + F_t + G_1 + \cdots + G_{t'}) + (E_2 \oplus E') \cap (F_1 + \cdots + F_t + G_1 + \cdots + G_{t'}) \\
&=_{\text{hip}} (E_1 \cap F_1) + \cdots + (E_1 \cap F_t) + (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'}) + \\
&(E_2 \cap F_1) + \cdots + (E_2 \cap F_t) + (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'}) \\
&=_{\text{dist.}} ((E_1 + E_2) \cap F_1) + \cdots + ((E_1 + E_2) \cap F_t) + (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'}).
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando la hipótesis, se verifica para $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
&((E_1 \cap E_2) \oplus E') \cap (F_1 + \cdots + F_t + G_1 + \cdots + G_{t'}) \subseteq (E_i \oplus E') \cap (F_1 + \cdots + F_t + G_1 + \cdots + G_{t'}) \\
&= (E_i \cap F_1) + \cdots + (E_i \cap F_t) + (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'}).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&((E_1 \cap E_2) \oplus E') \cap (F_1 + \cdots + F_t + G_1 + \cdots + G_{t'}) \\
&\subseteq [(E_1 \cap F_1) + \cdots + (E_1 \cap F_t) + (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'})] \cap \\
&[(E_2 \cap F_1) + \cdots + (E_2 \cap F_t) + (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'})] \\
&=_{\text{dist.}} (E_1 \cap E_2 \cap F_1) + \cdots + (E_1 \cap E_2 \cap F_t) + \sum_{\substack{1 \le i, j \le t \\ i \ne j}} \underbrace{(E_1 \cap E_2 \cap F_i \cap F_j)}_{\subseteq E_1 \cap E_2 \cap F_i} + \\
&\sum_{\substack{1 \le i \le t \\ 1 \le h \le t'}} \underbrace{(E_1 \cap F_i \cap E' \cap G_h)}_{=0} + \sum_{\substack{1 \le h \le t' \\ 1 \le i \le t}} \underbrace{(E' \cap G_h \cap E_2 \cap F_i)}_{=0} + \\
&(E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'}) + \sum_{\substack{1 \le h, l \le t' \\ h \ne l}} \underbrace{(E' \cap G_h \cap G_l)}_{\subseteq E' \cap G_h} \\
&\subseteq (E_1 \cap E_2 \cap F_1) + \cdots + (E_1 \cap E_2 \cap F_t) + (E' \cap G_1) + \cdots + (E' \cap G_{t'}).
\end{aligned}$$

(iv) Se prueba análogamente a *(iii)*. □

Lema 4.54. *Si el subreticulado $\mathcal{T}$ generado por los espacios vectoriales $W_1, \cdots, W_n$ es multidistributivo, entonces $\mathcal{T}$ es distributivo y para $W_i \cap W_l = \{0\}$ e $i, j, h, l \in \{1, \cdots, n\}$ distintos entre sí, valen las siguientes inclusiones:*

$$W_i \cap W_j \subseteq W_h,$$
$$W_l \cap W_h \subseteq W_j.$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T}$ es multidistributivo. Si $W_i \cap W_l = \{0\}$, la terna $(W_i \oplus W_l, W_h, W_j)$ donde i,j,h,l son distintos entre sí, es multidistributiva y, por el Lema 4.51, valen las siguientes inclusiones:

$$W_i \cap W_j \subseteq W_i \cap W_h \subseteq W_h \quad \text{y} \quad W_l \cap W_h \subseteq W_l \cap W_j \subseteq W_j.$$

Para ver la distributividad de $\mathcal{T}$, verificamos esta propiedad para sus generadores. Sean i,j,l distintos entre sí. Entonces

$$\begin{aligned} &W_i \cap (W_j + W_h) = (W_i \oplus \{0\}) \cap (W_j + W_h + W_h) \\ &= (W_i \cap W_j) + (W_i \cap W_h) + (\{0\} \cap W_h) = (W_i \cap W_j) + (W_i \cap W_h), \end{aligned}$$

donde en la anteúltima igualdad usamos la multidistributividad de la terna $(W_i \oplus \{0\}, W_j + W_h, W_h)$. El mismo razonamiento vale para otros elementos en el subreticulado. Por lo tanto, $\mathcal{T}$ es distributivo. □

El siguiente ejemplo muestra que existen espacios vectoriales que satisfacen las hipótesis del Lema 4.54.

Ejemplo. Sea $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^{7}$ la base canónica de $\mathbb{R}^7$. Consideremos los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^7$:

$$W_1 = \langle e_1 + e_2, e_1 \rangle,\ W_2 = \langle e_3, e_5 \rangle,\ W_3 = \langle e_1, e_4, e_5 \rangle,\ W_4 = \langle e_1, e_5, e_6 \rangle.$$

Los únicos subespacios que están en suma directa son W_1 y W_2. Miremos los siguientes casos:

- Si $j = 3$ y $h = 4$, entonces $W_1 \cap W_3 = \langle e_1 \rangle \subseteq W_4$ y $W_2 \cap W_4 = \langle e_5 \rangle \subseteq W_3$.
- Si $j = 4$ y $h = 3$, entonces $W_1 \cap W_4 = \langle e_1 \rangle \subseteq W_3$ y $W_2 \cap W_3 = \langle e_5 \rangle \subseteq W_4$.

Proposición 4.55. *Si el subreticulado $\mathcal{T}$ de $\mathcal{L}(V)$ generado por los espacios $W_1, \cdots, W_n$ es multidistributivo, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V que distribuye con $W_1, \cdots, W_n$ y valen las siguientes inclusiones:*

$$W_i \cap W_j \subseteq W_h \quad y \quad W_l \cap W_h \subseteq W_j,$$

cada vez que $W_i \cap W_l = \{0\}$ e $i,j,h,l \in \{1, \cdots, n\}$ son distintos entre sí.

Demostración. Es inmediata combinando la Proposición 4.50 y el Lema 4.54. □

Definición 4.56 ([B1]). *El subreticulado $\mathcal{T}$ de $\mathcal{L}(V)$ generado por los espacios $W_1, \cdots, W_n$ se dice* ***predistributivo*** *si para cada i, $1 \leq i \leq n$, el subreticulado generado por $\{W_j\}_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}}$ es distributivo.*

Sea $\mathcal{T}$ el subreticulado de $\mathcal{L}(V)$ generado por los espacios $W_1, \cdots, W_n$. Consideremos además para $2 \leq i \leq n-1$ los subespacios:

$$W_i^{\cap} = W_1 \cap \cdots \cap W_{i-1} \quad \text{y} \quad W_i^{+} = W_{i+1} + \cdots + W_n.$$

Nuestro objetivo es ahora estudiar la estructura generada por tres subespacios W_1, W_2, W_3 de un k-espacio vectorial V tales que la terna (W_1, W_2, W_3) es distributiva. Sabemos de acuerdo con los resultados de la sección anterior que vale la Ley distributiva en los generadores. Estamos interesados en saber si el reticulado generado por estos tres subespacios es distributivo. Para responder esto estudiaremos la distributividad de las siguientes ternas. Sean $i,j,l,t \in \{1,2,3\}$:

- $(W_i + W_j, W_l, W_t)$ con $i \neq j$. Si $l = t$ la distributividad se deduce de la de los generadores. Supongamos entonces que $l \neq t$. En este caso alguno de los subíndices debe repetirse, supongamos sin pérdida de generalidad que $i = l$. La descripción de $\overline{S_{W_i}}$, asegura que $(W_i + W_j) \cap (W_i + W_t) = W_i + (W_j \cap W_t)$. Por otro lado, $(W_i + W_j) \cap W_i + (W_i + W_j) \cap W_t = W_i + (W_i \cap W_t) + (W_j \cap W_t) = W_i + (W_j \cap W_t)$.

- $(W_i \cap W_j, W_l, W_t)$ con $l \neq t$ e $i \neq j$. Supongamos $i = l$, entonces $(W_i \cap W_j) \cap (W_i + W_t) = W_i \cap (W_j \cap (W_i + W_t)) = W_i \cap ((W_i \cap W_j) + (W_j \cap W_t)) = S_{W_j} = (W_i \cap (W_j \cap (W_i + (W_j \cap W_t))) = (W_i \cap W_j) \cap (W_i + (W_j \cap W_t))) = (W_i \cap W_j) + (W_i \cap W_j \cap W_t)$.

- $(W_i, W_j + W_l, W_t)$ con $j \neq l$. Supongamos que $i = t$, entonces $W_i \cap (W_j + W_l + W_i) = W_i = (W_i \cap (W_j + W_l)) + W_i$. Si $j = i \neq t$, $W_i \cap (W_i + W_l + W_t) = W_i = W_i + (W_i \cap W_t) = W_i \cap (W_i + W_l) + (W_i \cap W_t)$. Supongamos finalmente que $t = j$, entonces $W_i \cap (W_j + W_l) + (W_i \cap W_j) = W_i \cap (W_j + W_l) = W_i \cap (W_j + W_l + W_j)$.

- $(W_i, W_j \cap W_l, W_t)$ con $j \neq l$. En el caso en que $i = t$, $W_i \cap ((W_j \cap W_l) + W_i) = W_i = (W_i \cap W_j \cap W_l) + W_i$. Si $j = i \neq t$, la descripción de S_{W_i} dice que $W_i \cap ((W_i \cap W_l) + W_t) = (W_i \cap W_t) + (W_i \cap W_l)$. Por otro lado, $(W_i \cap W_i \cap W_l) + (W_i \cap W_t) = (W_i \cap W_l) + (W_i \cap W_t)$ y vale la distributividad. Finalmente, si $t = j$, $W_i \cap ((W_j \cap W_l) + W_j) = W_i \cap W_j = (W_i \cap W_j \cap W_l) + (W_i \cap W_j)$.

- $(W_i, W_j, W_l + W_t)$ y $(W_i, W_j, W_l \cap W_t)$ con $l \neq t$. La distributividad de estas ternas es válida por los dos casos anteriores ya que si la terna (E, F, G) es distributiva, entonces también lo es (E, G, F).

Restaría ver que el resto de las ternas formadas por los 18 elementos de esta estructura son distributivas, lo cual no presenta dificultades.

Estamos en condiciones de demostrar la siguiente proposición.

Proposición 4.57 ([B1]). *El subreticulado $\mathcal{T}$ de $\mathcal{L}(V)$ generado por los subespacios $W_1, \cdots, W_n$ es distributivo si y sólo si $\mathcal{T}$ es predistributivo y las ternas $(W_i^{\cap}, W_i, W_i^{+})$ son distributivas para todo i, $2 \leq i \leq n-1$.*

Demostración. Es evidente que si $\mathcal{T}$ es distributivo, también lo son las ternas $(W_i^{\cap}, W_i, W_i^{+})$ para todo i, $2 \leq i \leq n-1$ y $\mathcal{T}$ es predistributivo. Recíprocamente, si $n = 3$ el resultado se reduce a probar que si (W_1, W_2, W_3) es una terna distributiva, entonces el reticulado generado por W_1, W_2, W_3 es distributivo. Esta afirmación se sigue de los comentarios precedentes y del Teorema 4.47. Si $n > 3$, la prueba se reduce al Teorema 4.46. ☐

Observación 4.58 ([B1]). *La hipótesis de predistributividad en la Proposición 4.57 puede eliminarse. En ese caso, la demostración es por inducción sobre n: La hipótesis inductiva, que dice que los subreticulados de $\mathcal{T}$ generados por una cantidad menor que n generadores son distributivos, es más fuerte que la condición de que $\mathcal{T}$ sea predistributivo.*

Definición 4.59 ([B1]). *Sea $\mathcal{T}$ el subreticulado generado por los espacios $W_1, \cdots, W_n$. Una terna (M, N, P) en $\mathcal{T}$ se denomina **terna característica** si existe i tal que $2 \leq i \leq n-1$, $N = W_i$, M es intersección de algunos de los subespacios $W_1, \cdots, W_{i-1}$ y P es suma de algunos de los subespcios $W_{i+1}, \cdots, W_n$.*

Proposición 4.60 ([B1]). *$\mathcal{T}$ es distributivo si y sólo si todas las ternas características son distributivas.*

Demostración. La condición necesaria es trivial ya que todo elemento que forma una terna característica está por definición generado por los subespacios generadores de $\mathcal{T}$.

Para ver la implicación recíproca, supongamos que todas las ternas características son distributivas, en particular las ternas de la forma $(W_i^{\cap}, W_i, W_i^{+})$, con $2 \leq i \leq n-1$. Por la Observación 4.58 y la Proposición 4.57, sabemos que $\mathcal{T}$ es distributivo. ☐

Consideramos a partir de ahora un álgebra (a,b)-homogénea, $A = T(V)/I$, con R un espacio de relaciones y R_a y R_b como antes. Denotamos por $\mathcal{T}_n$ al subreticulado de $\mathcal{L}(V^{(n)})$ generado por los siguientes subespacios:

$$\begin{cases} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(n-i-a)} & \text{si } a \leq n < b, \\ V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} \text{ y } V^{(h)} \otimes R_b \otimes V^{(l)}, \text{ con } i+j+a = h+l+b = n, & \text{si } n \geq b. \end{cases} \tag{4.4.8}$$

Definición 4.61 ([B1]). *Decimos que un álgebra A es **distributiva** si todos los subreticulados $\mathcal{T}_n$ generados por (4.4.8) son distributivos.*

Lema 4.62. *El subreticulado $\mathcal{T}_n$ generado por (4.4.8) no es multidistributivo si $n > b$.*

Demostración. Sea $n > b$ y sean $R_a \otimes V^{(n-a)}, R_b \otimes V^{(n-b)} \in \mathcal{T}_n$. Como R_a y R_b son excluyentes, los espacios vectoriales considerados tienen intersección nula. Elegimos además los subespacios $V^{(n-a)} \otimes R_a$ y $V^{(n-b)} \otimes R_b$, y obtenemos así cuatro generadores distintos de $\mathcal{T}_n$. Observamos entonces lo siguiente:

$$(R_a \otimes V^{(n-a)}) \cap (V^{(n-a)} \otimes R_a) \nsubseteq V^{(n-b)} \otimes R_b,$$
$$(R_b \otimes V^{(n-b)}) \cap (V^{(n-b)} \otimes R_b) \nsubseteq V^{(n-a)} \otimes R_a,$$

porque R_a y R_b son excluyentes y ambas intersecciones no se anulan si $n > b$. Luego, por la Proposición 4.55, $\mathcal{T}_n$ no es multidistributivo. □

Observación 4.63. *La idea natural de definir la multidistributividad para un álgebra $A = T(V)/I$ generalizando el concepto de distributividad para álgebras de esta forma, correspondería a pedir que el reticulado $\mathcal{T}_n$ generado por (4.4.8) sea multidistributivo para cualquier n, pero como consecuencia del Lema 4.62 esto es absurdo.*

4.5 Ejemplo

Hasta el momento hemos definido la noción de álgebra (a,b)-Koszul, y también hemos estudiado propiedades de estas álgebras. En este ejemplo consideraremos álgebras de la forma $A = k\langle x,y\rangle/I$ tales que I está generado por un espacio de relaciones R que se descompone como $R = R_a \oplus R_b$ con R_a y R_b excluyentes, $4 \leq a < b$ y donde

- $R_a = \langle x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y^2 \rangle$ con $w_{a-2j} = x$ y $w_{a-2j-1} = y$ para $2 \leq j \leq t$ donde $t = \begin{cases} \frac{a-2}{2} & \text{si } a \text{ es par,} \\ \frac{a-1}{2} & \text{si } a \text{ es impar.} \end{cases}$
- $R_b = \langle x^2 y^{b-4} xy \rangle$.

Notaremos estas álgebras $\tilde{A}_{a,b}$. Nuestro objetivo es decidir bajo qué condiciones $\tilde{A}_{a,b}$ es (a,b)-Koszul.

Observación 4.64. *Consideraremos $(a,b) \neq (4,6)$ ya que de lo contrario R_a y R_b no son excluyentes, lo que contradice una de las hipótesis generales.*

Verifiquemos en primer lugar que valen las *(c.e.)*. Como $\{x,y\}$ es una base de V,

$$\{v_{i_1} \cdots v_{i_{a-1}} x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y^2 \ / \ v_{i_j} = x, y\}$$

es una base de $V^{(a-1)} \otimes R_a$. La intersección $(V^{(a-1)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(a-1)} + \cdots + V^{(a-2)} \otimes R_a \otimes V)$ es claramente nula por la forma de esta base.

Por otro lado, es claro que $J^a_{a+1} = (V \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V) = 0$. Por lo tanto, $(V^{(a-1)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(a-1)} + \cdots + V^{(a-2)} \otimes R_a \otimes V) = V^{(a-2)} \otimes J^a_{a+1}$.

La verificación de la otra igualdad de las *(c.e.)* es similar.

En cuanto a las *(c.e.n)*, si tomamos un elemento en $(V^{(b-1)} \otimes R_a \otimes V) \cap (V^{(b)} \otimes R_a) \cap (R_b \otimes V^{(a)})$, en particular pertenece a $(V^{(b)} \otimes R_a) \cap (R_b \otimes V^{(a)}) = R_b \otimes R_a = \langle x^2y^{b-4}xyx^2w_1 \cdots w_{a-4}y^2 \rangle$; sin embargo, este generador no pertenece a $V^{(b-1)} \otimes R_a \otimes V$ pues su coordenada $(a+b-2)$-ésima es x. Por lo tanto, la intersección es nula. En forma análoga, $(V^{(a)} \otimes R_b) \cap (R_a \otimes V^{(b)}) = R_a \otimes R_b = \langle x^2w_1 \cdots w_{a-4}y^2x^2y^{b-4}xy \rangle$. Luego, $(V^{(a-1)} \otimes R_b \otimes V) \cap (V^{(a)} \otimes R_b) \cap (R_a \otimes V^{(b)}) = 0$.

Para verificar las *(c.e.c.)*, sea $v \in (V^{(b-1)} \otimes R_a) \cap (R_b \otimes V^{(a-1)} + \cdots + V^{(a-2)} \otimes R_b \otimes V)$. Así, $v = \sum_{i=(i_1,\cdots,i_{a+b-1})} \lambda_i v_{i_1} \cdots v_{i_{a+b-1}}$ con $\lambda_i \in k$ y $v_{i_j} = x$ o $v_{i_j} = y$ para $1 \leq j \leq a+b-1$. Como en el caso de las *(c.e.)*, $v_{i_1} \cdots v_{i_{a+b-1}} = v_{i_1} \cdots v_{i_{b-1}} x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y^2$. Para que este elemento pertenezca a la suma, debe ser además $v_{i_1} \cdots v_{i_{a+b-1}} = v_{i_1} \cdots v_{i_s} x^2 y^{b-4} xy v_{i_{b+s+1}} \cdots v_{i_{a+b-1}}$ para algún s, $0 \leq s \leq a-2$. Tenemos de este modo por un lado que $v_{i_b} = v_{i_{b+1}} = x$, y por el otro las siguientes posibilidades:

- si $s = 0$ entonces $v_{i_b} = y$,
- si $s = 1$ entonces $v_{i_{b+1}} = y$,
- si $2 \leq s \leq a-2$ entonces $s+2 \leq a < b$ y $s+2+b-4 = s-2+b \geq b$, luego $v_{i_b} = y$.

En todos los casos llegamos a una contradicción y por lo tanto la intersección es nula.

Del mismo modo puede verse que $(V^{(a-1)} \otimes R_b) \cap (R_a \otimes V^{(b-1)} + \cdots + V^{(b-2)} \otimes R_a \otimes V) = 0$.

Sea $\mathcal{B}_n = \{v_{i_1} \cdots v_{i_n} \ / \ v_{i_j} = x \text{ o } v_{i_j} = y \text{ para } 1 \leq j \leq n\}$ una base de $V^{(n)}$. Es claro que $\mathcal{B}_n$ distribuye con $\mathcal{T}_n$, pues

$$\mathcal{B}_n \cap \mathcal{T}_n = \{v_{i_1} \cdots v_{i_s} x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y^2 v_{i_{a+s+1}} \cdots v_{i_n}, v_{i_1} \cdots v_{i_r} x^2 y^{b-4} xy v_{i_{b+r+1}} \cdots v_{i_n} \ / \\ v_{i_j} = x \text{ o } v_{i_j} = y \text{ y } 0 \leq s \leq n-a, \ 0 \leq r \leq n-b\}$$

y este conjunto es una base de $\mathcal{T}_n$.

El próximo paso es probar que $\operatorname{Ker} \delta_2$ es 2-puro en grados $a+1$ y $b+1$. Por lo anterior y la Proposición 4.50 ya sabemos que el reticulado $\mathcal{T}_n$ es distributivo y por lo tanto las ternas definidas en la Proposición 4.14 también lo son. Además, conservando las notaciones, sabemos que $(E' \oplus E'') \cap (F' + G' + F'' + G'') = E' \cap (F' + G') + E' \cap (F'' + G'') + E'' \cap (F' + G') + E'' \cap (F'' + G'')$. Analicemos ahora los sumandos que podrían sobrar para obtener la multidistributividad.

Busquemos una base para $E' \cap (F'' + G'')$. Un elemento en dicha base, por estar en E', es de la forma $v_{i_1} \cdots v_{i_{n-a}} x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y^2$ donde w_j está dado por la definición de R_a. Si este elemento está en F'' también está en F'. Si está en $G'' = (V^{(n-2b+1)} \otimes R_b \otimes V^{(b-1)} + \cdots + V^{(n-a-b)} \otimes R_b \otimes V^{(a)}) + (V^{(n-a-b+1)} \otimes R_b \otimes V^{(a-1)} + \cdots + V^{(n-b-1)} \otimes R_b \otimes V)$ y suponemos que $v_{i_1} \cdots v_{i_{n-a}} x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y^2 = v_{j_1} \cdots v_{j_{n-b-s}} x^2 y^{b-4} xy v_{j_{n-s+1}} \cdots v_{j_n}$ donde $1 \leq s \leq a-1$, entonces como $n-a > n-b-s$, la expresión $x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y^2$ debe aparecer en algún momento en la escritura de $x^2 y^{b-4} xy v_{j_{n-s+1}} \cdots v_{j_n}$ y la única opción posible es cuando $(a,b) = (4,6)$, caso que fue excluido en la Observación 4.64. Luego, el elemento no puede pertenecer a $V^{(n-a-b+1)} \otimes R_b \otimes V^{(a-1)} + \cdots + V^{(n-b-1)} \otimes R_b \otimes V$. Si este elemento es suma de vectores de los otros sumandos, entonces pertenece a F'. Luego, $E' \cap (F'' + G'') \subseteq E' \cap (F' + G')$.

Ahora busquemos una base para la intersección $E'' \cap (F' + G')$. Un elemento en tal base, por pertenecer a E'', es de la forma $v_{i_1} \cdots v_{i_{n-b}} x^2 y^{b-4} xy$. Supongamos que está en

$$\begin{aligned}
&F' = (R_a \otimes V^{(n-a)} + \cdots + V^{(n-a-b)} \otimes R_a \otimes V^{(b)}) + \\
&(V^{(n-a-b+1)} \otimes R_a \otimes V^{(b-1)} + \cdots + V^{(n-2a)} \otimes R_a \otimes V^{(a)}) + (R_b \otimes V^{(n-b)} + \cdots + V^{(n-2b)} \otimes R_b \otimes V^{(b)}) + \\
&(V^{(n-2b+1)} \otimes R_b \otimes V^{(b-1)} + \cdots + V^{(n-a-b)} \otimes R_b \otimes V^{(a)}) \\
&= F'' + \underbrace{(V^{(n-a-b+1)} \otimes R_a \otimes V^{(b-1)} + \cdots + V^{(n-2a)} \otimes R_a \otimes V^{(a)})}_{D} + \\
&\underbrace{V^{(n-2b+1)} \otimes R_b \otimes V^{(b-1)} + \cdots + V^{(n-a-b)} \otimes R_b \otimes V^{(a)}}_{\subseteq G''}.
\end{aligned}$$

Si el elemento está en D, entonces está en alguno de sus sumandos; es decir, $v_{i_1} \cdots v_{i_{n-b}} x^2 y^{b-4} xy = v_{j_1} \cdots v_{j_{n-a-s}} x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y^2 v_{j_{n-s+1}} \cdots v_{j_n}$ donde $a \leq s \leq b-1$. En la escritura del lado derecho tenemos que $v_{j_{n-s-2}} = x$ y $v_{j_{n-s-1}} = v_{j_{n-s}} = y$ y esta situación sólo puede ocurrir del lado izquierdo en los siguientes casos:

- a partir de una coordenada menor o igual que $n-b-2$, entonces $n-s-2 \leq n-b-2$, que es una contradicción.
- coordenadas a partir de $n-b+2$, entonces $n-s-2 = n-b+2$; es decir, $s = b-4$. Este caso es $v_{i_1} \cdots v_{i_{n-b}} x^2 y^{b-4} xy = v_{j_1} \cdots v_{j_{n-a-b+4}} x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y^2 v_{j_{n-b+5}} \cdots v_{j_n}$ y de este modo, $v_{j_{n-b+1}} = x = w_{a-3} = y$ que es una contradicción si $a \geq 6$.

  Si $a = 4$, la igualdad se reduce a $v_{i_1} \cdots v_{i_{n-b}} x^2 y^{b-4} xy = v_{j_1} \cdots v_{j_{n-b}} x^2 y^2 v_{j_{n-b+5}} \cdots v_{j_n}$ situación que ocurre sólo si $b \geq 6$. Por otro lado, si $a = 5$, el caso se reduce a $v_{i_1} \cdots v_{i_{n-b}} x^2 y^{b-4} xy = v_{j_1} \cdots v_{j_{n-b-1}} x^3 y^2 v_{j_{n-b+5}} \cdots v_{j_n}$ y esta situación es posible sólo si $b \geq 6$.

Analicemos ahora $E'' \cap G' = (V^{(n-b)} \otimes R_b) \cap (V^{(n-2a+1)} \otimes R_a \otimes V^{(a-1)} + \cdots + V^{(n-a-1)} \otimes R_a \otimes V)$. Supongamos que $n \geq a+b-1$, entonces

$$\begin{aligned}
E'' \cap G' &= V^{(n-a-b+1)} \otimes [(V^{(a-1)} \otimes R_b) \cap (V^{(b-a)} \otimes R_a \otimes V^{(a-1)} + \cdots + V^{(b-2)} \otimes R_a \otimes V)] \\
&\subseteq V^{(n-a-b+1)} \otimes [(V^{(a-1)} \otimes R_b) \cap (R_a \otimes V^{(b-1)} + \cdots + V^{(b-2)} \otimes R_a \otimes V)] = 0,
\end{aligned}$$

como ya fue probado anteriormente. Sin embargo, si $2a \leq n < a+b-1$ entonces un elemento en la intersección es suma de escalares por ciertos vectores tales que $v_{i_1} \cdots v_{i_{n-b}} x^2 y^{b-4} xy = v_{j_1} \cdots v_{j_{n-a-s}} x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y^2 v_{j_{n-s+1}} \cdots v_{j_n}$ donde $1 \leq s \leq a-1$. Este caso se analiza como $E'' \cap D$.

Por lo tanto, $E'' \cap (F' + G') \subseteq E'' \cap (F'' + G'')$.

Luego, la terna $(E' \oplus E'', F' + G', F'' + G'')$ es multidistributiva y por la Proposición 4.14, $\operatorname{Ker} \delta_2$ es 2-puro en grados $a+1$ y $b+1$.

Consideremos ahora $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq s+1$ con $s = a$ o $s = b$. Entonces

$$\begin{aligned}
J_m^s &= (R_s \otimes V^{(m-s)}) \cap (V \otimes R_s \otimes V^{(m-s-1)}) \cap \cdots \cap (V^{(m-s)} \otimes R_s) \\
&\subseteq V^{(m-s-1)} \otimes [(R_s \otimes V) \cap (V \otimes R_s)] = V^{(m-s-1)} \otimes J_{s+1}^s = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en el Teorema 4.19, tenemos los siguientes dos casos:

- Si i es par, entonces $E_s = V^{(n-\frac{i}{2}s)} \otimes J_{\frac{i}{2}s}^s = 0$ para $s = a, b$, pues $\frac{i}{2}s \geq 2s > s+1$.

- Si i es impar, entonces $E_s = V^{(n-\frac{i-1}{2}s-1)} \otimes J^s_{\frac{i-1}{2}s+1} = 0$ para $s = a, b$, pues $\frac{i-1}{2}s + 1 \geq s + 1$.

Luego, las distributividades y multidistributividades de las ternas en el Teorema 4.19 se satisfacen trivialmente.

Concluimos de esta manera, por los Teoremas 4.19 y 4.24, el siguiente lema:

Lema 4.65. *Las álgebras $\tilde{A}_{a,b}$ son (a, b)-Koszul si y sólo si $(a, b) = (4, 5)$ o $a, b \in \mathbb{N}$ son tales que $6 \leq a < b$.*

Observación 4.66. *Las álgebras de la forma $A = \frac{k\langle x,y\rangle}{\langle x^a, y^b\rangle}$ donde $a, b \in \mathbb{N}$ son tales que $2 \leq a < b$ no son (a, b)-Koszul. Para mostrar esta afirmación consideremos la terna $(E_a \oplus E_b, (F_1 + F_2) + F_3 + F_4, (F_5 + F_6) + F_7 + F_8)$ dada como en el Teorema 4.19 para el caso en que i es impar.*

Sea $\mathcal{B}_n = \{v_{i_1} \cdots v_{i_n} \ / \ v_{i_j} = x \text{ o } v_{i_j} = y \text{ para } 1 \leq j \leq n\}$ una base de $V^{(n)}$. Es claro que $\mathcal{B}_n$ distribuye con $\mathcal{T}_n$, pues $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{T}_n = \{v_{i_1} \cdots v_{i_s} x^a v_{i_{a+s+1}} \cdots v_{i_n}, v_{i_1} \cdots v_{i_r} y^b v_{i_{b+r+1}} \cdots v_{i_n} \ / \ v_{i_j} = x \text{ o } v_{i_j} = y \text{ y } 0 \leq s \leq n-a, \ 0 \leq r \leq n-b\}$ donde w_i está dado por la definición de R_a. Este conjunto es una base de $\mathcal{T}_n$. Así, por la Proposición 4.50, $\mathcal{T}_n$ es distributivo.

Vemos que: $(E_a \oplus E_b) \cap (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8) = E_a \cap (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) + E_a \cap (F_5 + F_6 + F_7 + F_8) + E_b \cap (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) + E_b \cap (F_5 + F_6 + F_7 + F_8)$. Consideremos $i \geq 5$, $n \geq \frac{i+1}{2}b + 1$ y el elemento $v = v_{j_1} \cdots v_{j_{n-\frac{i+1}{2}b+1}} y^{\frac{i+1}{2}b-1}$ donde

$$v_{j_t} = \begin{cases} x & si \ \ t = n - \frac{i+1}{2}b - 2h + 1, \\ y & si \ \ t = n - \frac{i+1}{2}b - 2h, \end{cases}$$

para $h \geq 0$ y mientras los subíndices tengan sentido. Si bien $v \in E_b \cap F_2$ pues $\frac{i-1}{2}b + 1 < \frac{i+1}{2}b - 1$, es fácil ver que no pertenece a E_a ni a $F_5 + F_6 + F_7 + F_8$. Luego, la terna no es multidistributiva.

4.6 Álgebra opuesta y álgebra dual

En esta sección definimos A°, el álgebra (a, b)-homogénea opuesta de un álgebra A y probamos que A° es (a, b)-Koszul si y sólo si A lo es. Además, analizamos si las condiciones *(c.e.)*, *(c.e.n.)* y *(c.e.c.)* válidas para A siguen valiendo para A°.

Por otro lado, definimos el álgebra (a, b)-homogénea dual de A y vemos que la noción de ser (a, b)-Koszul en general no se preserva para el álgebra dual asociada.

Durante esta sección, $A = T(V)/I$ es una k-álgebra (a, b)-homogénea sobre un k-espacio vectorial de dimensión finita V, y $R = R_a \oplus R_b$, con R_a y R_b excluyentes, genera como antes el ideal I. Consideremos el endomorfismo k-lineal τ de $T(V)$ definido por:

- $\tau(1) = 1$,
- $\tau(w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n) = w_n \otimes \cdots \otimes w_2 \otimes w_1$ para $w_1, \cdots, w_n \in V$ y $n \geq 1$.

Definición 4.67 ([B1]). *Sean A y B dos k-álgebras y sea $f : A \to B$ un morfismo k-lineal tal que $f(ab) = f(b)f(a)$ para todo $a, b \in A$. Entonces f se dice un* ***anti-homomorfismo*** *de álgebras. Si además f es biyectivo, se dice que es un* ***anti-isomorfismo****.*

Claramente, τ es un anti-isomorfismo del álgebra tensorial $T(V)$ que induce naturalmente el siguiente anti-isomorfismo de álgebras:

$$\overline{\tau} : A \longrightarrow \frac{T(V)}{I(\tau(R))}.$$

Es claro que si $R = R_a \oplus R_b$ con R_a y R_b excluyentes, entonces $\tau(R) = \tau(R_a) \oplus \tau(R_b)$ con $\tau(R_a)$ y $\tau(R_b)$ excluyentes.

Denotamos por A° al álgebra (a, b)-homogénea cuyo ideal de relaciones está generado por $\tau(R)$. Vemos que $\overline{\tau}$ es un isomorfismo de álgebras entre el álgebra opuesta de A, A^{op}, y A°. Decimos que A° es el **álgebra** (a, b)**-homogénea opuesta** de A.

Proposición 4.68. *El álgebra A° es (a, b)-Koszul si y sólo si A lo es.*

Demostración. La aplicación $\overline{\tau}$, induce un isomorfismo de la categoría de A-módulos a derecha $\mathbb{Z}$-graduados y acotados inferiormente en la categoría de A°-módulos a izquierda $\mathbb{Z}$-graduados y acotados inferiormente, definido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{mod-}A & \to & A^\circ\text{-}\operatorname{mod} \\ M & \mapsto & M, \end{array}$$

donde la estructura de M como A°-módulo está dada por:

$$\begin{aligned} A^\circ \otimes M &\to M \\ a \otimes m &\mapsto am := m\overline{\tau}^{-1}(a). \end{aligned}$$

Esta multiplicación está bien definida pues $\overline{\tau}^{-1} : A^\circ \to A$ es un anti-isomorfismo de k-álgebras y M es un A-módulo a derecha.

Si A es (a, b)-Koszul, y aplicamos τ a los módulos de la resolución de Koszul del A-módulo a derecha k, obtenemos una resolución del A°-módulo a izquierda k que es de Koszul pues τ es un isomorfismo homogéneo y por lo tanto preserva la graduación. En particular, un álgebra A es (a, b)-Koszul a derecha si y sólo si A° es (a, b)-Koszul a izquierda. □

Definición 4.69. *Un álgebra (a, b)-homogénea A se dice τ**-conmutativa** si $\tau(R) = R$, o equivalentemente, si $A^\circ = A$.*

Ejemplo. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $2 < a < b$, entonces las álgebras de la forma $A = \frac{k\langle x,y\rangle}{\langle x^a, y^b\rangle}$ son τ-conmutativas.

Proposición 4.70. *Las (c.e.) se satisfacen para A° si y sólo si las (c.e.) se satisfacen para A.*

Demostración. Observemos primero que si W_1 y W_2 son subespacios de $V^{(n)}$, entonces como τ es un anti-isomorfismo de $T(V)$ se verifican las siguientes propiedades:

(i) $\tau(W_1 + W_2) = \tau(W_1) + \tau(W_2)$.

(ii) $\tau(W_1 \cap W_2) = \tau(W_1) \cap \tau(W_2)$.

(iii) $\tau(V^{(n)}) = V^{(n)}$.

(iv) $\tau(W_1 \otimes W_2) = \tau(W_2) \otimes \tau(W_1)$.

Supongamos ahora que se satisfacen las *(c.e.)* para A, entonces por la Proposición 4.12, sabemos que para $2 \leq m \leq a - 1$ y $2 \leq l \leq b - 1$ las ternas:

$$\begin{aligned} (E, F, G) = {} & (V^{(m)} \otimes R_a, R_a \otimes V^{(m)}, V \otimes R_a \otimes V^{(m-1)} + \cdots + V^{(m-1)} \otimes R_a \otimes V) \text{ y} \\ (\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}) = {} & (V^{(l)} \otimes R_b, R_b \otimes V^{(l)}, V \otimes R_b \otimes V^{(l-1)} + \cdots + V^{(l-1)} \otimes R_b \otimes V) \end{aligned}$$

son distributivas.

Sean $F' = \tau(E)$, $E' = \tau(F)$ y $G' = \tau(G)$, queremos ver que (E', F', G') es distributiva. Dado $v \in E' \cap (F' + G')$, entonces $v \in E'$ y $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in F'$ y $v_2 \in G'$. Así, $\tau^{-1}(v) = \tau^{-1}(v_1) + \tau^{-1}(v_2)$, luego $\underbrace{\tau^{-1}(v_1)}_{\in E} = \underbrace{\tau^{-1}(v)}_{\in F} - \underbrace{\tau^{-1}(v_2)}_{\in G}$ y al ser (E, F, G) una terna distributiva, sabemos que existen $w_1 \in E \cap F$ y $w_2 \in E \cap G$ tales que $\tau^{-1}(v_1) = w_1 + w_2$. Por lo tanto, $v_1 = \tau(w_1) + \tau(w_2)$ y $v = \tau(w_1) + \tau(w_2) + v_2$, donde $\tau(w_1) \in E' \cap F'$, $\tau(w_2) + v_2 \in G'$ y además, $\tau(w_2) + v_2 = v - \tau(w_1) \in E'$. Luego, $v \in (E' \cap F') + (E' \cap G')$, y entonces la terna (E', F', G') es distributiva. Análogamente si tomamos R_b.

Además, sabemos que valen las siguientes inclusiones:

$$(V^{(m)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(m)}) \subseteq V^{(m-1)} \otimes R_a \otimes V \text{ y } (V^{(l)} \otimes R_b) \cap (R_b \otimes V^{(l)}) \subseteq V^{(l-1)} \otimes R_b \otimes V,$$

y por el Lema 4.13 estas inclusiones son equivalentes a las siguientes igualdades:

$$(V^{(m)} \otimes R_a) \cap (R_a \otimes V^{(m)}) = J^a_{a+m} \text{ y } (V^{(l)} \otimes R_b) \cap (R_b \otimes V^{(l)}) = J^b_{b+l}.$$

Nuevamente, si aplicamos τ obtenemos las inclusiones necesarias para asegurar que las *(c.e.)* se satisfacen para A°. □

Observación 4.71. *Por el contrario, no tenemos este tipo de equivalencia para las (c.e.n.) ni para las (c.e.c) entre A° y A. Para mostrar esta situación consideramos el álgebra $A = \frac{k\langle x,y\rangle}{\langle x^3, xy^3\rangle}$. Las (c.e.n.) para A son las siguientes:*

- $(V^{(3)} \otimes R_3 \otimes V) \cap (V^{(4)} \otimes R_3) \cap (R_4 \cap V^{(3)}) = 0.$
- $(V^{(2)} \otimes R_4 \otimes V) \cap (V^{(3)} \otimes R_4) \cap (R_3 \cap V^{(4)}) = 0.$

Sin embargo, $y^3x^4 \in (V^{(3)} \otimes \tau(R_3) \otimes V) \cap (V^{(4)} \otimes \tau(R_3)) \cap (\tau(R_4) \otimes V^{(3)})$. Luego, no se satisfacen las (c.e.n.) para A°.

Por otro lado, consideramos el álgebra $A = \frac{k\langle x,y\rangle}{\langle xy^2, x^4+x^3y\rangle}$.

- *Es fácil ver que la intersección $(V^{(3)} \otimes R_3) \cap (R_4 \otimes V^{(2)} + V \otimes R_4 \otimes V)$ es nula.*
- *Vemos también que $(V^{(2)} \otimes R_4) \cap (R_3 \otimes V^{(3)} + V \otimes R_3 \otimes V^{(2)} + V^{(2)} \otimes R_3 \otimes V) = 0.$*

Por lo tanto, las (c.e.n.) se satisfacen para A. Sin embargo, $\tau(R_3) = \langle y^2x\rangle$ y $\tau(R_4) = \langle x^4 + yx^3\rangle$. Luego, el elemento $y^2(x^4 + yx^3)$ pertenece a $(V^{(2)} \otimes \tau(R_4)) \cap (\tau(R_3) \otimes V^{(3)} + V \otimes \tau(R_3) \otimes V^{(2)})$, y por lo tanto las (c.e.c.) no se satisfacen para A°.

Sea V^* el espacio vectorial dual de V. Denotaremos $R_a^\perp$ y $R_b^\perp$ a los subespacios de $(V^*)^{(a)}$ y de $(V^*)^{(b)}$ que son ortogonales (respecto de la evaluación) a R_a y R_b respectivamente.

Definimos el **álgebra** (a,b)**-homogénea dual de** A, que denotamos por $A^!$, como $T(V^*)/\tilde{I}$ donde $R_a^\perp \oplus R_b^\perp$ es un espacio de relaciones para el ideal $\tilde{I}$.

Introducimos las siguientes notaciones:

$$J(R_a)_n = \begin{cases} V^{(n)} & \text{si } 0 \leq n \leq a-1, \\ \displaystyle\bigcap_{i+j+a=n} V^{(i)} \otimes R_a \otimes V^{(j)} = J^a_n & \text{si } n \geq a, \end{cases}$$

$$J(R_b)_n = \begin{cases} V^{(n)} & \text{si } 0 \leq n \leq b-1, \\ \bigcap\limits_{h+l+b=n} V^{(h)} \otimes R_b \otimes V^{(l)} = J_n^b & \text{si } n \geq b. \end{cases}$$

Resulta sencillo probar el siguiente lema:

Lema 4.72. *Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita y sea R un subespacio de $V^{(n)}$. Entonces,*

$$(V^{(i)} \otimes R \otimes V^{(j)})^{\perp} \simeq (V^*)^{(i)} \otimes R^{\perp} \otimes (V^*)^{(j)}.$$

Corolario 4.73. $(I(R_a^{\perp} \oplus R_b^{\perp}))_n = (J(R_a)^{\perp})_n + (J(R_b)^{\perp})_n$.

Demostración. Es inmediato usando el Lema 4.72. □

Definimos ahora la aplicación:

$$\begin{array}{cccc} \rho : & \mathcal{L}(V^{(n)}) & \to & \mathcal{L}((V^*)^{(n)}) \\ & W & \mapsto & W^{\perp}. \end{array}$$

Es simple ver que ρ es un anti-isomorfismo de reticulados; es decir ρ es un isomorfismo tal que $\rho(W + W') = \rho(W) \cap \rho(W')$ y $\rho(W \cap W') = \rho(W) + \rho(W')$.

Más aún, ρ transforma a $\mathcal{T}_n$ en el reticulado generado por los subespacios $(V^*)^{(i)} \otimes R_a^{\perp} \otimes (V^*)^{(j)}$ y $(V^*)^{(h)} \otimes R_b^{\perp} \otimes (V^*)^{(l)}$ con $i + j + a = h + l + b = n$.

Supongamos ahora que $R_a^{\perp}$ y $R_b^{\perp}$ son excluyentes. Observamos que, vía el anti-isomorfismo ρ,

(i) Las *(c.e.)* se satisfacen para $A^!$ si y sólo si valen las siguientes inclusiones:

$$V^{(a-2)} \otimes R_a \otimes V \subseteq (V^{(a-1)} \otimes R_a) + (R_a \otimes V^{(a-1)} \cap \cdots \cap V^{(a-2)} \otimes R_a \otimes V),$$
$$V^{(b-2)} \otimes R_b \otimes V \subseteq (V^{(b-1)} \otimes R_b) + (R_b \otimes V^{(b-1)} \cap \cdots \cap V^{(b-2)} \otimes R_b \otimes V).$$

(ii) Las *(c.e.n.)* se satisfacen para $A^!$ si y sólo si valen las siguientes igualdades:

$$(V^{(b-1)} \otimes R_a \otimes V) + (V^{(b)} \otimes R_a) + (R_b \otimes V^{(a)}) = V^{(a+b)},$$
$$(V^{(a-1)} \otimes R_b \otimes V) + (V^{(a)} \otimes R_b) + (R_a \otimes V^{(b)}) = V^{(a+b)}.$$

(iii) Las *(c.e.c.)* se satisfacen para $A^!$ si y sólo si valen las siguientes igualdades:

$$(V^{(b-1)} \otimes R_a) + (R_b \otimes V^{(a-1)} \cap \cdots \cap V^{(a-2)} \otimes R_b \otimes V) = V^{(a+b-1)},$$
$$(V^{(a-1)} \otimes R_b) + (R_a \otimes V^{(b-1)} \cap \cdots \cap V^{(b-2)} \otimes R_a \otimes V) = V^{(a+b-1)}.$$

Ejemplo. En general si R_a y R_b son excluyentes, $R_a^{\perp}$ y $R_b^{\perp}$ no necesariamente lo son. En particular, si consideramos $R_3 = \langle x^3 \rangle$ y $R_4 = \langle y^4 \rangle$, son excluyentes. Sin embargo, $(x^*)^2 y^* \in R_3^{\perp}$ y $(x^*)^3 y^* \in R_4^{\perp}$ y por lo tanto $(V^* \otimes R_3^{\perp}) \cap R_4^{\perp} \neq 0$.

Luego, el hecho que A sea (a, b)-Koszul no implica que $A^!$ también lo sea en general.

4.7 Resoluciones del álgebra como bimódulo

En esta sección, A denotará un álgebra (a, b)-homogénea sobre un k-espacio vectorial de dimensión finita V. Estamos interesados en encontrar resoluciones de A como A-bimódulo para calcular su homología de Hochschild. Denotamos por $\mathcal{C}$ a la categoría abeliana de A-bimódulos $\mathbb{Z}$-graduados acotados inferiormente, donde los morfismos son morfismos de bimódulos que preservan la graduación. Sea $A^e = A \otimes_k A^{op}$ el **álgebra envolvente** de A. Es conocido que $\mathcal{C}$ es naturalmente isomorfa a la categoría de A^e-módulos a izquierda $\mathbb{Z}$-graduados y acotados inferiormente.

Con la identificación anterior, si M es un A-bimódulo graduado, y $l \in \mathbb{Z}$, el A-bimódulo $M[l]$ está graduado por $(M[l])_n = M_{n+l}$. Recordemos además que un A-bimódulo M es **s-concentrado** (respectivamente **s-puro**) en grados $l_1, \cdots, l_s$ si existen enteros $l_1 < \cdots < l_s$ tales que $M = M_{l_1} \oplus \cdots \oplus M_{l_s}$ (respectivamente, $M = AM_{l_1}A + \cdots + AM_{l_s}A$).

Si $s = 1$ decimos simplemente que M es **concentrado** (respectivamente **puro**). Un A-bimódulo es s-concentrado en grados $l_1, \cdots, l_s$ si y sólo si es isomorfo a una suma directa de A-bimódulos de la forma $k[-l_1, \cdots, -l_s]$. El A-bimódulo $A^e[-l]$ es puro en grado l. Recordemos que un A-bimódulo acotado inferiormente M es **libre-graduado** si y sólo si M es isomorfo a una suma directa de módulos de la forma $A^e[-l_i]$ y la familia $\{l_i\}$ está acotada inferiormente. Debido a resultados probados en la Sección §2.2 tenemos las siguientes propiedades:

(i) Un A-bimódulo M es proyectivo (como objeto de $\mathcal{C}$) si y sólo si M es libre-graduado.

(ii) Todo A-bimódulo M admite una cápsula proyectiva que es única salvo isomorfismos.

(iii) Todo A-bimódulo M admite una resolución proyectiva minimal única salvo isomorfismos.

(iv) Toda resolución proyectiva de un A-bimódulo M contiene como sumando directo a una resolución proyectiva minimal.

Observemos también que cualquier A-bimódulo proyectivo M s-puro en grados $l_1, \cdots, l_s$ es isomorfo a $A \otimes_k M_{l_1} \otimes_k A + \cdots + A \otimes_k M_{l_s} \otimes A$ donde M_{l_j} es un A-bimódulo concentrado en grado l_j para $1 \leq j \leq s$.

Recordaremos ahora algunos resultados elementales que serán de utilidad en el desarrollo de esta sección.

Lema 4.74 ([B1]). *Sea $\mathcal{A} = \bigoplus_{n \geq 1} A_n$ el **ideal de aumentación** de A y sea M un A-bimódulo. Entonces se satisface lo siguiente:*

(i) El morfismo

$$\begin{array}{ccc} M & \to & M \otimes_A k \\ m & \mapsto & m \otimes 1 \end{array}$$

induce un isomorfismo entre los A-bimódulos $\frac{M}{M\mathcal{A}}$ y $M \otimes_A k$.

(ii) El morfismo

$$\begin{array}{ccc} M & \to & k \otimes_A M \\ m & \mapsto & 1 \otimes m \end{array}$$

induce un isomorfismo entre los A-bimódulos $\frac{M}{\mathcal{A}M}$ y $k \otimes_A M$.

(iii) *El morfismo*

$$\begin{array}{ccc} M & \to & k \otimes_A M \otimes_A k \\ m & \mapsto & 1 \otimes m \otimes 1 \end{array}$$

induce un isomorfismo entre los A-bimódulos $\frac{M}{M\mathcal{A}+\mathcal{A}M}$ y $k \otimes_A M \otimes_A k$.

(iv) *Si M es s-puro en grados $l_1, \cdots, l_s$, ordenados en forma creciente, entonces el morfismo*

$$\begin{array}{ccc} M_{l_1} & \to & k \otimes_A M \otimes_A k \\ m & \mapsto & 1 \otimes m \otimes 1 \end{array}$$

es un isomorfismo.

Demostración.

(i) Definimos las siguientes aplicaciones lineales:

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \frac{M}{M\mathcal{A}} & \to & M \otimes_A k \\ & \overline{m} & \mapsto & m \otimes 1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{cccc} \psi : & M \otimes_A k & \to & \frac{M}{M\mathcal{A}} \\ & m \otimes 1 & \mapsto & \overline{m} \end{array}.$$

Si $\overline{m} = \overline{m'}$, entonces $m - m' \in M\mathcal{A}$ y por lo tanto $m - m' = na$ con $n \in M$ y $a \in \mathcal{A}$. Así, $m \otimes 1 - m' \otimes 1 = (m - m') \otimes 1 = na \otimes 1 = n \otimes a1 = 0$. Luego, $\varphi(\overline{m}) = \varphi(\overline{m'})$ y así φ está bien definida. Observemos que la estructura de $M \otimes_A k$ como A-bimódulo está dada por $a(m \otimes \lambda)b = amb \otimes \lambda$ para $a, b \in A$, $m \in M$ y $\lambda \in k$. Además, $\varphi(\overline{m} + \overline{m'}) = (m + m') \otimes 1 = m \otimes 1 + m' \otimes 1 = \varphi(\overline{m}) + \varphi(\overline{m'})$ y $\varphi(a\overline{m}b) = \varphi(\overline{amb}) = amb \otimes 1 = m \otimes ab$ que es nulo si $ab \notin k$ y coincide con el elemento $a(m \otimes 1)b$ si $ab \in k$. Luego, φ es un morfismo A-bilineal.

Las composiciones $\psi \circ \varphi$ y $\varphi \circ \psi$ son las identidades correspondientes.

(ii) Se prueba análogamente a la propiedad *(i)*.

(iii) Es combinación de las propiedades *(i)* y *(ii)*.

(iv) Si M es s-puro en grados $l_1, \cdots, l_s$, entonces $M\mathcal{A} + \mathcal{A}M = \bigoplus_{n > l_1} M_n$ con lo cual $\frac{M}{M\mathcal{A}+\mathcal{A}M} = \bigoplus_{n=0}^{l_1} M_n$ y por la propiedad *(iii)*, es isomorfo a $k \otimes_A M \otimes_A k$. Como $M_n = 0$ para $n < l_1$, M_{l_1} resulta isomorfo a $k \otimes_A M \otimes_A k$. □

Observación 4.75. *Como un A-bimódulo es un A^e-módulo, valen los análogos de las Proposiciones 2.2, 2.4, 2.16 y del Corolario 2.3 donde en este último la equivalencia también es válida si tomamos el morfismo $1_k \otimes_A f \otimes_A 1_k$.*

Enunciamos el siguiente resultado cuya demostración puede verse en [B4].

Lema 4.76 (Lemme 1.6, [B4])**.** *Sea*

$$M'' \xrightarrow{g} M' \xrightarrow{f} M \tag{4.7.1}$$

un complejo en $\mathcal{C}$ de A-módulos libre-graduados donde M'' está acotado inferiormente. Este complejo es exacto si el siguiente complejo lo es:

$$M'' \otimes_A k \xrightarrow{g \otimes 1_k} M' \otimes_A k \xrightarrow{f \otimes 1_k} M \otimes_A k. \tag{4.7.2}$$

Las siguientes ideas están basadas en el trabajo [B3]. Dado $s = a, b$, sea $(\overline{K}_{L,s}, \delta_{L,s})$ tal que $(\overline{K}_{L,s})_i = A \otimes J^s_{n_s(i)}$ para $i \geq 0$ y el morfismo A-lineal $(\delta_{L,s})_i : (\overline{K}_{L,s})_i \to (\overline{K}_{L,s})_{i-1}$ está definido vía la inclusión natural $J^s_{n_s(i)} \hookrightarrow A \otimes J^s_{n_s(i-1)}$. Resulta claro que $(\delta_{L,s})^s = 0$, entonces $(\overline{K}_{L,s}, \delta_{L,s})$ es un s-complejo. Análogamente, $(\overline{K}_{R,s}, \delta_{R,s})$, con $(\delta_{R,s})_i : (\overline{K}_{R,s})_i \to (\overline{K}_{R,s})_{i-1}$ definido vía la restricción del morfismo k-lineal $V^{(n_s(i))} \to A \otimes V^{(n_s(i-1))}$ dado por $v_{j_1} \cdots v_{j_{n_s(i)}} \mapsto \overline{v_{j_{n_s(i-1)-1}} \cdots v_{j_{n_s(i)}}} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_{n_s(i-1)}}$ es un s-complejo. Luego, $\overline{K}_{L-R,s} = \overline{K}_{L,s} \otimes A = A \otimes \overline{K}_{R,s}$ es un s-complejo de bimódulos con diferencial $\delta'_{L,s} = \delta_{L,s} \otimes 1_A$ (respectivamente, $\delta'_{R,s} = 1_A \otimes \delta_{R,s}$). Veamos que $\delta'_{L,s}$ y $\delta'_{R,s}$ conmutan.

Consideremos la aplicación

$$(\overline{K}_{L,s})_i \otimes_k A \overset{(\delta_{L,s})_i \otimes 1_A}{\longrightarrow} (\overline{K}_{L,s})_{i-1} \otimes_k A \overset{\sim}{\longrightarrow} A \otimes_k (\overline{K}_{R,s})_{i-1} \overset{1_A \otimes (\delta_{R,s})_{i-1}}{\longrightarrow} A \otimes_k (\overline{K}_{R,s})_{i-2}.$$

Supongamos que i es par. La aplicación anterior se reduce a:

$$\begin{aligned}&\overline{\alpha} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}s}} \otimes \overline{\beta} \mapsto \overline{\alpha v_{j_1} \cdots v_{j_{s-1}}} \otimes v_{j_s} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}s}} \otimes \overline{\beta} \mapsto \overline{\beta} \otimes v_{j_s} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}s}} \otimes \overline{\alpha v_{j_1} \cdots v_{j_{s-1}}} \\ &\mapsto \overline{\beta} \otimes v_{j_s} \cdots v_{j_{\frac{i-2}{2}s+1}} \otimes \overline{v_{j_{\frac{i-2}{2}s+2}} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}s}} \alpha v_{j_1} \cdots v_{j_{s-1}}}.\end{aligned}$$

Por otro lado, también tenemos la aplicación

$$A \otimes_k (\overline{K}_{R,s})_i \overset{1_A \otimes (\delta_{R,s})_i}{\longrightarrow} A \otimes_k (\overline{K}_{R,s})_{i-1} \overset{\sim}{\longrightarrow} (\overline{K}_{L,s})_{i-1} \otimes_k A \overset{(\delta_{L,s})_{i-1} \otimes 1_A}{\longrightarrow} (\overline{K}_{L,s})_{i-2} \otimes_k A.$$

En este caso las asignaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}&\overline{\beta} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}s}} \otimes \overline{\alpha} \mapsto \overline{\beta} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_{\frac{i-2}{2}s+1}} \otimes \overline{v_{j_{\frac{i-2}{2}s+2}} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}s}} \alpha} \mapsto \\ &\overline{v_{j_{\frac{i-2}{2}s+2}} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}s}} \alpha} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_{\frac{i-2}{2}s+1}} \otimes \overline{\beta} \mapsto \overline{v_{j_{\frac{i-2}{2}s+2}} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}s}} \alpha v_{j_1} \cdots v_{j_{s-1}}} \otimes v_{j_s} \cdots v_{j_{\frac{i-2}{2}s+1}} \otimes \overline{\beta}.\end{aligned}$$

Vemos que, vía el isomorfismo y la linealidad, estos diferenciales conmutan. Análogamente sucede para i impar.

Definimos ahora la diferencial si i es impar como

$$(d'_s)_i = \delta'_{L,s} - \delta'_{R,s},$$

y si i es par como

$$(d'_s)_i = (\delta'_{L,s})^{s-1} + (\delta'_{L,s})^{s-2}\delta'_{R,s} + \cdots + \delta'_{L,s}(\delta'_{R,s})^{s-2} + (\delta'_{R,s})^{s-1}.$$

Obtenemos un complejo proyectivo puro en la categoría $\mathcal{C}$, pues si i es par,

$$\begin{aligned}(d'_s)_{i-1}(d'_s)_i &= (\delta'_{L,s} - \delta'_{R,s})[(\delta'_{L,s})^{s-1} + (\delta'_{L,s})^{s-2}\delta'_{R,s} + \cdots + \delta'_{L,s}(\delta'_{R,s})^{s-2} + (\delta'_{R,s})^{s-1}] \\ &= (\delta'_{L,s})^s + (\delta'_{L,s})^{s-1}\delta'_{R,s} + \cdots + (\delta'_{L,s})^2(\delta'_{R,s})^{s-2} + \delta'_{L,s}(\delta'_{R,s})^{s-1} \\ &- \delta'_{R,s}(\delta'_{L,s})^{s-1} - \delta'_{R,s}(\delta'_{L,s})^{s-2}\delta'_{R,s} - \cdots - \delta'_{R,s}\delta'_{L,s}(\delta'_{R,s})^{s-2} - (\delta'_{R,s})^s \\ &= (\delta'_{L,s})^{s-1}\delta'_{R,s} + \cdots + (\delta'_{L,s})^2(\delta'_{R,s})^{s-2} + \delta'_{L,s}(\delta'_{R,s})^{s-1} \\ &- (\delta'_{L,s})^{s-1}\delta'_{R,s} - (\delta'_{L,s})^{s-2}(\delta'_{R,s})^2 - \cdots - \delta'_{L,s}(\delta'_{R,s})^{s-1} = 0.\end{aligned}$$

Análogamente si i es impar. Consideramos ahora el complejo de A-bimódulos (K_{L-R}, d') dado por $(K_{L-R})_i = (\overline{K}_{L,a})_i \otimes A \oplus (\overline{K}_{L,b})_i \otimes A$ y diferencial $d' = d'_a \oplus d'_b$. Este complejo se llama el **complejo de Koszul del A-bimódulo A**.

Teorema 4.77. *Sea A un álgebra (a,b)-homogénea sobre V ($2 < a < b$), $A = T(V)/I$ con I generado por $R = R_a \oplus R_b$, R_a y R_b excluyentes. El complejo de Koszul por A-bimódulos aumentado:*

$$\cdots \longrightarrow (K_{L-R})_2 \xrightarrow{d_2'} (K_{L-R})_1 \xrightarrow{d_1'} (K_{L-R})_0 \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0 \tag{4.7.3}$$

es exacto si y sólo si A es (a,b)-Koszul.

Demostración. Supongamos primero que A es (a,b)-Koszul. Si aplicamos el funtor $-\otimes_A k$ a (4.7.3) obtenemos el complejo K_L con aumentación ε, que es exacto. Entonces, como los A-bimódulos $(K_{L-R})_i$ son libre-graduados y acotados inferiormente para todo $i \in \mathbb{N}_0$, por el Lema 4.76, (4.7.3) es exacto.

Recíprocamente, supongamos que (4.7.3) es exacto y denotemos por $\mathcal{C}_R$ a la categoría abeliana de A-módulos a derecha graduados y acotados inferiormente, entonces (4.7.3) es una resolución proyectiva de A en $\mathcal{C}_R$.

Por otro lado, también tenemos una resolución proyectiva de A en $\mathcal{C}_R$ de la forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{1_A} A \longrightarrow 0. \tag{4.7.4}$$

Si aplicamos resultados conocidos del álgebra homológica a la categoría $\mathcal{C}_R$, obtenemos que $\mu : (K_{L-R})_0 \to A$ puede ser extendido a un morfismo de resoluciones f, de (4.7.3) a (4.7.4) y que $i : A \to (K_{L-R})_0$ definido por $a \mapsto 1 \otimes a$, se extiende a un morfismo de resoluciones g, de (4.7.4) a (4.7.3) de modo tal que el morfismo identidad de (4.7.3) es homotópico en $\mathcal{C}_R$ a $g \circ f$ y de este modo, es homotópicamente nulo en grados positivos. Finalmente, si aplicamos el funtor $-\otimes_A k$ a (4.7.3), concluimos la exactitud del complejo de Koszul a izquierda en grados positivos y por la Proposición 4.28, A es (a,b)-Koszul. □

Observación 4.78. *Si A es (a,b)-Koszul, el complejo (4.7.3) es una resolución proyectiva minimal de A en la categoría $\mathcal{C}$ por la Observación 4.75 y la Proposición 2.16.*

A partir de este momento A será una k-álgebra (a,b)-Koszul.

Recordemos que como A es k-playo, la homología de Hochschild $\mathrm{HH}_*(A)$ es isomorfa a $\mathrm{Tor}_*^{A^e}(A,A)$. Luego,

$$\mathrm{HH}_*(A) \simeq \mathrm{H}_*(A \otimes_{A^e} K_{L-R}, 1_A \otimes d').$$

Fijemos $i \geq 0$. Para $s = a, b$ existen isomorfismos k-lineales,

$$\begin{array}{rccc} f_i^s: & A \otimes_{A^e} (A \otimes_k J^s_{n_s(i)} \otimes_k A) & \to & A \otimes_k J^s_{n_s(i)} \\ & \overline{\alpha} \otimes (\overline{\beta} \otimes m \otimes \overline{\gamma}) & \mapsto & \overline{\gamma\alpha\beta} \otimes m \end{array} \quad \text{y}$$

$$\begin{array}{rccc} g_i^s: & A \otimes_k J^s_{n_s(i)} & \to & A \otimes_{A^e} (A \otimes_k J^s_{n_s(i)} \otimes_k A) \\ & \overline{\alpha} \otimes m & \mapsto & \overline{\alpha} \otimes (1 \otimes m \otimes 1). \end{array}$$

De esta manera, el complejo $(A \otimes_{A^e} K_{L-R}, 1_A \otimes d')$ se puede identificar con el complejo $(K_L, \overline{d})$, donde $\overline{d}$ será explicitada enseguida. Por lo tanto, obtenemos el complejo de k-espacios vectoriales:

$$\cdots \longrightarrow A \otimes (J^a_{2a} \oplus J^b_{2b}) \xrightarrow{\overline{d_4}} A \otimes (J^a_{a+1} \oplus J^b_{b+1}) \xrightarrow{\overline{d_3}} A \otimes (J^a_a \oplus J^b_b) \xrightarrow{\overline{d_2}} A \otimes V \xrightarrow{\overline{d_1}} A \otimes k \longrightarrow 0,$$

cuya homología es $\mathrm{HH}_*(A)$. Si usamos las identificaciones tenemos las siguientes diferenciales:

- Si $v \in V$, $\overline{\alpha} \in A$, entonces $\overline{d_1}(\overline{\alpha} \otimes v) = (1_A \otimes d_1')(\overline{\alpha} \otimes 1 \otimes v \otimes 1) = \overline{\alpha} \otimes (\overline{v} \otimes 1 - 1 \otimes \overline{v}) = \overline{\alpha v} - \overline{v\alpha}$.

- Si $i \geq 3$ es impar, sean $\overline{\alpha} \in A$; $v, v' \in V$ y $w \in V^{(\frac{i-1}{2}s-1)}$ con $s = a, b$. Entonces

$$\overline{d}_i(\overline{\alpha} \otimes vwv') = \overline{\alpha v} \otimes wv' - \overline{v'\alpha} \otimes vw.$$

- Si i es par, sean $v_{j_1}, \cdots, v_{j_{\frac{i}{2}s}} \in V$ con $s = a, b$. Entonces

$$\overline{d}_i(\overline{\alpha} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}s}}) = \overline{\alpha v_{j_1} \cdots v_{j_{s-1}}} \otimes v_{j_s} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}s}} +$$
$$\overline{v_{j_{\frac{i}{2}s}} \alpha v_{j_1} \cdots v_{j_{s-2}}} \otimes v_{j_{s-1}} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}s-1}} + \cdots + \overline{v_{j_{\frac{i-2}{2}s+2}} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}s}} \alpha} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_{\frac{i-2}{2}s+1}}.$$

Observar que se pueden obviar los escalares del lado derecho del tensor sin pérdida de generalidad pues el tensor está tomado sobre k.

4.7.1 Homología de Hochschild de las álgebras $\tilde{A}_{a,b}$

Consideraremos las álgebras $\tilde{A}_{a,b}$ con $(a, b) = (4, 5)$ o $6 \leq a < b$ definidas en la Sección §4.5. Hemos probado que estas álgebras son (a, b)-Koszul. Estamos interesados ahora en calcular su homología de Hochschild. Para ello utilizaremos el complejo de Koszul del $\tilde{A}_{a,b}$-bimódulo $\tilde{A}_{a,b}$ definido en la sección anterior que se reduce a:

$$0 \longrightarrow \tilde{A}_{a,b} \otimes (R_a \oplus R_b) \xrightarrow{\overline{d_2}} \tilde{A}_{a,b} \otimes V \xrightarrow{\overline{d_1}} \tilde{A}_{a,b} \otimes k \xrightarrow{\overline{d_0}} 0.$$

Resulta que $\mathrm{HH}_n(\tilde{A}_{a,b}) = 0$ si $n \geq 3$. Calcularemos entonces los restantes grupos de homología de Hochschild.

El grupo $\mathrm{HH}_0(\tilde{A}_{a,b})$

Sea $A = \tilde{A}_{a,b}$. Sabemos que $\mathrm{HH}_0(A) = \frac{\mathrm{Ker}\,\overline{d_0}}{\mathrm{Im}\,\overline{d_1}}$. Como $\overline{d_0} = 0$, $\mathrm{Ker}\,\overline{d_0} = A \otimes k \simeq A$. Por otro lado, $\mathrm{Im}\,\overline{d_1}$ está generado como k-espacio vectorial por el conjunto $\{\overline{\alpha x - x\alpha}, \overline{\alpha y - y\alpha} \ / \ \overline{\alpha} \in A\}$. Tenemos entonces que $(\mathrm{HH}_0(A))_0 = k$ pues $\mathrm{Im}\,\overline{d_1}$ puede ser no nulo sólo en grados mayores o iguales que uno. Además, $(\mathrm{HH}_0(A))_1 = \langle x, y \rangle$ porque $(\mathrm{Im}\,\overline{d_1})_1 = \{\overline{\lambda x - x\lambda}, \overline{\lambda y - y\lambda} \ / \ \lambda \in k\} = \{0\}$.

Notaremos por $[-]$ a la clase de un elemento en la homología.

Observación 4.79. *Si $[w_1 \cdots w_n] \in (\mathrm{HH}_0(A))_n$, esta clase consiste en todos los elementos que se obtienen al realizar las permutaciones cíclicas de las coordenadas de un representante.*

Supongamos que tenemos una ruleta circular con n casillas. Asignamos a cada casilla una letra x o y. Dos asignaciones son consideradas diferentes si no existe una rotación que transforme una en la otra. Por la Observación 4.79 resulta claro que la cantidad de clases no nulas distintas que forman $(\mathrm{HH}_0(A))_n$ está acotada por la cantidad de estas diferentes asignaciones. Observar que alguna de estas clases podría anularse por las relaciones del álgebra.

Enunciaremos una fórmula que permite calcular el cardinal del conjunto de clases -sin tomar en cuenta las relaciones de A, (ver [A1], Chapter V, section 3), para lo cual necesitaremos la siguiente definición conocida en Teoría de Números.

Definición 4.80. *Sea $n \in \mathbb{N}$. La* ***función de Euler****, $\varphi(n)$, está dada por la cantidad de enteros positivos menores o iguales que n que son coprimos con él.*

Es sabido que esta función puede calcularse mediante la fórmula

$$\varphi(n) = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

donde p es un primo positivo.

La cantidad de clases enunciadas anteriormente está dada por

$$\rho(n) = \frac{1}{n}\sum_{m|n}\varphi(m)2^{\frac{n}{m}}. \tag{4.7.5}$$

Calcularemos explícitamente las dimensiones de $(\mathrm{HH}_0(A))_n$ para $n = 2, 3, 4$ y describiremos un algoritmo que permita calcular estas dimensiones para $n \geq 5$.

Los elementos x^n e y^n forman dos clases unitarias distintas no nulas. Para $0 \leq s \leq n$ notamos por $\mathcal{C}_{n-s} = [x^{n-s}y^s]$, se trata de $n+1$ clases distintas entre sí, salvo que se anulen en A.

Mostramos las clases que forman $(\mathrm{HH}_0(A))_n$ para $n = 2, 3, 4$.

(i) Si $n = 2$, $\mathcal{C}_2 = [x^2]$, $\mathcal{C}_1 = [xy]$, $\mathcal{C}_0 = [y^2]$.

Hay 2^2 elementos ubicados en $\rho(2) = 3$ clases. Observar que ninguna de estas clases es nula en A.

(ii) Si $n = 3$, $\mathcal{C}_3 = [x^3]$, $\mathcal{C}_2 = [x^2y]$, $\mathcal{C}_1 = [xy^2]$, $\mathcal{C}_0 = [y^3]$.

Hay 2^3 elementos ubicados en $\rho(3) = 4$ clases. Nuevamente, ninguna de estas clases es nula en A.

(iii) Si $n = 4$, $[xyxy]$, $\mathcal{C}_4 = [x^4]$, $\mathcal{C}_3 = [x^3y]$, $\mathcal{C}_2 = [x^2y^2]$, $\mathcal{C}_1 = [xy^3]$, $\mathcal{C}_0 = [y^4]$.

Tenemos 2^4 elementos ubicados en $\rho(4) = 6$ clases. Ninguna de estas clases es nula salvo el caso en que $A = \tilde{A}_{4,5}$ donde $\mathcal{C}_2$ se anula.

De ahora en más, salvo que se aclare lo contrario, todas las coordenadas pertenecen al conjunto $\{x, y\}$.

Observación 4.81. *Sean $n \geq 5$ y $w = x^{n-2}w_1w_2$. Si $w_1 = x$ o $w_2 = x$, $w \in \mathcal{C}_n$ o $w \in \mathcal{C}_{n-1}$ donde $w_1 = w_2$ y $w_1 \neq w_2$ respectivamente. Si $w_1 = w_2 = y$, $w \in \mathcal{C}_{n-2}$. Luego, estos elementos no originan nuevas clases.*

Definición 4.82. *Sea $[w] = [w_1 \cdots w_m]$ y sea h tal que $2 \leq h \leq m$. Decimos que x^h se **realiza** en $[w]$ si existe i tal que $1 \leq i \leq m-h+1$, $w_i = \cdots = w_{i+h-1} = x$ y $w_{i-1} = w_{i+h} = y$. Por convención, si $i = 1$, $w_0 = w_m$, y si $i = m-h+1$, $w_{m+1} = w_1$.*

Ahora estamos en condiciones para dar el algoritmo que permite calcular las clases que forman $(\mathrm{HH}_0(A))_n$ para $n \geq 5$.

Algoritmo.

(1) Para $s = 0, \cdots, n$, tomamos las clases $\mathcal{C}_{n-s} = [x^{n-s}y^s]$. Si $A = \tilde{A}_{4,5}$, las clases $\mathcal{C}_{n-s}$ son nulas para $2 \leq s \leq n-2$. Si $(a,b) \neq (4,5)$ no hay clases de este tipo que se anulen.

(2) Para $s = 3, \cdots, n-2$ consideramos la clase $[w] = [x^{n-s} w_0 \cdots w_{s-1}]$. Si $w_0 = x$ o $w_{s-1} = x$, $[w] = \mathcal{C}_{n-s'}$ con $s' < s$. Si $w_0 = \cdots = w_{s-1} = y$, $[w] = \mathcal{C}_{n-s}$. Luego, para obtener nuevas clases hay que tomar elementos de la forma $x^{n-s} y w_1 \cdots w_{s-2} y$. Sin embargo, si x^t se realiza en $[w_1 \cdots w_{s-2}]$ para $t > n-s$, vía una permutación cíclica vemos que $[w] = [x^t w'_0 \cdots w'_{n-t-1}]$ y no generamos una nueva clase.

Obsevemos además que si x^{n-s} se realiza en $[w_1 \cdots w_{s-2}]$ dos elementos distintos de este tipo pueden pertenecer a la misma clase. Por ejemplo, si $n = 16$ y $s = 13$, $[x^3yxyx^3yxyx^3y] = [x^3yxyx^3yx^3yxy]$ donde $w_1 \cdots w_{s-2}$ es xyx^3yxyx^3 en el primer representante de la clase y es xyx^3yx^3yx en el segundo.

(3) Resta analizar los elementos de la forma $xyw_1 \cdots w_{n-3}y$ donde y^{n-3} y x^t no se realizan en $[w_1 \cdots w_{n-3}]$ si $2 \leq t \leq n-3$. Es claro que $[xyw_1 \cdots w_{n-3}y] = [yxyw_1 \cdots w_{n-3}]$. Sin embargo, observemos que dos elementos distintos de esta forma pueden pertenecer a la misma clase. Por ejemplo, si $n = 9$, $[yxy^4xyx] = [yxyxy^4x]$ donde $w_1 \cdots w_{n-3}$ es y^3xyx en el primer representante de la clase y es xy^4x en el segundo. Entonces, para obtener nuevas clases consideramos los elementos de la forma $yxyw_1 \cdots w_{n-3}$ donde $w_1 \cdots w_{n-3} = y^{n-4}x$ y para $h = 5, \cdots, n$, $w_1 \cdots w_{n-3} = y^{n-h}xu_1 \cdots u_{h-4}$ es tal que $u_1 = y$ y x^t no se realiza en $[u_2 \cdots u_{h-4}]$ para $2 \leq t \leq h-5$. Observar que si y^r se realiza en $u_1 \cdots u_{h-4}$ para $r > n-h$, distintos elementos pueden generar la misma clase; por ejemplo, si $n = 10$, $h = 8$ y $r = 3$, $[yxy^3xy^3x] = [yxy^3xyxy^2]$.

(4) De estas clases hay que analizar cuáles pueden anularse al considerar las relaciones.

Las clases obtenidas en *(2)* se anulan en los siguientes casos:

(i) Si $s \geq a+2$ y existe i tal que $1 \leq i \leq s-a-1$, $w_i = w_{i+1} = x$ y $w_{i+a-2} = w_{i+a-1} = y$.

(ii) Si $s = a-1$ y $w_{s-3} = w_{s-2} = y$.

(iii) Si $s = a-2$ y $w_{s-2} = y$.

(iv) Si $s \geq b+2$ y $x^2y^{b-4}xy$ divide a $w_1 \cdots w_{s-2}$.

(v) Si $s \geq b+1$ y $w_1 = \cdots = w_{b-5} = y$, $w_{b-4} = x$ y $w_{b-3} = y$. También si $w_{s-b} = w_{s-b+1} = x$, $w_{s-b+2} = \cdots = w_{s-3} = y$ y $w_{s-2} = x$.

Como x^2 no divide a ninguno de los elementos considerados en *(3)*, las clases de estos elementos nunca se anulan.

Aplicaremos este algoritmo en los casos $n = 5, 6, 7$.

- Sea $n = 5$. Siguiendo el algoritmo, del paso *(1)* obtenemos las siguientes clases: $\mathcal{C}_5 = [x^5]$, $\mathcal{C}_4 = [x^4y]$, $\mathcal{C}_3 = [x^3y^2]$, $\mathcal{C}_2 = [x^2y^3]$, $\mathcal{C}_1 = [xy^4]$, $\mathcal{C}_0 = [y^5]$.

  Si $(a, b) = (4, 5)$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ se anulan.

  Del paso *(2)* obtenemos la clase $[x^2yxy]$.

  Del paso *(3)* obtenemos la clase $[yxy^2x]$.

  Hemos ubicado 2^5 elementos en $\rho(5) = 8$ clases no nulas salvo el caso $(a, b) = (4, 5)$ en el que existen 6 clases no nulas.

- Sea $n = 6$. De acuerdo al algoritmo, del paso *(1)* obtenemos las siguientes clases: $\mathcal{C}_6 = [x^6]$, $\mathcal{C}_5 = [x^5y]$, $\mathcal{C}_4 = [x^4y^2]$, $\mathcal{C}_3 = [x^3y^3]$, $\mathcal{C}_2 = [x^2y^4]$, $\mathcal{C}_1 = [xy^5]$, $\mathcal{C}_0 = [y^6]$.

  Si $(a, b) = (4, 5)$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$ se anulan.

  Del paso *(2)* obtenemos las clases:

  - Si $s = 3$, $[x^3yxy]$. Esta clase se anula si $(a, b) = (4, 5)$.
  - Si $s = 4$, $[x^2yx^2y]$, $[x^2yxy^2]$ y $[x^2y^2xy]$.
    Si $(a, b) = (4, 5)$ las dos últimas clases son nulas.

  Del paso *(3)* obtenemos la clase $[yxy^3x]$ y:

  - Si $h = 5$, $[yxy^2xy]$.
  - Si $h = 6$, $[yxyxyx]$

  Hemos ubicado 2^6 elementos en $\rho(6) = 14$ clases no nulas salvo el caso $(a, b) = (4, 5)$ en el que existen sólo 8 clases no nulas.

- Sea $n = 7$. Siguiendo el algoritmo, del paso *(1)* obtenemos las clases: $\mathcal{C}_7 = [x^7]$, $\mathcal{C}_6 = [x^6y]$, $\mathcal{C}_5 = [x^5y^2]$, $\mathcal{C}_4 = [x^4y^3]$, $\mathcal{C}_3 = [x^3y^4]$, $\mathcal{C}_2 = [x^2y^5]$, $\mathcal{C}_1 = [xy^6]$, $\mathcal{C}_0 = [y^7]$.

  Si $(a, b) = (4, 5)$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ y $\mathcal{C}_5$ se anulan.

  Al aplicar el paso *(2)* obtenemos las clases:

  - Si $s = 3$, $[x^4yxy]$. Esta clase se anula si $(a, b) = (4, 5)$.
  - Si $s = 4$, $[x^3yx^2y]$, $[x^3yxy^2]$ y $[x^3y^2xy]$.
    Si $(a, b) = (4, 5)$ las dos últimas clases son nulas.
  - Si $s = 5$, $[x^2yx^2y^2]$, $[x^2yxyxy]$, $[x^2yxy^3]$, $[x^2y^2xy^2]$ y $[x^2y^3xy]$.
    Observemos que eliminamos el caso $w_1w_2w_3 = x^3$ y que si tomamos $w_1w_2w_3$ como x^2y o como yx^2 obtenemos la misma clase. Si $(a, b) = (4, 5)$ todas estas clases son nulas. Además, si $(a, b) = (6, 7)$ la última clase es nula.

  Del paso *(3)* obtenemos la clase $[yxy^4x]$ y:

  - Si $h = 5$, $[yxy^3xy]$.
  - Si $h = 6$, $[yxy^2xyx]$.
  - Si $h = 7$, las clases posibles son $[yxyxy^3]$, $[yxyxy^2x]$ y $[yxyxyxy]$, que ya fueron obtenidas en pasos anteriores.

Hemos ubicado 2^7 elementos en $\rho(7) = 20$ clases no nulas salvo los casos $(a, b) = (4, 5)$ y $(a, b) = (6, 7)$ en los que existen respectivamente 8 y 19 clases no nulas.

El grupo $\mathrm{HH}_1(\tilde{A}_{a,b})$

Sea $A = \tilde{A}_{a,b}$. Estudiemos $\mathrm{HH}_1(A)$. Para ello, si $\overline{\alpha} \in A$ notemos que:

$$\overline{d_2}(\overline{\alpha} \otimes x^2w_1 \cdots w_{a-4}y^2) = \overline{\alpha x^2w_1 \cdots w_{a-4}y} \otimes y + \overline{xw_1 \cdots w_{a-4}y^2\alpha} \otimes x,$$
$$\overline{d_2}(\overline{\alpha} \otimes x^2y^{b-4}xy) = \overline{\alpha x^2y^{b-4}x} \otimes y + \overline{xy^{b-4}xy\alpha} \otimes x.$$

y por lo tanto $\mathrm{Im}\,\overline{d_2}$ está generada por estos elementos.

Por otro lado, $\mathrm{Ker}\,\overline{d_1}$ está formado por elementos de la forma $\sum_j \overline{\alpha_j} \otimes x + \sum_h \overline{\beta_h} \otimes y$ con $\overline{\alpha_j}, \overline{\beta_h} \in A$ tales que $\sum_j (\overline{\alpha_j x} - \overline{x \alpha_j}) + \sum_h (\overline{\beta_h y} - \overline{y \beta_h}) = 0$. Miraremos cada grado. Es claro que $(\mathrm{Ker}\,\overline{d_1})_0 = 0$ y que $(\mathrm{Ker}\,\overline{d_1})_1 = \langle \overline{1} \otimes x, \overline{1} \otimes y \rangle$.

Sin pérdida de generalidad podemos pensar a $\alpha_j, \beta_h \in V^{(n-1)}$ como $v_{t_1} \cdots v_{t_{n-1}}$ con $v_{t_l} \in \{x, y\}$ para $1 \leq l \leq n-1$, $t = j, h$. Estos términos pueden cancelarse, salvo constantes, en los siguientes casos:

- $v_{j_1} \cdots v_{j_{n-1}} x = x v_{j_1} \cdots v_{j_{n-1}}$ y $v_{h_1} \cdots v_{h_{n-1}} y = y v_{h_1} \cdots v_{h_{n-1}}$, entonces $v_{j_1} = x$, $v_{j_l} = v_{j_{l-1}}$ para $2 \leq l \leq n-1$ y $v_{j_{n-1}} = x$. Por lo tanto, $\alpha_j = x^{n-1}$ y análogamente, $\beta_h = y^{n-1}$.
- $v_{j_1} \cdots v_{j_{n-1}} x = y v_{h_1} \cdots v_{h_{n-1}}$ y $x v_{j_1} \cdots v_{j_{n-1}} = v_{h_1} \cdots v_{h_{n-1}} y$, entonces $v_{j_1} = y$, $v_{j_l} = v_{h_{l-1}}$ para $1 \leq l \leq n-1$ y $v_{h_{n-1}} = x$. Además, $v_{h_1} = x$, $v_{h_l} = v_{j_{l-1}}$ para $1 \leq l \leq n-1$ y $v_{j_{n-1}} = y$. Por lo tanto,

$$\begin{array}{lllll} v_{j_1} = y, & v_{j_2} = x, & v_{j_3} = y, & \cdots & v_{j_{n-1}} = y, \\ v_{h_1} = x, & v_{h_2} = y, & v_{h_3} = x, & \cdots & v_{h_{n-1}} = x. \end{array}$$

  Esta situación sólo es posible si n es par y $\alpha_j = v_{j_1} \cdots v_{j_{n-1}}$, $\beta_h = v_{h_1} \cdots v_{h_{n-1}}$ con

$$v_{j_l} = \begin{cases} y & \text{si } l \text{ es impar,} \\ x & \text{si } l \text{ es par,} \end{cases} \quad \text{y} \quad v_{h_l} = \begin{cases} x & \text{si } l \text{ es impar,} \\ y & \text{si } l \text{ es par.} \end{cases}$$

  Concluimos entonces que para $n \geq 2$, podemos tomar una base de $(\mathrm{Ker}\,\overline{d_1})_n$ de la siguiente forma:

  - $\{\overline{x^{n-1}} \otimes x, \overline{y^{n-1}} \otimes y, \overline{yxy \cdots y} \otimes x + \overline{xyx \cdots x} \otimes y\}$ si n es par.
  - $\{\overline{x^{n-1}} \otimes x, \overline{y^{n-1}} \otimes y\}$ si n es impar.

Observemos que ninguno de estos elementos se anula en $\tilde{A}_{a,b}$. Más aún, ningún elemento de la base de $\mathrm{Ker}\,\overline{d_1}$ tiene clase nula en el cociente por $\mathrm{Im}\,\overline{d_2}$. Luego, concluimos que

$$\dim_k((\mathrm{HH}_1(A))_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ 2 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 3 & \text{si } n > 0 \text{ es par.} \end{cases}$$

El grupo $\mathrm{HH}_2(\tilde{A}_{a,b})$

Sabemos que $\mathrm{HH}_2(A) = \mathrm{Ker}\,\overline{d_2}$ pues $\overline{d_3} = 0$.

El espacio $\mathrm{Ker}\,\overline{d_2}$ está formado por elementos de la forma $\sum_j \overline{\alpha_j} \otimes x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y^2 + \sum_h \overline{\beta_h} \otimes x^2 y^{b-4} xy$ con $\alpha_j, \beta_h \in A$ tales que $0 = \overline{d_2}\big(\sum_j \alpha_j \otimes x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y^2 + \sum_h \overline{\beta_h} \otimes x^2 y^{b-4} xy\big) = \sum_j (\overline{\alpha_j x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y} \otimes y + \overline{x w_1 \cdots w_{a-4} y^2 \alpha_j} \otimes x) + \sum_h (\overline{\beta_h x^2 y^{b-4} x} \otimes y + \overline{x y^{b-4} x y \beta_h} \otimes x)$. Estudiaremos $\mathrm{Ker}\,\overline{d_2}$ en cada grado. Resulta claro que $(\mathrm{Ker}\,\overline{d_2})_n = 0$ si $n < a$.

Si $n = a$ entonces podemos pensar $\lambda \in k$ y $\lambda(\overline{x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y} \otimes y + \overline{x w_1 \cdots w_{a-4} y^2} \otimes x) = 0$ en A, lo cual es un absurdo salvo que $\lambda = 0$. Luego, $(\mathrm{Ker}\,\overline{d_2})_a = 0$.

Supongamos ahora que $a < n < b$ y $\alpha_j = v_{j_1} \cdots v_{j_{n-a}}$, entonces $v_{j_1} \cdots v_{j_{n-a}} x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y + x w_1 \cdots w_{a-4} y^2 v_{j_1} \cdots v_{j_{n-a}} = 0$ en A y la única posibilidad es que $x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y^2$ divida a α_j y por lo tanto $\overline{\alpha_j} = 0$. Si $n \geq b$, resulta análogo para los elementos anteriores y para el resto, si $v_{h_1} \cdots v_{h_{n-b}} x^2 y^{b-4} x + x y^{b-4} x y v_{h_1} \cdots v_{h_{n-b}} = 0$ en A entonces tenemos las siguientes posibilidades:

- $x^2 w_1 \cdots w_{a-4} y^2$ divide a β_h, y por lo tanto $\overline{\beta_h} = 0$.
- $x^2 y^{b-4} x y$ divide a β_h, y por lo tanto $\overline{\beta_h} = 0$.

Observemos además que no pueden cancelarse términos entre ambas sumatorias. Concluimos así que $(\operatorname{Ker} \overline{d_2})_n = 0$ para todo $n \geq 0$. Luego, $\mathrm{HH}_2(\tilde{A}_{a,b}) = 0$.

Capítulo 5

Álgebras (a, b)-cuasi Koszul

Este capítulo está dividido en tres secciones. La primera se basa en un resultado del trabajo [CS] para álgebras monomiales que será de gran utilidad para dar una equivalencia entre la definición de álgebras (a, b)-cuasi Koszul y cierta condición que debe satisfacer su álgebra de Yoneda. Este hecho se desarrolla en la segunda sección, mientras que en la tercera se estudian propiedades de los módulos (a, b)-cuasi Koszul.

Nuevamente, en este capítulo cada vez que mencionemos un módulo proyectivo será considerado proyectivo en la categoría graduada.

5.1 Álgebras monomiales $\mathcal{K}_2$

La noción de álgebra $\mathcal{K}_2$ fue definida por Cassidy y Shelton en [CS] como un intento de generalización de la noción de álgebra N-Koszul. En esta sección estudiaremos en detalle la condición para que un álgebra monomial sea $\mathcal{K}_2$ y presentaremos un algoritmo para determinar si dada un álgebra monomial, ésta es $\mathcal{K}_2$. Nos referimos a [CS] para más detalles. En la próxima sección compararemos esta noción con la de álgebras (a, b)-cuasi Koszul.

Definición 5.1 ([CS]). *Una k-álgebra graduada $A = T(V)/I$ (con V un k-espacio vectorial de dimensión finita) se dice $\mathcal{K}_2$ si $E(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Ext}_A^n(k, k)$ está generada como álgebra por $E^1(A) = \mathrm{Ext}_A^1(k, k)$ y $E^2(A) = \mathrm{Ext}_A^2(k, k)$.*

Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita, y sea $\{x_1, \cdots, x_n\}$ una base de V. Identificamos a $T(V)$ con el espacio $k\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$. Durante esta sección, A será un álgebra de la forma $T(V)/I$ donde I es un ideal homogéneo generado por un conjunto finito y minimal de monomios mónicos en las variables x_i, para $1 \leq i \leq n$. Denotaremos a tal conjunto $\mathcal{R} = \{r_1, \cdots, r_s\}$. Fijamos una resolución proyectiva minimal $(\mathcal{Q}, d)$ del A-módulo trivial a izquierda k. Suponemos además que todo módulo Q_n de la resolución es libre y finitamente generado de rango t_n y elegimos una A-base homogénea para cada Q_n. Sea M_n la matriz que representa a la diferencial $d_n : Q_n \to Q_{n-1}$ en estas bases, donde miramos a la matriz actuando a derecha. Sea $\widehat{M}_n$ una matriz con entradas homogéneas en $T(V)$ tal que su clase en A sea M_n.

Introducimos más notación para enunciar el siguiente teorema, cuya demostración es técnica y para la cual nos referimos al *Teorema* 4.4 de [CS]. Para cada $n \geq 2$, sea L_n la imagen de $\widehat{M}_n$ módulo el ideal $(T(V))_{\geq 2}$ y sea E_n la imagen del producto $\widehat{M}_n\widehat{M}_{n-1}$ módulo $I' = I \otimes V + V \otimes I$. Pensamos a L_n como la parte lineal de $\widehat{M}_n$ y a E_n como la parte esencial de $\widehat{M}_n\widehat{M}_{n-1}$, ya que un elemento $r \in I$ se dice **esencial** si $r \notin I'$. Finalmente, sea $[L_n : E_n]$ la matriz de $t_n \times (t_{n-1} + t_{n-2})$ obtenida al concatenar fila a fila L_n y E_n.

Teorema 5.2 ([CS]). *Sea A una k-álgebra graduada en el contexto anterior, y sea $\mathcal{Q} \to k \to 0$ una resolución proyectiva graduada minimal. Entonces son equivalentes:*

(i) A es $\mathcal{K}_2$.

(ii) Para todo n tal que $2 < n \le \operatorname{pdim}_A(k)$, las filas de la matriz $[L_n : E_n]$ son linealmente independientes sobre k.

Sea $p \in T(V)$ y notemos $\overline{p}$ a su imagen en A. Sea además T_{mon} el conjunto de monomios mónicos en $T(V)$ y notemos $\operatorname{gr}(p)$ al grado de cualquier $p \in T_{\text{mon}}$.

Consideraremos también el conjunto finito

$$LE(\mathcal{R}) = \{p \in T_{\text{mon}} \ / \ \exists q \in T_{\text{mon}} \text{ tal que } \operatorname{gr}(q) > 0 \text{ y } pq \in \mathcal{R}\}.$$

Para cualquier par de monomios p y q en T_{mon} tales que $\overline{pq} = 0$, se define el monomio mónico $L(p,q) := p'$ donde $p = p''p'$ y p' es minimal respecto a la propiedad de que $\overline{p'q} = 0$. Si $\overline{pq} \neq 0$, tomamos $L(p,q) = 0$.

Finalmente, dado $q \in T_{\text{mon}}$ tal que $\overline{q} \neq 0$, se define el conjunto:

$$L(q) = \{p \in LE(\mathcal{R}) \ / \ L(p,q) = p\}.$$

Lema 5.3 ([CS]). *Si q es un monomio en $T(V)$ y $\overline{q} \neq 0$ en A, entonces el anulador a izquierda de $\overline{q}$ en A está generado por $\{\overline{p} \ / \ p \in L(q)\}$.*

Demostración. Sea $\overline{p}$ tal que $p \in L(q)$, entonces $L(p,q) = p$ y por lo tanto $\overline{pq} = 0$. Recíprocamente, sea $\overline{t} \in A$ tal que $\overline{tq} = 0$ y supongamos que $L(t,q) = p'$ con $t = p''p'$; entonces $L(p',q) = p'$. Luego, $p' \in L(q)$ y $\overline{t}$ pertenece al A-módulo generado por $\{\overline{p} \ / \ p \in L(q)\}$. □

A partir de este lema es fácil dar una descripción combinatoria de la estructura de $E(A)$ como espacio vectorial graduado. Para ello, describiremos una resolución (monomial) proyectiva minimal del A-módulo trivial k de la forma

$$\cdots \longrightarrow A^{t_m} \xrightarrow{M_m} A^{t_{m-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^{t_1} \xrightarrow{M_1} A \longrightarrow k \longrightarrow 0. \tag{5.1.1}$$

Las matrices $\widehat{M}_n$ se pueden definir inductivamente de la siguiente manera: Sea $\widehat{M}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, notemos que $t_1 = n$. Supongamos que $m > 1$ y que $\widehat{M}_{m-1}$ está definida y tiene la propiedad de que cada fila de $\widehat{M}_{m-1}$ posee una única entrada no nula y que esta entrada pertenece a $LE(\mathcal{R}) \cup \{x_1, \cdots, x_n\}$. Supongamos además que $\widehat{M}_{m-1}$ tiene t_{m-1} filas. Para cada i tal que $1 \le i \le t_{m-1}$, si q_i es la entrada no nula en la fila i-ésima de $\widehat{M}_{m-1}$ y $L(q_i) = \{p_1, \cdots, p_j\}$, sea $\widehat{M}_m(i)$ la matriz de tamaño $j \times t_{m-1}$ con el vector $(p_1, \cdots, p_j)$ arreglado como la columna i-ésima y ceros en las otras entradas. Si $L(q_i)$ es vacío, no agregamos nuevas columnas. Finalmente, tomamos $\widehat{M}_m$ como la matriz que se obtiene al superponer las matrices $\widehat{M}_m(i)$ con $1 \le i \le t_{m-1}$. Por construcción, $\widehat{M}_m$ tiene la propiedad de que cada fila posee una única entrada no nula de $LE(\mathcal{R}) \cup \{x_1, \cdots, x_n\}$ y, para $m \ge 2$, todas las entradas no nulas pertenecen a $LE(\mathcal{R})$.

Resulta claro que $M_m M_{m-1} = 0$ para todo $m > 1$ y por lo tanto, las matrices M_m definen un complejo de A-módulos graduados libres como (5.1.1). Por el Lema 5.3 se satisface el siguiente resultado.

Lema 5.4 ([CS]). *El complejo (5.1.1) es una resolución minimal de k como A-módulo.*

Sea ahora S el menor conjunto en $T(V)$ tal que:

(i) Si $1 \leq i \leq n$, x_i pertenece a S.

(ii) Si $q \in S$ y existe $p \in LE(\mathcal{R})$ tal que $L(p,q) = p$, entonces $p \in S$.

Existe un algoritmo inductivo para calcular S que consiste en tomar $S_1 = \{x_1, \cdots, x_n\}$ y definir para $i > 1$ el conjunto $S_i = \bigcup_{q \in S_{i-1}} L(q) \setminus \bigcup_{j<i} S_j$. Entonces S es la unión disjunta de los conjuntos S_i. Observemos que como $LE(\mathcal{R})$ es finito, $S_l = \emptyset$ a partir de un l suficientemente grande.

Teorema 5.5 ([CS]). *Sea A un álgebra monomial sobre el cuerpo k. Entonces A es $\mathcal{K}_2$ si y sólo si se satisface la siguiente condición para todo $q \in S$: "si existe $p \in LE(\mathcal{R})$ tal que $L(p,q) = p$, entonces $pq \in \mathcal{R}$ o $\mathrm{gr}(p) = 1$".*

Demostración. Por el Teorema 5.2 sólo necesitamos ver que la condición dada en el enunciado del teorema es equivalente a la condición de que para todo m, las filas de la matriz $[L_m : E_m]$ son linealmente independientes. El conjunto S_l consiste en aquellas entradas no nulas de la matriz $\widehat{M_l}$ que no aparecen en $\widehat{M_i}$ para cualquier $i < l$. Luego, la condición es equivalente al hecho de que toda fila de $[L_m : E_m]$ es no nula. Entonces, basta probar que $[L_m : E_m]$ tiene filas linealmente dependientes si y sólo si una de sus filas es nula. Observemos primero algunas propiedades de esta matriz.

Notemos que un monomio mónico r en I es esencial si y sólo si $r \in \mathcal{R}$, de forma que podemos suponer que E_m es una matriz con entradas en el espacio generado por $\mathcal{R}$. Más aún, como toda fila de $\widehat{M_m}\widehat{M_{m-1}}$ tiene una sola entrada no nula, las filas no nulas de E_m deben ser idénticas a las filas no nulas de $\widehat{M_m}\widehat{M_{m-1}}$. Resulta claro que si un conjunto de filas de E_m es linealmente dependiente y ninguna de ellas es nula, entonces dos de esas filas deben coincidir. Suponemos sin pérdida de generalidad que estas filas son las dos primeras y que la única entrada no nula $r \in \mathcal{R}$ está en la primera columna. Luego, la multiplicación $\widehat{M_m}\widehat{M_{m-1}}$ tiene que ser de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & \cdots \\ d & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \cdots \\ r & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \end{pmatrix}$$

donde a, b, c, d son monomios tales que $ac = bd = r$. En particular, existe un monomio e tal que $c = ed$ o $d = ec$. Por simetría, podemos suponer que $d = ec$. Entonces la segunda fila de $\widehat{M_{m-1}}$ es un múltiplo a izquierda de la primera fila, hecho que contradice la minimalidad de la resolución proyectiva (5.1.1). Esta contradicción implica que cualquier conjunto de filas de E_m linealmente dependiente contiene una fila nula.

Supongamos que existe un conjunto de filas de $[L_m : E_m]$ linealmente dependiente y minimal respecto a esta propiedad. Por lo anterior, la parte de E_m de todas estas filas debe ser cero. Tenemos así una dependencia lineal en un conjunto minimal de filas de L_m, pero como antes, las filas no nulas de L_m son las mismas que se corresponden con las filas de $\widehat{M_m}$, que son linealmente independientes. Por lo tanto, al menos una de las filas en el conjunto linealmente dependiente minimal es cero. Luego, hemos probado la afirmación del teorema. $\square$

5.2 Álgebras (a, b)-cuasi Koszul

En esta sección definiremos una familia de álgebras, que llamaremos álgebras (a, b)-cuasi Koszul, que contiene a las álgebras (a, b)-Koszul estudiadas en el capítulo anterior.

Dada una familia de álgebra (a, b)-cuasi Koszul A, estudiaremos propiedades de las resoluciones proyectivas graduadas minimales de un A-módulo graduado M. Enunciaremos además resultados sobre los espacios $\mathrm{Ext}^n_A(M, A_0)$. El teorema principal de esta sección da una equivalencia entre las álgebras (a, b)-cuasi Koszul y las álgebras $\overline{\mathcal{K}}_2$. Finalizaremos dando ejemplos.

Consideraremos una k-álgebra graduada $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ que satisface $A_0 = k \times \cdots \times k$. En este caso resulta que A_0 es artiniana y semisimple.

Supongamos que A está generada en grados 0 y 1; esto es, $A_n A_m = A_{n+m}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}_0$. El radical de Jacobson de A, $\mathrm{rad}(A)$, es en este caso $\bigoplus_{n \geq 1} A_n$. Como A está generada en grados 0 y 1, resulta que $\mathrm{rad}^i(A) = \bigoplus_{n \geq i} A_n$.

Fijamos una resolución proyectiva graduada minimal de A_0 como A-módulo, $(\mathcal{P}_\bullet, d_\bullet)$:

$$\cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A_0 \longrightarrow 0.$$

Definición 5.6. *Dados $a_1, \cdots, a_s \in \mathbb{N}_0$ tales que $a_1 < \cdots < a_s$, se dice que un A-módulo graduado M está* ***generado en grados*** *$a_1, \cdots, a_s$, si para todo $l \geq a_1$*

$$M_l = A_{l-a_1} M_{a_1} + \cdots + A_{l-a_s} M_{a_s}.$$

Observación 5.7. *Esta definición coincide con la Definición 2.13 para el caso s-puro. La nomenclatura s-puro es más utilizada por Berger, mientras que la Definición 5.6 es preferida por autores como Green, Marcos y Martínez-Villa. En este trabajo, como hemos seguido ideas de todos estos autores, consideramos que resulta útil familiarizarse con ambas definiciones.*

Definición 5.8 ([GMMVZ]). *Sea $\mathcal{I}$ un subconjunto de los enteros no negativos. Se dice que un A-módulo graduado M está* ***soportado en*** *$\mathcal{I}$ si $M_n = 0$ para todo $n \notin \mathcal{I}$.*

Observación 5.9. *Si M es un A-módulo generado en grados $a_1, \cdots, a_s$ entonces M está soportado en $\{n/n \geq a_1\}$.*

Observación 5.10. *El Teorema 2.28 implica que en el caso graduado, si M está soportado en $\{n/n \geq m\}$ entonces $\mathrm{rad}(M) = \bigoplus_{n \geq m+1} M_n$.*

Lema 5.11 ([GMMVZ]). *Sea M un A-módulo graduado soportado en $\{n/n \geq l\}$ y sea $\mathcal{Q}$ una resolución proyectiva graduada minimal de M. Entonces, para cada $i \geq 0$, $(Q_i)_m = 0$ para todo $m < l + i$.*

Demostración. Hacemos inducción sobre i. Si $i = 0$, tomamos una cápsula proyectiva graduada $f : Q_0 \to M \to 0$. Entonces $f_l : (Q_0)_l \to M_l$ es un isomorfismo porque f preserva grados y $\mathrm{Ker}\, f_l \subseteq \mathrm{rad}((Q_0)_l) = 0$. Por otro lado, $\Omega^1(M) = \mathrm{Ker}\, f$ está soportado en $\{n/n \geq l+1\}$. Luego, Q_1 también está soportado en $\{n/n \geq l+1\}$.

Supongamos válido el resultado para $i \geq 0$ y sea $g : \overline{Q} \to Q_i$ una cápsula proyectiva graduada. Entonces, $g_{l+1} : \overline{Q}_{l+1} \to (Q_i)_{l+1}$ es un isomorfismo por hipótesis inductiva. Por lo tanto, $\Omega^{i+1}(M) = \mathrm{Ker}\, g$ está soportado en $\{n/n \geq l+i+1\}$. Luego, $(Q_{i+1})_m = 0$ para todo $m < l+i+1$.
□

Lema 5.12. *Sea M un A-módulo graduado generado en grados positivos $a_1, \cdots, a_s$. Sea $\mathcal{Q}$ una resolución proyectiva graduada minimal de M como A-módulo. Sea $i \geq 1$ y supongamos que P_i está soportado en $\{n/n \geq l\}$. Entonces, Q_i también está soportado en $\{n/n \geq l\}$.*

Demostración. Si $l \leq 0$ el resultado es evidente. Supongamos que $l \geq 1$. Para $j \geq 0$, consideramos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad}^{j+1}(M) \longrightarrow \operatorname{rad}^{j}(M) \longrightarrow \frac{\operatorname{rad}^{j}(M)}{\operatorname{rad}^{j+1}(M)} \longrightarrow 0. \tag{5.2.1}$$

Como M está generado en grados positivos $a_1, \cdots, a_s$, tenemos que $\frac{\operatorname{rad}^{j}(M)}{\operatorname{rad}^{j+1}(M)}$ es semisimple y está soportado en $\{j\}$ pues $\operatorname{rad}^{j}(M) = \bigoplus_{n \geq j} M_n$ y $\operatorname{rad}^{j+1}(M) = \bigoplus_{n \geq j+1} M_n$.

Tomamos una resolución proyectiva graduada minimal de $\frac{\operatorname{rad}^{j}(M)}{\operatorname{rad}^{j+1}(M)}$ como A-módulo, $\mathcal{L}\{j\}$, y una resolución proyectiva graduada minimal de $\operatorname{rad}^{j}(M)$ como A-módulo, $\mathcal{R}\{j\}$. Observemos que $\operatorname{rad}^{j}(M)[-j]$ está generado en grados $0, b_1, \cdots, b_t$. Por el Lema 5.11, $(\mathcal{R}\{l\})_i$ está soportado en $\{n/n \geq l+i\}$. Además, $(\mathcal{L}\{j\})_i$ está soportado en $\{n/n \geq l+j\}$ pues $\frac{\operatorname{rad}^{j}(M)}{\operatorname{rad}^{j+1}(M)}$ es semisimple y está soportado en $\{j\}$ (en este caso estamos usando que P_i está soportado en $\{n/n \geq l\}$). Por lo tanto, $(\mathcal{R}\{l\})_i$ y $(\mathcal{L}\{l-1\})_i$ están soportados en $\{n/n \geq l\}$. Además, $(\mathcal{R}\{l-1\})_i$ está soportado en $\{n/n \geq l\}$. Si repetimos este argumento, $(\mathcal{R}\{l-2\})_i$ está soportado en $\{n/n \geq l\}$ y así sucesivamente para ver que $(\mathcal{R}\{0\})_i$ está soportado en $\{n/n \geq l\}$. Como $(\mathcal{R}\{0\})_i = Q_i$, se sigue el resultado. □

Corolario 5.13. *Sea M un A-módulo generado en grados positivos $a_1, \cdots, a_s$. Sea $\mathcal{Q}$ una resolución proyectiva graduada minimal. Supongamos que P_i está generado en grados $b_1, \cdots, b_t$ y que Q_i está generado en grados $c_1, \cdots, c_u$. Entonces, $c_1 \geq b_1$.*

Demostración. Sabemos que P_i está soportado en $\{n/n \geq b_1\}$ y por el Lema 5.12, Q_i también. Sin embargo, Q_i está soportado en $\{n/n \geq c_1\}$ por los grados de sus generadores. Luego, $c_1 \geq b_1$. □

Observación 5.14. *Sea $\mathcal{Q}$ una resolución proyectiva graduada minimal de un A-módulo graduado M tal que Q_i es finitamente generado y está soportado en $\mathcal{I}$. Entonces $\operatorname{Ext}^i_A(M, A_0) = \operatorname{Hom}_A(\Omega^i(M), A_0)$ está soportado en $\mathcal{I}$. Es decir, $(\operatorname{Ext}^i_A(M, A_0))_n = 0$ si $n \notin \mathcal{I}$.*

Observación 5.15. *Sea $(\mathcal{Q}, d)$ una resolución proyectiva graduada minimal de un A-módulo graduado M, tal que cada Q_i está soportado en $\{n/n \geq s_i\}$. Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_A(-, A_0)$ a $(\mathcal{Q}, d)$, obtenemos el complejo*

$$\cdots \longleftarrow \operatorname{Hom}_A(Q_{i+1}, A_0) \xleftarrow{d^*_{i+1}} \operatorname{Hom}_A(Q_i, A_0) \xleftarrow{d^*_i} \operatorname{Hom}_A(Q_{i-1}, A_0) \longleftarrow \cdots \longleftarrow \operatorname{Hom}_A(Q_0, A_0) \longleftarrow 0.$$

Si $\overline{f}$ es la clase de f en $\operatorname{Ext}^i_A(M, A_0)$, $(\operatorname{Ext}^i_A(M, A_0))_n = \{\overline{f} \ / \ f \in \operatorname{Hom}_A((Q_i)_n, A_0) \ y \ f d_{i+1} = 0\}$. Deducimos entonces que:

- *Como $(Q_i)_n = 0$ si $n < s_i$, en este caso resulta $(\operatorname{Ext}^i_A(M, A_0))_n = 0$.*
- *Para $n > s_i$, como consideramos aplicaciones de $(Q_i)_n$ en A_0 que preservan el grado, resulta que $\operatorname{Hom}_A((Q_i)_n, A_0) = 0$. Notar que estamos usando el trasladado $(Q_i)[s_i]$.*

Luego, $\operatorname{Ext}^i_A(M, A_0)$ está soportado en $\{s_i\}$.

Dado un A-módulo a izquierda M, notaremos $\varepsilon(M)$ al $E(A)$-módulo a izquierda $\bigoplus_{i \geq 0} \operatorname{Ext}^i_A(M, k)$ donde la estructura de módulo está dada por el producto de Yoneda.

Lema 5.16 ([GMMVZ])**.** *Sea M un A-módulo finitamente generado. El morfismo inducido por el producto de Yoneda,*

$$\operatorname{Ext}^i_A(A_0, A_0) \otimes_k \operatorname{Hom}_A\left(\frac{M}{\operatorname{rad} M}, A_0\right) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_A\left(\frac{M}{\operatorname{rad} M}, A_0\right)$$

es suryectivo.

Demostración. Como M es finitamente generado podemos considerar $\frac{M}{\operatorname{rad} M} \simeq \coprod_m A_0$. El resultado se sigue de notar que $\operatorname{Ext}^i_A(A_0, A_0) \otimes_k \operatorname{Hom}_A(\coprod_m A_0, A_0) \to \operatorname{Ext}^i_A(\coprod_m A_0, A_0)$ es un isomorfismo y de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}^i_A(A_0, A_0) \otimes_k \operatorname{Hom}_A(\coprod_m A_0, A_0) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^i_A(\coprod_m A_0, A_0) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\operatorname{Ext}^i_A(A_0, A_0) \otimes_k \operatorname{Hom}_A\left(\frac{M}{\operatorname{rad} M}, A_0\right) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^i_A\left(\frac{M}{\operatorname{rad} M}, A_0\right) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & .
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 5.17. *Sea M un A-módulo graduado generado en grados $0, b_1, \cdots, b_t$. Sea $\mathcal{Q}$ una resolución proyectiva graduada minimal de M. Sea $\mathcal{P}$ una resolución proyectiva minimal graduada de A_0 como A-módulo. Supongamos además que P_i está generado en grados $a^i_1, \cdots, a^i_s$ y que Q_i es finitamente generado. Entonces si Q_i está generado en grados $a^i_1, \cdots, a^i_s$ la siguiente aplicación es suryectiva:*

$$\operatorname{Ext}^i_A(A_0, A_0) \otimes_k \operatorname{Hom}_A(M, A_0) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_A(M, A_0).$$

Demostración. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad}(M) \longrightarrow M \longrightarrow \frac{M}{\operatorname{rad}(M)} \longrightarrow 0.$$

Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_A(-, A_0)$ se obtiene la sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}, A_0\right) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, A_0) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(\operatorname{rad}(M), A_0) \longrightarrow$$
$$\operatorname{Ext}^1_A\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}, A_0\right) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(M, A_0) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(\operatorname{rad}(M), A_0) \longrightarrow \cdots .$$

En particular, la sucesión es exacta en $\operatorname{Ext}^i_A(M, A_0)$.

Como el A-módulo $\operatorname{rad}(M)[-1]$ está generado en grado 0, la Observación 5.14 implica que $\operatorname{Ext}^i_A(\operatorname{rad}(M), A_0)$ está soportado en $\{n/n \geq a^i_1 + 1\}$. En particular, $(\operatorname{Ext}^i_A(\operatorname{rad}(M), A_0))_{a_1} = 0$. Entonces el morfismo

$$\left(\operatorname{Ext}^i_A\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}, A_0\right)\right)_{a^i_1} \longrightarrow (\operatorname{Ext}^i_A(M, A_0))_{a^i_1}$$

es suryectivo. Además, como todo morfismo de M en A_0 se factoriza a través de $\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}$, resulta que el morfismo

$$\operatorname{Ext}^i_A(A_0, A_0) \otimes_k \operatorname{Hom}_A(M, A_0) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_A(M, A_0)$$

se factoriza por $\mathrm{Ext}^i_A\left(\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}, A_0\right)$.

Por otro lado, $\mathrm{Ext}^i_A\left(\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}, A_0\right)$ está soportado en $\{a^i_1\}$ pues $\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}$ es un módulo semisimple y P_i está soportado en $\{n/n \geq a^i_1\}$, por la Observación 5.15. Finalmente, también por la Observación 5.15, como Q_i está generado en grados $a^i_1, \cdots, a^i_s$; $\mathrm{Ext}^i_A(M, A_0)$ está soportado en $\{a^i_1\}$. Luego,

$$\mathrm{Ext}^i_A\left(\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}, A_0\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_A(M, A_0)$$

es un morfismo suryectivo y, por el Lema 5.16, también lo es el morfismo

$$\mathrm{Ext}^i_A(A_0, A_0) \otimes_k \mathrm{Hom}_A(M, A_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_A(M, A_0).$$

□

Proposición 5.18. *Supongamos que P_i es finitamente generado para todo i y que sus generadores homogéneos tienen grados $a^i_1, \cdots, a^i_{s_i}$, ordenados en forma creciente. Para $i = \alpha + \beta$, supongamos que $\{a^{\alpha+\beta}_j\} = \{a^\alpha_h + a^\beta_l\}$; es decir, el grado de cada generador de $P_{\alpha+\beta}$ se escribe como suma del grado de un generador de P_α y del de un generador de P_β. Entonces, los siguientes morfismos son suryectivos:*

$$\mathrm{Ext}^\alpha_A(A_0, A_0) \otimes \mathrm{Ext}^\beta_A(A_0, A_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{\alpha+\beta}_A(A_0, A_0),$$
$$\mathrm{Ext}^\beta_A(A_0, A_0) \otimes \mathrm{Ext}^\alpha_A(A_0, A_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{\alpha+\beta}_A(A_0, A_0).$$

Luego,

$$\mathrm{Ext}^{\alpha+\beta}_A(A_0, A_0) = \mathrm{Ext}^\alpha_A(A_0, A_0)\,\mathrm{Ext}^\beta_A(A_0, A_0) = \mathrm{Ext}^\beta_A(A_0, A_0)\,\mathrm{Ext}^\alpha_A(A_0, A_0).$$

Demostración. Por hipótesis, $\Omega^\beta(A_0)$ está generado en grados $a^\beta_1, \cdots, a^\beta_{s_\beta}$. Si aplicamos la Proposición 5.17 al A-módulo $M = \Omega^\beta(A_0)[-a^\beta_1]$, la siguiente aplicación resulta suryectiva

$$\mathrm{Ext}^\alpha_A(A_0, A_0) \otimes_k \mathrm{Hom}_A(\Omega^\beta(A_0), A_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^\alpha_A(\Omega^\beta(A_0), A_0).$$

Como $\mathrm{Ext}^\beta_A(A_0, A_0) \simeq \mathrm{Hom}_A(\Omega^\beta(A_0), A_0)$ y $\mathrm{Ext}^\alpha_A(\Omega^\beta(A_0), A_0) \simeq \mathrm{Ext}^{\alpha+\beta}_A(A_0, A_0)$, se sigue el resultado. □

Definición 5.19. *Sea $A = T_{A_0}(A_1)/I$ una k-álgebra tal que I está generado en grados a y b con $2 < a < b$. A se dice un álgebra (a, b)-**cuasi Koszul** si A_0 admite una resolución proyectiva graduada minimal*

$$\cdots \longrightarrow P_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0,$$

donde P_i está generado en grados

$$\begin{cases} \sigma_j(i) = ja + (\frac{i}{2} - j)b & 0 \leq j \leq \frac{i}{2} \text{ si } i \text{ es par,} \\ \sigma_j(i) = ja + (\frac{i-1}{2} - j)b + 1 & 0 \leq j \leq \frac{i-1}{2} \text{ si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

Observación 5.20. *(i) Si $a = b$, entonces A es un álgebra a-Koszul en el sentido de la definición que se da en [GMMVZ], el cual generaliza la definición dada en [B1].*

(ii) Si $A = T(V)/I$ es un álgebra (a, b)-Koszul, entonces es un álgebra (a, b)-cuasi Koszul.

Definición 5.21. *Sea una k-álgebra $A = T_{A_0}(A_1)/I$. A se dice $\overline{\mathcal{K}}_2$ si $\mathrm{Ext}^i_A(A_0, A_0)$ está generado por $\mathrm{Ext}^m_A(A_0, A_0)$ donde $m = 0, 1, 2$.*

Observación 5.22. *Si $A = T(V)/I$ donde V es un k-espacio vectorial de dimensión finita, decir que A es $\overline{\mathcal{K}}_2$ es equivalente a decir que A es $\mathcal{K}_2$.*

Teorema 5.23. *Sea $A = T_{A_0}(A_1)/I$ una k-álgebra donde I es un ideal generado en grados a y b distintos, ambos mayores que 2. Entonces, A es (a,b)-cuasi Koszul si y sólo si A es $\overline{\mathcal{K}}_2$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que A es (a,b)-cuasi Koszul. Haremos inducción sobre i para probar que $\operatorname{Ext}^i_A(A_0,A_0)$ está generado por $\operatorname{Ext}^m_A(A_0,A_0)$ donde $m = 0,1,2$. Para $i = 0,1,2$ el resultado es trivial. Sea $i \geq 2$ y supongamos válido el resultado para cualquier natural menor o igual que i. Analicemos entonces $\operatorname{Ext}^{i+1}_A(A_0,A_0)$.

- Si $i+1 = 2t$, sea j tal que $0 \leq j \leq t$, entonces

$$a^{i+1}_j = a^{2t}_j = ja + (\frac{2t}{2} - j)b = ja + (t-j)b.$$

  Tenemos que para $h = 1,2$, $a^2_h \in \{a,b\}$ y que $a^{2t-2}_l = la + (t-1-l)b$ si $0 \leq l \leq t-1$. Concluimos que

$$a + a^{2t-2}_l = (l+1)a + (t-(l+1))b = l'a + (t-l')b = a^{2t}_{l'}$$

  con $1 \leq l' \leq t$; por otro lado,

$$b + a^{2t-2}_l = la + (t-l)b = a^{2t}_l$$

  con $0 \leq l \leq t-1$. Luego, $\{a^2_h + a^{2t-2}_l\} = \{a^{2t}_j\}$ y por la Proposición 5.18 tenemos que

$$\operatorname{Ext}^{i+1}_A(A_0,A_0) = \operatorname{Ext}^{2t}_A(A_0,A_0) = \operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0)\operatorname{Ext}^{2t-2}_A(A_0,A_0).$$

  Usando la hipótesis inductiva, $\operatorname{Ext}^{i+1}_A(A_0,A_0)$ está generado por $\operatorname{Ext}^0_A(A_0,A_0)$, $\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)$ y $\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0)$.

- Si $i+1 = 2t+1$, sea j tal que $0 \leq j \leq t$, entonces

$$a^{i+1}_j = a^{2t+1}_j = ja + (t-j)b + 1.$$

  Por otro lado,

$$a^{2t}_h = ha + \left(\frac{2t}{2} - h\right)b = ha + (t-h)b.$$

  Luego, $\{a^{2t+1}_j\} = \{a^{2t}_h + 1\}$ y P_1 está generado en grado 1. Por la Proposición 5.18 sabemos que

$$\operatorname{Ext}^{i+1}_A(A_0,A_0) = \operatorname{Ext}^{2t+1}_A(A_0,A_0) = \operatorname{Ext}^{2t}_A(A_0,A_0)\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0).$$

  Por hipótesis inductiva, $\operatorname{Ext}^{i+1}_A(A_0,A_0)$ está generado por $\operatorname{Ext}^0_A(A_0,A_0)$, $\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)$ y $\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0)$, y se sigue el resultado.

Recíprocamente, supongamos que A es $\overline{\mathcal{K}}_2$, es decir, $E(A)$ está generada por $\operatorname{Ext}^0_A(A_0,A_0)$, $\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)$ y $\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0)$. Observemos que como P_1 está generado en grado 1 y $\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)\simeq \operatorname{Hom}_A(P_1,A_0)$, toda extensión en $\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)$ es equivalente a una de la forma

$$0 \longrightarrow A_0[-1] \longrightarrow M \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0.$$

Consideremos otra sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A_0[-1] \longrightarrow M' \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0,$$

y la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow A_0[-2] \longrightarrow M'[-1] \longrightarrow A_0[-1] \longrightarrow 0.$$

Si hacemos el producto de Yoneda de las clases de estas extensiones obtenemos como resultado la clase de la sucesión

$$0 \longrightarrow A_0[-2] \longrightarrow M'[-1] \longrightarrow M \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0.$$

Deducimos que la imagen de la aplicación

$$\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)\otimes_k \operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0)$$

está contenida en $(\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0))_2$. Por hipótesis, $\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0)$ está generado en grados a y b, ambos mayores que 2, entonces $(\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0))_2=0$ y por lo tanto, $(\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0))^2=0$. Luego,

$$\operatorname{Ext}^3_A(A_0,A_0)=\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0)+\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0)\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0),$$

y como $\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)$ está generado en grado 1 resulta que $\operatorname{Ext}^3_A(A_0,A_0)$ está generado en grados $a+1$ y $b+1$. Por lo tanto, P_3 también está generado en grados $a+1$ y $b+1$. Sin embargo, si aplicamos la Proposición 5.18, tenemos que

$$\operatorname{Ext}^3_A(A_0,A_0)=\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0)=\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0)\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0).$$

Si utilizamos este resultado y el hecho que A es $\overline{\mathcal{K}}_2$, vemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)\operatorname{Ext}^3_A(A_0,A_0)&=\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0)=0\\
\operatorname{Ext}^3_A(A_0,A_0)\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)&=\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0)\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)=0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\operatorname{Ext}^4_A(A_0,A_0)=(\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0))^2$. Luego, $\operatorname{Ext}^4_A(A_0,A_0)$ está generado en grados $2a$, $a+b$ y $2b$ y como consecuencia P_4 también.

En general, afirmamos que $\operatorname{Ext}^i_A(A_0,A_0)=$

$$\begin{cases}(\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0))^{\frac{i}{2}} & \text{si } i \text{ es par,}\\ (\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0))^{\frac{i-1}{2}}\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)=\operatorname{Ext}^1_A(A_0,A_0)(\operatorname{Ext}^2_A(A_0,A_0))^{\frac{i-1}{2}} & \text{si } i \text{ es impar.}\end{cases}$$

Para ello hacemos inducción sobre i. Ya probamos que el resultado es válido para $i\leq 4$. Sea entonces $i>4$ y supongamos válido el resultado para $h\leq i$. Como A es $\overline{\mathcal{K}}_2$,

$$\operatorname{Ext}^{i+1}_A(A_0,A_0)=\sum_{\substack{(h_1,\cdots,h_t)\in\{1,2\}^t\\ \sum_{l=1}^t h_l=i+1}}\operatorname{Ext}^{h_1}_A(A_0,A_0)\cdots\operatorname{Ext}^{h_t}_A(A_0,A_0).$$

Analicemos los siguientes casos:

- Si $i+1$ es par, fijemos un sumando y supongamos que existe algún h_l tal que $h_l = 1$. Sea l_0 mínimo con la propiedad de que $h_{l_0} = 1$. Como $i+1$ es par, existe h_{l_1} tal que $l_1 \neq l_0$, $h_{l_1} = 1$ y l_1 es mínimo con esta propiedad.

  Por hipótesis inductiva, $\mathrm{Ext}_A^{h_{l_0+1}}(A_0, A_0) \cdots \mathrm{Ext}_A^{h_{l_1}} = \mathrm{Ext}_A^m(A_0, A_0)$ donde $m = h_{l_0+1} + \cdots + h_{l_1}$ es impar y menor que $i+1$. Sabemos además, por la Proposición 5.18 que

$$\mathrm{Ext}_A^m(A_0, A_0) = \mathrm{Ext}_A^{h_{l_1}}(A_0, A_0)\,\mathrm{Ext}_A^{h_{l_0+1}}(A_0, A_0) \cdots \mathrm{Ext}_A^{h_{l_1-1}}(A_0, A_0),$$

  y que

$$\mathrm{Ext}_A^{h_{l_0}}(A_0, A_0)\,\mathrm{Ext}_A^{h_{l_1}}(A_0, A_0) = (\mathrm{Ext}_A^1(A_0, A_0))^2 = 0.$$

  Luego, $\mathrm{Ext}_A^1(A_0, A_0)$ no aparece en los sumandos. Por lo tanto,

$$\mathrm{Ext}_A^{i+1}(A_0, A_0) = (\mathrm{Ext}_A^2(A_0, A_0))^{\frac{i+1}{2}}.$$

- Si $i+1$ es impar, fijamos un sumando, entonces existe h_l en ese sumando con $h_l = 1$, elegido de forma tal que l sea mínimo esta propiedad. Si existe un segundo exponente con esta propiedad, necesariamente existe un tercero y se procede como en el caso anterior para $\mathrm{Ext}_A^i(A_0, A_0)$. Luego, $\mathrm{Ext}_A^1(A_0, A_0)$ puede aparecer sólo una vez en cada sumando. Entonces $\mathrm{Ext}_A^{i+1}(A_0, A_0)$ está generado en grados $ja + (\frac{i}{2} - j)b + 1$ donde $0 \leq j \leq \frac{i}{2}$ y en consecuencia P_{i+1} también. Sin embargo, estos grados son los que generan a P_i incrementados en uno, y por la Proposición 5.18

$$\mathrm{Ext}_A^{i+1}(A_0, A_0) = \mathrm{Ext}_A^1(A_0, A_0)\,\mathrm{Ext}_A^i(A_0, A_0) = \mathrm{Ext}_A^i(A_0, A_0)\,\mathrm{Ext}_A^1(A_0, A_0).$$

  Como i es par y menor que $i+1$, por hipótesis inductiva tenemos que

$$\mathrm{Ext}_A^i(A_0, A_0) = (\mathrm{Ext}_A^2(A_0, A_0))^{\frac{i}{2}}.$$

Resulta claro que P_i está generado en los grados correspondientes a la definición de que A sea (a, b)-cuasi Koszul. □

Corolario 5.24. *Si A es un álgebra (a, b)-cuasi Koszul, entonces para todo $i, j \geq 0$*

$$\mathrm{Ext}_A^{2i+1}(A_0, A_0)\,\mathrm{Ext}_A^{2j+1}(A_0, A_0) = 0.$$

Demostración. Por la demostración del Teorema 5.23 y como $2i+1$ y $2j+1$ son impares, para todo $i, j \geq 0$, tenemos que

$$\mathrm{Ext}_A^{2i+1}(A_0, A_0)\,\mathrm{Ext}_A^{2j+1}(A_0, A_0) = (\mathrm{Ext}_A^2(A_0, A_0))^i \underbrace{\mathrm{Ext}_A^1(A_0, A_0)\,\mathrm{Ext}_A^1(A_0, A_0)}_{=0}(\mathrm{Ext}_A^2(A_0, A_0))^j = 0.$$

□

A continuación damos una serie de ejemplos de álgebras (a, b)-cuasi Koszul.

Ejemplo.

(1) Sea $A = \frac{k\langle x,y\rangle}{\langle x^a,y^b\rangle}$ con $2 < a < b$. Se trata de un álgebra monomial. Para ver que es $\overline{\mathcal{K}}_2$, lo cual es equivalente a ver que es $\mathcal{K}_2$ por la Observación 5.22, utilizamos el Teorema 5.5. En este caso $\mathcal{R} = \{x^a, y^b\}$ y

$$LE(\mathcal{R}) = \{p \in T_{\text{mon}} \ / \ \exists q \in T_{\text{mon}} \text{ con } \operatorname{gr}(q) > 0 \text{ y } pq \in \mathcal{R}\},$$

donde T_{mon} denota el conjunto de monomios mónicos en $T = T(V) = k\langle x, y\rangle$.

Queremos ver que para todo $q \in S$, si existe $p \in LE(\mathcal{R})$ tal que $L(p, q) = p$ entonces $pq \in \mathcal{R}$ o $\operatorname{gr}(p) = 1$. Construimos S según el algoritmo inductivo:

- $S_1 = \{x, y\}$.
- $S_2 = (L(x) \cup L(y)) \setminus S_1$, donde $L(x) = \{p \in LE(\mathcal{R}) \ / \ L(p, x) = p\}$. Si $p \in LE(\mathcal{R})$, p es una potencia de x o una potencia de y. En nuestro caso, $p = x^{a-1}$ es tal que $\overline{px} = 0$ y es de grado mínimo con esta propiedad. Luego, $L(x) = \{x^{a-1}\}$. Análogamente, se prueba que $L(y) = \{y^{b-1}\}$. Luego, $S_2 = \{x^{a-1}, y^{b-1}\}$.
- $S_3 = (L(x^{a-1}) \cup L(y^{b-1})) \setminus (S_1 \cup S_2)$. Tenemos por definición que, $L(x^{a-1}) = \{p \in LE(\mathcal{R}) \ / \ L(p, x^{a-1}) = p\}$. Por lo anterior, $L(x^{a-1}) = \{x\}$ y análogamente, $L(y^{b-1}) = \{y\}$. Como $S_1 = \{x, y\}$, resulta que $S_3 = \emptyset$.

Concluimos que $S = \{x, y, x^{a-1}, y^{b-1}\}$. Entonces las posibilidades son las siguientes:

- si $q = x$ y $L(p, x) = p$ entonces $p = x^{a-1}$ y $px \in \mathcal{R}$,
- si $q = y$ y $L(p, y) = p$ entonces $p = y^{b-1}$ y $py \in \mathcal{R}$,
- si $q = x^{a-1}$ y $L(p, x^{a-1}) = p$ entonces $p = x$ y $px^{a-1} \in \mathcal{R}$,
- si $q = y^{b-1}$ y $L(p, y^{b-1}) = p$ entonces $p = y$ y $py^{b-1} \in \mathcal{R}$.

Luego, A es $\mathcal{K}_2$ y como I está generado en grados a y b, ambos mayores que 2, por el Teorema 5.23, A es (a, b)-cuasi Koszul.

(2) Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $2 < a < b$ y sea $G = \{a, b\}$. Sea $A = \frac{k\langle x_1,\cdots,x_t\rangle}{I}$ donde $I = \langle \{x_i^{\alpha_i} \ / \ \alpha_i \in \mathbb{N}_0, \ 1 \leq i \leq t\}\rangle$ con $t \geq 2$ y existen $i, j \in \{1, \cdots, t\}$ distintos entre sí tales que $\alpha_i = a$ y $\alpha_j = b$.

Puede verse de manera análoga al ejemplo anterior que $S = \{x_1, \cdots, x_t\} \cup \{x_i^{\alpha_i - 1}\}_{\substack{1 \leq i \leq t \\ \alpha_i \neq 0}}$ y tenemos las dos siguientes posibilidades:

- $L(p, x_i) = p$ si y sólo si $p = x_i^{\alpha_i - 1}$ y entonces $px = x_i^{\alpha_i} \in \mathcal{R}$.
- $L(p, x_i^{\alpha_i - 1}) = p$ si y sólo si $p = x_i$ y entonces $px_i^{\alpha_i - 1} = x_i^{\alpha_i} \in \mathcal{R}$.

Luego, A es $\mathcal{K}_2$ y nuevamente, como I está generado en grados a y b, ambos mayores que 2, por el Teorema 5.23 A es (a, b)-cuasi Koszul.

(3) Si en el caso anterior consideramos $G = \{0, a, b\}$ y suponemos que existe h, $1 \leq h \leq t$ tal que $\alpha_h = 0$, no puede ser que $L(p, x_h) = p$ pues si $p \in LE(\mathcal{R})$ y $\overline{px_h} = 0$, entonces p es de la forma $x_i^{\alpha_i} \in \mathcal{R}$, pero este elemento no está en $LE(\mathcal{R})$ pues si $x_i^{\alpha_i} q \in \mathcal{R}$, $q = 1$ y entonces tiene grado cero.

Luego, A es $\mathcal{K}_2$ y como en los ejemplos anteriores, es (a, b)-cuasi Koszul.

5.3 Módulos (a, b)-cuasi Koszul

En esta sección introduciremos la noción de módulo (a, b)-cuasi Koszul. Construiremos sucesiones exactas cortas a partir de propiedades que estos módulos verifican y otras sucesiones que involucran ciertos módulos de torsión. Los resultados aquí planteados son generalizaciones de [GMMVZ].

Durante esta sección consideramos el caso en que $A_0 = k$.

Definición 5.25. *Sea A un álgebra (a, b)-cuasi Koszul. Decimos que un A-módulo a izquierda graduado, M, es un **módulo** (a, b)**-cuasi Koszul** si existe una resolución proyectiva graduada minimal de A-módulos*

$$\cdots \longrightarrow Q_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

tal que Q_i está generado en grados

$$\sigma_j(i) = \begin{cases} ja + (\frac{i}{2} - j)b & 0 \leq j \leq \frac{i}{2} \text{ si } i \text{ es par,} \\ ja + (\frac{i-1}{2} - j)b + 1 & 0 \leq j \leq \frac{i-1}{2} \text{ si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

Observación 5.26. *(i) En el caso en que $a = b$, un módulo (a, b)-cuasi Koszul es un módulo a-Koszul en el sentido de [GMMVZ].*

(ii) Si M es un módulo (a, b)-cuasi Koszul, como Q_0 está generado en grado 0, M también está generado en grado 0.

(iii) Si M y N son módulos (a, b)-cuasi Koszul, entonces $M \oplus N$ también lo es.

(iv) Si A es un álgebra (a, b)-cuasi Koszul, resulta trivial ver que k es un A-módulo (a, b)-cuasi Koszul.

(v) Sea A un álgebra (a, b)-Koszul para la cual existen finitos A-módulos simples no isomorfos y concentrados en grado 0, que notamos $S_1, \cdots, S_t$. Deducimos que $\operatorname{Tor}_i^A(k, k) = \bigoplus_{h,\, l\, =\, 1}^{t} \operatorname{Tor}_i^A(S_h, S_l)$ es 2-puro en grados $n_a(i)$ y $n_b(i)$. En particular, resulta que $\operatorname{Tor}_i^A(S_h, S_h)$ es 2-puro en grados $n_a(i)$ y $n_b(i)$ para todo h tal que $1 \leq h \leq t$. Por lo tanto, todo módulo simple es un módulo (a, b)-cuasi Koszul.

Resulta entonces que todo módulo semisimple sobre un álgebra (a, b)-Koszul es un módulo (a, b)-cuasi Koszul.

Observación 5.27. *Sea $(\mathcal{P}_\bullet, d_\bullet)$ una resolución proyectiva minimal graduada de k como A-módulo:*

$$\cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} k \longrightarrow 0.$$

Dado un A-módulo M, podemos aplicar el funtor $- \otimes_k \frac{M}{\operatorname{rad}(M)}$: A-mod $\to$ A-mod a la resolución anterior. Como este funtor es exacto a derecha, más aún, como k es un cuerpo $- \otimes_k -$ es exacto, obtenemos la exactitud, salvo en el último lugar, del siguiente complejo

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_1 \otimes_k \frac{M}{\operatorname{rad}(M)} \arrow[r, "\widetilde{d}_1"] & P_0 \otimes_k \frac{M}{\operatorname{rad}(M)} \arrow[r, "\widetilde{d}_0"] \arrow[dr, "\overline{d}_0"'] & k \otimes_k \frac{M}{\operatorname{rad}(M)} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ & & & \frac{M}{\operatorname{rad}(M)} \arrow[d] & \\ & & & 0 & \end{tikzcd}.$$

donde f es el isomorfismo canónico y $\widetilde{d}_i = d_i \otimes_k id$. Se satisface lo siguiente:

- *Como $\widetilde{d}_0$ y f son epimorfismos, $\overline{d}_0 = f\widetilde{d}_0$ también lo es.*
- *Como f es un monomorfismo, $\operatorname{Ker}\overline{d}_0 = \operatorname{Ker} f\widetilde{d}_0 = \operatorname{Im}\widetilde{d}_1$. Luego, vale la exactitud de la resolución en el último lugar.*

Por otro lado, para cada i, $\operatorname{Hom}_A(P_i, -)$ es un funtor exacto pues P_i es un A-módulo proyectivo. Además,

$$\operatorname{Hom}_A\left(P_i \otimes_k \frac{M}{\operatorname{rad}(M)}, -\right) = \operatorname{Hom}_k\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}, \operatorname{Hom}_A(P_i, -)\right) = \operatorname{Hom}_k\left(\bigoplus_j k, \operatorname{Hom}_A(P_i, -)\right)$$
$$= \prod_j \operatorname{Hom}_k(k, \operatorname{Hom}_A(P_i, -)) = \prod_j \operatorname{Hom}_A(P_i, -).$$

Como la categoría de A-módulos es $AB4^*$ (es completa y el producto de epimorfismos es un epimorfismo, ver [W]), el funtor $\operatorname{Hom}_A\left(P_i \otimes_k \frac{M}{\operatorname{rad}(M)}, -\right)$ resulta exacto. Luego, los A-módulos $P_i \otimes_k \frac{M}{\operatorname{rad}(M)}$ son proyectivos.

Lema 5.28. *Sea M un módulo (a, b)-cuasi Koszul. Entonces, dado $t \geq 1$ existe una sucesión exacta corta de la forma*

$$0 \longrightarrow \Omega^t(M) \longrightarrow \Omega^t\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}\right) \longrightarrow \Omega^{t-1}(\operatorname{rad}(M)) \longrightarrow 0.$$

Demostración. El epimorfismo $\varphi : M \to \frac{M}{\operatorname{rad}(M)}$ induce un epimorfismo $\varphi_0 : M_0 \to (\frac{M}{\operatorname{rad}(M)})_0$. Como $\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}$ está soportado en $\{0\}$ y $\operatorname{Ker}\left(M \to \frac{M}{\operatorname{rad}(M)}\right) = \operatorname{rad}(M)$, cuyos elementos tienen grado positivo, φ_0 es inyectivo y por lo tanto es un isomorfismo.

Luego, si componemos el morfismo de la cápsula proyectiva graduada $Q_0 \to M$ con el morfismo $M \to \frac{M}{\operatorname{rad}(M)}$ tenemos una cápsula proyectiva graduada de $\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}$. Obtenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{rad}(M) \arrow[r] & M \arrow[u] \arrow[r] & \frac{M}{\operatorname{rad}(M)} \arrow[u] \arrow[r] & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] & Q_0 \arrow[u, "g"] \arrow[r, equal] & Q_0 \arrow[u, "f"'] \arrow[r] & 0 & \\
 & 0 \arrow[r, dashed] & \Omega^1_A(M) \arrow[u] \arrow[r, "h^1_1"] & \Omega^1_A\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}\right) \arrow[u] \arrow[r, "h^1_2"] & \operatorname{rad}(M) \arrow[r, dashed] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

donde $\Omega^1_A(M) = \operatorname{Ker} g$ y $\Omega^1_A\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}\right) = \operatorname{Ker} f$.

Como $f\left(\Omega^1_A\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}\right)\right) = \{0\}$, la restricción $h^1_2 = g|_{\Omega^1_A\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}\right)}$ es tal que $\operatorname{Im} h^1_2 \subseteq \operatorname{rad}(M)$. Además, $h^1_2 : \Omega^1_A\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}\right) \to \operatorname{rad}(M)$ es un epimorfismo; pues si $y \in \operatorname{rad}(M)$, al ser g un epimorfismo existe $x \in Q_0$ tal que $y = g(x)$. Si π denota la proyección $M \to \frac{M}{\operatorname{rad}(M)}$, $0 = \pi(y) = \pi g(x) = f(x)$. Por lo tanto, $x \in \Omega^1_A\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}\right)$. Además,

$$\operatorname{Ker} h^1_2 = \operatorname{Ker} g \cap \Omega^1_A\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}\right) = \operatorname{Ker} g = \Omega^1_A(M),$$

donde se satisface que $\Omega_A^1(M) \subseteq \Omega_A^1\left(\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}\right)$ pues si $g(x) = 0$ entonces $f(x) = \pi g(x) = 0$. Concluimos de este modo que la última fila del diagrama es exacta.

Por hipótesis, A es (a, b)-cuasi Koszul y por lo tanto $\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}$ es un módulo (a, b)-cuasi Koszul por la Observación 5.27. Resulta que $\Omega_A^1\left(\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}\right)$ está generado en grado 1; luego, $\mathrm{rad}(M)$ también. Tenemos una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \longrightarrow \Omega_A^1(M) \xrightarrow{h_1^1} \Omega_A^1\left(\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}\right) \xrightarrow{h_2^1} \mathrm{rad}(M) \longrightarrow 0,$$

donde todos los módulos no nulos están generados en grado 1. Se sigue que si $f_1 : Q_1 \to \Omega_A^1(M)$ y $f_3 : L_0 \to \mathrm{rad}(M)$ son cápsulas proyectivas graduadas, $f_2 : Q_1 \oplus L_0 \to \Omega_A^1\left(\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}\right)$ también es una cápsula proyectiva graduada. La construcción del morfismo f_2 es standard. Vemos que existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \Omega_A^1(M) \arrow[r, "h_1^1"] \arrow[u] & \Omega_A^1\left(\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}\right) \arrow[r, "h_2^1"] \arrow[u] & \mathrm{rad}(M) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[u, "f_1"] & Q_1 \oplus L_0 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[u, "f_2"] & L_0 \arrow[r] \arrow[u, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_A^2(M) \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[u] & \Omega_A^2\left(\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}\right) \arrow[r, "\widetilde{\pi_2}"] \arrow[u] & \Omega_A^1(\mathrm{rad}(M)) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

donde la última fila está inducida de la segunda por las inclusiones verticales. Es claro que $Q_1 \oplus L_0$ es un A-módulo proyectivo por ser suma de A-módulos proyectivos.

Observemos que los módulos no nulos de la primera fila están generados en grado 1. Las cápsulas proyectivas Q_1 y L_0 inducen una cápsula proyectiva de $\Omega_A^1\left(\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}\right)$, $Q_1 \oplus L_0$. También sabemos que $f_2|_{Q_1} = h_1^1 f_1$ y entonces $\mathrm{Im}\, f_2|_{Q_1} \subseteq \mathrm{rad}(\Omega_A^1(M))$ que puede ser no nulo en grados mayores o iguales que 2. Además, $\mathrm{Im}(f_3\pi_2) \subseteq \mathrm{rad}(M)$ que puede ser no nulo sólo a partir de grado 2. Como $f_3\pi_2 = h_2^1 f_2$ y h_2^1 preserva la graduación, $f_2(L_0)$ puede ser no nulo sólo a partir de grado 2.

Como M y $\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}$ son módulos (a, b)-cuasi Koszul, $\Omega_A^2(M)$ y $\Omega_A^2\left(\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}\right)$ están generados en grados a y b. Luego, $\Omega_A^1(\mathrm{rad}(M))$ también está generado en grados a y b por la exactitud de la última fila.

Se sigue por inducción, en forma análoga con la última fila tomando cápsulas proyectivas de $\Omega_A^2(M)$ y de $\Omega_A^1(\mathrm{rad}(M))$, cuya suma directa es una cápsula proyectiva de $\Omega_A^2\left(\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}\right)$. Resultan de este modo las sucesiones exactas cortas del lema. □

Proposición 5.29. *Sea A un álgebra (a, b)-cuasi Koszul con $A_0 = k$ y sea M un módulo (a, b)-cuasi Koszul. Para cada $i \geq 1$, existen sucesiones exactas cortas de la forma*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{i-1}(\mathrm{rad}(M), k) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{i}\left(\frac{M}{\mathrm{rad}(M)}, k\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{i}(M, k) \longrightarrow 0.$$

Además, los módulos de la sucesión están soportados en los conjuntos:

$$\{\frac{i}{2}a\} \text{ si } i \text{ es par}, \quad \{\frac{i-1}{2}a+1\} \text{ si } i \text{ es impar}.$$

Demostración. Por el Lema 5.28, para cada $i \geq 1$ existe una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \longrightarrow \Omega_A^i(M) \xrightarrow{h_1^i} \Omega_A^i\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}\right) \xrightarrow{h_2^i} \Omega_A^{i-1}(\operatorname{rad}(M)) \longrightarrow 0, \tag{5.3.1}$$

donde los módulos no nulos están generados en grados $\sigma_j(i)$ con $0 \leq j \leq \frac{i}{2}$ si i es par y $0 \leq j \leq \frac{i-1}{2}$ si i es impar. Si aplicamos el funtor $\operatorname{Hom}_A(-, k)$, obtenemos

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(\Omega_A^{i-1}(\operatorname{rad}(M)), k) \xrightarrow{h_2^{i\,*}} \operatorname{Hom}_A\left(\Omega_A^i\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}\right), k\right) \xrightarrow{h_1^{i\,*}} \operatorname{Hom}_A(\Omega_A^i(M), k). \tag{5.3.2}$$

Por la demostración del Lema 5.28, sabemos que $\Omega_A^i\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}\right) = \Omega_A^i(M) \oplus \Omega_A^{i-1}(\operatorname{rad}(M))$. Luego, la sucesión (5.3.1) se parte y entonces, (5.3.2) es exacta a derecha. Podemos reescribir (5.3.2) como:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{i-1}(\operatorname{rad}(M), k) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^i\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}, k\right) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^i(M, k) \longrightarrow 0.$$

Los módulos de la sucesión exacta corta anterior están soportados en los conjuntos del enunciado porque $\Omega_A^i(M)$, $\Omega_A^i\left(\frac{M}{\operatorname{rad}(M)}\right)$ y $\Omega_A^{i-1}(\operatorname{rad}(M))$ están generados en grados $\sigma_j(i)$ con $0 \leq j \leq \frac{i}{2}$ si i es par y $0 \leq j \leq \frac{i-1}{2}$ si i es impar. Además , como $a < b$, el grado mínimo de los generadores es $\sigma_0(i)$, aplicamos luego la Observación 5.15. $\square$

Teorema 5.30. *Sea $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ un álgebra (a, b)-cuasi Koszul con $A_0 = k$ y sea M un A-módulo a izquierda graduado. Si M es (a, b)-cuasi Koszul, entonces $\varepsilon(M)$ está generado en grado 0. Más aún, para todo $i, j \geq 0$,*

$$\operatorname{Ext}_A^{2i+1}(k, k) \operatorname{Ext}_A^{2j+1}(M, k) = 0.$$

Demostración. Por la Proposición 5.17, resulta que $\operatorname{Ext}_A^i(k, k) \operatorname{Hom}_A(M, k) = \operatorname{Ext}_A^i(M, k)$ donde $\operatorname{Hom}_A(M, A_0) = \operatorname{Ext}_A^0(M, k)$. Luego,

$$\operatorname{Ext}_A^{2i+1}(k, k) \operatorname{Ext}_A^{2j+1}(M, k) = \operatorname{Ext}_A^{2i+1}(k, k) \operatorname{Ext}_A^{2j+1}(k, k) \operatorname{Ext}_A^0(M, k)$$

que se anula por el Corolario 5.24. $\square$

Capítulo 6

Álgebra de Yoneda

Este capítulo está divido en dos secciones. En la primera de ellas describiremos el álgebra de Yoneda de un álgebra (a, b)-Koszul y daremos una fórmula cerrada para su producto. En la segunda sección mostraremos con un ejemplo que el álgebra de Yoneda de un álgebra (a, b)-cuasi Koszul, y por lo tanto $\mathcal{K}_2$, no es necesariamente un álgebra $\mathcal{K}_2$.

6.1 Álgebra de Yoneda de un álgebra (a, b)-Koszul

Esta seccción se centra en generalizar conceptos planteados en [BMa], trabajo al cual nos referimos para más detalles.

Para dar una descripción del álgebra de Yoneda de un álgebra (a, b)-Koszul comenzaremos recordando la siguiente definición dada en la Sección §4.6.

Definición 6.1. *Sean V un k-espacio vectorial de dimensión finita, I el ideal bilátero de $T(V)$ generado por $R = R_a \oplus R_b$ con $2 < a < b$ y $A = T(V)/I$. Consideramos el espacio vectorial*

$$R^{\perp} = \langle \{ f \in (V^*)^{(a)} \ / \ f(R_a) = 0\} \cup \{ g \in (V^*)^{(b)} \ / \ g(R_b) = 0\} \rangle.$$

*Se define el **álgebra dual de** A como $A^! = \frac{T(V^*)}{\langle R^{\perp}\rangle}$, donde $\langle R^{\perp}\rangle$ es el ideal bilátero generado por $R^{\perp}$.*

Observación 6.2. *Como $R^{\perp} \subseteq (V^*)^{(a)} \oplus (V^*)^{(b)}$, $A^!$ es una k-álgebra graduada y (a, b)-homogénea.*

Fijamos una base $\{v_m\}_{m\in\mathcal{I}}$ de V y sea $\{v_m^*\}_{m\in\mathcal{I}}$ la base dual de V^*. Utilizaremos el elemento canónico $\xi = \sum\limits_m v_m \otimes v_m^* \in V \otimes V^*$. Notemos que en $T(V \oplus V^*)$, $\xi^a = \big(\sum\limits_m v_m \otimes v_m^*\big)^a = \sum\limits_{j\,=\,(j_1,\cdots,j_a)} v_{j_1}\cdots v_{j_a} \otimes v_{j_1}^* \cdots v_{j_a}^*$.

El complejo $\tilde{K}(A)$ es

$$\cdots \longrightarrow A\otimes(A^{!^*}_{n_a(i)} \oplus A^{!^*}_{n_b(i)}) \longrightarrow A\otimes(A^{!^*}_{n_a(i-1)} \oplus A^{!^*}_{n_b(i-1)}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow A\otimes(A^{!^*}_a \oplus A^{!^*}_b) \longrightarrow A\otimes V \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

con diferencial dada de la siguiente manera: ξ actúa en $A \otimes A^{!^*}_n$ a derecha por $(\overline{\alpha} \otimes f) \cdot \xi = \sum\limits_m \overline{\alpha v_m} \otimes f v_m^*$ donde $f v_m^* \in A^{!^*}_{n-1}$ es tal que si $g \in A^!_{n-1} = \frac{(V^*)^{(n-1)}}{\langle R^{\perp}_{n-1}\rangle}$, $f v_m^*(g) = f(v_m^* g)$. Sea entonces

$$d_i : A \otimes (A^{!^*}_{n_a(i)} \oplus A^{!^*}_{n_b(i)}) \longrightarrow A \otimes (A^{!^*}_{n_a(i-1)} \oplus A^{!^*}_{n_b(i-1)})$$

definida como sigue considerando la estructura usual de álgebra de $T(V) \otimes T(V^*)$:

- d_1 es la multiplicación.
- Si i es par, sean $\overline{\alpha} \in A$, $f \in A^{!*}_{n_a(i)}$ y $fv^*_{j_1} \cdots v^*_{j_{a-1}}(g) = f(v^*_{j_1} \cdots v^*_{j_{a-1}} g)$ para $g \in A^{!}_{n_a(i-1)}$, entonces $d_i(\overline{\alpha} \otimes f) = (\overline{\alpha} \otimes f) \cdot \xi^{a-1} = \sum_{j=(j_1,\cdots,j_{a-1})} \overline{\alpha v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} f v^*_{j_1} \cdots v^*_{j_{a-1}}$. Observar que $n_a(i-1) + a - 1 = \frac{i-2}{2}a + 1 + a - 1 = \frac{i}{2}a = n_a(i)$. Se define d_i en forma análoga para $\overline{\alpha} \in A$ y $f' \in A^{!*}_{n_b(i)}$.
- Si $i \geq 3$ es impar, sean $\overline{\alpha} \in A$, $f \in A^{!*}_{n_a(i)}$ o $f \in A^{!*}_{n_b(i)}$, entonces $d_i(\overline{\alpha} \otimes f) = (\overline{\alpha} \otimes f) \cdot \xi$. Observar que $n_s(i-1) + 1 = \frac{i-1}{2}s + 1 = n_s(i)$ para $s = a, b$.

Recordemos que $R_a = \langle r_1, \cdots, r_p \rangle$ donde $r_h = \sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \lambda^h_j v_{j_1} \cdots v_{j_a}$ $(1 \leq h \leq p)$. Observemos lo siguiente:

- Si $v_{j_1} \cdots v_{j_a} \in R_a$ entonces $v_{j_1} \cdots v_{j_a} \otimes v^*_{j_1} \cdots v^*_{j_a} = 0$ en $A \otimes A^!$.
- Si $\sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \lambda_j v_{j_1} \cdots v_{j_a} \in R_a$ es no nulo entonces existe al menos un escalar $\lambda_{\tilde{j}}$ no nulo en esta expresión. Luego, en A se satisface que $v_{\tilde{j}_1} \cdots v_{\tilde{j}_a} = -\frac{1}{\lambda_{\tilde{j}}} \sum_{\substack{j=(j_1,\cdots,j_a) \\ j \neq \tilde{j}}} \lambda_j v_{j_1} \cdots v_{j_a}$.

  Vemos que al aplicar $\sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \mu_j v^*_{j_1} \cdots v^*_{j_a}$ resulta

  $$\Big(\sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} \mu_j v^*_{j_1} \cdots v^*_{j_a}\Big)\Big(\sum_{l=(l_1,\cdots,l_a)} \lambda_l v_{l_1} \cdots v_{l_a}\Big) = \sum_{l=(l_1,\cdots,l_a)} \mu_l \lambda_l.$$

  Luego,

  $$\begin{aligned} &\sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} v_{j_1} \cdots v_{j_a} \otimes v^*_{j_1} \cdots v^*_{j_a} \\ &= \Big(-\sum_{\substack{j=(j_1,\cdots,j_a) \\ j \neq \tilde{j}}} \frac{\lambda_j}{\lambda_{\tilde{j}}} v_{j_1} \cdots v_{j_a}\Big) \otimes v^*_{\tilde{j}_1} \cdots v^*_{\tilde{j}_a} + \sum_{\substack{j=(j_1,\cdots,j_a) \\ j \neq \tilde{j}}} v_{j_1} \cdots v_{j_a} \otimes v^*_{j_1} \cdots v^*_{j_a} \\ &= \sum_{\substack{j=(j_1,\cdots,j_a) \\ j \neq \tilde{j}}} v_{j_1} \cdots v_{j_a} \otimes \Big(\frac{-\lambda_j}{\lambda_{\tilde{j}}} v^*_{\tilde{j}_1} \cdots v^*_{\tilde{j}_a} + v^*_{j_1} \cdots v^*_{j_a}\Big). \end{aligned}$$

  Fijemos $\hat{j}$ tal que $\hat{j} \neq \tilde{j}$, entonces

  $$\Big(\frac{-\lambda_{\hat{j}}}{\lambda_{\tilde{j}}} v^*_{\tilde{j}_1} \cdots v^*_{\tilde{j}_a} + v^*_{\hat{j}_1} \cdots v^*_{\hat{j}_a}\Big)\Big(\sum_{l=(l_1,\cdots,l_a)} \lambda_l v_{l_1} \cdots v_{l_a}\Big) = \frac{-\lambda_{\hat{j}}}{\lambda_{\tilde{j}}} \lambda_{\tilde{j}} + \lambda_{\hat{j}} = 0.$$

  Concluimos de este modo que $\sum_{j=(j_1,\cdots,j_a)} v_{j_1} \cdots v_{j_a} \otimes v^*_{j_1} \cdots v^*_{j_a} = 0$ en $A \otimes A^!$.
- Finalmente, si $v_{j_1} \cdots v_{j_a}$ es tal que $\lambda^h_j = 0$ para todo h, $1 \leq h \leq p$, entonces $(v^*_{j_1} \cdots v^*_{j_a})(r_h) = 0$ y por lo tanto, es un funcional nulo sobre R_a.

Deducimos de este modo que $\xi^a = 0$ en $A \otimes A^!$. Por un razonamiento análogo, $\xi^b = 0$. Hemos probado luego que $d^2 = 0$. Por lo tanto, $\tilde{K}(A)$ es un complejo con diferencial d.

Probemos ahora que $\tilde{K}(A)$ es isomorfo al complejo de Koszul (4.3.2). Vimos en la Sección §4.6, que

$$A^!_n = \frac{(V^*)^{(n)}}{\langle \sum\limits_{j+l+a=n} (V^*)^{(j)} \otimes R_a^\perp \otimes (V^*)^{(l)}, \sum\limits_{s+t+b=n} (V^*)^{(s)} \otimes R_b^\perp \otimes (V^*)^{(t)} \rangle}.$$

Existen entonces morfismos:

$$\begin{array}{ccc}
K_0 = A & \xrightarrow{\quad f_0 \quad} & (\tilde{K}(A))_0 = A \\
K_1 = A \otimes V & \xrightarrow{\quad f_1 \quad} & (\tilde{K}(A))_1 = A \otimes V \\
\vdots & & \vdots \\
K_i = A \otimes (J^a_{n_a(i)} \oplus J^b_{n_b(i)}) & \xrightarrow{f_i} & (\tilde{K}(A))_i = A \otimes (A^{!^*}_{n_a(i)} \oplus A^{!^*}_{n_b(i)}),
\end{array}$$

definidos por $f_0 = 1_A$, $f_1 = 1_{A\otimes V}$ y si $i \geq 2$, f_i es la restricción a $(K_i)_n$ del morfismo lineal $f_i(\overline{\alpha} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_n}) = \overline{\alpha} \otimes v^{**}_{j_1} \cdots v^{**}_{j_n}$. Como $V \simeq (V^*)^*$, f_i es un isomorfismo.

Veamos ahora la conmutatividad del diagama:

$$\begin{tikzcd}
K_i \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d, "f_i"] & K_{i-1} \arrow[d, "f_{i-1}"] \\
(\tilde{K}(A))_i \arrow[r, "d_i"] & (\tilde{K}(A))_{i-1}.
\end{tikzcd}$$

Caso 1: Sea $i = 1$; es decir,

$$\begin{tikzcd}
A \otimes V \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "f_1"] & A \arrow[d, "f_0"] \\
A \otimes V \arrow[r, "d_1"] & A.
\end{tikzcd}$$

Entonces $f_0\big(\delta_1\big(\sum\limits_j \overline{\alpha_j} \otimes v_j\big)\big) = f_0\big(\sum\limits_j \overline{\alpha_j v_j}\big) = \sum\limits_j \overline{\alpha_j v_j} = d_1\big(\sum\limits_j \overline{\alpha_j} \otimes v_j\big) = d_1\big(f_1\big(\sum\limits_j \overline{\alpha_j} \otimes v_j\big)\big)$.

Caso 2: Sea $i \geq 2$ par, el cuadrado es de la forma

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (J^a_{\frac{i}{2}a} \oplus J^b_{\frac{i}{2}b}) \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d, "f_i"] & A \otimes (J^a_{\frac{i-2}{2}a+1} \oplus J^b_{\frac{i-2}{2}b+1}) \arrow[d, "f_{i-1}"] \\
A \otimes (A^{!^*}_{\frac{i}{2}a} \oplus A^{!^*}_{\frac{i}{2}b}) \arrow[r, "d_i"] & A \otimes (A^{!^*}_{\frac{i-2}{2}a+1} \oplus A^{!^*}_{\frac{i-2}{2}b+1}).
\end{tikzcd}$$

En este caso, $f_{i-1}(\delta_i(\overline{\alpha} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}})) = f_{i-1}(\overline{\alpha v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}}) = \overline{\alpha v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v^{**}_{j_a} \cdots v^{**}_{j_{\frac{i}{2}a}}$. Por otro lado, $d_i(f_i(\overline{\alpha} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}})) = d_i(\overline{\alpha} \otimes v^{**}_{j_1} \cdots v^{**}_{j_{\frac{i}{2}a}}) = (\overline{\alpha} \otimes v^{**}_{j_1} \cdots v^{**}_{j_{\frac{i}{2}a}}) \cdot \xi^{a-1} = \sum\limits_{h=(h_1,\cdots,h_{a-1})} \overline{\alpha v_{h_1} \cdots v_{h_{a-1}}} \otimes v^{**}_{j_1} \cdots v^{**}_{j_{\frac{i}{2}a}}(v^*_{h_1} \cdots v^*_{h_{a-1}})$, donde si consideramos $g \in V^{(a-1)}$, $v^{**}_{j_1} \cdots v^{**}_{j_{\frac{i}{2}a}}(v^*_{h_1} \cdots v^*_{h_{a-1}})(g) = v^{**}_{j_1} \cdots v^{**}_{j_{\frac{i}{2}a}}(v^*_{h_1} \cdots v^*_{h_{a-1}} g)$, que se anula excepto en el caso en que $v_{h_1}^* = v_{j_1}^*, \cdots, v_{h_{a-1}}^* = v_{j_{a-1}}^*$ y $g = v_{j_a}^* \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}}^*$ salvo escalares. La suma resulta $\overline{\alpha v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_1}^{**} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}}^{**}(v_{j_1}^* \cdots v_{j_{a-1}}^*) = \overline{\alpha v_{j_1} \cdots v_{j_{a-1}}} \otimes v_{j_a}^{**} \cdots v_{j_{\frac{i}{2}a}}^{**}$. Análogamente se sigue con el sumando que involucra a b.

Caso 3: Sea $i \geq 3$ impar, el diagrama es

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (J^a_{\frac{i-1}{2}a+1} \oplus J^b_{\frac{i-1}{2}b+1}) \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d, "f_i"] & A \otimes (J^a_{\frac{i-1}{2}a} \oplus J^b_{\frac{i-1}{2}b}) \arrow[d, "f_{i-1}"] \\
A \otimes (A^{!^*}_{\frac{i-1}{2}a+1} \oplus A^{!^*}_{\frac{i-1}{2}b+1}) \arrow[r, "d_i"] & A \otimes (A^{!^*}_{\frac{i-1}{2}a} \oplus A^{!^*}_{\frac{i-1}{2}b}).
\end{tikzcd}$$

Luego, $f_{i-1}(\delta_i(\overline{\alpha} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}})) = f_{i-1}(\overline{\alpha v_{j_1}} \otimes v_{j_2} \cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}}) = \overline{\alpha v_{j_1}} \otimes v_{j_2}^{**} \cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}}^{**}$. Por otro lado, $d_i(f_i(\overline{\alpha} \otimes v_{j_1} \cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}})) = d_i(\overline{\alpha} \otimes v_{j_1}^{**} \cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}}^{**}) = (\overline{\alpha} \otimes v_{j_1}^{**} \cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}}^{**}) \cdot \xi = \sum_m \overline{\alpha v_m} \otimes v_{j_1}^{**} \cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}}^{**}(v_m^*)$, donde $v_{j_1}^{**} \cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}}^{**}(v_m^*)(g) = v_{j_1}^{**} \cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}}^{**}(v_m^* g)$, que se anula excepto en el caso en que $v_m^* = v_{j_1}^*$ y $g = v_{j_2}^* \cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}}^*$, salvo multiplicación por escalares. Es decir, la suma resulta $\overline{\alpha v_{j_1}} \otimes v_{j_1}^{**} \cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}}^{**}(v_{j_1}^*) = \overline{\alpha v_{j_1}} \otimes v_{j_2}^{**} \cdots v_{j_{\frac{i-1}{2}a+1}}^{**}$. Análogamente se prueba con el otro sumando.

Hemos verificado luego que los complejos son isomorfos.

A partir de ahora consideraremos un álgebra (a, b)-Koszul A. Nuestro objetivo es describir explícitamente el álgebra de Yoneda de A, $E(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Ext}_A^n(k, k)$.

Tomamos la resolución de k dada por el complejo $\tilde{K}(A) = (P_\bullet, d)$ donde $\varepsilon : A \to k$ es el morfismo usual. De esta manera, para $i \geq 0$, $P_i = A \otimes (A^{!^*}_{n_a(i)} \oplus A^{!^*}_{n_b(i)})$. Como P_i es un A-módulo graduado 2-puro en grados $n_a(i)$ y $n_b(i)$, resulta que el espacio vectorial $\mathrm{Hom}_A(P_i, k)$ también es graduado y 2-puro en grados $-n_a(i)$ y $-n_b(i)$. Luego, $\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, k)$ es un complejo de k-módulos graduados con diferencial nula debido a la graduación. Podemos identificar los espacios vectoriales $\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, k)$ y $A^!_{n_a(i)} \oplus A^!_{n_b(i)}$ mediante los isomorfismos canónicos.

Entonces, $(E(A))_i$ es 2-concentrado en grados $n_a(i)$ y $n_b(i)$.

Sean $f \in A^!_{n_a(i)}$ y $g \in A^!_{n_a(j)}$ y notemos por $f \bullet g \in A^!_{n_a(i)+n_a(j)}$ a su producto de Yoneda. Para describir este producto utilizaremos el isomorfismo antes descripto y el complejo de Koszul.

Proposición 6.3. *Sea A un álgebra (a, b)-Koszul. Sean $f \in \mathrm{Hom}_A(P_i, k)$ y $g \in \mathrm{Hom}_A(P_j, k)$. Si i y j son impares, entonces $f \bullet g = 0$. Si i o j es par, entonces para $s = a, b$, $\overline{\alpha} \in A$, $v_{l_h} \in V$, $1 \leq h \leq n_s(i + j)$,*

$$\begin{aligned}
&(f \bullet g)\Big(\sum_{l = (l_1, \cdots, l_{n_s(i+j)})} \overline{\alpha} \otimes v_{l_1} \cdots v_{l_{n_s(i+j)}}\Big) \\
&= f\Big(\sum_{l = (l_1, \cdots, l_{n_s(i+j)})} \overline{\alpha} \otimes v_{l_1} \cdots v_{l_{n_s(i)}} g(1 \otimes v_{l_{n_s(i)+1}} \cdots v_{l_{n_s(i+j)}})\Big).
\end{aligned}$$

Demostración. Como A es un álgebra graduada y $A_0 = k$, existen morfismos canónicos de k-álgebras $\iota : k \to A$ y $\pi : A \to k$. Además, observemos que

- Si i y j son pares, entonces para $s = a, b$, $n_s(i) + n_s(j) = \frac{i}{2}s + \frac{j}{2}s = \frac{i+j}{2}s = n_s(i + j)$.

- Si i es par y j es impar, entonces para $s=a,b$, $n_s(i)+n_s(j)=\frac{i}{2}s+\frac{j-1}{2}s+1=\frac{i+j-1}{2}s+1=n_s(i+j)$.

Luego, tiene sentido la fórmula enunciada para definir $f\bullet g$.

Si i y j son impares, por el Corolario 5.24, el producto de Yoneda de f y g es nulo.

Supongamos ahora que i o j es par y sea $g: P_j \to k$. Levantamos g a $g_0: P_j \to A = P_0$ como $g_0=\iota\circ g$ y continuamos el levantamiento, para $s=a,b$, definiendo $g_h^s : P_{j+h}^s = A\otimes J^s_{n_s(j+h)} \to P_h^s$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g_h^s\big(&\sum_{l=(l_1,\cdots,l_{n_s(j+h)})} \overline{\alpha}\otimes v_{l_1}\cdots v_{l_{n_s(j+h)}}\big)\\ =&\sum_{l=(l_1,\cdots,l_{n_s(j+h)})} \overline{\alpha}\otimes v_{l_1}\cdots v_{l_{n_s(h)}} g_0(1\otimes v_{l_{n_s(h)+1}}\cdots v_{l_{n_s(j+h)}}).\end{aligned}$$

Verifiquemos la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} P_{j+h}^s \arrow[r, "\delta_{j+h}"] \arrow[d, "g_h^s"] & P_{j+h-1}^s \arrow[d, "g_{h-1}^s"] \\ P_h^s \arrow[r, "\delta_h"] & P_{h-1}^s. \end{tikzcd}$$

- Si $j+h$ es impar, entonces

$$\begin{aligned} &g_{h-1}^s\big(\delta_{j+h}\big(\sum_{l=(l_1,\cdots,l_{n_s(j+h)})} \overline{\alpha}\otimes v_{l_1}\cdots v_{l_{n_s(j+h)}}\big)\big) = g_{h-1}^s\big(\sum_{l=(l_1,\cdots,l_{n_s(j+h)})} \overline{\alpha v_{l_1}}\otimes v_{l_2}\cdots v_{l_{n_s(j+h)}}\big)\\ &=\sum_{l=(l_1,\cdots,l_{n_s(j+h)})} \overline{\alpha v_{l_1}}\otimes v_{l_2}\cdots v_{l_{n_s(h)}} g_0^s(1\otimes v_{l_{n_s(h)+1}}\cdots v_{l_{n_s(j+h)}}).\end{aligned}$$

- Si $j+h$ es par, entonces

$$\begin{aligned} &g_{h-1}^s\big(\delta_{j+h}\big(\sum_{l=(l_1,\cdots,l_{n_s(j+h)})} \overline{\alpha}\otimes v_{l_1}\cdots v_{l_{n_s(j+h)}}\big)\big)\\ &= g_{h-1}^s\big(\sum_{l=(l_1,\cdots,l_{n_s(j+h)})} \overline{\alpha v_{l_1}\cdots v_{l_{s-1}}}\otimes v_{l_s}\cdots v_{l_{n_s(j+h)}}\big)\\ &=\sum_{l=(l_1,\cdots,l_{n_s(j+h)})} \overline{\alpha v_{l_1}\cdots v_{l_{s-1}}}\otimes v_{l_s}\cdots v_{l_{n_s(h)}} g_0^s(1\otimes v_{l_{n_s(h)+1}}\cdots v_{l_{n_s(j+h)}}).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} &\delta_h\big(g_h^s\big(\sum_{l=(l_1,\cdots,l_{n_s(j+h)})} \overline{\alpha}\otimes v_{l_1}\cdots v_{l_{n_s(j+h)}}\big)\big) =\\ &\delta_h\big(\sum_{l=(l_1,\cdots,l_{n_s(j+h)})} \overline{\alpha}\otimes v_{l_1}\cdots v_{l_{n_s(h)}} g_0^s(1\otimes v_{l_{n_s(h)+1}}\cdots v_{l_{n_s(j+h)}})\big).\end{aligned}$$

Si h es impar, este elemento es $\sum_{l=(l_1,\cdots,l_{n_s(j+h)})} \overline{\alpha v_{l_1}}\otimes v_{l_2}\cdots v_{l_{n_s(h)}} g_0^s(1\otimes v_{l_{n_s(h)+1}}\cdots v_{l_{n_s(j+h)}})$, y si h es par, resulta igual a $\sum_{l=(l_1,\cdots,l_{n_s(j+h)})} \overline{\alpha v_{l_1}\cdots v_{l_{s-1}}}\otimes v_{l_s}\cdots v_{l_{n_s(h)}} g_0^s(1\otimes v_{l_{n_s(h)+1}}\cdots v_{l_{n_s(j+h)}})$. Por lo tanto, la afirmación vale si j es par. En el caso en que j es impar, $j = 2t+1$, por la Proposición 5.18

$$\operatorname{Ext}^i_A(k,k)\operatorname{Ext}^{2t+1}_A(k,k) = \operatorname{Ext}^i_A(k,k)\operatorname{Ext}^1_A(k,k)\operatorname{Ext}^{2t}_A(k,k) = \operatorname{Ext}^{i+1}_A(k,k)\operatorname{Ext}^{2t}_A(k,k)$$

y razonamos en forma análoga a lo anterior.

Luego, como el producto de Yoneda $f \bullet g$ está determinado por las componentes $f \circ g_i^a$ y $f \circ g_i^b$, resulta la proposición. ☐

6.2 Álgebra de Yoneda de un álgebra (a,b)-cuasi Koszul

Sea A una k-álgebra graduada conexa. Existen propiedades válidas para un álgebra A que se verifican también para su álgebra de Yoneda $E(A) = \bigoplus_{n,\,m} \operatorname{Ext}^{n,m}_A(k,k)$, que es bigraduada. Estas propiedades han sido estudiadas en muchos contextos, como por ejemplo: [GMV1], [LPWZ], [MV] y [P]. En particular, existen clases de álgebras para las cuales $E(A)$ hereda buenas propiedades de A. La clase de álgebras de Koszul es quizás una de las más conocidas y estudiadas en este sentido.

Es sabido que el álgebra de Yoneda de un álgebra de Koszul es Koszul y que luego de una regraduación adecuada el álgebra de Yoneda de un álgebra N-Koszul (con $N \geq 3$) también es de Koszul. (ver [GMV1] y [GMMVZ] respectivamente). Las álgebras $\mathcal{K}_2$ son una generalización de las álgebras de Koszul y se esperaría que el álgebra de Yoneda de un álgebra $\mathcal{K}_2$ sea también $\mathcal{K}_2$. Sin embargo, en [CPS] se muestra un contraejemplo. El álgebra considerada en ese contraejemplo no es (a,b)-cuasi Koszul.

En esta sección exhibiremos un ejemplo de álgebra (a,b)-cuasi Koszul cuya álgebra de Yoneda no es $\mathcal{K}_2$.

Recordemos la **construcción bar**, para más detalles ver por ejemplo [PP].

Supongamos que $A = k \oplus A_+$, donde $A_+ = \bigoplus_{n\,\geq\,1} A_n$. Para todo A-módulo a izquierda graduado M se tiene una resolución libre, llamada la **resolución bar normalizada** que notaremos $\tilde{Bar}_\bullet(A,M)$:

$$\cdots \longrightarrow A \otimes A_+ \otimes A_+ \otimes M \longrightarrow A \otimes A_+ \otimes M \longrightarrow A \otimes M \longrightarrow 0,$$

donde $\tilde{Bar}_n(A,M) = A \otimes A_+^{\otimes n} \otimes M$ y la diferencial está dada por

$$\partial(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m) = \sum_{i\,=\,1}^{n} (-1)^{i+1} a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1}a_i \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m + (-1)^n a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n m.$$

Como $\tilde{Bar}_\bullet(A,M)$ es una resolución libre de M, para todo A-módulo a izquierda N,

$$\operatorname{Ext}^n_A(M,N) = \operatorname{H}^n(\operatorname{Hom}_A(\tilde{Bar}_\bullet(A,M),N)) = \operatorname{H}^n(Cob^\bullet(A,M,N))$$

donde $Cob^\bullet(A,M,N) = \operatorname{Hom}_A(\tilde{Bar}_\bullet(A,M),N) \simeq \operatorname{Hom}_k(A_+^{\otimes\bullet} \otimes M, N)$. Esta identificación es compatible con la graduación interna del álgebra.

Además, si M y N son A-módulos a derecha y a izquierda respectivamente,

$$\operatorname{Tor}^A_n(M,N) = \operatorname{H}_n(Bar_\bullet(M,A,N)),$$

donde $Bar_\bullet(M,A,N) = M \otimes_A \tilde{Bar}_\bullet(A,N)$.

La **comultiplicación**, dual al producto de Yoneda, está dada a nivel de los complejos bar por la siguiente fórmula:

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & M \otimes A_+^{\otimes n} \otimes A_+^{\otimes n'} \otimes N & \to & (M \otimes A_+^{\otimes n} \otimes P) \otimes (P^* \otimes A_+^{\otimes n'} \otimes N) \\ & m \otimes x \otimes y \otimes l & \mapsto & m \otimes x \otimes id_P \otimes y \otimes l, \end{array}$$

donde P es un A-módulo a izquierda libre y finitamente generado e $id_P \in P \otimes_k P^*$ (refiriéndonos al elemento correspondiente a id_P por la adjunción).

Ejemplo. Sea V un k-espacio vectorial con base $\{r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$. Consideramos $A = T(V)/I$, donde I es el ideal bilátero generado por el subespacio $\mathcal{R}$, con

$$\mathcal{R} = \langle\{vwx, u^3vw, tu^3v, t^2u^3, zt^3u, rs^3y, r^3s^2, xr^3s, wxr^3\}\rangle.$$

Como A es un álgebra monomial y $A_0 = k$, aplicaremos el Teorema 5.5 para ver que es $\mathcal{K}_2$. Se pueden calcular:

$$\begin{array}{lll} L(r) = \{wxr^2\}, & L(s) = \{r^3s, xr^3\}, & L(t) = \emptyset, \\ L(u) = \{t^2u^2, zt^3\}, & L(v) = \{tu^3\}, & L(w) = \{u^3v\}, \\ L(x) = \{vw\}, & L(y) = \{rs^3\}, & L(z) = \emptyset, \\ L(wxr^2) = \emptyset, & L(r^3s) = \{x\}, & L(xr^3) = \{w\}, \\ L(t^2u^2) = \emptyset, & L(zt^3) = \emptyset, & L(tu^3) = \{t\}, \\ L(u^3v) = \{t\}, & L(vw) = \{u^3\}, & L(rs^3) = \{r\}, \\ L(u^3) = \{t^2\}, & L(t^2) = \emptyset. & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} S_1 = \{r,s,t,u,v,w,x,y,z\}, & S_2 = \{wxr^2, r^3s, xr^3, t^2u^2, zt^3, tu^3, u^3v, vw, rs^3\}, & S_3 = \{u^3\}, \\ S_4 = \{t^2\}, & S_5 = \emptyset. & \end{array}$$

Se verifica fácilmente que para todo $q \in S = \bigcup_{i=1}^{4} S_i$ tal que p es un anulador a izquierda de q se tiene que $\mathrm{gr}(p) = 1$ o $pq \in \mathcal{R}$. Luego, A es $\mathcal{K}_2$ y como es $(3,5)$-homogénea y $A_0 = k$, por la Observación 5.22 y el Teorema 5.23 es $(3,5)$-cuasi Koszul.

Sea $B = E(A)$. A partir de ahora consideraremos sólo el grado cohomológico. La resolución (5.1.1) en este caso es de la forma

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow A[-13] \xrightarrow{M_6} A[-11]^2 \xrightarrow{M_5} A[-8,-10,-8,-10] \xrightarrow{M_4} A[-6]^6 \xrightarrow{M_3} \\ A[-5,-5,-5,-5,-5,-5,-5,-2,-5] \xrightarrow{M_2} A[-1]^9 \xrightarrow{M_1} A \longrightarrow k \longrightarrow 0, \end{array} \tag{6.2.1}$$

donde las diferenciales están dadas por

$$M_1 = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} wxr^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^3s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & xr^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2u^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & zt^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & tu^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u^3v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & vw & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & rs^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} vw & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u^3v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & wxr^2 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} u^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_6 = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denotamos por y^* y z^* a los elementos de una base de B_1 que son duales a y y z en A_1 respectivamente. La base dual de los elementos de la lista de relaciones de R es una base del espacio vectorial B_2. Denotamos α, β y γ los elementos de esta base que son duales a los monomios t^2u^3, vwx y r^3s^2 respectivamente. Utilizando (6.2.1) observamos que:

- $z^*\alpha \in B_3 = \mathrm{Ext}^3_A(k,k) \simeq \mathrm{Hom}_A(P_3,k) = \mathrm{Hom}_A(A[-6]^6,k)$ no es nulo pues $z^*\alpha(z,t,t,u,u,u) = 1$.
- $\beta\gamma \in B_4 = \mathrm{Ext}^4_A(k,k) \simeq \mathrm{Hom}_A(P_4,k) = \mathrm{Hom}_A(A[-8,-10,-8,-10],k)$ no es nulo pues $\beta\gamma(vwx,r^3,s,s) = 1$.
- $z^*\alpha\beta \in B_5 = \mathrm{Ext}^5_A(k,k) \simeq \mathrm{Hom}_A(P_5,k) = \mathrm{Hom}_A(A[-11]^2,k)$ es nulo pues si $zt^2u^3vwx \in A^2$, las posibles formas de escribirlo como par; es decir, $1 \otimes zt^2u^3vwx, z \otimes t^2u^3vwx, zt \otimes tu^3vwx, \cdots, zt^2u^3vw \otimes x, zt^2u^3vwx \otimes 1$, son todas cero.
- En forma análoga al caso anterior, $\beta\gamma y^*$ es nulo.

Por lo descripto antes del ejemplo, $\mathrm{Tor}^B_\bullet(k,k)$ se puede calcular usando el complejo bar:

$$Bar_n(k,B,k) = k \otimes_B B \otimes B_+ \otimes \cdots \otimes B_+ \otimes k = B_+^{\otimes n}.$$

Sea $\eta = z^*\alpha \otimes \beta\gamma \otimes y^* \in B_+^{\otimes 3}$, entonces $\partial(\eta) = z^*\alpha\beta\gamma \otimes y^* - z^*\alpha \otimes \beta\gamma y^* = 0$. Por otro lado, como $\partial(z^* \otimes \alpha \otimes \beta\gamma \otimes y^*) = z^*\alpha \otimes \beta\gamma \otimes y^* - z^* \otimes \alpha\beta\gamma \otimes y^* + z^* \otimes \alpha \otimes \beta\gamma y^* = z^*\alpha \otimes \beta\gamma \otimes y^* - z^* \otimes \alpha\beta\gamma \otimes y^*$ y $\partial(z^*\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \otimes y^*) = z^*\alpha\beta \otimes \gamma \otimes y^* - z^*\alpha \otimes \beta\gamma \otimes y^* + z^*\alpha \otimes \beta \otimes \gamma y^* = z^*\alpha \otimes \beta \otimes \gamma y^* - z^*\alpha \otimes \beta\gamma \otimes y^*$, entonces $\eta \notin \partial(B_+^{\otimes 4})$. Luego, η representa una clase de homología no nula en $\mathrm{Tor}^B_3(k,k)$.

Vemos además que $\partial(-z^*\alpha \otimes \beta \otimes \gamma) = -z^*\alpha\beta \otimes \gamma + z^*\alpha \otimes \beta\gamma = z^*\alpha \otimes \beta\gamma \in \mathrm{Im}\,\partial_3$ y $\partial(z^* \otimes \alpha) = z^*\alpha \in \mathrm{Im}\,\partial_2$. Por lo tanto las clases de $z^*\alpha \otimes \beta\gamma$ y $z^*\alpha$ son nulas en $\mathrm{Tor}^B_2(k,k)$ y $\mathrm{Tor}^B_1(k,k)$ respectivamente. Luego, si aplicamos la comultiplicación:

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & \mathrm{Tor}^B_3(k,k) & \rightarrow & \mathrm{Tor}^B_2(k,k) \otimes \mathrm{Tor}^B_1(k,k) \oplus \mathrm{Tor}^B_1(k,k) \otimes \mathrm{Tor}^B_2(k,k) \\ & \eta & \mapsto & (z^*\alpha \otimes \beta\gamma) \otimes y^* + z^*\alpha \otimes (\beta\gamma \otimes y^*), \end{array}$$

resulta $\Delta(\eta) = 0$. De este modo, Δ no es inyectivo y entonces el morfismo del producto de Yoneda

$$E^2(B) \otimes E^1(B) \oplus E^1(B) \otimes E^2(B) \longrightarrow E^3(B)$$

no es suryectivo. Por lo tanto, $E(B)$ no está generada por $E^1(B)$ y $E^2(B)$ y entonces B no es un álgebra $\mathcal{K}_2$.

Referencias

[A1] Aigner, M. *Combinatorial Theory*. Reprint of the 1979 original. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[A2] Assem, I. *Algèbres et modules*. Masson, Les Presses de l'Université d'Ottawa, 1997.

[AS] Artin, M.; Schelter, W. *Graded algebras of global dimension* 3. Adv. Math. **66** (1987), 171–216.

[ATV] Artin, M.; Tate, J.; Van der Bergh, M. *Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves*. The Grothendieck Festschritf, vol. 1, Birkhäuser, Basel, 1990.

[B1] Berger, R. *Koszulity for nonquadratic algebras*. J. Algebra **239** (2001), 705–734.

[B2] Berger, R. *La catégorie graduèe*. Preprint, (2003). Nueva versión disponible en:
http://webperso.univ-st-etienne.fr/∼rberger/mes-textes.html

[B3] Berger, R. *Koszulity for nonquadratic algebras II*. (2003)
arXiv:math/0301172V1 [math.QA]

[B4] Berger, R. *La catégorie des modules gradués sur une algebre graduèe*. Preprint, (2008).
http://webperso.univ-st-etienne.fr/∼rberger/mes-textes.html

[B5] Bongartz, K. *Algebras and quadratic forms*. J. London Math. Soc. **28** (2) (1983), 461–469.

[B6] Bourbaki, N. *Algèbre homologique, Ch. X, Algèbre*. Paris: Masson Publ., 1980.

[BF] Backelin, J.; Fröberg, R. *Koszul algebra, Veronese subrings and rings with linear resolutions*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **30** (1985), 85–97.

[BG] Berger, R.; Ginzburg, V. *Higher symplectic reflection algebras and non-homogeneous N-Koszul property*. J. Algebra. **304** (2006), no. 1, 577–601.

[BGMS] Buchweitz, R.; Green, E.; Madsen, D.; Solberg, Ø. *Finite Hochschild cohomology without finite global dimension*. Math. Res. Lett. **12** (2005), 805–816.

[BGS1] Beilinson, A.; Ginzburg, V.; Schechman, V. *Koszul duality*. J. Geom. Phys. **5** (1988), 317–350.

[BGS2] Beilinson, A.; Ginzburg, V.; Soergel, W. *Koszul duality patterns in representation theory*. J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 2, 473–527.

[BMa] Berger, R.; Marconnet, N. *Koszul and Gorestein properties for homogeneous algebras*. Algebr. Represent. Theory **9** (2006), no. 1, 67–97.

[BMu] Buttafuoco, E.; Musti, R. *Sui subreticoli distributivi dei reticoli modulari*. Boll. Un. Mat. Ital. **11** (1956), 584–587.

[C] Cartan, H. *Homologie et cohomologie d'une algèbre graduée*. Séminaire Cartan, Paris, 1958/59, exposé 15.

[Ci] Cibils, C. *Rigidity of truncated quiver algebras*. Adv. Math. **79** (1990), 18–42.

[CLS] Cibils, C.; Larrión, F.; Salmerón, N. *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones*. Monografías del Inst. de Matemática de la UNAM, Universidad Nacional Autónoma de México **11**, 1982.

[CPS] Cassidy, T.; Phan, C.; Shelton, B. *The Yoneda algebra of a $\mathcal{K}_2$ algebra not need be another $\mathcal{K}_2$ algebra*. (2008)

arXiv:math/0810.4656V1 [math.RA]

[CS] Cassidy, T.; Shelton, B. *Generalizing the notion of Koszul algebra*. Math. Z. **260** (2008), no. 1, 93–114.

[E] Eisenbud, D. *Conmutative algebra with a view toward algebraic geometry*. GTM **150**. Springer, 1995.

[F] Fröberg, R. *Koszul Algebras*, In: *Advances in Commutative Ring Theory*. Proceedings of the 3rd International Conference, Fez, Lect. Notes Pure Appl. Math. **205**, Marcel Dekker, New York, (1999), 337–350.

[FV] Fløystad, G.; Vatne, J.E. *PBW-deformations of N-Koszul algebras*, J. Algebra **302** (1) (2006), 116–155.

[GM] Green, E.; Marcos, E. *d-Koszul algebras, 2-d determined algebras and 2-d-Koszul algebras*. (2008)

arXiv:math0812.3408 [math.RA]

[GMMVZ] Green, E.; Marcos, E.; Martínez-Villa, R.; Zhang, P. *D-Koszul algebras*. J. Pure Appl. Algebra **193** (2004), no. 1-3, 141–162.

[GMV1] Green, E.; Martínez-Villa, R. *Koszul and Yoneda algebras*. Representation theory of algebras (Cocoyoc, 1994), 247–297, CMS Conf. Proc., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[GMV2] Green, E.; Martínez-Villa, R. *Koszul and Yoneda algebras II*. Representation theory of algebras (Geiranger, 1996), 227–244, CMS Conf. Proc., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[GSZ] Green, E.; Solberg, Ø.; Zacharia, D. *Minimal projective resolutions*. Trans. Amer. Mat. Soc. **353** (2001), 2915–2939.

[H] Han, Y. *Hochschild (co)homology dimension*. J. London Math. Soc. **73** (2006), no. 3, 657–668.

[HL] Hai, P.; Lorenz, M. *Koszul algebras and the quantum MacMahon master theorem*. Bull. Lond. Math. Soc. **39** (2007), no. 4, 667–676.

[J] Jónsson, B. *Distributive sublattices of a modular lattice*. Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 682–688.

[LPWZ] Lu, D.; Palmieri, J.; Wu, Q.; Zhang, J. *Koszul equivalences in A_∞-algebras*. New York J. Math. **14** (2008), 325–378.

[M1] Manin, Y. *Some remaks on Koszul algebras and quantum groups*. Ann. Inst. Fourier **37** (1987), 191–205.

[M2] Manin, Y. *Quantum groups and non-conmutative geometry*. Centre de Recherches Mathématiques de Montréal, 1988.

[MV] Martínez-Villa, R. *Skew group algebras and their Yoneda algebras*. Math. J. Okayama Univ. **43** (2001), 1–16.

[O] Öre, O. *On the foundation of abstract algebra I*. Ann. of Math. (2) **36** (1935), 406–437.

[P] Priddy, S. *Koszul resolutions*. Trans. Amer. Math. Soc. **152** (1970) , 39–60.

[PP] Polishchuk, A.; Positselski, L. *Quadratic algebras*, University Lecture Series, **37**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[W] Weibel, C. *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **38**. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[Z] Zacharia, D. *Ext and Koszul algebras*. Algebra Seminar, Syracuse University. Preprint (2000).