UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Representación integral de funciones holomorfas en espacios de Banach

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Damián Pinasco

Director de tesis: Dr. Ignacio Zalduendo.
Consejero de estudios: Dr. Carlos Cabrelli.

Buenos Aires, 2008.

página en blanco

Representación integral de funciones holomorfas en espacios de Banach

Resumen La fórmula integral de Cauchy no tiene una versión infinito-dimensional. Si E es un espacio de Banach, y $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, dados $x \in E$ y $|z| < r$, puede escribirse (pág. 148 [9]):

$$f(zx) = \int_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda x)}{\lambda - z}\, d\lambda.$$

Esta es la fórmula de Cauchy aplicada en cada dirección fija.

Ha habido diversos intentos por dar representaciones de tipo integral para funciones analíticas sobre un espacio de Banach. Así, por ejemplo, S. Dineen [8] define polinomios homogéneos de tipo integral:

$$P(x) = \int_{B_{E'}} \gamma(x)^k \, d\mu(\gamma).$$

Aquí la integración es sobre la bola unidad del dual del espacio, utilizando una medida regular de Borel μ. También se han definido funciones holomorfas de tipo integral [7]. En estas construcciones se integra sobre el dual del espacio respecto a una medida que "representa" a la función, pero que no está unívocamente determinada y por lo tanto no está caracterizada.

En este trabajo se presentan dos fórmulas integrales con las cuales es posible representar funciones holomorfas sobre un espacio de Banach E, o sobre su bola unidad, del siguiente tipo:

$$f(z) = \int_X K(z,x)\, f^*(x)\, dW(x),$$

para $X = E'$, W una medida de Wiener en los borelianos de X, K un núcleo integral y f^* una transformada de la función f. Se estudian propiedades de las funciones representables y en el caso en que el espacio E es de Hilbert, se obtiene una descripción alternativa de los polinomios integrales utilizando una medida "universal" y una transformada de los mismos.

Palabras Claves: Representación integral; Fórmula integral de Cauchy; Funciones holomorfas; Medida de Wiener; Medidas Gaussianas.

página en blanco

Integral representation of holomorphic functions on Banach spaces.

Abstract The Cauchy integral formula has no true analogue in infinite-dimensional holomorphy. Let E a Banach space, $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ a holomorphic function, given $x \in E$ and $|z| < r$, we have (pag. 148, [9]):

$$f(zx) = \int_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda x)}{\lambda - z}\, d\lambda.$$

The usual generalization, though quite useful, is essentially the one-dimensional formula in each direction.

Integral expressions valid for some homogeneous polynomials and some holomorphic functions on a Banach space E have been proposed, all of which involve integration over the dual space E' rather than E. An integral k-homogeneous polynomial over E [8], for example, is

$$P(x) = \int_{B_{E'}} \gamma(x)^k\, d\mu(\gamma).$$

In this expression, integration is over the unit ball of E' and μ is a regular Borel measure. An integral holomorphic function over E [7], is defined in a similar way. The measure μ is said to represent the function f, but there are many such representing μ's, and little has been said about them.

We discuss the problem of integral representation of analytic functions over a complex Banach space E or its unit ball. We obtain two integral representations of the form

$$f(z) = \int_X K(z,x)\, f^*(x)\, dW(x),$$

where $X = E'$, W is a Wiener measure on X, K is an integral kernel and f^* is a transformation of f. We study properties of the space of representable functions and when E is a Hilbert space, we give an alternative representation for integral polynomials using a "universal" Wiener measure and a transformation of them.

Keywords: Integral representation; Cauchy integral formula; Holomorphic functions; Wiener measure; Gaussian measure.

página en blanco

Agradecimientos

A Nacho, por confiar en mí y por su inagotable paciencia. Por todo el tiempo que dedicó para que este trabajo sea posible y porque en los peores momentos siempre tuvo una palabra de aliento.

A la UBA y al Conicet, por haberme brindado soporte a través de sus becas.

A los Doctores Enrique Boasso, Carlos Cabrelli y Ricardo Durán por su invaluable ayuda. Quiero recordar en este momento y expresar mi gratitud al Dr. Angel Larotonda, quien fuera mi consejero de estudios en el inicio del doctorado.

A las autoridades del Departamento de Matemática, por permitir que este sea mi lugar de trabajo.

A todos los profesores que contribuyeron en mi formación.

A Silvia, Vero, Dani, Nacho y Santiago, que dedicaron horas en el Seminario a escucharme cuando esta tesis eran solamente ideas sueltas.

A mis compañeros de trabajo, en especial a Claudio Schifini con quien compartí largas charlas en las escaleras del Pabellón II.

A Patricia, Guillermo, Enrique, Fernando, Gustavo, Santiago y a los visitantes del Laboratorio δ, por los ratos compartidos “tras la reja”. Junto a ellos, también a Carolina, Gabriela, Daniel P., Ezequiel D., Ezequiel R., Federico, Leandro dP., Leandro V., Leandro Z., Matías G., Santiago L., Santiago M., que hacen del almuerzo mucho más que una comida entre las horas de trabajo.

A mi familia “grande”, porque siempre está.

A vos Flor, mi amor, porque haces que todo esto tenga sentido.

página en blanco

Dedicada a Flor y a mi abuela Hilda.

página en blanco

Índice general

Introducción

La fórmula integral de Cauchy no tiene una versión infinito-dimensional. Si E es un espacio de Banach, y $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, dados $x \in E$ y $|z| < r$, puede escribirse (pág. 148, [9]):

$$f(zx) = \int_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda x)}{\lambda - z}\, d\lambda.$$

Esta es la fórmula de Cauchy aplicada en una dirección fija, esto es una recta compleja, dentro del espacio E. Si bien resulta útil para algunas aplicaciones, resulta claramente insatisfactoria.

Ninguna de las expresiones válidas en dimensión finita, como por ejemplo la fórmula de Cauchy sobre el polidisco o las fórmulas de Szëgo, parecen ser extensible al caso infinito-dimensional.

Ha habido diversos intentos por dar representaciones de tipo integral para funciones analíticas sobre un espacio de Banach. Así, por ejemplo, S. Dineen [8] define polinomios homogéneos de tipo integral como los que pueden escribirse del siguiente modo:

$$P(x) = \int_{B_{E'}} \gamma(x)^k \, d\mu(\gamma).$$

Aquí la integración es sobre la bola unidad del dual del espacio, utilizando una medida regular de Borel μ. También se han definido, de manera análoga, funciones holomorfas de tipo integral [7]. En todas estas construcciones se integra sobre el dual del espacio, o sobre la bola unidad del espacio dual, respecto a una medida que "representa" a la función. Un mismo polinomio, o función holomorfa integral, tiene diferentes medidas que lo representan y no existe una caracterización de estas medidas en términos de la función representada.

En este trabajo se presentan dos fórmulas integrales con las cuales es posible representar funciones holomorfas sobre un espacio de Banach E o sobre su bola unidad, del siguiente tipo:

$$f(z) = \int_X K(z,x)\, f^*(x)\, dW(x),$$

para $X = E'$, W una medida de Wiener en los borelianos de X, K un núcleo integral y f^* una transformada de la función f.

La fórmula integral de Cauchy en $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} \frac{f(\omega)}{\omega - z}\, d\omega,$$

puede ser escrita, cambiando las variables, de la siguiente manera:

$$f(z) = \int_{S^1} \frac{1}{1 - z\overline{\omega}}\, f(\omega)\; dP(\omega),$$

donde P es la medida de Lebesgue normalizada en la circunferencia. También se puede escribir:

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{1 - z\frac{\overline{\omega}}{|\overline{\omega}|}}\, f\left(\frac{\omega}{|\omega|}\right)\, d\mu_1(\omega),$$

donde μ_1 es una medida Gaussiana en $\mathbb{C}$. Si pretendemos generalizar estas fórmulas a $\mathbb{C}^n$ ó a un espacio complejo de dimensión infinita podemos observar que:

En $\mathbb{C}^n$ la primera fórmula se transforma en la fórmula de Cauchy sobre el polidisco, pero en dimensión infinita no es usual tener polidiscos en el espacio, por otro lado la división por $\omega - z$ pierde sentido.

La segunda fórmula requiere integrar sobre la esfera, y el denominador puede interpretarse tomando $\omega \in E'$. Esto, junto con la definición de polinomio integral dan sentido a la definición de "función holomorfa integral" (ver [7]):

$$f : B_E^{\circ} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f(x) = \int_{B_{E'}} \frac{1}{1 - \gamma(x)}\, d\mu(\gamma).$$

En esta expresión, la integración se realiza sobre la bola unidad de E' (la clausura w^* de la esfera unidad) y μ es una medida regular de Borel en $(B_{E'}, w^*)$. Se dice que la medida μ representa a la función f, pero hay muchas medidas representantes para la misma función y no se sabe como describirlas en términos de f, por ejemplo si es posible factorizar $d\mu(\gamma) = \tilde{f}(\gamma) dM(\gamma)$, donde $\tilde{f}$ es alguna transformada de f y M es una medida "universal", es decir la misma para todas las funciones.

En lo siguiente supongamos que las funciones consideradas son L^p-integrables en $\mathbb{C}^n$ respecto a la medida utilizada y que sus desarrollos de Taylor convergen a la función en L^p. Con las notaciones usuales, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ representan multi-índices, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ y para $\omega \in \mathbb{C}^n$, $\omega^\alpha = \omega_1^{\alpha_1} \cdots \omega_n^{\alpha_n}$, si desarrollamos en serie de Taylor las funciones:

$$\frac{1}{1 - \langle z, \omega\rangle} = \sum_{j=0}^{\infty} \langle z, \omega\rangle^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} z^\alpha \overline{\omega}^\alpha \quad \text{y} \quad f(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=k} a_\beta \omega^\beta,$$

y si P es la distribución de probabilidad uniforme sobre S^{2n-1}, la esfera unidad de $\mathbb{C}^n$ o alternativamente pensada en $\mathbb{R}^{2n}$, al integrar obtenemos:

$$\int_{S^{2n-1}} \frac{1}{1-\langle z,\omega\rangle} f(\omega)\, dP(\omega) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=k} \sum_{|\alpha|=j} a_\beta \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \int_{S^{2n-1}} z^\alpha\, \overline{\omega}^\alpha \omega^\beta\, dP(\omega)$$

$$= \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=k} \sum_{|\alpha|=j} a_\beta\, z^\alpha \left(\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \int_{S^{2n-1}} \overline{\omega}^\alpha \omega^\beta\, dP(\omega) \right).$$

Para que resulte

$$f(z) = \int_{S^{2n-1}} \frac{1}{1-\langle z,\omega\rangle} f(\omega)\, dP(\omega),$$

necesitamos, por ejemplo, que

$$\int_{S^{2n-1}} \overline{\omega}^\alpha \omega^\beta\, dP(\omega) = \delta_{\alpha\beta} \frac{\alpha!}{|\alpha|!}.$$

Para saber el valor de esta integral, hacemos el siguiente cálculo:

$$\int_{\mathbb{C}^n} \xi^\beta\, \overline{\xi}^\alpha e^{-\|\xi\|^2} \frac{d\xi}{\pi^n} = \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{C}} \xi_j^{\beta_j}\, \overline{\xi_j}^{\alpha_j}\, e^{-|\xi_j|^2} \frac{d\xi_j}{\pi}.$$

Tomamos coordenadas polares en cada una de las integrales del producto:

$$\prod_{j=1}^{n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \rho^{(\alpha_j+\beta_j)}\, e^{i(\beta_j-\alpha_j)\theta} e^{-\rho^2} \rho\, \frac{d\rho\, d\theta}{\pi} = \prod_{j=1}^{n} \left(\delta_{\alpha_j\beta_j} \int_0^{\infty} \rho^{(\alpha_j+\beta_j)}\, e^{-\rho^2} 2\rho\, d\rho \right),$$

como sólo nos interesa el caso en que $\alpha_j = \beta_j$, de lo contrario la integral es nula, tenemos:

$$\prod_{j=1}^{n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \rho^{(\alpha_j+\beta_j)}\, e^{i(\beta_j-\alpha_j)\theta} e^{-\rho^2} \rho\, \frac{d\rho\, d\theta}{\pi} = \delta_{\alpha\beta} \prod_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} \rho^{2\alpha_j}\, e^{-\rho^2} 2\rho\, d\rho$$

$$= \delta_{\alpha\beta} \prod_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} x^{\alpha_j} e^{-x}\, dx = \delta_{\alpha\beta} \prod_{j=1}^{n} \alpha_j! = \delta_{\alpha\beta}\, \alpha!.$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{C}^n} \xi^\beta\, \overline{\xi}^\alpha e^{-\|\xi\|^2} \frac{d\xi}{\pi^n} = \delta_{\alpha\beta}\, \alpha!.$$

Por otro lado, llamando $d\sigma_{2n}$ al elemento de área de la esfera S^{2n-1}, podemos calcular la misma integral utilizando la fórmula de área:

$$\int_{\mathbb{C}^n} \xi^\beta\, \overline{\xi}^\alpha e^{-\|\xi\|^2} \frac{d\xi}{\pi^n} = \int_0^{\infty} \int_{S^{2n-1}} \left(\prod_{k=1}^{n} \rho^{\beta_k}\, \omega_k^{\beta_k} \right) \left(\prod_{j=1}^{n} \rho^{\alpha_j}\, \overline{\omega_j}^{\alpha_j} \right) e^{-\rho^2} \rho^{2n-1}\, d\sigma_{2n}(\omega)\, \frac{d\rho}{\pi^n}.$$

Esta integral, que toma el valor $\delta_{\alpha\beta}\,\alpha!$, puede expresarse como un producto:

$$\left[\int_{S^{2n-1}} \left(\prod_{k=1}^{n} \omega_k^{\beta_k}\right) \left(\prod_{j=1}^{n} \overline{\omega_j}^{\alpha_j}\right) \, d\sigma_{2n}(\omega)\right] \left[\int_0^\infty \rho^{|\beta|+|\alpha|} e^{-\rho^2} \rho^{2n-1} \, \frac{d\rho}{\pi^n}\right].$$

Notemos que la integral que aparece en el segundo factor no puede ser nula, ya que estamos integrando una función continua y positiva, como además $d\sigma_{2n} = \sigma_{2n}(S^{2n-1})\, dP$, podemos despejar la integral sobre la esfera:

$$\int_{S^{2n-1}} \omega^\beta\, \overline{\omega}^\alpha \, d\sigma_{2n}(\omega) = \sigma_{2n}(S^{2n-1}) \int_{S^{2n-1}} \omega^\beta\, \overline{\omega}^\alpha \, dP(\omega) = \frac{\delta_{\alpha\beta}\,\alpha!}{\displaystyle\int_0^\infty \rho^{|\beta|+|\alpha|}\, e^{-\rho^2}\, \rho^{2n-1}\, \frac{d\rho}{\pi^n}}.$$

Si $\alpha \neq \beta$ esta expresión es nula, por lo que calculamos el denominador sólo en el caso en que los multi-índices coincidan:

$$\int_0^\infty \rho^{2|\alpha|}\, e^{-\rho^2}\, \rho^{2n-1}\, \frac{d\rho}{\pi^n} = \int_0^\infty \rho^{2(|\alpha|+n-1)}\, e^{-\rho^2}\, 2\rho\, \frac{d\rho}{2\pi^n} = \frac{(|\alpha|+n-1)!}{2\pi^n}.$$

Sabemos que el área de la esfera de radio uno en $\mathbb{C}^n$ es $\frac{2\pi^n}{(n-1)!}$, por lo tanto obtenemos finalmente

$$\int_{S^{2n-1}} \omega^\beta\, \overline{\omega}^\alpha \, dP(\omega) = \delta_{\alpha\beta}\, \frac{\alpha!\,(n-1)!}{(|\alpha|+n-1)!}.$$

Resultó entonces

$$\int_{S^{2n-1}} \omega^\beta\, \overline{\omega}^\alpha dP(\omega) = \delta_{\alpha\beta}\, \frac{\alpha!}{|\alpha|!} \binom{k+n-1}{n-1}^{-1} \neq \delta_{\alpha\beta}\, \frac{\alpha!}{|\alpha|!},$$

y por lo tanto la integral no coincide con $f(z)$. Sin embargo esto se puede solucionar si multiplicamos, para compensar, cada término k-homogéneo en la integral por el número combinatorio $\binom{k+n-1}{n-1}$.

Si asignamos este factor al desarrollo de $\dfrac{1}{1-\langle z,\omega\rangle}$, llamando $t = \langle z,\omega\rangle$, resulta:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n-1} \langle z,\omega\rangle^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n-1} t^k = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n-1)!}{k!}\, t^k \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^{k+n-1}) = \frac{1}{(n-1)!}\, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^{k+n-1}\right) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{j=0}^{n-2} t^j\right) = \frac{1}{(n-1)!}\, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{1}{1-t}\right),
\end{aligned}$$

pero esta derivada es exactamente $\dfrac{1}{(1-t)^n} = \dfrac{1}{(1-\langle z,\omega\rangle)^n}$. Obtenemos así el núcleo de Szegö en la esfera:

$$f(z) = \int_{S^{2n-1}} \frac{1}{(1-\langle z,\omega\rangle)^n}\, f(\omega)\, dP(\omega).$$

Si en cambio introducimos este factor en el desarrollo de f obtenemos una transformación f_n de f, y se satisface la fórmula

$$f(z) = \int_{S^{2n-1}} \frac{1}{1 - \langle z, \omega \rangle} f_n(\omega)\, dP(\omega).$$

Tanto el núcleo de Szegö como las transformaciones f_n's pierden sentido cuando la dimensión n crece. Esta visión, entonces, no parece apropiada para el caso infinito dimensional.

Consideremos ahora la tercera fórmula y sigamos los pasos anteriores. Desarrollamos en serie de Taylor las funciones:

$$\frac{1}{1 - z\frac{\overline{\omega}}{|\overline{\omega}|}} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(z \frac{\overline{\omega}}{|\overline{\omega}|} \right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} z^\alpha \left(\frac{\overline{\omega}}{|\overline{\omega}|} \right)^\alpha \quad \text{y} \quad f(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=k} a_\beta\, \omega^\beta.$$

Si $\mu_n = \underbrace{\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_1}_{n-veces}$, en $\mathbb{C}^n$ calculamos

$$\int_{\mathbb{C}^n} \frac{1}{1 - \left\langle z \frac{\overline{\omega}}{\|\overline{\omega}\|} \right\rangle} f(\|\omega\|\, \omega)\, d\mu_n(\omega)$$

$$= \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} \sum_{|\beta|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} a_\beta\, z^\alpha \int_{\mathbb{C}^n} \left(\frac{\overline{\omega}}{\|\overline{\omega}\|} \right)^\alpha (\|\omega\|\omega)^\beta\, d\mu_n(\omega)$$

$$= \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} \sum_{|\beta|=k} a_\beta\, z^\alpha \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \int_{\mathbb{C}^n} \overline{\omega}^\alpha \omega^\beta\, \|\omega\|^{|\beta|-|\alpha|}\, e^{-\|\omega\|^2} \frac{d\omega}{\pi^n}.$$

Como antes, si

$$\int_{\mathbb{C}^n} \overline{\omega}^\alpha \omega^\beta\, \|\omega\|^{|\beta|-|\alpha|}\, e^{-\|\omega\|^2} \frac{d\omega}{\pi^n} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\alpha!}{|\alpha|!},$$

entonces la integral coincide con $f(z)$. Calculemos esta integral, utilizando coordenadas polares en cada copia de $\mathbb{C}$:

$$\int_{\mathbb{C}^n} \overline{\omega}^\alpha \omega^\beta\, \|\omega\|^{|\beta|-|\alpha|}\, e^{-\|\omega\|^2} \frac{d\omega}{\pi^n} =$$

$$\int_{[0,2\pi]^n} \int_{[0,\infty)^n} \left(\prod_{j=1}^{n} \rho_j^{\alpha_j+\beta_j+1} \right) \left(\prod_{k=1}^{n} e^{i(\beta_j-\alpha_j)\theta} \right) \left(\sum_{l=1}^{n} \rho_l^2 \right)^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}} \left(\prod_{m=1}^{n} e^{-\rho_m^2} \right) d\rho' s \frac{d\theta' s}{\pi^n}.$$

Si $\alpha \neq \beta$ la integral angular es cero, de lo contrario el resultado es $(2\pi)^n$. Por lo tanto esta integral resulta

$$\delta_{\alpha\beta} \prod_{j=1}^{n} \int_0^\infty 2\rho_j^{2\alpha_j+1} e^{-\rho_j^2}\, d\rho_j = \delta_{\alpha\beta} \prod_{j=1}^{n} \alpha_j! = \delta_{\alpha\beta}\, \alpha! = \delta_{\alpha\beta} \frac{\alpha!}{|\alpha|!} |\alpha|!.$$

Aquí el factor que aparece es $|\alpha|!$. Nuevamente puede ser compensado multiplicando cada término k-homogéneo en la integral por $1/k!$, que es independiente de la dimensión del espacio. Podemos asignarlo de más de una forma, si lo hacemos en el desarrollo de la serie geométrica:

$$\frac{1}{1 - z\,\frac{\overline{\omega}}{\|\overline{\omega}\|}} \rightsquigarrow e^{\langle z,\omega\rangle/\|\omega\|}$$

ó si lo hacemos en el desarrollo de la función:

$$f(z) \rightsquigarrow f^{\diamondsuit}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{|\beta|=k} a_\beta\, \omega^\beta,$$

esta función $f^{\diamondsuit}$ resulta entera si f tiene radio de convergencia mayor que cero.

Estas ideas nos sugieren, entonces, dos posibles extensiones en $\mathbb{C}^n$,
i) para funciones enteras:

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{\langle z,\omega\rangle/\|\omega\|} f(\|\omega\|\,\omega)\, d\mu_n(\omega) \tag{1}$$

ii) para funciones holomorfas en la bola unidad de $\mathbb{C}^n$:

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}^n} \frac{1}{1 - \left\langle z, \frac{\omega}{\|\omega\|} \right\rangle} f^{\diamondsuit}(\|\omega\|\,\omega)\, d\mu_n(\omega) \tag{B}$$

En la tercera fórmula el rol del factor $\|\omega\|$ es evitar que $1 - \langle z, \omega/\|\omega\|\rangle$ se anule dentro de la bola, por lo tanto, luego de la transformación efectuada y teniendo presente que $\overline{\omega}^\alpha \omega^\beta \|\omega\|^{|\beta|-|\alpha|}$ tiene integral nula si $\alpha \neq \beta$, la fórmula (1) puede modificarse del siguiente modo:

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{\langle z,\omega\rangle} f(\omega)\, d\mu_n(\omega) \tag{A}$$

Estas dos fórmulas (A) y (B), para funciones enteras y para funciones holomorfas en la bola unidad, son las propuestas para generalizar en espacios de Banach de dimensión infinita.

Es sabido que no todos los polinomios continuos sobre un espacio de Banach son integrales, por lo tanto no es razonable esperar que la generalización de cualquiera de las fórmulas integrales, (A) ó (B), sea aplicable a todos los polinomios y funciones holomorfas. En la parte final de este trabajo estudiamos el espacio de funciones que pueden ser representadas de este modo.

Capítulo 1

Polinomios y funciones holomorfas

1.1. Funciones multilineales y polinomios homogéneos

Definiciones

Comencemos recordando que si $E_1, E_2, \ldots, E_k$ y F son espacios vectoriales, una función

$$\Phi : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k \to F$$

es $k-$lineal, o multilineal, si es lineal en cada una de sus k variables. Si los espacios E_i y F son espacios de Banach y Φ es una función k-lineal, se define

$$\|\Phi\| = \sup \{\|\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_k)\|_F : x_1 \in B_{E_1}, x_2 \in B_{E_2}, \ldots, x_k \in B_{E_k}\},$$

donde B_{E_i} es la bola unidad de E_i, para $i = 1, \ldots k$. Con esta definición resulta que $\Phi : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k \to F$ es continua, si y solamente si su norma es finita. Al espacio de aplicaciones multilineales continuas, que resulta completo, se lo nota $\mathcal{L}(E_1, E_2, \ldots, E_k; F)$. Si $E_1 = E_2 = \ldots = E_k = E$, se utiliza la notación $\mathcal{L}(^kE; F)$.
En este último caso, si llamamos $\mathcal{G}_k$ al grupo de permutaciones del conjunto de números naturales $\{1, 2, \ldots k\}$, una aplicación k-lineal se dice simétrica si para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in E^k$ y para toda $\sigma \in \mathcal{G}_k$, resulta

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \Phi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)}).$$

El subespacio de funciones k-lineales simétricas y continuas se nota $\mathcal{L}_s(^kE; F)$.

Definición 1.1.1. *Una función $P : E^k \to F$ es un polinomio homogéneo de grado k, o polinomio k-homogéneo, si existe una aplicación k-lineal $\Phi \in L(^kE; F)$ tal que*

$$P(x) = \Phi(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{k-\ \textit{veces}}) \textit{ para todo } x \in E.$$

Se dice que P es el polinomio asociado a la forma multilineal Φ, y se nota $P = \hat{\Phi}$. Un mismo polinomio puede estar asociado a diferentes funciones multilineales, pero solo una de ellas resulta simétrica. A la única función multilineal simétrica asociada a P se la nota $\check{P}$. Por medio de la fórmula de polarización es posible dar una expresión para $\check{P}$ en términos de P :

$$\check{P}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k=\pm 1} \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k \, P(\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_k x_k)$$

Ejemplos.

1. Considerando $\gamma \in E'$, un ejemplo sencillo de polinomio escalar k-homogéneo se puede dar definiendo $P(x) = \gamma(x)^k$. La función multilineal simétrica asociada es $\check{P}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \gamma(x_1)\gamma(x_2)\ldots\gamma(x_k)$.

2. Para $1 \leq p < \infty$, sea $P : \ell_p \to \mathbb{R}$ definido por $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j^2}{j^2}$. Tomando $\gamma_j \in \ell_q$ la funcional $\gamma_j(x) = x_j/j$, tenemos que $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(x)^2$.

3. La expresión $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2$, define un polinomio $2-$homogéneo en $\ell_2(\mathbb{C})$.

De manera similar a lo hecho para funciones multilineales, si P es un polinomio k-homogéneo, se define

$$\|P\| = \sup_{x \in B_E} \|P(x)\|.$$

P resulta continuo si y sólo si su norma es finita. En este caso vale la desigualdad

$$\|P(x)\| \leq \|P\| \, \|x\|^k \;\; \text{para todo } x \in E.$$

El espacio de polinomios k-homogéneos continuos, con esta norma, resulta un espacio de Banach y será notado $\mathcal{P}(^k E; F)$. Por simplicidad, si F es el cuerpo de escalares, se nota $\mathcal{P}(^k E)$.

A partir de la fórmula de polarización se deduce que un polinomio P, k-homogéneo, es continuo si y sólo si su función multilineal asociada lo es. Además es posible obtener las siguientes desigualdades

$$\|P\| \leq \|\check{P}\| \leq \frac{k^k}{k!} \|P\|.$$

Clases de polinomios

El ejemplo más sencillo de polinomio k-homogéneo da lugar a la definición de polinomio de *tipo finito*.

Definición 1.1.2. *Un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE;F)$ es de tipo finito si para algún $n \in \mathbb{N}$, existen funcionales lineales y continuas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in E'$ y vectores $y_1, y_2, \ldots, y_n \in F$ tales que*

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(x)^k y_j \quad \text{para todo } x \in E.$$

Este espacio se nota $\mathcal{P}_f(^kE;F)$.

El segundo ejemplo dado anteriormente pertenece a la siguiente familia de polinomios, que contiene a $\mathcal{P}_f(^kE;F)$.

Definición 1.1.3. *Un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE;F)$ es nuclear si existen una sucesión de funcionales lineales $\{\gamma_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset E'$, con $\sum_{j=1}^{\infty} \|\gamma_j\|^k < \infty$, y una sucesión de vectores acotados $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset F$, tales que*

$$P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(x)^k y_j \quad \text{para todo } x \in E.$$

Este espacio se nota $\mathcal{P}_N(^kE;F)$.

Ninguno de estos subespacios de polinomios es cerrado, en general, para la norma usual en $P(^kE;F)$. La clausura de cualquiera de estos subespacios da origen al espacio de polinomios *aproximables*, notados $\mathcal{P}_A(^kE;F)$. Sin embargo, definiendo en $\mathcal{P}_N(^kE;F)$ una norma apropiada, se obtiene el espacio de Banach $(\mathcal{P}_N(^kE;F), \|\cdot\|_N)$,

$$\|P\|_N = \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \|\gamma_j\|^k \, \|y_j\| : P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(x)^k y_j \right\}.$$

Espacios de polinomios que contienen a los anteriores son los siguientes:

Definición 1.1.4. *Un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE;F)$ es débilmente continuo si es continuo para la topología débil sobre todo conjunto acotado de E. Este espacio se nota $\mathcal{P}_w(^kE;F)$.*

Definición 1.1.5. *Un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE;F)$ es secuencialmente débil continuo si cada vez que $x_n \xrightarrow{w} x$ en E, entonces $P(x_n) \to P(x)$ en la norma de F. Este espacio se nota $\mathcal{P}_{wsc}(^kE;F)$.*

De las definiciones se sigue la siguiente cadena de inclusiones:

$$\mathcal{P}_f(^kE;F) \subset \mathcal{P}_N(^kE;F) \subset \mathcal{P}_A(^kE;F) \subset \mathcal{P}_w(^kE;F) \subset \mathcal{P}_{wsc}(^kE;F) \subset \mathcal{P}(^kE;F).$$

Notemos que el último ejemplo de la sección anterior no es secuencialmente débil continuo, ya que si tomamos $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la base de ℓ_2, $(e_n)_j = \delta_{nj}$, tenemos que $e_n \xrightarrow{w} 0$, mientras que $P(e_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Otra clase de polinomios es la de *polinomios integrales:*

Definición 1.1.6. *Un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$ es integral si existe una medida μ, boreliana, regular, de variación acotada, definida en $(B_{E'}, w^*)$ a valores en F, tal que*

$$P(x) = \int_{B_{E'}} \gamma(x)^k \, d\mu(\gamma)$$

A este espacio se lo nota $P_I(^kE; F)$.

Se dice que la medida μ representa al polinomio P, un mismo polinomio puede tener diferentes medidas que lo representen. El espacio de polinomios integrales, en general, no es cerrado en $\mathcal{P}(^kE; F)$. Al igual que en el caso *nuclear*, definiendo en $\mathcal{P}_I(^kE; F)$ una norma apropiada, se obtiene un espacio de Banach $(\mathcal{P}_I(^kE; F), \|\cdot\|_I)$,

$$\|P\|_I = \text{ínf}\,\{\|\mu\| : \mu \text{ representa a } P\}\,.$$

Tenemos también una cadena de inclusiones

$$P_N(^kE; F) \subset P_I(^kE; F) \subset P_{wsc}(^kE; F).$$

1.2. Funciones holomorfas

En esta sección notaremos por E y F a espacios de Banach sobre el cuerpo de los números complejos.

Definición 1.2.1. *Dado $z_0 \in E$, una serie de potencias de E en F, alrededor de z_0, es una serie definida por*

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(z - z_0) \quad \textit{para } z \in E,$$

donde $P_k \in \mathcal{P}(^kE, F)$ para todo $k \geq 0$. A los polinomios P_k se los llama coeficientes de la serie.

Definición 1.2.2. *El radio de convergencia de una serie de potencias, alrededor de $z_0 \in E$, es*

$$r = \sup\left\{\rho : \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z - z_0) \textit{ converge uniformemente en } B_\rho(z_0)\right\}$$

Proposición 1.2.3. *Fórmula de Cauchy - Hadamard. El radio de convergencia de una serie de potencias está dado por la expresión*

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \|P_k\|^{1/k}}.$$

Definición 1.2.4. *Dado un abierto $U \subset E$, una función $f : U \to F$ es holomorfa en U, si para todo $z_0 \in U$ existen $\rho > 0$ y una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(z - z_0)$ definida de E en F, alrededor de z_0, tales que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(z - z_0) \to f(z) \text{ uniformemente en } B_\rho(z_0).$$

Para cada $z_0 \in U$, los coeficientes de esta serie son únicos y se la llama *serie de Taylor* de f en z_0. Se nota por $\mathcal{H}(U; F)$ al espacio de funciones holomorfas de U en F.

Observación 1.2.5. *La definición dada corresponde al concepto de función holomorfa dado por Weierstrass, y es equivalente a la siguiente definición (pág. 202, [2]):*

> **Definición 1.2.6.** *Dado un abierto $U \subset E$, $f : U \to F$ es holomorfa en U, si para todo $z_0 \in U$ existe una única aplicación $\mathbb{C}-$lineal y continua $A : E \to F$, tal que*
>
> $$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(z_0 + h) - f(z_0) - A(h)\|}{\|h\|} = 0 \qquad \text{(Fréchet diferenciable).}$$
>
> *Además resulta* $\dfrac{d^k f}{k!} = \check{P}_k$, *o equivalentemente* $\dfrac{\widehat{d}^k f}{k!} = P_k$.

Ejemplos.

1. Dados E, F espacios de Banach, todo polinomio $k-$homogéneo y continuo es una función holomorfa. Si $P \in \mathcal{P}(^k E; F)$ y $z_0 \in E$, podemos escribir (fórmula de Leibniz)

$$P(z) = P(z_0 + z - z_0) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \check{P}(\underbrace{z_0, \dots, z_0}_{k-j}, \underbrace{z - z_0, \dots, z - z_0}_{j}).$$

Por lo tanto, para $0 \le j \le k$, llamando

$$P_j(z - z_0) = \binom{k}{j} \check{P}(\underbrace{z_0, \dots, z_0}_{k-j}, \underbrace{z - z_0, \dots, z - z_0}_{j}) \in \mathcal{P}(^j E; F),$$

se obtiene la escritura $P(z) = \sum_{j=0}^{k} P_j(z - z_0)$, y por ser una suma finita, naturalmente, la convergencia es uniforme en cualquier bola centrada en z_0.

En particular, dado $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$, la diferencial de P :

$$DP : E \to \mathcal{L}(E; F),$$

resulta

$$DP(z_0) = k\check{P}(\underbrace{z_0, \ldots, z_0}_{k-1}, \cdot)$$

2. Tomemos $E = c_0$, $F = \mathbb{C}$, la sucesión de polinomios $P_k \in \mathcal{P}(^kE; F)$ definidos por $P_k(z) = z_k^k$ y su serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(z).$$

Esta serie es puntualmente convergente en E, ya que dado $z \in c_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $|z_n| < 1/2$. Por esto

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} z_k^k \right| \leq \sum_{k=1}^{n_0} \|z\|_\infty^k + \sum_{k=n_o+1}^{\infty} 1/2^k < \infty.$$

Para ver que f es holomorfa, veamos que dado $z_0 \in E$ y $0 < \rho < 1$, el desarrollo de Taylor de f alrededor de z_0 converge uniformemente a $f(z)$ para todo $z \in B_\rho(z_0)$.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} {z_0}_k^{k-j} (z_k - z_{0k})^j \right).$$

Bastaría ver que la última serie está mayorada por una serie numérica absolutamente convergente, pero

$$\left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} {z_0}_k^{k-j} (z_k - z_{0k})^j \right| \leq \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |z_{0k}|^{k-j} \|z - z_0\|_\infty^j \leq (|z_{0k}| + \rho)^k$$

por lo tanto, como $z_0 \in c_0$, podemos tomar ahora $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $k \geq k_0$, entonces $|z_{0k}| < \frac{1-\rho}{2}$. La sucesión $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, definida por

$$\alpha_k = \begin{cases} (|z_{0k}| + \rho)^k & \text{si } k < k_0 \\ \left(\dfrac{1+\rho}{2} \right)^k & \text{si } k \geq k_0 \end{cases}$$

resulta ser mayorante de nuestra serie, y además $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$. Notemos que a pesar de ser f una función entera, el radio de convergencia del desarrollo de Taylor alrededor del origen es

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \|P_k\|^{1/k}} = 1.$$

Llamemos $x_n = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n-veces},0,\ldots,0,\ldots)$, es decir x_n es el vector con las n primeras coordenadas iguales a 1 y el resto nulas. Notemos que, por ejemplo en $z_0 = 0$, el radio de convergencia es 1, pero a pesar de ser $\|x_n\| = 1$, $f(x_n) = n$. Por lo tanto no hay convergencia uniforme en la bola unidad.

Definición 1.2.7. *(Gateaux - holomorfa): Dado un abierto $U \subset E$, una función $f : U \to F$ es G-holomorfa en U, si para todo $z_0 \in U$ y para todo $\omega \in E$ la función definida sobre el abierto $U_{z_0,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} : z_0 + \lambda\omega \in U\} \subset \mathbb{C}$:*

$$U_{z_0,\omega} \to F$$

$$\lambda \to f(z_0 + \lambda\omega)$$

es holomorfa.

Las definiciones de función holomorfa y $G-$holomorfa no son equivalentes. Por ejemplo, toda funcional lineal no continua sobre E resulta G-holomorfa, pero no holomorfa. El siguiente teorema relaciona estas definiciones (pág. 198, [2]):

Teorema 1.2.8. *Dada una función $f : U \to F$, son equivalentes:*
i) f es holomorfa.
ii) f es continua y $G-$holomorfa.

Capítulo 2

Medidas Gaussianas en espacios de Banach

En nuestro camino hacia una fórmula integral para representar funciones holomorfas en un espacio de Banach, necesitamos fijar una medida sobre los borelianos del espacio. En este capítulo introduciremos las definiciones necesarias y enumeraremos las propiedades más salientes de las medidas Gaussianas. Seguiremos el enfoque dado en [16].

2.1. Medidas Gaussianas en espacios de Hilbert reales

Introducción

Recordemos que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ queda caracterizada, salvo múltiplos, por las siguientes propiedades:

1. Toma valores finitos sobre Borelianos acotados.
2. Toma valores positivos sobre abiertos no vacíos.
3. Es invariante por traslaciones.

En dimensión infinita no existen medidas con propiedades análogas a estas. Por ejemplo, en un espacio de Hilbert separable H, si tomamos $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cualquier base ortonormal resulta:

1. Para $n \neq m$, $B_{1/2}(e_n) \cap B_{1/2}(e_m) = \emptyset$,
2. $B_{1/2}(e_n) \subset B_2(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

y por lo tanto

$$\sum_{n\geq 1} \mu\left(B_{1/2}(e_n)\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} B_{1/2}(e_n)\right) \leq \mu\left(B_2(0)\right).$$

Si μ es invariante por traslaciones (o por rotaciones!) y toma valores finitos sobre borelianos acotados, necesitamos que $\mu(B(e_n, 1/2)) = 0$ y por lo tanto existen abiertos no vacíos de medida nula. En forma similar, si queremos que los abiertos no vacíos tengan medida positiva, resulta que hay borelianos acotados de medida infinita.

Sí es posible generalizar la medida Gaussiana de $\mathbb{R}^n$, definida por

$$\Gamma_{n,t}(\Delta) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_\Delta e^{-\|x\|^2/2t} dx \qquad \forall \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

A pesar de esto, se perderán algunas propiedades como por ejemplo la invariancia por rotaciones. En las próximas secciones se incluirán los resultados necesarios para la correcta definición.

2.1.1. Operadores de Hilbert-Schmidt y Operadores de traza

En lo siguiente consideraremos H un espacio de Hilbert separable.

Definición 2.1.1. *Un operador continuo $A : H \to H$, es de Hilbert-Schmidt si para alguna base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H, se tiene que*

$$\sum_{n\geq 1} \|Ae_n\|^2 < \infty.$$

En este caso se define la norma de Hilbert-Schmidt del operador A por

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{n\geq 1} \|Ae_n\|^2 \right)^{1/2}.$$

La buena definición de la norma es consecuencia de la siguiente igualdad, si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos bases ortonormales cualesquiera, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\langle Ae_n, d_m\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\langle e_n, A^*d_m\rangle|^2$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, A^*d_m\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*d_m\|^2.$$

En particular si tomamos en lugar de $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, la misma base $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tenemos que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|Ad_m\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*d_m\|^2,$$

por lo que resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*d_m\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|Ad_m\|^2.$$

Ejemplos.

Tomemos en $\ell_2(\mathbb{C})$ la base ortonormal formada por los vectores $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $e_n(j) = \delta_{n,j}$. Si definimos $A : \ell_2 \to \ell_2$ de manera que:

1. $Ae_n = \dfrac{e_n}{\sqrt{n}}$ para todo $n \geq 1$, el operador A no es de Hilbert-Schmidt.

2. $Ae_n = \dfrac{e_n}{n}$ para todo $n \geq 1$, el operador A es de Hilbert-Schmidt.

Definición 2.1.2. *Un operador $K : H \to H$ es compacto si $\overline{K(\Delta)}$ es compacto en H para todo conjunto $\Delta \subset H$, Δ acotado.*

Ejemplos.

En el ejemplo anterior, ambos operadores resultan compactos. En general vale el siguiente hecho:

Dada una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, tomando $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de ℓ_2, se puede definir $A : \ell_2 \to \ell_2$ de manera que $Ae_n = \alpha_n e_n$ para todo $n \geq 1$. Entonces,
a) El operador A resulta continuo si y sólo si la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.
b) El operador A resulta compacto si y sólo si $\alpha_n \to 0$.
c) El operador A resulta de Hilbert-Schmidt si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$.

Teorema 2.1.3. *Si A es un operador compacto y autoadjunto, entonces existen una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H y una sucesión de autovalores reales $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que para todo $x \in H$:*

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n \quad y \quad \lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Definición 2.1.4. *Un operador compacto A es de traza si la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, formada por los autovalores de $(A^*A)^{1/2}$, verifica que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$.*

Definición 2.1.5. *Si A es un operador de traza, se define $tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ae_n, e_n\rangle$, donde $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de H.*

La definición de $tr(A)$ no depende de la elección de la base.

2.1.2. Medidas de Borel en espacios de Hilbert reales

Necesitamos definir medidas en espacios de Banach con estructura compleja, históricamente se desarrolló la teoría para espacios reales, por lo tanto vamos a introducir las definiciones necesarias en el marco real y posteriormente explicaremos como extendernos al caso que nos interesa. Sea H entonces, un espacio de Hilbert real y separable y $\mathcal{B}$ la

$\sigma-$álgebra de Borel de H. Una medida boreliana en H es, por definición, una medida definida en el espacio medible $(H, \mathcal{B})$.

En lo siguiente nos restringimos a trabajar con medidas finitas en H.

Ejemplos. Los ejemplos siguientes provienen de medidas borelianas definidas en $\mathbb{R}^n$. Se "copia" la medida identificando $\mathbb{R}^n$, mediante un isomorfismo, con un subespacio (o variedad lineal) $n-$dimensional de H.

1. Dado $x_0 \in H$, se define la medida δ_{x_0} en $(H, \mathcal{B})$ de la manera usual:

$$\delta_{x_0}(\Delta) = \begin{cases} 1 & x_0 \in \Delta \\ \\ 0 & x_0 \notin \Delta \end{cases}$$

2. Sea μ una medida boreliana (finita) en $\mathbb{R}$. Para cada vector $x_0 \in H$, tal que $\|x_0\| = 1$, se puede definir la medida inducida por μ en la dirección de x_0, de la siguiente manera: si Δ es boreliano en H, $\widetilde{\mu}_{x_0}(\Delta) = \mu(\theta(\Delta \cap [x_0]))$, donde $\theta : [x_0] \to \mathbb{R}$ está definida por $\theta(\alpha x_0) = \alpha$.

3. Dados un subespacio $S \subset H$ de dimensión n, una medida μ boreliana (finita) en $\mathbb{R}^n$ y un isomorfismo $\Theta : S \to \mathbb{R}^n$, se tiene la medida μ_Θ en $(H, \mathcal{B})$ definida por $\mu_\Theta(\Delta) = \mu(\Theta(\Delta \cap S))$.

Definición 2.1.6. *(Operador Covarianza) Sea μ una medida boreliana en H, el operador de covarianza S_μ de μ, está definido como el único operador que verifica*

$$\langle S_\mu x, y\rangle = \int_H \langle x, z\rangle\langle y, z\rangle \, d\mu(z) \qquad \textit{para todo par de vectores } x, y \in H.$$

Observación 2.1.7. *S_μ puede no existir. Si existe, es autoadjunto y definido positivo.*

Observación 2.1.8. *(Teorema del cambio de variable) Si (X, μ) es un espacio de medida, (Y, Σ) es un espacio medible y $\Upsilon : X \to Y$ es una función medible, en el lenguaje probabilístico una variable aleatoria, entonces Υ induce una medida en (Y, Σ), notada μ_Υ definida por*

$$\mu_\Upsilon(\Delta) = \mu(\Upsilon^{-1}(\Delta)) \qquad \Delta \in \Sigma.$$

Además, si $f : Y \to \mathbb{R}$ es medible, entonces

$$\int_X f(\Upsilon(x)) \, d\mu(x) = \int_Y f(y) \, d\mu_\Upsilon(y).$$

Ejemplos. Manteniendo las definiciones y notaciones del ejemplo anterior:

1. Aplicando la definición,

$$\langle S_{\delta_{x_0}} x, y\rangle = \int_H \langle x, z\rangle \langle y, z\rangle \, d\delta_{x_0}(z) = \langle x, x_0\rangle \langle y, x_0\rangle = \langle \langle x, x_0\rangle x_0, y\rangle.$$

Como esta igualdad es válida para todo par $x, y \in H$, resulta

$$S_{\delta_{x_0}} x = \langle x, x_0\rangle x_0.$$

2. Notemos que sobre los Borelianos de $\mathbb{R}$, $(\widetilde{\mu}_{x_0})_\theta = \mu$, ya que dado un intervalo abierto $(a, b) \in \mathbb{R}$, el valor de $[\widetilde{\mu}_{x_0}]_\theta\{(a, b)\}$ es por definición:

$$[\widetilde{\mu}_{x_0}]_\theta\{(a, b)\} = \widetilde{\mu}_{x_0}\left\{\theta^{-1}(a, b)\right\} = \widetilde{\mu}_{x_0}\left(\{\alpha x_0 \in H : \ a < \alpha < b\}\right)$$

$$= \mu\left\{\theta(\{\alpha x_0 \in H : \ a < \alpha < b\} \cap [x_0])\right\} = \mu\{(a, b)\}.$$

Calculemos el operador de covarianza,

$$\langle S_{\widetilde{\mu}_{x_0}} x, y\rangle = \int_H \langle x, z\rangle \langle y, z\rangle \, d\widetilde{\mu}_{x_0}(z) = \int_{[x_0]} \langle x, z\rangle \langle y, z\rangle \, d\widetilde{\mu}_{x_0}(z),$$

siendo $z = \langle z, x_0\rangle x_0$, esta última integral es

$$\langle x, x_0\rangle \langle y, x_0\rangle \int_{[x_0]} \langle z, x_0\rangle^2 \, d\widetilde{\mu}_{x_0}(z) = \langle x, x_0\rangle \langle y, x_0\rangle \int_{[x_0]} \theta(z)^2 \, d\widetilde{\mu}_{x_0}(z),$$

que por la observación 2.1.8 y lo notado anteriormente, resulta igual a

$$\langle x, x_0\rangle \langle y, x_0\rangle \int_{\mathbb{R}} t^2 \, d\mu(t) = \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 \, d\mu(t)\right) \langle x, x_0\rangle \langle x_0, y\rangle.$$

Como esta igualdad es válida para todo par $x, y \in H$, resulta

$$S_{\widetilde{\mu}_{x_0}} x = \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 \, d\mu(t)\right) \langle x, x_0\rangle x_0.$$

3. Si μ es una medida Gaussiana en $\mathbb{R}$, con media m y varianza σ^2, el ejemplo anterior nos dice que la medida inducida por μ en la dirección de x_0 tiene por operador de covarianza a $(\sigma^2 + m^2)P_{x_0}(x)$, donde P_{x_0} es la proyección ortogonal sobre $[x_0]$.

Recordemos que un operador continuo $A : H \to H$, es definido positivo si $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in H$.

Definición 2.1.9. *Un operador continuo $A : H \to H$ se dice de clase $\mathcal{S}(H)$ si es de traza, definido positivo y autoadjunto.*

En la demostración del próximo resultado necesitamos el teorema de Beppo Levi:

Teorema 2.1.10. *(Beppo Levi) Sean (H, μ) un espacio de medida y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones medibles, reales y no negativas definidas en H. Si g es el límite puntual de esta sucesión, entonces*

$$\int_H g(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_H g_n(x)\, d\mu(x).$$

Teorema 2.1.11. *Dada una medida μ, boreliana en H, entonces*

$$\int_H \|x\|^2\, d\mu(x) < \infty \Leftrightarrow S_\mu \in \mathcal{S}(H).$$

Además, $\displaystyle\int_H \|x\|^2 d\mu(x) = tr(S_\mu)$.

Demostración. $\Leftarrow$) Consideremos $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H :

$$tr(S_\mu) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle S_\mu e_n, e_n\rangle = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle S_\mu e_n, e_n\rangle = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_H \langle x, e_n\rangle^2\, d\mu(x),$$

que por Beppo Levi es igual a

$$\int_H \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle^2\, d\mu(x) = \int_H \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle^2\, d\mu(x) = \int_H \|x\|^2\, d\mu(x).$$

Por lo tanto $\displaystyle\int_H \|x\|^2\, d\mu(x) < \infty$.

$\Rightarrow$) Debemos probar primero la existencia del operador S_μ. Como

$$|\langle x, z\rangle\langle y, z\rangle| \le \|x\|\,\|y\|\,\|z\|^2$$

resulta

$$\left|\int_H \langle x, z\rangle\langle y, z\rangle\, d\mu(z)\right| \le \|x\|\,\|y\| \int_H \|z\|^2\, d\mu(z),$$

por lo tanto la integral define una forma bilineal continua, y existe un único operador continuo S_μ tal que

$$\langle S_\mu x, y\rangle = \int_H \langle x, z\rangle\langle y, z\rangle\, d\mu(z).$$

Claramente este operador resulta definido positivo y autoadjunto, la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\langle S_\mu x, y\rangle$ se sigue de la cadena de igualdades de la primera implicación. $\square$

Definición 2.1.12. *(Media) Sea μ una medida boreliana en H, la media de μ es un elemento $m_\mu \in H$ que verifica*

$$\langle m_\mu, x\rangle = \int_H \langle z, x\rangle\, d\mu(z) \qquad \textit{para todo } x \in H.$$

Observación 2.1.13. *En general m_μ puede no existir. Si* $\displaystyle\int_H \|x\|\, d\mu(x) < \infty$, *entonces m_μ existe y además* $|m_\mu| \leq \displaystyle\int_H \|x\|\, d\mu(x)$.

Ejemplos. Con las notaciones fijadas previamente:

1. $\langle m_{\delta_{x_0}}, x\rangle = \displaystyle\int_H \langle z, x\rangle\, d\delta_{x_0}(z) = \langle x_0, x\rangle$. Como esta igualdad vale para todo $x \in H$, resulta $m_{\delta_{x_0}} = x_0$.

2. $\langle m_{\widetilde{\mu}_{x_0}}, x\rangle = \displaystyle\int_H \langle z, x\rangle\, d\widetilde{\mu}_{x_0}(z) = \int_{[x_0]} \langle z, x\rangle\, d\widetilde{\mu}_{x_0}(z)$, recordando que $\|x_0\| = 1$ podemos escribir $z = \langle z, x_0\rangle x_0$, esta integral resulta entonces
$$\langle x, x_0\rangle \int_{[x_0]} \langle z, x_0\rangle\, d\widetilde{\mu}_{x_0}(z) = \langle x, x_0\rangle \int_{\mathbb{R}} t\, d\mu(t).$$
Como esta igualdad vale para todo $x \in H$, tenemos que
$$m_{\widetilde{\mu}_{x_0}} = \left(\int_{\mathbb{R}} t\, d\mu(t)\right) x_0.$$

3. Si μ es una medida Gaussiana en $\mathbb{R}$, con media m y varianza σ^2, el ejemplo anterior nos dice que la medida inducida por μ en la dirección de x_0 tiene por media a mx_0.

Si existen m_μ y S_μ es posible definir el operador de correlación.

Definición 2.1.14. *(Operador Correlación) Sea μ una medida boreliana en H, el operador de correlación Q_μ de μ, está definido como el único operador que verifica*
$$\langle Q_\mu x, y\rangle = \int_H \langle x, z - m_\mu\rangle\langle y, z - m_\mu\rangle\, d\mu(z) \qquad \textit{para todo } x, y \in H.$$

Observación 2.1.15. *Busquemos una expresión más simple para Q_μ desarrollando los productos internos en la integral:*
$$\begin{aligned}\langle Q_\mu x, y\rangle &= \int_H \langle x, z\rangle\langle y, z\rangle d\mu(z) - \int_H \langle x, m_\mu\rangle\langle y, z\rangle d\mu(z)\\ &\quad - \int_H \langle x, z\rangle\langle y, m_\mu\rangle d\mu(z) + \int_H \langle x, m_\mu\rangle\langle y, m_\mu\rangle\, d\mu(z)\\ &= \langle S_\mu x, y\rangle - 2\langle x, m_\mu\rangle\langle y, m_\mu\rangle + \mu(H)\langle x, m_\mu\rangle\langle y, m_\mu\rangle\\ &= \langle S_\mu x + (\mu(H) - 2)\langle x, m_\mu\rangle m_\mu, y\rangle,\end{aligned}$$
como esta igualdad se verifica para todo $x, y \in H$, tenemos que
$$Q_\mu x = S_\mu x + (\mu(H) - 2)\langle x, m_\mu\rangle m_\mu.$$

Ejemplos. Continuando con las notaciones de los ejemplos anteriores:

1. $Q_{\delta_{x_0}} x = \langle x, x_0 \rangle x_0 - \langle x, x_0 \rangle x_0 = 0.$
2. $Q_{\widetilde{\mu}_{x_0}} x = \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 \, d\mu(t) \right) + (\mu(\mathbb{R}) - 2) \left(\int_{\mathbb{R}} t \, d\mu(t) \right)^2 \right\} \langle x, x_0 \rangle x_0.$
3. En el ejemplo anterior, si μ es una medida Gaussiana en $\mathbb{R}$, con media m y varianza σ^2, resulta

$$Q_{\widetilde{\mu}_{x_0}} x = \{(\sigma^2 + m^2) + (1-2)m^2\} \langle x, x_0 \rangle x_0 = \sigma^2 \langle x, x_0 \rangle x_0 = \sigma^2 P_{x_0}(x).$$

Definición 2.1.16. *Dada una medida μ, boreliana en H, se define la función característica de μ por*

$$\hat{\mu}(x) = \int_H e^{i\langle x, y \rangle} d\mu(y)$$

Observación 2.1.17. *En general $\hat{\mu}$ puede no existir. Si $\mu(H) < \infty$, entonces $\hat{\mu}$ existe y además $\hat{\mu}(x) \leq \mu(H)$ para todo $x \in H$.*

Ejemplos. Manteniendo las notaciones previas:

1. $\widehat{\delta_{x_0}}(x) = \displaystyle\int_H e^{i\langle x, y \rangle} \, d\delta_{x_0}(y) = e^{i\langle x, x_0 \rangle}.$
2. $\widehat{\widetilde{\mu}_{x_0}}(x) = \displaystyle\int_H e^{i\langle x, y \rangle} \, d\widetilde{\mu}_{x_0}(y) = \int_{[x_0]} e^{i\langle x, x_0 \rangle \, \langle x_0, y \rangle} \, d\widetilde{\mu}_{x_0}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\langle x, x_0 \rangle \, t} \, d\mu(t)$, y esta última expresión resulta $\widehat{\mu}(\langle x, x_0 \rangle)$.

2.1.3. Medida Gaussiana en espacios de Hilbert reales

En esta sección definimos medidas Gaussianas en espacios de Hilbert reales y separables. Resumimos los resultados más importantes que caracterizan a estas medidas.

Definición 2.1.18. *Una medida μ, boreliana en H es Gaussiana, si para todo $x \in H$ la función $\langle \cdot, x \rangle : H \to \mathbb{R}$ tiene distribución normal, i.e. existen $m_x \in \mathbb{R}, \sigma_x \in \mathbb{R}_{>0}$, tales que*

$$\mu\{y \in H : \langle y, x \rangle \leq a\} = \int_{-\infty}^{a} e^{-(t-m_x)^2/2\sigma_x} \frac{dt}{\sqrt{2\pi\sigma_x}}.$$

De la definición 2.1.16 se desprende que la función característica de una medida queda determinada completamente si se conocen las medidas que ésta induce sobre los subespacios $\{[x] : x \in H\}$. El siguiente lema es una combinación de los ejemplos dados con las propiedades de la medida Gaussiana de la recta real.

Lema 2.1.19. *Sea μ una medida Gaussiana en H, entonces su función característica está dada por*

$$\hat{\mu}(x) = e^{i\langle m_\mu, x\rangle} e^{-\langle Q_\mu x, x\rangle/2},$$

donde m_μ y Q_μ son la media y el operador correlación respectivamente.

Demostración. Dado $x \in H$, por ser μ Gaussiana, la variable aleatoria $\theta(\cdot) = \langle \cdot, x\rangle$ tiene distribución normal con media m_x y varianza σ_x, por lo tanto:

$$\hat{\mu}(x) = \int_H e^{i\langle x,y\rangle}\, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{it} e^{-(t-m_x)^2/2\sigma_x}\, \frac{dt}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} = e^{im_x} e^{-\sigma_x/2}$$

donde en la última igualdad usamos la transformada de Fourier de la densidad Gaussiana en $\mathbb{R}$. Por otro lado,

$$\langle m_\mu, x\rangle = \int_H \langle z, x\rangle\, d\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} t e^{-(t-m_x)^2/2\sigma_x}\, \frac{dt}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} = m_x$$

y

$$\begin{aligned}\langle Q_\mu x, x\rangle &= \int_H \langle z, x\rangle^2\, d\mu(z) - \langle m_\mu, x\rangle \int_H \langle z, x\rangle\, d\mu(z) = \int_H \langle z, x\rangle^2\, d\mu(z) - m_x^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-(t-m_x)^2/2\sigma_x}\, \frac{dt}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} - m_x^2 = (\sigma_x + m_x^2) - m_x^2 = \sigma_x.\end{aligned}$$

Combinando esto con lo obtenido anteriormente, tenemos que:

$$\hat{\mu}(x) = e^{im_x} e^{-\sigma_x/2} = e^{i\langle m_\mu, x\rangle} e^{-\langle Q_\mu x, x\rangle/2}.$$

□

2.2. Medida de Wiener en espacios de Banach reales

2.2.1. Medida de Gauss en espacios de Hilbert reales

Sea H un espacio de Hilbert real y separable, se nota por $\mathfrak{F}$ al conjunto de proyecciones ortogonales en H que tienen rango de dimensión finita. Este es un conjunto parcialmente ordenado si se define la relación:

$$Q < P \;\text{ si y sólo si }\; Rg(Q) \subset Rg(P).$$

Definición 2.2.1. *Un conjunto $C \subset H$ es un conjunto cilíndrico (o cilindro) si existen $P \in \mathfrak{F}$ y un conjunto boreliano $F \subset Rg(P)$ tales que:*

$$C = \{x \in H : Px \in F\}.$$

Observación 2.2.2. *El conjunto F de la definición anterior, usualmente es llamado "base del cilindro". En dimensión infinita, la familia $\mathcal{C}_H$ de conjuntos cilíndricos de H forman un álgebra, pero no una σ-álgebra. Sin embargo, si fijamos un subespacio de dimensión finita y nos restringimos a cilindros con base en este subespacio, obtenemos una $\sigma-$álgebra.*

Definición 2.2.3. *Una función $f : H \to \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ es una función cilíndrica si existen $P \in \mathfrak{F}$ y una función boreliana $\phi : Rg(P) \to \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ tales que:*

$$f(x) = \phi(Px).$$

Definición 2.2.4. *Se llama medida de Gauss a la función $\Gamma : \mathcal{C}_H \to \mathbb{R}$, definida sobre los cilindros de H, por medio de la integral*

$$\Gamma(C) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_F e^{-\|x\|^2}\, dx,$$

donde $C = \{x \in H : Px \in F\}$, $dim(Rg(P)) = n$ y la integración es respecto a la medida de Lebesgue.

Observación 2.2.5. *Un mismo conjunto cilíndrico puede tener dos formas diferentes de ser descripto. Por ejemplo, los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:*

$$F_1 = \{(x, 0) : a \leq x \leq b\} \quad y \quad F_2 = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ y \in \mathbb{R}\}$$

dan origen al cilindro

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P_X(x, y) \in F_1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P_{X,Y}(x, y) \in F_2\}.$$

En general, dado un cilindro $C \subset H$ para el cual existen dos descripciones

$$C = \{x \in H : Px \in F\}, \quad con\ P \in \mathfrak{F}, \quad F \subset Rg(P),\ \dim(Rg(P)) = n,$$

y también

$$C = \{x \in H : Qx \in G\}, \quad con\ Q \in \mathfrak{F},\ P \leq Q,\ G \subset Rg(Q),\ \dim(Rg(Q)) = n + k,$$

entonces resulta $G = P^{-1}(F) \cap Rg(Q)$.

Puede pensarse entonces al conjunto G como la suma ortogonal de F con un subespacio S_k, con la propiedad de ser $\dim(S_k) = k$ y naturalmente $S_k \perp Rg(P)$.

Al ser Γ una medida de probabilidad sobre los subespacios de dimensión finita, que se descompone como un producto de medidas de probabilidad sobre subespacios ortogonales, tenemos que

$$\frac{1}{\pi^{n/2}} \int_F e^{-\|x\|^2}\, dx = \left(\frac{1}{\pi^{n/2}} \int_F e^{-\|x\|^2}\, dx\right) \left(\frac{1}{\pi^{k/2}} \int_{S_k} e^{-\|y\|^2}\, dy\right) =$$

$$\frac{1}{\pi^{(n+k)/2}} \int_{F \oplus_\perp S_k} e^{-\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)}\, dx\, dy = \frac{1}{\pi^{(n+k)/2}} \int_G e^{-\|t\|^2}\, dt.$$

Queda así probada la buena definición de la medida de Gauss sobre conjuntos cilíndricos.

Observación 2.2.6. *Una forma alternativa de interpretar la observación anterior es la siguiente. A partir de* Γ *se define una familia de medidas* $\{\Gamma_P\}_{P\in\mathfrak{F}}$ *sobre subespacios de dimensión finita. Dado un subespacio de dimensión* n*,* $P \in \mathfrak{F}$ *la proyección ortogonal sobre él, para todo conjunto Boreliano* $F \subset Rg(P)$:

$$\Gamma_P(F) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_F e^{-\|x\|^2}\, dx.$$

Dadas proyecciones $P \leq Q \in \mathfrak{F}$, $\dim(Rg(P)) = n$, $\dim(Rg(Q)) = n+k$, *conjuntos Borelianos* $F \subset Rg(P)$, $G \subset Rg(Q)$ *y un cilindro*

$$C = \{x \in H : Px \in F\} = \{x \in H : Qx \in G\},$$

entonces

$$\Gamma_P(F) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_F e^{-\|x\|^2}\, dx = \Gamma(C) = \frac{1}{\pi^{(n+k)/2}} \int_G e^{-\|x\|^2}\, dx = \Gamma_Q(G).$$

Como $G = P^{-1}(F) \cap Rg(Q)$*, la igualdad se puede reescribir como*

$$\Gamma_P(F) = \Gamma_Q(P^{-1}(F) \cap Rg(Q)).$$

Observación 2.2.7. *Es importante notar que si bien la medida de Gauss es finitamente aditiva, no admite una extensión* σ*-aditiva a la* $\sigma-$*álgebra generada por los cilindros de* H.

Tomemos $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H. Para cualquier sucesión creciente de números reales positivos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, se pueden definir los conjuntos

$$C_n = \{x \in H : P_{[e_1,\ldots,e_{a_n}]}(x) \in [-n,n]^{a_n} \subset \mathbb{R}^{a_n}\}.$$

Como $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, si Γ fuera σ- aditiva, debería verificarse que

$$\Gamma(H) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(C_n).$$

Por un lado, $H = \{x \in H : \langle x, e_1\rangle \in \mathbb{R}\}$, por lo tanto

$$\Gamma(H) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt = 1.$$

Por otro lado,

$$\Gamma(C_n) = \frac{1}{\pi^{a_n/2}} \underbrace{\int_{-n}^{n} \cdots \int_{-n}^{n}}_{a_n - veces} e^{-\sum_{j=1}^{a_n} x_j^2}\, dx_1 \dots dx_{a_n} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-n}^{n} e^{-t^2}\, dt \right)^{a_n}.$$

Como $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-n}^{n} e^{-t^2}\, dt < 1$, eligiendo a_n suficientemente grande, puede lograrse que $\Gamma(C_n) < 1/2^{n+1}$. Resulta así

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(C_n) \leq 1/2 < \Gamma(H),$$

por lo que Γ no es una medida σ-aditiva.

Observación 2.2.8. *Aún sin ser una medida, es posible integrar ciertas funciones respecto a Γ. Por ejemplo, dadas $P \in \mathfrak{F}$ y $\phi : Rg(P) \to \mathbb{R}$ boreliana, para la función cilíndrica*

$$f : H \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \phi(Px),$$

se define

$$\int_H f(x)\, d\Gamma(x) = \int_{PH} \phi(t)\, d\Gamma_P(t).$$

Para probar la buena definición de la integral, dadas dos proyecciones ortogonales $P, Q \in \mathfrak{F}$, y funciones borelianas $\phi : Rg(P) \to \mathbb{R}$, $\varphi : Rg(Q) \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \phi(P(x)) = \varphi(Q(x)),$$

supongamos $P \leq Q$ y apliquemos la observación 2.1.8 al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "Q"] \arrow[rr, bend left, "P"] & (Rg(Q), \Gamma_Q) \arrow[r, "P_{|Rg(Q)}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & (Rg(P), \Gamma_P) \arrow[d, "\phi"] \\
& & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Sobre los borelianos de $Rg(P)$, Γ_P es una medida $\sigma-$aditiva y lo mismo ocurre con Γ_Q en los borelianos de $Rg(Q)$. Estas inducen, por medio de ϕ y φ, medidas $[\Gamma_P]_\phi$ y $[\Gamma_Q]_\varphi$ en los borelianos de $\mathbb{R}$, para las cuales se tienen las siguientes igualdades:

$$\int_{\mathbb{R}} s\, d[\Gamma_P]_\phi(s) = \int_{PH} \phi(t)\, d\Gamma_P(t)$$

$$\int_{\mathbb{R}} s\, d[\Gamma_Q]_\varphi(s) = \int_{QH} \varphi(t)\, d\Gamma_Q(t).$$

Como

$$[\Gamma_P]_\phi(\Delta) = \Gamma_P(\phi^{-1}(\Delta))$$

y

$$[\Gamma_Q]_\varphi(\Delta) = \Gamma_Q(\varphi^{-1}(\Delta)) = \Gamma_Q[(P_{|_{RgQ}})^{-1}(\phi^{-1}(\Delta))] = \Gamma_Q[P^{-1}(\phi^{-1}(\Delta)) \cap Rg(Q)],$$

por la Proposición 2.2.6,

$$\Gamma_Q[P^{-1}(\phi^{-1}(\Delta)) \cap Rg(Q)] = \Gamma_P(\phi^{-1}(\Delta)),$$

por lo tanto $[\Gamma_P]_\phi = [\Gamma_Q]_\varphi$ *y ambas integrales coinciden.*
Si los rangos de P *y* Q *no fueran comparables, llamemos* $S = Rg(P) + Rg(Q)$ *y* Π_S *a la proyección ortogonal sobre este nuevo subespacio. Definimos:*

$$f_{S,P} : S \to \mathbb{R}$$

$$f_{S,P}(x) = \phi(P_{|S}(x)).$$

$$f_{S,Q} : S \to \mathbb{R}$$

$$f_{S,Q}(x) = \varphi(Q_{|S}(x)).$$

Naturalmente, por ser $\phi(P(x)) = f(x) = \varphi(Q(x))$ *para todo* $x \in H$*, en particular vale la igualdad si nos restringimos a* S*, por lo tanto*

$$f_{S,P} = f_{S,Q}.$$

Por otro lado, como $Rg(P) \subset Rg(\Pi_S)$*, resulta* $P_{|S}(\Pi_S(x)) = P(x)$ *para todo* $x \in H$ *y vemos que*

$$f_{S,P}(\Pi_S(x)) = \phi(P_{|S}(\Pi_S(x))) = \phi(P(x)) = f(x).$$

Con iguales argumentos, resulta

$$f_{S,Q}(\Pi_S(x)) = \varphi(Q_{|S}(\Pi_S(x))) = \varphi(Q(x)) = f(x).$$

Aplicando ahora la demostración al par $P, \Pi_S \in \mathfrak{F}$ *con funciones* ϕ *y* $f_{S,P}$ *y también a* $Q, \Pi_S \in \mathfrak{F}$*, con funciones* φ *y* $f_{S,Q}$*, cada uno de ellos ordenado por inclusión, por ser* $f_{S,P} = f_{S,Q}$*, podemos concluir que el valor de la integral no depende de la representación.*

Observación 2.2.9. *A continuación de la Observación 2.2.7 se mostró que* Γ *no era una medida. Al ver esa demostración, se podría suponer que el inconveniente que se presenta es que la distribución en cada subespacio de dimensión finita se comporta como el producto de Gaussianas con la misma varianza, lo que permite asegurar que los cilindros, cuando* *aumentamos la dimensión, reducen su medida tendiendo a 0. Se pueden proponer dos soluciones, la primera es cambiar la definición de Γ achicando la varianza de las proyecciones sobre los vectores de la base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, a medida que n crece. La segunda solución es cambiar H definiendo una norma más débil, de manera que las varianzas disminuyan y Γ pueda extenderse a una medida $\sigma-$aditiva en el nuevo espacio que resulte de completar H con esta nueva norma. En cierta forma estas dos opciones son "similares", pero la ventaja de la segunda es que nos permite saltar del contexto Hilbert al de espacios de Banach.*

Definición 2.2.10. *Una norma $|||\cdot|||$ en H es una norma medible, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $P_\varepsilon \in \mathfrak{F}$ tal que*

$$\Gamma\{x \in H : |||Px||| > \varepsilon\} < \varepsilon \qquad \forall\ P \perp P_\varepsilon,\ P \in \mathfrak{F}$$

La demostración de la siguiente proposición puede consultarse en [16].

Proposición 2.2.11. *Si A es un operador de Hilbert-Schmidt inyectivo, entonces la norma definida por $|||x||| = \|Ax\|$ es una norma medible.*

Observación 2.2.12. *Si $\|\cdot\|_1$ es una norma medible en H y se tiene una segunda norma $\|\cdot\|_2$, que verifica*

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \text{ para todo } x \in H,$$

dado $P \in \mathfrak{F}$ vale la inclusión

$$\{x \in H : \|Px\|_2 > \varepsilon\} \subset \{x \in H : \|Px\|_1 > \varepsilon\},$$

y por lo tanto $\|\cdot\|_2$ resulta medible.

Proposición 2.2.13. *Si $|||\cdot|||$ es una norma medible, entonces existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|||x||| \leq c\|x\|$ para todo $x \in H$.*

Demostración. Tomemos $a \in \mathbb{R}$ de modo tal que

$$2\int_a^\infty e^{-t^2/2}\,\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2},$$

y notemos que por la definición de norma medible, existe $P_{1/2} \in \mathfrak{F}$ tal que

$$\Gamma\{x \in H : |||Px||| > 1/2\} < 1/2 \qquad \forall\ P \perp P_{1/2},\ P \in \mathfrak{F}.$$

Como $Rg(P_{1/2})$ es de dimensión finita, existe $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$|||y||| \leq \alpha\|y\| \text{ para todo } y \in P_{1/2}H.$$

Si z pertenece al complemento ortogonal del $Rg(P_{1/2})$, definimos

$$P_z(x) = \left\langle x, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle \frac{z}{\|z\|}, \qquad P_z \in \mathfrak{F},\ P_z \perp P_{1/2},$$

por lo tanto

$$\Gamma\{|||P_z x||| > 1/2\} = \Gamma\left\{ \left| \left\langle x, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle \right| \frac{|||z|||}{\|z\|} > 1/2 \right\} < 1/2.$$

Esta desigualdad, significa que

$$2 \int_{\frac{\|z\|}{2|||z|||}}^{\infty} e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} < \frac{1}{2},$$

entonces debe ser $a < \dfrac{\|z\|}{2|||z|||}$, y por lo tanto $|||z||| < \dfrac{1}{2a}\|z\|$. Notemos que la constante que acota la norma sobre el complemento ortogonal de $Rg(P_{1/2})$ no depende de z.

Dado $x \in H$, escribimos $x = y + z$, con $y \in Rg(P_{1/2}),\ z \in Rg(P_{1/2})^{\perp}$, se sigue que:

$$|||x|||^2 \leq (|||y|||\ +\ |||z|||)^2 \leq 2\left(|||y|||^2\ +\ |||z|||^2\right) \leq$$

$$2\left[\alpha^2\|y\|^2 + \frac{1}{4a}\|z\|^2\right] \leq 2\left[\alpha^2 + \frac{1}{4a}\right]\left(\|y\|^2 + \|z\|^2\right) = 2\left[\alpha^2 + \frac{1}{4a}\right]\|x\|^2,$$

vale entonces la desigualdad propuesta tomando $c = \sqrt{2\left[\alpha^2 + \dfrac{1}{4a}\right]}$. $\square$

Como toda norma medible $|||\cdot|||$ es más débil que la norma de H, pero no equivalente (pág. 59, [16]), tiene sentido completar al espacio H respecto de $|||\cdot|||$.

Definición 2.2.14. *Un espacio de Wiener abstracto es una terna $(\imath, H, X)$, donde H es un espacio de Hilbert separable, X es el espacio de Banach que se obtiene al completar H respecto de una norma medible e $\imath : H \hookrightarrow X$ es la inclusión.*

Ejemplos.

1. El primer ejemplo, data de los años 1920's, es el que motiva la construcción del espacio de Wiener abstracto. Se considera $X = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$, que es un espacio de Banach considerando en él la norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Se definen en X conjuntos de la forma:

$$I = \{f \in X : (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) \in \Delta\},$$

para $n \in \mathbb{N}$, $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq 1$ y $\Delta \subset R^n$ boreliano, y sobre ellos la aplicación

$$W(I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_1(x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1})}} \int_\Delta e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t_1^2}{x_1} + \frac{(t_2-t_1)^2}{x_2-x_1} + \cdots + \frac{(t_n-t_{n-1})^2}{x_n-x_{n-1}}\right)} dt_1...dt_n$$

La función de conjuntos W tiene una única extensión $\sigma-$aditiva a la $\sigma-$álgebra generada por los conjuntos I. Esta extensión es la medida de Wiener en $C[0,1]$ y la integral respecto a esta medida es la integral de Wiener. Este espacio fue utilizado por los físicos antes que N. Wiener ([24] [25]) probara formalmente que W se podía extender y era una medida. En el lenguaje "abstracto", el espacio de Hilbert $H \subset X$, está formado por las funciones absolutamente continuas definidas en $[0,1]$, cuya derivada tiene cuadrado integrable:

$$H = \left\{ f \in X : f \text{ abs. cont.}, \int_{[0,1]} |f'(x)|^2 \, dx < \infty \right\},$$

considerando el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{[0,1]} f'(x) g'(x) \, dx.$$

Los conjuntos cilíndricos se forman a partir de las evaluaciones $\delta_x(f) = f(x)$, que en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ resultan funcionales lineales continuas. La terna $(\imath, H, X)$ es el "clásico" espacio de Wiener abstracto.

2. Sea $X = \ell_2$, el espacio de sucesiones reales de cuadrado sumable. Tomamos en ℓ_2 una sucesión decreciente de números reales positivos $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con la condición adicional que $1 > \lambda_1$. Sea

$$H = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{\lambda_n^2} < \infty \right\},$$

con producto interno definido de la siguiente manera

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle_H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{\lambda_n^2}.$$

Resulta así $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espacio de Hilbert, se puede definir en él un operador de Hilbert-Schmidt inyectivo:

$$A : H \to H$$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

que induce una norma medible (Proposición 2.2.11)

$$|||(x_n)||| = \|A(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Al completar al espacio H respecto de esta nueva norma $|||\cdot|||$, se obtiene ℓ_2, por lo tanto $(\imath, H, \ell_2)$ es un espacio de Wiener abstracto.

3. Tomando $p \in (2, +\infty)$, tenemos la inclusión continua y densa $\ell_2 \hookrightarrow \ell_p$. Manteniendo la notación del ejemplo precedente, resulta entonces

$$\|(x_n)\|_p \leq \|(x_n)\|_2 = \|A(x_n)\| \quad \text{para todo } (x_n) \in H.$$

Por lo tanto, definiendo en H la nueva norma $\|\cdot\|_p$, ésta resulta medible (Observación 2.2.12) y la terna $(\imath, H, \ell_p)$ es un espacio de Wiener abstracto.

2.2.2. Medida de Wiener en espacios de Banach reales

Definición 2.2.15. *Sea X un espacio de Banach real y separable, dado un conjunto boreliano $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ y funcionales lineales $\gamma_i \in X'$ $(i = 1, \ldots, n)$, un conjunto $C \subset X$ definido por*

$$C = \{z \in X : (\gamma_1(z), \gamma_2(z), \ldots, \gamma_n(z)) \in \Delta\}$$

se llama cilindro o conjunto cilíndrico en X.

Por $\mathcal{C}_X$ notamos la familia de cilindros en X.

Proposición 2.2.16. *La $\sigma-$álgebra generada por la familia $\mathcal{C}_X$ es la $\sigma-$álgebra de Borel en X.*

Demostración. Notemos por $\sigma(\mathcal{C}_X)$ a la $\sigma-$álgebra generada por la familia $\mathcal{C}_X$.

Por la continuidad de las funcionales lineales que definen a los cilindros, resulta claramente que $\sigma(\mathcal{C}_X) \subset \mathcal{B}(X)$.

Para mayor claridad vamos a separar en pasos lo que resta de la demostración.

Paso 1. Por ser X separable, todo abierto en X es unión numerable de bolas abiertas.

Tomemos un conjunto denso $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. La familia numerable de bolas abiertas $\{B^\circ_{1/m}(z_n) : n, m \in \mathbb{N}\}$ forma una base de abiertos de la topología de X. Efectivamente, dado $z \in X$ y $r > 0$ tomemos z_n tal que $\|z - z_n\| < r$ y sea $m \in \mathbb{N}$ de modo que $2/m < r$. Por la desigualdad triangular $B^\circ_{1/m}(z_n) \subset B^\circ_r(z)$.

Esto nos permite reducir la demostración y probar que dado $w \in X$ y $r > 0$, entonces $B^\circ_r(w) \in \sigma(\mathcal{C}_X)$.

Paso 2. Probemos que para todo $r > 0$, $B_r(0) = \{z \in X : \|z\| \leq r\} \in \sigma(\mathcal{C}_X)$.

Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, un conjunto denso. Usando Hahn-Banach podemos tomar una sucesión $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ tal que se verifique:

a) $\|\gamma_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) $\gamma_n(z_n) = \|z_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que $B_r(0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{z \in X : \gamma_n(z) \in [-r, r]\} \in \sigma(\mathcal{C}_X)$.

$\subseteq$) Si $z \in B_r(0)$, entonces $|\gamma_n(z)| \leq \|\gamma_n\|\|z\| \leq r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\supseteq$) Si $\|z\| = r' > r$, tomamos algún z_n suficientemente próximo a z, de modo tal que $\|z - z_n\| < (r' - r)/2$. Resulta así $\|z_n\| > (r' + r)/2$, y por lo tanto

$$|\gamma_n(z)| \geq |\gamma_n(z_n)| - |\gamma_n(z_n - z)| \geq \|z_n\| - \|z_n - z\| > \frac{r' + r}{2} - \frac{r' - r}{2} = r.$$

De este modo se prueba que

$$z \notin B_r(0) \Rightarrow z \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \{z \in X : \gamma_n(z) \in [-r, r]\}.$$

Paso 3. Con la misma idea anterior podemos probar que si $w \in X$, para todo $r > 0$, entonces $B_r(w) \in \sigma(\mathcal{C}_X)$. Escribiendo

$$B_r(w) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{z \in X : \gamma_n(z - w) \in [-r, r]\} =$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{z \in X : \gamma_n(z) \in [-r + \gamma_n(w), r + \gamma_n(w)]\} \in \sigma(\mathcal{C}_X).$$

Paso 4. Concluimos que dado $w \in X$ y para todo $r > 0$, $B_r^{\circ}(w) \in \sigma(\mathcal{C}_X)$, ya que

$$B_r^{\circ}(w) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{r-1/n(w)} \right) \in \sigma(\mathcal{C}_X).$$

$\square$

Observación 2.2.17. *La proposición anterior puede resumirse brevemente diciendo: "Si X es un espacio de Banach real y separable, entonces los borelianos de X son exactamente los $w-$borelianos de X."*

Además, si X es un espacio dual, se puede probar que coinciden con los w^*- borelianos de X. (ver [14])

Dado un espacio de Wiener abstracto $(\imath, H, X)$, queremos construir una medida en X utilizando la función Γ definida previamente. Para esto, comenzamos por definirla sobre sus conjuntos cilíndricos. Probemos que si $C \in \mathcal{C}_X$, entonces resulta $\imath^{-1}(C) \in \mathcal{C}_H$. Necesitamos exhibir un subespacio $S \subset H$ de dimensión finita, y un boreliano $\widetilde{\Delta}$ en él para los cuales, si llamamos P_S a la proyección ortogonal sobre S, resulte

$$\imath^{-1}(C) = \{x \in H : P_S(x) \in \widetilde{\Delta}\}.$$

Por definición,

$$C = \{z \in X : (\gamma_1(z), \gamma_2(z), \ldots, \gamma_n(z)) \in \Delta\}$$

para algún conjunto boreliano $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ y funcionales $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \subset X'$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \imath^{-1}(C) &= \{x \in H : (\gamma_1(\imath(x)), \gamma_2(\imath(x)), \ldots, \gamma_n(\imath(x))) \in \Delta\} \\ &= \{x \in H : \big(\imath'(\gamma_1)(x), \imath'(\gamma_2)(x), \ldots, \imath'(\gamma_n)(x)\big) \in \Delta\} \\ &= \{x \in H : (\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle, \ldots, \langle x, y_n\rangle) \in \Delta\} \end{aligned}$$

siendo $y_k \in H$ el representante de la funcional $\imath'(\gamma_k)$.

Sea $S = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$, el subespacio generado por estos vectores, y sea $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ una base ortonormal del mismo. Se pueden escribir para $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$y_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i,j} w_j$$

y definir $M_T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, la multiplicación por la matriz

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,k} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \ldots & \alpha_{n,k} \end{pmatrix}.$$

Resulta así

$$x \in \imath^{-1}(C) \Leftrightarrow M_T \begin{pmatrix} \langle x, w_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x, w_k\rangle \end{pmatrix} \in \Delta \Leftrightarrow P_S(x) \in M_T^{-1}(\Delta)$$

Por la continuidad de M_T el conjunto $\widetilde{\Delta} = M_T^{-1}(\Delta)$ resulta boreliano y verifica lo pedido.

Definición 2.2.18. *Dado un espacio de Wiener abstracto $(\imath, H, X)$, se define*

$$\widetilde{\Gamma} : \mathcal{C}_X \to \mathbb{R}$$

$$\widetilde{\Gamma}(C) = \Gamma(\imath^{-1}(C)).$$

Teorema 2.2.19. *Sea $(\imath, H, X)$ un espacio de Wiener abstracto, entonces existe una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{F}$, verificando que $p_n \to I_H$ en la topología fuerte y un espacio de Wiener abstracto $(\imath_0, H, X_0)$, tales que:*

a) $\|\cdot\|_{X_0}$ *es más fuerte que* $\|\cdot\|_X$*, esto es* $X_0 \hookrightarrow X$.
b) p_n *se extiende a una proyección continua* $P_n : X_0 \to X_0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
c) $\|P_n y - y\|_{X_0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \forall y \in X_0$. *Es decir,* $P_n \to I_{X_0}$ *en la topología fuerte en el espacio de operadores continuos en definidos en* X_0.

En lugar de esta versión general (pág. 66, [16]), por construcción de nuestra medida, resultará X_0 un espacio de Hilbert (Teorema 2.3.5), y por simplicidad en la notación será llamado H_0.

Teorema 2.2.20. *(Teorema 4.1, pág. 72, [13]) La función* $\widetilde{\Gamma}$*, definida sobre* $\mathcal{C}_X$*, se extiende, de manera única, a una medida* W *definida en el espacio* $(X, \mathcal{B}_X)$.

Observación 2.2.21. *La función* $\widetilde{\Gamma}_0$*, definida sobre* $\mathcal{C}_{X_0}$*, también se extiende de manera única, a una medida* W_0 *definida en el espacio* $(X_0, \mathcal{B}_{X_0})$*. Si* $\Delta \in X$*, y es tal que* $\Delta \cap X_0 \in \mathcal{B}_{X_0}$*, se puede definir* $\widetilde{W}(\Delta) = W_0(\Delta \cap X_0)$.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\imath_0"'] \arrow[rr, bend left, "\imath"] & X_0 \arrow[r, "\imath_1"'] & X \end{tikzcd}$$

En particular $\widetilde{W}$ *está definida para cualquier* $\Delta \in \mathcal{B}_X$*, ya que por la continuidad de* $\imath_1$ *resulta* $\Delta \cap X_0 = \imath_1^{-1}(\Delta) \in \mathcal{B}_{X_0}$*. Dado* C *un cilindro en* X *:*

$$\widetilde{W}(C) = W_0(C \cap X_0) = W_0(\imath_1^{-1}(C)) = \Gamma(\imath_0^{-1}(\imath_1^{-1}(C))) = \Gamma(\imath^{-1}(C)) = W(C).$$

Por unicidad, $\widetilde{W} = W$ *y vale* $\widetilde{W}(X_0) = W_0(X_0) = 1$*. Por lo tanto* $W(X_0) = 1$.

Observación 2.2.22. *La definición 2.2.4 podría modificarse ligeramente, dado* $t > 0$*, definir en* $\mathcal{C}_H$ *la "medida de Gauss con parámetro* t*" por medio de*

$$\Gamma_t(C) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_F e^{-\|x\|^2/2t}\, dx \qquad \text{donde } C = \{x \in H : Px \in F,\ P \in \mathfrak{F}\},$$

como antes Γ_t *no resulta* $\sigma-$*aditiva, sin embargo se puede definir* $\widetilde{\Gamma}_t$ *en* $\mathcal{C}_X$ *y existe entonces una única extensión* W_t *que es una medida* $\sigma-$ *aditiva en* $(X, \mathcal{B}_X)$*. Con esta definición* $\Gamma = \Gamma_{1/2}$.

Definición 2.2.23. *Se llama medida de Wiener con varianza* t*, a la única medida boreliana en* X *que extiende a la función finitamente aditiva* $\widetilde{\Gamma}_t$.

Dado un espacio de Banach separable X, necesitamos trabajar con una medida definida en su $\sigma-$álgebra de Borel. No tenemos todavía una construcción que lo permita, sin embargo, si comenzamos considerando un espacio de Hilbert H y definimos en él la medida

de Gauss Γ, podemos obtener un espacio de Banach completando H respecto a una norma medible y en él tenemos definida la medida Gaussiana $\widetilde{\Gamma}$, extensión de Γ.
El siguiente teorema garantiza que todo espacio de Banach separable puede construirse de este modo, completando un espacio de Hilbert respecto a una norma medible. Por lo tanto en todo espacio de Banach separable es posible construir una medida Gaussiana siguiendo los pasos anteriormente expuestos.

Teorema 2.2.24. *(Gross [13]) Sea X un espacio de Banach real y separable. Existe entonces un espacio de Hilbert $H \subset X$, para el cual $\|\cdot\|_X$ es una norma medible. Esto es, $(\imath, H, X)$ es un espacio de Wiener abstracto, donde $\imath : H \to X$ es la inclusión.*

En la próxima sección, cuando demostremos el teorema en su versión compleja, presentaremos ejemplos de esta construcción.

Observación 2.2.25. *Dado un espacio de Banach real y separable X, los Teoremas 2.2.20 y 2.2.24 permiten definir una familia de medidas de Wiener $\{W_t\}_{t>0}$ en el espacio medible $(X, \mathcal{B})$.*

Observación 2.2.26. *Al estar interesados en "alguna" medida Gaussiana definida en los borelianos de X, el resultado anterior es satisfactorio.Cabe destacar que si tenemos previamente definida una medida Gaussiana μ_X en X, el teorema anterior sigue teniendo validez con el resultado adicional que $W = \mu_X$. Es decir, toda medida Gaussiana en X se obtiene como extensión de la medida de Gauss Γ, definida en un espacio de Hilbert $(H, \|\cdot\|_H)$, denso en X y para el cual $\|\cdot\|_X$ resulta medible.*

2.3. Medida de Wiener en espacios de Banach complejos

Los resultados expuestos anteriormente corresponden a espacios de Banach reales y separables (ver [13], [16], [22]). En esta sección probaremos la versión compleja del Teorema 2.2.24, ya que para estudiar funciones holomorfas necesitamos considerar espacios de Banach sobre $\mathbb{C}$.

La siguiente observación servirá para fijar la notación que vamos a utilizar en el resto del capítulo.

Observación 2.3.1. *Si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert separable sobre $\mathbb{C}$, y consideramos H con su estructura real subyacente, lo notaremos $(H_{\mathbb{R}}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}})$. Su producto interno es $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}} = \Re\langle\cdot,\cdot\rangle$, de esta forma x e ix resultan ortogonales en $H_{\mathbb{R}}$, y fijada $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, cualquier base ortonormal de H, entonces $\{e_n, ie_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $H_{\mathbb{R}}$.
La aplicación*

$$H'_{\mathbb{R}} \longrightarrow H',$$

$$\psi(\cdot) \mapsto \psi(\cdot) - i\psi(i\ \cdot)$$

es una isometría entre $H'_{\mathbb{R}}$ y H'.

Teorema 2.3.2. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach separable sobre $\mathbb{C}$. Existe entonces un espacio de Hilbert $H \subset X$, para el cual $\|\cdot\|_X$ es una norma medible.*

Demostración. Por ser X separable podemos tomar una sucesión creciente de subespacios $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

(a) F_n es de dimensión n (como $\mathbb{C}-$ espacio vectorial).

(b) $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ es denso en X.

Tomamos una sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manera tal que el conjunto $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ forme una base de F_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que existe una sucesión de números reales positivos $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, y todo vector $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$, se verifica

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j w_j \right\|_X < 1 \quad \text{cada vez que} \quad \sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^2 \leq 1.$$

Construyamos inductivamente esta sucesión:

Para el primer paso, basta tomar $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, no nulo, de modo tal que $\|\alpha_1 w_1\|_X < 1$. Supongamos elegidos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, y veamos que es posible tomar α_{n+1} verificando la condición propuesta. Consideremos $\Psi : \mathbb{C}^{n+1} \to X$ definida por

$$\Psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j w_j + \beta_{n+1} w_{n+1}.$$

El conjunto $K = \left\{ (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, 0) \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^2 \leq 1 \right\}$ es compacto y por lo tanto la función continua

$$d : K \to \mathbb{R}$$

$$d(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, 0) = \|\Psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, 0)\|_X$$

alcanza un máximo absoluto sobre K. Si llamamos r a este valor, por hipótesis inductiva, resulta $r < 1$.

Restringidos a $\left\{ (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j|^2 \leq 1 \right\}$, podemos acotar:

$$\|\Psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1})\|_X \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j w_j \right\|_X + \|\beta_{n+1} w_{n+1}\|_X \leq r + \|\beta_{n+1} w_{n+1}\|_X.$$

Tomando $\alpha_{n+1} = \dfrac{1-r}{2\|w_{n+1}\|_X}$, se verifica que cada vez que $\sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j|^2 \leq 1$, resulta

$$\left\| \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j \alpha_j w_j \right\|_X \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j w_j \right\|_X + \|\beta_{n+1}\alpha_{n+1} w_{n+1}\|_X \leq r + \frac{1-r}{2} = \frac{1+r}{2} < 1.$$

El paso siguiente es dotar a F de un producto interno $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_0$, de manera que el conjunto $\{\alpha_n w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulte ortonormal.

Dados $x, y \in F$, existen únicos números naturales n, m y escalares $\{a_j\}_{j=1}^n$, $\{b_j\}_{j=1}^m$ para los cuales $x = \sum_{j=1}^n a_j w_j$ e $y = \sum_{j=1}^m b_j w_j$, se define entonces

$$\langle x, y \rangle_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j \overline{b_j}}{\alpha_j^2}.$$

Esto induce una norma en F, como $\mathbb{C}-$espacio vectorial, $|x|_0 = \langle x, x \rangle_0^{1/2}$, que lo transforma en un pre-Hilbert.

El primer paso de la demostración se puede resumir del siguiente modo:

$$\text{si } x \in F,\ |x|_0 \leq 1 \Rightarrow \|x\|_X < 1,$$

por lo tanto

$$\|x\|_X < |x|_0 \quad \text{para todo } x \in F.$$

Por la acotación anterior, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ es una sucesión de Cauchy en $|\cdot|_0$, entonces es también de Cauchy en $\|\cdot\|_X$. Podemos definir, entonces, H_0 como la completación de $(H, |\cdot|_0) \subset X$.

La inyectividad de la inclusión $\jmath : H_0 \to X$ permite afirmar que $\jmath' : X' \to H_0'$ tiene imagen densa. De lo contrario, si esto no sucediera, podemos encontrar una funcional $\varphi \in H_0''$, no idénticamente nula, que se anula sobre la clausura de $\jmath'(X')$:

$$\varphi(\jmath'(z)) = 0 \quad \text{para todo } z \in X'.$$

Por la reflexividad de H_0 debe ser $\varphi = \hat{\varsigma}$ para algún $\varsigma \in H_0$, de este modo tenemos que

$$0 = \varphi(\jmath'(z)) = \hat{\varsigma}(\jmath'(z)) = (\jmath'(z))(\varsigma) = z(\jmath(\varsigma)) \quad \text{para toda } z \in X'.$$

Esto implica que $\jmath(\varsigma) = 0$, lo que es una contradicción, ya que $\jmath$ es inyectiva y habíamos supuesto ς distinta de 0. Podemos considerar entonces en H_0' una base ortonormal $\{u_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ formada por elementos pertenecientes a $\jmath'(X')$. Fijamos la base $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en H_0, de modo que tenga por base dual a $\{u_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Trabajamos ahora con $H_{0,\mathbb{R}}$, con estructura de $\mathbb{R}-$espacio vectorial, con producto interno $\langle x, y \rangle_{0,\mathbb{R}} = \Re\langle x, y \rangle_0$ y base ortonormal $\{u_n, iu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Necesitamos definir $H \subset X$, de manera que $\|\cdot\|_X$ resulte medible en H, para esto tomamos una sucesión decreciente de números reales positivos

$$1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_j \geq \ldots$$

con la condición adicional de ser $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < \infty$.
Definiendo

$$A : H_{0,\mathbb{R}} \to H_{0,\mathbb{R}}$$

por medio de

$$A(u_n) = \lambda_n u_n$$

$$A(iu_n) = \lambda_n(iu_n)$$

resulta un operador de Hilbert-Schmidt. Considerando $H = A(H_{0,\mathbb{R}}) \subset H_{0,\mathbb{R}}$, con norma definida por $\|x\|_H = |A^{-1}x|_0$, que por construcción es una norma también visto como espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Se tiene que $A_{|H} : H \to H$ es un operador de Hilbert-Schmidt, $|x|_0 = \|Ax\|_H$ para todo $x \in H$, y por la Proposición 2.2.11, $|\cdot|_0$ es una norma medible sobre H. Como además probamos que $\|\cdot\|_X < |\cdot|_0$, la norma de X resulta medible también. Tenemos así el espacio de Wiener abstracto $(\imath, H, X)$.

Queda entonces definida en $(X, \mathcal{B})$ la medida de Wiener W, que extiende a la función $\widetilde{\Gamma}$ definida sobre los cilindros (reales) de X. $\square$

Observación 2.3.3. *De la demostración surge que $(\imath_0, H, H_0)$ también es un espacio de Wiener abstracto.*

Observación 2.3.4. *En la construcción del teorema anterior vamos a fijar la base de H formada por los vectores $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $e_n = \lambda_n u_n$ para todo $n \geq 1$. En el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\imath_0"] \arrow[rr, bend left, "\imath"] & H_0 \arrow[r, "\jmath"] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} H' & H_0' \arrow[l, "\imath_0'"'] & X' \arrow[l, "\jmath'"'] \arrow[ll, bend left, "\imath'"] \end{tikzcd}$$

notemos que $u_n'(\imath_0 e_k) = u_n'(\lambda_k u_k) = \lambda_n \delta_{nk}$, por lo tanto $\imath_0' u_n' = \lambda_n e_n'$. Cuando elegimos la base $\{u_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$, lo hicimos de manera tal que sus vectores pertenecieran a la imagen de $\jmath'$, por lo tanto, existe una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ tal que $\imath'(z_n) = \imath_0' \circ \jmath'(z_n) = e_n'$. La utilidad de esta base será vista en el próximo capítulo.

Ejemplos.

1. Tomemos X=ℓ_p, para $p \in [1,2)$. Llamando w_j a los vectores $w_j(k) = \delta_{jk}$, y manteniendo la notación del teorema,

   (a) $F_n = [w_1, \ldots, w_n]$

   (b) $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ es denso en ℓ_p.

   Tenemos que mostrar una sucesión de escalares reales positivos $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y cualquier sucesión $\{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en la bola unidad de ℓ_2, se verifique que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j w_j \right\|_p < 1.$$

   Aplicando Hölder con exponente $2/p$ y exponente conjugado $2/(2-p)$,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^p \, |\alpha_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^{2p/(2-p)} \right)^{(2-p)/2p} .$$

   Por lo tanto, bastará tomar alguna sucesión de números reales y positivos $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en el interior de la bola unidad de $\ell_{2p/(2-p)}$, para obtener la acotación.

   El producto interno en F se define, para $x = (x_j),\ y = (y_j) \in F$, por

$$\langle x, y \rangle_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j \overline{y_j}}{\alpha_j^2}.$$

   De este modo, el conjunto formado por $u_j = \alpha_j w_j$ resulta ortonormal en F. Será entonces

$$H_0 = \left\{ x \in \ell_p : \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|x_j|^2}{\alpha_j^2} < \infty \right\},$$

   y definiendo, como en la demostración, un operador de Hilbert-Schmidt:

$$A : H_{0,\mathbb{R}} \to H_{0,\mathbb{R}}$$

$$A(u_j) = \frac{u_j}{j}$$

$$A(iu_j) = \frac{iu_j}{j},$$

   se obtiene

$$H = \left\{ x \in \ell_p : \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2 |x_j|^2}{\alpha_j^2} < \infty \right\} \subset H_0 \subset \ell_p.$$

   De la demostración se sigue que $(\imath, H, \ell_p)$ es un espacio de Wiener abstracto.

2. Tomemos $X = c_0$. Si bien $\ell_2 \subset c_0$, no se verifica la desigualdad estricta de las normas, $\|e_j\|_2 = \|e_j\|_\infty = 1$, tomando $0 < \alpha < 1$, bastará definir

$$H_0 = \left\{ x \in c_0 : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \right\}, \quad \text{con } \langle x, y \rangle_0 = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}.$$

Nuevamente, definiendo un operador de Hilbert-Schmidt:

$$A : H_{0,\mathbb{R}} \to H_{0,\mathbb{R}},$$

por ejemplo, el definido anteriormente, se tiene

$$H = \left\{ x \in c_0 : \sum_{j=1}^{\infty} j^2 |x_j|^2 < \infty \right\}, \quad \text{con } \langle x, y \rangle = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} j^2 x_j \overline{y_j}.$$

Resulta así $(\imath, H, c_0)$ un espacio de Wiener abstracto.

Recordando la Observación 2.2.26 debemos aclarar que, en general, cuando X tiene una medida Gaussiana previamente definida, los cambios necesarios en la demostración no permiten la definición del espacio de Hilbert H_0. Aún así, por el Teorema 2.2.19, existe un espacio de Banach $X_0 \subset X$, que posee base de Schauder. Sin embargo, por la construcción efectuada, sólo necesitamos probar la versión débil del teorema:

Teorema 2.3.5. *Dado un espacio de Banach separable sobre $\mathbb{C}$, sea $(\imath, H, X)$ el espacio de Wiener abstracto construido anteriormente. Entonces, existen una sucesión de proyecciones ortogonales $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{F}$, verificando que $p_n \to I_H$ en la topología fuerte y un espacio de Hilbert H_0 tal que $(\imath_0, H, H_0)$ es un espacio de Wiener abstracto, además:*

a) $\|\cdot\|_{H_0}$ es más fuerte que $\|\cdot\|_X$, esto es $H_0 \hookrightarrow X$.

b) p_n se extiende a una proyección continua $P_n : X_0 \to H_0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

c) $\|P_n y - y\|_{H_0} \longrightarrow 0 \ \forall y \in H_0$. Es decir, $P_n \to I_{H_0}$ en la topología fuerte en el espacio de operadores continuos en definidos en H_0.

Demostración. La existencia del espacio de Wiener abstracto $(\imath_0, H, H_0)$ y la desigualdad $\|\cdot\|_X < \|\cdot\|_{H_0}$, están probadas en la demostración del Teorema 2.3.2. En la Observación 2.3.4 se fijó una base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en H, si a partir de esta, se definen:

$$p_n : H \to H$$

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

y

$$P_n : H_0 \to H_0$$

$$P_n(y) = \sum_{k=1}^{n} \left\langle y, \frac{i_0(e_k)}{\|i_0(e_k)\|_0} \right\rangle_0 \frac{i_0(e_k)}{\|i_0(e_k)\|_0},$$

entonces, por ser $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left\{\frac{i_0(e_k)}{\|i_0(e_k)\|_0}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ bases ortonormales en H y H_0 respectivamente, $p_n \to I_H$ y $P_n \to I_{H_0}$ en la topología fuerte sobre los operadores continuos en H y H_0. Además,

$$P_n[i_0(x)] = \sum_{k=1}^{n} \left\langle i_0(x), \frac{i_0(e_k)}{\|i_0(e_k)\|_0} \right\rangle_0 \frac{i_0(e_k)}{\|i_0(e_k)\|_0} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{r=1}^{\infty} (\lambda_r x_r) \left(\lambda_r \frac{\delta_{kr}}{\lambda_k} \right) \right] \frac{i_0(e_k)}{\lambda_k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \frac{i_0(e_k)}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, i_0(e_k) = i_0[p_n(x)].$$

De este modo se puede tomar las proyecciones $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{F}$ como la sucesión de proyecciones ortogonales en H que se extienden continuamente a H_0 con las propiedades enunciadas. □

Definición 2.3.6. *Una variable aleatoria $\phi : X \to \mathbb{C}$, es Gaussiana compleja con media m y varianza σ^2, si la función de densidad de probabilidades $\delta_\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ es de la forma*

$$\delta_\phi(\xi) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-|\xi - m|^2/\sigma^2}.$$

Proposición 2.3.7. *Sea $(\imath, H, X)$ un espacio de Wiener abstracto (complejo), $\phi \in X'$ una funcional $\mathbb{C}-$ lineal no nula. Entonces ϕ es una variable aleatoria Gaussiana compleja, con media 0 y varianza $\|\imath'\phi\|_{H'}^2$.*

Demostración. Sea $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$, veamos que el conjunto $\{w \in X : \phi(w) \in \Delta\}$ es un cilindro en X. Escribiendo

$$\phi(w) = \Re(\phi(w)) + i\,\Im(\phi(w)) = \Re(\phi(w)) - i\,\Re(\phi(i\,w)),$$

e identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ de la manera usual

$$a + i\,b \mapsto (a, b)$$

$$\Delta \to \widetilde{\Delta} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

resulta

$$\{w \in X : \phi(w) \in \Delta\} = \left\{ w \in X : (\Re(\phi(w)), -\Re(\phi(i\,w))) \in \widetilde{\Delta} \right\} \in \mathcal{C}_X.$$

Calculemos Γ sobre la preimagen de este cilindro

$$\Gamma(\{x \in H : \phi(\imath x) \in \Delta\}) = \Gamma\left(\left\{ x \in H : (\Re(\phi(\imath x)), -\Re(\phi(i\,\imath x))) \in \widetilde{\Delta} \right\} \right).$$

Sea $y \in H$ el vector que representa a la funcional $\Re(\imath'\phi(\cdot))$, esto es

$$\Re(\phi(\imath x)) = \Re\langle x, y\rangle \quad \text{para todo } x \in H,$$

el elemento que representa a $\Im(\imath'\phi(\cdot))$ es $iy \in H$,

$$-\Re(\phi(i\,\imath x)) = \Re\langle x, iy\rangle \quad \text{para todo } x \in H.$$

Como $y \perp (iy)$ en $H_{\mathbb{R}}$, llamando $S = [y, iy]$, resulta

$$\left\{x \in H : (\Re(\phi(\imath x)), -\Re(\phi(i\,\imath x))) \in \widetilde{\Delta}\right\} =$$

$$\left\{x \in H : \left(\left\langle x, \frac{y}{\|y\|_{H_{\mathbb{R}}}}\right\rangle_{\mathbb{R}} \|y\|_{H_{\mathbb{R}}}, \left\langle x, \frac{iy}{\|iy\|_{H_{\mathbb{R}}}}\right\rangle_{\mathbb{R}} \|iy\|_{H_{\mathbb{R}}}\right) \in \widetilde{\Delta}\right\}.$$

Teniendo en cuenta que $\|y\|_{H_{\mathbb{R}}} = \|iy\|_{H_{\mathbb{R}}} = \|iy\|_H = \|y\|_H$, se puede definir

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T(r, s) = \frac{1}{\|y\|_H}(r, s),$$

de esta forma

$$\Gamma\left(\left\{x \in H : (\Re(\phi(\imath x)), \Im(\phi(\imath x))) \in \widetilde{\Delta}\right\}\right) =$$

$$\Gamma\left(\left\{x \in H : P_S(x) \in T(\widetilde{\Delta})\right\}\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{T(\widetilde{\Delta})} e^{-\|(u,v)\|^2}\, du\, dv = \frac{1}{\pi\|y\|_H^2}\int_{\widetilde{\Delta}} e^{-\|(r,s)\|^2/\|y\|_H^2}\, dr\, ds,$$

entonces

$$W\left(\{w \in X : \phi(w) \in \Delta\}\right) = \frac{1}{\pi\|y\|_H^2}\int_{\Delta} e^{-\|\xi\|^2/\|y\|_H^2}\, d\xi.$$

Por el teorema de representación de Riesz y la observación 2.3.1, tenemos que

$$\|y\|_H^2 = \|\Re(\imath'\phi)\|_{H_{\mathbb{R}}}^2 = \|\imath'\phi\|_{H'}^2,$$

por lo tanto

$$W\left(\{w \in X : \phi(w) \in \Delta\}\right) = \frac{1}{\pi\|\imath'\phi\|_{H'}^2}\int_{\Delta} e^{-\|\xi\|^2/\|\imath'\phi\|_{H'}^2}\, d\xi.$$

Resulta así que ϕ es una variable aleatoria Gaussiana compleja con media 0 y varianza $\|\imath'\phi\|_{H'}^2$. □

Observación 2.3.8. *Para determinar la distribución de una funcional lineal $\psi : X \to \mathbb{R}$, es posible tomar $\phi(w) = \psi(w) - i\,\psi(i\,w)$ que resulta $\mathbb{C}-$ lineal y calcular*

$$W\left(\{w \in X : \psi(w) \in \Delta \subset \mathbb{R}\}\right) = W\left(\{w \in X : \phi(w) \in \Delta + i\,\mathbb{R} \subset \mathbb{C}\}\right),$$

integrando en la segunda variable,

$$W\left(\{w \in X : \psi(w) \in \Delta \subset \mathbb{R}\}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\|\imath'\phi\|_{H'}} \int_{\Delta} e^{-r^2/\|\imath'\phi\|^2_{H'}}\, dr.$$

Por lo tanto ψ tiene distribución Gaussiana (real), con media 0 y varianza $\|\imath'\phi\|^2_{H'}/2$.

Supongamos que tenemos en $\mathbb{C}^n$ una medida Gaussiana μ_n, producto de n medidas $\{\nu_k\}_{k=1}^n$, cada una de ellas con densidad $\delta_k(w) = \dfrac{1}{\pi\sigma_k^2} e^{-|w|^2/\sigma_k^2}$. Para ε "suficientemente chico" calculemos, usando coordenadas polares, la integral:

$$\int_{\mathbb{C}^n} e^{\varepsilon\|\omega\|^2}\, d\mu_n(\omega) = \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{C}} e^{\varepsilon|w_k|^2} e^{-|w_k|^2/\sigma_k^2}\, \frac{dw_k}{\pi\sigma_k^2} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\varepsilon\sigma_k^2}.$$

En este caso, "suficientemente chico" significa $\varepsilon\sigma_k^2 < 1$ para $k = 1, \ldots, n$. Si tuviéramos un producto infinito de copias de $\mathbb{C}$ y aceptáramos hacer la misma cuenta, aún cuando $\varepsilon\sigma_k^2 < 1$ para todo k, la integral podría no tener sentido. Por otro lado, el producto infinito $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\varepsilon\sigma_k^2}$ es convergente si y sólo si $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon\sigma_k^2 < \infty$. Es decir, no sólo hay condiciones sobre ε sino también sobre el comportamiento de las varianzas.

En el caso que nos interesa, donde W es la medida de Wiener sobre el espacio de Banach X, como sabemos por la Observación 2.2.21 que $W(H_0) = 1$, tenemos:

$$\int_X e^{\varepsilon\|x\|_X^2}\, dW(x) = \int_{H_0} e^{\varepsilon\|x\|_X^2}\, dW(x) \le \int_{H_0} e^{\varepsilon\|x\|_0^2}\, dW(x).$$

Manteniendo la notación del Teorema 2.3.2, tomamos $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H y en H_0 la base ortonormal $\left\{\frac{\imath_0(e_n)}{\|\imath_0(e_n)\|_0}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, usando el teorema de convergencia monótona, podemos expresar esta última integral como:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{H_0} e^{\varepsilon\sum_{k=0}^{N}\left|\left\langle x, \frac{\imath_0(e_k)}{\|\imath_0(e_k)\|_0}\right\rangle\right|^2} dW(x) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \int_{H_0} e^{\varepsilon\left|\left\langle x, \frac{\imath_0(e_k)}{\|\imath_0(e_k)\|_0}\right\rangle\right|^2} dW(x).$$

La Proposición 2.3.7 nos muestra que tomar coordenadas resulta una variable aleatoria Gaussiana compleja con media 0 y varianza $\left\|\imath_0'\left(\frac{\imath_0(e_k)}{\|\imath_0(e_k)\|_0}\right)\right\|_{H'}^2 = \lambda_k^2$, por lo tanto este producto de integrales se puede reescribir como:

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{C}} e^{\varepsilon|w|^2} e^{-|w|^2/\lambda_k^2}\, \frac{dw_k}{\pi\lambda_k^2} = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-\varepsilon\lambda_k^2}.$$

Naturalmente, necesitamos que $\varepsilon\lambda_k^2 < 1$ para que las integrales converjan. En tal caso, el límite del producto es convergente ya que $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon\lambda_k^2 < \infty$, por ser $A(e_k) = \lambda_k e_k$ un operador de Hilbert-Schmidt. De este razonamiento podemos concluir que $e^{\varepsilon\|x\|_X^2}$ es una función integrable para $\varepsilon > 0$, suficientemente chico, respecto a la medida de Wiener en X.

En un caso general, sabemos que el espacio H_0 podría no ser un Hilbert, sino un espacio de Banach con base de Schauder. Se puede probar también en ese caso, cambiando la demostración, el siguiente teorema:

Teorema 2.3.9. *(Fernique [12]) Sea $(\imath, H, X)$ un espacio de Wiener abstracto, existe entonces $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\int_X e^{\varepsilon\|x\|^2}\, dW(x) < \infty.$$

2.3.1. Una visión alternativa sobre la construcción de la medida

En el caso de espacios de dimensión finita, para definir una medida es suficiente dar los valores que toma sobre paralelepípedos de lados paralelos a los ejes coordenados. En un espacio de Hilbert, un "conjunto cilíndrico" con base "rectangular" es el equivalente de un paralelepípedo finito dimensional, y sin embargo la definición de una medida finitamente aditiva sobre ellos no garantiza la existencia de una medida $\sigma-$aditiva en todo el espacio. El problema de existencia de una medida como límite de medidas finito dimensionales, teoría de Kolmogorov-Bochner-Minlos, fue estudiado originalmente por Kolmogorov para el caso de $\mathbb{R}^\infty$, luego generalizado al producto directo de espacios métricos $\sigma-$compactos y espacios métricos completos y separables. También se probaron teoremas de extensión para límites proyectivos en lugar de productos directos.

A partir de las medidas Gaussianas definidas en $\mathbb{C}^n$, utilizando un teorema de extensión garantizamos la existencia de una medida $\sigma-$aditiva en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Esta medida tiene soporte sobre un subconjunto que tiene estructura de espacio de Hilbert. Esta construcción muestra, de manera diferente, la $\sigma-$aditividad de la medida W sobre X.

Definición 2.3.10. *Dada $\{(X_k, \mathcal{B}_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios medibles, se define el espacio medible producto como*

$$X = \prod_{k=1}^{\infty} X_k, \quad \mathcal{B} = \sigma\left(\bigcup \Pi_k^{-1}(\mathcal{B}_k)\right),$$

donde $\Pi_k : X \to X_k$ denotan las proyecciones.

En forma similar se definen los "productos parciales" de $(X_k, \mathcal{B}_k)$,

$$\overline{X_n} = \prod_{k=1}^{n} X_k, \quad \mathcal{B}_{\overline{X_n}} = \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{n} \Pi_k^{-1}(\mathcal{B}_k)\right),$$

donde $\pi_k : \overline{X_n} \to X_k$ son las proyecciones. Llamando $p_n : X \to \overline{X_n}$ a la proyección sobre el producto parcial, tenemos:

$$\Pi_k = \pi_k \circ p_n \qquad k \leq n.$$

Supongamos que en cada producto parcial $\overline{X_n}$ tenemos definida una medida μ_n. Si $m \leq n$, podemos definir la proyección $p_{mn} : \overline{X_n} \to \overline{X_m}$, y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p_n"] \arrow[dr, "p_m"'] & (\overline{X_n}, \mu_n) \arrow[d, "p_{mn}"] \\ & (\overline{X_m}, \mu_m) \end{tikzcd}$$

Definición 2.3.11. *La sucesión de medidas $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ es consistente si para todo par de números $m \leq n$ se tiene:*

$$\mu_m = p_{mn}(\mu_n).$$

Esto es,

$$\mu_m(\Delta) = \mu_n(p_{mn}^{-1}(\Delta)) \text{ para todo } \Delta \in \mathcal{B}_{\overline{X_m}}.$$

En nuestro caso, nos interesa $X_k = \mathbb{C}$, $\mathcal{B}_k$ los borelianos de $\mathbb{C}$, y por lo tanto $\mathcal{B}$ la sigma álgebra de Borel de X con la topología producto. Los productos parciales dan origen a $\mathbb{C}^n$, los dotamos con medidas de probabilidad Gaussianas μ_n. Llamando μ_1 a la medida Gaussiana standard en $\mathbb{C}$, las medidas μ_n se pueden expresar como

$$\mu_n = \underbrace{\mu_1 \otimes \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_1}_{n-veces},$$

la condición de compatibilidad se satisface. Si $n = m + r$:

$$p_{mn}^{-1}(\Delta) = \Delta \times \mathbb{C}^r$$

$$\mu_m(\Delta) = (\nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \cdots \otimes \nu_m)(\Delta) = (\nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \cdots \otimes \nu_m)(\Delta)\ (\nu_{m+1} \otimes \cdots \otimes \nu_{m+r})(\mathbb{C}^r)$$

$$(\nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \cdots \otimes \nu_m \otimes \nu_{m+1} \otimes \cdots \otimes \nu_{m+r})(\Delta \times \mathbb{C}^r) = \mu_n(p_{mn}^{-1}(\Delta)).$$

Definición 2.3.12. *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida, τ una topología en X. Se definen en 2^X:*

1. *Medida interior:*

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(\Delta) : \Delta \in \mathcal{B},\ \Delta \subset E\}.$$

2. *Medida interior compacta:*

$$\mu_\tau(E) = \sup\{\mu_*(K) : K \text{ es compacto },\ K \subset E\}.$$

3. *La medida μ es compacto-regular respecto a τ, si $\mu(\Delta) = \mu_\tau(\Delta)$ para todo conjunto $\Delta \in \mathcal{B}$.*

El siguiente teorema es una variante del teorema de extensión de Kolmogorov (pág. 23, [23]).

Teorema 2.3.13. *Sea $\{(X_k, \mathcal{B}_k)\}_{k\geq 1}$ una sucesión de espacios medibles, y $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ una familia consistente de medidas definidas en los productos parciales. Si existen topologías τ_k en X_k tales que μ_n resulta compacto-regular en la topología producto de $\overline{X_n}$, entonces $\{\mu_n\}$ puede extenderse a una medida $\sigma-$aditiva definida en el espacio producto $(X, \mathcal{B})$. Esto es, existe una medida $\sigma-$aditiva μ definida en $(X, \mathcal{B})$, tal que $\mu_n(\Delta) = \mu(p_n^{-1}(\Delta))$ para todo $n \geq 1$, $\Delta \in \mathcal{B}(\overline{X_n})$.*

Observación 2.3.14. *Sea μ_1 la medida Gaussiana en $\mathbb{C}$ con densidad $\delta_1(w) = \dfrac{1}{\pi}e^{-|w|^2}$, si tomamos:*

1. *$X_k = (\mathbb{C}, \|\cdot\|)$, para todo $k \geq 1$.*
2. *$\overline{X_n} = \mathbb{C}^n$, con la topología usual.*
3. *La sucesión de medidas μ_n, definidas en los borelianos de $\overline{X_n}$ con función de densidad $\delta_n(w) = \dfrac{1}{\pi^n}e^{-\|w\|^2} = \underbrace{\mu_1 \otimes \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_1}_{n \text{ veces}}$.*
4. *$X = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto,*

se verifican las hipótesis del Teorema 2.3.13 y existe por lo tanto una medida $\sigma-$aditiva μ definida en los borelianos de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, que extiende a la familia μ_n. Es decir $\mu_n = p_n(\mu)$ para todo $n \geq 1$.

Sea entonces $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de números reales positivos, con la condición adicional de ser $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty$. Llamemos $B_0 \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de sucesiones de números complejos definidas del siguiente modo:

$$B_0 = \left\{ (x_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \,|x_k|^2 < \infty \right\}.$$

Definiendo en B_0 un producto interno $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_0$ por medio de:

$$\langle x, y\rangle_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2\, x_k\, \overline{y_k},$$

B_0 resulta un espacio de Hilbert.

Consideremos el siguiente límite iterado:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} e^{-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^2|x_j|^2}\right) = \begin{cases} \lim_{N\to\infty} e^{-\frac{\|x\|_0^2}{N}} & = 1 \quad x\in B_0 \\ \\ \lim_{N\to\infty} 0 & = 0 \quad x\notin B_0 \end{cases}$$

por lo tanto

$$\lim_{N\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} e^{-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^2|x_j|^2}\right) = \chi_{B_0}(x).$$

Cuando $k\to\infty$, las funciones

$$g_{N,k}(x) = e^{-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^2|x_j|^2}$$

convergen, de manera decreciente y mayoradas por la constante 1, a la función

$$g_N(x) = \begin{cases} e^{-\|x\|_0^2/N} & x\in B_0 \\ \\ 0 & x\notin B_0 \end{cases}$$

Así mismo, $g_N(x)$ tiende a $\chi_{B_0}(x)$, de manera creciente y uniformemente acotada por la constante 1. Aplicando en dos oportunidades el teorema de convergencia dominada,

$$\int_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}\chi_{B_0}(x)\,d\mu(x) = \lim_{N\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}} g_{N,k}(x)\,d\mu(x)\right) =$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{C}^k} g_{N,k}(x)\,d\mu_k(x)\right) =$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{k}\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\lambda_j^2|w|^2}{N}} e^{-|w|^2}\,\frac{dw}{\pi}\right) =$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{k}\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{(\lambda_j^2+N)}{N}|w|^2}\,\frac{dw}{\pi}\right) =$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{k}\frac{N}{N+\lambda_j^2}\right).$$

Para todo $N \in \mathbb{N}$, el producto infinito es convergente por ser

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2}{N+\lambda_j^2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2}{N} < \infty.$$

Llamemos $L_N = \lim\limits_{k\to\infty} \prod\limits_{j=1}^{k} \frac{N}{N+\lambda_j^2}$, tomando logaritmos resulta:

$$\ln(L_N) = \lim_{k\to\infty} \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \frac{N}{N+\lambda_j^2}\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \ln\left(\frac{N}{N+\lambda_j^2}\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \ln(N) - \ln(N+\lambda_j^2),$$

por ser $\ln(\,\cdot\,)$ una función monótona creciente, tenemos la desigualdad

$$\sum_{j=1}^{k} \ln(N) - \ln(N+\lambda_j^2) \leq 0,$$

además, aplicando el teorema del valor medio a las funciones $f_j(t) = \ln(N+t\lambda_j^2)$, podemos afirmar que existe una sucesión de números $\{\theta_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ para la cual vale:

$$\ln(N) - \ln(N+\lambda_j^2) = \frac{-\lambda_j^2}{N+\theta_j\lambda_j^2}.$$

Como

$$\frac{-\lambda_j^2}{N} \leq \frac{-\lambda_j^2}{N+\theta_j\lambda_j^2} = \ln(N) - \ln(N+\lambda_j^2) \qquad \text{para todo } j \geq 1,$$

sumando sobre j,

$$-\frac{\|(\lambda_j)\|_2^2}{N} \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{-\lambda_j^2}{N} \leq \sum_{j=1}^{k} \ln(N) - \ln(N+\lambda_j^2) \leq 0,$$

por lo tanto:

$$-\frac{\|(\lambda_j)\|_2^2}{N} \leq \ln(L_N) \leq 0$$

y entonces

$$1 = \lim_{N\to\infty} e^{-\|(\lambda_j)\|_2^2/N} \leq \lim_{N\to\infty} L_N \leq e^0 = 1.$$

Resulta así que

$$\mu(B_0) = \lim_{N\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k} \frac{N}{N+\lambda_k^2}\right) = 1 = \mu(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}).$$

Dado ahora un espacio de Banach separable X, construimos una pareja de espacios de Hilbert H y H_0 como en el Teorema 2.3.2 y fijamos la base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H, como en la

Observación 2.3.4. Veamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \ell^2 \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ H \arrow[r, "i_0"] & H_0 \arrow[r, "\jmath"] & X \end{tikzcd}$$

donde ϕ es el isomorfismo isométrico de $\ell^2 \to H$ que manda su base canónica $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en la base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H. Para la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ elegida en el Teorema 2.3.2, tomamos B_0 como en la construcción anterior, por lo tanto la sucesión $\{\delta_n/\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta una base ortonormal de B_0. Así mismo $\{e_n/\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de H_0, consideramos entonces $\varphi : B_0 \to H_0$, la isometría que manda una base en la otra. La medida W en los borelianos de X es la medida $\jmath \circ \varphi(\mu_{|B_0})$.

Capítulo 3

Fórmulas integrales

Queremos ahora extender las fórmulas integrales (A) y (B), propuestas en la introducción. Notaremos X a un espacio de Banach separable sobre $\mathbb{C}$. Consideraremos, asociado a X, el espacio de Wiener abstracto $(\imath, H, X)$ construido en el Teorema 2.3.2 y las proyecciones ortogonales $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que se extienden continuamente a proyecciones $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas en H_0, cuya existencia se asegura en el Teorema 2.3.5. Tras probar las fórmulas en el caso finito-dimensional, las extenderemos para funciones holomorfas definidas en X'.

3.1. Preliminares

Dado el espacio de Wiener abstracto $(\imath, H, X)$, tenemos definido entonces el operador restricción $\imath' : X' \to H'$. Si identificamos H' con H por medio de

$$I : H' \longrightarrow H,$$

definida de modo tal que $\phi(x) = \langle x, I(\phi)\rangle$ para todo $x \in H$ y $\phi \in H'$, se obtiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\imath"] & X \\
H' \arrow[u, "I"] & X' \arrow[l, "\imath'"] \arrow[u, "A'=\imath\circ I\circ\imath'"']
\end{tikzcd}$$

Observación 3.1.1. *Interpretemos que representa el operador A'. Para esto recordemos la definición dada en la Sección 2.1.2:*
Sea μ una medida boreliana en H, el operador de covarianza S_μ de μ, está definido como el único operador que verifica

$$\langle S_\mu x, y\rangle_H = \int_H \langle x, z\rangle_H \langle y, z\rangle_H \, d\mu(z) \qquad \textit{para todo par de vectores } x, y \in H.$$

Estábamos trabajando, entonces, con espacios reales, podríamos modificar la definición aceptando que las funcionales lineales sean complejas:
"Sea μ una medida boreliana en H, el operador de covarianza S_μ de μ, está definido como el único operador que verifica

$$\langle S_\mu x, y\rangle_H = \int_H \langle x,z\rangle_H \overline{\langle y,z\rangle_H}\, d\mu(z) \qquad \textit{para todo par de vectores } x,y\in H.\text{"}$$

En este caso, tomando $z,w\in X'$, calculemos

$$\int_X z(\gamma)\,\overline{w(\gamma)}\,dW(\gamma).$$

Si z ó w es la funcional nula, entonces la integral es 0. Si $\{z,w\}$ es un conjunto linealmente dependiente, digamos $z=\lambda w$, utilizando la Proposición 2.3.7, la integral a calcular es:

$$\int_X \lambda|w(\gamma)|^2\,dW(\gamma) = \lambda\int_{\mathbb{C}} |\xi|^2\, e^{-|\xi|^2/\|\imath' w\|^2_{H'}}\,\frac{d\xi}{\pi\|\imath' w\|^2_{H'}} = \lambda\|\imath' w\|^2_{H'} = \langle \imath' z, \imath' w\rangle_{H'},$$

que por ser I un isomorfismo anti-lineal, es

$$\overline{\langle I\circ\imath' z, I\circ\imath' w\rangle_H} = \langle I\circ\imath' w, I\circ\imath' z\rangle_H.$$

En el caso que el conjunto $\{z,w\}$ sea independiente, sobre $\imath(H)$ podemos escribir

$$z(\imath x)\,\overline{w(\imath x)} = \imath' z(x)\,\overline{\imath' w(x)} = \langle x, I\circ\imath' z\rangle_H\,\overline{\langle x, I\circ\imath' w\rangle_H} \qquad x\in H,$$

que es una función cilíndrica, es decir, existe $\varphi : [I\circ\imath' z, I\circ\imath' w]\to\mathbb{C}$ tal que

$$z(\imath x)\,\overline{w(\imath x)} = \varphi\circ P_{[I\circ\imath' z, I\circ\imath' w]}(x).$$

Por lo tanto, por ser la integral de una función cilíndrica, puede ser calculada integrando sobre H. Por la Observación 2.2.8:

$$\int_H \varphi\circ P_{[I\circ\imath' z, I\circ\imath' w]}(x)\,d\Gamma(x) = \int_{P_{[I\circ\imath' z, I\circ\imath' w]}(H)} \varphi(y)\,e^{-\|y\|^2_H}\,\frac{dt}{\pi^2}.$$

¿Qué expresión tiene φ? Para buscar la proyección ortogonal sobre el subespacio, ortonormalicemos la base utilizando Gram-Schmidt:

$$I\circ\imath' z \rightsquigarrow \frac{I\circ\imath' z}{\|I\circ\imath' z\|_H} = V_1$$

y luego

$$I\circ\imath' w \rightsquigarrow \frac{I\circ\imath' w - \langle I\circ\imath' w, V_1\rangle_H V_1}{\|I\circ\imath' w - \langle I\circ\imath' w, V_1\rangle_H V_1\|_H} = V_2.$$

Por lo tanto, si $y = P_{[I\circ\imath' z, I\circ\imath' w]}(x) = t_1V_1 + t_2V_2$, resulta:

$$\langle x, I\circ\imath' z\rangle_H = \langle x, V_1\rangle_H \|I\circ\imath' z\|_H = t_1\|I\circ\imath' z\|_H,$$

y como

$$I \circ \imath' w - \big\langle I \circ \imath' w, V_1 \big\rangle_H V_1 = \big\| I \circ \imath' w - \big\langle I \circ \imath' w, V_1 \big\rangle_H V_1 \big\|_H V_2,$$

despejando,

$$I \circ \imath' w = \big\langle I \circ \imath' w, V_1 \big\rangle_H V_1 + \big\| I \circ \imath' w - \big\langle I \circ \imath' w, V_1 \big\rangle_H V_1 \big\|_H V_2,$$

resulta:

$$\begin{aligned} \overline{\langle x, I \circ \imath' w \rangle_H} &= \big\langle I \circ \imath' w, V_1 \big\rangle_H \overline{\langle x, V_1 \rangle_H} + \big\| I \circ \imath' w - \big\langle I \circ \imath' w, V_1 \big\rangle_H V_1 \big\|_H \overline{\langle x, V_2 \rangle_H} \\ &= \big\langle I \circ \imath' w, V_1 \big\rangle_H \overline{t_1} + \big\| I \circ \imath' w - \big\langle I \circ \imath' w, V_1 \big\rangle_H V_1 \big\|_H \overline{t_2}. \end{aligned}$$

Tenemos así

$$\varphi \circ P_{[I \circ \imath' z, I \circ \imath' w]}(x) = \varphi(y) = \varphi(t_1 V_1 + t_2 V_2) =$$

$$t_1 \, \| I \circ \imath' z \|_H \left[\big\langle I \circ \imath' w, V_1 \big\rangle_H \overline{t_1} + \big\| I \circ \imath' w - \big\langle I \circ \imath' w, V_1 \big\rangle_H V_1 \big\|_H \overline{t_2} \right] =$$

$$\langle I \circ \imath' w, V_1 \rangle_H \, \| I \circ \imath' z \|_H \, |t_1|^2 + \| I \circ \imath' z \|_H \, \big\| I \circ \imath' w - \big\langle I \circ \imath' w, V_1 \big\rangle_H \, V_1 \big\|_H \, t_1 \, \overline{t_2} =$$

$$\langle I \circ \imath' w, I \circ \imath' z \rangle_H \, |t_1|^2 + \| I \circ \imath' z \|_H \, \big\| I \circ \imath' w - \big\langle I \circ \imath' w, V_1 \big\rangle_H \, V_1 \big\|_H \, t_1 \, \overline{t_2}.$$

Calculamos ahora

$$\begin{aligned} \int_{P_{[I \circ \imath' z, I \circ \imath' w]}} \varphi(y) \, e^{-\|y\|_H^2} \frac{dt}{\pi^2} &= \int_{\mathbb{C}^2} \langle I \circ \imath' w, I \circ \imath' z \rangle_H \, |t_1|^2 \, e^{-(t_1^2 + t_2^2)} \, \frac{dt_1 dt_2}{\pi^2} \\ &+ \int_{\mathbb{C}^2} \| I \circ \imath' z \|_H \, \big\| I \circ \imath' w - \big\langle I \circ \imath' w, V_1 \big\rangle_H V_1 \big\|_H \, t_1 \overline{t_2} \, e^{-(t_1^2 + t_2^2)} \, \frac{dt_1 dt_2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Tomando coordenadas polares podemos ver, tal como hemos hecho en la introducción, que la segunda integral en esta suma vale 0. En la primera, integrando sobre t_2, obtenemos:

$$\int_{P_{[I \circ \imath' z, I \circ \imath' w]}} \varphi(y) \, e^{-\|y\|_H^2} \frac{dt}{\pi^2} = \langle I \circ \imath' w, I \circ \imath' z \rangle_H \int_{\mathbb{C}} |t_1|^2 \, e^{-t_1^2} \, \frac{dt_1}{\pi} = \langle I \circ \imath' w, I \circ \imath' z \rangle_H$$

por ser una Gaussiana de varianza 1.

Obtuvimos entonces:

$$\int_X z(\gamma) \, \overline{w(\gamma)} \, dW(\gamma) = \langle I \circ \imath' w, I \circ \imath' z \rangle_H = \imath' z (I \circ \imath' w) = z(\imath \circ I \circ \imath' w) = z(A' w) = \overline{w(A' z)},$$

es decir A' es el operador covarianza de la medida W en X.

Observemos nuevamente el diagrama del inicio:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\imath"] & X \\ H' \arrow[u, "I"] & X' \arrow[l, "\imath'"] \arrow[u, "A' = \imath \circ I \circ \imath'"'] \end{tikzcd}$$

El isomorfismo I es antilineal y para trabajar con funciones holomorfas deberemos introducir en H y H' operadores de involución.

En la Observación 2.3.4 se fijó una base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H, de modo tal que su base dual $\{e'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea de la forma $e'_n = \imath'(z_n)$ para alguna sucesión de elementos $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$. Además, se probó que las proyecciones ortogonales p_n sobre los subespacios $[e_1, e_2, \ldots, e_n]$ tienen la propiedad enunciada en el Teorema 2.3.5, es decir, existen proyectores ortogonales P_n en H_0 que extienden continuamente a los proyectores p_n.
Fijada esta base, si

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H,$$

definimos

$$x^* = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} e_n.$$

Dados $x, y \in H$, notemos que

$$\langle x^*, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n}\,\overline{y_n} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n} = \overline{\langle x, y^*\rangle},$$

por lo que la involución preserva ortogonalidad y norma.
De manera similar, para $\phi \in H'$, se define ϕ^* tal que $I(\phi^*) = I(\phi)^*$. Notemos que dados $x \in H$ y $\phi \in H'$

$$\phi(x^*) = \langle x^*, I(\phi)\rangle = \overline{\langle x, I(\phi)^*\rangle} = \overline{\langle x, I(\phi^*)\rangle} = \overline{\phi^*(x)}.$$

Definiendo

$$\imath^* : X' \to H'$$

$$\imath^* z = (\imath' z)^*,$$

obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\imath"] & X \arrow[d, dashed, shift left, "T"] \\
H' \arrow[u, "I"] & X' \arrow[l, "\imath^*"] \arrow[u, shift left, "A"]
\end{tikzcd}$$

donde $A = \imath \circ I \circ \imath^*$ es lineal, inyectivo y tiene imagen densa, por lo tanto existe $T : X \to X'$, inverso de A, definido sobre un subespacio denso de X.

Observación 3.1.2. *Una vez fijada esta base y definida la involución, notemos que:*

i) $(p_n x)^* = (\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_n\rangle\, e_n)^* = \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle x, e_n\rangle}\, e_n = p_n(x^*)$.

ii) $\|\imath_0\, p_n x\|_0^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_n\rangle|^2\ \|\imath_0 e_n\|_0^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_n^2\ |\langle x, e_n\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|\overline{\langle x, e_n\rangle}\right|^2\ \|\imath_0 e_n\|_0^2$
$= \|\imath_0\, p_n x^*\|_0^2$.

iii) Definiendo un isomorfismo

$$\Phi_n : \mathbb{C}^n \to p_n H$$

$$\Phi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_n e_n,$$

y definiendo una nueva norma

$$N : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$$

$$N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \|\imath_0[\Phi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]\|_0\,,$$

esta norma tiene la siguiente propiedad:

$$N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = N(|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|)$$

Proposición 3.1.3. *Dado un cilindro C en H, entonces $\Gamma(C) = \Gamma(C^*)$.*

Demostración. Sea

$$C = \{x \in H : (\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle, \ldots, \langle x, y_n\rangle) \in \Delta\},$$

con $\{y_j\}_{j=1}^n$ vectores ortonormales y $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ boreliano, entonces:

$$\begin{aligned} C^* &= \{x \in H : (\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle, \ldots, \langle x, y_n\rangle) \in \Delta\}^* \\ &= \{x^* \in H : (\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle, \ldots, \langle x, y_n\rangle) \in \Delta\} \\ &= \{x \in H : (\langle x^*, y_1\rangle, \langle x^*, y_2\rangle, \ldots, \langle x^*, y_n\rangle) \in \Delta\} \\ &= \{x \in H : (\overline{\langle x, y_1^*\rangle}, \overline{\langle x, y_2^*\rangle}, \ldots, \overline{\langle x, y_n^*\rangle}) \in \Delta\} \\ &= \{x \in H : (\langle x, y_1^*\rangle, \langle x, y_2^*\rangle, \ldots, \langle x, y_n^*\rangle) \in \overline{\Delta}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Gamma(C^*) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\overline{\Delta}} e^{-\|w\|^2}\, dw = \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta} e^{-\|w\|^2}\, dw = \Gamma(C).$$

□

3.2. Fórmula integral (A)

En la introducción habíamos sugerido una expresión integral para funciones enteras en $\mathbb{C}^n$:

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{\langle z, \omega\rangle} f(\omega)\, d\mu_n(\omega),$$

donde μ_n es la medida Gaussiana en $\mathbb{C}^n$ para la cual la proyección sobre la $k-$ésima coordenada es una variable aleatoria Gaussiana compleja con media 0 y varianza 1, $k = 1, \ldots, n$. Por lo tanto cada variable aleatoria $\langle \cdot\,, e_k\rangle : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, tiene función de densidad de probabilidades $\delta(z) = \dfrac{1}{\pi} e^{-|z|^2}$. Esto será probado en el Lema 3.2.2 y luego ligeramente modificado para obtener el Teorema 3.2.3

Manteniendo la notación de las secciones anteriores, si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ representa un multi-índice, entonces $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ y $\omega^\alpha = \omega_1^{\alpha_1} \cdots \omega_n^{\alpha_n}$.

Lema 3.2.1. *Sea ν_n la medida Gaussiana en $\mathbb{C}^n$ definida como el producto de n medidas Gaussianas sobre $\mathbb{C}$, cada una de ellas con media 0 y varianza $\lambda_k^2 > 0$ para $k = 1, \ldots, n$ para $k = 1, \ldots, n$. La función de densidad de ν_n es de la forma:*

$$\delta_n(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \frac{1}{\pi^n \lambda_1^2 \, \lambda_2^2 \cdots \lambda_n^2} \, e^{-\sum_{k=1}^n |\omega_k|^2/\lambda_k^2}$$

entonces

$$\int_{\mathbb{C}^n} \omega^\alpha \, \overline{\omega}^\beta \, d\nu_n(\omega) = \delta_{\alpha\beta} \, \alpha! \prod_{k=1}^n \lambda_k^{2\alpha_k}.$$

Demostración.

$$\int_{\mathbb{C}^n} \omega^\alpha \, \overline{\omega}^\beta \, d\nu_n(\omega) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\pi \, \lambda_k^2} \int_{\mathbb{C}} \omega_k^{\alpha_k} \, \overline{\omega_k}^{\beta_k} \, e^{-|\omega_k|^2/\lambda_k^2} \, d\omega_k$$

$$= \prod_{k=1}^n \frac{1}{\pi \, \lambda_k^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho^{(\alpha_k+\beta_k)} e^{i(\alpha_k-\beta_k)\theta} \, e^{-\rho^2/\lambda_k^2} \, \rho \, d\theta \, d\rho$$

$$= \prod_{k=1}^n \left[\left(\int_0^{2\pi} e^{i(\alpha_k-\beta_k)\theta} \, \frac{d\theta}{2\pi} \right) \left(\int_0^\infty \rho^{(\alpha_k+\beta_k)} \, e^{-\rho^2/\lambda_k^2} \, \frac{2\rho}{\lambda_k^2} \, d\rho \right) \right]$$

$$= \prod_{k=1}^n \delta_{\alpha_k\beta_k} \left(\int_0^\infty \rho^{(\alpha_k+\beta_k)} \, e^{-\rho^2/\lambda_k^2} \, \frac{2\rho}{\lambda_k^2} \, d\rho \right) = \delta_{\alpha\beta} \prod_{k=1}^n \left(\int_0^\infty \rho^{2\alpha_k} \, e^{-\rho^2/\lambda_k^2} \, \frac{2\rho}{\lambda_k^2} \, d\rho \right)$$

$$= \delta_{\alpha\beta} \prod_{k=1}^n \left(\int_0^\infty \lambda_k^{2\alpha_k} \, u^{\alpha_k} \, e^{-u} \, du \right) = \delta_{\alpha\beta} \prod_{k=1}^n \lambda_k^{2\alpha_k} \, \alpha_k! = \delta_{\alpha\beta} \, \alpha! \prod_{k=1}^n \lambda_k^{2\alpha_k}.$$

□

Notemos que si μ_n es la Gaussiana standard, entonces

$$\int_{\mathbb{C}^n} \omega^\alpha \, \overline{\omega}^\beta \, d\mu_n(\omega) = \delta_{\alpha\beta} \, \alpha!.$$

Lema 3.2.2. *Sea $h : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ una función entera, $h \in L^p(\mu_n)$ para algún $p > 1$. Entonces para todo $z \in \mathbb{C}^n$ vale la igualdad:*

$$h(z) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{\langle z, \omega \rangle} h(\omega) \, d\mu_n(\omega).$$

Demostración. Como $|e^{\langle z,\omega\rangle}| \leq e^{\|z\|\|w\|}$, la función exponencial pertenece al espacio $L^q(\mu_n)$ para todo $q < \infty$. Por la tanto

$$\left| \int_{\mathbb{C}^n} e^{\langle z,\omega\rangle} h(\omega)\, d\mu_n(\omega) \right| \leq \|e^{\langle z,\,\cdot\,\rangle}\|_q \|h\|_p.$$

Escribiendo

$$h(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \omega^\alpha$$

y

$$e^{\langle z,\omega\rangle} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i \overline{\omega_i} \right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} \frac{1}{\beta!} z^\beta \overline{\omega}^\beta,$$

como estas series convergen uniformemente en toda bola, tenemos

$$\int_{\mathbb{C}^n} e^{\langle z,\omega\rangle} h(\omega)\, d\mu_n(\omega) = \int_{\mathbb{C}^n} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} \frac{1}{\beta!} z^\beta \overline{\omega}^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \omega^\alpha \, d\mu_n(\omega)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha z^\beta \frac{1}{\beta!} \int_{\mathbb{C}^n} \omega^\alpha \overline{\omega}^\beta \, d\mu_n(\omega)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha z^\beta \frac{\delta_{\alpha\beta}\, \alpha!}{\beta!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha z^\alpha = h(z).$$

□

Si intentamos extender esta fórmula a un espacio de Banach, debemos notar previamente algunos detalles a tener en cuenta. En principio, la expresión $\langle z, w\rangle$ carece de sentido para $z, w \in X$. En la fórmula probada en el Lema 3.2.2, podemos pensar $(\mathbb{C}^n)' \simeq \mathbb{C}^n$, y considerando $h : (\mathbb{C}^n)' \to \mathbb{C}$, $z \in (\mathbb{C}^n)'$, $w \in \mathbb{C}^n$ y la expresión $\langle z, w\rangle = z(\overline{w})$, podemos escribir:

$$h(z) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{z(\overline{w})} h(\omega)\, d\mu_n(\omega).$$

Aquí se presenta un nuevo inconveniente, ya que se necesita definir una transformación "equivalente" a conjugar, y esto en general no es posible. Revisando la demostración del lema, estas dificultades se pueden salvar si consideramos el desarrollo de la función h y notando que al conjugar se preserva la medida, escribimos la fórmula integral del siguiente modo:

$$h(z) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{z(w)} h(\overline{\omega})\, d\mu_n(\omega)$$

$$= \int_{\mathbb{C}^n} e^{z(w)} \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \overline{a_\alpha} \omega^\alpha}\, d\mu_n(\omega) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{z(w)} \overline{h^\sharp(\omega)}\, d\mu_n(\omega),$$

donde $h^\sharp : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es una transformación de h, que resulta L^p-integrable si sólo si $h \in L^p(\mu_n)$. Por lo tanto, con las notaciones introducidas, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.2.3. *Si $h : (\mathbb{C}^n)' \longrightarrow \mathbb{C}$ una función entera, $h^\sharp \in L^p(\mu_n)$ para algún $p > 1$. Entonces para todo $z \in (\mathbb{C}^n)'$ vale la igualdad:*

$$h(z) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{z(w)} \overline{h^\sharp(\omega)}\, d\mu_n(\omega) \qquad \textit{para todo } z \in (\mathbb{C}^n)'.$$

Para extender esta fórmula al contexto infinito dimensional, dado un espacio de Banach separable X, consideramos $(\imath, H, X)$ el espacio de Wiener abstracto dado por el Teorema 2.3.2 y la medida de Wiener en $(X, \mathcal{B}_X)$ que se obtiene con esta construcción.

Comencemos definiendo una transformación para funciones holomorfas $F : H \to \mathbb{C}$, vinculada con la involución definida en la sección anterior. Desarrollamos localmente a F en su serie de Taylor,

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \quad \text{ con } F_k \in \mathcal{P}(^k H),$$

cada polinomio F_k está asociado a una función $k-$linear simétrica ϕ_k, para la cual

$$F_k(x) = \phi_k(x, \dots, x).$$

Dados k elementos $x^1, \dots, x^k \in H$. Entonces

$$\begin{aligned}\phi_k(x^1, \dots, x^k) &= \phi_k \left(\sum_{i_1} x^1_{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_k} x^k_{i_k} e_{i_k} \right) \\ &= \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} x^1_{i_1} \cdots x^k_{i_k}\, \phi_k(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).\end{aligned}$$

Definimos

$$\phi_k^\sharp(x^1, \dots, x^k) = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} x^1_{i_1} \cdots x^k_{i_k}\, \overline{\phi_k(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})}.$$

Tenemos entonces que:

$$\phi_k \left((x^1)^*, \dots, (x^k)^* \right) = \overline{\phi_k^\sharp(x^1, \dots, x^k)}.$$

Asociados a esta función $k-$lineal se definen el polinomio

$$F_k^\sharp(x) = \phi_k^\sharp(x, \dots, x)$$

y la función

$$F^\sharp = \sum_k F_k^\sharp,$$

como en el caso de la función multilineal resulta

$$F(x^*) = \overline{F^\sharp(x)}.$$

Esta nueva función $F^\sharp : H \to \mathbb{C}$ es holomorfa al igual que F, pero en la transformación se han conjugado sus "coeficientes".

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable, $\imath : H \hookrightarrow X$ el espacio de Wiener abstracto dado por el Teorema 2.3.2 y W la medida de Wiener asociada a esta construcción. Sea $H_0 \subset X$ el espacio de Banach dado en el Teorema 2.3.5, $\|\cdot\|_0$ su norma y $\{p_n\}, \{P_n\}$ las proyecciones dadas en el mismo teorema.
El siguiente teorema da condiciones suficientes sobre una función holomorfa, definida en X', para que extendiendo la fórmula dada en el Teorema 3.2.3, sea posible representarla integralmente.

Primera representación integral

Teorema 3.2.4. *Dada $F : H \to \mathbb{C}$ holomorfa, supongamos que $F^\sharp(x) = \overline{F(x^*)}$ verifica:*
i) Existe $\widetilde{F^\sharp} \in L^p(W)$ para algún $p > 1$, continua en $(H_0, \|\cdot\|_0)$ tal que $F^\sharp = \widetilde{F^\sharp} \circ \imath$.
ii) Existe $g \in L^p(W)$, tal que $|\widetilde{F^\sharp} \circ P_n| \leq g$ en casi todo punto.

Si $f = F \circ I \circ \imath^* : X' \to \mathbb{C}$, y $f^\sharp = F^\sharp \circ I \circ \imath^*$, entonces

$$f(z) = \int_X e^{z(\gamma)} \overline{\widetilde{F^\sharp}(\gamma)}\, dW(\gamma) \quad \text{para todo } z \in X'.$$

Notemos que sobre el subespacio denso $Rg(A) = Rg(\imath \circ I \circ \imath^*) \subset X$, T es inverso de A y por lo tanto

$$f^\sharp \circ T = \widetilde{F^\sharp} \circ A \circ T = \widetilde{F^\sharp}.$$

Si $f^\sharp \circ T$ representa a la clase de $\widetilde{F^\sharp}$ en $L^p(W)$, la fórmula resulta:

$$f(z) = \int_X e^{z(\gamma)} \overline{(f^\sharp \circ T)(\gamma)}\, dW(\gamma) \quad \text{para todo } z \in X'.$$

Demostración. Para aclarar las relaciones entre las funciones, miremos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\imath"] \arrow[rrr, bend left=40, "F"] & H_0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\widetilde{F}"] \arrow[d, dashed, shift left, "T"] & \mathbb{C} \\
H' \arrow[u, "I"] & & X' \arrow[ll, "\imath^*"] \arrow[u, shift left, "A"] \arrow[ur, bend right, "f"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\imath"] \arrow[rrr, bend left=40, "F^\sharp"] & H_0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\widetilde{F^\sharp}"] \arrow[d, dashed, shift left, "T"] & \mathbb{C} \\
H' \arrow[u, "I"] & & X' \arrow[ll, "\imath^*"] \arrow[u, shift left, "A"] \arrow[ur, bend right, "f^\sharp"'] &
\end{tikzcd}$$

Las composiciones $F \circ p_n$ son funciones holomorfas y cilíndricas en H, luego por el Lema 3.2.2

$$(F \circ p_n)(x) = \int_H e^{\langle p_n x, y\rangle}(F \circ p_n)(y)\, d\Gamma(y) \quad \text{para todo } x \in H.$$

Como $\langle p_n x, y\rangle = \langle x, p_n y\rangle$, podemos escribir

$$(F \circ p_n)(x) = \int_H e^{\langle x, p_n y\rangle}(F \circ p_n)(y)\, d\Gamma(y).$$

El miembro izquierdo de esta igualdad converge a $F(x)$, restringidos a $I[\imath^*(X')] \subset H$, resulta $F[I(\imath^* z)] = f(z)$, y el producto interno:

$$\langle x, p_n y\rangle = \langle I(\imath^* z), p_n y\rangle = \overline{\langle p_n y, I(\imath^* z)\rangle} = \overline{\imath^*(z)(p_n y)}$$
$$= \overline{(z \circ \imath)^*(p_n y)} = (z \circ \imath)(p_n y^*) = z(\imath(p_n y^*)),$$

por lo tanto la integral puede escribirse como:

$$\int_H e^{z(\imath(p_n y^*))}(F \circ p_n)(y) d\Gamma(y).$$

Como la involución preserva la medida Γ, y $F(x) = \overline{F^\sharp(x^*)}$, tenemos

$$\int_H e^{z(\imath(p_n y^*))}\overline{F^\sharp(p_n y^*)}\, d\Gamma(y^*) = \int_H e^{z(\imath(p_n y))}\overline{F^\sharp(p_n y)}\, d\Gamma(y)$$
$$= \int_{H_0} e^{z(P_n \gamma)}\overline{\widetilde{F^\sharp}(P_n \gamma)}\, dW(\gamma).$$

Sabemos que P_n converge a la identidad en H_0 y $W(H_0) = 1$, por lo que la expresión sub-integral converge en casi todo punto a $e^{z(\gamma)}\overline{\widetilde{F^\sharp}(\gamma)}$.

Tenemos también las acotaciones:

$$\left| e^{z(P_n \gamma)}\overline{\widetilde{F^\sharp}(P_n \gamma)} \right| \leq e^{\|z\| \|P_n \gamma\|_0} \left| (\widetilde{F^\sharp} \circ P_n)(\gamma) \right| \leq e^{c\|z\| \|\gamma\|_0} g(\gamma).$$

Esta última expresión resulta integrable por ser g una función L^p-integrable para algún $p > 1$, y $e^{c\|z\| \|\gamma\|_0} \in L^q(W)$ para todo $q < \infty$, en particular para $q = p'$, ya que dado ε suficientemente chico, existe M tal que

$$\left(e^{c\|z\| \|\gamma\|_0}\right)^q = e^{qc\|z\| \|\gamma\|_0} \leq M e^{\varepsilon \|\gamma\|_0^2},$$

que resulta integrable por el Teorema 2.3.9 (Fernique).

Aplicando el teorema de convergencia dominada, tenemos entonces que las integrales convergen a

$$\int_{H_0} e^{z(\gamma)}\overline{\widetilde{F^\sharp}(\gamma)} dW(\gamma),$$

por lo que

$$f(z) = \int_{H_0} e^{z(\gamma)} \overline{\widetilde{F^\sharp}(\gamma)}\, dW(\gamma) \quad \text{para todo } z \in X',$$

con las notaciones establecidas es

$$f(z) = \int_X e^{z(\gamma)} \overline{(f^\sharp \circ T)}(\gamma) dW(\gamma).$$

□

En las hipótesis del teorema anterior se necesitan dos condiciones esenciales, una relativa a la integrabilidad y la otra a la continuidad de las funciones utilizadas. En el ejemplo siguiente mostraremos una clase de funciones que verifican estas hipótesis.

Como el operador $A : X' \to X$ es inyectivo, podemos definir una norma más débil en X' por medio de $\|z\|_A = \|Az\|$. Si $f : X' \to \mathbb{C}$ es holomorfa, y tiene desarrollo de Taylor alrededor de $z_0 = 0$, $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$, llamemos r_A al radio de convergencia calculado con esta norma,

$$r_A = \frac{1}{\limsup \|f_k\|_A^{1/k}}.$$

Definición 3.2.5. *Una función $f : X' \to \mathbb{C}$ es de tipo A-exponencial si existen constantes positivas c y σ tales que*

$$|f(z)| \le c e^{\sigma \|z\|_A} \quad \textit{para todo } z \in X'.$$

Proposición 3.2.6. *Sea $f : X' \to \mathbb{C}$ una función holomorfa según Gateaux. Entonces son equivalentes:*

i) f es de tipo A-exponencial.

ii) Para cada $a \in X'$, existe una sucesión de polinomios k-homogéneos $\{f_{k,a}\}_{k\in\mathbb{N}}$, continuos en la norma $\|\cdot\|_A$ que verifican

$$\|f_{k,a}\|_A \le C_{k,\|a\|_A} \frac{\sigma^k}{k!} \quad \textit{con} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{C_{k,\|a\|_A}} = 1,$$

tales que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k,a}(z-a).$$

iii) Existe una sucesión de polinomios k-homogéneos $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, continuos en la norma $\|\cdot\|_A$ que verifican

$$\|f_k\|_A \le C_k \frac{\sigma^k}{k!} \quad \textit{con} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{C_k} = 1,$$

tales que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z).$$

Luego, si alguna de estas condiciones se satisface, f resulta holomorfa según Fréchet, $r_A = \infty$ y f es uniformemente $\|\cdot\|_A$-continua sobre conjuntos $\|\cdot\|_A$-acotados.

Demostración. i) $\Rightarrow$ *ii)*. Para cada $a \in X'$ existen únicos polinomios k-homogéneos $f_{k,a}$, tales que $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k,a}(z-a)$. Además $f_{k,a}$ puede ser escrito como (pág. 148, [9]):

$$f_{k,a}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{f(a+\lambda z)}{\lambda^{k+1}} d\lambda.$$

Para todo $r > 0$ tenemos,

$$|f_{k,a}(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|=r} \frac{|f(a+\lambda z)|}{r^{k+1}} |d\lambda| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|=r} \frac{c e^{\sigma(\|a\|_A + r\|z\|_A)}}{r^{k+1}} |d\lambda|$$

$$= \frac{c e^{\sigma\|a\|_A}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{r\sigma\|z\|_A}}{r^{k+1}} r dt = c e^{\sigma\|a\|_A} \frac{e^{r\sigma\|z\|_A}}{r^k}.$$

Tomando $\|z\|_A \leq 1$, resulta así $f_{k,a}$ continuo en $\|\cdot\|_A$ y

$$\|f_{k,a}\|_A \leq c'_{\|a\|_A} \frac{e^{\sigma r}}{r^k} \text{ para todo } r > 0.$$

El mínimo de la función $r \mapsto \dfrac{e^{\sigma r}}{r^k}$ se alcanza en $r_k = \dfrac{k}{\sigma}$. Por lo tanto

$$\|f_{k,a}\|_A \leq c'_{\|a\|_A} \frac{e^{\sigma r_k}}{r_k^k} \leq c'_{\|a\|_A} \frac{e^k}{k^k} \sigma^k = c'_{\|a\|_A} \sqrt{2\pi k} \, \frac{e^k \, k!}{\sqrt{2\pi k} \, k^k} \, \frac{\sigma^k}{k!}.$$

Llamando

$$C_{k,\,\|a\|_A} = c'_{\|a\|_A} \sqrt{2\pi k} \, \frac{e^k \, k!}{\sqrt{2\pi k} \, k^k},$$

por la fórmula de Stirling

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e^k \, k!}{\sqrt{2\pi k} \, k^k} = 1,$$

se deduce que

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{C_{k,\|a\|_A}} = 1.$$

ii) $\Rightarrow$ *iii)*. Es un caso particular con $a = 0$.
iii) $\Rightarrow$ *i)*. Para todo $z \in X'$ tenemos:

$$|f(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_A \, \|z\|_A^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} C_k \, \frac{(\sigma\|z\|_A)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{2^k} \, \frac{(2\sigma\|z\|_A)^k}{k!},$$

por lo que

$$|f(z)| \leq \left[\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{C_k}{2^k} \right] e^{2\sigma\|z\|_A}.$$

Como $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{C_k/2^k} < 1$, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $C_k/2^k \leq C\ \forall k \in \mathbb{N}$ y por lo tanto f es de tipo A-exponencial.

Bajo cualquiera de estas tres condiciones equivalentes,

$$\|f_{k,a}\|_A^{1/k} \leq C_{k,\|a\|_A}^{1/k} \frac{\sigma}{(k!)^{1/k}},$$

por lo que $\limsup\limits_{k\to\infty} \|f_{k,a}\|_A^{1/k} = 0$, resultando $r_A = \infty$. Además.

$$|f(z) - f(a)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_{k,a}(z-a)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} C_{k,\|a\|_A} \frac{(\sigma\|z-a\|_A)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{k,\|a\|_A}}{2^k} \frac{(2\sigma\|z-a\|_A)^k}{k!} \leq C\left(e^{2\sigma\|z-a\|_A} - 1\right)$$

por lo que f uniformemente $\|\cdot\|_A$-continua en conjuntos $\|\cdot\|_A$-acotados. $\square$

Ejemplos

1. Si una función holomorfa f es de tipo $A-$exponencial, entonces se puede definir la función $\widetilde{G} = f \circ T$ sobre $Im(A)$. Por ser uniformemente $\|\cdot\|_A$-continua en conjuntos $\|\cdot\|_A$-acotados de X', y ser $Im(A)$ un subespacio denso en X, es posible extenderla continuamente a todo $(X, \|\cdot\|)$. Como $\|\cdot\|_0$ es más fuerte que la norma de X, $\widetilde{G}$ resulta $\|\cdot\|_0-$continua. La función $G = \widetilde{G} \circ \imath$ es por lo tanto continua y holomorfa según Gateaux en H, y por lo tanto holomorfa. Se tienen además las cotas sobre H_0:

   $$|\widetilde{G}(P_n(x))|^p \leq c^p e^{p\sigma\|P_n x\|} \leq c^p e^{p\sigma\|P_n x\|_0} \leq c^p e^{p\sigma\alpha\|x\|_0} \leq M e^{\varepsilon\|x\|_0^2},$$

   que resulta integrable por el teorema de Fernique (2.3.9).

   Con las notaciones del Teorema 3.2.4, sea $\widetilde{F^\sharp} = \widetilde{G}$, por lo tanto $F^\sharp = \widetilde{G} \circ \imath$ y $F(x) = \overline{F^\sharp(x^*)} = \overline{\widetilde{G} \circ \imath(x^*)}$. Aplicando el teorema, tenemos

   $$\int_X e^{z(\gamma)} \overline{\widetilde{G}(\gamma)}\, dW(\gamma) = F \circ I \circ \imath^*(z) = \overline{\widetilde{G} \circ \imath[(I \circ \imath^*(z))^*]} = \overline{\widetilde{G}[\imath \circ I \circ \imath'(z)]}.$$

   Recordando que $A' = \imath \circ I \circ \imath'$, el ejemplo muestra que dada una función f de tipo $A-$exponencial, entonces la función $\overline{f \circ T \circ A'}$ se representa integralmente.

2. Apliquemos el ejemplo anterior a los polinomios de tipo finito en X. Si $\varphi \in X'$, entonces

   $$\int_X e^{z(\gamma)} \overline{\varphi(\gamma)^k}\, dW(\gamma) = [(\imath^*\varphi)(I \circ \imath^*(z))]^k$$

   Veamos primero que todo polinomio continuo en X está en $L^p(W)$:

   $$|P(\gamma)|^p \leq \|P\|^p\, \|\gamma\|^{pk} \leq C\|P\|^p e^{\|\gamma\|} \in L^p(W).$$

Con la notación del ejemplo anterior $\widetilde{G}(\gamma) = \varphi^k(\gamma)$, y por lo tanto la integral es

$$\overline{\varphi \circ \imath[(I \circ \imath^*(z))^*]}^k = [(\imath^*\varphi)(I \circ \imath^*(z))]^k.$$

Teorema 3.2.7. *La fórmula integral es multiplicativa sobre los polinomios de tipo finito de X.*

Demostración. Sea $P(\gamma) = \prod_{j=1}^n \varphi_j(\gamma)$, siguiendo los lineamientos del Ejemplo 1, entonces se tiene

$$\int_X e^{z(\gamma)}\overline{P(\gamma)}\,dW(\gamma) = \overline{P[\imath \circ I \circ \imath'(z)]} = \overline{\prod_{j=1}^n \varphi_j[\imath \circ I \circ \imath'(z)]} =$$

$$\prod_{j=1}^n \overline{\varphi_j[\imath \circ I \circ \imath'(z)]} = \prod_{j=1}^n \int_X e^{z(\gamma)}\overline{\varphi_j(\gamma)}\,dW(\gamma).$$

□

Trabajando en espacios nucleares, L. Nilsson y S. Dineen [10] prueban la siguiente fórmula integral:

$$f(z) = \int_{E'_\beta} e^{\langle z,w\rangle}\, f \circ D(w)\, d\mu_\gamma(w),$$

para todo $z \in E$, un espacio fully-nuclear con base, donde η y γ pertenecen a E'_β, f es una función holomorfa de tipo $\eta-$exponencial en E, μ_γ es una medida Gaussiana en E'_β y $D : E'_\beta \to E$, es un operador densamente definido.

Esta representación guarda analogía con la presentada en este trabajo. Veamos como se puede reescribir la fórmula integral aplicada a una funcional lineal.
Los operadores A y A' tienen el mismo rango, la diferencia entre ellos es que mientras que el primero es lineal, el segundo es antilineal. Dado un elemento $w \in X'$, asociamos a este una funcional lineal:

$$\varphi_w : X' \to \mathbb{C}$$

$$\varphi_w(z) = z[A'(w)],$$

como vimos al inicio del capítulo

$$z[A'(w)] = \overline{w[A'(z)]}.$$

De esta forma tenemos que $|\varphi_w(z)| \leq \|w\|\|A'z\| = \|w\|\|z\|_{A'}$, por lo que esta funcional resulta $\|\cdot\|_{A'}-$uniformemente continua en conjuntos $\|\cdot\|_{A'}-$acotados. En forma similar a lo hecho con el operador A, definimos, sobre un subespacio denso, la inversa T' del operador A'. Por la $\|\cdot\|_{A'}-$continuidad, es posible extender continuamente a la función

$\varphi_w \circ T'$ y definirla en X.
Utilizando el segundo ejemplo dado anteriormente, podemos escribir:

$$\int_X e^{z(\gamma)}\overline{w(\gamma)}\, dW(\gamma) = [(\imath^* w)(I \circ \imath^*(z))] = \overline{\imath' w[(I \circ \imath^*(z))^*]}$$

$$= \overline{\imath' w[(I \circ \imath'(z))]} = \overline{w(A'z)} = z(A'w) = \varphi_w(z).$$

Por otro lado, si llamamos $\widetilde{\varphi_w} : X \to \mathbb{C}$ a la extensión de la función $\varphi_w \circ T'$, afirmamos que

$$\widetilde{\varphi_w}(\gamma) = \overline{w(\gamma)}.$$

Efectivamente, sobre la imagen de A', tenemos que:

$$\widetilde{\varphi_w}(A'\xi) = \varphi_w \circ T'(A'\xi) = \varphi_w(\xi) = \xi(A'w) = \overline{w[A'(\xi)]}.$$

Como ambas funciones son continuas y coinciden sobre un denso, tenemos lo afirmado. Con las convenciones del Teorema 3.2.4, podemos escribir:

$$\int_X e^{z(\gamma)}[\varphi_w \circ T'(\gamma)]\, dW(\gamma) = \int_X e^{z(\gamma)}\, \widetilde{\varphi_w}(\gamma)\, dW(\gamma) = \int_X e^{z(\gamma)}\overline{w(\gamma)}\, dW(\gamma) = \varphi_w(z).$$

Si bien presentamos esta escritura solamente en el caso de estas funcionales lineales particulares, la propiedad multiplicativa de la fórmula permite extender esta expresión al producto de varias de ellas. Veremos en el próximo capítulo que conocer como actúa la fórmula integral sobre estas funciones "particulares" brinda información importante sobre las funciones que se representan integralmente de este modo.

3.3. Fórmula integral (B)

Recordemos que para funciones holomorfas en la bola unidad de $\mathbb{C}^n$, bajo ciertas hipótesis de integrabilidad, teníamos una fórmula integral:

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}^n} \frac{1}{1 - \left\langle z, \frac{\omega}{\|\omega\|} \right\rangle} f^{\diamondsuit}(\|\omega\|\, \omega)\, d\mu_n(\omega).$$

Como hicimos con la fórmula (A), queremos mostrar una extensión de esta representación al contexto infinito-dimensional.

Definición 3.3.1. *Una norma $N : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ se dice norma absoluta, si*

$$N(w_1, w_2, \dots, w_n) = N(|w_1|, |w_2|, \dots, |w_n|) \quad \textit{para todo } (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Lema 3.3.2. *Sea ν_n la medida Gaussiana en $\mathbb{C}^n$ definida como el producto de n medidas Gaussianas sobre $\mathbb{C}$, cada una de ellas con media 0 y varianza $\lambda_k^2 > 0$ para $k = 1, \dots, n$. La función de densidad de ν_n es de la forma:*

$$\delta_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \frac{1}{\pi^n \lambda_1^2 \lambda_2^2 \cdots \lambda_n^2} e^{-\sum_{k=1}^n |\omega_k|^2/\lambda_k^2}$$

Si N es una norma absoluta, entonces

$$\int_{C^n} \omega^\alpha \overline{\omega}^\beta \, d\nu_n(\omega) = \int_{C^n} \omega^\alpha \overline{\omega}^\beta N(\omega)^{|\alpha|-|\beta|} \, d\nu_n(\omega) = \delta_{\alpha\beta} \, \alpha! \prod_{k=1}^n \lambda_k^{2\alpha_k}.$$

Demostración. La demostración se reduce a las ideas usadas en el Lema 3.2.1. Si $\alpha = \beta$, entonces sabemos que el valor de la integral es el indicado. Si $\alpha \neq \beta$ tomando coordenadas polares en cada variable compleja, tenemos que

$$\int_{C^n} \omega^\alpha \overline{\omega}^\beta N(\omega)^{|\alpha|-|\beta|} \, d\nu_n(\omega) =$$

$$\int_{[0,2\pi]^n} \int_{[0,\infty]^n} \left(\prod_{j=1}^n \rho_j^{\alpha_j+\beta_j+1} \right) \left(\prod_{k=1}^n e^{i(\alpha_k-\beta_k)\theta_k} \right) [N(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)]^{|\alpha|-|\beta|} \frac{d\rho' s \, d\theta' s}{\pi^n \prod_{r=1}^n \lambda_r^2}$$

$$= \left[\int_{[0,\infty]^n} \left(\prod_{j=1}^n \rho_j^{\alpha_j+\beta_j+1} \right) [N(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)]^{|\alpha|-|\beta|} \frac{d\rho' s}{\prod_{r=1}^n \lambda_r^2} \right] \left[\prod_{k=1}^n \int_0^{2\pi} e^{i(\alpha_k-\beta_k)\theta_k} \frac{d\theta_k}{\pi} \right].$$

Como $\alpha \neq \beta$, existe $k_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\alpha_{k_0} \neq \beta_{k_0}$, y por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} e^{i(\alpha_{k_0}-\beta_{k_0})\theta_{k_0}} \, d\theta_{k_0} = 0,$$

de este modo probamos lo enunciado. □

En particular, si μ_n es la medida Gaussiana standard, entonces

$$\int_{C^n} \omega^\alpha \overline{\omega}^\beta N(\omega)^{|\alpha|-|\beta|} \, d\nu_n(\omega) = \delta_{\alpha\beta} \, \alpha!.$$

Lema 3.3.3. *Sea B_1° la bola abierta en $\mathbb{C}^n$ de radio uno, $N : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ una norma absoluta y $h : B_1^\circ \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Dado el desarrollo de Taylor,*

$$h(\omega) = \sum_{k=0}^\infty \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \omega^\alpha,$$

se define:

$$h^\diamondsuit : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$h^{\diamondsuit}(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha\omega^\alpha.$$

Si la sucesión de sumas parciales $\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{k!}\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha[N(\omega)\,\omega]^\alpha\right)$ *converge en* $L^1(\mu_n)$ *a la función* $h^{\diamondsuit}[N(\omega)\,\omega]$, *entonces para todo* z *tal que*

$$\sup_\omega\left|\left\langle z,\frac{\omega}{N(\omega)}\right\rangle\right|<1,$$

tenemos

$$h(z)=\int_{\mathbb{C}^n}\frac{1}{1-\left\langle z,\frac{\omega}{N(\omega)}\right\rangle}h^{\diamondsuit}[N(\omega)\,\omega]\,d\mu_n(\omega).$$

Demostración. Como el radio de convergencia de h es 1, $h^{\diamondsuit}$ resulta entera. Considerando sólo aquellos $z\in\mathbb{C}^n$ tales que

$$\sup_\omega\left|\left\langle z,\frac{\omega}{N(\omega)}\right\rangle\right|\le c<1,$$

tenemos que

$$\left|\frac{1}{1-\left\langle z,\frac{\omega}{N(\omega)}\right\rangle}\right|\le\frac{1}{1-c},$$

por lo tanto la integral es finita. Además para cada z fijo, la convergencia de la serie

$$\frac{1}{1-\left\langle z,\frac{\omega}{N(\omega)}\right\rangle}=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k\,\overline{\omega_k}}{N(\omega)}\right)^j=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\beta|=j}\frac{j!}{\beta!}\frac{z^\beta\,\overline{\omega}^\beta}{N(\omega)^j}$$

es uniforme y podemos tomar límite fuera de la integral:

$$\int_{\mathbb{C}^n}\frac{1}{1-\left\langle z,\frac{\omega}{N(\omega)}\right\rangle}h^{\diamondsuit}[N(\omega)\,\omega]\,d\mu_n(\omega)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\beta|=j}\frac{j!}{\beta!}\int_{\mathbb{C}^n}\frac{z^\beta\,\overline{\omega}^\beta}{N(\omega)^j}\,h^{\diamondsuit}[N(\omega)\,\omega]\,d\mu_n(\omega).$$

La serie que expresa a $h^{\diamondsuit}$ es convergente en $L^1(\mu_n)$, por lo tanto:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\beta|=j}\frac{j!}{\beta!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha z^\beta\int_{\mathbb{C}^n}\frac{\overline{\omega}^\beta}{N(\omega)^j}N(\omega)^k\omega^\alpha\,d\mu_n(\omega).$$

Estas integrales, utilizando el Lema 3.3.2, resultan

$$\sum_{j=0}\sum_{|\beta|=j}\sum_{k=0}\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha z^\beta\frac{j!}{k!\beta!}\delta_{\alpha\beta}\,\alpha!=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha z^\alpha=h(z).$$

$\square$

Dado un espacio de Banach separable X, consideramos $(\imath, H, X)$ un espacio de Wiener abstracto como en el Teorema 2.3.2. Si B_H° es la bola abierta de radio uno en H y si $F : B_H^\circ \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa, cuya serie de Taylor alrededor de 0, $F = \sum_{k=0}^\infty F_k$, tiene radio de convergencia al menos igual a uno, se define

$$F^\diamondsuit = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} F_k.$$

Con esta definición, $F^\diamondsuit$ es holomorfa en H, mas aún, su desarrollo de Taylor alrededor de 0 tiene radio de convergencia infinito, y por lo tanto $F^\diamondsuit$ es de tipo acotado.

La función $f = F \circ I \circ \imath^*$, es holomorfa en la bola unidad de X', y su serie de Taylor $f = \sum_{k=0}^\infty F_k \circ I \circ \imath^*$, tiene radio de convergencia al menos igual a uno. Entonces, $f^\diamondsuit = F^\diamondsuit \circ I \circ \imath^* = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}(F_k \circ I \circ \imath^*)$ es una función holomorfa de tipo acotado en acotados de X'.

El siguiente diagrama relaciona F, f y sus transformaciones $F \mapsto F^\diamondsuit$, $f \mapsto f^\diamondsuit$:

$$\begin{tikzcd}
B_H^\circ \arrow[rr, bend left, "F"] & & \mathbb{C} \\
B_{H'}^\circ \arrow[u, "I|_{B_{H'}^\circ}"] & B_{X'}^\circ \arrow[l, "\imath^*"] \arrow[ur, bend right, "f"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, bend left, "F^\diamondsuit"] & & \mathbb{C} \\
H' \arrow[u, "I"] & X' \arrow[l, "\imath^*"] \arrow[ur, bend right, "f^\diamondsuit"'] &
\end{tikzcd}$$

En el próximo teorema vamos a usar las involuciones en H y H', junto con las transformaciones de funciones holomorfas definidas en la Sección 3.1, aplicadas a $f^\diamondsuit$ y $F^\diamondsuit$.

Observación 3.3.4. *Teniendo presente que las proyecciones $P_n : H_0 \to H_0$ convergen a la identidad de H_0 en $\|\cdot\|_0$ y además $W(H_0) = 1$, resulta que $\|\gamma\|_0 = \lim_{n\to\infty} \|P_n(\gamma)\|_0$ en casi todo punto de X. Como sobre los espacios de dimensión finita $P_n(H_0)$, las normas de X y H_0 son equivalentes, $\|\gamma\|_0$ resulta límite a.e de funciones continuas en X y por lo tanto resulta una función medible.*

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable, $\imath : H \hookrightarrow X$ el espacio de Wiener abstracto dado por el Teorema 2.3.2 y W la medida de Wiener asociada a esta construcción. Sea $H_0 \subset X$ el espacio de Banach dado en el Teorema 2.3.5, $\|\cdot\|_0$ su norma y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ las proyecciones dadas en el mismo teorema.

Segunda representación integral

Teorema 3.3.5. *Dada $F : B_H^\circ \to \mathbb{C}$, una función holomorfa definida en la bola unidad abierta de H, con radio de convergencia uniforme al menos igual a uno, supongamos que la función $F^{\diamondsuit\sharp}(x) = \overline{F^\diamondsuit(x^*)}$ verifica:*

i) Existe $\widetilde{F^{\diamondsuit\sharp}} \in L^1(W)$*, continua en* $(H_0, \|\cdot\|_0)$ *tal que* $F^{\diamondsuit\sharp} = \widetilde{F^{\diamondsuit\sharp}} \circ \imath$*.*

ii) Existe $g \in L^1(W)$*, tal que* $\left|\widetilde{F^{\diamondsuit\sharp}}[\delta \, \|P_n\gamma\|_0 \, P_n(\gamma)]\right| \leq g$ *en casi todo punto, para algún* $\delta \in (0,1]$*.*

Si $f = F \circ I \circ \imath^* : B^{\circ}_{X'} \to \mathbb{C}$*, y* $f^{\diamondsuit\sharp} = F^{\diamondsuit\sharp} \circ I \circ \imath^*$*, entonces*

$$f(z) = \int_X \frac{1}{1 - z\left(\frac{\gamma}{\delta\|\gamma\|_0}\right)} \overline{\widetilde{F^{\diamondsuit\sharp}}(\delta\|\gamma\|_0\gamma)} \, dW(\gamma) \quad \textit{para todo } z \in \delta B^{\circ}_{X'}.$$

Si $f^{\diamondsuit\sharp} \circ T$ *representa a la clase de* $\widetilde{F^{\diamondsuit\sharp}}$ *en* $L^1(W)$*, la fórmula resulta:*

$$f(z) = \int_X \frac{1}{1 - z\left(\frac{\gamma}{\delta\|\gamma\|_0}\right)} \overline{[f^{\diamondsuit\sharp} \circ T](\delta\|\gamma\|_0\gamma)} \, dW(\gamma) \quad \textit{para todo } z \in \delta B^{\circ}_{X'}.$$

Demostración. La demostración es análoga a la hecha en el Teorema 3.2.4.
El diagrama a continuación servirá para aclarar la relación entre estas funciones:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\imath"] \arrow[rrr, bend left=40, "F^{\diamondsuit\sharp}"] & H_0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\widetilde{F^{\diamondsuit\sharp}}"] \arrow[d, dashed, shift left, "T"] & \mathbb{C} \\
H' \arrow[u, "I"] & & X' \arrow[ll, "\imath^*"] \arrow[u, shift left, "A"] \arrow[ur, bend right, "f^{\diamondsuit\sharp}"'] &
\end{tikzcd}$$

Debemos notar que la expresión sub-integral está definida en casi todo punto, ya que $\|\cdot\|_0$ sólo tiene sentido en H_0.

Las composiciones $F \circ p_n$ son funciones holomorfas y cilíndricas en H, la norma $N(p_n y) = \delta\|\imath p_n y\|_0$, para $0 < \delta \leq 1$, por lo notado en la Observación 3.1.2, es absoluta. Podemos entonces, aplicando el Lema 3.3.3, escribir:

$$F[p_n(x)] = \int_{p_n H} \frac{1}{1 - \left\langle p_n(x), \frac{p_n y}{N(p_n y)} \right\rangle} F^{\diamondsuit}[N(p_n y) \, p_n y] \, d\mu_n(y)$$

para todo $x \in H$ tal que $\sup_{y \in H} \left| \left\langle p_n(x), \dfrac{p_n y}{N(p_n y)} \right\rangle \right| < 1$.

Necesitamos que $\sum_{k=0}^{M} F_k^{\diamondsuit}[N(p_n y) \, p_n y] \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} F^{\diamondsuit}[N(p_n y) \, p_n y]$ en $L^1(\mu_n)$. Para esto, como tenemos convergencia puntual, acotemos:

$$\left| \sum_{k=0}^{M} F_k^{\diamondsuit}[N(p_n y) \, p_n y] \right| \leq \sum_{k=0}^{M} \frac{1}{k!} \|F_k\| \, \delta^k \, \|\imath p_n y\|_0^k \, \|p_n y\|_H^k,$$

Por la forma en que fue construido el espacio de Wiener abstracto, $\|\imath p_n y\|_0^k \leq \lambda_1^k \|p_n y\|_H^k$, para $\lambda_1 < 1$, por lo tanto

$$\left| \sum_{k=0}^{M} F_k^{\diamondsuit}[N(p_n y) \, p_n y] \right| \leq \sum_{k=0}^{M} \frac{\lambda_1^k}{k!} \|F_k\| \, \|p_n y\|_H^{2k}.$$

Como F tiene radio de convergencia al menos igual a 1, dado $\lambda_1 < \delta' < 1$ existe $C_{\delta'}$ tal que $\|F_k\| \leq C_{\delta'}\delta'^{-k}$ para todo $k \geq 0$. Por lo tanto

$$\left|\sum_{k=0}^{M} F_k^{\diamondsuit}[N(p_n y)\, p_n y]\right| \leq C_{\delta'} \sum_{k=0}^{M} \frac{\lambda_1^k\, \delta'^{-k}}{k!}\, \|p_n y\|_H^{2k} = C_{\delta'} e^{\frac{\lambda_1}{\delta'}\|p_n y\|_H^2},$$

que por ser $\lambda_1 < \delta'$, es una expresión integrable. Por el teorema de convergencia dominada, se da la convergencia en $L^1(\mu_n)$.

Como $\left\langle p_n(x), \frac{p_n y}{N(p_n y)}\right\rangle = \left\langle x, \frac{p_n^2 y}{N(p_n y)}\right\rangle = \left\langle x, \frac{p_n y}{N(p_n y)}\right\rangle$, y la integral sobre $p_n H$ es por definición la integral sobre H, resulta entonces:

$$F[p_n(x)] = \int_H \frac{1}{1 - \left\langle x, \frac{p_n y}{N(p_n y)}\right\rangle} F^{\diamondsuit}[N(p_n y)\, p_n y]\, d\Gamma(y).$$

Considerando $z \in \delta B^{\circ}_{X'}$, como $I[\imath^*(\delta B^{\circ}_{X'})] \subset \delta B^{\circ}_H$, resulta $F \circ I \circ \imath^*(z) = f(z)$, y el producto interno:

$$\left\langle I(\imath^* z), \frac{p_n y}{N(p_n y)}\right\rangle = \overline{\left\langle \frac{p_n y}{N(p_n y)}, I(\imath^* z)\right\rangle} = \overline{(\imath^* z)\left(\frac{p_n y}{N(p_n y)}\right)} = \overline{(z \circ \imath)^*\left(\frac{p_n y}{N(p_n y)}\right)}$$

$$= (z \circ \imath)\left(\frac{p_n y^*}{N(p_n y)}\right) = z\left(\frac{\imath(p_n y^*)}{N(p_n y)}\right).$$

Por lo tanto, como la Observación 3.1.2 muestra que $N(p_n y) = N(p_n y^*)$,

$$\sup_{y \in H}\left|\left\langle I(\imath^* z), \frac{p_n y}{N(p_n y)}\right\rangle\right| = \sup_{y \in H}\left|z\left(\frac{\imath p_n y^*}{N(p_n y)}\right)\right| \leq \frac{\|z\|_{X'}\, \|\imath p_n y^*\|_X}{\delta\|p_n y^*\|_0} < 1.$$

Podemos escribir entonces:

$$F \circ p_n(I \circ \imath^*(z)) = \int_H \frac{1}{1 - z\left(\frac{\imath(p_n y^*)}{N(p_n y^*)}\right)} F^{\diamondsuit}[N(p_n y^*)\, p_n y]\, d\Gamma(y).$$

La involución preserva la medida Γ y $F^{\diamondsuit}(x) = \overline{F^{\diamondsuit\sharp}(x^*)}$, por lo tanto

$$\int_H \frac{1}{1 - z\left(\frac{\imath(p_n y^*)}{N(p_n y^*)}\right)} \overline{F^{\diamondsuit\sharp}[N(p_n y^*)\, p_n y^*]}\, d\Gamma(y^*)$$

$$= \int_H \frac{1}{1 - z\left(\frac{\imath(p_n y)}{N(p_n y)}\right)} \overline{F^{\diamondsuit\sharp}[N(p_n y)\, p_n y]}\, d\Gamma(y)$$

$$= \int_{H_0} \frac{1}{1 - z\left(\frac{P_n\gamma}{\delta\|P_n\gamma\|_0}\right)} \overline{\widetilde{F^{\sharp\diamondsuit}}(\delta\|P_n\gamma\|_0 P_n\gamma)}\, dW(\gamma).$$

De este modo:

$$F \circ p_n(I \circ \imath^*(z)) = \int_{H_0} \frac{1}{1 - z\left(\frac{P_n\gamma}{\delta\|P_n\gamma\|_0}\right)} \overline{\widetilde{F^{\sharp\diamondsuit}}(\delta\|P_n\gamma\|_0 P_n\gamma)}\, dW(\gamma).$$

Mientras que el lado izquierdo de la igualdad converge a $F \circ I \circ \imath^*(z)$ cuando n tiende a ∞, sabemos que P_n converge a la identidad en H_0, un subconjunto de medida 1, por lo que la expresión sub-integral converge en casi todo punto a $\frac{1}{1-z\left(\frac{\gamma}{\delta\|\gamma\|_0}\right)}\overline{\widetilde{F^{\sharp\diamondsuit}}(\delta\|\gamma\|_0\gamma)}$. Además, tenemos la cota

$$\left|\frac{1}{1-z\left(\frac{P_n\gamma}{\delta\|P_n\gamma\|_0}\right)}\overline{\widetilde{F^{\sharp\diamondsuit}}(\delta\|P_n\gamma\|_0 P_n\gamma)}\right| \leq \frac{1}{1-\delta^{-1}\|z\|}\left|\widetilde{F^{\sharp\diamondsuit}}(\delta\|P_n\gamma\|_0 P_n\gamma)\right|$$

$$\leq \frac{1}{1-\delta^{-1}\|z\|}\, g(\gamma) \in L^1(W).$$

Aplicando el teorema de convergencia dominada, tenemos entonces que las integrales convergen a

$$\int_X \frac{1}{1-z\left(\frac{\gamma}{\delta\|\gamma\|_0}\right)}\overline{\widetilde{F^{\sharp\diamondsuit}}(\delta\|\gamma\|_0\gamma)}\, dW(\gamma),$$

por lo que

$$f(z) = \int_X \frac{1}{1-z\left(\frac{\gamma}{\delta\|\gamma\|_0}\right)}\overline{\widetilde{F^{\sharp\diamondsuit}}(\delta\|\gamma\|_0\gamma)}\, dW(\gamma) \quad \text{para todo } z \in \delta B^{\circ}_{X'}.$$

Con las notaciones establecidas es

$$f(z) = \int_X \frac{1}{1-z\left(\frac{\gamma}{\delta\|\gamma\|_0}\right)}\overline{[f^{\diamondsuit\sharp} \circ T](\delta\|\gamma\|_0\gamma)}\, dW(\gamma) \quad \text{para todo } z \in \delta B^{\circ}_{X'}.$$

$\square$

El teorema puede ser formulado con $\delta = 1$ debido a las condiciones de integrabilidad impuestas sobre $\widetilde{F^{\diamondsuit}}$. Veamos un ejemplo, donde es necesario tomar δ pequeño.

Recordemos que el operador $A : X' \to X$ es inyectivo, y permite definir una norma $\|\cdot\|_A$ en X' que es más débil que $\|\cdot\|_X$. Si f es una función holomorfa en X', se definió en la sección anterior el radio de convergencia calculado en esta norma:

$$r_A = \frac{1}{\limsup \|f_k\|_A^{1/k}}.$$

Definición 3.3.6. *Una función holomorfa $f : X' \to \mathbb{C}$ es $A-$armónica si $r_A \geq 1$.*

Notemos que si f es $A-$armónica, entonces $f^{\diamondsuit}$ es de tipo $A-$exponencial.

Ejemplo.

Sea f una función holomorfa definida en X', con $r_A \geq 1$. Como sus polinomios son $\|\cdot\|_A-$continuos y $r_A \geq 1$, es posible extenderla a una función holomorfa g, definida en la bola unidad de X, de modo tal que $f(z) = g \circ A(z)$. Por ser $f^{\diamondsuit}$ de tipo $A-$exponencial, la función $f^{\diamondsuit} \circ T$ es continua sobre la imagen de A y por lo tanto, se extiende continuamente a X. Tomando $\widetilde{G} = f^{\diamondsuit} \circ T$, que es continua y holomorfa Gateaux en H, por lo tanto holomorfa, tenemos que $(g \circ \imath)^{\diamondsuit} = \widetilde{G} \circ \imath$. Además, sobre H_0 vale la acotación:

$$\left|\widetilde{G}(\delta\|P_n\gamma\|_0 P_n\gamma)\right| \leq \left|[f^{\diamondsuit} \circ T](\delta\|P_n\gamma\|_0 P_n\gamma)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left|f_k[T(\delta\|P_n\gamma\|_0 P_n\gamma)]\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} \|f_k\|_A \, \|P_n\gamma\|_0^{2k} \leq \sum_k \frac{\delta^k c^k}{k!} \|f_k\|_A \, \|\gamma\|_0^{2k} \leq M \sum_k \frac{(\delta\, c\, \|\gamma\|_0^2)^k}{k!} = M e^{\delta\, c\, \|\gamma\|_0^2}.$$

Para δ suficientemente chico, esta expresión resulta integrable por el teorema de Fernique. Con las notaciones del Teorema 3.3.5, sea $\widetilde{F^{\diamondsuit\sharp}} = \widetilde{G}$, por lo tanto $F^{\diamondsuit\sharp} = \widetilde{G} \circ \imath = (g \circ \imath)^{\diamondsuit}$ y resulta $F(x) = \overline{F^{\sharp}(x^*)} = \overline{g \circ \imath(x^*)}$. Aplicando el teorema, tenemos

$$\int_X \frac{1}{1 - z\left(\frac{\gamma}{\delta\|\gamma\|_0}\right)} \overline{\widetilde{G}(\delta\|\gamma\|_0\gamma)}\, dW(\gamma) = F \circ I \circ \imath^*(z) = \overline{g \circ \imath[(I \circ \imath^*(z))^*]} = \overline{g[\imath \circ I \circ \imath'(z)]}.$$

Como $A' = \imath \circ I \circ \imath'$, el ejemplo muestra que dada una función f de tipo $A-$armónica, entonces la función $\overline{f \circ T \circ A'}$ se representa integralmente. Notemos que δ no depende de la función f, por lo tanto dada cualquier función f $A-$armónica es posible representar a la función $\overline{f \circ T \circ A'}$, en la bola $\delta B_{X'}^{\circ}$.

3.4. Representación integral en espacios de Banach

Finalmente, queremos representar integralmente funciones holomorfas definidas en un espacio de Banach E, aún si E no es un espacio dual. Para hacer esto, recurrimos a la extensión de Aron-Berner de una función holomorfa al doble dual E''. La construcción de esta extensión puede encontrarse en [1], [9] y [26]. Sólo recordaremos algunas propiedades necesarias.

Si $f : E \to \mathbb{C}$ tiene desarrollo en serie de Taylor $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$, alrededor de 0, entonces cada polinomio k-homogéneo de su desarrollo, $f_k : E \to \mathbb{C}$, puede ser extendido de manera canónica al bidual: $AB(f_k) : E'' \to \mathbb{C}$, y la extensión de Aron-Berner de f se define por

$$AB(f) = \sum_{k=0}^{\infty} AB(f_k).$$

Un resultado de Davie y Gamelin [4] prueba que la extensión de Aron-Berner preserva la norma de los polinomios homogéneos, y por lo tanto el radio de convergencia uniforme de la serie de Taylor de f y $AB(f)$ coinciden.

Supongamos que el espacio E tiene dual separable y construyamos $(\imath, H, E')$ un espacio de Wiener abstracto asociado a él. Dada una función holomorfa $f : E \to \mathbb{C}$, veamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\imath"] & E' & \\
H' \arrow[u, "I"] & E'' \arrow[l, "\imath^*"] \arrow[u, "A"'] \arrow[dr, bend right, "AB(f)"'] & E \arrow[l, "J"] \arrow[ul, "A_{|E}"'] \arrow[d, "f"] \\
 & & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Teorema 3.4.1. *Sea E un espacio de Banach con dual separable, $f : E \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y $AB(f)$ su extensión de Aron-Berner. Si para $AB(f)$ se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.2.4, entonces para todo $z \in E''$:*

$$AB(f)(z) = \int_{E'} e^{z(\gamma)} \overline{(AB(f)^{\sharp} \circ T)}(\gamma)\, dW(\gamma),$$

y por lo tanto para todo $z \in E$:

$$f(z) = \int_{E'} e^{\gamma(z)} \overline{(AB(f)^{\sharp} \circ T)}(\gamma)\, dW(\gamma).$$

Teorema 3.4.2. *Sea E un espacio de Banach con dual separable, $f : B_E^{\circ} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y $AB(f)$ su extensión de Aron-Berner. Si para $AB(f)$ se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.3.5, entonces para todo $z \in \delta B_{E''}^{\circ}$:*

$$AB(f)(z) = \int_{E'} \frac{1}{1 - z\left(\frac{\gamma}{\delta\|\gamma\|_0}\right)} \overline{(AB(f)^{\diamondsuit\sharp} \circ T)}(\delta\|\gamma\|_0\, \gamma)\, dW(\gamma),$$

y por lo tanto, para todo $z \in \delta B_E^{\circ}$:

$$f(z) = \int_{E'} \frac{1}{1 - \frac{\gamma(z)}{\delta\|\gamma\|_0}} \overline{(AB(f)^{\diamondsuit\sharp} \circ T)}(\delta\|\gamma\|_0\, \gamma)\, dW(\gamma).$$

Demostración. Si notamos $J : E \to E''$ a la inclusión, en ambas demostraciones basta aplicar los Teoremas 3.2.4 y 3.3.5 respectivamente, notar que $f(z) = AB(f)(Jz)$ y recordar que $(Jz)(\gamma) = \gamma(z)$. □

Observación 3.4.3. *Para mostrar una representación integral de una función holomorfa definida en E ó B_E°, exigimos que $AB(f) : E'' \to \mathbb{C}$ tenga una representación como en el Teorema 3.2.4 ó en el Teorema 3.3.5.*
¿Por qué no pedir que "alguna" extensión de f verifique el Teorema 3.2.4?
Hay dos respuestas a esta pregunta. En este momento del trabajo podemos recordar que pretendíamos expresar a la función como la integral, respecto de una medida universal, de un núcleo y una transformación de la misma función. La extensión de Aron-Berner está unívocamente caracterizada por la función, mientras que "alguna" extensión sería demasiado ambiguo. En el próximo capítulo encontraremos una segunda respuesta a esta pregunta.

Capítulo 4

Funciones enteras representables

En el capítulo anterior presentamos la fórmula integral (A), válida para ciertas funciones holomorfas en X'. Dimos un ejemplo vinculado a funciones holomorfas en X y al operador de covarianza A', que teniendo en cuenta las hipótesis del Teorema 3.2.4, no deberían ser "todas" las que aceptan representación integral. Nos interesa saber qué otras funciones pueden representarse, las propiedades que tienen sus desarrollos de Taylor y si existe relación entre ellas y los polinomios o funciones holomorfas integrales. Dado un espacio de Banach E, queremos también, dar condiciones para representar funciones holomorfas definidas en él, aún en el caso en que no sea un espacio dual.

4.1. Polinomios Hilbertianos

Para comenzar el estudio del conjunto de funciones representables necesitamos introducir algunas definiciones. Dwyer [11] definió el espacio de funciones $k-$lineales de tipo Hilbert-Schmidt en un espacio de Hilbert, H-H. Kuo también estudió este espacio de aplicaciones [17].

Definición 4.1.1. *Sea H un espacio de Hilbert separable, una forma $k-$lineal Φ se dice de Hilbert-Schmidt si*

$$\sum_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} |\Phi(e_{n_1},\ldots,e_{n_k})|^2 < \infty$$

para toda base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H.

O. Lopushansky y A. Zagorodnyuk [18] estudiaron el espacio $\mathcal{P}_h({}^kH)$ de polinomios $k-$homogéneos Hilbertianos, definidos en un espacio de Hilbert.
Dado un espacio de Hilbert separable $(H, \langle\ ,\ \rangle)$, con base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se puede definir una norma h en el producto tensorial $\bigotimes^k H$, de modo tal que al completar $\bigotimes^k H$ respecto de esta norma h, se obtenga un espacio de Hilbert $\bigotimes_h^k H$ (ver [5], [6], [21]).

Mas aún, si $v \in \bigotimes_h^k H$, entonces se escribe de manera única como:

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \; e_{1i} \otimes \cdots \otimes e_{ki}.$$

En esta expresión, estamos indexando la suma según las numerables elecciones de k elementos de la base para formar un tensor elemental.
Si $w = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \; e_{1j} \otimes \cdots \otimes e_{kj} \in \bigotimes_h^k H$, entonces el producto interno de v y w puede definirse como

$$(v,w)_k = \sum_{i,j} \alpha_i \, \overline{\beta_j} \, \langle e_{1i}, e_{1j} \rangle \, \cdots \, \langle e_{ki}, e_{kj} \rangle \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C},$$

y la norma

$$(v,v)_k^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Observación 4.1.2. *Los elementos del producto tensorial pueden describirse, de manera alternativa, del siguiente modo*

$$v = \sum_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} c_{n_1,\ldots,n_k} \, e_{n_1} \otimes \cdots \otimes e_{n_k},$$

ahora indexamos la suma teniendo en cuenta cuál es el elemento de la base elegido para cada posición del tensor. En este caso, si

$$w = \sum_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} d_{n_1,\ldots,n_k} \, e_{n_1} \otimes \cdots \otimes e_{n_k},$$

se tiene

$$(v,w)_k = \sum_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} c_{n_1,\ldots,n_k} \, \overline{d_{n_1,\ldots,n_k}}$$

y

$$(v,v)_k^{1/2} = \left(\sum_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} |c_{n_1,\ldots,n_k}|^2 \right)^{1/2}.$$

Proposición 4.1.3. *(Lopushansky - Zagorodnyuk) Si para cada $x \in H$, notamos por $x^k = \underbrace{x \otimes \cdots \otimes x}_{k \text{ veces}} \in \bigotimes_h^k H$, entonces,*

1. *Existe una única proyección ortogonal S_k en $\bigotimes_h^k H$, tal que:*

$$S_k(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_k} e_{j_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{j_{\sigma(k)}},$$

donde $\mathcal{G}_k$ es el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, 2, \ldots, k\}$.

2. *Llamando* $H_h^k = S_k\left(\bigotimes_h^k H\right)$, *el espacio dual* $\left(H_h^k\right)'$ *es isométricamente isomorfo a un subespacio vectorial* $\mathcal{P}_h({}^kH) \subset \mathcal{P}({}^kH)$, *formado por polinomios* $k-$*homogeneos, continuos en* H.

3. $H_h^k = \overline{span\ \{x^k\}_{x\in H}} \subset \bigotimes_h^k H$.

Demostración. Las demostraciones del primer y tercer punto son las usuales, pueden encontrarse en [18]. Sólo comentaremos la segunda parte, para dejar clara la relación entre la funcional lineal y el polinomio asociado a esta.

Dada $\phi \in \left(H_h^k\right)'$, por el teorema de Riesz, sabemos que existe un único $w \in H_h^k$ tal que $\phi(v) = (v, w)_k$ para todo $v \in H_h^k$.
Se define $P_\phi(x) = (x^k, w)_k$, por lo que para probar la continuidad de P_ϕ, bastará ver la desigualdad:

$$|P_\phi(x)| = \left|\phi(x^k)\right| \leq \|\phi\|\,\|x^k\| = \|\phi\|\,\|x\|^k.$$

Para mostrar la isometría, se toma el subespacio vectorial

$$\mathcal{P}_h({}^kH) = \{P_\phi : \phi \in (H_h^k)'\} \subset \mathcal{P}({}^kH),$$

con norma definida por $\|P_\phi\|_h = \|\phi\|$. □

A H_h^k se lo denomina tensor simétrico Hilbertiano de orden k, y a $\mathcal{P}_h({}^kH)$ espacio de polinomios Hilbertianos $k-$homogéneos. Notemos que para $P \in \mathcal{P}_h({}^kH)$, se desprende de la demostración, que la norma usual del polinomio está acotada por la norma Hilbertiana, $\|P\| \leq \|P\|_h$.

Se define el espacio de tipo Hardy $\mathcal{H}^2(B_H^\circ)$, formado por aquellas funciones holomorfas en la bola de H, $F = \sum_{k=0}^\infty F_k$, cuyas series de Taylor están exclusivamente integradas por polinomios $k-$homogéneos de tipo Hilbertiano, y además verifican que $\sum_{k=0}^\infty \|F_k\|_h^2 < \infty$.

$$\mathcal{H}^2(B_H^\circ) = \left\{ F \in \mathcal{H}(B_H^\circ) \ : \ F = \sum_{k=0}^\infty F_k,\ F_k \in \mathcal{P}_h({}^kH),\ \|F\|_2^2 = \sum_{k\geq 0} \|F_k\|_h^2 < \infty \right\}.$$

El espacio $\mathcal{H}^2(B_H^\circ)$ es de Hilbert y resulta dual de la suma ℓ_2 de los tensores simétricos Hilbertianos H_h^k. En mecánica cuántica esta suma recibe el nombre de espacio simétrico de Fock [21].

Para estudiar el conjunto de funciones que aceptan una representación integral, necesitamos algunas propiedades de los espacios de polinomios Hilbertianos. Las demostraciones de las siguientes proposiciones pueden encontrarse en [18].

Proposición 4.1.4. *Si H es un espacio de Hilbert separable, se tiene la siguiente cadena de inclusiones,* $\mathcal{P}_I({}^kH) \subset \mathcal{P}_h({}^kH) \subset \mathcal{P}_w({}^kH)$.

Proposición 4.1.5. *Dados* $Q_n \in \mathcal{P}_h({}^nH)$ *y* $Q_m \in \mathcal{P}_h({}^mH)$, *entonces* $Q_nQ_m \in \mathcal{P}_h({}^{n+m}H)$ *y además* $\|Q_nQ_m\|_h \leq \|Q_n\|_h \|Q_m\|_h$.

Dados dos multi-índices $J = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ y $J' = (j'_1, j'_2, \ldots, j'_k)$, se consideran los vectores $u_J = S_k(e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \cdots \otimes e_{j_k})$ y $u_{J'} = S_k(e_{j'_1} \otimes e_{j'_2} \otimes \cdots \otimes e_{j'_k})$. Si existe $\sigma \in \mathcal{G}_k$ tal que

$$j_1 = j'_{\sigma(1)},\ j_2 = j'_{\sigma(2)},\ \ldots,\ j_k = j'_{\sigma(k)},$$

resulta $u_J = u_{J'}$. Por otro lado, de no existir tal permutación, se tiene $u_J \neq u_{J'}$, ya que aparecen diferentes elementos de la base en el desarrollo de cada uno de ellos. Se define, entonces, la relación de equivalencia:

$$J \sim J' \Leftrightarrow \text{ existe } \sigma \in \mathcal{G}_k \text{ tal que } j_1 = j'_{\sigma(1)},\ j_2 = j'_{\sigma(2)}, \ldots, j_k = j'_{\sigma(k)},$$

llamamos $\mathcal{M}_k$ al conjunto de clases de equivalencias y notamos $[J]$ a sus elementos.

Proposición 4.1.6. *El conjunto* $\left\{u_{[J]}\right\}_{[J]\in\mathcal{M}_k}$ *es una base ortogonal de* H_h^k.

Demostración. Como

$$\begin{aligned}
\langle u_{[J]}, u_{[J']}\rangle_k &= \left\langle S_k(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k}),\ S_k(e_{j'_1} \otimes \cdots \otimes e_{j'_k})\right\rangle_k \\
&= \left\langle e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k},\ S_k^2(e_{j'_1} \otimes \cdots \otimes e_{j'_k})\right\rangle_k \\
&= \left\langle e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k},\ S_k(e_{j'_1} \otimes \cdots \otimes e_{j'_k})\right\rangle_k \\
&= \left\langle e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k}, \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathcal{G}_k} e_{j'_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{j'_{\sigma(k)}}\right\rangle_k \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathcal{G}_k} \delta_{j_1 j'_{\sigma(1)}}\ \delta_{j_2 j'_{\sigma(2)}} \cdots\ \delta_{j_k j'_{\sigma(k)}} = 0 \ \text{ si } \ [J] \neq [J'].
\end{aligned}$$

es un sistema ortogonal. Por ser la imagen de una base de $\bigotimes_h^k H$ por la proyección S_k, resulta completo. $\square$

Observación 4.1.7. *Dado un multi-índice* $J = (j_1, j_2, \ldots, j_k) \in \mathbb{N}^k$, *definimos un nuevo multi-índice* $\alpha(J) = (\alpha(J)_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, *por medio de*

$$\alpha(J)_n = \sum_{r=1}^{k} \delta_{n,j_r},$$

es decir, $\alpha(J)$ cuenta la cantidad de veces que se repite el número n en el multi-índice J. Claramente $\alpha(J) = \alpha(J')$ si sólo si $J \sim J'$. De este modo, la proposición anterior nos dice que

$$\left\|u_{[J]}\right\|^2 = \frac{\alpha(J)!}{k!}.$$

A partir de esta observación resulta entonces que el conjunto formado por las funcionales $\left\{\Phi_{[J]}\right\}_{[J]\in\mathcal{M}_k}$, definidas por:

$$\Phi_{[J]}(\,\cdot\,) = \sqrt{\frac{k!}{\alpha(J)!}}\langle\,\cdot\,, u_{[J]}\rangle_k$$

es una base ortonormal de $(H_h^k)'$. Por lo tanto, definiendo como antes, los polinomios

$$P_{\Phi_{[J]}} : H \to \mathbb{C}$$

$$P_{\Phi_{[J]}}(x) = \Phi_{[J]}(x^k) = \sqrt{\frac{k!}{\alpha(J)!}}\langle x^k, u_{[J]}\rangle_k,$$

el conjunto $\left\{P_{\Phi_{[J]}}\right\}_{[J]\in\mathcal{M}_k}$ es una base ortonormal de $\mathcal{P}_h({}^kH)$.

Observación 4.1.8. *Veamos explícitamente cuáles son los polinomios que forman esta base. Para esto, calculemos:*

$$\begin{aligned} P_{\Phi_{[J]}}(x) &= \sqrt{\frac{k!}{\alpha(J)!}}\left\langle x^k, u_{[J]}\right\rangle_k = \sqrt{\frac{k!}{\alpha(J)!}}\left\langle x\otimes\cdots\otimes x, S_k(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_k})\right\rangle_k \\ &= \sqrt{\frac{k!}{\alpha(J)!}}\left\langle S_k(x\otimes\cdots\otimes x), e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_k}\right\rangle_k \\ &= \sqrt{\frac{k!}{\alpha(J)!}}\left\langle x\otimes\cdots\otimes x, e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_k}\right\rangle_k \\ &= \sqrt{\frac{k!}{\alpha(J)!}}\; x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_k} \\ &= \sqrt{\frac{k!}{\alpha(J)!}}\prod_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle^{\alpha(J)_n}. \end{aligned}$$

Asociados a esta clase de polinomios se pueden definir dos espacios de funciones. El primero, consiste en aquellas funciones cuyo desarrollo de Taylor en el origen está formado por polinomios Hilbertianos y que además tienen radio de convergencia uniforme, calculado respecto a la norma $\|\cdot\|_h$, mayor que cero.

Definición 4.1.9. *Espacio de gérmenes Hilbertianos:*

$$\mathcal{H}_h(H) = \left\{ F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \in \mathcal{H}(H) : F_k \in \mathcal{P}_h({}^kH),\ \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|F_k\|_h} < \infty \right\}.$$

El segundo, formado por las funciones de $\mathcal{H}_h(H)$ que tienen radio de convergencia infinito.

Definición 4.1.10. *Espacio de funciones holomorfas Hilbertianas enteras, de tipo acotado:*

$$\mathcal{H}_{hb}(H) = \left\{ F \in \mathcal{H}_h(H) : \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|F_k\|_h} = 0 \right\}.$$

Considerando en $\mathcal{H}_{hb}(H)$ la topología τ generada por la familia de seminormas

$$\|F\|_{h,r} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \, \|F_k\|_h,$$

entonces $(\mathcal{H}_{hb}(H), \tau)$ es un espacio de Fréchet. Para ver esto, comenzamos por notar que la familia numerable $\{\|F\|_{h,n} : n \in \mathbb{N}\}$ genera la topología τ, por lo que solamente necesitamos probar la completitud del espacio.
Supongamos que $\{F^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}_{hb}(H)$, por lo tanto para todo $k \in \mathbb{N}$ la sucesión de polinomios $k-$homogéneos $\{F_k^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es también de Cauchy en el espacio $\mathcal{P}_h({}^kH)$. Por completitud de estos últimos espacios, existe una sucesión de polinomios $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, con $F_k \in \mathcal{P}_h({}^kH)$, tal que $\|F_k - F_k^{(j)}\|_h \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $k \geq 0$.
Por ser $\{F^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, para todo $r > 0$, existe una constante M_r para la cual $\|F^{(j)}\|_{h,r} \leq M_r$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $\|F^{(j)}\|_{h,r} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \, \|F_k^{(j)}\|_h$, entonces $\|F_k^{(j)}\|_h \leq \frac{M_r}{r^k}$ para todo $j, k \in \mathbb{N}$. Veamos que la función $F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \in \mathcal{H}_{hb}(H)$. Para esto, acotemos

$$\|F_k\|_h \leq \|F_k - F_k^{(j)}\|_h + \|F_k^{(j)}\|_h \leq \|F_k - F_k^{(j)}\|_h + \frac{M_r}{r^k}.$$

Haciendo tender $j \to \infty$, resulta la cota $\|F_k\|_h \leq \frac{M_r}{r^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|F_k\|_h} \leq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{M_r}{r^k}} = \frac{1}{r}.$$

Como esta desigualdad es válida independientemente del valor de r, tomando $r \to \infty$ resulta que $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|F_k\|_h} = 0$, por lo que $F \in \mathcal{H}_{hb}(H)$.
Probando que $F^{(j)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} F$ en la topología τ, logramos concluir que $\mathcal{H}_{hb}(H)$ es completo.
Dado $r > 0$, calculemos

$$\|F^{(j)} - F\|_{h,r} \leq \|F^{(j)} - F^{(l)}\|_{h,r} + \|F^{(l)} - F\|_{h,r} \leq$$

$$\|F^{(j)} - F^{(l)}\|_{h,r} + \sum_{k=0}^{m} r^k \|F_k^{(l)} - F_k\|_h + \sum_{k=m+1}^{\infty} r^k \|F_k^{(l)}\|_h + \sum_{k=m+1}^{\infty} r^k \|F_k\|_h.$$

Podemos aplicar la desigualdad $\|F_k^{(l)}\|_h \leq \dfrac{M_{2r}}{(2r)^k}$, por lo que

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \|F_k^{(l)}\|_h \leq \sum_{k=0}^{\infty} r^k \frac{M_{2r}}{(2r)^k} = 2M_{2r} < \infty.$$

Además, sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty} r^k \|F_k\|_h$ es convergente, por lo que dado $\varepsilon > 0$, existe $m > 0$ tal que se verifica:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} r^k \|F_k^{(l)}\|_h < \varepsilon/4 \text{ para todo } l \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{k=m+1}^{\infty} r^k \|F_k\|_h < \varepsilon/4.$$

Tenemos así

$$\|F^{(j)} - F\|_{h,r} \leq \|F^{(j)} - F^{(l)}\|_{h,r} + \sum_{k=0}^{m} r^k \|F_k^{(l)} - F_k\|_h + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por ser $\{F^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, existe $\widetilde{l_0} \in \mathbb{N}$ tal que dados $j, l \geq \widetilde{l_0}$, entonces se verifica $\|F^{(j)} - F^{(l)}\|_{h,r} < \varepsilon/4$.
Por otro lado, como $\|F_k^{(l)} - F_k\|_h \underset{l\to\infty}{\longrightarrow}$ para $k = 0, 1, \ldots, m$, existen índices $\{l_k\}_{k=0,\ldots,m}$ tales que si $l > l_k$, entonces $r^k \|F_k^{(l)} - F_k\|_h < \frac{\varepsilon}{4(m+1)}$.
De este modo, si $j > \text{máx}\{\widetilde{l_0}, l_0, l_1, \ldots, l_m\}$ resulta $\|F^{(j)} - F\|_{h,r} < \varepsilon$.
Resumiendo, hemos probado que dado $r > 0$, $\|F^{(j)} - F\|_{h,r} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$, por lo que $F^{(j)}$ tiende a F en la topología τ.

4.2. Funciones L^p−representables

Nuestro propósito ahora es estudiar las propiedades de las funciones representables por la fórmula integral (A). Los resultados que se presentan en el resto del capítulo se encuentran en [19].

Notemos que dado $z \in X'$, $0 < \varepsilon$ y $1 \leq q < \infty$, existe $C(\varepsilon, q, z) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left|e^{z(\gamma)}\right|^q \leq e^{q\|z\|\,\|\gamma\|} \leq C(\varepsilon, q, z) e^{\varepsilon\|\gamma\|^2},$$

por lo que el teorema de Fernique garantiza la integrabilidad de la función $e^{z(\cdot)}$ en $L^q(W)$ para $1 \leq q < \infty$. Por este motivo tiene sentido la siguiente definición:

Definición 4.2.1. *Dado $p > 1$, decimos que una función $f : X' \to \mathbb{C}$ es L^p−representable, si para todo $z \in X'$, vale la igualdad*

$$f(z) = \int_X e^{z(\gamma)}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) \quad \textit{con } g \in L^p(W).$$

Lema 4.2.2. *Sea f una función L^p−representable, q el exponente conjugado de p, entonces*

$$|f(z)| \leq C\, e^{q\|\iota^*(z)\|_{H'}^2/4}.$$

Demostración. Por ser f una función L^p−representable, existe $g \in L^p(W)$ para la cual $f(z) = \int_X e^{z(\gamma)}\overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma)$. Recordando la Proposición 2.3.7, tenemos que $z(\,\cdot\,)$ es una variable aleatoria compleja Gaussiana con media 0 y varianza $\|\imath' z\|^2$, como la involución definida preserva normas, podemos decir que la varianza es $\|\imath^* z\|^2$. Aplicando la desigualdad de Hölder, tenemos

$$|f(z)| \leq \|g\|_p\, \|e^{z(\,\cdot\,)}\|_q \leq \|g\|_p \left(\int_{\mathbb{C}} |e^w|^q\ e^{-|w|^2/\|\imath^* z\|_{H'}^2} \frac{dw}{\pi \|\imath^* z\|_{H'}^2} \right)^{1/q}$$

$$= \|g\|_p \left(\frac{1}{\pi \|\imath^* z\|_{H'}^2} \int_{\mathbb{C}} e^{q\Re(w)}\ e^{-|w|^2/\|\imath^* z\|_{H'}^2}\, dw \right)^{1/q}$$

$$= \|g\|_p \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\|\iota^*(z)\|_{H'}} \int_{\mathbb{R}} e^{qt}\ e^{-t^2/\|\iota^*(z)\|_{H'}^2}\, dt \right]^{1/q} = \|g\|_p\, e^{q\|\iota^*(z)\|_{H'}^2/4}.$$

Vale entonces la acotación enunciada tomando $C = \|g\|_p$, donde $g \in L^p(W)$ es una función que representa a f. □

Proposición 4.2.3. *Si f es una función L^p−representable, entonces $f \in \mathcal{H}_b(X')$.*

Demostración. Sea $g \in L^p(W)$ para la cual $f(z) = \int_X e^{z(\gamma)}\overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma)$.
Consideramos la sucesión de funciones $S_N(z,\gamma)$, definidas por

$$S_N(z,\gamma) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} z(\gamma)^k,$$

como

$$\lim_{N\to\infty} \left| e^{z(\gamma)} - S_N(z,\gamma) \right|^q = 0 \ \text{ para todo } z \in X',\ \gamma \in X,$$

y además

$$\left| e^{z(\gamma)} - S_N(z,\gamma) \right|^q \leq \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!} z(\gamma)^k \right|^q \leq \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|z\|^k \|\gamma\|^k \right)^q \leq e^{q\|z\|\|\gamma\|},$$

tenemos un mayorante integrable, y por lo tanto aplicando el teorema de convergencia dominada, resulta

$$S_N(z,\gamma) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} e^{z(\gamma)} \ \text{ en } L^q(W).$$

Tenemos así

$$f(z) = \int_X e^{z(\gamma)}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_X \frac{z(\gamma)^k}{k!}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma).$$

Como $z(\,\cdot\,)$ es una variable aleatoria compleja Gaussiana, con media 0 y varianza $\|\imath^* z\|^2$, eligiendo $r \in \mathbb{N}$ tal que $q \leq 2r$, podemos calcular

$$\begin{aligned}
\left\| z(\,\cdot\,)^k \right\|_q \leq \left\| z(\,\cdot\,)^k \right\|_{2r} &= \left(\int_X \left| z(\gamma)^k \right|^{2r} \, dW(\gamma) \right)^{1/2r} \\
&= \left(\frac{1}{\pi \|\imath^* z\|^2} \int_{\mathbb{C}} |w|^{2rk} e^{-|w|^2/\|\imath^* z\|^2} \, dw \right)^{1/2r} \\
&= \left(\frac{1}{\pi \|i^* z\|^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho^{2rk} e^{-\rho^2/\|i^* z\|^2} \, \rho \, d\theta d\rho \right)^{1/2r} \\
&= \left(\frac{1}{\|i^* z\|^2} \int_0^{+\infty} \rho^{2rk} e^{-\rho^2/\|i^* z\|^2} \, 2\rho \, d\rho \right)^{1/2r} \\
&= \left(\|i^* z\|^{2rk} \int_0^{+\infty} u^{rk} \, e^{-u} \, du \right)^{1/2r} \\
&= \sqrt[2r]{(kr)!} \, \|i^* z\|^k.
\end{aligned}$$

De este modo, si $f_k(z) = \displaystyle\int_X \frac{z(\gamma)^k}{k!} \, \overline{g(\gamma)} \, dW(\gamma)$, tenemos que

$$|f_k(z)| \leq \frac{\|z(\gamma)^k\|_q}{k!} \, \|g\|_p \leq \frac{\sqrt[2r]{(kr)!}}{k!} \, \|i^* z\|^k \, \|g\|_p \leq \frac{\sqrt[2r]{(kr)!}}{k!} \, \|z\|^k \, \|g\|_p,$$

por lo tanto

$$\|f_k\| \leq \frac{\sqrt[2r]{(kr)!}}{k!} \, \|g\|_p.$$

Llamando $a_k = \dfrac{\sqrt[2r]{(kr)!}}{k!} \, \|g\|_p$, calculemos

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[2r]{\frac{(kr+r)!}{(kr)!}} \, \frac{1}{k+1} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\sqrt[2r]{(kr+r)^r}}{k+1} = 0.$$

Resulta entonces

$$\limsup \sqrt[k]{\|f_k\|} = \limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0$$

y de acuerdo a la fórmula de Cauchy-Hadamard f es acotada en conjuntos acotados de X', es decir $f \in \mathcal{H}_b(X')$. $\square$

En las hipótesis del Teorema 3.2.4, pedimos que la función a representar sea de la forma $F \circ I \circ \imath^*$, para alguna función holomorfa $F : H \to \mathbb{C}$. En este caso, diremos que f se "extiende" a H, y que F es la "extensión" de la función. El siguiente resultado se desprende de la demostración de la Proposición 4.2.3, sin embargo, la demostración que hacemos ahora será útil en las próximas secciones.

Teorema 4.2.4. *Si f es una función L^p-representable, entonces existe $F \in \mathcal{H}_b(H)$ tal que $F \circ I \circ \iota^*(z) = f(z)$. Mas aún, esta extensión es única.*

Demostración. Existen únicos polinomios $k-$homogeneos $f_k \in \mathcal{P}(^kX')$, para los cuales $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$. Cada f_k puede escribirse como (pág. 148, [9]):

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda z)}{\lambda^{k+1}}\, d\lambda.$$

Para todo $r > 0$, el Lema 4.2.2 nos da la acotación:

$$\begin{aligned} |f_k(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|=r} \frac{|f(\lambda z)|}{r^{k+1}} |d\lambda| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|=r} \frac{C\, e^{\frac{q}{4}\|\iota^*(\lambda z)\|^2}}{r^{k+1}} |d\lambda| \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{q}{4}r^2\|\iota^* z\|^2}}{r^{k+1}}\, r dt \ = C\, \frac{e^{\frac{q}{4}r^2\|\iota^* z\|^2}}{r^k}. \end{aligned}$$

Como la función $r \mapsto \dfrac{e^{\frac{q}{4}r^2\|\iota^* z\|^2}}{r^k}$ alcanza su mínimo en $r_k = \sqrt{\dfrac{2k}{q\|\iota^* z\|^2}}$, resulta

$$|f_k(z)| \leq C\, \frac{e^{\frac{q}{4}\frac{2k}{q\|\iota^* z\|^2}\|\iota^* z\|^2}}{\left(\sqrt{\frac{2k}{q\|\iota^* z\|^2}}\right)^k} = C\, \frac{q^{k/2}e^{k/2}}{(2k)^{k/2}}\, \|\iota^* z\|^k = C\, \sqrt{\frac{(qe)^k}{(2k)^k}}\, \|I \circ \iota^*(z)\|^k.$$

Además, $I \circ \iota^*(X')$ es denso en H, por lo que existe una única extensión continua de f_k en H. Si notamos F_k a esta extensión, como

$$\limsup_{k\to\infty} \|F_k\|^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{C^2 \frac{(qe)^k}{(2k)^k}} = 0.$$

entonces $F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \in \mathcal{H}_b(H)$ y extiende a f. □

Observación 4.2.5. *Notemos que si bien el teorema enuncia que "para toda función L^p-representable existe una extensión en $\mathcal{H}_b(H)$", por ser $\|\imath' z\| = \|\imath^* z\|$, de la demostración se desprende que es natural pensar la extensión definida en H' y luego mediante la identificación $I : H' \to H$ se define en H, corrigiendo la anti-linealidad de I mediante la involución previamente definida.*

Terminamos esta sección fijando y recordando la notación que usaremos en el resto de este capítulo. La sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$, tal como se remarcó en la Observación 2.3.4, es elegida de modo tal que $\imath^* z_n = e_n'$, y estos vectores forman una base ortonormal de H'. Dado un multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, $|\alpha| = k$, llamamos

$$z^\alpha(\gamma) = \prod_{j=1}^{\infty} [z_j(\gamma)]^{\alpha_j} \ \text{ y } \ (\imath^* z)^\alpha(x) = \prod_{j=1}^{\infty} [e_j'(x)]^{\alpha_j}.$$

La clausura en norma L^p del subespacio generado por $\{z^\alpha(\,\cdot\,)\}_{|\alpha|=k}$ será notada $L_k^p(W)$.

Observación 4.2.6. *Dados dos multi-índices α y β, por el Lema 3.2.1*

$$\int_X z^\alpha(\gamma)\,\overline{z^\beta(\gamma)}dW(\gamma) \;\; = \delta_{\alpha\beta}\,\alpha!,$$

por lo tanto, $L^2_n(W) \perp L^2_m(W)$ si $n \neq m$.

4.2.1. Funciones L^2-representables

Estamos interesados en hacer un estudio exhaustivo del espacio de funciones que pueden ser representadas por elementos de $L^2(W)$. En general, toda función L^p-representable es holomorfa de tipo acotado en X', y tiene una única extensión holomorfa de tipo acotado en H (Proposición 4.2.3 y Teorema 4.2.4). Consideremos, entonces, los operadores:

$$\mathcal{T}_2 : L^2(W) \to \mathcal{H}_b(X')$$

$$\mathcal{T}_2(g)(z) = \int_X e^{z(\gamma)}\,\overline{g(\gamma)}\,dW(\gamma)$$

y

$$T_2 : L^2(W) \to \mathcal{H}_b(H)$$

definiendo $T_2(g)$ como la única extensión de $\mathcal{T}_2(g)$ al espacio H.
El operador T_2 no es inyectivo, por ejemplo tomando los monomios $z^\alpha(\,\cdot\,)$ para $|\alpha| \geq 1$, tenemos (Observación 4.2.6):

$$\mathcal{T}_2(\overline{z^\alpha})(z) = \int_X e^{z(\gamma)}\,z^\alpha(\gamma)\,dW(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_X z^k(\gamma)\,z^\alpha(\gamma)\,dW(\gamma) = 0$$

por ser $L^2_{k+|\alpha|}(W) \perp L^2_0(W)$ (espacio de funciones constantes) para todo $k \geq 0$. Resumiendo, una función holomorfa que vale 0 en el origen, tiene promedio nulo en X'. Por lo tanto una misma función holomorfa puede tener diferentes representaciones integrales, estamos interesados en caracterizar el conjunto:

$$\ker(T_2) = \left\{g \in L^2(W) : \int_X e^{z(\gamma)}\,\overline{g(\gamma)}\,dW(\gamma) = 0,\ \forall z \in X'\right\} = \left\{\{e^{z(\,\cdot\,)}\}_{z\in X'}\right\}^\perp,$$

para poder brindar información más precisa de las funciones L^2-representables.
Comenzamos probando el siguiente hecho general.

Proposición 4.2.7. *Si $p \in (1,\infty)$, entonces tenemos la siguiente igualdad:*

$$\overline{span\{e^{z(\,\cdot\,)}\}_{z\in X'}}^{\,\|\cdot\|_p} \;=\; \overline{span\{z(\,\cdot\,)^k\}_{k\geq 0,\ z\in X'}}^{\,\|\cdot\|_p}.$$

Demostración. Veamos la doble inclusión.

$\subseteq$) En la demostración de la Proposición 4.2.3, se probó que para todo $p \in (1, \infty)$

$$S_N(z,\gamma) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} z(\gamma)^k \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} e^{z(\gamma)} \text{ en } L^p(W).$$

$\supseteq$) Hacemos la demostración por inducción en k. Para $k = 0$, tomando $z = 0$ vemos que las funciones constantes están incluidas. Asumiendo cierta la propiedad para $n \leq k$, probemos que vale para $k + 1$:

$$\frac{1}{\lambda^{k+1}} \left(e^{\lambda z(\gamma)} - \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j z(\gamma)^j}{j!} \right) - \frac{z(\gamma)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{\lambda^{k+1}} \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\lambda^j z(\gamma)^j}{j!} \right) - \frac{z(\gamma)^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$= \sum_{j=k+2}^{\infty} \lambda^{(j-k-1)} \frac{z(\gamma)^j}{j!}.$$

Considerando $|\lambda| \leq 1$, podemos acotar:

$$\left| \sum_{j=k+2}^{\infty} \lambda^{(j-k-1)} \frac{z(\gamma)^j}{j!} \right| \leq |\lambda| \left(\sum_{j=n+2}^{\infty} \frac{\|z\|^j \|\gamma\|^j}{j!} \right) \leq |\lambda| e^{\|z\| \|\gamma\|}.$$

Nuevamente, por el teorema de Fernique, esta función es L^p integrable y además su norma en $L^p(W)$ tiende a 0 cuando $\lambda \to 0$. Por lo tanto, tomando la sucesión $\lambda_n = 1/n \to 0$, podemos decir que

$$\frac{1}{\lambda_n^{k+1}} \left(e^{\lambda_n z(\gamma)} - \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda_n^j z(\gamma)^j}{j!} \right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{z(\gamma)^{k+1}}{(k+1)!} \text{ en } L^p(W),$$

y entonces $z(\,\cdot\,)^{k+1} \in \overline{span\{e^{z(\,\cdot\,)}\}_{z\in X'}}^{\|\cdot\|_p}$. $\square$

Observación 4.2.8. *Si $p > 1$, la inclusión de $L^p(W)$ en $L^1(W)$ es continua, por lo tanto el enunciado de la Proposición es válido también si $p = 1$.*

Proposición 4.2.9. *El operador $T_2|_{L^2_k(W)} : L^2_k(W) \to \mathcal{H}_b(H)$ es inyectivo. Además $L^2_k(W)$ es isomorfo a $\mathcal{P}_h({}^kH)$.*

Demostración. El Teorema 3.2.7 nos daba información sobre el accionar de la fórmula integral en el espacio de polinomios de tipo finito sobre X. Sabemos entonces como actúa T_2 sobre los vectores de una base ortonormal de $L^2_k(W)$, si α es un multi-índice, $|\alpha| = k$, tenemos:

$$T_2\left(\frac{z^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}\right) = \frac{(i^*z)^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}.$$

Pero entonces,

$$T_2\left(\frac{z^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}\right)(x) = \frac{(i^*z)^\alpha(x)}{\sqrt{\alpha!}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}}\prod_{n=1}^{\infty}[e_n'(x)]^{\alpha_n} = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}}\prod_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle^{\alpha_n},$$

por lo tanto, por la Observación 4.1.8

$$T_2\left(\frac{z^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}\right) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha(J)|!}}\,P_{\Phi_{[J]}} = \frac{1}{\sqrt{k!}}\,P_{\Phi_{[J]}} \quad \text{si } \alpha = \alpha(J).$$

Tenemos así que $T_2|_{L^2_k(W)}$ envía una base ortonormal de $L^2_k(W)$ en una base ortogonal de $\mathcal{P}_h({}^kH)$, formada por vectores de longitud $\dfrac{1}{\sqrt{k!}}$, por lo tanto

$$T_2|_{L^2_k(W)} : L^2_k(W) \to \mathcal{P}_h({}^kH)$$

es un isomorfismo, y además resulta $\|g_k\|_2^2 = k!\ \|T_2(g_k)\|_h^2$ para toda función $g_k \in L^2_k(W)$. $\square$

Teorema 4.2.10. *Si $T_2 : L^2(W) \to \mathcal{H}_b(H)$ es el operador definido anteriormente, entonces* $\ker(T_2) = \left\{\{z^\alpha(\,\cdot\,)\}_{k\geq 0,\,|\alpha|=k}\right\}^{\perp}$.

Demostración. Por la Proposición 4.2.7, basta probar que

$$\overline{span\{z(\,\cdot\,)^k\}_{k\geq 0,\, z\in X'}}^{\|\cdot\|_2} = \overline{span\{z(\,\cdot\,)^\alpha\}_{k\geq 0,\,|\alpha|=k}}^{\|\cdot\|_2}.$$

$\supseteq$) Para probar esta inclusión, utilizamos el siguiente resultado:

Fórmula de Polarización: Si P es un polinomio $k-$homogéneo y A es su forma multilineal simétrica asociada, entonces

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{1}{2^k\,k!}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k=\pm 1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k\,P(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_k x_k)$$

Dado $k \in \mathbb{N}$ y $\gamma \in X$, consideramos el polinomio $k-$homogéneo P sobre X', definido por $P(\xi) = \widehat{\gamma}(\xi)^k$, y su forma multilineal simétrica asociada $A(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \widehat{\gamma}(\xi_1)\cdots\widehat{\gamma}(\xi_k)$. Si α es un multi-índice, $|\alpha| = k$, considerando aquellos índices $\{i_j\}_{j=1,\ldots n(\alpha)}$ para los cuales α_{i_j} es diferente de 0, podemos pensar $z^\alpha(\gamma) = \widehat{\gamma}(z_{i_1})^{\alpha_{i_1}}\cdots\widehat{\gamma}(z_{i_{n(\alpha)}})^{\alpha_{i_{n(\alpha)}}}$. De este modo,

$$z^\alpha(\gamma) = A(\underbrace{z_{i_1}, \ldots, z_{i_1}}_{\alpha_{i_1}-veces}, \cdots, \underbrace{z_{i_{n(\alpha)}}, \ldots, z_{i_{n(\alpha)}}}_{\alpha_{i_{n(\alpha)}}-veces}).$$

Por la fórmula de polarización, podemos escribir

$$z^\alpha(\gamma) = \frac{1}{2^k\,k!}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k=\pm 1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k\,P(\varepsilon_1 z_{i_1} + \cdots + \varepsilon_k z_{i_{n(\alpha)}}).$$

Si llamamos $z_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_k}$ al elemento de X' que resulta de la combinación lineal de los vectores del conjunto $\{\underbrace{z_{i_1},\dots,z_{i_1}}_{\alpha_{i_1}-veces},\cdots,\underbrace{z_{i_{n(\alpha)}},\dots,z_{i_{n(\alpha)}}}_{\alpha_{i_{n(\alpha)}}-veces}\}$ para cada elección $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k=\pm1$, vale la igualdad:

$$z^\alpha(\gamma)=\frac{1}{2^k\,k!}\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k\,P(z_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_k})=\frac{1}{2^k\,k!}\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k\,z_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_k}(\gamma)^k.$$

Por lo tanto $z^\alpha(\,\cdot\,)\in span\left\{z(\,\cdot\,)^k\right\}_{k\geq0,\,z\in X'}$.

$\subseteq$) Sabemos por la Proposición 4.1.4 que dado $z_0\in X'$, el polinomio $(\imath^*z_0)^k$ pertenece al espacio $\mathcal{P}_h({}^nH)$. Por ser $\left\{\frac{\sqrt{|\alpha|!}}{\sqrt{\alpha!}}(\imath^*z)^\alpha\right\}_{|\alpha|=k}$ una base ortonormal de $\mathcal{P}_h({}^kH)$, existen escalares $\{a_\alpha\}_{|\alpha|=k}\subset\mathbb{C}$, con $\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2<\infty$, para los cuales podemos escribir

$$(\imath^*z_0)^k=\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha\frac{\sqrt{|\alpha|!}}{\sqrt{\alpha!}}(\imath^*z)^\alpha.$$

Definimos $h(\gamma)=\sum_{|\alpha|=k}\overline{a_\alpha}\frac{\sqrt{|\alpha|!}}{\sqrt{\alpha!}}z^\alpha(\gamma)$. Como $\left\{\frac{z^\alpha(\,\cdot\,)}{\sqrt{\alpha!}}\right\}_{|\alpha|=k}$ es un conjunto ortonormal en $L^2(W)$, y además $\sum_{|\alpha|=k}|\alpha|!\,|\overline{a_\alpha}|^2=k!\,\left\|(\imath^*z_0)^k\right\|_h^2<\infty$, resulta $h\in L^2(W)$.

Teniendo en cuenta que:

$$\int_X e^{z(\gamma)}\overline{(z_0(\gamma)^k-h(\gamma))}\,dW(\gamma)=\int_X e^{z(\gamma)}\left(\overline{z_0(\gamma)}^k-\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha\frac{\sqrt{|\alpha|!}}{\sqrt{\alpha!}}\overline{z^\alpha(\gamma)}\right)dW(\gamma)$$

$$=[(\imath^*z_0)(I\circ\imath^*z)]^k-\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha\frac{\sqrt{|\alpha|!}}{\sqrt{\alpha!}}(\imath^*z)^\alpha(I\circ\imath^*z)=0\quad\forall z\in X',$$

y que probamos la inclusión ($\supseteq$), usando la Proposición 4.2.7, resulta

$$\left(z_0(\,\cdot\,)^k-h(\,\cdot\,)\right)\in\overline{span\{e^{z(\,\cdot\,)}\}_{z\in X'}}^{\|\cdot\|_2}\cap span\{e^{z(\,\cdot\,)}\}_{z\in X'}{}^{\perp}=\{0\}.$$

Por lo tanto $z_0(\,\cdot\,)^k\in\overline{span\{z^\alpha(\,\cdot\,)\}_{k\geq0,\ |\alpha|=k}}^{\|\cdot\|_2}$. Como z_0 era arbitrario, queda probada la inclusión ($\subseteq$). □

Queremos determinar el espacio de funciones L^2−representables, para esto, comenzamos estudiando el espacio de polinomios k−homogéneos que se pueden representar mediante la fórmula integral (A).

La siguiente proposición caracteriza los polinomios que forman el desarrollo de Taylor de una función L^2−representable.

Proposición 4.2.11. *Si* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ *es una función* L^2-*representable, entonces los polinomios* f_k *resultan* L^2-*representables y además* $F_k \in \mathcal{P}_h({}^kH)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Por definición, existe $g \in L^2(W)$ para la cual

$$f(z) = \int_X e^{z(\gamma)}\overline{g(\gamma)}\,dW(\gamma).$$

Tal como hicimos en la demostración de la Proposición 4.2.3, podemos escribir:

$$f_k(z) = \frac{1}{k!}\int_X z(\gamma)^k\,\overline{g(\gamma)}\,dW(\gamma).$$

Sea $\pi_k : L^2(W) \to L_k^2(W)$ la proyección ortogonal, como los espacios L_n^2 y L_m^2 resultan ortogonales si $n \neq m$, resulta:

$$f_k(z) = \frac{1}{k!}\int_X z(\gamma)^k\,\overline{g(\gamma)}\,dW(\gamma) = \left\langle \pi_k e^{z(\,\cdot\,)}, g\right\rangle_{L^2(W)} = \left\langle e^{z(\,\cdot\,)}, \pi_k g\right\rangle_{L^2(W)}.$$

Entonces

$$f_k(z) = \int_X e^{z(\gamma)}\overline{\pi_k g(\gamma)}\,dW(\gamma),$$

y por lo tanto es L^2-representable.
Por ser $F_k \in T_2(L_k^2(W))$, de acuerdo con la Proposición 4.2.9, $F_k \in \mathcal{P}_h({}^kH)$. □

En el Teorema 4.2.4 se probó que una condición necesaria para L^p-representabilidad de una función $f \in \mathcal{H}(X')$, es la existencia de $F \in \mathcal{H}_b(H)$ tal que para todo $z \in X'$ sea $f(z) = F \circ I \circ \imath^* z$. El siguiente teorema da una caracterización precisa del conjunto de funciones L^2-representables.

Teorema 4.2.12. *Dada* $F \in \mathcal{H}_b(H)$ *y* $f = F \circ I \circ \imath^*$, *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *es una función* L^2-*representable.*

2. $F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k$, $F_k \in \mathcal{P}_h({}^kH)$ *y además* $\sum_{k\geq 0} \sqrt{k!}\; F_k \in \mathcal{H}^2(B_H^\circ)$.

Demostración. Veamos ambas implicaciones.
1) ⇒ 2). Si f es L^2-representable, existe entonces $g \in L^2(W)$ tal que

$$f(z) = \int_X e^{z(\gamma)}\,\overline{g(\gamma)}\,dW(\gamma).$$

Sabemos, por el Teorema 4.2.4, que $F \in \mathcal{H}_b(H)$, y como consecuencia de la Proposición 4.2.11, $F_k \in \mathcal{P}_h({}^kH)$ para todo $k \geq 0$. Además, por la Proposición 4.2.9, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!\,\|F_k\|_h^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|p_k(g)\|_2^2 \leq \|g\|_2^2 < \infty,$$

luego $\sum_{k\geq 0}\sqrt{k!}\, F_k \in \mathcal{H}^2(B_H^\circ)$.
2) $\Rightarrow$ 1). Dada la función $F=\sum_{k=0}^\infty F_k$, por hipótesis $\sum_{k=0}^\infty \sqrt{k!}\, F_k \in \mathcal{H}^2(B_H^\circ)$, por lo tanto $F_k \in \mathcal{P}_h({}^kH)$ para todo $k\geq 0$. Por la Proposición 4.2.9, existen funciones $g_k \in L_k^2(W)$ tales que

$$F_k\circ I\circ \imath^* z=\int_X e^{z(\gamma)}\,\overline{g_k(\gamma)}\,dW(\gamma) \;\text{ y }\; \|g_k\|_2^2 = k!\,\|F_k\|_h^2.$$

Resulta entonces $\sum_{k=0}^N g_k \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} g \in L^2(W)$ y $f(z)=\displaystyle\int_X e^{z(\gamma)}\,\overline{g(\gamma)}\,dW(\gamma)$. □

Recordemos que $P\in\mathcal{P}({}^kE)$ es integral si existe una medida μ boreliana, regular y de variación acotada definida en $(B_{E'},w^*)$ tal que

$$P(x)=\int_{B_{E'}}\gamma(x)^k\,d\mu(\gamma)$$

Comentamos que los polinomios integrales tienen diferentes medidas asociadas que los representan, y no existe una caracterización de estas medidas. Como aplicación del Teorema 4.2.12 veamos que dado un espacio de Hilbert separable, si consideramos el conjunto de polinomios integrales definidos en él, es posible dar una representación integral alternativa para estos polinomios. La integración se realiza sobre un espacio de medida, que no depende del polinomio, e involucra una transformación "explícita" del polinomio representado.

Teorema 4.2.13. *Sea H un espacio de Hilbert separable, existen entonces un espacio de Wiener abstracto $\imath : H \hookrightarrow X$, una medida de Wiener W en X y una aplicación lineal y continua $\Lambda:\mathcal{P}_I({}^kH)\to L^2(W)$, tales que todo $P\in\mathcal{P}_I({}^kH)$ puede representarse por medio de*

$$P(x)=\int_X x(\gamma)^k\,\Lambda(P)\,dW(\gamma), \tag{4.1}$$

Demostración. Comenzamos recordando que, por la Proposición 4.1.4, $\mathcal{P}_I({}^kH)\subset\mathcal{P}_h({}^kH)$. Construimos alguna norma medible en H, por ejemplo a partir de un operador de Hilbert-Schmidt inyectivo definido en H, y llamamos X al espacio de Banach que se obtiene completando H respecto a esta nueva norma. Por definición, $\imath : H\hookrightarrow X$ es un espacio de Wiener abstracto. Podemos considerar $x\in H$ como una "funcional lineal medible" sobre X, mas aún, $x: X\to\mathbb{C}$ es una variable aleatoria Gaussiana compleja, con media 0 y varianza $\|x\|_H^2$ (pág. 57, [16]).
Es claro que $P\in\mathcal{P}_h({}^kH)$ es una extension de $p\in\mathcal{P}({}^kX')$ definido por $p(z)=P\circ I\circ\imath^*(z)$. Por el Teorema 4.2.12, p es L^2-representable:

$$\begin{aligned} p(z) &= \int_X e^{z(\gamma)}\overline{[(T_2|_{L_k^2(W)})^{-1}(P)](\gamma)}\,dW(\gamma)\\ &= \int_X \frac{z(\gamma)^k}{k!}\overline{[(T_2|_{L_k^2(W)})^{-1}(P)](\gamma)}\,dW(\gamma)\end{aligned}$$

y llamando

$$\widetilde{\Lambda} : \mathcal{P}_h({}^kH) \to L^2(W)$$

$$\widetilde{\Lambda}(P) = \frac{\overline{[(T_2|_{L^2_k(W)})^{-1}(P)]}}{k!},$$

definimos $\Lambda = \widetilde{\Lambda}|_{\mathcal{P}_I({}^kH)}$, que resulta continua por ser restricción de una aplicación continua. De este modo probamos la igualdad (4.1) sobre el conjunto denso $I \circ \imath^*(X') \subset H$. Sólo falta mostrar que el miembro derecho de la igualdad es un polinomio continuo sobre H. Pero,

$$\left| \int_X x(\gamma)^k [\Lambda(P)](\gamma)\, dW(\gamma) \right| \leq \|\Lambda(P)\|_2 \left\| x(\,\cdot\,)^k \right\|_2 = \|\Lambda(P)\|_2 \sqrt{k!}\, \|x\|_H^k.$$

□

Quedan entonces caracterizadas las funciones, en particular los polinomios, que resultan L^2-representables. En dimensión finita todos los polinomios son Hilbertianos y por lo tanto representables. Más particularmente, toda funcional lineal se representa si el espacio es finito-dimensional.

¿Cuáles son exactamente las funcionales lineales que se representan en X'?

Si φ es representable, el Teorema 4.2.4 garantiza la extensión de φ al espacio H. Con las notaciones del mismo teorema, podemos escribir:

$$\varphi(z) = \langle I \circ \imath^* z, x_\varphi \rangle = \overline{\langle x_\varphi, I \circ \imath^* z \rangle} = \overline{\imath^* z(x_\varphi)} = \imath' z(x_\varphi^*) = z(\imath x_\varphi^*) = \widehat{\imath x_\varphi^*}(z).$$

Por lo tanto $\varphi \in X''$ es la funcional $\widehat{\imath x}$ para algún elemento $x \in H$.

Necesitamos además, que $\langle\,\cdot\,, x_\varphi\rangle : H \to \mathbb{C}$ sea Hilbertiana, pero en el caso de polinomios 1-homogéneos $\mathcal{P}_h(H) = \mathcal{P}(H) = H'$, por lo tanto las funcionales lineales sobre X' que resultan L^2-representables son exactamente aquellas de la forma $\widehat{\imath x}$ para $x \in H$.

Observación 4.2.14. *Para poder representar una función holomorfa sobre X', en las hipótesis del Teorema 3.2.4, pedíamos esencialmente dos cosas. Una de ellas era que la función a representar se expresara como $F \circ I \circ \imath^*$, para alguna función holomorfa $F : H \to \mathbb{C}$. Por el Teorema 4.2.4, esta condición es necesaria. Sin embargo la otra condición impuesta, la continuidad de la función $\widetilde{F^\sharp}$ en el espacio H_0, sólo es suficiente, ya que por ser H densamente incluido en H_0, no es posible que toda funcional lineal continua sobre H se extienda continuamente a H_0,*

$$H \xrightarrow{\imath_0} H_0$$

$$H' \xleftarrow{\imath_0'} H_0'$$

solamente es posible para las restricciones de elementos de H_0'. Por lo tanto, como todas las funcionales $\{\widehat{\imath x} : x \in H\}$ son representables, en muchos de estos casos, la función $\widetilde{F^\sharp} \in L^2(W)$ no resulta continua sobre H_0.

Observación 4.2.15. *No todas las funcionales lineales son L^2−representables, por lo tanto no lo pueden ser todos los polinomios de tipo finito ó integrales. Sin embargo hay un detalle a tener presente. En el espacio de Banach X comenzamos definiendo una medida, para eso se construyó el espacio de Wiener abstracto $(\imath, H, X)$, y concluimos ahora notando que las funcionales L^2−representables sobre X' son aquellas que provienen de $\imath(H)$.*
Si queremos representar a un polinomio de tipo finito, que involucra a las funciones lineales $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\} \subset X$, debemos revisar la demostración del Teorema 2.3.2 y diseñar la construcción de los subespacios $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de modo tal que $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\} \subset F_{n_0}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Por un lado esta idea conspira contra nuestra intención de utilizar una medida universal para todas las funciones, pero por otro nos dice que es posible, dado el polinomio, construir una medida que permita representarlo.

4.2.2. Funciones L^p−representables

Nuestro próximo objetivo es estudiar el espacio de funciones L^p−representables. Como en espacios de medida finita, $L^r \subset L^s$ cada vez que $s < r$, toda función L^r−representable será también L^s−representable. Nos restringimos al caso $p \in (1, 2)$, y en muchas situaciones consideraremos aquellos $p > 1$ tales que $q = p/(p-1)$ es un número par.

El primer esfuerzo es tendiente a caracterizar el conjunto de polinomios involucrados en el desarrollo de Taylor de las funciones L^p−representables.

Teorema 4.2.16. *Si $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ es una función L^p−representable, para $1 < p < 2$, entonces f_k es L^2−representable para todo $k \geq 0$.*

Demostración. Sea $g \in L^p(W)$ tal que:

$$f(z) = \int_X e^{z(\gamma)}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma).$$

Definimos

$$M_k : L_k^q(W) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$M_k(\psi) = \int_X \psi(\gamma)\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma).$$

Dado $\phi \in \mathcal{P}_f({}^kX)$, supongamos $q = 2r,\ r \in \mathbb{N}$, calculemos:

$$\|\phi\|_q = \left[\int_X |\phi(\gamma)|^q\, dW(\gamma)\right]^{1/q} = \|\phi^r\|_2^{2/q},$$

recurriendo a la Proposición 4.2.9, este valor puede expresarse en términos de su transformación T_2 :

$$\|\phi^r\|_2^{2/q} = \left[(kr)!\, \|T_2(\phi^r)\|_h^2\right]^{1/q}.$$

En el Teorema 3.2.7 probamos que T_2 actúa de manera multiplicativa sobre $\mathcal{P}_f({}^kX)$, y sabemos además, por la Proposición 4.1.5, que el producto de polinomios Hilbertianos es continuo. Aplicando estas propiedades:

$$\|\phi\|_q = \sqrt[q]{(kr)!}\, \|T_2(\phi)^r\|_h^{1/r} \leq \sqrt[q]{(kr)!}\, \|T_2(\phi)\|_h = \frac{\sqrt[q]{(kr)!}}{\sqrt{k!}} \|\phi\|_2.$$

Como $L_k^q(W) \subset L_k^2(W)$, podemos extender M_k a $\widetilde{M_k}$, ya que tenemos la acotación

$$|M_k(\phi)| \leq \|g\|_p\, \|\phi\|_q \leq \|g\|_p\, \frac{\sqrt[q]{(kr)!}}{\sqrt{k!}}\, \|\phi\|_2.$$

Tenemos entonces definida la funcional lineal y continua

$$\widetilde{M_k} : L_k^2(W) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\|\widetilde{M_k}\| \leq \frac{\sqrt[q]{(kr)!}}{\sqrt{k!}} \|g\|_p.$$

Por el teorema de Riesz, existe una única $g_k \in L_k^2(W)$, tal que:

$$\widetilde{M_k}(\psi) = \int_X \psi(\gamma)\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) = \int_X \psi(\gamma)\, \overline{g_k(\gamma)}\, dW(\gamma),$$

y además

$$\|g_k\|_2 \leq \frac{\sqrt[q]{(kr)!}}{\sqrt{k!}} \|g\|_p.$$

Como

$$f(z) = \int_X e^{z(\gamma)}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_X z(\gamma)^k\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma)$$

y

$$f_k(z) = \frac{1}{k!}\, \widetilde{M_k}\left(z(\,\cdot\,)^k\right) = \frac{1}{k!} \int_X z(\gamma)^k\, \overline{g_k(\gamma)}\, dW(\gamma),$$

recordando que si $n \neq m$, entonces $L_n^2(W) \perp L_m^2(W)$, tenemos que

$$\delta_{jk}\, f_k(z) = \frac{1}{j!} \int_X z(\gamma)^j\, \overline{g_k(\gamma)}\, dW(\gamma),$$

sumando sobre j todas estas expresiones, resulta

$$f_k(z) = \int_X e^{z(\gamma)}\, \overline{g_k(\gamma)}\, dW(\gamma),$$

y por lo tanto f_k es una función L^2-representable. $\square$

Observación 4.2.17. *La desigualdad $\|\cdot\|_q \leq C(q,k)\,\|\cdot\|_2$, prueba que estas son normas equivalentes sobre $\mathcal{P}_f({}^kX) \subset L^2(W) \cap L^q(W)$. La constante $C(q,k) = \dfrac{\sqrt[q]{(kr)!}}{\sqrt{k!}}$ es óptima y no está uniformemente acotada para los diferentes valores de q y k.*

Observación 4.2.18. *En la situación anterior, el Teorema 4.2.4 garantiza la existencia de una única función $F \in \mathcal{H}_b(H)$, $F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k$ tal que $F \circ I \circ \iota^*(z) = f(z)$, como cada polinomio $k-$homogéneo f_k es L^2-representable, resulta $F_k \in \mathcal{P}_h({}^kH)$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$.*

Observación 4.2.19. *El Teorema 4.2.16 prueba que todos los polinomios que forman el desarrollo de Taylor de una función L^p-representable tienen extensión Hilbertiana. Es decir, no se pueden representar "nuevos" polinomios al cambiar el espacio $L^2(W)$ por $L^p(W)$. Esto plantea el siguiente interrogante: ¿ La función $g(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\gamma) \in L^2(W)$?*

Si la respuesta a esta pregunta fuera afirmativa, toda función L^p-representable resultaría también L^2-representable. Si la respuesta fuera negativa, no tenemos ninguna garantía de que $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(\gamma) \in L^p(W)$, por lo que estaríamos en presencia de una función L^p-representable de la cual no conocemos explícitamente cuál es la función transformada que debemos integrar. Volveremos sobre este punto al final del capítulo.

Estábamos interesados en dar representaciones integrales para funciones definidas en un espacio de Banach E, aún en el caso en que este que no fuera un espacio dual.

Definición 4.2.20. *Si E es un espacio de Banach con dual separable, decimos que una función $f : E \to \mathbb{C}$ es L^p-representable en E, si existe $g \in L^p(E', W)$, tal que*

$$f(z) = \int_{E'} e^{\gamma(z)}\,\overline{g(\gamma)}\,dW(\gamma).$$

En la Observación 3.4.3 vinculamos la noción de representabilidad de una función f sobre E, con la de L^p-representación de su extensión de Aron-Berner $AB(f)$. El motivo por el cual sólo nos centramos en $AB(f)$ queda de manifiesto en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.21. *La función $f : E \to \mathbb{C}$ es L^p-representable en E, si y sólo si $AB(f)$ es L^p-representable.*

Demostración. $\Leftarrow$) Como $AB(f)$ es L^p- representable, existe $g \in L^p(W)$ tal que:

$$AB(f)(\zeta) = \int_{E'} e^{\zeta(\gamma)}\,\overline{g(\gamma)}\,dW(\gamma) \qquad \text{para todo } \zeta \in E''.$$

Sea $J : E \to E''$ la inclusión canónica. Por definición $[Jz](\gamma) = \gamma(z)$ y además se verifica $AB(f)(Jz) = f(z)$, por lo tanto tomando $\zeta = Jz$, para $z \in E$, la expresión anterior se convierte en

$$f(z) = \int_{E'} e^{\gamma(z)}\,\overline{g(\gamma)}\,dW(\gamma),$$

y por lo tanto f es L^p-representable sobre E.

$\Rightarrow$) Es suficiente probar que $f_k(z) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\int_{E'} \gamma(z)^k\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma)$ tiene por extensión de Aron-Berner al polinomio

$$Q(\zeta) = \frac{1}{k!}\int_{E'} \zeta(\gamma)^k\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma).$$

De este modo,

$$AB(f)(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} AB(f_k)(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\int_{E'} \zeta(\gamma)^k\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) = \int_{E'} e^{\zeta(\gamma)}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma).$$

Para probar esto, utilizamos el siguiente teorema que caracteriza a la extensión de Aron-Berner [26].

Teorema 4.2.22. *(Zalduendo) Sea $P \in \mathcal{P}(^kE)$, si $Q \in \mathcal{P}(^kE'')$ es tal que $Q|_E = P$, entonces $Q = AB(P)$ si y sólo si:*

i) $DQ(z)$ es w^*-continua para todo $z \in E$, y

ii) Para cada elemento $\zeta \in E''$ y cada red $(z_\alpha) \subset E$ tal que $z_\alpha \xrightarrow{w^*} \zeta$, entonces $DQ(\zeta)(z_\alpha) \to DQ(\zeta)(\zeta)$.

Vamos a probar que $Q(\zeta) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\int_{E'} \zeta(\gamma)^k\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma)$ tiene diferenciales de primer orden w^*-continuos, por lo que (i) y (ii) se satisfacen.

Tomemos un par de números positivos $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $1/r + 1/s + 1/p = 1$. Estamos considerando $p \in (1,2)$, por lo que podemos elegir r con la condición adicional de no ser menor que 2. Como

$$DQ(\zeta)(\xi) = \frac{1}{(k-1)!}\int_{E'} \xi(\gamma)\, \zeta(\gamma)^{k-1}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) \text{ para todo } \zeta, \xi \in E'',$$

aplicando la desigualdad de Hölder generalizada, tenemos:

$$|DQ(\zeta)(\xi)| \leq \frac{1}{(k-1)!}\, \|\xi(\,\cdot\,)\|_r\, \|\zeta(\,\cdot\,)^{k-1}\|_s\, \|g(\,\cdot\,)\|_p.$$

Recordando que para $2 \leq p < \infty$ todas las normas L^p son equivalentes sobre $\mathcal{P}_f(^kE')$, podemos acotar $\|\xi(\,\cdot\,)\|_r \leq C(r)\, \|\xi(\,\cdot\,)\|_2 = C(r)\, \|I \circ \imath^*\xi\|_H$. Notemos que entonces existe una constante, dependiendo de r, s, k, g y ζ, tal que

$$|DQ(\zeta)(\xi)| \leq C(r, s, k, g, \zeta)\, \|I \circ \imath^*\xi\|_H.$$

Por la densidad de $I \circ \imath^*(E'')$ en H, para cada $\zeta \in E''$ existe una única extensión continua de la aplicación $DQ(\zeta)(\,\cdot\,)$ en H. Llamando a esta extensión Φ_ζ, resulta

$$DQ(\zeta)(\xi) = \Phi_\zeta(I \circ \imath^*\xi) = \langle I \circ \imath^*\xi, I(\Phi_\zeta)\rangle = \overline{\langle I(\Phi_\zeta), I \circ \imath^*\xi\rangle}$$

$$= \overline{\imath^*\xi(I(\Phi_\zeta))} = (\imath'\xi)(I(\Phi_\zeta)^*) = \xi(\imath \circ I(\Phi_\zeta^*)).$$

Como $\imath \circ I(\Phi_\zeta^*) \in E'$, se tiene que $DQ(\zeta)(\,\cdot\,)$ es w^*-continua. □

Para estudiar la relación entre las funciones L^p−representables y los polinomios ó funciones holomorfas integrales, comenzamos con la siguiente observación.

Observación 4.2.23. *Consideremos el espacio compacto $(B_{E'}, w^*)$, como todo abierto en la topología w^* es abierto en la topología dada por la norma y la bola es cerrada, los conjuntos w^*−borelianos de $B_{E'}$ están incluidos en los borelianos dados por la norma. De este modo, si llamamos*

$$r : E' \to B_{E'}$$

$$r(\gamma) = \frac{\gamma}{1 + \|\gamma\|},$$

entonces para toda $\varphi \in \mathcal{C}(B_{E'}, w^*)$ la función

$$\widetilde{\varphi} : E' \to \mathbb{C}$$

$$\widetilde{\varphi}(\gamma) = \varphi \circ r(\gamma)$$

resulta medible Borel en E'. En efecto, por la continuidad de r y la w^*−continuidad de φ, si $\Delta \subset \mathbb{C}$ es boreliano,

$$\widetilde{\varphi}^{-1}(\Delta) = \underbrace{r^{-1}\left(\underbrace{\varphi^{-1}(\Delta)}_{w^*-Borel \Rightarrow Borel}\right)}_{Borel}.$$

Además,

$$\sup_{\gamma \in E'} |\widetilde{\varphi}(\gamma)| = \sup_{r(\gamma) \in B_{E'}} |\varphi(r(\gamma))| \leq \|\varphi\|_\infty.$$

Estamos en condiciones de probar el siguiente teorema.

Teorema 4.2.24. *Si $P \in \mathcal{P}(^kE)$ es L^p−representable en E, entonces $P \in \mathcal{P}_I(^kE)$.*

Demostración. Si $P \in \mathcal{P}(^kE)$ un polinomio L^p−representable, sabemos por el Teorema 4.2.16 que existe $g_k \in L^2(W)$ tal que

$$P(z) = \int_{E'} \frac{\gamma(z)^k}{k!} \overline{g_k(\gamma)}\, dW(\gamma).$$

Con las notaciones de la Observación anterior, definimos

$$\mathcal{T} : \mathcal{C}(B_{E'}, w^*) \to \mathbb{C}$$

$$\mathcal{T}(\varphi) = \frac{1}{k!} \int_{E'} \varphi(r(\gamma))\, (1 + \|\gamma\|)^k\, \overline{g_k(\gamma)}\, dW(\gamma).$$

En la expresión sub-integral, tenemos $\varphi(r(\,\cdot\,)) \in L^\infty(W)$, $g_k \in L^2(W)$ y por el teorema de Fernique, $\frac{(1+\|\gamma\|)^k}{k!} \leq e^{1+\|\gamma\|} \in L^2(W)$. Entonces, este operador $\mathcal{T}$ resulta continuo, y podemos acotar:

$$|\mathcal{T}(\varphi)| \leq \int_{E'} |\varphi(r(\gamma))|\, e^{1+\|\gamma\|}\, |\overline{g_k(\gamma)}|\, dW(\gamma) \leq \|\varphi\|_\infty \left\| e^{1+\|\cdot\|} \right\|_2 \|g_k(\,\cdot\,)\|_2 \leq C(P)\, \|\varphi\|_\infty.$$

Por lo tanto el teorema de Riesz-Markov-Kakutani garantiza la existencia de una medida boreliana y regular μ en $(B_{E'}, w^*)$, tal que:

$$\mathcal{T}(\varphi) = \int_{B_{E'}} \varphi(\gamma)\, d\mu(\gamma) \qquad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{C}(B_{E'}, w^*).$$

Pensando a cada $z \in E$ como la función w^*-continua: $\widehat{z}(\gamma)^k = \gamma(z)^k$, tenemos:

$$\int_{B_{E'}} \gamma(z)^k\, d\mu(\gamma) = \int_{B_{E'}} \widehat{z}(\gamma)^k\, d\mu(\gamma) = \mathcal{T}(\widehat{z}(\,\cdot\,)^k) = \frac{1}{k!} \int_{E'} \widehat{z}(r(\gamma))^k\, (1+\|\gamma\|)^k\, \overline{g_k(\gamma)}\, dW(\gamma)$$

$$= \frac{1}{k!} \int_{E'} \frac{\gamma(z)^k}{(1+\|\gamma\|)^k}\, (1+\|\gamma\|)^k\, \overline{g_k(\gamma)}\, dW(\gamma) = \frac{1}{k!} \int_{E'} \gamma(z)^k\, \overline{g_k(\gamma)}\, dW(\gamma) = P(z).$$

Por lo tanto P es un polinomio de tipo integral sobre E. $\square$

Observación 4.2.25. *La norma integral del polinomio P es menor o igual a la variación total de la medida μ que lo representa, que a su vez es igual que la norma de la funcional $\mathcal{T}$. Haciendo una cota más precisa , tenemos entonces*

$$\|P\|_I \leq \|\mu\| \leq \int_{E'} \frac{(1+\|\gamma\|)^k}{k!}\, |\overline{g_k(\gamma)}|\, dW(\gamma).$$

Teorema 4.2.26. *Si f es una función L^2-representable sobre E, entonces es una función holomorfa integral.*

Demostración. La demostración es una aplicación del siguiente teorema [7]:

> **Teorema 4.2.27.** *(Dimant-Galindo-Maestre-Zalduendo) Si $f = \sum_{k=0}^\infty P_k$, con $P_k \in \mathcal{P}_I(^kE)$, y la sucesión $(\|P_k\|_I)_{k\in\mathbb{N}}$ es sumable, entonces f es integral y su norma no excede al valor $\sum_{k=0}^\infty \|P_k\|_I$.*

Sea f una función L^2-representable sobre E, existe entonces $g \in L^2(W)$ tal que

$$f(z) = \int_{E'} e^{\gamma(z)}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma)$$

$$f_k(z) = \int_{E'} \frac{\gamma(z)^k}{k!}\, \overline{\pi_k g(\gamma)}\, dW(\gamma),$$

con $\pi_k : L^2(W) \to L^2_k$ la proyección ortogonal.
En el Teorema 4.2.24 probamos que cada f_k es un polinomio integral, y en la Observación 4.2.25 mostramos que

$$\|f_k\|_I \leq \int_{E'} \frac{(1+\|\gamma\|)^k}{k!} |\pi_k g(\gamma)| \, dW(\gamma).$$

Para probar que f es integral, bastará probar entonces que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{E'} \frac{(1+\|\gamma\|)^k}{k!} |\pi_k g(\gamma)| \, dW(\gamma)$$

es convergente.

Para esto, aplicando el teorema de Fernique, junto con el de convergencia dominada, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\|\gamma\|)^k}{k!} \to e^{1+\|\gamma\|} \text{ en } L^2(W),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \int_{E'} \frac{(1+\|\gamma\|)^k}{k!} |\pi_k g(\gamma)| \, dW(\gamma) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \int_{E'} \frac{(1+\|\gamma\|)^{2k}}{k!^2} + |\pi_k g(\gamma)|^2 \, dW(\gamma) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E'} \frac{(1+\|\gamma\|)^{2k}}{k!^2} \, dW(\gamma) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E'} |\pi_k g(\gamma)|^2 \, dW(\gamma) \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E'} \frac{(1+\|\gamma\|)^k}{k!} e^{1+\|\gamma\|} \, dW(\gamma) + \frac{1}{2} \|g\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_{E'} e^{2(1+\|\gamma\|)} \, dW(\gamma) + \frac{1}{2} \|g\|_2^2 = \frac{1}{2} \left[\left\| e^{1+\|\gamma\|} \right\|_2^2 + \|g\|_2^2 \right] < \infty.
\end{aligned}$$

Existe entonces una medida Boreliana regular μ_f en $(B_{E'}, w^*)$ para la cual

$$f(z) = \int_{B_{E'}} \frac{1}{1-\gamma(z)} \, d\mu_f(\gamma) \qquad \text{para todo } z \in B_E^\circ.$$

□

4.3. Funciones $\rho-$representables

Queremos responder la inquietud planteada en la Observación 4.2.19, para esto necesitamos definir una nueva clase de funciones.

Definición 4.3.1. *Dado $\rho > 0$, decimos que una función $f \in \mathcal{H}(X')$ es $\rho-$representable, se existe $g \in L^2(W)$ tal que*

$$f(z) = \int_X e^{\rho z(\gamma)} \overline{g(\gamma)} \, dW(\gamma) \ \forall z \in X'.$$

Es claro que en el caso de funciones L^2-representables, estamos frente a $\rho = 1$ y funciones "1−representables". El siguiente resultado relaciona la L^p-representabilidad con esta nueva noción de funciones $\rho-$representables.

Teorema 4.3.2. *Dado $p > 1$ existe $\rho_0(p)$, tal que toda función L^p-representable es $\rho-$representable, si $\rho > \rho_0(p)$.*

Demostración. Si consideramos aquellos valores $1 < p_r$, para los cuales $p_r' = q_r = 2r$, con $r \in \mathbb{N}$, resulta que $p_r = 2r/(2r-1) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Dado $p > 1$, existe entonces $p_{r_0} < p$ tal que $q_{r_0} = 2r_0$, y luego toda función L^p-representable será $L^{p_{r_0}}-$representable también. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer entonces que f es L^p-representable y además $p' = q = 2r,\ r \in \mathbb{N}$.
Sea f una función L^p-representable, tomemos $g \in L^p(W)$ tal que

$$f(z) = \int_X e^{z(\gamma)}\,\overline{g(\gamma)}\,dW(\gamma).$$

Consideremos la sucesión de funciones $\{g_k\}_{k\geq 0} \subset L^2(W)$ definidas en el Teorema 4.2.16, y fijemos $\rho_0(p) = \sqrt{r}$.
Para $\rho > \rho_0(p)$, afirmamos que $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\rho^k}\, g_k$ define una sucesión de Cauchy en $L^2(W)$. Para ver esto, llamemos $a_k = \dfrac{\sqrt[r]{(kr)!}}{k!}\|g\|_p^2$. Como

$$\frac{kr+1}{k+1} = \frac{\sqrt[r]{(kr+1)^r}}{k+1} \leq \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\sqrt[r]{(kr+1)\dots(kr+r)}}{k+1} \leq \frac{\sqrt[r]{(kr+r)^r}}{k+1} = r,$$

la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^{-2k}$ es convergente para todo ρ tal que $\rho^2 > \rho_0(p)^2 = r$.

Notemos que, por la Observación 4.2.17, $\|g_k\|_2^2 \leq \dfrac{\sqrt[r]{kr!}}{k!}\,\|g\|_p^2 = a_k$, y por lo tanto si fijamos ρ tal que $\rho^2 > r$, dado $\varepsilon > 0$, si $N > M$ tenemos

$$\left\|\sum_{k=M+1}^{N} \frac{1}{\rho^k}\, g_k\right\|_2^2 = \sum_{k=M+1}^{N} \frac{1}{\rho^{2k}}\|g_k\|_2^2 \leq \sum_{k>M} \frac{1}{\rho^{2k}}\,\frac{\sqrt[r]{kr!}}{k!}\,\|g\|_p^2 = \sum_{k>M} \frac{a_k}{\rho^{2k}},$$

y esta última expresión puede hacerse menor que ε tomando M suficientemente grande.
Sea $\widetilde{g_\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^k}\, g_k$ el límite en $L^2(W)$ de esta sucesión, resulta entonces

$$\begin{aligned}
\int_X e^{\rho z(\gamma)}\,\overline{\widetilde{g_\rho(\gamma)}}\,dW(\gamma) &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_X \rho^n\,\frac{z(\gamma)^n}{n!}\,\overline{\widetilde{g_\rho(\gamma)}}\,dW(\gamma) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\int_X \rho^n\,\frac{z(\gamma)^n}{n!}\,\frac{\overline{g_k(\gamma)}}{\rho^k}\,dW(\gamma)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_X \frac{z(\gamma)^k}{k!}\,\overline{g_k(\gamma)}\,dW(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = f(z).
\end{aligned}$$

De este modo queda probado que si f es L^p-representable, existe $\rho_0(p)$ tal que f es $\rho-$representable para todo $\rho > \rho_0(p)$. $\square$

Observación 4.3.3. *La demostración anterior nos da la siguiente información.*

1. $\|\widetilde{g}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|g_k\|_2^2}{\rho^{2k}}} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{2k}} \frac{\sqrt[r]{(kr)!}}{k!} \|g\|_p^2} \leq C(\rho)\, \|g\|_p$ *por lo que* $g \mapsto \widetilde{g}$ *es continua.*

2. *Si* f *es* L^p-*representable, entonces para* $\rho > \rho_0(p)$, *tenemos que* $f(z) = v(\rho z)$ *donde* $v(\,\cdot\,)$ *es una función* L^2-*representable.*

Corolario 4.3.4. *Dado* $p > 1$, *si* f *es una función* L^p-*representable y* $F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k$ *es su extensión en* H, *entonces*

1. $\sum_{k\geq 0} \sqrt{k!}\, F_k \in \mathcal{H}_h(H)$.

2. $F = \sum_{k\geq 0} F_k \in \mathcal{H}_{hb}(H)$.

Demostración. Si f es una función L^p-representable y $|\theta| < [\rho_0(p)]^{-1}$, elijamos ρ tal que $|\theta| < \dfrac{1}{\rho} < \dfrac{1}{\rho_0(p)}$. La Observación 4.3.3 nos dice que $f(z) = v(\rho z)$ donde $v(\,\cdot\,)$ es una función L^2-representable, y si notamos F, F_k, V y V_k a las extensiones en H de f, f_k, v y v_k respectivamente, tenemos entonces $\|F_k\|_h = \rho^k \|V_k\|_h$, y por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!\, |\theta|^{2k} \|F_k\|_h^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k!\, |\theta|^{2k} \rho^{2k} \|V_k\|_h^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} k!\, \|V_k\|_h^2 < \infty.$$

Resulta así

1. $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\sqrt{k!}\, \|F_k\|_h} < \infty$.

2. $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|F_k\|_h} = 0$.

$\square$

Teorema 4.3.5. *Si* f *es una función* L^p-*representable en* E, *entonces existen* $\rho > 0$ *y una medida regular de Borel* μ *en* $(B_{E'}, w^*)$ *tales que*

$$f(z) = \int_{B_{E'}} \frac{1}{1 - \gamma(\rho z)}\, d\mu_f(\gamma) \qquad \textit{para todo } z \in \frac{1}{\rho} B_E^{\circ}.$$

Demostración. Por el Teorema 4.3.2, existe $\rho_0(p)$ tal que si $\rho > \rho_0(p)$, entonces toda función L^p-representable es $\rho-$representable, y por la Observación 4.3.3 existe una función $v(\,\cdot\,)$, L^2-representable, tal que $f(z) = v(\rho z)$. Por lo tanto, aplicando el Teorema 4.2.26, existe μ_v tal que

$$v(z) = \int_{B_{E'}} \frac{1}{1-\gamma(z)}\, d\mu_v(\gamma) \qquad \text{para todo } z \in B_E^{\circ}$$

y por lo tanto

$$f(z) = \int_{B_{E'}} \frac{1}{1-\gamma(\rho z)}\, d\mu_v(\gamma) \qquad \text{para todo } z \in \frac{1}{\rho} B_E^{\circ}.$$

□

4.4. Observaciones

Sabemos que para $p \in (1,2)$, tenemos la inclusión $L^2(W) \subset L^p(W)$, y por lo tanto toda función L^2-representable es a su vez L^p-representable. Probamos que para todo $1 < p$, existe $\rho_o(p)$ tal que si $\rho > \rho_0(p)$, toda función L^p-representable es $\rho-$representable. Veamos ahora algunos ejemplos que muestran que ambas son inclusiones estrictas.

Teorema 4.4.1. *Para cada $p \in (1,2)$, existe una función L^p-representable que no es L^2-representable.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que p es un número racional, $p = \dfrac{m}{n}$, donde $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m < 2n$.

Comencemos mostrando que la inclusión

$$\overline{span\{z(\,\cdot\,)^k\}_{k\geq 0,\ z\in X'}}^{\|\cdot\|_2} \hookrightarrow \overline{span\{z(\,\cdot\,)^k\}_{k\geq 0,\ z\in X'}}^{\|\cdot\|_p}$$

no es sobreyectiva, para lo cual bastará ver que no es abierta.
Sea $z \in X'$ tal que $\|I \circ i^* z\|_H = 1$, y $k = 2jn$, $j \in \mathbb{N}$. Calculemos

$$\|z(\,\cdot\,)^k\|_p^p = \int_X |z(\gamma)^k|^p\, dW(\gamma) = \int_{\mathbb{C}} |w|^{kp}\, e^{-|w|^2} \frac{dw}{\pi} = \int_0^\infty r^{pk}\, e^{-r^2}\, 2r\, dr$$

$$= \int_0^\infty u^{pk/2}\, e^{-u}\, du = \int_0^\infty u^{mj}\, e^{-u}\, du = (mj)!$$

Llamando

$$b_j = \frac{\left\|z(\,\cdot\,)^{2jn}\right\|_p}{\left\|z(\,\cdot\,)^{2jn}\right\|_2} = \frac{[(mj)!]^{n/m}}{[(2jn)!]^{1/2}},$$

vemos que:

$$\frac{b_{j+1}}{b_j} = \frac{[(m(j+1))!]^{n/m}}{\sqrt{[2(j+1)n]!}}\ \frac{\sqrt{(2jn)!}}{[(jm)!]^{n/m}} \leq \frac{[m(j+1)]^n}{(2jn+1)^n},$$

y por lo tanto

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{b_{j+1}}{b_j} \le \left(\frac{m}{2n}\right)^n < 1.$$

Como $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \frac{\left\|z(\,\cdot\,)^{2jn}\right\|_p}{\left\|z(\,\cdot\,)^{2jn}\right\|_2} = 0$, concluimos que la inclusión no es acotada inferiormente.

Vamos a mostrar ahora que, aún en el caso más sencillo $X = H = \mathbb{C}$, existe una función L^p-representable que no es L^2-representable. Elegimos $f \in L^p(\mathbb{C})$, pero $f \notin L^2(\mathbb{C})$, de manera tal que exista una sucesión $\{f^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset span\{z(\,\cdot\,)^k\}_{k\ge 0,\ z\in X'}$ para la cual

$$f = \lim_{n\to\infty} f^{(n)} \quad \text{en } L^p(W).$$

En este caso, para las funciones $f^{(n)}$ la fórmula integral puede escribirse, teniendo en cuenta que $\overline{f^{(n)\sharp}(\gamma)} = f^{(n)}(\overline{\gamma})$, tal como se describió al final del Lema 3.2.2:

$$f^{(n)}(w) = \int_{\mathbb{C}} e^{w(\gamma)}\, f^{(n)}(\overline{\gamma})\, dW(\gamma) \tag{4.2}$$

Por el Lema 4.2.2, deducimos que

$$\left|f^{(n)}(w) - f^{(m)}(w)\right| \le e^{\frac{q|w|^2}{4}} \|f^{(n)} - f^{(m)}\|_p.$$

Esto indica que $\{f^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en conjuntos acotados. Por lo tanto converge uniformemente a una función holomorfa sobre compactos de $\mathbb{C}$.
Sea $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $g(w) = \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(w)$. Tomando una subsucesión, si fuera necesario, podemos suponer que $f^{(n)} \to f$ *a.e.* Por lo tanto debe ser $g = f$ *a.e.*, así resulta $g \in L^p(W)$ y tomando $n \to \infty$ en (4.2), resulta que g es L^p-representable:

$$g(w) = \int_{\mathbb{C}} e^{w(\gamma)}\, g(\overline{\gamma})\, dW(\gamma).$$

Tenemos que ver que g no es L^2-representable. Sabemos por el Teorema 4.2.12, que

$$g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k w^k \text{ es } L^2-\text{representable} \iff \sum_{k=0}^{\infty} k!\,|\alpha_k|^2 < \infty.$$

Pero si $\sum_{k=0}^{\infty} k!\,|\alpha_k|^2 < \infty$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k w^k$ es convergente en $L^2(W)$, por ser

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k w^k\right\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\|\alpha_k w^k\right\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k!\,|\alpha_k|^2.$$

Por lo tanto si g fuera L^2-representable, debería ser $g \in L^2$, pero como $g = f$ *a.e.*, con $f \notin L^2(W)$, esto no es posible. □

Teorema 4.4.2. *Dado $1 < p \leq 2$ y $\rho_0(p) < \rho$, entonces existe una función $\rho-$representable que no es L^p-representable.*

Demostración. Si f es L^p-representable, entonces f satisface la condición de crecimiento dada en el Lema 4.2.2,

$$|f(z)| \leq C_1 e^{q\|\imath^* z\|^2/4}.$$

Además, si f es $\rho-$representble, se puede escribir $f(z) = v(\rho z)$ con $v(\cdot)$ una función L^2-representable. Entonces

$$|f(z)| \leq C_2\, e^{\rho^2 \|\imath^* z\|^2/2}.$$

Elegimos $x_0 \in H,\ \|x_0\|_H = 1$ y $a \in (0,1)$ tal que $a\rho^2 > [\rho_0(p)]^2$. Sea $V \in \mathcal{H}_b(H)$ definida por

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!\, 2^k} \langle x, x_0 \rangle^{2k},$$

$$|V(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!\, 2^k} \|x\|_H^{2k} = e^{a\|x\|_H^2/2}$$

Veamos que $v(z) = V \circ I \circ \imath^*(z)$ es L^2-representable:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!\, \|V_k\|_h^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!^2} \left(\frac{a^2}{4}\right)^k < \infty,$$

ya que esta serie tiene radio de convergencia $R = 1/4$, y $0 < a < 1$.
Consideremos la función $f(z) = v(\rho z)$, resulta claramente $\rho-$representable, pero afirmamos que no es L^p-representable. Para ver esto, tomamos $\lambda > 0$ y evaluamos en λx_0 :

$$V(\lambda \rho x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!\, 2^k} \langle \lambda \rho x_0, x_0 \rangle^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!\, 2^k} (\lambda\rho)^{2k} = e^{a\lambda^2\rho^2/2},$$

recordando que $[\rho_0(p)]^2 > q/2$, como $a\rho^2 > [\rho_0(p)]^2$, tenemos

$$|V(\lambda\rho x_0)| e^{-q\lambda^2/4} = e^{(2a\rho^2 - q)\lambda^2/4} \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

luego f no es una función L^p-representable. □

Observación 4.4.3. *Tenemos, por lo tanto, condiciones necesarias para que una función f sea L^p-representable.*

1. *Condición de crecimiento:* $|f(z)| \leq C_1 e^{q\|\imath^* z\|^2/4}$ *(Lema 4.2.2).*

2. *Condición de germen Hilbertiano: si* $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *y* $F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k$ *es su extensión en* $\mathcal{H}_b(H)$, *entonces resulta* $F_k \in \mathcal{P}_h({}^k H)$ *y*

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!\, \|F_k\|_h^2}} \geq \frac{1}{[\rho_0(p)]^2} > 0 \quad (\textit{Corolario 4.3.4}).$$

Observación 4.4.4. *La segunda condición implica la siguiente desigualdad:*

$$|F(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|F_k\| \, \|x\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|F_k\|_h \, \|x\|^k$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} k! \, \|F_k\|_h^2 \, \theta^k \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|x\|^{2k}}{\theta^k k!} \right)^{1/2} = C(\theta) \, e^{\|x\|^2/(2\theta)}.$$

Por lo tanto, si f verifica la condición de germen Hilbertiano, tenemos una acotación sobre su crecimiento, que resulta más estricta que la que se desprende del Lema 4.2.2 en el caso en que $R > 2/q$. El Teorema 4.2.12 muestra que si $R > 1$, entonces la función $f = F \circ I \circ \imath^*$ es L^2-representable. Dejamos abierta la pregunta si es cierto que dada una función $F \in \mathcal{H}_{hb}(H)$ que satisface la segunda condición con $R \leq 1$, entonces $f = F \circ I \circ \imath^*$ es L^r-representable para $r < \dfrac{2}{2-R}$.

Capítulo 5

Funciones representables en la bola

Queremos estudiar ahora al conjunto de funciones que pueden ser representadas integralmente mediante la fórmula (B). Definimos una norma sobre este conjunto, que lo transforma en un espacio de Banach. Estudiamos el crecimiento y la posibilidad de extender estas funciones a un espacio que contenga a X'.

5.1. Funciones representables en la bola

Si X es un espacio de Banach separable, $(\imath, H, X)$ es un espacio de Wiener abstracto y $(H_0, \|\cdot\|_0)$ es el espacio intermedio del Teorema 2.3.5, para $\delta \in (0,1]$, bajo ciertas hipótesis sobre una función f, tal como se detalla en el Teorema 3.3.5, tenemos la fórmula integral (B) :

$$f(z) = \int_X \frac{1}{1 - z\left(\frac{\gamma}{\delta\|\gamma\|_0}\right)} \overline{(f^{\Diamond\sharp} \circ T)(\delta\|\gamma\|_0\gamma)}\, dW(\gamma) \quad \text{para todo } z \in \delta B^\circ_{X'}.$$

En lo siguiente vamos a considerar $\delta = 1$. Notemos que si llamamos $\jmath : H_0 \to X$ a la inclusión, por ser $W(\jmath(H_0)) = 1$, la función $K_z(\gamma) = \frac{1}{1-z\left(\frac{\gamma}{\delta\|\gamma\|_0}\right)} \in L^\infty(W)$. Esto da sentido a la siguiente definición.

Definición 5.1.1. *Decimos que una función $f : B^\circ_{X'} \to \mathbb{C}$ es representable en la bola de X', si existe $g \in L^1(W)$ tal que*

$$f(z) = \int_X \frac{1}{1 - z\left(\frac{\gamma}{\|\gamma\|_0}\right)} \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) \quad \textit{para todo } z \in B^\circ_{X'}.$$

Notamos por $\mathcal{R}(B^\circ_{X'})$ al conjunto de funciones representables en la bola de X'.

Manteniendo la notación,

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\imath_0"] & H_0 \arrow[r, "\jmath"] & X \\ H' \arrow[u, "I"] \arrow[loop left, "*"] & H_0' \arrow[l, "\imath_0'"'] & X' \arrow[u, "A"'] \arrow[l, "\jmath'"'] \arrow[ll, bend left, "\imath'"] \end{tikzcd}$$

podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 5.1.2. *Sea f una función representable en la bola de X', entonces*

$$|f(z)| \leq \frac{C}{1 - \|\jmath'(z)\|_{H_0'}}.$$

Demostración. Si $\gamma \in \jmath(H_0)$, tenemos que $|z(\gamma)| \leq \|\jmath'(z)\|_{H_0'} \|\gamma\|_0$, por lo tanto como $W(H_0) = 1$, la desigualdad vale en casi todo punto y resulta

$$|f(z)| = \left| \int_{H_0} \frac{1}{1 - z\left(\frac{\gamma}{\|\gamma\|_0}\right)} \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) \right| \leq \int_{H_0} \frac{1}{1 - \|\jmath'(z)\|_{H_0'}} |g(\gamma)|\, dW(\gamma)$$

$$\leq \frac{\|g\|_1}{1 - \|\jmath'(z)\|_{H_0'}}$$

□

Proposición 5.1.3. *Si f es una función representable en la bola de X', entonces resulta $f \in \mathcal{H}_b(B^\circ_{X'})$. Además, existe una única función $F \in \mathcal{H}_b(B^\circ_{H_0'})$ tal que $F \circ \jmath'(z) = f(z)$.*

Demostración. Dada una función representable en la bola f, sea $g \in L^1(W)$ tal que:

$$f(z) = \int_X \frac{1}{1 - z\left(\frac{\gamma}{\|\gamma\|_0}\right)} \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) \quad \text{para todo } z \in B^\circ_{X'}.$$

Para cada $z \in B^\circ_{X'}$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z(\gamma)^k}{\|\gamma\|_0^k}$ está mayorada sobre $\jmath(H_0)$ por la serie convergente $\sum_{k=0}^{\infty} \|\jmath'(z)\|_{H_0'}^k$, por lo que las sumas parciales $\sum_{k=0}^{N} \frac{z(\gamma)^k}{\|\gamma\|_0^k}$ convergen hacia la función $\frac{1}{1-z\left(\frac{\gamma}{\|\gamma\|_0}\right)}$ en $L^\infty(W)$. Como $g \in L^1(W)$ podemos tomar límite fuera de la integral:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_X \frac{z(\gamma)^k}{\|\gamma\|_0^k} \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma).$$

Al igual que en la acotación del crecimiento de f, para cada término $k-$homogéneo del desarrollo de la función

$$f_k(z) = \int_X \frac{z(\gamma)^k}{\|\gamma\|_0^k} \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma)$$

podemos acotar:

$$|f_k(z)| \leq \left| \int_X \frac{z(\gamma)^k}{\|\gamma\|_0^k} \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) \right| \leq \|g\|_1 \, \|\jmath'(z)\|_{H_0'}^k \leq \|g\|_1 \, \|z\|^k.$$

De este modo, tomando supremo sobre $\|z\| = 1$, resulta $\|f_k\| \leq \|g\|_1$. Aplicando la fórmula de Cauchy-Hadamard, $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|f_k\|} \leq 1$, por lo tanto el radio de convergencia de la función es mayor o igual a 1, y $f \in \mathcal{H}_b(B_{X'}^\circ)$.

Por otro lado, la cota $|f_k(z)| \leq \|g\|_1 \, \|\jmath'(z)\|_{H_0'}^k$ permite definir $F_k : H_0' \to \mathbb{C}$, que extiende al polinomio $k-$homogéneo f_k al espacio H_0', ya que este está definido sobre el subconjunto denso $\jmath'(X')$ y es continuo con la norma $\|\cdot\|_{H_0'}$. Además, como $\|F_k\| \leq \|g\|_1$, tenemos $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|F_k\|} \leq 1$, y $F \in \mathcal{H}_b(B_{H_0'}^\circ)$. □

Una misma función en $\mathcal{R}(B_{X'}^\circ)$ puede ser representada por más de un elemento en $L^1(W)$. Si consideramos el operador

$$\mathcal{T} : L^1(W) \to \mathcal{R}(B_{X'}^\circ)$$
$$\mathcal{T}(g)(z) = \int_X \frac{1}{1 - \frac{z(\gamma)}{\|\gamma\|_0}} \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma),$$

el núcleo de este operador será:

$$\ker(\mathcal{T}) = \left\{ g \in L^1(W) : \int_X \frac{1}{1 - \frac{z(\gamma)}{\|\gamma\|_0}} \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) = 0 \ \text{ para todo } z \in B_{X'}^\circ \right\}.$$

Por ejemplo, tomando los monomios $z^\alpha(\,\cdot\,)$ para $|\alpha| \geq 1$, la integral

$$\int_X \frac{1}{1 - \frac{z(\gamma)}{\|\gamma\|_0}} \frac{z^\alpha(\gamma)}{\|\gamma\|_0^{|\alpha|}}\, dW(\gamma) = 0.$$

Para cada $z \in B_{X'}^\circ$, por ser $\dfrac{1}{1 - \frac{z(\gamma)}{\|\gamma\|_0}} \in L^\infty(W)$, el hiperplano

$$S_z = \left\{ g \in L^1(W) : \int_X \frac{1}{1 - \frac{z(\gamma)}{\|\gamma\|_0}} \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) = 0 \right\}$$

es cerrado en $L^1(W)$, por lo tanto $\ker(\mathcal{T}) = \bigcap\limits_{z \in B_{X'}^\circ} S_z$ resulta ser un subespacio cerrado en $L^1(W)$.

El conjunto de funciones representables en la bola de X' es la imagen de $L^1(W)$ por el operador $\mathcal{T}$, y resulta entonces algebraicamente isomorfo a $L^1(W)/\ker(\mathcal{T})$.

$$\begin{tikzcd}
L^1(W) \arrow[r, "\mathcal{T}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{R}(B_{X'}^\circ) \\
L^1(W)/\ker(\mathcal{T}) \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\mathcal{T}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Definimos una norma sobre $\mathcal{R}(B^\circ_{X'})$, como en el caso de las funciones holomorfas integrales o polinomios nucleares, si $f \in \mathcal{R}(B^\circ_{X'})$:

$$\|f\|_{\mathcal{R}} = \text{ínf}\,\{\|g\|_1 : \mathcal{T}(g) = f\}\,.$$

Si $\mathcal{T}(g) = f$, entonces

$$\|f\|_{\mathcal{R}} = \text{ínf}\,\{\|g+h\|_1 : h \in \ker(\mathcal{T})\} = \|\pi g\|_{L^1/\ker(\mathcal{T})}.$$

De esta forma, $\mathcal{R}(B^\circ_{X'})$ resulta ser un espacio de Banach isométricamente isomorfo, vía $\widetilde{\mathcal{T}}$, al espacio $L^1/\ker(\mathcal{T})$.

Definición 5.1.4. *Si E es un espacio de Banach con dual separable, decimos que una función $f : B^\circ_E \to \mathbb{C}$ es representable en la bola de E, si existe $g \in L^1(E', W)$, tal que*

$$f(z) = \int_{E'} \frac{1}{1 - \frac{\gamma(z)}{\|\gamma\|_0}}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) \quad \textit{para todo } z \in B^\circ_E.$$

En la Observación 3.4.3, asociamos la idea de representabilidad de una función f sobre B°_E, con la posibilidad de representar su extensión de Aron-Berner $AB(f)$ sobre la bola de E''. El siguiente teorema justifica este hecho.

Teorema 5.1.5. *La función $f : B^\circ_E \to \mathbb{C}$ es representable en la bola de E, si y sólo si $AB(f)$ es representable en la bola de E''.*

Demostración. $\Leftarrow$) Como $AB(f)$ es representable en la bola de E'', existe $g \in L^1(W)$ tal que:

$$AB(f)(\zeta) = \int_{E'} \frac{1}{1 - \frac{\zeta(\gamma)}{\|\gamma\|_0}}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) \qquad \text{para todo } \zeta \in B^\circ_{E''}.$$

Sea $J : E \to E''$ la inclusión canónica, por definición $[Jz](\gamma) = \gamma(z)$ y además se verifica $AB(f)(Jz) = f(z)$, tomando $\zeta = Jz$ para $z \in B^\circ_E$, la expresión anterior se convierte en

$$f(z) = \int_{E'} \frac{1}{1 - \frac{\gamma(z)}{\|\gamma\|_0}}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma),$$

y por lo tanto f representable sobre la bola de E.

$\Rightarrow$) Es suficiente probar que $f_k(z) = \displaystyle\int_{E'} \frac{\gamma(z)^k}{\|\gamma\|_0}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma)$ tiene por extensión de Aron-Berner al polinomio

$$Q(\zeta) = \int_{E'} \frac{\zeta(\gamma)^k}{\|\gamma\|_0}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma).$$

De este modo,

$$AB(f)(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} AB(f_k)(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E'} \frac{\zeta(\gamma)^k}{\|\gamma\|_0}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) = \int_{E'} \frac{1}{1 - \frac{\zeta(\gamma)}{\|\gamma\|_0}}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma).$$

Para probar esto, utilizamos el Teorema 4.2.22 [26]. Veamos que el polinomio

$$Q(\zeta) = \int_{E'} \frac{\zeta(\gamma)^k}{\|\gamma\|_0} \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma)$$

tiene diferenciales de primer orden w^*-continuos, por lo que se satisfacen las hipótesis del teorema.
Para esto, podríamos adaptar la idea del Teorema 4.2.21, pero hacemos una demostración diferente basada en el siguiente teorema (pág. 165, [3]):

Teorema 5.1.6. *Si $\mathcal{K}$ es un espacio de Banach separable y $\varphi : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ es una funcional lineal, entonces φ es w^*-continua si y sólo si es w^*-secuencialmente continua.*

Dado $\zeta \in E''$:

$$DQ(\zeta)(\,\cdot\,) : E'' \to \mathbb{C}$$

$$DQ(\zeta)(\xi) = k \int_{E'} \frac{\xi(\gamma)}{\|\gamma\|_0} \frac{\zeta(\gamma)^{k-1}}{\|\gamma\|_0^{k-1}} \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma).$$

Por ser E' separable, aplicando el teorema enunciado, bastará probar que $DQ(\zeta)(\,\cdot\,)$ es w^*-secuencialmente continuo. Si $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E''$ es una sucesión tal que $\xi_n \xrightarrow{w^*} \xi$, por el principio de acotación uniforme, $M = \sup\limits_n \|\xi_n\|_{E''} < \infty$.

Por ser w^*-convergente:

$$\frac{\xi_n(\gamma)}{\|\gamma\|_0} \frac{\zeta(\gamma)^{k-1}}{\|\gamma\|_0^{k-1}} \overline{g(\gamma)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\xi(\gamma)}{\|\gamma\|_0} \frac{\zeta(\gamma)^{k-1}}{\|\gamma\|_0^{k-1}} \overline{g(\gamma)},$$

y además, $\|\xi\|_{E''} \leq \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\xi_n\|_{E''} \leq M$, por lo que

$$\left| \frac{\xi_n(\gamma)}{\|\gamma\|_0} \frac{\zeta(\gamma)^{k-1}}{\|\gamma\|_0^{k-1}} \overline{g(\gamma)} \right| \leq M^k \left(\frac{\|\gamma\|}{\|\gamma\|_0} \right)^k |g| \leq M^k |g| \in L^1(W).$$

Podemos aplicar entonces el teorema de convergencia dominada y concluir que

$$k \int_{E'} \frac{\xi_n(\gamma)}{\|\gamma\|_0} \frac{\zeta(\gamma)^{k-1}}{\|\gamma\|_0^{k-1}} \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k \int_{E'} \frac{\xi(\gamma)}{\|\gamma\|_0} \frac{\zeta(\gamma)^{k-1}}{\|\gamma\|_0^{k-1}} \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma),$$

es decir,

$$DQ(\zeta)(\xi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} DQ(\zeta)(\xi).$$

□

Al igual que en el caso de funciones L^p-representables, los polinomios que intervienen en el desarrollo de Taylor de una función representable en la bola de E, resultan integrales.

Teorema 5.1.7. *Si $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ es una función representable sobre la bola de E, entonces $f_k \in \mathcal{P}_I(^kE)$ para todo $k \geq 0$.*

Demostración. Repetimos las ideas del Teorema 4.2.24. Si $g \in L^1(W)$ es tal que

$$f(z) = \int_{E'} \frac{1}{1 - \frac{\gamma(z)}{\|\gamma\|_0}} \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma),$$

recordemos que el desarrollo de la función queda determinado por la Proposición 5.1.3:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E'} \left(\frac{\gamma(z)}{\|\gamma\|_0} \right)^k \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma).$$

Definimos el operador

$$\mathcal{T} : \mathcal{C}(B_{E'}, w^*) \to \mathbb{C}$$
$$\mathcal{T}(\varphi) = \int_{E'} \varphi\left(\frac{\gamma}{\|\gamma\|_0} \right) \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma).$$

La integral está bien definida, ya que $\left\| \frac{\gamma}{\|\gamma\|_0} \right\| \leq 1$ a.e. y por lo tanto $\varphi\left(\frac{\gamma}{\|\gamma\|_0}\right)$ tiene sentido. Dado $\Delta \subset \mathbb{C}$ boreliano, por ser φ continua en la topología w^*, el conjunto $\varphi^{-1}(\Delta)$ es w^*-boreliano, luego pertenece a la $\sigma-$álgebra de Borel dada por la norma. Por ser medible $\| \cdot \|_0$, el conjunto

$$\left\{ \gamma \in E' : \varphi\left(\frac{\gamma}{\|\gamma\|_0} \right) \in \Delta \right\} = \left\{ \gamma \in E' : \frac{\gamma}{\|\gamma\|_0} \in \varphi^{-1}(\Delta) \right\}$$

resulta medible.

Acotemos,

$$|\mathcal{T}(\varphi)| \leq \int_{E'} \left| \varphi\left(\frac{\gamma}{\|\gamma\|_0} \right) \right| \left| \overline{g(\gamma)} \right| dW(\gamma) \leq \|\varphi\|_\infty \|g\|_1.$$

De este modo, $\mathcal{T}$ resulta continua, y por lo tanto existe una medida μ, boreliana y regular en $(B_{E'}, w^*)$ tal que:

$$\mathcal{T}(\varphi) = \int_{B_{E'}} \varphi(\gamma)\, d\mu(\gamma).$$

Pensando para cada $z \in E$ y $k \in \mathbb{N}_0$ la función w^*-continua, $\widehat{z}(\gamma)^k = \gamma(z)^k$, tenemos:

$$\int_{B_{E'}} \gamma(z)^k\, d\mu(\gamma) = \int_{B_{E'}} \widehat{z}(\gamma)^k\, d\mu(\gamma) = \mathcal{T}(\widehat{z}(\,\cdot\,)^k)$$

$$= \int_{E'} \left[\widehat{z}\left(\frac{\gamma}{\|\gamma\|_0} \right) \right]^k \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) = \int_{E'} \left(\frac{\gamma(z)}{\|\gamma\|_0} \right)^k \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma) = f_k(z).$$

Por lo tanto, $f_k \in \mathcal{P}_I(^kE)$. □

Corolario 5.1.8. *Si f es una función representable en la bola de E, entonces es una función holomorfa integral en el sentido de [7].*

Demostración. En la demostración del teorema anterior, la medida μ es independiente de $k \in \mathbb{N}_0$. Por lo tanto, como la misma medida representa a todos los polinomios involucrados en el desarrollo de f, y la serie geométrica es normalmente convergente para cada $z \in B_E^\circ$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B_{E'}} \gamma(z)^k \, d\mu(\gamma) = \int_{B_{E'}} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma(z)^k \, d\mu(\gamma) = \int_{B_{E'}} \frac{1}{1-\gamma(z)} \, d\mu(\gamma).$$

□

En la fórmula integral (A), concluimos que los polinomios L^p-representables en E eran aquellos cuya extensión de Aron-Berner admitía una extensión holomorfa a H y esta resultaba ser un polinomio Hilbertiano. Queremos ver ahora, que todo polinomio con esta propiedad es una función representable sobre la bola de E''. Necesitamos recordar la notación:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\imath_0"] \arrow[rr, bend left, "\imath"] & H_0 \arrow[r, "\jmath"] & E' \\
H' \arrow[u, "I"] & H_0' \arrow[l, "\imath_0'"] & E'' \arrow[l, "\jmath'"] \arrow[u, "A"'] \arrow[ll, bend left, "\imath'"]
\end{tikzcd}$$

En estos espacios teníamos definidas sucesiones de vectores y bases, relacionados por los operadores $\imath_0$, $\jmath$, $\jmath'$ e $\imath_0'$.

La sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E''$ fue tomada de modo tal que, llamando $e_n' = \imath'(z_n)$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{e_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base ortonormal de H', dual de la base ortonormal de H formada por los vectores $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $e_n = I \circ \imath'(z_n)$.

Por la inclusión densa de H en H_0, resulta que $\{\imath_0(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortogonal completo en H_0. Por construcción $\|\imath_0(e_n)\|_0 = \lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De este modo $\{\imath_0(e_n)/\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base ortonormal de H_0.

Si calculamos

$$[\jmath'(z_n)](\imath_0(e_k)/\lambda_k) = [\imath_0'(\jmath'(z_n))](e_k/\lambda_k) = e_n'(e_k/\lambda_k) = \delta_{nk}/\lambda_k$$

resulta que $\{\lambda_n \jmath'(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la base ortonormal de H_0', dual de la base $\left\{\frac{\imath_0(e_n)}{\lambda_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H_0.

Recordemos también que dado un multi-índice α, $|\alpha| = k$ notamos

$$z^\alpha(\gamma) = \prod_{r=1}^{\infty} z_r(\gamma)^{\alpha_r} \quad \text{y por } (\imath^* z)^\alpha(x) = \prod_{r=1}^{\infty} e_r'(x)^{\alpha_r}.$$

Teorema 5.1.9. *Si $P \in \mathcal{P}(^kE'')$ es L^p-representable para $p > 1$, entonces P es representable sobre la bola de E''.*

Demostración. Como todo polinomio L^p−representable es L^2−representable y la inclusión de $L^2(W)$ en $L^1(W)$ es continua, bastará ver que los polinomios representados por los monomios $\left\{\frac{z^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}\right\}_{|\alpha|=k}$ son representables en la bola, ya que estos forman una base de L^2_k.

Para cada $l \in \mathbb{N}_0$ y para cada multi-índice α, con $|\alpha| = l$, llamamos

$$P_\alpha(z) = \int_{E'} e^{z(\gamma)} \frac{\overline{z^\alpha(\gamma)}}{\sqrt{\alpha!}} \, dW(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E'} \frac{z(\gamma)^k}{k!} \frac{\overline{z^\alpha(\gamma)}}{\sqrt{\alpha!}} \, dW(\gamma) = \int_{E'} \frac{z(\gamma)^l}{l!} \frac{\overline{z^\alpha(\gamma)}}{\sqrt{\alpha!}} \, dW(\gamma).$$

Si probamos que:

$$(1) \qquad \frac{1}{k!} \int_{E'} \frac{z(\gamma)^k}{\|\gamma\|_0^k} \|\gamma\|_0^l \frac{\overline{z^\alpha(\gamma)}}{\sqrt{\alpha!}} \, dW(\gamma) = \delta_{kl} P_\alpha(z) = \frac{1}{l!} \int_{E'} \frac{z(\gamma)^k}{\|\gamma\|_0^k} \|\gamma\|_0^l \frac{\overline{z^\alpha(\gamma)}}{\sqrt{\alpha!}} \, dW(\gamma),$$

sumando sobre $k \in \mathbb{N}_0$, resulta

$$P_\alpha(z) = \int_{E'} \frac{1}{1 - \frac{z(\gamma)}{\|\gamma\|_0}} \frac{\|\gamma\|_0^l \, \overline{z^\alpha(\gamma)}}{l! \sqrt{\alpha!}} \, dW(\gamma).$$

Como tanto $\dfrac{\|\gamma\|_0^l}{l!}$ y $\dfrac{z^\alpha(\gamma)}{\sqrt{\alpha!}}$ pertenecen a $L^2(W)$, su producto está en $L^1(W)$ y entonces P_α es representable en la bola de E''.

Para probar la igualdad (1), utilizando el Teorema 2.3.5, podemos tomar los subespacios $S_n = \left[\frac{\imath_0(e_1)}{\lambda_1}, \frac{\imath_0(e_2)}{\lambda_2}, \ldots, \frac{\imath_0(e_n)}{\lambda_n}\right]$ y la sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, formada por las proyecciones ortogonales sobre ellos, que converge a la identidad sobre H_0.

$$\left| \frac{z(P_n\gamma)^k}{\|P_n\gamma\|_0^k} \|P_n\gamma\|_0^l \frac{\overline{z^\alpha(P_n\gamma)}}{\sqrt{\alpha!}} \right| \leq \|z\|^k \frac{\|z^\alpha\|_{\mathcal{P}(^lX)}}{\sqrt{\alpha!}} \|P_n\gamma\|_0^{2l} \leq \|z\|^k \frac{\|z^\alpha\|_{\mathcal{P}(^lX)}}{\sqrt{\alpha!}} \|\gamma\|_0^{2l},$$

aplicando el teorema de convergencia dominada, podemos calcular entonces:

$$\frac{1}{l!} \int_{E'} \frac{z(\gamma)^k}{\|\gamma\|_0^k} \|\gamma\|_0^l \frac{\overline{z^\alpha(\gamma)}}{\sqrt{\alpha!}} \, dW(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{l!} \int_{E'} \frac{z(P_n\gamma)^k}{\|P_n\gamma\|_0^k} \|P_n\gamma\|_0^l \frac{\overline{z^\alpha(P_n\gamma)}}{\sqrt{\alpha!}} \, dW(\gamma).$$

Esta integral puede calcularse sobre el espacio de dimensión finita P_nH_0 respecto a la medida inducida por W en ese subespacio. Esta medida, notada P_nW, estaba definida para conjuntos borelianos $\Delta \subset P_nH_0$, por $P_nW(\Delta) = W(P_n^{-1}(\Delta))$. Si llamamos $v_r = \frac{\imath_0(e_r)}{\lambda_r}$ para $1 \leq r \leq n$, una vez fijada la base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ en S_n, tomar coordenadas en esta base se corresponde con aplicar las funcionales de su base dual. Por lo tanto, P_nW se expresa como el producto de n Gaussianas unidimensionales, cada una de ellas con media 0 y varianza $\|\lambda_r \, \imath_0'(\jmath'(z_r))\|_{H'}^2 = \|\lambda_r \, e_r'\|_{H'}^2 = \lambda_r^2$.
Si $(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ representa las coordenadas de $\gamma \in S_n$, la función de densidad de P_nW es:

$$\delta_n(w_1, w_2, \ldots, w_n) = \frac{1}{\pi^n \, \lambda_1^2 \lambda_2^2 \cdots \lambda_n^2} e^{-\sum_{r=0}^n |w_r|^2/\lambda_r^2}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{l!}\int_{E'} \frac{z(P_n\gamma)^k}{\|P_n\gamma\|_0^k}\,\|P_n\gamma\|_0^l\,\frac{\overline{z^\alpha(P_n\gamma)}}{\sqrt{\alpha!}}\,dW(\gamma) = \frac{1}{l!}\int_{P_nH_0} \frac{z(\gamma)^k}{\|\gamma\|_0^k}\,\|\gamma\|_0^l\,\frac{\overline{z^\alpha(\gamma)}}{\sqrt{\alpha!}}\,dP_nW(\gamma).$$

Escribimos la expresión sub-integral, junto con la densidad de la medida, del siguiente modo:

$$\frac{\left(\sum_{r=0}^{n} w_r\, z(v_r)\right)^k}{\left(\sum_{r=0}^{k} |w_r|^2\right)^{k/2}}\,\left(\sum_{r=0}^{k}|w_r|^2\right)^{l/2}\,\prod_{s=1}^{\infty}\overline{z_s\left(\sum_{r=0}^{n} w_r\, v_r\right)^{\alpha_s}}\,\frac{\delta_n(w_1,w_2,\ldots,w_n)}{\sqrt{\alpha!}}.$$

Desarrollando la potencia $k-$ésima del primer término podemos reescribir, teniendo en cuenta que $z_s(v_r) = \dfrac{\delta_{rs}}{\lambda_s}$:

$$\left[\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta!}\left(\prod_{r=1}^{n} w_r^{\beta_r}\, z(v_r)^{\beta_r}\right)\right]\left(\prod_{s=1}^{n}\overline{\left(\frac{w_s}{\lambda_s}\right)^{\alpha_s}}\right)\left(\sum_{r=0}^{k}|w_r|^2\right)^{(l-k)/2}\,\frac{\delta_n(w_1,w_2,\ldots,w_n)}{\sqrt{\alpha!}},$$

por lo que debemos hallar el valor de

$$\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{l!\,\sqrt{\alpha!}}\prod_{r=1}^{n}\frac{z(v_r)^{\beta_r}}{\lambda_r^{\alpha_r}\,\beta_r!}\int_{\mathbb{C}^n} w^\beta\,\overline{w}^\alpha\,\left(\sum_{r=0}^{k}|w_r|^2\right)^{(l-k)/2}\,\delta_n(w_1,w_2,\ldots,w_n)\,dw_1\,dw_2\ldots dw_n.$$

Como estamos considerando la norma usual sobre $\mathbb{C}^n$, podemos saber el valor de cada una de las integrales, utilizando el Lema 3.3.2:

$$\int_{\mathbb{C}^n} w^\beta\,\overline{w}^\alpha\,\left(\sum_{r=0}^{k}|w_r|^2\right)^{(l-k)/2}\,\delta_n(w_1,w_2,\ldots,w_n)\,dw_1\,dw_2\ldots dw_n = \delta_{\alpha\beta}\,\alpha!\,\prod_{r=1}^{n}\lambda_r^{2\alpha_r}.$$

Por lo tanto, si $|\alpha| = l$ y $k \neq l$, para todo multi-índice $|\beta| = k$ tenemos $\delta_{\alpha\beta} = 0$ y la integral es nula. Concluimos entonces que

$$\frac{1}{k!}\int_{E'}\frac{z(\gamma)^k}{\|\gamma\|_0^k}\,\|\gamma\|_0^l\,\frac{\overline{z^\alpha(\gamma)}}{\sqrt{\alpha!}}\,dW(\gamma) = \delta_{kl}\,\frac{1}{k!}\int_{E'} z(\gamma)^k\,\frac{\overline{z^\alpha(\gamma)}}{\sqrt{\alpha!}}\,dW(\gamma) = \delta_{kl}\,P_\alpha(z),$$

por lo tanto, sumando sobre $k \in \mathbb{N}_0$:

$$P_\alpha(z) = \int_{E'}\frac{1}{1-\frac{z(\gamma)}{\|\gamma\|_0}}\,\frac{\|\gamma\|_0^l\,\overline{z^\alpha(\gamma)}}{l!\,\sqrt{\alpha!}}\,dW(\gamma).$$

□

Finalmente, obtenemos un teorema similar para funciones L^p-representables.

Teorema 5.1.10. *Si $f \in \mathcal{H}(E'')$ es una función L^p-representable para algún $p > 1$, entonces f es representable sobre la bola de E''.*

Demostración. Dado $p > 1$, si f es una función L^p-representable, por la Observación 4.3.3, existe una función $v(\cdot)$, L^2-representable, para la cual $f(z) = v(\rho z)$ $\forall z \in E''$. Desarrollando en serie de Taylor, escribimos $v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(z)$ y tomamos un representante $g = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \in L^2(W)$, con $g_k \in L_k^2$, tal que:

$$v(z) = \int_{E'} e^{z(\gamma)}\, \overline{g(\gamma)}\, dW(\gamma), \qquad v_k(z) = \int_{E'} e^{z(\gamma)}\, \overline{g_k(\gamma)}\, dW(\gamma).$$

Por la Proposición 4.2.9, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ existen escalares $\{a_\alpha\}_{|\alpha|=k}$, con $\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 < \infty$, para los cuales $g_k(\cdot) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \dfrac{z^\alpha(\cdot)}{\sqrt{\alpha!}}$, y por lo tanto:

$$v_k(z) = \int_{E'} e^{z(\gamma)}\, \overline{\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \frac{z^\alpha(\gamma)}{\sqrt{\alpha!}}}\, dW(\gamma) = \sum_{|\alpha|=k} \overline{a_\alpha} \int_{E'} e^{z(\gamma)}\, \overline{\frac{z^\alpha(\gamma)}{\sqrt{\alpha!}}}\, dW(\gamma),$$

donde permutamos la serie y la integral por ser $e^{z(\gamma)} \in L^2(W)$ y $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \dfrac{z^\alpha(\cdot)}{\sqrt{\alpha!}} = g_k(\cdot)$, con convergencia en $L^2(W)$. Por el Teorema 5.1.9, podemos escribir:

$$v_k(z) = \sum_{|\alpha|=k} \overline{a_\alpha} \int_{E'} e^{z(\gamma)}\, \overline{\frac{z^\alpha(\gamma)}{\sqrt{\alpha!}}}\, dW(\gamma) = \sum_{|\alpha|=k} \overline{a_\alpha} \int_{E'} \frac{1}{1 - \frac{z(\gamma)}{\|\gamma\|_0}} \frac{\|\gamma\|_0^k}{k!}\, \overline{\frac{z^\alpha(\gamma)}{\sqrt{\alpha!}}}\, dW(\gamma).$$

Con la misma justificación, teniendo en cuenta que $\dfrac{1}{1 - \frac{z(\gamma)}{\|\gamma\|_0}} \dfrac{\|\gamma\|_0^k}{k!} \in L^2(W)$, podemos reescribir:

$$v_k(z) = \int_{E'} \frac{1}{1 - \frac{z(\gamma)}{\|\gamma\|_0}} \frac{\|\gamma\|_0^k}{k!} \left(\sum_{|\alpha|=k} \overline{a_\alpha}\, \overline{\frac{z^\alpha(\gamma)}{\sqrt{\alpha!}}} \right) dW(\gamma) = \int_{E'} \frac{1}{1 - \frac{z(\gamma)}{\|\gamma\|_0}} \frac{\|\gamma\|_0^k}{k!}\, \overline{g_k(\gamma)}\, dW(\gamma).$$

Resulta así:

$$f(z) = v(\rho z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\rho z) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k\, v_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E'} \frac{1}{1 - \frac{z(\gamma)}{\|\gamma\|_0}} \frac{\rho^k\, \|\gamma\|_0^k}{k!}\, \overline{g_k(\gamma)}\, dW(\gamma),$$

Afirmamos que la sucesión $h_N(\gamma) := \sum_{k=0}^{N} \dfrac{\rho^k\, \|\gamma\|_0^k}{k!}\, \overline{g_k(\gamma)}$ es de Cauchy en $L^1(W)$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $M > N \geq 0$ y acotemos $\|h_M - h_N\|_1$:

$$\int_{E'} \left| \sum_{k=N+1}^{M} \frac{\rho^k\, \|\gamma\|_0^k}{k!}\, \overline{g_k(\gamma)} \right| dW(\gamma) \leq \int_{E'} \sum_{k=N+1}^{M} \frac{\rho^k\, \|\gamma\|_0^k}{k!}\, |\, g_k(\gamma)\, |\, dW(\gamma) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{E'}\sum_{k=N+1}^{M}\left(\frac{\rho^{2k}\,\|\gamma\|_0^{2k}}{k!^2}+|\,g_k(\gamma)\,|^2\right)dW(\gamma)$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{E'}\sum_{k=N+1}^{M}\frac{\rho^{2k}\,\|\gamma\|_0^{2k}}{k!^2}dW(\gamma)+\frac{1}{2}\left\|\sum_{k=N+1}^{M}g_k\right\|_2^2$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{E'}\sum_{k=N+1}^{M}\frac{\|\gamma\|_0^{k}}{k!}\,e^{\rho^2\,\|\gamma\|_0}\,dW(\gamma)+\frac{1}{2}\left\|\sum_{k=N+1}^{M}g_k\right\|_2^2.$$

Aplicando Hölder, el primer sumando se acota por $\frac{1}{2}\left\|e^{\rho^2\,\|\gamma\|_0}\right\|_2\left\|\sum_{k=N+1}^{M}\frac{\|\gamma\|_0^k}{k!}\right\|_2$. Existe $K_1>0$, tal que esta expresión puede hacerse tan pequeña como $\varepsilon/2$ para $M,N>K_1$, por ser $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|\gamma\|_0^k}{k!}\to e^{\|\gamma\|_0}$ en $L^2(W)$, y por lo tanto de Cauchy.
Existe $K_2>0$, tal que el segundo sumando se puede hacer tan chico como $\varepsilon/2$ para $M,N>K_2$, por ser $\sum_{k=0}^{\infty}g_k\to g$ en $L^2(W)$.

Por lo tanto, si tomamos $K>\max\{K_1,K_2\}$ resulta que $\|h_M-h_N\|_1<\varepsilon$ para todo $M,N>K$. Existe entonces $h\in L^1(W)$ para la cual

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{E'}\frac{1}{1-\frac{z(\gamma)}{\|\gamma\|_0}}\frac{\rho^k\,\|\gamma\|_0^k}{k!}\,\overline{g_k(\gamma)}\,dW(\gamma)=\int_{E'}\frac{1}{1-\frac{z(\gamma)}{\|\gamma\|_0}}\,\overline{h(\gamma)}\,dW(\gamma)$$

y por lo tanto f es representable sobre la bola de E''. $\square$

Bibliografía

[1] Aron R. y Berner P., *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings.* Bull. Soc. Math. France 106(1)(1978), 3-24.

[2] Chae S. B., Holomorpyh and calculus in normed spaces. Marcel Dekker, Inc, New York, 1985.

[3] Conway J. B., A course in functional analysis. Springer-Verlag, New York, 1985

[4] Davie A. y Gamelin T., *A theorem on polynomial-star approximation.* Proc. Amer. Math. Soc. 106(2)(1989), 351-356.

[5] Defant A. y Floret K., *Tensor Norms and Operator Ideals,* Math. Stud 176, North-Holland, Amsterdam, 1993.

[6] Diestel J., Jarchow H. y Tongue A., Absolutely Summing Operators, Cambridge Univ. Press, 1995

[7] Dimant V., Galindo P., Maestre M. y Zalduendo I., *Integral holomorphic functions.* Studia Math. 160 (2004), 83-99.

[8] Dineen S., *Holomorphy types on a Banach space.* Studia Math. 39 (1971), 241-288.

[9] Dineen S., Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces. Springer-Verlag, London, 1999.

[10] Dineen S. y Nilsson L., Integral representation of holomorphic functions on fully nuclear spaces, Preprint.

[11] Dwyer T., *Partial Differential Equations in Generalized Fischer Spaces for Hilbert-Schmidt Holomorphy Type.* Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 725-730.

[12] Fernique M. X., *Intégrabilité des vecteurs Gaussiens.* Academie des Sciences, Paris, Comptes Rendus 270 Séries A (1970), 1698-1699.

[13] Gross L., *Abstract Wiener spaces.* Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Stat. and Probab. 2, part 1 (1965), 31-42.

[14] Haydon R., *Some more characterizations of Banach spaces containing ℓ_1*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 80, (1976), 269-276.

[15] Kuelbs J., *Gaussian Measures on a Banach Space.* J. Functional Anal., Vol. 5, Nro. 3 (1970), 354-367.

[16] Kuo H-H., Gaussian Measures in Banach Spaces. Lecture Notes in Mathematics 463, Springer-Verlag, Heidelberg, 1975.

[17] Kuo H-H., *Stochastic Integrals in Abstract Wiener Space II: Regularity properties.* Nagoya Math. J. 50(1973), 89-116.

[18] Lopushansky O. y Zagorodnyuk A., *Hilbert spaces of analytic functions of infinitely many variables.* Ann. Pol. Math. 81.2(2003), 111-122.

[19] Pinasco D., *L^p-representable functions on Banach spaces.* J. Math. Anal. Appl. 335(2007), 480-497.

[20] Pinasco D. y Zalduendo I., *Integral representation of holomorphic functions on Banach spaces.* J. Math. Anal. Appl. 308(2005), 159-174.

[21] Reed M. y Simon B., Methods of modern mathematical physics. Academic Press, Inc., New York, 1972.

[22] Skorokhod A. V., Integration in Hilbert space. Springer-Verlag, Heidelberg, 1974.

[23] Yamasaki Y., Measure on infinite dimensional spaces. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Philadelphia, 1985

[24] Wiener N., *The average value of a functional.* Proc. London Math. Soc. 22(1922), 454-467.

[25] Wiener N., *Differential space.* J. Math. Phys. 58(1923), 131-174.

[26] Zalduendo I., *A canonical extension for analytic functions on Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 320(2)(1990), 747-763.