



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

## **Homotopía étale de un topos**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área  
Ciencias Matemáticas

**Matías Ignacio Data**

Director de tesis: Eduardo J. Dubuc

Consejero de estudios: Fernando Cukierman

Buenos Aires, 20 de Mayo de 2020



## Homotopía étale de un topos

En esta tesis se extienden los invariantes homotópicos desarrollados por M. Artin y B. Mazur para topos localmente conexos al caso de un topos arbitrario. Dado un topos localmente conexo  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$ , Artin y Mazur definen el tipo homotópico étale  $\pi\mathcal{E}$  que es un pro-objeto en la categoría homotópica de los conjuntos simpliciales  $\mathcal{H}$ . La construcción consiste esencialmente en aplicarle el funtor de componentes conexas  $\gamma_i$  al diagrama cofiltrante de los hipercubrimientos del topos salvo homotopía simplicial. Dado un punto  $\mathcal{S} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$  se obtienen pro-grupos de homotopía. Este invariante determina la cohomología con coeficientes constantes (grupo para  $n = 1$ , grupo abeliano para  $n > 1$ ) del topos y permite calcularla como un colímite filtrante. Más aún en el caso de un topos punteado conexo y localmente conexo, el pro-grupo fundamental representa torsos.

Debido a la ausencia del funtor de componentes conexas  $\gamma_i$  en el caso general, se deben considerar todas las indexaciones simpliciales posibles de un hipercubrimiento como parte del pro-objeto. Esto nos lleva a estudiar las categorías de familias y familias simpliciales de un topos. Mediante esta última se logra definir un pro-objeto que es isomorfo en el caso localmente conexo al definido por Artin y Mazur. Se demuestra que en el caso general este invariante determina la cohomología con coeficientes constantes (grupo para  $n = 1$ , grupo abeliano para  $n > 1$ ) del topos y se tiene una fórmula como un colímite filtrante. Luego se utiliza esta construcción para estudiar el Grupoide Fundamental del topos. Considerando a las homotopías entre morfismos de hipercubrimientos se construye un 2-pro-grupoide. Se demuestra que este 2-pro-grupoide determina la categoría de proyecciones cubrientes (definidas por E. J. Dubuc en *The fundamental progroupoid of a general topos*, JPA 212) como un 2-colímite y que representa torsos, dando una nueva construcción del Grupoide Fundamental de un topos que generaliza el caso localmente conexo.

**Palabras Clave.** hipercubrimientos, proyecciones cubrientes, tipo homotópico étale, 2-pro-objeto, grupoide fundamental de un topos.



# Étale homotopy of a topos

In this thesis we extend the homotopy invariants developed by M. Artin and B. Mazur for locally connected topoi to the case of an arbitrary topos. Given a locally connected topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$ , Artin and Mazur define the étale homotopy type  $\text{Ver}(\mathcal{E})$  which is a pro-object in the homotopy category of simplicial sets  $\mathcal{H}$ . The construction consist essentially of applying the connected components functor  $\gamma_!$  to the cofiltered diagram of hypercovers up to simplicial homotopy. Given a point  $\mathcal{S} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$  one gets homotopy pro-groups. This invariant determines the cohomology with constant coefficients (group for  $n = 1$ , abelian group for  $n > 1$ ) of the topos, and gives a computation as a filtered colimit. Moreover, in the case of a pointed connected locally connected topos, the fundamental pro-group represents torsors.

Due to the absence of the connected components functor  $\gamma_!$  in the general case, we have to consider all possible simplicial indexations of a hypercover as part of the pro-object. This requires an study of the categories of families and simplicial families of a topos, through which we are able to define a pro-object that in the locally connected case is isomorphic to the one defined by Artin and Mazur. We prove that in the general case this invariant determines the cohomology with constant coefficients (group for  $n = 1$ , abelian group for  $n > 1$ ) of the topos, and gives a computation as a filtered colimit. Then we use this construction to study the Fundamental Groupoid of the topos. Considering the homotopies between morphisms of hypercovers we construct a 2-pro-groupoid. We prove that this 2-pro-groupoid determines the category of covering projections (as defined by E. J. Dubuc in *The fundamental progroupoid of a general topos*, JPAA 212) as a 2-colimit and moreover represents torsors, which gives a new construction of the Fundamental Groupoid of a topos which generalizes the locally connected case.

**Key words.** hypercovers, covering projections, étale homotopy type, 2-pro-object, fundamental groupoid of a topos.



# Introducción

**Homotopía Étale de Artin-Mazur.** La teoría de topos surgió en el Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, dirigido por Alexander Grothendieck. El objetivo era extender la cohomología de haces en espacios topológicos al caso de la geometría algebraica y formalizar la idea de una “cohomología de Weil” para probar las conjeturas de Weil. Este trabajo monumental fue registrado en [SGA4-1, SGA4-2] y posteriormente en un tercer volumen. Estos trabajos fueron tremendamente influyentes en geometría algebraica, se introducen los Esquemas como la estructura geométrica básica generalizando las Variedades Algebraicas y la cohomología étale junto con varias otras teorías de cohomología para esquemas y eventualmente condujo a una solución completa de las conjeturas de Weil.

Entonces se volvió de interés particular extender las ideas y técnicas de la teoría de homotopía a la geometría algebraica. En [SGA1] A. Grothendieck generalizó la teoría de Galois a la teoría categorías abstracta con un funtor fibra  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{S}_{<\infty}$  satisfaciendo algunas condiciones de exactitud, llamadas categorías de Galois. El probó que una categoría de Galois es equivalente a la categoría de acciones finitas del grupo de automorfismos del funtor fibra, que en este caso es profinito. Esta teoría se puede aplicar al caso de la categoría de objetos localmente constantes finitos de un topos conexo punteado y da lugar al grupo fundamental profinito. En el caso de un espacio topológico bueno  $X$  esta teoría recupera la completación profinita del grupo fundamental. Si uno quisiera recuperar el grupo fundamental tendría que considerar todos los objetos localmente constantes (no necesariamente finitos) y esta teoría ya no se puede aplicar. Ya había sido afirmado en un ejercicio [SGA4-1, Exposé IV, Exercice 2.7.5] que para un topos conexo localmente conexo punteado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$ , uno podría asociar un pro-grupo  $\pi_1(\mathcal{E}, p)$  llamado el grupo fundamental de  $\mathcal{E}$  en  $p$ . En ese caso se considera la noción de un topos de Galois y se afirma que los topos de Galois se corresponden exactamente, como categorías, a las subcategorías plenas generadas por objetos localmente constantes en un topos conexo localmente conexo.

En 1969, M. Artin y B. Mazur publicaron un trabajo muy influyente llamado Etale Homotopy [AM]. En ese trabajo los autores asocian a un topos localmente conexo un “pro-tipo homotópico”. Este pro-objeto, llamado el tipo homotópico étale o funtor de Verdier  $\text{Ver}(\mathcal{E})$ , es por definición un pro-objeto en la categoría homotópica de conjuntos simpliciales  $\mathcal{H} = \text{Ho}(s\mathcal{S})$ . Muestran que el tipo homotópico étale determina la cohomología con coeficientes constantes

del topos. Dado un punto  $\mathcal{S} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$  definen los pro-grupos de homotopía  $\pi_n(\mathcal{E}, p)$  para  $n \geq 1$ . También prueban que para un topos conexo localmente conexo punteado y un grupo  $G$ , las clases de isomorfismo de  $G$ -fibrados principales en  $\mathcal{E}$  (también llamados  $G$ -torsores) se corresponden a morfismos de pro-grupos  $\pi_1(\mathcal{E}, p) \longrightarrow G$  salvo conjugación.

**Algunos Preliminares.** Expliquemos brevemente las ideas principales detrás de estos desarrollos. En los inicios de la teoría de haces, la cohomología de haces no era un funtor derivado, y aún así era posible calcular estos invariantes de alguna forma. Para un espacio topológico general se tenía la resolución de Godement usando haces flasque. También estaba la cohomología de Čech, la cual era de naturaleza combinatoria y mucho más explícita. Dado  $U = \sum_{i \in I} U_i \longrightarrow X$  un cubrimiento abierto de un espacio topológico  $X$  uno puede construir un objeto simplicial aumentado  $\mathcal{C}U$  llamado el complejo de Čech:

$$X \longleftarrow U \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} U \times_X U \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} U \times_X U \times_X U \quad \dots$$

Aplicando un haz de grupos abelianos  $F$  y tomando la suma alternada de las caras obtenemos un complejo de co-cadenas de grupos abelianos:

$$F(U) \xrightarrow{\partial} F(U \times_X U) \xrightarrow{\partial} F(U \times_X U \times_X U) \xrightarrow{\partial} \dots$$

La cohomología de este complejo se denota por  $H^n(F(\mathcal{C}U))$ . Uno puede considerar esta construcción para todos los cubrimientos abiertos y es claramente funtorial en  $U$ . Además dos refinamientos distintos son simplicialmente homotópicos por lo tanto inducen el mismo morfismo en la cohomología. Identificando refinamientos obtenemos un poset cofiltrante de cubrimientos  $\text{Cov}(X)_{\sim}$ , entonces la cohomología de Čech se define como el colímite filtrante sobre todos los cubrimientos  $\check{H}^n(X, F) := \text{colim}_{U \in \text{Cov}(X)_{\sim}} H^n(F(\mathcal{C}U))$ . Por un teorema de H. Cartan, para espacios topológicos buenos la cohomología de Čech calcula la cohomología de haces, pero en general estas dos cohomologías no coinciden, aunque siempre se tiene una sucesión espectral que las relaciona. Esto se traduce al caso general de un topos con pequeñas modificaciones y produce los mismos resultados. La razón por la cual estas teorías de cohomología difieren en general es que los espacios usualmente no tienen suficientes cubrimientos abiertos, respectivamente suficientes cubrimientos étales para esquemas, etc.

Con un profundo entendimiento de la teoría simplicial J.-L. Verdier tuvo una idea brillante cuando descubrió el concepto de hipercubrimientos [SGA4-2, Exposé V, 7.]. Estos son una genera-

lización de los complejos de Čech asociados con cubrimientos, pero son mucho mas flexibles mientras que también retienen las propiedades claves de los primeros. Un hipercubrimiento se define como sigue: es un objeto simplicial  $\mathcal{U}$  en el topos:

$$1 \longleftarrow U_0 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longleftarrow \end{array} U_1 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longleftarrow \end{array} U_2 \quad \dots$$

tal que  $U_0 \rightarrow 1$  es un cubrimiento,  $U_1 \rightarrow U_0 \times U_0$  es un cubrimiento y mas generalmente  $U_n \rightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n$  es un cubrimiento para todo  $n \geq 0$ . El probó que los hipercubrimientos determinan salvo homotopía simplicial una categoría cofiltrante  $\text{HC}(\mathcal{E})_{\sim}$ . En su celebrado teorema probó que si se toma el colímite sobre todos los hipercubrimientos se calcula la cohomología de haces, esto es:

$$H^n(\mathcal{E}, F) \simeq \text{colim}_{\mathcal{U} \in \text{HC}(\mathcal{E})_{\sim}} H^n(F(\mathcal{U}))$$

Aunque esta construcción funciona perfectamente para la cohomología, no da directamente invariantes homotópicos. Un problema con la homotopía es que es covariante, no contravariante como la cohomología. Cuando se aplica la cohomología convertimos un diagrama cofiltrante de cubrimientos (o hipercubrimientos) en un diagrama filtrante de grupos abelianos y como los colímites filtrantes son exactos estos conmutan con la cohomología. La solución a este problema ya había sido sugerida por A. Grothendieck; en vez de tomar el límite como el invariante el cual no se comporta bien, tomar el diagrama completo como el invariante. Formalmente esto es un pro-grupo y la teoría de pro-objetos ya había sido desarrollada en [SGA4-1, Exposé I, 8.].

Además, ya se tenía unos resultados en topología algebraica que sugerían que los invariantes homotópicos buenos podían ser obtenidos en el contexto de la teoría de Čech. Por ejemplo el teorema del nervio de Borsuk: dado un espacio topológico paracompacto  $X$ , con un *buen* cubrimiento abierto  $U = \sum_{i \in I} U_i \rightarrow X$ , i.e. un cubrimiento por abiertos contractiles tales que todas las intersecciones no vacías también son contráctiles (por ejemplo un cubrimiento por abiertos convexos). Consideremos su nervio de Čech  $\check{\mathcal{N}}U$ , este es un conjunto simplicial cuyo conjunto de  $n$ -simplices  $N_n$  está dado por los índices  $(i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1}$  tales que  $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n} \neq \emptyset$ . Entonces su realización geométrica  $|\check{\mathcal{N}}U|$  es homotópicamente equivalente a  $X$ .

M. Artin and B. Mazur encontraron una forma de definir tales invariantes homotópicos para topos localmente conexos. Recordemos que un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  es localmente conexo si además tiene un adjunto a izquierda  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma!} \mathcal{S}$   $\gamma! \dashv \gamma^* \dashv \gamma_*$  llamado el funtor de componentes conexas. Por ejemplo el topos  $\text{Sh}(X)$  de haces en un espacio topológico  $X$  es localmente conexo

si y solo si  $X$  es un espacio localmente conexo. Con este funtor uno asocia a cualquier objeto simplicial  $\mathcal{U}$  en el topos un conjunto simplicial  $\gamma_! \mathcal{U}$ . Observemos que para  $U$  un *buen* cubrimiento, los abiertos del cubrimiento y todas las intersecciones son conexas. Luego se sigue que en este caso  $\gamma_! \mathcal{C}U$  coincide con su nervio de Čech  $NU$ . Ellos definen primero un pro-objeto en  $\mathbf{Ver}(\mathcal{E}) := (\gamma_! \mathcal{U})_{\mathcal{U} \in \mathbf{HC}(\mathcal{E}) \sim}$  la categoría homotópica  $\mathcal{H}$ , su tipo homotópico étale o funtor de Verdier. Como un corolario del teorema de hipercubrimiento de Verdier y la adjunción  $\gamma_! \dashv \gamma^*$  se sigue que la cohomología de este pro-objeto calcula la cohomología de haces con coeficientes constantes, i.e.  $H^n(\mathcal{E}, A) \simeq H^n(\mathbf{Ver}(\mathcal{E}), A)$ . Dado un punto  $\mathcal{S} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$  se tienen asociados pro-grupos de homotopía dados por  $\pi_n(\mathcal{E}, p) := \operatorname{colim}_{(\mathcal{U}, x) \in \mathbf{HC}_*(\mathcal{E}) \sim} \pi_n(\gamma_! \mathcal{U}, \tilde{x})$  donde el colímite es sobre la categoría de hipercubrimientos punteados salvo homotopía simplicial. Prueban el ya mencionado teorema de representación de  $G$ -fibrados principales. También obtienen una generalización del teorema del nervio de Borsuk, ver [AM, Theorem 12.1]: para un espacio topológico paracompacto y localmente contráctil  $X$ , el pro-tipo homotópico es esencialmente constante y es homotópicamente equivalente al complejo singular  $S(X)_\bullet$ .

La teoría del grupo fundamental de topos localmente conexos fué formalizada por distintos autores. Primero el caso de un topos localmente conexo localmente simplemente conexo fué tratado por M. Barr y R. Diaconescu en [BD81]. El caso de un topos conexo localmente conexo punteado fué desarrollado por I. Moerdijk en [Mo88, Mo89] usando la teoría de grupos locálicos en vez de pro-grupos. Dado un tal topos  $\mathcal{E}$ , consideremos el topos  $\mathbf{SLC}(\mathcal{E})$  de sumas de objetos localmente constantes, entonces el prueba que  $\mathbf{SLC}(\mathcal{E})$  es equivalente al topos clasificante de un grupo locálico pro-discreto  $\pi_1(\mathcal{E})$ , esto es  $\mathbf{SLC}(\mathcal{E}) \simeq \mathbf{B}(\pi_1(\mathcal{E}))$  (único salvo isomorfismo). Además, el morfismo geométrico  $\mathcal{E} \xrightarrow{\xi} \mathbf{B}(\pi_1(\mathcal{E}))$  es universal en el sentido que representa torsos, i.e. induce una equivalencia de categorías  $\mathbf{Top}_{\mathcal{S}}(\mathcal{E}, \mathbf{B}G) \simeq \mathbf{LGrp}(\pi_1(\mathcal{E}), G)$  para  $G$  un grupo, donde el lado derecho denota el hom en grupos locálicos.

El caso de un topos no punteado y no necesariamente conexo pero localmente conexo sobre una base arbitraria fué desarrollado por M. Bunge en [B92, B00] con grupoides locálicos en vez de grupos. También en [B00] el caso de un topos localmente conexo localmente simplemente conexo es tratado y es un caso particularmente bueno de la teoría donde el grupoide fundamental es un grupoide discreto (i.e. ordinario).

La teoría del grupo fundamental de un topos general (i.e. no-localmente conexo) fué desarrolla-

do por J. F. Kennison en [Ken83, Ken92], primero el caso punteado y luego el caso no punteado, usando el concepto de estructuras uniformes en un local. Es importante observar que [Ken92] introduce el concepto de una 2-categoría 2-filtrante, reformulada posteriormente en [DS06], la cual es fundamental para nuestras construcciones. La teoría fué entonces desarrollada por E. J. Dubuc [D08] con un enfoque diferente. Inspirado por el trabajo de L. J. Hernández-Paricio [HP98] en teoría de la forma, el concepto de una proyección cubriente se define, esta noción es la generalización correcta del concepto de un objeto localmente constante al caso no-localmente conexo. Se prueba que el topos  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  de (sumas de) proyecciones cubrientes es el topos clasificante de un pro-grupoide locálico, y que este pro-grupoide locálico representa torsores.

**Resultados originales.** En esta tesis extendemos los invariantes homotópicos de M. Artin y B. Mazur al caso de un topos general (no-localmente conexo). La idea de E. J. Dubuc para esquivar la ausencia del functor de componentes conexas, primero bosquejada en el preprint [D10], es que aunque en un topos general un hipercubrimiento no viene con una indexación canónica como en el caso localmente conexo, uno puede considerar todas las indexaciones posibles de este como parte del diagrama inverso. Un hipercubrimiento indexado en un topos  $\mathcal{E}$  es simplemente un morfismo simplicial  $\mathcal{U} \xrightarrow{\xi} \gamma^* \mathcal{J}$  en el topos donde  $\mathcal{U}$  es un hipercubrimiento y  $\mathcal{J}$  es el conjunto simplicial que indexa. Entonces  $U_n = \sum_{\sigma \in I_n} U_{n,\sigma}$  y además la indexación es reducida en el sentido que  $U_{n,\sigma} \neq \emptyset$  para todo  $\sigma \in I_n$ . Para estudiar la categoría de hipercubrimientos indexados de un topos  $\mathcal{E}$  primero estudiamos en detalle el topos  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  de familias del topos. Luego estudiamos el topos  $s\mathcal{F}(\mathcal{E})$  de familias simpliciales, este es el lugar natural donde los hipercubrimientos indexados viven. Aquí obtuvimos algunos resultados sobre la categoría de indexaciones de un hipercubrimiento fijo que son fundamentales para extender la teoría del caso localmente conexo. Probamos que la categoría  $\text{IHC}(\mathcal{E})_{\sim}$  de hipercubrimientos indexados salvo homotopía simplicial es cofiltrante, por tanto definimos un functor de Verdier generalizado  $\text{Ver}(\mathcal{E}) := (\mathcal{J})_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi) \in \text{IHC}(\mathcal{E})_{\sim}}$ . Con la ayuda del teorema de hipercubrimiento de Verdier y nuestros resultados obtenemos que este pro-objeto calcula la cohomología de haces con coeficientes constantes, esto es  $H^n(\mathcal{E}, A) \simeq H^n(\text{Ver}(\mathcal{E}), A)$ .

Luego consideramos el grupoide fundamental de un topos general. Aquí tenemos éxito en desarrollar las líneas de trabajo esbozadas en el preprint [D10] para mejorar los resultados de [D08] con el uso de hipercubrimientos en lugar de cubrimientos. Un problema con la definición naif

de aplicar el grupoide fundamental al pro-objeto  $\text{Ver}(\mathcal{E})$  es que el grupoide fundamental de un conjunto simplicial no está bien definido como un funtor desde la categoría homotópica  $\mathcal{H}$ , pues su codominio no es la (2-)categoría de grupoides sino su categoría homotópica donde invertimos las equivalencias de categorías. Para remediar esto definimos en su lugar un 2-pro-objeto (en el sentido de [DD14, D15]) manteniendo la información de las homotopías simpliciales, y obtenemos un 2-pro-grupoide  $\pi_1(\mathcal{E})$ . Mostramos que las proyecciones cubrientes están dadas por un dato de descenso del conjunto simplicial de indexación de un hipercubrimiento indexado. De esto obtenemos que el topos  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  de proyecciones cubrientes es el topos clasificante de este 2-pro-grupoide. Esto mejora el resultado de [D08] mostrando que los grupoides ordinarios son suficientes, dispensando de la necesidad de la noción menos clásica de un grupoide localico. Finalmente, mostramos que este 2-pro-grupoide representa torsores, i.e. se tiene una equivalencia  $\mathbf{Top}_{\mathcal{S}}(\mathcal{E}, \mathbf{BG}) \simeq 2\text{-Pro}(\mathbf{Grpd})(\pi_1(\mathcal{E}), G)$  para  $G$  un grupo. Pasando a clases de isomorfismo obtenemos una generalización del resultado de M. Artin y B. Mazur [AM, Corollary 10.7] para topos localmente conexos, pero aún en este caso nuestro resultado es más fino ya que establece una equivalencia de categorías en lugar de una biyección entre clases de isomorfismo.

# Introduction

**Artin-Mazur Étale Homotopy.** Topos Theory was born in the Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, run by Alexander Grothendieck. The objective was to extend the cohomology theory of sheaves on a topological space to algebraic geometry, and formalize the idea of a “Weil cohomology” in order to solve the Weil Conjectures. This monumental work was recorded in [SGA4-1, SGA4-2] and a further third volume. They were tremendously influential in algebraic geometry, it introduced Schemes as the basic geometric structure generalizing Algebraic Varieties, and the étale cohomology along with several other cohomology theories for schemes, and eventually led to a complete solution of the Weil Conjectures.

Then it became of particular interest to extend the ideas and techniques of homotopy theory to algebraic geometry. In [SGA1] A. Grothendieck generalized Galois theory to an abstract theory of categories with a fiber functor  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{S}_{<\infty}$  satisfying some exactness conditions, called Galois categories. He proves that a Galois category is equivalent to the category of finite actions of the group of automorphisms of the fiber functor, which in this case is profinite. This theory can be applied in the case of the category of finite locally constant objects of a pointed connected topos and yields its profinite fundamental group. In the case of a nice topological space  $X$  this theory recovers the profinite completion of the fundamental group. If one wants to recover the fundamental group one has to consider all locally constant objects (not necessarily finite) and this theory is no longer applicable. It was already stated in an exercise [SGA4-1, Exposé IV, Exercice 2.7.5] that for a pointed connected locally connected topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$ , one could associate a pro-group  $\pi_1(\mathcal{E}, p)$  called the fundamental group of  $\mathcal{E}$  in  $p$ . There it is considered the notion of a Galois topos and it is stated that Galois topoi correspond exactly, as categories, to the full subcategories generated by locally constant objects in connected locally connected topoi.

In 1969, M. Artin and B. Mazur published an influential book called Etale Homotopy [AM]. In it they associate to a locally connected topos a “pro-homotopy type”. This pro-object, called the étale homotopy type or Verdier functor  $\text{Ver}(\mathcal{E})$ , is by definition a pro-object in the homotopy category of simplicial sets  $\mathcal{H} = \text{Ho}(s\mathcal{S})$ . They show that the étale homotopy type determines the cohomology with constant coefficients of the topos. Given a point  $\mathcal{S} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$  they define homotopy pro-groups  $\pi_n(\mathcal{E}, p)$  for  $n \geq 1$ . They also prove that for a pointed connected locally

connected topos and a group  $G$ , isomorphism classes of principal  $G$ -fibrations in  $\mathcal{E}$  (also known as  $G$ -torsors) correspond to pro-group morphisms  $\pi_1(\mathcal{E}, p) \rightarrow G$  up to conjugacy. In this work we generalize (or extend) these results of Artin-Mazur to general topoi (that is, not necessarily locally connected topoi, see below).

**Some preliminaries.** Let us briefly explain the main ideas behind these developments. In the first days of sheaf theory, sheaf cohomology wasn't a derived functor, and still people were able to compute these invariants in some ways. For a general topological space there was the Godement resolution using flasque sheaves. There was also Čech cohomology, which was combinatorial in nature and much more explicit. Given  $U = \sum_{i \in I} U_i \rightarrow X$  an open cover of a topological space  $X$ , then one constructs an augmented simplicial object  $\mathcal{C}U$  called the Čech complex:

$$X \longleftarrow U \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} U \times_X U \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} U \times_X U \times_X U \quad \dots$$

Applying a sheaf of abelian groups  $F$  and taking the alternating sum of the faces we get a co-chain complex of abelian groups:

$$F(U) \xrightarrow{\partial} F(U \times_X U) \xrightarrow{\partial} F(U \times_X U \times_X U) \xrightarrow{\partial} \dots$$

The cohomology of this complex is denoted  $H^n(F(\mathcal{C}U))$ . One can consider this construction for all open covers and it is clearly functorial in  $U$ . Moreover two different refinement maps are simplicially homotopic hence they induce the same morphism on cohomology. By identifying refinements we get a cofiltered poset of covers  $\text{Cov}(X)_\sim$  and then the Čech cohomology is defined as the filtered colimit over all coverings  $\check{H}^n(X, F) := \text{colim}_{U \in \text{Cov}(X)_\sim} H^n(F(\mathcal{C}U))$ . By a theorem of H. Cartan, for nice topological spaces Čech cohomology computes sheaf cohomology, but in general they don't coincide, although there is always a spectral sequence that relates them. This translates to the general case of a topos with little modifications and yield the same results. The reason why these cohomology theories differ in general is that spaces usually don't have enough open covers, respectively étale covers for schemes, etc.

Then J.-L. Verdier had a brilliant idea when with a deep understanding of simplicial theory he discovered the concept of hypercovers in [SGA4-2, Exposé V, 7.]. These are a generalization of the Čech complexes associated with covers, but are much more flexible while they still retain the key properties of the former. A hypercover is defined as follows, it is a simplicial object  $\mathcal{U}$

in the topos:

$$1 \longleftarrow U_0 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \end{array} U_1 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \end{array} U_2 \quad \dots$$

such that  $U_0 \rightarrow 1$  is a cover,  $U_1 \rightarrow U_0 \times U_0$  is a cover, and more generally  $U_n \rightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n$  is a cover for all  $n \geq 0$ . He proved that hypercovers up to simplicial homotopy determine a cofiltered category  $\text{HC}(\mathcal{E})_{\sim}$ . In his celebrated theorem he was able to prove that if we take the colimit over all hypercovers we compute sheaf cohomology, that is:

$$H^n(\mathcal{E}, F) \simeq \text{colim}_{\mathcal{U} \in \text{HC}(\mathcal{E})_{\sim}} H^n(F(\mathcal{U}))$$

While this construction works perfectly for cohomology, it does not yield directly homotopy invariants. One problem with homotopy is that it is covariant, not contravariant as cohomology. When we apply cohomology we turn a cofiltered diagram of covers (or hypercovers) into a filtered diagram of abelian groups, and since filtered colimits are exact these commute with cohomology. The solution to this problem was already suggested by A. Grothendieck, instead of taking the limit as the invariant which is not well behaved, take the whole diagram as the invariant. Formally this is a pro-group, and the theory of pro-objects was already worked out in [SGA4-1, Exposé I, 8.].

Also, there were already some beautiful results in algebraic topology that suggested that good homotopy invariants could be obtained within Čech theory. For example Borsuk's nerve theorem (due to A. Weil): given a paracompact topological space  $X$ , with a *good* open cover  $U = \sum_{i \in I} U_i \rightarrow X$ , i.e. by contractible open subsets such that all non-empty finite intersections are also contractible (for example, a cover by convex open subsets). Consider its Čech nerve  $\mathcal{N}U$ , this is a simplicial set whose set of  $n$ -simplices  $N_n$  is given by the indices  $(i_0, \dots, i_n)$  in  $I^{n+1}$  such that  $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n} \neq \emptyset$ . Then its geometric realization  $|\mathcal{N}U|$  is homotopy equivalent to  $X$ .

M. Artin and B. Mazur found a way to define such homotopy invariants for locally connected topoi. Recall that a topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  is locally connected if it has also a left adjoint  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma^!} \mathcal{S}$   $\gamma^! \dashv \gamma^* \dashv \gamma_*$  called the connected components functor. For example the topos  $\text{Sh}(X)$  of sheaves on a topological space  $X$  is locally connected if and only if  $X$  is a locally connected space. With this functor one associates to any simplicial object  $\mathcal{U}$  in the topos a simplicial set  $\gamma^!\mathcal{U}$ . Observe that for a topological space  $X$  and  $U = \sum_{i \in I} U_i \rightarrow X$  a *good* cover (as above), the

open subsets and all their intersections are connected. Hence it follows that in this case  $\gamma_! \mathcal{C}U$  coincides with its Čech nerve  $NU$ . They define first a pro-object  $\text{Ver}(\mathcal{E}) := (\gamma_! \mathcal{U})_{\mathcal{U} \in \text{HC}(\mathcal{E}) \sim}$  in the homotopy category  $\mathcal{H}$ , its étale homotopy type or Verdier functor. As a corollary of Verdier's hypercover theorem and the adjunction  $\gamma_! \dashv \gamma^*$  it follows that the cohomology of this pro-object computes sheaf cohomology with constant coefficients, i.e.  $H^n(\mathcal{E}, A) \simeq H^n(\text{Ver}(\mathcal{E}), A)$ . Given a point  $\mathcal{S} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$  then there are associated homotopy pro-groups given by  $\pi_n(\mathcal{E}, p) := \text{colim}_{(\mathcal{U}, x) \in \text{HC}_*(\mathcal{E}) \sim} \pi_n(\gamma_! \mathcal{U}, \tilde{x})$  where the colimit is over the category of pointed hypercovers up to simplicial homotopy. They prove the already mentioned representation theorem of principal  $G$ -fibrations. Also they obtain a generalization of Borsuk's Nerve theorem, see [AM, Theorem 12.1]: for a paracompact and locally contractible topological space  $X$ , then this pro-homotopy type is essentially constant and is homotopy equivalent to the singular complex  $S(X)_\bullet$ .

The theory of the fundamental group of locally connected topoi was formalized by several authors. First the case of a locally connected locally simply connected topos was treated by M. Barr and R. Diaconescu in [BD81]. The case of a pointed connected locally connected topos was developed by I. Moerdijk in [Mo88, Mo89] using the theory of localic groups instead of pro-groups. Given such a topos  $\mathcal{E}$ , consider the topos  $\text{SLC}(\mathcal{E})$  of sums of locally constant objects, then he proves that  $\text{SLC}(\mathcal{E})$  is equivalent to the classifying topos of a pro-discrete localic group  $\pi_1(\mathcal{E})$ , that is  $\text{SLC}(\mathcal{E}) \simeq \mathbf{B}(\pi_1(\mathcal{E}))$  (unique up to isomorphism). Moreover, the geometric morphism  $\mathcal{E} \xrightarrow{\xi} \mathbf{B}(\pi_1(\mathcal{E}))$  is universal in the sense that represent torsors, i.e. induces an equivalence of categories:  $\mathbf{Top}_{\mathcal{S}}(\mathcal{E}, \mathbf{B}G) \simeq \mathbf{LGrp}(\pi_1(\mathcal{E}), G)$  for  $G$  a group, where the right hand side denotes hom in localic groups.

The case of an unpointed and not necessarily connected but still locally connected topos over an arbitrary base was developed by M. Bunge in [B92, B00] with localic groupoids instead of groups. Also in [B00] the case of a locally connected locally simply connected topos is revisited and is a particularly nice case of the theory where the fundamental groupoid is a discrete (i.e. ordinary) groupoid.

The theory of the fundamental group of a general topos (i.e. non-locally connected) was developed by J. F. Kennison in [Ken83, Ken92], first the pointed and then the unpointed case, using the concept of uniform structures on a locale. It is important to remark that [Ken92] introduces the concept of a 2-filtered 2-category, later reformulated in [DS06], which is fundamental to our

constructions. The theory was then developed by E. J. Dubuc [D08] with a different approach. Inspired by the work of L. J. Hernández-Paricio [HP98] on shape theory, the concept of a covering projection is defined which is the correct generalization of the concept of a locally constant object to the non-locally connected case. It is proved that the topos  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  of (sums of) covering projections is the classifying topos of a localic pro-groupoid, and that this localic pro-groupoid represents torsors.

**Original results.** In this thesis we extend the homotopy invariants of M. Artin and B. Mazur to the case of a general (non-locally connected) topos. The idea on how to circumvent the absence of a connected components functor by E. J. Dubuc, first sketched in the preprint [D10], is that even though in a general topos an hypercover doesn't come with a canonical indexation as in the locally connected case, one can consider all possible indexations of it as part of the inverse diagram. An indexed hypercover in a topos  $\mathcal{E}$  is just a simplicial map  $\mathcal{U} \xrightarrow{\xi} \gamma^* \mathcal{J}$  in the topos where  $\mathcal{U}$  is an hypercover and  $\mathcal{J}$  is the index simplicial set. Hence  $U_n = \sum_{\sigma \in I_n} U_{n,\sigma}$  and moreover the indexation is reduced in the sense that  $U_{n,\sigma} \neq \emptyset$  for all  $\sigma \in I_n$ . In order to study the category of indexed hypercovers of a topos  $\mathcal{E}$  we first study in detail the topos  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  of families of the topos. Then we study the topos  $s\mathcal{F}(\mathcal{E})$  of simplicial families, this is the natural habitat where indexed hypercovers live. Here we get some results about the category of indexations of a fixed hypercover which are fundamental to extend the theory of the locally connected case. Then we prove that the category  $\text{IHC}(\mathcal{E})_{\sim}$  of indexed hypercovers up to simplicial homotopy is cofiltered, hence we define a generalized Verdier functor  $\text{Ver}(\mathcal{E}) := (\mathcal{J})_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi) \in \text{IHC}(\mathcal{E})_{\sim}}$ . Our Verdier functor coincides with Artin-Mazur's in the case of a locally connected topos.

With the aid of Verdier's hypercover theorem and our results we get that this pro-object computes sheaf cohomology with constant coefficients, that is  $H^n(\mathcal{E}, A) \simeq H^n(\text{Ver}(\mathcal{E}), A)$ , generalizing the result by Artin-Mazur.

Then we consider the fundamental groupoid of a general topos. Here we succeed to develop lines sketched in the preprint [D10] to improve over the results in [D08] by the use of hypercovers in place of just covers. One problem with the naive definition by applying fundamental groupoid to the pro-object  $\text{Ver}(\mathcal{E})$  is that the fundamental groupoid of a simplicial set is not well defined as a functor from the homotopy category  $\mathcal{H}$ , since its codomain is not the 2-category of groupoids but its homotopy category where we invert equivalences of categories. To remedy

this we instead define a 2-pro-object (in the sense of [DD14, D15]) by keeping the information of the explicit simplicial homotopies, and we get a 2-pro-groupoid  $\pi_1(\mathcal{E})$ . We show that all covering projections are given by a descent data on the index simplicial set of an indexed hypercover. From this result we get that the topos  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  of covering projections is the inverse limit classifying topos of this 2-pro-groupoid. This improves over the result in [D08] showing that ordinary groupoids are enough, dispensing the need of the less classical notion of a localic groupoid. Finally, we show that this 2-pro-groupoid represents torsors, i.e. there is an equivalence:  $\mathbf{Top}_S(\mathcal{E}, \mathbf{BG}) \simeq 2\text{-Pro}(\mathbf{Grpd})(\pi_1(\mathcal{E}), G)$  for  $G$  a group. Passing to isomorphism classes we obtain a generalization of the result of M. Artin and B. Mazur for a locally connected topos, but even in this case, our result is finer since establishes an equivalence of categories, rather than a bijection between isomorphism classes.

# Índice

<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>IV</b>
<b>Introduction</b>	<b>X</b>
<b>Índice</b>	<b>2</b>
<b>1. Teoría de categorías</b>	<b>3</b>
1.1. Resultados básicos de Límites, Yoneda y Extensiones de Kan . . . . .	3
1.2. Pro-Objetos . . . . .	9
1.3. 2-Categorías . . . . .	12
<b>2. Conjuntos simpliciales y teoría de homotopía</b>	<b>20</b>
2.1. Ejemplos básicos y el Lema de Eilenberg-Zilber . . . . .	20
2.2. Esqueleto y Coesqueleto . . . . .	27
2.3. Enriquecimiento simplicial y homotopías simpliciales . . . . .	32
2.4. El grupoide fundamental de un conjunto simplicial . . . . .	40
2.5. La estructura de modelos de Quillen . . . . .	44
<b>3. Teoría de topos</b>	<b>48</b>
3.1. Sitios y haces . . . . .	48
3.2. Propiedades de exactitud de los topos . . . . .	52
3.3. Morfismos geométricos . . . . .	57
3.4. Torsores . . . . .	63
3.5. Cohomología . . . . .	65
<b>4. Homotopía Étale</b>	<b>68</b>
4.1. Hipercubrimientos . . . . .	68
4.2. Cálculo de la Cohomología con Hipercubrimientos . . . . .	80

<b>5. El Funtor de Verdier</b>	<b>84</b>
5.1. Familias en un topos . . . . .	84
5.2. Familias simpliciales en un topos . . . . .	92
5.3. Hipercubrimientos indexados . . . . .	99
<b>6. El grupoide fundamental</b>	<b>107</b>
6.1. Hipercubrimientos indexados y descenso . . . . .	107
6.2. La categoría y el topos de proyecciones cubrientes . . . . .	122
6.3. El 2-pro-grupoide fundamental de un topos . . . . .	128
6.4. La representación de los torsores . . . . .	129
<b>Referencias</b>	<b>136</b>

# 1. Teoría de categorías

## 1.1. Resultados básicos de Límites, Yoneda y Extensiones de Kan

En esta sección recordamos algunos hechos clásicos sobre la teoría de categorías que serán usados posteriormente. Para sus demostraciones referimos al lector a [CWM], para límites pesados [CHT].

**Notación 1.1.1.** Denotamos por  $\mathcal{S}$  a la categoría de conjuntos. Dadas las categorías  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{M}$  con  $\mathcal{C}$  pequeña, denotamos  $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$  la categoría de funtores de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{M}$ . Dada una categoría  $\mathcal{C}$  y objetos  $c, c' \in \mathcal{C}$  denotamos el hom-set por  $\mathcal{C}(c, c')$  de morfismos de  $c$  a  $c'$ . Esto define el bifunctor  $\text{hom } \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{S}$ . En particular, si  $c \in \mathcal{C}$  está fijo tenemos funtores  $\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{S}$  y  $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ , los funtores representables contravariante y covariante respectivamente asociados con  $c \in \mathcal{C}$ . Podemos pensar a un funtor  $X \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}^{op}}$  como una acción a derecha de  $\mathcal{C}$ , esto motiva la siguiente notación, dado  $x \in X(c)$  y un morfismo  $f : c' \rightarrow c$  denotamos  $x \cdot f = X(f)(x) \in X(c')$ . Dualmente, podemos pensar a un funtor  $X \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$  como una acción a izquierda y denotamos  $f \cdot x = X(f)(x) \in X(c')$  para  $f : c \rightarrow c'$  y  $x \in X(c)$ .

**Lema 1.1.2.** (Lema de Yoneda) Dado un objeto  $c \in \mathcal{C}$  y un funtor  $X \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}^{op}}$ , entonces hay una biyección  $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{op}}(\mathcal{C}(-, c), X) \simeq X(c)$ . Explícitamente la biyección es como sigue, dada una transformación natural  $\mathcal{C}(-, c) \xrightarrow{x} X$  asociamos a esta el elemento  $x_c(1_c) \in X(c)$ . Esta asociación es natural en  $c$  y en  $X$ .

**Definición 1.1.3.** Dado un funtor contravariante  $X \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}^{op}}$ , definimos su **categoría de elementos**  $\Gamma_X$  como sigue. Sus objetos son los pares  $(x, c)$  con  $x \in X(c)$ , un morfismo  $(x, c) \rightarrow (y, c')$  está dada por  $c \xrightarrow{f} c'$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $x = y \cdot f$ . Por el Lema de Yoneda esto es lo mismo que la categoría slice  $\mathcal{C}/X$  donde vemos  $\mathcal{C}$  como una subcategoría de la categoría de funtores  $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{op}}$  dada por los funtores representables.

Dualmente tenemos la categoría de elementos para un funtor covariante. Dado un funtor covariante  $X \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$ , definimos su categoría de elementos  $\Gamma_X$  como sigue, sus objetos son pares  $(x, c)$  with  $x \in X(c)$ , y un morfismo  $(x, c) \rightarrow (y, c')$  está dada por un morfismo  $c \xrightarrow{f} c'$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $f \cdot x = y$ .

Más generalmente, dado un funtor  $H : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  definimos su categoría de elementos

$\Gamma_H$  con objetos pares  $(x, c)$  con  $x \in H(c, c)$ , y un morfismo  $(x, c) \rightarrow (y, c')$  está dada por un morfismo  $f : c \rightarrow c'$  tal que  $f \cdot x = y \cdot f$ .

**Lema 1.1.4.** (Lema de Yoneda II) Dado un functor  $X \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}^{op}}$ , entonces  $X$  es canónicamente un colímite de representables, explícitamente  $X = \operatorname{colim}_{(x,c) \in \Gamma_X} \mathcal{C}(-, c)$ .

**Definición 1.1.5.** Dado un functor  $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \xrightarrow{H} \mathcal{M}$  un **cono dinatural** está dado por un objeto  $X \in \mathcal{M}$  con morfismos  $H(c, c) \xrightarrow{\alpha_c} X$  for  $c \in \mathcal{C}$  tales que para cada  $c \xrightarrow{f} c'$  el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & H(c, c) & \\ H(f, c) \nearrow & & \searrow \alpha_c \\ H(c', c) & & X \\ H(c', f) \searrow & & \nearrow \alpha_{c'} \\ & H(c', c') & \end{array}$$

Su **coend**  $\int^{c \in \mathcal{C}} H(c, c) \in \mathcal{M}$  es un cono dinatural universal, como se ilustra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & H(c, c) & \xrightarrow{\alpha_c} & & \\ H(f, c) \nearrow & & \searrow \lambda_c & & \\ H(c', c) & & \int^{c \in \mathcal{C}} H(c, c) \xrightarrow{\exists! \alpha} & & X \\ H(c', f) \searrow & & \nearrow \lambda_{c'} & & \\ & H(c', c') & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & & \end{array}$$

El concepto dual es el de los **ends**, que denotaremos por  $\int_{c \in \mathcal{C}} H(c, c)$ .

**Proposición 1.1.6.** Dados funtores  $X, Y \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ , el conjunto de transformaciones naturales es el end  $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}(X, Y) = \int_{c \in \mathcal{C}} \mathcal{M}(X(c), Y(c))$ .

**Proposición 1.1.7.** Dado un functor  $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \xrightarrow{H} \mathcal{M}$  con  $\mathcal{C}$  pequeña y supongamos que  $\mathcal{M}$  es cocompleta, entonces su coend  $\int^{c \in \mathcal{C}} H(c, c) \in \mathcal{M}$  existe y está dado por el siguiente coegalizador

$$\coprod_{f: c \rightarrow c'} H(c', c) \rightrightarrows \coprod_{c \in \mathcal{C}} H(c, c) \longrightarrow \int^{c \in \mathcal{C}} H(c, c)$$

**Ejemplo 1.1.8.** Supongamos ahora que  $\mathcal{M} = \mathcal{S}$ , entonces podemos exhibir el coend por la construcción del colímite y sea  $\Gamma_H$  su categoría de elementos de 1.1.3. Entonces el coend es el conjunto  $\pi_0(\Gamma_H)$  de componentes conexas de la categoría.

**Definición 1.1.9.** Dado un objeto  $X \in \mathcal{M}$ , y un conjunto  $S$ , el **tensor** (o copower)  $S \cdot X \in \mathcal{M}$  tiene la propiedad universal

$$\mathcal{M}(S \cdot X, Y) \simeq \mathcal{S}(S, \mathcal{M}(X, Y))$$

natural en  $Y \in \mathcal{M}$ . Dualmente el **cotensor** (o power)  $\{S, Y\} \in \mathcal{M}$  tiene la propiedad universal

$$\mathcal{M}(X, \{S, Y\}) \simeq \mathcal{S}(S, \mathcal{M}(X, Y))$$

natural en  $X \in \mathcal{M}$ .

**Proposición 1.1.10.** Si  $\mathcal{M}$  tiene coproductos entonces es tensorizada y está dada por el copower  $S \cdot X = \sum_{s \in S} X$ . Dualmente si tiene productos es cotensorizada con  $\{S, X\} = \prod_{s \in S} X$ .

**Definición 1.1.11.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña, y  $\mathcal{M}$  una categoría. Dado un funtor  $X \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$  y un peso  $W \in \mathcal{S}^{cop}$  su **colímite pesado**  $W \otimes_{\mathcal{C}} X \in \mathcal{M}$  está dado por la propiedad universal

$$\mathcal{M}(W \otimes_{\mathcal{C}} X, Y) \simeq \mathcal{S}^{cop}(W, \mathcal{M}(X, Y))$$

natural en  $Y \in \mathcal{M}$ . Dualmente, dado un funtor  $Y \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$  y un peso  $W \in \mathcal{S}^c$  su **límite pesado**  $\{W, Y\}_{\mathcal{C}} \in \mathcal{M}$  está dado por la propiedad universal

$$\mathcal{M}(X, \{W, Y\}_{\mathcal{C}}) \simeq \mathcal{S}^c(W, \mathcal{M}(X, Y))$$

natural en  $X \in \mathcal{M}$ .

**Proposición 1.1.12.** Para  $X \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$  y un objeto  $c \in \mathcal{C}$  tenemos  $\mathcal{C}(-, c) \otimes_{\mathcal{C}} X \simeq X(c)$ . Dualmente tenemos  $\{\mathcal{C}(c, -), X\}_{\mathcal{C}} \simeq X(c)$ .

**Ejemplo 1.1.13.** Si  $W \in \mathcal{S}^{cop}$  es el funtor constante en el conjunto de un elemento y  $X \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$  es un funtor, entonces  $W \otimes_{\mathcal{C}} X \simeq \text{colim}_{c \in \mathcal{C}} X(c)$ , i.e. los colímites son un caso especial de colímites pesados.

**Proposición 1.1.14.** Supongamos que  $\mathcal{M}$  is cocompleta (respectivamente completa) y  $\mathcal{C}$  pequeña, entonces el colímite pesado (resp. límite pesado) existe, además está dado por la siguiente construcción  $W \otimes_{\mathcal{C}} X = \int^{c \in \mathcal{C}} W(c) \cdot X(c)$  (respectivamente  $\{W, X\}_{\mathcal{C}} = \int_{c \in \mathcal{C}} \{W(c), X(c)\}$ ).

**Lema 1.1.15.** Dada  $\mathcal{M}$  cocompleta (resp. completa), un functor  $X \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$  y pesos  $W_i \in \mathcal{S}^{cop}$  (resp.  $W_i \in \mathcal{S}^c$ ), y definimos  $W = \operatorname{colim}_{i \in I} W_i$  entonces

$$W \otimes_{\mathcal{C}} X \simeq \operatorname{colim}_{i \in I} (W_i \otimes_{\mathcal{C}} X)$$

$$\{W, X\}_{\mathcal{C}} \simeq \lim_{i \in I} \{W_i, X\}_{\mathcal{C}}$$

**Proposición 1.1.16.** Supongamos que  $\mathcal{M}$  es completa (resp. cocompleta) y  $\mathcal{C}$  es pequeña, entonces el límite pesado es un límite (resp. el colímite pesado es un colímite), además:

$$W \otimes_{\mathcal{C}} X = \operatorname{colim}_{(x,c) \in \Gamma_W} X(c)$$

$$\{W, X\}_{\mathcal{C}} = \lim_{(x,c) \in \Gamma_W} X(c)$$

donde  $\Gamma_W$  denota la categoría de elementos 1.1.3 de un functor representable contravariante (resp. covariante).

*Demostración.* Probemos la fórmula del colímite pesado. Recordemos que por 1.1.4  $W \simeq \operatorname{colim}_{(x,c) \in \Gamma_W} \mathcal{C}(-, c)$ , entonces usando 1.1.15 y 1.1.12 tenemos

$$W \otimes_{\mathcal{C}} X \simeq \operatorname{colim}_{(x,c) \in \Gamma_W} \mathcal{C}(-, c) \otimes_{\mathcal{C}} X \simeq \operatorname{colim}_{(x,c) \in \Gamma_W} X(c)$$

□

**Definición 1.1.17.** Dado un functor  $\mathcal{C} \xrightarrow{K} \mathcal{D}$  y un functor  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{E}$ , la **extensión de Kan a izquierda** de  $F$  a lo largo de  $K$  es un functor  $\mathcal{D} \xrightarrow{\operatorname{Lan}_K F} \mathcal{E}$  y una transformación natural  $F \xrightarrow{\eta} \operatorname{Lan}_K F \circ K$  universal en el sentido que

$$\mathcal{E}^{\mathcal{D}}(\operatorname{Lan}_K F, G) \simeq \mathcal{E}^{\mathcal{C}}(F, G \circ K)$$

es biyectivo para todo  $\mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ . Esto se puede ilustrar en diagramas como sigue,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{K} & \mathcal{D} \\ & \searrow F & \swarrow G \\ & \mathcal{E} & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{K} & \mathcal{D} \\ & \searrow F & \swarrow G \\ & \mathcal{E} & \end{array} \quad \begin{array}{c} \operatorname{Lan}_K F \\ \exists! \theta \\ \xrightarrow{\quad} \end{array}$$

Dualmente, la **extensión de Kan a derecha** de  $F$  a lo largo de  $K$  es un functor  $\mathcal{D} \xrightarrow{\operatorname{Ran}_K F} \mathcal{E}$  y una transformación natural  $\operatorname{Ran}_K F \circ K \xrightarrow{\varepsilon} F$  universal en el sentido que

$$\mathcal{E}^{\mathcal{D}}(G, \operatorname{Ran}_K F) \simeq \mathcal{E}^{\mathcal{C}}(G \circ K, F)$$

es biyectivo para todo  $\mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ .

**Teorema 1.1.18.** Dada una categoría pequeña  $\mathcal{C}$ , una categoría cocompleta  $\mathcal{E}$ , un funtor  $\mathcal{C} \xrightarrow{K} \mathcal{D}$  y un funtor  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{E}$ , entonces la extensión de Kan a izquierda de  $F$  a lo largo de  $K$  existe y está dada por la fórmula

$$\text{Lan}_K F(d) = \mathcal{D}(K-, d) \otimes_{\mathcal{C}} F = \int^{c \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(Kc, d) \cdot Fc$$

En este caso decimos que es una extensión de Kan a izquierda **punto a punto**. Dualmente, si  $\mathcal{E}$  es completa la extensión de Kan a derecha existe y está dada por la fórmula

$$\text{Ran}_K F(d) = \{\mathcal{D}(d, K-), F\}_{\mathcal{C}} = \int_{c \in \mathcal{C}} \{\mathcal{D}(d, Kc), Fc\}$$

**Proposición 1.1.19.** Si  $\mathcal{E}$  es cocompleta (resp. completa) y  $\mathcal{C} \xrightarrow{K} \mathcal{D}$  es plenamente fiel, entonces la transformación natural  $F \xrightarrow{\eta} \text{Lan}_K F \circ K$  es un isomorfismo (resp.  $\varepsilon$  es un isomorfismo).

**Observación 1.1.20.** Si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son pequeñas y  $\mathcal{E}$  es cocompleta, entonces la extensión de Kan a izquierda a lo largo de  $K$  existe para todos los funtores, y entonces define un adjunto a izquierda  $\text{Lan}_K(-) \dashv K^* = (-) \circ K$ ,

$$\mathcal{E}^{\mathcal{D}} \underset{K^*}{\overset{\text{Lan}_K}{\rightleftarrows}} \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$$

Dualmente si  $\mathcal{E}$  es completa,  $K^*$  tiene un adjunto a derecha  $K^* \dashv \text{Ran}_K(-)$ .

**Observación 1.1.21.** En el caso especial en que  $\mathcal{C}$  es pequeña y consideramos una extensión de un funtor  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{E}$  a lo largo de la inclusión de Yoneda  $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{S}^{\mathcal{C}^{op}}$  entonces la fórmula da

$$\text{Lan}_h F(G) \simeq \int^{c \in \mathcal{C}} \mathcal{S}^{\mathcal{C}^{op}}(\mathcal{C}(-, c), G) \cdot Fc \simeq \int^{c \in \mathcal{C}} Gc \cdot Fc \simeq G \otimes_{\mathcal{C}} F$$

Observemos que por definición del colímite pesado, dado  $e \in \mathcal{E}$

$$\mathcal{E}(\text{Lan}_h F(G), e) \simeq \mathcal{E}(G \otimes_{\mathcal{C}} F, e) \simeq \mathcal{S}^{\mathcal{C}^{op}}(G, \mathcal{E}(F, e)) \simeq \mathcal{S}^{\mathcal{C}^{op}}(G, Re)$$

por tanto hemos mostrado que  $L = \text{Lan}_h F$  tiene un adjunto a derecha  $R$  dado por  $Re(c) = \mathcal{E}(Fc, e)$ . Esta es la **construcción estándar** de obtener adjunciones  $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{op}} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{E}$ , todas las adjunciones surgen de esta manera. Como la inclusión de Yoneda es plenamente fiel,  $L \circ h \simeq F$ .

**Lema 1.1.22.** Dados  $\mathcal{C} \xrightarrow{K} \mathcal{D}$ , un funtor  $X \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$  y un peso  $W \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}^{op}}$  (resp.  $W \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$ ), entonces

$$\begin{aligned} W \otimes_{\mathcal{C}} (X \circ K) &\simeq \text{Lan}_K W \otimes_{\mathcal{D}} X \\ \{W, X \circ K\}_{\mathcal{C}} &\simeq \{\text{Lan}_K W, X\}_{\mathcal{D}} \end{aligned}$$

**Lema 1.1.23.** Dados  $\mathcal{C} \xrightarrow{K} \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{M}$  cocompleta (resp. completa), un functor  $X \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$  y un peso  $W \in \mathcal{S}^{\mathcal{D}^{op}}$  (resp.  $W \in \mathcal{S}^{\mathcal{D}}$ ), entonces

$$W \otimes_{\mathcal{D}} \mathbf{Lan}_K X \simeq (W \circ K) \otimes_{\mathcal{C}} X$$

$$\{W, \mathbf{Ran}_K X\}_{\mathcal{D}} \simeq \{W \circ K, X\}_{\mathcal{C}}$$

**Definición 1.1.24.** Un functor  $\mathcal{C} \xrightarrow{K} \mathcal{D}$  es **final** si y solo si para cada functor  $\mathcal{D} \xrightarrow{F} \mathcal{M}$  el morfismo canónico

$$\operatorname{colim}_{\mathcal{C}} FK \xrightarrow{\sim} \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} F$$

es un isomorfismo, ambos lados existen si uno de ellos existe. Dualmente, un functor  $\mathcal{C} \xrightarrow{K} \mathcal{D}$  es **inicial** (o **cofinal**) si y solo si para cada functor  $\mathcal{D} \xrightarrow{F} \mathcal{M}$  el morfismo canónico

$$\lim_{\mathcal{D}} F \xrightarrow{\sim} \lim_{\mathcal{C}} FK$$

es un isomorfismo, ambos lados existen si uno de ellos existe.

**Definición 1.1.25.** Dada categorías  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ , y funtores  $\mathcal{A} \xrightarrow{S} \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{C}$ , entonces la **categoría coma** ( $S \downarrow T$ ) se define como sigue: sus objetos son triplas  $(A, B, x)$  donde  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{B}$  y  $x : S(A) \rightarrow T(B)$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Un morfismo  $(A, B, x) \rightarrow (A', B', y)$  está dado por morfismos  $f : A \rightarrow A'$  y  $g : B \rightarrow B'$  tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} S(A) & \xrightarrow{Sf} & S(A') \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ T(B) & \xrightarrow{Tg} & T(B') \end{array}$$

**Proposición 1.1.26.** Un functor  $\mathcal{C} \xrightarrow{K} \mathcal{D}$  es final (resp. inicial) si y solo si para cada  $d \in \mathcal{D}$  la categoría coma  $d \downarrow K$  (resp.  $K \downarrow d$ ) es no vacía y conexa.

**Definición 1.1.27.** Dado un functor  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$  y un diagram  $\mathcal{I} \xrightarrow{X} \mathcal{C}$ , supongamos que tenemos un cono  $X_i \xrightarrow{\lambda_i} C$  in  $\mathcal{C}$ , decimos que  $F$ :

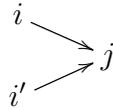
- preserva colímites** si  $X_i \xrightarrow{\lambda_i} C$  es un cono colímite, entonces  $FX_i \xrightarrow{F\lambda_i} FC$  es un cono colímite.
- refleja colímites** si  $FX_i \xrightarrow{F\lambda_i} FC$  es un cono colímite, entonces  $X_i \xrightarrow{\lambda_i} C$  es un cono colímite.
- crea colímites** si preserva y refleja colímites, i.e.  $X_i \xrightarrow{\lambda_i} C$  es un cono colímite si y solo si  $FX_i \xrightarrow{F\lambda_i} FC$  es un cono colímite.

## 1.2. Pro-Objetos

Ahora recordaremos algunos resultados básicos de la teoría de pro-objetos. Algunas demostraciones y detalles son excluidas, el lector puede consultar las referencias [SGA4-1][Exposé I, 8], [AM][A.1-4] or [CP89][2.3].

**Definición 1.2.1.** Una categoría  $I$  es **filtrante** si es no vacía y satisface

(F0) Dados dos objetos  $i, i' \in I$  existen  $j \in I$  y morfismos  $i \rightarrow j, i' \rightarrow j$ , gráficamente:



(F1) Dados dos morfismos paralelos  $i \begin{smallmatrix} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \end{smallmatrix} j$  existen  $k \in I$  y un morfismo  $w : j \rightarrow k$  tales que  $wu = vw$ , i.e. el siguiente diagrama conmuta:

$$i \begin{smallmatrix} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \end{smallmatrix} j \xrightarrow{w} k$$

Dualmente, una categoría  $I$  es **cofiltrante** si  $I^{op}$  es filtrante.

**Proposición 1.2.2.** Si  $I \xrightarrow{\varphi} J$  es un funtor e  $I$  es filtrante, entonces  $\varphi$  es final si y solo si satisface:

- Dado  $j \in J$ , existen  $i \in I$  y un morfismo  $j \rightarrow \varphi(i)$ .
- (unicidad esencial) Dados dos morfismos paralelos  $j \begin{smallmatrix} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \end{smallmatrix} \varphi(i)$  existe un morfismo  $w : i \rightarrow i'$  tal que  $\varphi(w)u = \varphi(w)v$ .

Además, si  $\varphi$  es final, entonces  $J$  is filtrante.

**Teorema 1.2.3.** [SGA4-1, Exposé I, Proposition 8.1.6.] (P. Deligne) Sea  $J$  una categoría pequeña filtrante, entonces existe un conjunto dirigido  $I$  (i.e. un poset filtrante) y un funtor final  $I \xrightarrow{\varphi} J$ .

**Definición 1.2.4.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría, un **pro-objeto** es un funtor  $X : I^{op} \rightarrow \mathcal{C}$  donde  $I$  es una categoría pequeña filtrante.

**Notación 1.2.5.** Una notación usual para los pro-objetos es  $X = (X_i)_{i \in I}$  aunque esta notación se olvida de los morfismos de transición, que son parte del dato.

Dado un pro-objeto  $X$ , tenemos un funtor asociado  $\widehat{X} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ , dado por  $\widehat{X}(Y) = \operatorname{colim}_{i \in I} \mathcal{C}(X_i, Y)$  for  $Y \in \mathcal{C}$ . Por la construcción de los colímites filtrantes en  $\mathcal{S}$ , está dado por el conjunto de morfismos  $f : X_i \rightarrow Y$  módulo la relación de equivalencia que identifica dos morfismos si ellos son iguales en un refinamiento común. Esto es,  $f : X_i \rightarrow Y, g : X_j \rightarrow Y$  son identificados si existen morfismos  $u : i \rightarrow k, v : j \rightarrow k$  in  $I$  tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & X_i & \xrightarrow{f} \\ X_k & \nearrow & Y \\ & X_j & \xrightarrow{g} \end{array}$$

Finalmente, dados dos pro-objetos  $X = (X_i)_{i \in I}, Y = (Y_j)_{j \in J}$ , definimos

$$\operatorname{hom}(X, Y) = \lim_{j \in J^{op}} \operatorname{colim}_{i \in I} \mathcal{C}(X_i, Y_j)$$

por tanto tenemos una categoría  $\operatorname{Pro}(\mathcal{C})$ . Entonces se sigue casi automáticamente que  $\operatorname{Pro}(\mathcal{C})$  es una subcategoría plena de  $(\mathcal{S}^{\mathcal{C}})^{op}$ , su imagen se llama la categoría (dual) de **funtores pro-representables**. En efecto, calculemos:

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}^{\mathcal{C}})^{op}(\widehat{X}, \widehat{Y}) &= (\mathcal{S}^{\mathcal{C}})^{op}(\widehat{X}, \lim_{j \in J^{op}} \mathcal{C}(Y_j, -)) \simeq \lim_{j \in J^{op}} (\mathcal{S}^{\mathcal{C}})^{op}(\widehat{X}, \mathcal{C}(Y_j, -)) \simeq \\ &\simeq \lim_{j \in J^{op}} \mathcal{S}^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(Y_j, -), \widehat{X}) \simeq \lim_{j \in J^{op}} \widehat{X}(Y_j) \simeq \lim_{j \in J^{op}} \operatorname{colim}_{i \in I} \mathcal{C}(X_i, Y_j) \end{aligned}$$

Mas importante aún es la descripción explícita de los morfismos de pro-objetos, que tenemos usando la construcción de los límites y colímites filtrantes de conjuntos. Primero, un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  está dado por una familia de morfismos compatibles  $[f_j] \in \operatorname{hom}(X, Y_j) = \operatorname{colim}_{i \in I} \mathcal{C}(X_i, Y_j)$ . La compatibilidad asegura que dada un morfismo  $u : j \rightarrow j'$  in  $J$ , entonces  $[u f_{j'}] = [f_j]$  in  $\operatorname{hom}(X, Y_j)$ . Esto es, tomando representantes  $f_j : X_i \rightarrow Y_j, f_{j'} : X_{i'} \rightarrow Y_{j'}$ , entonces la compatibilidad dice que existen  $v : i \rightarrow k, v' : i' \rightarrow k$  in  $I$  tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & X_i & \xrightarrow{f_j} & Y_j \\ & \nearrow v & & & \uparrow u \\ X_k & & & & Y_j \\ & \searrow v' & X_{i'} & \xrightarrow{f_{j'}} & Y_{j'} \end{array}$$

Decimos que un morfismo  $f_j : X_i \rightarrow Y_j$  **representa** a  $[f_j]$ , si su imagen en el colímite  $\operatorname{hom}(X, Y_j)$  es  $[f_j]$ .

Podemos tomar representantes de una forma funcional y agregar esto como parte del dato del morfismo, aunque entonces tendríamos que introducir una relación de equivalencia.

**Definición 1.2.6.** Un **pre-morfismo** de pro-objetos está dado por una función  $\varphi : J \rightarrow I$ , y para cada  $j \in J$  un morfismo  $f_j : X_{\varphi(j)} \rightarrow Y_j$  que satisface la compatibilidad. Esto es, dado  $u : j \rightarrow j'$  in  $J$ , entonces existen  $i \in I$  y morfismos  $v : \varphi(j) \rightarrow i, v' : \varphi(j') \rightarrow i$  tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & X_{\varphi(j)} & \xrightarrow{f_j} & Y_j \\ & \nearrow v & & & \uparrow u \\ X_i & & & & \\ & \searrow v' & X_{\varphi(j')} & \xrightarrow{f_{j'}} & Y_{j'} \end{array}$$

Dos pre-morfismos  $(f_j, \varphi), (g_j, \psi)$  se dicen **equivalentes** si para cada  $j \in J$  existe un  $i \in I$  con morfismos  $v : \varphi(j) \rightarrow i, v' : \psi(j) \rightarrow i$  tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} & & X_{\varphi(j)} & \xrightarrow{f_j} & Y_j \\ & \nearrow v & & & \nearrow \\ X_i & & & & \\ & \searrow v' & X_{\psi(j)} & \xrightarrow{g_j} & \end{array}$$

**Proposición 1.2.7.** Dado  $X = (X_i)_{i \in I}$  un pro-objeto y  $\phi : J \rightarrow I$  un functor final, entonces  $(X_{\phi(j)})_{j \in J}$  es isomorfo a  $X$ .

**Proposición 1.2.8.** Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  es pro-representable si y solo si existen una categoría pequeña filtrante  $I$  y un functor final  $\varphi : I \rightarrow \Gamma_F^{op}$  donde  $\Gamma_F$  es la categoría de elementos de  $F$  de la Definición 1.1.3.

**Proposición 1.2.9.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña con límites finitos y un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ . Entonces la categoría  $\Gamma_F^{op}$  es filtrante si y solo si  $F$  es exacto a izquierda.

**Corolario 1.2.10.** Si  $\mathcal{C}$  es pequeña y tiene límites finitos, entonces  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  es pro-representable si y solo si es exacto a izquierda.

**Teorema 1.2.11.** [AM, Proposition 4.4]  $\text{Pro}(\mathcal{C})$  es cerrada por límites cofiltrantes.

**Definición 1.2.12.** Dado un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , entonces este induce un functor  $\text{Pro}(F) : \text{Pro}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Pro}(\mathcal{D})$  de la manera obvia por post-composición. Explícitamente, dado  $X = (X_i)_{i \in I}$  un pro-objeto en  $\mathcal{C}$ , entonces  $\text{Pro}(F)X = (FX_i)_{i \in I}$  es un pro-objeto en  $\mathcal{D}$ . Decimos que el functor  $F$  **admite un pro-adjunto** si  $\text{Pro}(F)$  admite un adjunto a izquierda.

**Proposición 1.2.13.**  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  admite un pro-adjunto si y solo si existe  $L : \text{Pro}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Pro}(\mathcal{C})$  tal que existe un isomorfismo natural

$$\text{Pro}(\mathcal{C})(L(Y_i)_{i \in I}, X) \simeq \text{Pro}(\mathcal{D})((Y_i)_{i \in I}, FX)$$

para todo  $X \in \mathcal{C}$  e  $(Y_i)_{i \in I} \in \text{Pro}(\mathcal{D})$ .

**Proposición 1.2.14.** Dado un funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , entonces este admite un pro-adjunto si y solo si para todo  $Y \in \mathcal{D}$ , existe un funtor inicial  $\varphi : I_Y^{op} \rightarrow (Y \downarrow F)$  con  $I_Y$  una categoría pequeña filtrante.

### 1.3. 2-Categorías

Ahora repasamos algunos resultados de la teoría de 2-categorías, como referencia básica ver [Lac10].

**Definición 1.3.1.** Una 2-categoría  $\mathcal{C}$  consiste de una clase de objetos  $X, Y, Z, \dots \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , y para cada par de objetos  $X, Y$ , una categoría pequeña  $\underline{\mathcal{C}}(X, Y)$ , tal que la composición

$$\underline{\mathcal{C}}(X, Y) \times \underline{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \underline{\mathcal{C}}(X, Z) \quad (1)$$

es un funtor, es asociativo y satisface los axiomas obvios para identidades. Una morfismo  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  es un objeto de  $\underline{\mathcal{C}}(X, Y)$ , y una 2-celda  $\alpha : f \Rightarrow g$  es un morfismo de  $\underline{\mathcal{C}}(X, Y)$  que representamos como  $X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$ . Denotamos la composición vertical de 2-celdas  $\alpha : f \Rightarrow g$  y  $\beta : g \Rightarrow h$  como  $\beta \circ \alpha$ , esta es la composición de la categoría  $\underline{\mathcal{C}}(X, Y)$ , gráficamente

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{h} \end{array} Y = X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \beta \circ \alpha \\ \xrightarrow{h} \end{array} Y$$

También existe una composición horizontal de 2-celdas dada por el funtor 1, que denotamos por yuxtaposición  $\beta\alpha$ , gráficamente

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{k} \end{array} Z = X \begin{array}{c} \xrightarrow{hf} \\ \Downarrow \beta\alpha \\ \xrightarrow{kg} \end{array} Z$$

Entonces se tiene la ley de intercambio  $(\beta'\beta) \circ (\alpha'\alpha) = (\beta' \circ \alpha')(\beta \circ \alpha)$ , i.e. el siguiente diagrama es no ambiguo

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{h} \end{array} Y \begin{array}{c} \xrightarrow{f'} \\ \Downarrow \alpha' \\ \xrightarrow{g'} \\ \Downarrow \beta' \\ \xrightarrow{h'} \end{array} Z$$

**Definición 1.3.2.** Un **2-functor**  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre 2-categorías manda objetos en objetos y para cada par  $X, Y \in \mathcal{C}$  tenemos un funtor  $F : \underline{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \underline{\mathcal{D}}(FX, FY)$  que conmuta con la composición horizontal e identidades.

**Definición 1.3.3.** Dados 2-funtores  $\mathcal{C} \xrightarrow[F]{G} \mathcal{D}$ , una **transformación pseudo-natural** está dada por una familia de morfismos  $\eta_X : FX \rightarrow GX$  for  $X \in \mathcal{C}$ , y para cada  $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{C}$  una 2-celda inversible

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{Ff} & FY \\ \eta_X \downarrow & \Downarrow \eta_f & \downarrow \eta_Y \\ GX & \xrightarrow{Gf} & GY \end{array}$$

satisfaciendo:

(PNT1)  $\eta_{id_X} = id_{\eta_X}$ .

(PNT2) Dados morfismo  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$ ,

$$\begin{array}{ccccc} FX & \xrightarrow{Ff} & FY & \xrightarrow{Fg} & FZ \\ \eta_X \downarrow & \Downarrow \eta_f & \downarrow \eta_Y & \Downarrow \eta_g & \downarrow \eta_Z \\ GX & \xrightarrow{Gf} & GY & \xrightarrow{Gg} & GZ \end{array} = \begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{Fgf} & FZ \\ \eta_X \downarrow & \Downarrow \eta_{gf} & \downarrow \eta_Z \\ GX & \xrightarrow{Ggf} & GZ \end{array}$$

(PNT3) Dada una 2-celda  $\alpha : f \Rightarrow g$ , entonces

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{Ff} & FY \\ \eta_X \downarrow & \Downarrow F\alpha & \downarrow \eta_Y \\ GX & \xrightarrow{Gg} & GY \end{array} = \begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{Ff} & FY \\ \eta_X \downarrow & \Downarrow \eta_f & \downarrow \eta_Y \\ GX & \xrightarrow{Gf} & GY \\ & \Downarrow G\alpha & \\ & Gg & \end{array}$$

Una **2-transformación natural** es una transformación pseudo-natural tal que  $\eta_f$  es una identidad para toda  $f$ , i.e. los cuadrados conmutan, no sólomente salvo isomorfismo.

**Definición 1.3.4.** Dadas dos transformaciones pseudo-naturales  $\eta, \theta : F \Rightarrow G$ , una **modificación** está dada por una familia de 2-celdas  $FX \xrightarrow{\eta_X} GX \xrightarrow{\theta_X} GX$  para cada  $X \in \mathcal{C}$  tal que

$$\begin{array}{ccc}
FX & \xrightarrow{Ff} & FY \\
\theta_X \downarrow & \swarrow \theta_f \theta_Y & \downarrow \eta_Y \\
GX & \xrightarrow{Gf} & GY
\end{array}
\begin{array}{c}
\left( \begin{array}{c} \leftarrow \psi_Y \\ \leftarrow \psi_X \end{array} \right) \eta_Y \\
= \\
\left( \begin{array}{c} \leftarrow \psi_X \\ \leftarrow \psi_Y \end{array} \right) \eta_f
\end{array}
\begin{array}{ccc}
FX & \xrightarrow{Ff} & FY \\
\theta_X \downarrow & \swarrow \eta_X & \downarrow \eta_Y \\
GX & \xrightarrow{Gf} & GY
\end{array}$$

**Definición 1.3.5.** Dadas 2-categorías  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  con  $\mathcal{C}$  pequeña, existen 2-categorías:

- a)  $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ , dada por 2-funtores, 2-transformaciones naturales y modificaciones.
- b)  $\mathbf{Hom}_p(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ , dada por 2-funtores, transformaciones pseudo-naturales, y modificaciones.

En particular, dados dos 2-funtores paralelos  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , tenemos la categoría de transformaciones pseudo-naturales de  $F$  a  $G$  y modificaciones. Por simplicidad la denotamos por  $\mathbf{Nat}_p(F, G) = \mathbf{Hom}_p(\mathcal{C}, \mathcal{D})(F, G)$ .

**Definición 1.3.6.** Dado un 2-functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , un **pseudo-cono** es un objeto  $D \in \mathcal{D}$  con una transformación pseudo-natural  $\lambda : F \Rightarrow \Delta_D$  donde  $\Delta_D$  es el 2-functor constante con valor  $D$ . Explícitamente, consiste de lo siguiente, una familia de morfismos  $\lambda_X : FX \rightarrow D$  for  $X \in \mathcal{C}$  y for each  $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{C}$  una 2-celda inversible

$$\begin{array}{ccc}
FX & \xrightarrow{\lambda_X} & D \\
Ff \downarrow & \nearrow \lambda_f & \\
FY & \xrightarrow{\lambda_Y} & D
\end{array}$$

tal que

(PC1)  $\lambda_{id_X} = id_{\lambda_X}$ .

(PC2) dados morfismos  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$ ,

$$\begin{array}{ccc}
FX & \xrightarrow{\lambda_X} & D \\
Ff \downarrow & \nearrow \lambda_f & \\
FY & \xrightarrow{\lambda_Y} & D \\
Fg \downarrow & \nearrow \lambda_g & \\
FZ & \xrightarrow{\lambda_Z} & D
\end{array}
=
\begin{array}{ccc}
FX & \xrightarrow{\lambda_X} & D \\
Fgf \downarrow & \nearrow \lambda_{gf} & \\
FZ & \xrightarrow{\lambda_Z} & D
\end{array}$$

(PC3) Dada una 2-celda  $\alpha : f \Rightarrow g$ , entonces

$$\begin{array}{ccc}
 FX & \xrightarrow{\lambda_X} & D \\
 Ff \downarrow \scriptstyle \Rightarrow_{F\alpha} & \nearrow Fg \nearrow \lambda_g & \\
 FY & \xrightarrow{\lambda_Y} & D
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 FX & \xrightarrow{\lambda_X} & D \\
 Ff \downarrow & \nearrow \lambda_f & \\
 FY & \xrightarrow{\lambda_Y} & D
 \end{array}$$

Dados dos pseudo-conos  $\eta, \theta : F \Rightarrow \Delta_D$ , un morfismo es una modificación, explícitamente, consiste de una 2-celda  $\psi_X : \eta_X \Rightarrow \theta_X$  para cada  $X \in \mathcal{C}$  tal que

$$\begin{array}{ccc}
 FX & \xrightarrow{\theta_X} & D \\
 Ff \downarrow & \nearrow \theta_f & \\
 FY & \xrightarrow{\theta_Y} & D
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow \psi_X \\
 \uparrow \psi_Y
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 FX & \xrightarrow{\theta_X} & D \\
 \uparrow \psi_X & \nearrow \eta_X & \\
 Ff \downarrow & \nearrow \eta_f & \\
 FY & \xrightarrow{\eta_Y} & D
 \end{array}$$

Entonces tenemos una categoría de pseudo-conos con codominio  $D$  para cada  $D \in \mathcal{D}$ , definido por  $\mathbf{Cone}_p(F, D) = \mathbf{Nat}_p(F, \Delta_D)$ .

**Definición 1.3.7.** El **pseudo-colímite** del functor  $F$  es un pseudo-cono universal, denotado por  $FX \xrightarrow{\lambda_X} \mathbf{Colim}_{X \in \mathcal{C}} FX$ , y es universal en el sentido que para todo  $D \in \mathcal{D}$  precomposición con  $\lambda$  induce un isomorfismo de categorías:

$$\underline{\mathcal{D}}(\mathbf{Colim}_{X \in \mathcal{C}} FX, D) \xrightarrow{\lambda^*} \mathbf{Cone}_p(F, D)$$

Denotamos el pseudo-colímite con letras mayúsculas para distinguirlo del colímite. Si pedimos que  $\lambda^*$  sea simplemente una **equivalencia de categorías** entonces tenemos la noción de **bicolímite**. Dualmente se tienen los pseudo-conos  $\lambda : \Delta_D \Rightarrow F$  y su pseudo-cono universal se llama el **pseudo-límite**, omitimos su descripción explícita aquí.

**Observación 1.3.8.** El hecho que  $\lambda^*$  es un isomorfismo de categorías significa que es biyectivo en los objetos y plenamente fiel, en este caso esto significa que dado un pseudo-cono  $\theta : F \Rightarrow \Delta_D$ , entonces existe un único morfismo  $\mathbf{Colim}_{X \in \mathcal{C}} FX \xrightarrow{\theta} D$  tal que  $\theta_X = \theta \lambda_X$  y  $\theta_f = \theta \lambda_f$  para todo  $X$  y  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ , y dado un morfismo de pseudo-conos  $\psi_X : \eta_X \Rightarrow \theta_X$  for  $X \in \mathcal{C}$ , existe una única 2-celda  $\psi : \eta \Rightarrow \theta$  tal que  $\psi_X = \psi \lambda_X$ .

Para el bicolímite, que denotamos  $\mathbf{biColim}_{X \in \mathcal{C}} FX$ , la propiedad universal significa que es esencialmente suryectivo y plenamente fiel, por lo tanto dado un pseudo-cono  $\theta : F \Rightarrow \Delta_D$ , existe

un morfismo  $\text{biColim}_{X \in \mathcal{C}} FX \xrightarrow{\tilde{\theta}} D$  y 2-celdas inversibles  $\alpha_X : \tilde{\theta}\lambda_X \Rightarrow \theta_X$  que constituyen un isomorfismo de pseudo-conos. La condición para que  $\lambda^*$  sea plenamente fiel es la misma que para los pseudo-colímites.

Obviamente un pseudo-colímite es un bicolímite pero el recíproco es evidentemente falso. Aunque los bicolímites parecen ser la noción correcta, pues caracterizan un objeto salvo equivalencia, en la práctica podemos mostrar la existencia de pseudo-colímites en muchas 2-categorías y generalmente son mas fáciles para trabajar que con bicolímites.

**Definición 1.3.9.** Una 2-categoría es **2-filtrante** si satisface lo siguiente:

(F0) Dados dos objetos  $X, Y$ , existe un objeto  $Z$  con morfismos  $X \rightarrow Z$  y  $Y \rightarrow Z$ .

(F1) Dados dos morfismos  $X \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} Y$ , existe un morfismo  $u : Y \rightarrow Z$  y una 2-celda inversible  $\gamma : uf \simeq ug$ .

(F2) Dadas dos 2-celdas paralelas  $X \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \alpha \Downarrow \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} Y$ , hay un morfismo  $u : Y \rightarrow Z$  tal que  $h\alpha = h\beta$ .

La noción dual de una 2-categoría 2-cofiltrante  $\mathcal{C}$  está dada por los axiomas duales, i.e. si su 2-categoría opuesta  $\mathcal{C}^{op}$  es 2-filtrante.

**Teorema 1.3.10.** [DS06, Theorem 1.19] Dada una 2-categoría 2-filtrante  $\mathcal{C}$  y dado un 2-functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$ , entonces su pseudo-colímite  $\text{Colim}_{X \in \mathcal{C}} FX$  es la siguiente categoría  $\mathcal{L}(F)$ :

a) Sus objetos son pares  $(x, X)$  donde  $x \in FX$ , i.e. es un objeto de la categoría  $FX$  para algún  $X \in \mathcal{C}$ .

b) Un morfismo  $(x, X) \rightarrow (y, Y)$  está representado por  $(u, \varepsilon, v)$  donde  $u : X \rightarrow Z$  y  $v : Y \rightarrow Z$  son morfismos en  $\mathcal{C}$  y  $\varepsilon : Fu(x) \rightarrow Fv(y)$ . Identificamos  $(u_1, \varepsilon_1, v_1) \sim (u_2, \varepsilon_2, v_2)$  si hay morfismos  $w_1 : Z_1 \rightarrow Z$   $w_2 : Z_2 \rightarrow Z$  en  $\mathcal{C}$  y 2-celdas inversibles

$X \begin{matrix} \xrightarrow{w_1 u_1} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{w_2 u_2} \end{matrix} Z$  y  $Y \begin{matrix} \xrightarrow{w_1 v_1} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{w_2 v_2} \end{matrix} Z$  en  $\mathcal{C}$  tales que el siguiente diagrama conmuta en  $FZ$

$$\begin{array}{ccc} Fw_1 u_1(x) & \xrightarrow{Fw_1(\varepsilon_1)} & Fw_1 v_1(y) \\ F\alpha_x \downarrow & & \downarrow F\beta_y \\ Fw_2 u_2(x) & \xrightarrow{Fw_2(\varepsilon_2)} & Fw_2 v_2(y) \end{array}$$

Denotamos la clase de equivalencia módulo esta relación por  $[u, \varepsilon, v]$ , entonces existe una composición bien definida. El pseudo-cono  $FX \xrightarrow{\lambda_X} \mathcal{L}(F)$  manda un objeto  $x \in FX$  al par  $(x, X)$  y un morfismo  $\varepsilon : x \rightarrow x' \in FX$  a la tripla  $[1_X, \varepsilon, 1_X]$ . Dado un morfismo  $u : X \rightarrow Y \in \mathcal{C}$ , entonces  $\lambda_u : \lambda_Y Fu \Rightarrow \lambda_X$  está dada por la tripla  $[u, 1_{Fu(x)}, 1_Y]$ .

Dado un pseudo-cono  $FX \xrightarrow{h_X} \mathcal{D}$  entonces el functor asociado  $\mathcal{L}(F) \xrightarrow{\tilde{h}} \mathcal{D}$  está dado como sigue: en los objetos  $\tilde{h}(x, X) = h_X(x)$ , y un morfismo  $[u, \varepsilon, v] : (x, X) \rightarrow (y, Y)$  se manda a la siguiente composición:

$$h_X(x) \xrightarrow{h_{u,x}^{-1}} h_Z Fu(x) \xrightarrow{h_Z(\varepsilon)} h_Z Fv(y) \xrightarrow{h_{v,y}} h_Y(y)$$

**Lema 1.3.11.** Dada una 2-categoría 2-filtrante  $\mathcal{C}$ , un 2-functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$  y un pseudo-cono  $FX \xrightarrow{h_X} \mathcal{D}$  tal que cada  $h_X$  es fiel. Entonces el functor  $\text{Colim}_{X \in \mathcal{C}} FX \xrightarrow{\tilde{h}} \mathcal{D}$  es fiel.

*Demostración.* Dados morfismos  $(x, X) \xrightarrow[(u_2, \varepsilon_2, v_2)]{(u_1, \varepsilon_1, v_1)} (y, Y)$  tales que  $\tilde{h}(u_1, \varepsilon_1, v_1) = \tilde{h}(u_2, \varepsilon_2, v_2)$ , tenemos que mostrar que  $(u_1, \varepsilon_1, v_1) \sim (u_2, \varepsilon_2, v_2)$ . Como  $\mathcal{C}$  es 2-filtrante entonces hay morfismos  $w_1 : Z_1 \rightarrow Z$   $w_2 : Z_2 \rightarrow Z$  in  $\mathcal{C}$  y 2-celdas inversibles  $X \begin{array}{c} \xrightarrow{w_1 u_1} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{w_2 u_2} \end{array} Z$  y  $Y \begin{array}{c} \xrightarrow{w_1 v_1} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{w_2 v_2} \end{array} Z$

en  $\mathcal{C}$ . Observemos que  $\tilde{h}(u_1, \varepsilon_1, v_1) = \tilde{h}(w_1 u_1, F\beta_y Fw_1(\varepsilon), w_2 v_2)$ , para esto consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} h_X(x) & \xrightarrow{h_{u_1,x}^{-1}} & h_{Z_1} Fu_1(x) & \xrightarrow{h_{Z_1}(\varepsilon)} & h_{Z_1} Fv_1(y) & \xrightarrow{h_{v_1,y}} & h_Y(y) \\ & \searrow^{h_{w_1^{-1}u_1,x}^{-1}} & \downarrow^{h_{w_1,x}^{-1}} & & \uparrow^{h_{w_1,y}} & \nearrow^{h_{w_1 v_1,y}} & \uparrow^{h_{w_2 v_2,y}} \\ & & h_Z Fw_1 u_1(x) & \xrightarrow{h_Z Fw_1(\varepsilon)} & h_Z Fw_1 v_1(y) & \xrightarrow{h_Z F\beta_y} & h_Z Fw_2 v_2(y) \end{array}$$

Los triángulos exteriores superiores conmutan por (PC2), mientras que el cuadrado central conmuta pues  $h_{w_1}$  es una transformación natural y el triángulo inferior de la derecha conmuta por (PC3). Por un argumento similar obtenemos que  $\tilde{h}(u_2, \varepsilon_2, v_2) = \tilde{h}(w_1 u_1, Fw_2(\varepsilon_2)F\alpha_x, w_2 v_2)$ . Usando nuestra hipótesis obtenemos la igualdad:

$$\tilde{h}(w_1 u_1, F\beta_y Fw_1(\varepsilon), w_2 v_2) = \tilde{h}(w_1 u_1, Fw_2(\varepsilon_2)F\alpha_x, w_2 v_2)$$

Se sigue que el diagrama conmuta en  $\mathcal{D}$ :

$$\begin{array}{ccc} h_Z Fw_1 u_1(x) & \xrightarrow{h_Z Fw_1(\varepsilon_1)} & h_Z Fw_1 v_1(y) \\ h_Z F\alpha_x \downarrow & & \downarrow h_Z F\beta_y \\ h_Z Fw_2 u_2(x) & \xrightarrow{h_Z Fw_2(\varepsilon_2)} & h_Z Fw_2 v_2(y) \end{array}$$

Pero como  $h_Z$  es fiel, el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Fw_1u_1(x) & \xrightarrow{Fw_1(\varepsilon_1)} & Fw_1v_1(y) \\ F\alpha_x \downarrow & & \downarrow F\beta_y \\ Fw_2u_2(x) & \xrightarrow{Fw_2(\varepsilon_2)} & Fw_2v_2(y) \end{array}$$

conmuta en  $FZ$ , luego  $(u_1, \varepsilon_1, v_1) \sim (u_2, \varepsilon_2, v_2)$ . Entonces el funtor  $\tilde{h}$  es fiel.  $\square$

**Definición 1.3.12.** Dado  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$  un 2-functor con  $\mathcal{I}$  una 2-categoría 2-filtrante, decimos que  $F$  es **2-final** si cumple las siguientes propiedades:

(F0) Dado  $j \in \mathcal{J}$ , existe un objeto  $i \in \mathcal{I}$  y un morfismo  $j \rightarrow Fi$ .

(F1) Dados dos morfismos paralelos  $j \begin{smallmatrix} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \end{smallmatrix} Fi$  entonces hay un morfismo  $w : i \rightarrow i' \in \mathcal{I}$  y una 2-celda inversible  $\gamma : F(w)u \simeq F(w)v$  in  $\mathcal{J}$ .

(F2) Dadas 2-celdas paralelas  $j \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \alpha \Downarrow \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{v} \end{array} Fi$ , entonces hay un morfismo  $w : i \rightarrow i' \in \mathcal{I}$  tal que  $F(w)\alpha = F(w)\beta$ .

**Teorema 1.3.13.** [D15, Theorem 1.3.9] Dado  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$  un 2-functor 2-final con  $\mathcal{I}$  una 2-categoría 2-filtrante y un 2-functor  $G : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{Cat}$ , entonces el funtor canónico

$$\text{Colim}_{i \in \mathcal{I}} GFi \rightarrow \text{Colim}_{j \in \mathcal{J}} Gj$$

es una equivalencia de categorías.

**Definición 1.3.14.** [DD14, Definition 2.1.1] Dada  $\mathcal{C}$  una 2-categoría. Se define la 2-categoría de 2-pro-objetos, que denotamos  $2\text{-Pro}(\mathcal{C})$  de la siguiente forma:

1. Sus objetos son 2-funtores  $I^{op} \xrightarrow{X} \mathcal{C}$  donde  $I$  es una 2-categoría 2-filtrante pequeña.

Denotamos a los objetos por  $X = (X_i)_{i \in I}$ .

2. Dados  $X = (X_i)_{i \in I}$  y  $Y = (Y_j)_{j \in J}$  2-pro-objetos en  $\mathcal{C}$ , entonces:

$$2\text{-Pro}(\mathcal{C})(X, Y) = \text{Lim}_{j \in J^{op}} \text{Colim}_{i \in I} \mathcal{C}(X_i, Y_j)$$

**Observación 1.3.15.** Dada  $\mathcal{C}$  una 2-categoría, entonces  $2\text{-Pro}(\mathcal{C})$  tiene hom-categorías pequeñas, i.e. es una 2-categoría legítima. Más aún, hay un 2-functor canónico  $\mathcal{C} \xrightarrow{c} 2\text{-Pro}(\mathcal{C})$  que manda un objeto al 2-pro-objeto constante.

**Notación 1.3.16.** Para expresiones con 2-celdas ocasionalmente utilizamos el cálculo de ascensores. Esta es una notación gráfica creada por Eduardo J. Dubuc. Los objetos se omiten, las identidades horizontales se dejan como espacios en blanco, las 2-celdas se denotan como celdas y las 2-celdas identidades por una doble línea. Es importante remarcar que cuando una 2-celda entre flechas distintas es la identidad, se escribe con el label “=”. Las composiciones se deben leer de arriba hacia abajo y de derecha a izquierda. Por ejemplo la siguiente ecuación es la igualdad básica del cálculo de ascensores:

$$\begin{array}{c}
 f' \quad f \\
 \backslash \quad / \\
 \alpha' \\
 / \quad \backslash \\
 g' \quad f \\
 \parallel \quad \parallel \\
 g' \quad g \\
 \backslash \quad / \\
 \alpha
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 f' \quad f \\
 \parallel \quad \parallel \\
 f' \quad g \\
 \backslash \quad / \\
 \alpha' \\
 / \quad \backslash \\
 g' \quad g \\
 \parallel \quad \parallel \\
 g' \quad g
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 f' \quad f \\
 \backslash \quad / \\
 \alpha' \\
 / \quad \backslash \\
 g' \quad g \\
 \parallel \quad \parallel \\
 g' \quad g
 \end{array}$$

Esto permite mover celdas hacia arriba o abajo cuando no hay obstáculos, como si fueran ascensores. De esta forma movemos celdas para formar configuraciones que forman ecuaciones válidas para probar una nueva ecuación a partir de las ya conocidas.

## 2. Conjuntos simpliciales y teoría de homotopía

En esta sección revisamos la teoría de conjuntos simpliciales y objetos simpliciales, incluimos algunas demostraciones, particularmente para el esqueleto y coesqueleto y otros hechos que son relevantes para el propósito de esta tesis. La mayoría de estos contenidos están basados en [JT08] la cual creemos es la mejor exposición del tema hasta ahora, una referencia muy completa es [GJ99] además de las referencias clásicas [GZ67, May67].

### 2.1. Ejemplos básicos y el Lema de Eilenberg-Zilber

**Definición 2.1.1.** La categoría  $\Delta$  es la categoría de ordinales finitos no vacíos y morfismos las funciones que preservan el orden. Denotamos sus objetos por  $[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Hay morfismos distinguidos, los monomorfismos  $[n-1] \xrightarrow{d^i} [n]$  (las cocaras) y los epimorfismos  $[n+1] \xrightarrow{s^i} [n]$  (las codegeneraciones) dados por:

$$d^i(t) = \begin{cases} t & \text{si } t < i \\ t+1 & \text{si } t \geq i \end{cases} \quad s^i(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq i \\ t-1 & \text{si } t > i \end{cases}$$

para  $0 \leq i \leq n$ . Estos morfismos satisfacen las siguientes ecuaciones (las identidades cosimpliciales):

$$\begin{aligned} d^j d^i &= d^i d^{j-1}, \quad i < j \\ s^j s^i &= s^i s^{j+1}, \quad i \leq j \\ s^j d^i &= \begin{cases} 1, & i = j, j+1 \\ d^i s^{j-1}, & i < j \\ d^{i-1} s^j, & i > j+1 \end{cases} \end{aligned}$$

**Lema 2.1.2.** Todo morfismo  $[m] \xrightarrow{\alpha} [n]$  se puede descomponer como  $\alpha = d^{i_s} d^{i_{s-1}} \dots d^{i_1} s^{j_t} \dots s^{j_2} s^{j_1}$  con  $n \geq i_s > \dots > i_1 \geq 0$ ,  $0 \leq j_t < \dots < j_1 < m$  y  $n = m - t + s$  de forma única.

*Demostración.* Los  $j$ 's son los elementos  $j \in [m]$  para los cuales  $\alpha(j) = \alpha(j+1)$  y los  $i$ 's son los valores  $i \in [n]$  que no son tomados por  $\alpha$ . □

**Observación 2.1.3.** Los epimorfismos en  $\Delta$  son simplemente las funciones sobreyectivas que preservan el orden y pueden ser escritas como composición de codegeneraciones, por las identidades simpliciales cada epimorfismo tiene una sección. Similarmente los monomorfismos son funciones inyectivas que preservan el orden y estos tienen una retracción.

**Definición 2.1.4.** Un objeto simplicial en una categoría  $\mathcal{M}$  es un funtor  $\Delta^{op} \xrightarrow{\mathcal{X}} \mathcal{M}$ , un morfismo de objetos simpliciales es una transformación natural. Luego la categoría de objetos simpliciales en  $\mathcal{M}$  es la categoría de funtores  $\mathcal{M}^{\Delta^{op}}$  y es usualmente denotada por  $s\mathcal{M}$ . En particular  $s\mathcal{S}$  es la categoría de conjuntos simpliciales.

**Notación 2.1.5.** Vamos a usar el tipo de letra Eucal  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \dots$  exclusivamente para objetos simpliciales en una categoría  $\mathcal{M}$  como una abreviatura que excluye el subíndice “círculo sólido”, entonces  $\mathcal{X}$  y  $X_\bullet$  son dos formas equivalentes de denotar el mismo objeto simplicial, y su objeto de  $n$ -simplices es  $X_n \in \mathcal{M}$ .

Por el lema previo, dar un objeto simplicial  $\mathcal{X} \in s\mathcal{M}$  es lo mismo que especificar un diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \xleftarrow{d_0} & & \\
 & & & & \xleftrightarrow{\quad} & & \\
 X_0 & \xleftrightarrow{d_0} & X_1 & \xleftrightarrow{d_0} & X_2 & \xleftrightarrow{d_0} & X_3 \quad \dots \\
 & \xleftarrow{d_1} & & \xleftarrow{d_2} & & \xleftarrow{d_3} & \\
 & & & & & & 
 \end{array}$$

en  $\mathcal{M}$  tal que las identidades simpliciales valen. Un morfismo de objetos simpliciales está especificado por morfismos  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  en  $\mathcal{M}$  tales que  $f_{n-1}d_i = d_i f_n$  y  $f_{n+1}s_i = s_i f_n$  para todo  $0 \leq i \leq n$ .

Dado un objeto simplicial  $\mathcal{X} \in s\mathcal{M}$ , el objeto  $X_n$  se llama el objeto de  $n$ -simplices ( también llamados vértices para  $n = 0$  y lados para  $n = 1$ ). Formulamos las indentidades simpliciales explícitamente:

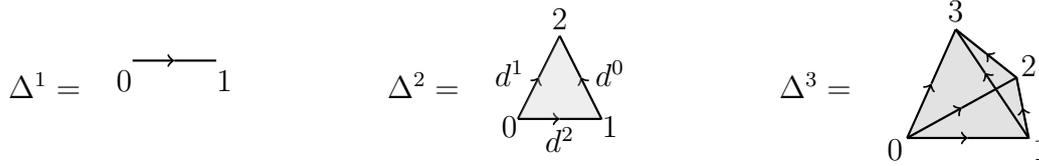
**Corolario 2.1.6.** Un objeto simplicial  $\mathcal{X}$  en una categoría  $\mathcal{M}$  está dado por una sucesión de objetos  $X_n$  para  $n \geq 0$ , con morfismos  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ ,  $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$  para  $0 \leq i \leq n$  tales que las identidades simpliciales valen:

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i, \quad i < j$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i, \quad i \leq j$$

$$d_i s_j = \begin{cases} 1, & i = j, j + 1 \\ s_{j-1} d_i, & i < j \\ s_j d_{i-1}, & i > j + 1 \end{cases}$$

**Ejemplo 2.1.7.** Para cada  $[n] \in \Delta$  existe un conjunto simplicial representable denotado  $\Delta^n \in s\mathcal{S}$ , dado por los conjuntos  $\Delta_k^n = \Delta([k], [n])$ . Los representamos gráficamente de la siguiente forma:



Dado un conjunto simplicial  $\mathcal{X} \in s\mathcal{S}$ , por Yoneda un  $n$ -simplex  $x \in X_n$  es lo mismo que un morfismo  $\Delta^n \xrightarrow{x} \mathcal{X}$ . La naturalidad de Yoneda dice que:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} \xrightarrow{d^i} \Delta^n \xrightarrow{x} \mathcal{X} & \Delta^{n+1} \xrightarrow{s^i} \Delta^n \xrightarrow{x} \mathcal{X} & \Delta^n \xrightarrow{x} \mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y} \\ \searrow d_i(x) \quad \nearrow & \searrow s_i(x) \quad \nearrow & \searrow f(x) \quad \nearrow \end{array}$$

Esto justifica el uso de la notación de Yoneda  $d_i(x) = x d^i$  y  $s_i(x) = x s^i$ .

**Ejemplo 2.1.8.** Sea  $\mathbf{Top}$  la categoría de espacios topológicos. Existe un funtor  $\Delta \xrightarrow{|\cdot|} \mathbf{Top}$  (i.e. un objeto cosimplicial) dado por:

$$|\Delta^n| = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum t_i = 1, t_i \geq 0\}$$

Entonces hay una adjunción  $s\mathcal{S} \xrightleftharpoons[S]{|\cdot|} \mathbf{Top}$ , donde para un espacio topológico  $X$  obtenemos un conjunto simplicial llamado el **conjunto simplicial singular** de  $X$ , dado por  $S(X)_n = \mathbf{Top}(|\Delta^n|, X)$ , i.e. un  $n$ -simplex está dado por una función continua  $\sigma : |\Delta^n| \rightarrow X$ . Las caras y degeneraciones están dadas por pre-composición, donde  $d^i$  incluye un 0 en la  $i$ -ésima coordenada y  $s^i$  suma la  $i$ -ésima e  $i + 1$ -ésima coordenadas, explícitamente:

$$d_i(\sigma)(t_0, \dots, t_{n-1}) = \sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_n)$$

$$s_i(\sigma)(t_0, \dots, t_{n+1}) = \sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n)$$

El adjunto a izquierda da un espacio topológico asociado a cualquier conjunto simplicial, es llamado la **realización geométrica**, existe y por la Observación 1.1.21, tenemos la fórmula  $|\mathcal{X}| = \int^{[n] \in \Delta} X_n \cdot |\Delta^n|$ . Informalmente,  $|\mathcal{X}|$  está dado por asociar a cada  $n$ -simplex  $x \in X_n$  el espacio  $|\Delta^n|$  y pegándolos a lo largo de sus caras y degeneraciones.

**Ejemplo 2.1.9.** Hay un funtor  $\Delta \longrightarrow \mathbf{Cat}$  (i.e. un objeto cosimplicial) que asocia a cada ordinal una categoría dada por el diagrama:

$$[n] = 0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n-1 \rightarrow n$$

i.e. cada ordinal es un poset y un poset determina una categoría. Esto determina una adjunción  $s\mathcal{S} \xrightleftharpoons[N]{\tau_1} \mathbf{Cat}$  como antes. Dada  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña, hay un conjunto simplicial  $N\mathcal{C}$ , el nervio de la categoría  $\mathcal{C}$  dado por  $N\mathcal{C}_n = \mathbf{Cat}([n], \mathcal{C})$ , i.e. un  $n$ -simplex está dado por una cadena de  $n$  morfismos componibles en  $\mathcal{C}$ :

$$C_0 \xrightarrow{f_1} C_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{f_n} C_n$$

Las caras y degeneraciones están dadas explícitamente por:

$$d_i(f_1, \dots, f_n) = \begin{cases} (f_2, \dots, f_n) & \text{si } i = 0 \\ (f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}f_i, f_{i+2}, \dots, f_n) & \text{si } 0 < i < n \\ (f_1, \dots, f_{n-1}) & \text{si } i = n \end{cases}$$

$$s_i(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_i, 1_{C_i}, f_{i+1}, \dots, f_n)$$

El adjunto a izquierda  $\tau_1$  da una categoría asociada a cualquier conjunto simplicial, llamada su **categoría fundamental**, que calcularemos explícitamente luego.

**Ejemplo 2.1.10.** Un **complejo simplicial abstracto** está dado por  $K = (V, S)$ , donde  $V$  es un conjunto llamado el conjunto de vértices, y  $S \subset \mathcal{P}_{<\infty}(V)$  es un conjunto de algunos subconjuntos finitos no vacíos de vértices, llamados simplices, que satisfacen lo siguiente: si  $\sigma \in S$  y  $\tau \subset \sigma$  entonces  $\tau \in S$ .

Supongamos que  $V$  es totalmente ordenado. Entonces definamos un conjunto simplicial  $\mathcal{K}$  como sigue,  $K_n$  es el conjunto de cadenas de  $n+1$  vértices  $[v_0, \dots, v_n]$ , i.e.  $v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n$  (posiblemente con repeticiones) tales que  $\{v_0, \dots, v_n\} \in S$ . Las caras y degeneraciones están dadas por las fórmulas:

$$d_i[v_0, \dots, v_n] = [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$$

$$s_i[v_0, \dots, v_n] = [v_0, \dots, v_i, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n]$$

Notar que estos morfismos dependen del orden total.

**Definición 2.1.11.** Dado  $\mathcal{X}$  un conjunto simplicial. Un  $n$ -simplex  $x \in X_n$  es **degenerado** si hay un  $m < n$ , un epimorfismo  $[n] \xrightarrow{s} [m]$  e  $y \in X_m$  tales que:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{x} & \mathcal{X} \\ s \downarrow & \nearrow y & \\ \Delta^m & & \end{array}$$

Equivalentemente si  $x = s_i(y)$  para algún  $y \in X_{n-1}$ .

**Lema 2.1.12.** (Eilenberg-Zilber lemma) Dado  $\mathcal{X}$  un conjunto simplicial. Para cada  $n$ -simplex  $x \in X_n$  hay un epimorfismo  $[n] \xrightarrow{s} [m]$  y un  $y \in X_m$  no degenerado tal que  $x = ys$ , además tal par  $(s, y)$  es único.

**Ejemplo 2.1.13.** Los  $k$ -simplices no degenerados de  $\Delta^n$  están dados por inclusiones (en particular  $k \leq n$ )  $\Delta^k \xrightarrow{d} \Delta^n$  donde  $d = d^{i_l} d^{i_{l-1}} \dots d^{i_1}$  con  $l = n - k$  y los  $i$ 's son los  $n - k$  vértices que no están en la imagen de  $d$ . Esto se sigue de la factorización y del hecho que si hubiese un  $s^i$  entonces sería degenerado. Podemos denotar  $d$  como  $d_{[i_1, \dots, i_l]}$  y son llamadas las caras de  $\Delta^n$ . En particular  $\Delta^n$  tiene solamente un  $n$ -simplex no-degenerado dado por  $\Delta^n \xrightarrow{1_{[n]}} \Delta^n$ . Los  $(n - 1)$ -simplices no-degenerados en  $\Delta^n$  están dados por las caras  $\Delta^{n-1} \xrightarrow{d^i} \Delta^n$  para  $0 \leq i \leq n$ . Además  $\Delta^n_0 = \Delta([0], [n])$  está dado por las  $n + 1$  inclusiones, luego tiene  $n + 1$  vértices. En general, hay  $\binom{n+1}{k}$   $k$ -simplices no-degenerados en  $\Delta^n$ .

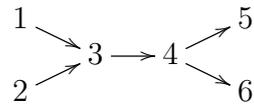
**Ejemplo 2.1.14.** Dado  $\mathcal{P}$  un poset, describimos su nervio  $N\mathcal{P}$ , un  $n$ -simplex está dado por una cadena de longitud  $n + 1$

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$$

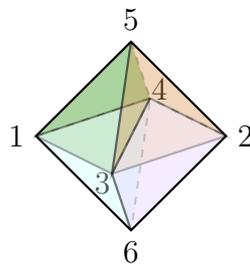
con  $x_i \in \mathcal{P}$ . Además, es un  $n$ -simplex no degenerado si los elementos de la cadena son todos diferentes, i.e. el morfismo de posets  $[n] \xrightarrow{x} \mathcal{P}$  es inyectivo. Como  $N$  preserva monomorfismos, entonces  $\Delta^n \xrightarrow{x} N\mathcal{P}$  es también inyectivo. Consideremos el caso donde  $\mathcal{P}$  es finito, entonces hay un número finito de cadenas maximales  $c_1, \dots, c_r$ , y cada cadena está contenida en una cadena maximal. Si la cadena maximal  $c_i$  es de longitud  $n_i + 1$ , tenemos asociado un simplex  $\Delta^{n_i} \xrightarrow{x_i} N\mathcal{P}$ . Además, estas cadenas se intersecan en cadenas  $c_i \cap c_j$  de longitud  $n_{i,j} + 1$ , luego tenemos una presentación de  $N\mathcal{P}$  como el siguiente coegalizador de su kernel pair:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq r} \Delta^{n_{i,j}} \rightrightarrows \sum_{1 \leq i \leq r} \Delta^{n_i} \longrightarrow N\mathcal{P}$$

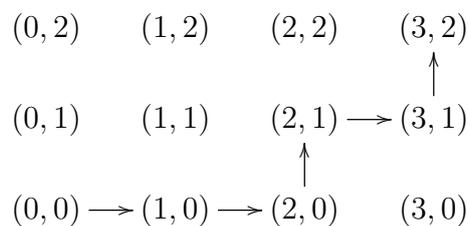
Por ejemplo consideremos el siguiente poset  $\mathcal{P}$ :



Entonces tenemos cuatro cadenas maximales de longitud 4 que corresponden a 3-simplices. Estos simplices se pegan a lo largo de sus intersecciones, por ejemplo las cadenas  $[1, 3, 4, 5]$  y  $[1, 3, 4, 6]$  se pegan a lo largo de su cara común  $[1, 3, 4]$ . Todos los 3-simplices no-degenerados se pegan por el lado  $[3, 4]$ . Si tomamos la realización geométrica del nervio de este poset, este es  $B\mathcal{P} = |N\mathcal{P}|$  y se llama el **espacio clasificante** del poset, en este caso da como resultado la siguiente subdivisión del octaedro:



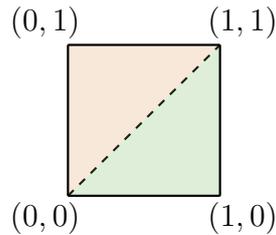
Un ejemplo importante es el dado por el poset  $\mathcal{P} = [n] \times [m]$ . Como el nervio es adjunto a derecha, el nervio de este poset es  $\Delta^n \times \Delta^m$ . Una cadena maximal está dada por un camino de  $(0, 0)$  a  $(n, m)$  en el lattice de puntos en el plano con coordenadas enteras, donde en cada punto  $(i, j)$  del camino, el siguiente es  $(i + 1, j)$  o  $(i, j + 1)$ , i.e. nos movemos un paso a la derecha o hacia arriba. Por ejemplo, para  $n = 3, m = 2$  tenemos la siguiente cadena maximal:



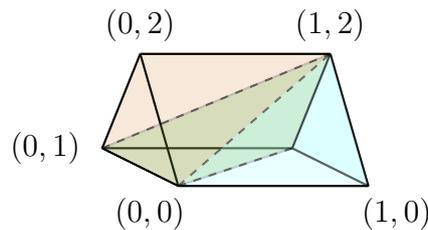
Todas las cadenas maximales son de longitud  $n + m + 1$ , luego estas son  $n + m$ -simplices no-degenerados. Podemos identificar las cadenas maximales con **shuffles**, estas son particiones del conjunto  $\{1, 2, \dots, n + m\}$  en dos conjuntos disjuntos  $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  y  $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_m\}$  de tamaños  $n$  y  $m$  respectivamente. La identificación es como sigue, en una cadena maximal empezamos en el  $(0, 0)$  y hacemos  $n$  pasos a derecha y  $m$  pasos hacia arriba en algún orden finalizando en  $(n, m)$ , si en el  $k$ -ésimo movimiento hacemos un paso a la derecha entonces

$k \in \sigma$ , si hacemos un paso hacia arriba entonces  $k \in \tau$ , esto determina la partición. Claramente esto es biyectivo, luego hay  $\binom{n+m}{n}$  cadenas maximales.

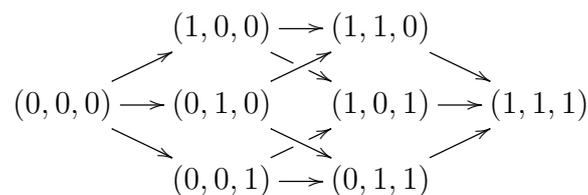
Por ejemplo el poset  $\mathcal{P} = [1] \times [1]$  determina un conjunto simplicial con dos 2-simplices no degenerados que corresponden a las cadenas maximales de longitud 3. Estos se pegan a lo largo de su intersección la cual es un 1-simplex, su espacio clasificante  $|\Delta^1 \times \Delta^1|$  nos da la siguiente subdivisión de  $|\Delta^1| \times |\Delta^1|$ :



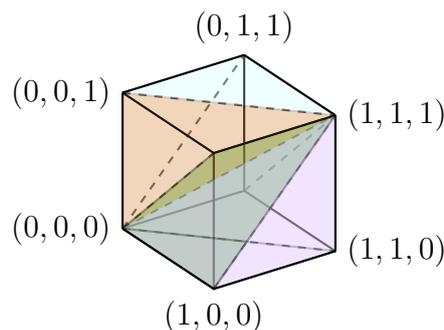
Otro ejemplo pequeño está dado por  $\mathcal{P} = [1] \times [2]$ , esto nos da un conjunto simplicial con tres 3-simplices no degenerados, su espacio clasificante  $|\Delta^1 \times \Delta^2|$  da la siguiente subdivisión de  $|\Delta^1| \times |\Delta^2|$ :



Un último ejemplo es el poset  $\mathcal{P} = [1] \times [1] \times [1]$ , está dada por el diagrama:



Su espacio clasificante es una subdivisión del cubo por seis 3-simplices (observar que esta subdivisión es simétrica, luego el lector puede determinar el otro lado):



El hecho que la realización geométrica conmute con productos de simplices no es particular de estos casos, vale en general:

**Proposición 2.1.15.** [GZ67][Chapter 3, 3.4] Dados  $n, m \geq 0$ , los espacios topológicos  $|\Delta^n \times \Delta^m|$  y  $|\Delta^n| \times |\Delta^m|$  son homeomorfos.

Esta conmutación de productos de la realización geométrica se extiende a todos los conjuntos simpliciales, siempre que trabajemos en una **categoría de espacios conveniente**, por ejemplo en los espacios compactamente generados o los  $k$ -espacios. Sin embargo nos quedaremos en el caso simplicial y no usaremos técnicas topológicas por lo que no daremos más detalles de este caso, pero el lector interesado puede consultar [CHT][Chapter 6, 6.1].

## 2.2. Esqueleto y Coesqueleto

**Definición 2.2.1.** Denotemos  $\Delta_{\leq n}$  la subcategoría plena de ordinales menores o iguales que  $n$  y sea  $\mathcal{M}$  completa y cocompleta, entonces la inclusión  $\Delta_{\leq n} \subset \Delta$  induce un funtor por restricción  $\text{res}_n = i^* : \mathcal{M}^{\Delta_{op}} \rightarrow \mathcal{M}^{\Delta_{\leq n}^{op}}$  el cual tiene adjuntos a izquierda y a derecha  $\text{sk}_n \dashv \text{res}_n \dashv \text{cosk}_n$  dados por las extensiones de Kan a izquierda y a derecha:

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\text{sk}_n} & \\ \mathcal{M}^{\Delta_{op}} & \xrightarrow{\text{res}_n} & \mathcal{M}^{\Delta_{\leq n}^{op}} \\ & \xleftarrow{\text{cosk}_n} & \end{array}$$

**Observación 2.2.2.** Supongamos que  $\mathcal{M}$  es completa y cocompleta, entonces dado  $\mathcal{X} \in \mathcal{M}^{\Delta_{\leq n}^{op}}$ , via el Teorema 1.1.18 tenemos la fórmula:

$$(\text{sk}_n \mathcal{X})_m = \int^{[k] \in \Delta_{\leq n}} \Delta_m^k \cdot X_k$$

$$(\text{cosk}_n \mathcal{X})_m = \int_{[k] \in \Delta_{\leq n}} \{\Delta_k^m, X_k\}$$

También por la Proposición 1.1.19 tenemos que  $(\text{sk}_n \mathcal{X})_m = X_m = (\text{cosk}_n \mathcal{X})_m$  para  $m \leq n$ . Por la fórmula de la Proposición 1.1.7 para coends podemos describir el  $n$ -esqueleto como el coegalizador

$$\sum_{\alpha: [k'] \rightarrow [k] \in \Delta_{\leq n}} \Delta_m^{k'} \cdot X_k \rightrightarrows \sum_{k \leq n} \Delta_m^k \cdot X_k \longrightarrow (\text{sk}_n \mathcal{X})_m$$

Dualmente, el  $n$ -coesqueleto está dada por el siguiente egalizador:

$$(\text{cosk}_n \mathcal{X})_m \longrightarrow \prod_{k \leq n} \{\Delta_k^m, X_k\} \rightrightarrows \prod_{\alpha: [k] \rightarrow [k'] \in \Delta_{\leq n}} \{\Delta_{k'}^m, X_{k'}\}$$

**Observación 2.2.3.** En efecto de la fórmula de la Observación 2.2.2 obtenemos que  $(\text{cosk}_n \mathcal{X})_m$  es en verdad un límite finito y  $(\text{sk}_n \mathcal{X})_m$  es un colímite finito. Por tanto no necesitamos todas las hipótesis de completitud para la existencia de estos adjuntos. Pero el hecho que  $(\text{cosk}_n \mathcal{X})_m$  es un límite finito va a ser crucial mas adelante por sus propiedades de exactitud.

**Observación 2.2.4.** Damos una descripción explícita para un conjunto simplicial (truncado)  $X \in \mathcal{S}^{\Delta_{\leq n}^{op}}$ . Si  $m > n$  entonces el coproducto está dada por pares  $(x, \sigma)$  para  $\sigma : [m] \rightarrow [k], k \leq n$ . La relación de equivalencia está generada por  $(x, \alpha\sigma) \sim (x\alpha, \sigma)$  para  $x \in X_k, \sigma : [m] \rightarrow [k'], \alpha : [k'] \rightarrow [k]$ . Pero dado  $(x, \sigma)$ , entonces  $\sigma = ds$  para  $s : [m] \rightarrow [k']$  epi, luego  $(x, \sigma) \sim (xd, s)$  donde  $y = xd$  es no degenerado. Entonces  $(\text{sk}_n \mathcal{X})_m$  son simplemente  $m$ -simplices degenerados dados por  $k$ -simplices no degenerados con  $k \leq n$ .

Además, usando el Lemma de Eilenberg-Zilber 2.1.12 se sigue que el  $n$ -esqueleto define un subcomplejo:

**Proposición 2.2.5.** Para cada conjunto simplicial  $\mathcal{X}$ , el morfismo  $(\text{sk}_n \text{res}_n \mathcal{X})_m \rightarrow X_m$  es inyectivo para todo  $m$ .

**Observación 2.2.6.** Damos una descripción explícita de  $(\text{cosk}_n \mathcal{X})_m$  para un conjunto simplicial (truncado). Si  $m > n$  un  $m$ -simplex está dada por una tupla  $(x_\sigma)_\sigma$  con  $x_\sigma \in X_k$  para cada  $\sigma : [k] \rightarrow [m], k \leq n$  sujeto a la compatibilidad que si  $\sigma = \sigma'\alpha$  para  $\alpha : [k] \rightarrow [k']$  con  $k' \leq n$ , entonces  $x_\sigma = x_{\sigma'}\alpha$ . Pero cualquier  $\sigma : [k] \rightarrow [m]$  se puede factorizar como  $\sigma = d\alpha$  donde  $d : [n] \rightarrow [m]$  es mono entonces es suficiente definir  $(x_d)_d$  compatibles para cada mono  $d : [n] \rightarrow [m]$ . En particular, describimos  $(\text{cosk}_{n-1} X)_n$ , un  $n$ -simplex  $x$  está dado por  $x_i \in X_{n-1}$  para  $i = 0, \dots, n$ , tal que  $x_i d^{j-1} = x_j d^i$  para  $i \leq j$ . Estas condiciones de compatibilidad implican todas las otras, pues si  $d^i \alpha = d^j \beta$ , entonces se factoriza como sigue  $\alpha = ds, \beta = d's'$ . Por unicidad se sigue que  $d^i d = d^j d'$  y  $s = s'$ . Como  $d^i d$  no toma el valor  $i$  y  $d^j d'$  no toma el valor  $j$ , tenemos factorizaciones  $d^i d = d^i d^{j-1} \hat{d}$  y  $d^j d' = d^j d^i \tilde{d}$ . Como  $d^i d^{j-1} = d^j d^i$  es un monomorfismo se sigue que  $\hat{d} = \tilde{d}$ . Así, hemos reducido la descripción del coesqueleto al siguiente egalizador de conjuntos:

$$(\text{cosk}_{n-1} \mathcal{X})_n \longrightarrow \prod_{i=0}^n X_{n-1} \rightrightarrows \prod_{0 \leq i < j \leq n} X_{n-2}$$

donde los morfismos paralelos son los obvios que definen la compatibilidad.

**Observación 2.2.7.** La misma descripción vale para el coesqueleto en cualquier categoría finitamente completa  $\mathcal{M}$ , simplemente hacemos el mismo argumento con los morfismos. Un morfismo  $Z \xrightarrow{x} (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{X})_n$  está dado por morfismos compatibles  $Z \xrightarrow{x_\sigma} X_k$  para cada  $\sigma : [k] \rightarrow [n]$ ,  $k \leq n-1$ . Como antes, la compatibilidad se reduce a dar  $Z \xrightarrow{x_i} X_{n-1}$  para  $i = 0, \dots, n$  tal que  $x_i d^{j-1} = x_j d^i$  para  $0 \leq i < j \leq n$  donde abusamos de la notación y seguimos usando la notación de Yoneda i.e.  $x_i d^{j-1} = d_{j-1}(x_i)$ . Esto justifica que si interpretamos los morfismos como variables la misma descripción que en la Observación 2.2.6 vale en una categoría cualquiera  $\mathcal{M}$ , pero donde los egalizadores y productos son los de la categoría  $\mathcal{M}$ . Así, describimos el coesqueleto como el siguiente egalizador:

$$(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{X})_n \longrightarrow \prod_{i=0}^n X_{n-1} \rightrightarrows \prod_{0 \leq i < j \leq n} X_{n-2}$$

**Observación 2.2.8.** Equivalentemente, esto también se puede ver usando la fórmula de límites pesados como límites en la Proposición 1.1.16 y observando que el cálculo con las compatibilidades da un argumento de cofinalidad por la Proposición 1.1.26. Dualmente, se puede describir  $(\text{sk}_{n-1}\mathcal{X})_n$  como el siguiente coegalizador:

$$\sum_{[n] \rightarrow [n-2]} X_{n-2} \rightrightarrows \sum_{[n] \rightarrow [n-1]} X_{n-1} \longrightarrow (\text{sk}_{n-1}\mathcal{X})_n$$

**Notación 2.2.9.** Dado  $\mathcal{X} \in s\mathcal{M}$  abusamos de la notación y escribimos  $\text{sk}_n \mathcal{X}$  (resp.  $\text{cosk}_n \mathcal{X}$ ), en vez de  $\text{sk}_n \text{res}_n \mathcal{X}$  (resp.  $\text{cosk}_n \text{res}_n \mathcal{X}$ ). Observemos que como endofuntores de  $s\mathcal{M}$  tenemos una adjunción  $\text{sk}_n \dashv \text{cosk}_n$  pues

$$\mathcal{M}^{\Delta^{op}}(\text{sk}_n \mathcal{X}, \mathcal{Y}) \simeq \mathcal{M}^{\Delta_{\leq n}^{op}}(\text{res}_n \mathcal{X}, \text{res}_n \mathcal{Y}) \simeq \mathcal{M}^{\Delta^{op}}(\mathcal{X}, \text{cosk}_n \mathcal{Y})$$

**Observación 2.2.10.** En particular si aplicamos esta adjunción en  $\Delta^n$  y un conjunto simplicial  $\mathcal{X}$  obtenemos que:

$$(\text{cosk}_n \mathcal{X})_m \simeq s\mathcal{S}(\Delta^m, \text{cosk}_n \mathcal{X}) \simeq s\mathcal{S}(\text{sk}_n \Delta^m, \mathcal{X})$$

Luego  $(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{X})_n \simeq s\mathcal{S}(\text{sk}_{n-1}\Delta^n, X)$ . Pero el cálculo anterior en las Observaciones 2.2.6 y 2.2.7 muestran que un elemento de  $(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{X})_n$  está dado por  $(x_0, \dots, x_n)$  tal que  $x_i d^{j-1} = x_j d^i$  para  $0 \leq i < j \leq n$ . Por el lema de Yoneda, esto muestra que  $\text{sk}_{n-1}\Delta^n$  es el coegalizador

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} \Delta^{n-2} \rightrightarrows \sum_{0 \leq i \leq n} \Delta^{n-1} \longrightarrow \text{sk}_{n-1}\Delta^n$$

donde los morfismos están dados por coproductos de las cocaras. Para  $\mathcal{M}$  general obtenemos una fórmula similar para el coesqueleto, por medio del Lema 1.1.22:

$$(\text{cosk}_n \mathcal{X})_m \simeq \{\text{sk}_n \Delta^m, \mathcal{X}\}_{\Delta^{op}}$$

Recíprocamente, si uno muestra primero la fórmula de  $\text{sk}_{n-1} \Delta^n$  como un coegalizador, se recupera la fórmula para  $\text{cosk}_{n-1} X_n$  por la cocontinuidad en los pesos de los límites pesados y respectivamente colímites (ver Lema 1.1.15).

**Notación 2.2.11.** Denotamos  $\partial \Delta^n = \text{sk}_{n-1} \Delta^n$  pues por la fórmula dada arriba, es el 'borde' del  $n$ -simplex. Está formado por el pegado de sus caras,  $n - 1$ -simplices a lo largo del borde  $n - 2$ -simplices.

No es para sorprenderse que tenemos la siguiente descripción:

**Observación 2.2.12.** Esto simplemente dice que un  $m$ -simplex  $\sigma$  está en  $\text{sk}_{n-1} \Delta^n$  (como un subcomplejo de  $\Delta^n$ ) si y solo si tiene una factorización a través de una de sus caras:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^m & \xrightarrow{\sigma} & \Delta^n \\ \sigma' \downarrow & \nearrow d^i & \\ \Delta^{n-1} & & \end{array}$$

Más aún, la realización geométrica  $|\partial \Delta^n|$  es el borde geométrico de  $|\Delta^n|$  pues conmuta con colímites. Por ejemplo  $|\partial \Delta^2|$  es el siguiente subespacio de  $|\Delta^2|$ :

$$|\partial \Delta^2| = \triangle \hookrightarrow \triangle = |\Delta^2|$$

**Proposición 2.2.13.** Sea  $\mathcal{M}$  una categoría finitamente completa y cocompleta, entonces dado  $\mathcal{X} \in s\mathcal{M}$  hay isomorfismos canónicos  $\text{sk}_n \text{sk}_m \mathcal{X} \simeq \text{sk}_n \mathcal{X}$  y  $\text{cosk}_m \text{cosk}_n \mathcal{X} \simeq \text{cosk}_n \mathcal{X}$  si  $n \leq m$ . Dualmente, si  $n \geq m$  entonces  $\text{cosk}_m \text{cosk}_n \mathcal{X} \simeq \text{cosk}_m \mathcal{X}$  y  $\text{sk}_n \text{sk}_m \mathcal{X} \simeq \text{sk}_m \mathcal{X}$ .

*Demostración.* Recordemos que de la Observación 2.2.2  $(\text{sk}_n \mathcal{X})_k \simeq X_k$  para todo  $k \leq n$ . Por tanto obtenemos un isomorfismo  $\text{res}_n \text{sk}_m \text{res}_m \mathcal{X} \simeq \text{res}_n \mathcal{X}$  si  $n \leq m$ , entonces  $\text{sk}_n \text{sk}_m \mathcal{X} \simeq \text{sk}_n \mathcal{X}$  si  $n \leq m$ . El isomorfismo en el coesqueleto se tiene formalmente de la adjunción  $\text{sk}_n \dashv \text{cosk}_n$ . Dada la adjunción  $\text{sk}_n \text{sk}_m \dashv \text{cosk}_m \text{cosk}_n$  se sigue que  $\text{cosk}_m \text{cosk}_n \mathcal{X} \simeq \text{cosk}_n \mathcal{X}$  si  $n \leq m$ .

Para los duales, tenemos por la Observación 2.2.2 que  $(\text{cosk}_n \mathcal{X})_k = X_k$  par  $k \leq n$ . Entonces tenemos un isomorfismo  $\text{res}_m \text{cosk}_n \text{res}_n \mathcal{X} \simeq \text{res}_m \mathcal{X}$  si  $n \geq m$ . Entonces  $\text{cosk}_m \text{cosk}_n \mathcal{X} \simeq \text{cosk}_m \mathcal{X}$  si  $n \geq m$ . □

La importancia del esqueleto y coesqueleto es que nos da una forma precisa de hacer construcciones inductivas de objetos simpliciales. Esto se expresa en el siguiente lema el cual es una paráfrasis de [RV14][Lemma 3.10] al caso particular de objetos simpliciales.

**Lema 2.2.14. (Definición inductiva de objetos simpliciales)** Dado un objeto simplicial truncado  $\mathcal{X} \in \mathcal{M}^{\Delta_{\leq n-1}^{op}}$ , un objeto  $X_n \in \mathcal{M}$  y una factorización:

$$(\mathrm{sk}_{n-1}\mathcal{X})_n \xrightarrow{l_n} X_n \xrightarrow{\mu_n} (\mathrm{cosk}_{n-1}\mathcal{X})_n$$

$$\xrightarrow{\tau_n}$$

donde  $\tau$  es el morfismo natural dado por la adjunción  $\mathrm{sk}_{n-1} \dashv \mathrm{cosk}_{n-1}$ . Entonces, estos datos determinan de forma única un objeto simplicial truncado  $\mathcal{X} \in \mathcal{M}^{\Delta_{\leq n}^{op}}$  cuya restricción a grado  $n-1$  es el diagrama original.

*Demostración.* La idea es la siguiente, si  $\mathcal{X}$  estuviera definido hasta grado  $n$  entonces el **matching map**  $X_n \xrightarrow{\mu_n} (\mathrm{cosk}_{n-1}\mathcal{X})_n$  (respectivamente el **latching map**  $(\mathrm{sk}_{n-1}\mathcal{X})_n \xrightarrow{l_n} X_n$ ) está dado por la unidad de la adjunción  $\mathrm{res}_{n-1} \dashv \mathrm{cosk}_{n-1}$  (resp. la counidad de la adjunción  $\mathrm{sk}_{n-1} \dashv \mathrm{res}_{n-1}$ ) en grado  $n$ . Para extender  $\mathcal{X}$  a un objeto simplicial truncado hasta grado  $n$  tenemos que definir las caras  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$  para  $0 \leq i \leq n$  y degeneraciones  $s_i : X_{n-1} \rightarrow X_n$  para  $0 \leq i \leq n-1$ . Pero el matching map nos da una factorización del morfismo dada por todas las caras como sigue:

$$X_n \xrightarrow{\mu_n} (\mathrm{cosk}_{n-1}\mathcal{X})_n \xrightarrow{\hookrightarrow} \prod_{i=0}^n X_{n-1}$$

$$\xrightarrow{(d_0, \dots, d_n)}$$

Entonces, dado  $\mathcal{X} \in \mathcal{M}^{\Delta_{\leq n-1}^{op}}$  con la factorización definimos  $d_i = \mathrm{pr}_i \mu_n$  donde  $\mathrm{pr}_i$  es la proyección en la  $i$ -ésima coordenada restringida a  $(\mathrm{cosk}_{n-1}\mathcal{X})_n$  (esta es la  $i$ -ésima cara of  $\mathrm{cosk}_{n-1}\mathcal{X}$ ). Dualmente, para el esqueleto el latching map nos da una factorización del morfismo dada por todas las degeneraciones:

$$\sum_{i=0}^{n-1} X_{n-1} \xrightarrow{\twoheadrightarrow} (\mathrm{sk}_{n-1}\mathcal{X})_n \xrightarrow{l_n} X_n$$

$$\xrightarrow{[s_0, \dots, s_{n-1}]}$$

por lo tanto dada la factorización, definimos  $s_i = l_n \lambda_i$  donde  $\lambda_i$  es la inclusión de la  $i$ -ésima copia de  $X_{n-1}$  proyectada al cociente (esta es la  $i$ -ésima degeneración de  $\mathrm{sk}_{n-1}\mathcal{X}$ ). Entonces usando las identidades simpliciales de  $\mathrm{sk}_{n-1}\mathcal{X}$ ,  $\mathrm{cosk}_{n-1}\mathcal{X}$  y la naturalidad de  $\mathrm{sk}_{n-1}\mathcal{X} \xrightarrow{\tau} \mathrm{cosk}_{n-1}\mathcal{X}$ , las identidades simpliciales se siguen.  $\square$

**Corolario 2.2.15.** Dados  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in s\mathcal{M}$ , para extender un morfismo  $\text{res}_{n-1}\mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \text{res}_{n-1}\mathcal{Y}$  (es decir, una transformación natural entre objetos simpliciales  $n - 1$ -truncados) a un morfismo  $\text{res}_n\mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \text{res}_n\mathcal{Y}$ , necesitamos un morfismo  $X_n \xrightarrow{\varphi_n} Y_n$  tal que conmute el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} (\text{sk}_{n-1}\mathcal{X})_n & \xrightarrow{\varepsilon_n} & X_n & \xrightarrow{\eta_n} & (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{X})_n \\ (\text{sk}_{n-1}\varphi)_n \downarrow & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow (\text{cosk}_{n-1}\varphi)_n \\ (\text{sk}_{n-1}\mathcal{Y})_n & \xrightarrow{\varepsilon_n} & Y_n & \xrightarrow{\eta_n} & (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{Y})_n \end{array}$$

*Demostración.* Se sigue del Lema 2.2.14 aplicado al diagrama  $\Delta_{\leq n-1}^{op} \rightarrow \mathcal{M}^2$  dado por la asignación  $[n] \mapsto \varphi_n$ . □

### 2.3. Enriquecimiento simplicial y homotopías simpliciales

**Ejemplo 2.3.1.** Dado  $\mathcal{K}$  un conjunto simplicial, entonces tenemos una adjunción:

$$s\mathcal{S}(\mathcal{K} \times \mathcal{X}, \mathcal{Y}) \simeq s\mathcal{S}(\mathcal{X}, \underline{\text{Hom}}(\mathcal{K}, \mathcal{Y}))$$

llamamos  $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{K}, \mathcal{Y}) \in s\mathcal{S}$  al **hom interno**. Podemos adivinar la fórmula para el hom interno, si es un adjunto a derecha entonces por el Lema de Yoneda:

$$\underline{\text{Hom}}(\mathcal{K}, \mathcal{Y})_n \simeq s\mathcal{S}(\Delta^n, \underline{\text{Hom}}(\mathcal{K}, \mathcal{Y})) \simeq s\mathcal{S}(\Delta^n \times \mathcal{K}, \mathcal{Y})$$

Tomemos el lado derecho como definición con las caras y degeneraciones definidas de la manera obvia. Alternativamente, usemos la construcción estándar de la Observación 1.1.21 aplicada a  $- \times \mathcal{K} : \Delta \rightarrow s\mathcal{S}$ . Observamos también que tenemos una fórmula como un límite pesado:

$$\begin{aligned} \underline{\text{Hom}}(\mathcal{K}, \mathcal{Y})_n &\simeq s\mathcal{S}(\Delta^n \times \mathcal{K}, \mathcal{Y}) \simeq \int_{[m] \in \Delta^{op}} \mathcal{S}(\Delta_m^n \times K_m, Y_m) \\ &\simeq \int_{[m] \in \Delta^{op}} \{\Delta_m^n \times K_m, Y_m\} \simeq \{\Delta^n \times \mathcal{K}, \mathcal{Y}\}_{\Delta^{op}} \end{aligned}$$

**Observación 2.3.2.** Dado que  $s\mathcal{S}$  es una categoría monoidal (de hecho una categoría cartesianamente cerrada) donde la estructura monoidal está dada por el producto de conjuntos simpliciales y la unidad es el objeto final, podemos considerar categorías  $s\mathcal{S}$ -enriquecidas también conocidas como **categorías simpliciales**.

**Definición 2.3.3.** Una  $s\mathcal{S}$ -categoría  $\underline{\mathcal{M}}$  está dada por una colección de objetos  $X, Y, Z, \dots \in \underline{\mathcal{M}}$  y para cada par de objetos un conjunto simplicial  $\underline{\mathcal{M}}(X, Y) \in s\mathcal{S}$  tal que:

a) Para cada  $X \in \underline{\mathcal{M}}$  hay un morfismo identidad  $1_X : \Delta^0 \rightarrow \underline{\mathcal{M}}(X, X)$ .

b) Para cada tripla  $X, Y, Z \in \underline{\mathcal{M}}$  se tiene un morfismo de composición:

$$\underline{\mathcal{M}}(Y, Z) \times \underline{\mathcal{M}}(X, Y) \rightarrow \underline{\mathcal{M}}(X, Z)$$

c) La composición es asociativa y unitaria.

Explícitamente, el morfismo  $1_X : \Delta^0 \rightarrow \underline{\mathcal{M}}(X, X)$  corresponde por Yoneda a un 0-simplex  $1_X \in \underline{\mathcal{M}}(X, X)_0$ . La composición  $\underline{\mathcal{M}}(Y, Z) \times \underline{\mathcal{M}}(X, Y) \rightarrow \underline{\mathcal{M}}(X, Z)$  significa que tenemos una función composición  $\underline{\mathcal{M}}(Y, Z)_n \times \underline{\mathcal{M}}(X, Y)_n \rightarrow \underline{\mathcal{M}}(X, Z)_n$  para  $n$ -simplices para todo  $n \geq 0$ , que conmuta con las caras y degeneraciones, i.e. dado  $f \in \underline{\mathcal{M}}(X, Y)_n$  y  $g \in \underline{\mathcal{M}}(Y, Z)_n$  entonces  $d_i(gf) = d_i g d_i f$ , etc.

**Ejemplo 2.3.4.** La categoría de conjuntos simpliciales  $s\mathcal{S}$  está canónicamente enriquecida sobre sí misma, donde el hom interno definido en el Ejemplo 2.3.1 da el enriquecimiento  $\underline{s\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \underline{\text{Hom}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in s\mathcal{S}$ .

**Observación 2.3.5.** Una  $s\mathcal{S}$ -categoría  $\underline{\mathcal{M}}$  tiene una categoría subyacente  $\mathcal{M}$  cuyos objetos son los de  $\underline{\mathcal{M}}$  y cuyos homs están dados por los 0-simplices del conjunto simplicial hom. Es decir, dados  $X, Y \in \underline{\mathcal{M}}$ , entonces  $\mathcal{M}(X, Y) = \underline{\mathcal{M}}(X, Y)_0$ . Cada vez que nos referimos a un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  en  $\underline{\mathcal{M}}$  queremos decir un morfismo en la categoría subyacente, es decir  $f \in \underline{\mathcal{M}}(X, Y)_0$ .

En cualquier  $s\mathcal{S}$ -categoría hay una noción canónica de homotopía entre morfismos.

**Definición 2.3.6.** Dada  $\underline{\mathcal{M}}$  una  $s\mathcal{S}$ -categoría, dados dos objetos  $X, Y \in \underline{\mathcal{M}}$  y dados morfismos  $X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} Y$ , una **homotopía simplicial** de  $f$  a  $g$  está dada por  $\Delta^1 \xrightarrow{h} \underline{\mathcal{M}}(X, Y)$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^0 & & \\ d^1 \downarrow & \searrow f & \\ \Delta^1 & \xrightarrow{h} & \underline{\mathcal{M}}(X, Y) \\ d^0 \uparrow & \nearrow g & \\ \Delta^0 & & \end{array}$$

**Observación 2.3.7.** Una homotopía simplicial no define una relación de equivalencia, en general no es simétrica ni transitiva.

**Definición 2.3.8.** Dada un  $s\mathcal{S}$ -categoría  $\underline{\mathcal{M}}$ , un objeto  $X \in \underline{\mathcal{M}}$  y un conjunto simplicial  $\mathcal{K} \in s\mathcal{S}$ , el **tensor** (simplicial)  $\mathcal{K} \otimes X \in \underline{\mathcal{M}}$  está definido por la propiedad universal:

$$\underline{\mathcal{M}}(\mathcal{K} \otimes X, Y) \simeq \underline{s\mathcal{S}}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{M}}(X, Y))$$

natural en  $Y$ . Decimos que  $\underline{\mathcal{M}}$  es (simplicialmente) **tensorizada** si el tensor existe para todo  $\mathcal{K} \in s\mathcal{S}$  y todo  $X \in \underline{\mathcal{M}}$ . Dualmente, dado  $Y \in \underline{\mathcal{M}}$ , el **cotensor** (simplicial)  $\{\mathcal{K}, Y\} \in \underline{\mathcal{M}}$  está definido por la propiedad universal:

$$\underline{\mathcal{M}}(X, \{\mathcal{K}, Y\}) \simeq \underline{s\mathcal{S}}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{M}}(X, Y))$$

natural en  $X$ .

**Observación 2.3.9.** Dada  $\underline{\mathcal{M}}$  una  $s\mathcal{S}$ -categoría y dados dos morfismos  $X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} Y$  en  $\underline{\mathcal{M}}$ , si  $\underline{\mathcal{M}}$  es tensorizada entonces una homotopía simplicial de  $f$  a  $g$  se corresponde por adjunción a un morfismo  $\Delta^1 \otimes X \xrightarrow{h} Y$  en  $\underline{\mathcal{M}}$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^0 \otimes X & & \\ d^1 \otimes X \downarrow & \searrow f & \\ \Delta^1 \otimes X & \xrightarrow{h} & Y \\ d^0 \otimes X \uparrow & \nearrow g & \\ \Delta^0 \otimes X & & \end{array}$$

Respectivamente si  $\underline{\mathcal{M}}$  es cotensorizada entonces una homotopía simplicial de  $f$  a  $g$  se corresponde por adjunción a un morfismo  $X \xrightarrow{h} \{\Delta^1, Y\}$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & \{\Delta^0, Y\} & \\ & \uparrow (d^1)^* & \\ X & \xrightarrow{h} & \{\Delta^1, Y\} \\ & \downarrow (d^0)^* & \\ & \{\Delta^0, Y\} & \end{array}$$

**Observación 2.3.10.** Usualmente uno construye una  $s\mathcal{S}$ -categoría  $\underline{\mathcal{M}}$  primero definiendo una categoría  $\mathcal{M}$  con un bifunctor “tensor”  $- \otimes - : s\mathcal{S} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , tal que hay isomorfismos naturales  $\mathcal{K} \otimes (\mathcal{L} \otimes X) \simeq (\mathcal{K} \times \mathcal{L}) \otimes X$  y  $\Delta^0 \otimes X \simeq X$  y tal que es co-continuo en la primera variable, i.e.  $- \otimes X : s\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$  preserva colímites. Entonces uno puede definir un enriquecimiento simplicial por  $\underline{\mathcal{M}}(X, Y) = \mathcal{M}(\Delta^n \otimes X, Y)$ , las caras están dadas por precomposición con  $\Delta^{n-1} \otimes X \xrightarrow{d^i \otimes X} \Delta^n \otimes X$ . Por la Observación 1.1.21 dado que  $- \otimes X$  preserva colímites

obtenemos la adjunción no enriquecida:

$$\mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes X, Y) \simeq s\mathcal{S}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{M}}(X, Y))$$

además, hay una única forma de hacerla natural en todas las variables  $\mathcal{K}$ ,  $X$  y  $Y$ . Entonces la adjunción enriquecida se sigue de esta por el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{M}}(\mathcal{K} \otimes X, Y)_n &\simeq \mathcal{M}(\Delta^n \otimes \mathcal{K} \otimes X, Y) \simeq \mathcal{M}((\Delta^n \times \mathcal{K}) \otimes X, Y) \simeq \\ &\simeq s\mathcal{S}(\Delta^n \times \mathcal{K}, \underline{\mathcal{M}}(X, Y)) \simeq \underline{s\mathcal{S}}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{M}}(X, Y))_n \end{aligned}$$

**Proposición 2.3.11.** Dada  $\mathcal{M}$  una categoría con coproductos pequeños (o simplemente tensorizada con conjuntos), entonces la categoría de objetos simpliciales  $s\mathcal{M}$  tiene un enriquecimiento simplicial canónico que además es tensorizado.

*Demostración.* Dados  $\mathcal{K} \in s\mathcal{S}$  y  $\mathcal{X} \in s\mathcal{M}$ , definimos  $\mathcal{K} \otimes \mathcal{X} \in s\mathcal{M}$  como sigue:

$$(\mathcal{K} \otimes \mathcal{X})_n = K_n \cdot X_n = \sum_{K_n} X_n$$

Las caras  $d_i : (\mathcal{K} \otimes \mathcal{X})_n \rightarrow (\mathcal{K} \otimes \mathcal{X})_{n-1}$  están dadas por la siguiente fórmula, para cada  $\sigma \in K_n$  el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \sum_{K_n} X_n & \dashrightarrow & \sum_{K_{n-1}} X_{n-1} \\ \lambda_\sigma \uparrow & & \uparrow \lambda_{d_i(\sigma)} \\ X_n^\sigma & \xrightarrow{d_i} & X_{n-1}^{d_i(\sigma)} \end{array}$$

Esto define un funtor tensor, es fácil chequear que tiene todas las propiedades de la Observación 2.3.10. Entonces obtenemos un enriquecimiento simplicial dado por:

$$\underline{s\mathcal{M}}(X, Y)_n = s\mathcal{M}(\Delta^n \otimes X, Y)$$

Del cálculo anterior se sigue que  $\underline{s\mathcal{M}}$  es tensorizada. □

**Definición 2.3.12.** Supongamos que  $\mathcal{M}$  es completa. Dado  $\mathcal{K}$  un conjunto simplicial y  $\mathcal{X} \in s\mathcal{M}$ , definimos el **cotensor simplicial**  $\{\mathcal{K}, \mathcal{X}\} \in s\mathcal{E}$  como el siguiente límite pesado (ver la Definición 1.1.11):

$$\{\mathcal{K}, \mathcal{X}\}_n = \{\Delta^n \times \mathcal{K}, \mathcal{X}\}_{\Delta^{op}} = \int_{[m] \in \Delta^{op}} \{\Delta_m^n \times K_m, X_m\}$$

donde las caras y degeneraciones se siguen de la funtorialidad en los pesos del límite pesado.

**Teorema 2.3.13.** Supongamos que  $\mathcal{M}$  es completa y tiene coproductos. Tenemos adjunciones:

$$\underline{s\mathcal{M}}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{X}, \mathcal{Y}) \simeq \underline{s\mathcal{S}}(\mathcal{K}, \underline{s\mathcal{M}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})) \simeq \underline{s\mathcal{M}}(\mathcal{X}, \{\mathcal{K}, \mathcal{Y}\})$$

además, es natural en  $\mathcal{K} \in s\mathcal{S}$  y  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in s\mathcal{M}$ . Esto es,  $\underline{s\mathcal{M}}$  es una categoría simplicial tensorizada y cotensorizada.

**Definición 2.3.14.** Un conjunto simplicial  $\mathcal{X}$  se dice **finito** si tiene un conjunto finito de simplices no degenerados.

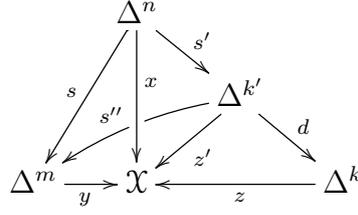
**Proposición 2.3.15.** Dado  $\mathcal{X}$  un conjunto simplicial, entonces la categoría de elementos  $\Gamma_{\mathcal{X}}$  tiene una subcategoría final dada por la subcategoría plena de caras de simplices no degenerados.

*Demostración.* Primero escribamos explícitamente la categoría de elementos  $\Gamma_{\mathcal{X}}$  para un conjunto simplicial  $\mathcal{X} \in \mathcal{S}^{\Delta^{op}}$ . Un objeto es un  $n$ -simplex  $\Delta^n \xrightarrow{x} \mathcal{X}$  para algún  $n \geq 0$ , equivalentemente un par  $(x, [n])$  con  $x \in X_n$ . Es por eso que en este caso  $\Gamma_{\mathcal{X}}$  se llama la **categoría de simplices de  $\mathcal{X}$** . Un morfismo  $(x, [n]) \rightarrow (y, [m])$  está dado por un morfismo  $\alpha : [n] \rightarrow [m]$  tal que  $x = y \cdot \alpha$ , i.e. el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{\alpha} & \Delta^m \\ & \searrow x & \downarrow y \\ & & \mathcal{X} \end{array}$$

Llamemos  $\Gamma_{\mathcal{X}}^{fnd} \subset \Gamma_{\mathcal{X}}$  a la subcategoría plena de caras de simplices no degenerados de  $\mathcal{X}$ . Es decir, un simplex  $\Delta^n \xrightarrow{x} \mathcal{X}$  está en  $\Gamma_{\mathcal{X}}^{fnd}$  si  $x = yd$  para  $d : [n] \twoheadrightarrow [k]$  un mono e  $y \in X_k$  un simplex no degenerado. En general, la cara de un simplex no degenerado no es necesariamente no degenerado. Para mostrar que  $\Gamma_{\mathcal{X}}^{fnd} \subset \Gamma_{\mathcal{X}}$  es final por la Proposition 1.1.26 necesitamos chequear que para cada simplex  $\Delta^n \xrightarrow{x} \mathcal{X}$ , la categoría comma  $(x, [n]) \downarrow \Gamma_{\mathcal{X}}^{fnd}$  is no-vacía y conexa. Pero el Lema Eilenberg-Zilber 2.1.12 muestra que  $(x, [n]) \downarrow \Gamma_{\mathcal{X}}^{fnd}$  is no-vacía, hay un único  $y \in X_m$  no degenerado tal que  $x = ys$  para  $s : [n] \twoheadrightarrow [m]$  un epimorfismo. Dado otro objeto de  $(x, [n]) \downarrow \Gamma_{\mathcal{X}}^{fnd}$ , i.e. una cara de un simplex no degenerado  $z \in X_k$  y  $\alpha : [n] \rightarrow [k]$  tal que  $x = z\alpha$ , entonces descomponemos  $\alpha = ds'$  con  $s' : [n] \twoheadrightarrow [k']$  epi y  $d : [k'] \rightarrow [k]$  mono. Tomemos  $z' = zd$ , entonces  $z'$  is una cara de un simplex no degenerado, pues es un cara de una cara de un simplex no degenerado. Tenemos que  $x = z\alpha = zds' = z's'$ . Luego, de nuevo por la unicidad del Lema de Eilenberg-Zilber 2.1.12 hay un epimorfismo  $s'' : [k'] \twoheadrightarrow [m]$  tal que

$z' = ys''$  y  $s = s''s'$ . Gráficamente:



Entonces  $(x, [n]) \downarrow \Gamma_x^{fnd}$  es conexa luego  $\Gamma_x^{fnd} \subset \Gamma_x$  es final. □

**Observación 2.3.16.** Notar que si  $\mathcal{X}$  es finito, entonces  $\Gamma_x^{fnd}$  es una categoría finita, pues cada simplex tiene un conjunto finito de caras.

**Corolario 2.3.17.** Dada  $\mathcal{M}$  una categoría con límites finitos,  $\mathcal{X} \in s\mathcal{M}$  un objeto simplicial y  $\mathcal{K} \in s\mathcal{S}$  un conjunto simplicial finito. Entonces el cotensor simplicial  $\{\mathcal{K}, \mathcal{X}\}$  existe y además  $\{\mathcal{K}, \mathcal{X}\}_n$  es un límite finito.

*Demostración.* Calculemos el cotensor usando la co-continuidad de los pesos del Lema 1.1.15:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{K}, \mathcal{X}\}_n &= \{\Delta^n \times \mathcal{K}, \mathcal{X}\}_{\Delta^{op}} \simeq \{\Delta^n \times \operatorname{colim}_{(x, [m]) \in \Gamma_{\mathcal{X}}} \Delta^m, \mathcal{X}\}_{\Delta^{op}} \simeq \\ &\simeq \{\operatorname{colim}_{(x, [m]) \in \Gamma_{\mathcal{X}}} (\Delta^n \times \Delta^m), \mathcal{X}\}_{\Delta^{op}} \simeq \lim_{(x, [m]) \in \Gamma_{\mathcal{X}}^{op}} \{\Delta^n \times \Delta^m, \mathcal{X}\}_{\Delta^{op}} \end{aligned}$$

Pero podemos calcular el límite exterior sobre las caras de simplices no degenerados, las cuales por Proposición 2.3.15 nos da una subcategoría finita inicial de  $\Gamma_{\mathcal{X}}^{op}$ , por lo tanto un límite finito. Luego redujimos el problema a mostrar que  $\{\Delta^n \times \Delta^m, \mathcal{X}\}_{\Delta^{op}}$  es un límite finito. Pero  $\Delta^n \times \Delta^m$  es finito, esto se sigue del cálculo de simplices no degenerados por shuffles en el Ejemplo 2.1.14. Ahora es suficiente mostrar que un límite pesado  $\{\mathcal{L}, \mathcal{X}\}_{\Delta^{op}}$  es un límite finito si  $\mathcal{L}$  es un conjunto simplicial finito. Pero si  $\mathcal{L}$  es finito, entonces es un colímite finito de representables, luego por la co-continuidad de pesos del Lema 1.1.15 y por Yoneda  $\{\mathcal{L}, \mathcal{X}\}_{\Delta^{op}}$  es un límite finito. □

**Definición 2.3.18.** Dado un objeto simplicial en una categoría abeliana  $\mathcal{X} \in s\mathcal{A}$ , entonces uno define el **complejo de Moore** asociado  $(X_\bullet, \partial)$ . Este está dada por los  $X_n$  y el diferencial  $\partial : X_n \rightarrow X_{n-1}$  es la suma alternada de las caras,  $\partial = \sum_{j=0}^n (-1)^j d_j$ .

Por las identidades simpliciales se sigue que  $\partial^2 = 0$ :

$$\partial^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} d_i d_j = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} d_i d_j + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} d_i d_j =$$

$$= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} d_{j-1} d_i + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} d_i d_j = 0$$

Esto es cero pues la primera suma es simplemente una reindexación de la segunda suma con el signo opuesto.

**Ejemplo 2.3.19.** Dado un conjunto simplicial  $\mathcal{X}$ , entonces  $\mathbb{Z}\mathcal{X} \in s\mathbf{Ab}$  denota el grupo abeliano simplicial dado por aplicar el functor grupo abeliano libre. El  $n$ -ésimo **grupo de homología** de un conjunto simplicial es la  $n$ -ésima homología de su complejo de Moore asociado  $(\mathbb{Z}\mathcal{X}_\bullet, \partial)$ . En particular, dado un espacio topológico  $X$  entonces el complejo de Moore asociado  $(\mathbb{Z}S(X)_\bullet, \partial)$  es el **complejo de cadenas singular** del espacio.

**Ejemplo 2.3.20.** Dado  $A$  un grupo abeliano y  $\mathcal{X}$  un conjunto simplicial, entonces tomando el producto tensorial grado a grado  $A \otimes \mathbb{Z}\mathcal{X}_\bullet$  obtenemos un complejo de cadenas y su homología se llama la homología de  $\mathcal{X}$  con coeficientes en  $A$ . Similarmente obtenemos un complejo de co-cadenas definido por aplicar el functor  $\underline{\text{hom}}(-, A) : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$ . A saber el complejo  $\underline{\text{hom}}(\mathbb{Z}\mathcal{X}_\bullet, A)$ , su cohomología se llama la cohomología de  $\mathcal{X}$  con coeficientes en  $A$ . Alternativamente, dado el conjunto simplicial  $\mathcal{X}$  uno obtiene un grupo abeliano simplicial al aplicar el functor  $\mathcal{S}(-, A) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{Ab}$ , esto da un grupo abeliano cosimplicial  $\mathcal{S}(\mathcal{X}, A)$  y por la construcción de Moore obtenemos un complejo de co-cadenas. Estas dos construcciones son isomorfas por la adjunción libre-olvido entre grupos abelianos y conjuntos.

Ahora vamos a establecer el que hecho que para objetos simpliciales la noción geométrica de homotopía simplicial dada por la Definición 2.3.6 o en la Observación 2.3.9 es equivalente a la noción combinatoria de homotopía dada por P. May en [May67]. En general esto se toma por sabido y el único bosquejo de demostración que encontramos en la literatura para el caso de conjuntos simpliciales está en [Fdm12]

**Proposición 2.3.21.** Dada  $\mathcal{M}$  una categoría con coproductos pequeños, dados  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in s\mathcal{M}$  y dados dos morfismos simpliciales  $\mathcal{X} \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} \mathcal{Y}$ , entonces el dato de una homotopía simplicial  $h$  de  $f$  a  $g$  corresponde a dar morfismos  $h_i : X_n \rightarrow Y_{n+1}$  para  $0 \leq i \leq n$  y todo  $n \geq 0$  tal que:

$$d_0 h_0 = g_n$$

$$d_{n+1} h_n = f_n$$

$$d_i h_j = \begin{cases} h_{j-1} d_i, & i < j \\ h_j d_{i-1}, & i > j + 1 \end{cases}$$

$$d_{j+1} h_j = d_{j+1} h_{j+1}$$

$$s_i h_j = \begin{cases} h_{j+1} s_i, & i \leq j \\ h_j s_{i-1}, & i > j \end{cases}$$

*Demostración.* Dada una homotopía simplicial  $\Delta^1 \otimes \mathcal{X} \xrightarrow{h} \mathcal{Y}$  de  $f$  a  $g$ , por definición tenemos que  $(\Delta^1 \otimes X)_n = \sum_{\sigma \in \Delta_n^1} X_n^\sigma$ . Podemos describir explícitamente los morfismos en  $\Delta_n^1 = \Delta([n], [1])$  como sigue. Llamemos  $\sigma^i \in \Delta_n^1$  al morfismo dado por:

$$\sigma^i(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq i \\ 1 & \text{si } j > i \end{cases}$$

para  $-1 \leq i \leq n$ . Se sigue que si  $0 \leq i < n$  entonces  $\sigma^i = s^0 \dots s^{i-1} s^{i+1} \dots s^{n-1}$ . Además  $\sigma^{-1} = d^0 s^0 \dots s^{n-1}$  y  $\sigma^n = d^1 s^0 \dots s^{n-1}$ . Llamemos  $h_n^{\sigma^i} : X_n^{\sigma^i} \rightarrow Y_n$  a la restricción de  $h_n$  a la copia  $\sigma^i$  de  $X_n$ . Dado que  $h$  es un morfismo simplicial se sigue que  $d_i h_n^\sigma = h_{n-1}^{d_i(\sigma)} d_i$  y  $s_i h_n^\sigma = h_{n+1}^{s_i(\sigma)} s_i$  para todo  $0 \leq i \leq n$ . Recordemos que los dos morfismos  $\Delta^0 \xrightleftharpoons[d^0]{d^1} \Delta^1$  están dados por post-composición, i.e. estos mandan el único morfismo  $s \in \Delta([n], [0])$ ,  $s = s^0 \dots s^{n-1}$  a  $d^1 s$  y  $d^0 s$  respectivamente. Definamos  $h_i : X_n \rightarrow Y_{n+1}$  por  $h_i = h_{n+1}^{\sigma^i} s_i$  para  $0 \leq i \leq n$ . Se sigue de la definición de homotopía simplicial que  $h_n^{\sigma^{-1}} = g_n$  y  $h_n^{\sigma^n} = f_n$ . Ahora calculemos las identidades de la afirmación:

$$d_0 h_0 = d_0 h_{n+1}^{\sigma^0} s_0 = h_n^{d_0(\sigma^0)} d_0 s_0 = h_n^{d_0(\sigma^0)} = g_n$$

Donde para la última igualdad notar que  $d_0(\sigma^0) = s^1 \dots s^n d^0 = d^0 s^0 \dots s^{n-1} = \sigma^{-1}$  por las identidades cosimpliciales. Similarmente:

$$d_{n+1} h_n = d_{n+1} h_{n+1}^{\sigma^n} s_n = h_n^{d_{n+1}(\sigma^n)} d_{n+1} s_n = h_n^{d_{n+1}(\sigma^n)} = f_n$$

como  $d_{n+1}(\sigma^n) = s^0 \dots s^{n-1} d^{n+1} = d^1 s^0 \dots s^{n-1} = \sigma^n$ . Si  $i < j$  calculemos:

$$d_i h_j = d_i h_{n+1}^{\sigma^j} s_j = h_n^{d_i(\sigma^j)} d_i s_j = h_n^{\sigma^{j-1}} s_{j-1} d_i = h_{j-1} d_i$$

como  $d_i s_j = s_{j-1} d_i$  y  $d_i(\sigma^j) = s^0 \dots s^{j-1} s^{j+1} \dots s^n d^i = s^0 \dots s^{j-2} s^j \dots s^{n-1} = \sigma^{j-1}$  si  $i < j$ .  
Si  $i > j + 1$  entonces:

$$d_i h_j = h_n^{d_i(\sigma^j)} s_j d_{i-1} = h_j d_{i-1}$$

pues  $d_i(\sigma^j) = s^0 \dots s^{j-1} s^{j+1} \dots s^n d^i = s^0 \cdot s^{j-1} s^j \cdot s^{n-1} = \sigma^j$  si  $i > j + 1$  por las identidades cosimpliciales. También  $d_{j+1} h_j = d_{j+1} h_{j+1}$  por un cálculo similar, uno chequea que  $d_{j+1}(\sigma^j) = d_{j+1}(\sigma^{j+1}) = \sigma^j$ . Finalmente, calculemos:

$$s_i h_j = s_i h_{n+1}^{\sigma^j} s_j = h_n^{\sigma^j s^i} s_i s_j$$

Si  $i \leq j$  entonces  $\sigma^j s^i = \sigma^{j+1}$  y  $s_i s_j = s_{j+1} s_i$  mientras que si  $i > j$  entonces  $\sigma^j s^i = \sigma^j$  y  $s_i s_j = s_j s_{i-1}$  luego obtenemos todas las identidades.

Recíprocamente, dados los morfismos  $h_i : X_n \rightarrow Y_{n+1}$  para  $0 \leq i \leq n$  satisfaciendo todas las identidades, entonces definimos  $h_n^{\sigma^{-1}} = g_n$  y  $h_n^{\sigma^i} = d_{i+1} h_i$  para  $0 \leq i \leq n$ . Estas construcciones son mutuamente inversas:

$$d_{i+1} h_{n+1}^{\sigma^i} s_i = h_n^{\sigma^i} d_{i+1} s_i = h_n^{\sigma^i}$$

$$d_{i+1} h_i s_i = d_{i+1} h_{i+1} s_i = d_{i+1} s_i h_i = h_i$$

Donde en el primer cálculo recordemos que  $d_{i+1}(\sigma^i) = \sigma^i$ . Por tanto solo necesitamos chequear que los morfismos  $h_n^{\sigma^i} = d_{i+1} h_i$  satisfacen las identidades simpliciales  $d_i h_n^\sigma = h_{n-1}^{d_i(\sigma)} d_i$  y  $s_i h_n^\sigma = h_{n+1}^{s_i(\sigma)} s_i$  para todo  $0 \leq i \leq n$ . Por ejemplo, si  $i < j$  entonces:

$$d_i h_n^{\sigma^j} = d_i d_{j+1} h_j = d_j d_i h_j = d_j h_{j-1} d_i = h_n^{\sigma^{j-1}} d_i = h_n^{d_i(\sigma^j)} d_i$$

El resto de las identidades se dejan como ejercicio. □

**Proposición 2.3.22.** Dada una categoría abeliana  $\mathcal{A}$ , morfismos simpliciales  $\mathcal{X} \xrightarrow[f]{g} \mathcal{Y}$  y una homotopía simplicial de  $f$  a  $g$  dada por  $h_i : X_n \rightarrow Y_{n+1}$  para  $0 \leq i \leq n$ . Entonces la homotopía simplicial induce una homotopía de complejos entre los morfismos asociados de complejos de cadenas.

## 2.4. El grupoide fundamental de un conjunto simplicial

En esta subsección describimos la categoría fundamental y el grupoide fundamental de un conjunto simplicial introducidos en [GZ67].

**Proposición 2.4.1.** El nervio de una categoría (ver Ejemplo 2.1.9) es 2-coesquelético, es decir se tiene un isomorfismo  $NC \simeq \text{cosk}_2 NC$ .

**Corolario 2.4.2.** Dado un conjunto simplicial  $\mathcal{X}$ , existe un isomorfismo  $\tau_1 \mathcal{X} \simeq \tau_1 \text{sk}_2 \mathcal{X}$ .

Ahora podemos calcular una presentación de la categoría fundamental de un conjunto simplicial.

**Proposición 2.4.3.** Sea  $\mathcal{X}$  un conjunto simplicial, entonces  $\tau_1 \mathcal{X}$  es un cociente de la categoría libre en el grafo  $X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} X_0$  módulo las relaciones  $d_1 x = d_0 x \circ d_2 x$  para  $x \in X_2$  y  $s_0 x = 1_x$  para  $x \in X_0$ .

**Proposición 2.4.4.** El funtor nervio  $\mathbf{Cat} \xrightarrow{N} s\mathcal{S}$  es plenamente fiel.

Ahora podemos describir también el **grupoide fundamental** de un conjunto simplicial. Este es por definición el adjunto a izquierda al funtor nervio restringido a los grupoides es decir,  $s\mathcal{S} \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{N} \end{array} \mathbf{Grpd}$ .

**Proposición 2.4.5.** Sea  $\mathcal{X}$  un conjunto simplicial, entonces  $\pi_1 \mathcal{X}$  es el cociente del grupoide libre en el grafo  $X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} X_0$  módulo las relaciones  $d_1 x = d_0 x \circ d_2 x$  para  $x \in X_2$  y  $s_0 x = 1_x$  para  $x \in X_0$ .

**Proposición 2.4.6.** Sean  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  conjuntos simpliciales, entonces hay un isomorfismo canónico  $\tau_1(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \rightarrow \tau_1 \mathcal{X} \times \tau_1 \mathcal{Y}$ . Lo mismo vale para el grupoide fundamental.

*Demostración.* Ver [GZ67] o [JT08]. □

Ahora probemos que el funtor grupoide fundamental es en realidad un 2-functor cuando se considera  $s\mathcal{S}$  como una 2-categoría de forma natural.

**Observación 2.4.7.** Recordemos que tenemos la adjunción  $s\mathcal{S} \begin{array}{c} \xleftarrow{\tau_1} \\ \xrightarrow{N} \end{array} \mathbf{Cat}$ . El funtor categoría fundamental  $\tau_1$  preserva productos por la Proposición 2.4.6 y ambas categorías son monoidales con el producto cartesiano, por lo tanto se induce una adjunción de cambio de base:

$$s\mathcal{S}\text{-Cat} \begin{array}{c} \xleftarrow{(\tau_1)_*} \\ \xrightarrow{N_*} \end{array} 2\text{-Cat}$$

i.e. toda categoría simplicial determina una 2-categoría (también conocida como una categoría enriquecida en categorías) y viceversa. Más aún, si  $\mathcal{C}$  es una categoría simplicial, entonces la

2-categoría asociada  $(\tau_1)_*\mathcal{C}$  que para abreviar denotamos por  $\mathcal{C}_2$  tiene los mismos objetos y sus homs están dados por  $\mathcal{C}_2(X, Y) = \tau_1(\underline{\mathcal{C}}(X, Y))$  donde  $\underline{\mathcal{C}}(X, Y)$  es el hom simplicial.

**Proposición 2.4.8.** El grupoide fundamental determina un 2-functor  $s\mathcal{S}_2 \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{Grpd}$ .

*Demostración.* Recordemos que dado un morfismo simplicial  $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ , entonces este induce un functor  $\pi_1\mathcal{X} \xrightarrow{f_*} \pi_1\mathcal{Y}$ . Dado un 1-simplex  $x \xrightarrow{\sigma} y \in X_1$ , entonces  $f_*(\sigma)$  está representado por  $f(x) \xrightarrow{f(\sigma)} f(y) \in \pi_1\mathcal{Y}$ , donde por abuso de notación denotamos por  $f$  al morfismo simplicial en todos los grados. Ahora supongamos que tenemos dos morfismos simpliciales  $X \xrightleftharpoons[g]{f} Y$  y una homotopía simplicial  $h : f \Rightarrow g$ . Entonces tenemos morfismos  $h_i : X_n \rightarrow Y_{n+1}$  para  $0 \leq i \leq n$  que satisfacen las identidades de la Proposición 2.3.21. Dado  $x \in X_0$ , definimos  $h_x$  como  $h_0(x) \in Y_1$ . Como  $d_1h_0 = f_0$  y  $d_0h_0 = g_0$ , esto da un 1-simplex  $f(x) \xrightarrow{h_x} g(x)$ . Tenemos que chequear que el siguiente diagrama conmuta en  $\pi_1\mathcal{Y}$ :

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{f(\sigma)} & f(y) \\ h_x \downarrow & & \downarrow h_y \\ g(x) & \xrightarrow{g(\sigma)} & g(y) \end{array}$$

Pero tenemos los siguientes 2-simplices en  $\mathcal{Y}$  dados por la homotopía simplicial:

$$\begin{array}{ccccc} & & f(x) & \xrightarrow{f(\sigma)} & f(y) \\ & & \downarrow h_x & & \downarrow h_y \\ & & \square & & \\ & & \downarrow h_x & & \downarrow h_y \\ & & g(x) & \xrightarrow{g(\sigma)} & g(y) \end{array}$$

Estos 2-simplices muestran la conmutatividad del cuadrado en  $\pi_1\mathcal{Y}$  y obtenemos una transformación natural  $h_* : f_* \Rightarrow g_*$ . Ahora dado un morfismo simplicial  $w : \Delta^2 \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  tal que  $d_0w = h'$ ,  $d_1w = h''$  y  $d_2w = h$ . Entonces por un argumento similar al de la Proposición 2.3.21 obtenemos un morfismo  $w_0 : X_0 \rightarrow Y_2$  tal que  $d_0w_0 = h'_0$ ,  $d_1w_0 = h''_0$  y  $d_2w_0 = h_0$ . Se sigue que  $w_0(x) \in Y_2$  testifica que  $h''_x = h'_x \circ h_x$ , por lo tanto obtenemos un functor:

$$\tau_1(s\mathcal{S}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})) \longrightarrow \mathbf{Grpd}(\pi_1\mathcal{X}, \pi_1\mathcal{Y})$$

La compatibilidad con la composición horizontal es trivial y por lo tanto obtenemos un 2-functor. □

**Observación 2.4.9.** La 2-categoría  $sS_2$  tiene mucha información homotópica, primero sus objetos y morfismos son los mismos que los de  $sS$  y observemos que una equivalencia simplicial homotópica, i.e. un par de morfismos simpliciales  $\mathcal{Y} \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{smallmatrix} \mathcal{X}$  tales que  $gf \simeq 1_{\mathcal{X}}$  y  $fg \simeq 1_{\mathcal{Y}}$  (simplicialmente homotópicos), es una **equivalencia** en esta 2-categoría. En efecto estas son exactamente las equivalencias si  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  son conjuntos simpliciales buenos (es decir, complejos de Kan) como veremos después, pues en ese caso uno puede componer homotopías simpliciales.

Ahora damos otra caracterización del grupoide fundamental de un conjunto simplicial en términos de su categoría de simplices. Mostraremos que la categoría de revestimientos simpliciales es equivalente a la categoría de acciones (a derecha) del grupoide fundamental. Estos resultados, aunque no serán usados en este trabajo, están en paralelo con las equivalencias de revestimientos de un espacio topológico (bueno) y acciones de su grupoide fundamental (clásico).

**Teorema 2.4.10.** Dado un conjunto simplicial  $\mathcal{X}$ , consideremos  $\pi_1\mathcal{X}$  su grupoide fundamental y  $G\Gamma_{\mathcal{X}}$  el grupoide libre sobre la categoría de elementos de  $\mathcal{X}$ , entonces hay una equivalencia de grupoides  $\pi_1\mathcal{X} \simeq G\Gamma_{\mathcal{X}}$ .

**Definición 2.4.11.** Un morfismo de conjuntos simpliciales  $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{X}$  se llama un **revestimiento simplicial** si cualquier cuadrado conmutativo tiene un único llenado:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^0 & \xrightarrow{e} & \mathcal{E} \\ k \downarrow & \exists! \nearrow & \downarrow p \\ \Delta^n & \xrightarrow{x} & \mathcal{X}. \end{array}$$

**Proposición 2.4.12.** Un morfismo de conjuntos simpliciales  $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{X}$  es un revestimiento simplicial si y solo si para todo  $\alpha : [n] \rightarrow [m]$  el siguiente cuadrado es un pullback:

$$\begin{array}{ccc} E_m & \xrightarrow{\alpha^*} & E_n \\ p_m \downarrow & & \downarrow p_n \\ X_m & \xrightarrow{\alpha^*} & X_n. \end{array}$$

Recordemos que hay una equivalencia de categorías  $S^{\Delta^{op}}/\mathcal{X} \simeq S^{\Gamma_{\mathcal{X}}^{op}}$  dada por mandar un morfismo  $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{X}$  al funtor definido por  $\mathcal{E}(x) = \{e \in E_n \mid pe = x\}$  con  $\Delta^n \xrightarrow{x} \mathcal{X}$ .

**Teorema 2.4.13.** Hay una equivalencia entre la categoría de revestimientos simpliciales y la categoría de conjuntos con una acción a derecha del grupoide fundamental, i.e.  $S^{\pi_1(\mathcal{X})^{op}}$ .

## 2.5. La estructura de modelos de Quillen

**Ejemplo 2.5.1.** Definimos para  $0 \leq k \leq n$  el cuerno simplicial como el coegalizador:

$$\coprod_{\substack{0 \leq i < j \leq n \\ i \neq k, j \neq k}} \Delta^{n-2} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \coprod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \Delta^{n-1} \longrightarrow \Lambda_k^n$$

Este es un subcomplejo de  $\Delta^n$  generado por sus caras  $d^i$  para  $i \neq k$ . Un morfismo  $\Lambda_k^n \xrightarrow{x} X$  está dado por  $(x_0, \dots, x_{k-1}, \bullet, x_{k+1}, \dots, x_n)$  con  $x_i \in X_{n-1}$  tal que  $x_i d^{j-1} = x_j d^i$  si  $i < j$ . Por ejemplo para  $n = 2$  sus realizaciones geométricas son los siguientes subspaces of  $|\Delta^2|$ :

$$|\Lambda_0^2| = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \hline \end{array} \quad |\Lambda_1^2| = \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \\ \hline \end{array} \quad |\Lambda_2^2| = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$$

**Definición 2.5.2.** Un conjunto simplicial  $\mathcal{X}$  es un **complejo de Kan** si cada cuerno tiene un relleno, i.e. para todo  $0 \leq k \leq n$  podemos llenar este diagrama con el morfismo punteado:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

Esto es, dados  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, \bullet, x_{k+1}, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in X_{n-1}$  tales que  $x_i d^{j-1} = x_j d^i$  para  $i < j$ ,  $i, j \neq k$ , existe  $x \in X_n$  tal que  $x_i = x d^i$ .

**Ejemplo 2.5.3.** Para cada espacio topológico  $X$ ,  $S(X)$  es un complejo de Kan. Esto se sigue por la adjunción,

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n \longrightarrow S(X) & \rightleftarrows & |\Lambda_k^n| \longrightarrow X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n & & |\Delta^n| \end{array}$$

y dado que la realización geométrica preserva colímites,  $|\Lambda_k^n|$  es el subespacio de  $|\Delta^n|$  dado por el cuerno geométrico, este subespacio es claramente un retracto, luego existe un morfismo punteado.

**Definición 2.5.4.** Más generalmente dados conjuntos simpliciales  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ , entonces un morfismo simplicial  $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$  es una **fibración de Kan** si y solo si el morfismo tiene la propiedad de levantamiento a derecha con respecto a las inclusiones  $\Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n$ , es decir:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n \longrightarrow \mathcal{X} & & \\ \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow f \\ \Delta^n \longrightarrow \mathcal{Y} & & \end{array}$$

Un morfismo simplicial  $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$  se dice una **fibración de Kan acíclica** si y solo si el morfismo tiene la propiedad de levantamiento a derecha con respecto a la inclusión  $\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$ , es decir:

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow f \\ \Delta^n & \longrightarrow & \mathcal{Y} \end{array}$$

Un complejo de Kan  $\mathcal{X}$  se dice **acíclico** si y solo si el morfismo  $\mathcal{X} \xrightarrow{!} *$  es una fibración de Kan trivial.

**Proposición 2.5.5.** Un morfismo simplicial  $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$  es una fibración de Kan acíclica si y solo si el morfismo tiene la propiedad de levantamiento a derecha con respecto a todos monomorfismos, i.e. para cada inclusión  $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ , tenemos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow f \\ \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{Y} \end{array}$$

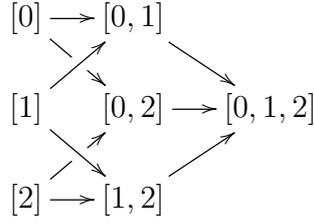
**Proposición 2.5.6.** Una fibración de Kan acíclica  $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$  es una equivalencia homotópica simplicial.

**Ejemplo 2.5.7.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría, entonces cada **cuerno interno** de  $N\mathcal{C}$  tiene un único relleno, i.e. para todos los cuernos  $\Lambda_k^n$  con  $0 < k < n$ .  $N\mathcal{C}$  es un complejo de Kan si y solo si  $\mathcal{C}$  es un grupoide.

**Proposición 2.5.8.** Sea  $\mathcal{X}$  un complejo de Kan, entonces  $\tau_1\mathcal{X} \simeq \pi_1\mathcal{X}$  y es el siguiente grupoide: sus objetos son los vértices de  $\mathcal{X}$ , un morfismo  $\sigma : x \rightarrow y$  es un 1-simplex  $\sigma \in X_1$  tal que  $d_1\sigma = x, d_0\sigma = y$  módulo la relación de homotopía  $\sigma \sim \sigma'$  si y solo si hay un 2-simplex  $\omega \in X_2$  tal que  $d_1\omega = \sigma', d_2\omega = \sigma, d_0\omega = s_0y$ .

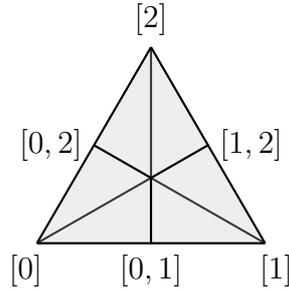
**Ejemplo 2.5.9.** Dado un poset  $\mathcal{P}$ , consideremos el poset  $\text{nd}\mathcal{P}$  de cadenas finitas inyectivas ordenadas por la inclusión, denotamos sus elementos  $[a_0, \dots, a_n]$ , i.e. una cadena  $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ , con  $a_i \neq a_j$  para  $i \neq j$ ,  $a_i \in \mathcal{P}$ . Esto es equivalente al poset de simpleses no

degenerados de  $N\mathcal{P}$ . Por ejemplo para  $\mathcal{P} = [2]$ , entonces  $\text{nd}[2]$  es el siguiente poset:



Esta construcción es funtorial, es decir un morfismo de posets  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  induce un morfismo  $\text{nd}\mathcal{P} \rightarrow \text{nd}\mathcal{Q}$  (precaución: una cadena inyectiva debe ser mapeada a una cadena inyectiva). También, hay un morfismo natural  $\text{nd}\mathcal{P} \xrightarrow{lv} \mathcal{P}$  llamado el **morfismo del último vértice**, está definido por  $lv[a_0, \dots, a_n] = a_n$ .

Entonces, la **subdivisión baricéntrica** de  $\Delta^n$  se define como el nervio del poset de simpli-  
ces no degenerados de  $\Delta^n$ , i.e.  $\text{sd}\Delta^n = N\text{nd}[n]$ . Tenemos un morfismo del último vértice  $\text{sd}\Delta^n \xrightarrow{lv} \Delta^n$  y es fácil ver que es epimorfo. Por ejemplo, la realización geométrica de  $\text{sd}\Delta^2$  es la siguiente subdivisión:



Entonces podemos extender la subdivisión baricéntrica a conjuntos simpliciales por la construcción estándar. Tenemos un objeto cosimplicial  $\Delta \xrightarrow{\text{sd}} s\mathcal{S}$ , por lo tanto obtenemos una adjunción  $s\mathcal{S} \xrightleftharpoons[\text{Ex}]{\text{sd}} s\mathcal{S}$ . Tenemos fórmulas  $\text{sd}\mathcal{X} = \int^{[n] \in \Delta} X_n \cdot \text{sd}\Delta^n = \text{colim}_{\Delta^n \rightarrow \mathcal{X}} \text{sd}\Delta^n$  y  $\text{Ex}(\mathcal{X})_n = \text{hom}(\text{sd}\Delta^n, \mathcal{X})$ . El morfismo del último vértice se extiende a un morfismo natural  $\text{sd}\mathcal{X} \xrightarrow{lv} \mathcal{X}$  para todos los conjuntos simpliciales y adjunto a éste tenemos un morfismo  $\mathcal{X} \xrightarrow{j} \text{Ex}(\mathcal{X})$ , está dado por precomposición con el morfismo del último vértice, por lo tanto  $j$  es mono. Dado un conjunto simplicial  $\mathcal{X}$ , consideremos el diagrama

$$\mathcal{X} \xrightarrow{j} \text{Ex}(\mathcal{X}) \xrightarrow{j} \text{Ex}^2(\mathcal{X}) \xrightarrow{j} \dots$$

Entonces definimos  $\text{Ex}^\infty(\mathcal{X})$  como el colímite del diagrama, luego

$$\text{Ex}^\infty(\mathcal{X})_n \simeq \text{colim}_k \text{Ex}^k(\mathcal{X})_n \simeq \text{colim}_k \text{hom}(\Delta^n, \text{Ex}^k(\mathcal{X})) \simeq \text{colim}_k \text{hom}(\text{sd}^k \Delta^n, \mathcal{X})$$

i.e. un  $n$ -simplex de  $\text{Ex}^\infty(\mathcal{X})$  está dado por un morfismo simplicial de una subdivisión baricéntrica sucesiva de  $\Delta^n$  a  $\mathcal{X}$ . El functor  $\text{Ex}^\infty$  se llama el reemplazo fibrante de Kan. Por ejemplo  $\text{sd } \Delta^1$  es el nervio de un poset:

$$\begin{array}{ccc} [0] & \searrow & \\ & & [0, 1] \\ [1] & \nearrow & \end{array}$$

Por lo tanto dada una categoría  $\mathcal{C}$ ,

$$\text{Ex}(\mathcal{NC})_1 = \text{hom}(\text{sd } \Delta^1, \mathcal{NC}) \simeq \mathbf{Cat}(\text{nd } [1], \mathcal{C})$$

entonces es el conjunto de spans de la categoría. Más generalmente,  $\text{Ex}^\infty(\mathcal{NC})_1$  está dada por el conjunto de zig-zags de morfismos en la categoría.

**Teorema 2.5.10.** Para cualquier conjunto simplicial  $\mathcal{X}$ ,  $\text{Ex}^\infty(\mathcal{X})$  es un complejo de Kan y el morfismo  $\mathcal{X} \xrightarrow{j} \text{Ex}^\infty(\mathcal{X})$  es una equivalencia débil (natural en  $\mathcal{X}$ ). Más aún,  $\text{Ex}^\infty$  preserva límites finitos y 0-simplices.

**Definición 2.5.11.** Dados  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  conjuntos simpliciales, un morfismo simplicial  $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$  se dice:

1. una **cofibración** si es un monomorfismo.
2. una **fibración** si es una fibración de Kan.
3. una **equivalencia débil** si su realización geométrica  $|\mathcal{X}| \xrightarrow{|f|} |\mathcal{Y}|$  es una equivalencia débil.

**Observación 2.5.12.** De hecho uno puede definir las equivalencias débiles sin el uso de la realización geométrica. Se pueden definir de forma “combinatoria” los grupos de homotopía de un complejo de Kan y con los funtores de Kan  $\text{Ex}^\infty$  extender a todos los conjuntos simpliciales.

**Teorema 2.5.13.** La categoría de conjuntos simpliciales  $s\mathcal{S}$  junto con las clases especificadas de cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles como en la Definición 2.5.11 forman una categoría de modelos en el sentido de [HA].

**Observación 2.5.14.** La categoría homotópica  $\mathcal{H} = \text{Ho}(s\mathcal{S})$  está dada por invertir formalmente todas las equivalencias débiles. Por un teorema de Quillen, esta categoría tiene por objetos conjuntos simpliciales y los hom-set  $\mathcal{H}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  se pueden calcular como el conjunto de morfismos  $s\mathcal{S}(\text{Ex}^\infty(\mathcal{X}), \text{Ex}^\infty(\mathcal{Y}))$  módulo homotopía simplicial.

### 3. Teoría de topos

En este capítulo recordamos algunos hechos básicos de la teoría de topos, damos algunos ejemplos y técnicas relevantes para capítulos posteriores. La referencia principal que seguimos es [SGA4-1, SGL].

#### 3.1. Sitios y haces

**Notación 3.1.1.** En esta sección hacemos el siguiente abuso de notación dado por Grothendieck: identificamos un funtor representable con el objeto que este representa, este abuso se justifica por el Lema de Yoneda. Por lo tanto dado  $U \in \mathcal{C}$ , denotamos  $U = \mathcal{C}(-, U) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{S}$ .

**Definición 3.1.2.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría y  $U \in \mathcal{C}$  un objeto, una **criba** en  $U$  es un subfuntor  $S \subset U$  donde  $U$  denota el representable por  $U$  de acuerdo a la notación previa.

**Observación 3.1.3.** Una criba en  $U$  puede ser caracterizada de forma explícita como una colección  $S$  de morfismos con codominio  $U$  que son cerrados por pre-composición con cualquier morfismo, i.e tal que si  $V \xrightarrow{f} U \in S$  y  $W \xrightarrow{h} V$  es cualquier morfismo, entonces  $W \xrightarrow{fh} U \in S$ .

**Definición 3.1.4.** Un **sitio** está dado por una categoría  $\mathcal{C}$  equipada con una **topología**  $J$ . Una topología en una categoría consiste de un conjunto de cribas  $J(U)$  para cada  $U \in \mathcal{C}$ , llamadas cribas cubrientes tal que se cumplen los siguientes axiomas:

(T1)  $U$  es una criba cubriente, i.e. la criba maximal  $U \in J(U)$ .

(T2) (estabilidad por cambio de base) si  $S \subset U$  es una criba cubriente y  $V \xrightarrow{h} U$  es cualquier morfismo, entonces  $h^*(S) = S \times_V U$  es una criba cubriente de  $V$ . Recordemos que  $h^*(S)$  es la siguiente criba  $h^*(S)(W) = \{ W \xrightarrow{f} V \mid hf \in S \}$ .

(T3) (caracter local) Si  $R \subset U$  es una criba cubriente, y  $S \subset U$  es una criba tal que para todo  $V \xrightarrow{f} U \in R$ ,  $f^*(S) \subset V$  es una criba cubriente, entonces  $S$  es una criba cubriente.

**Definición 3.1.5.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría y  $U \in \mathcal{C}$ . Un conjunto de morfismos  $\{f_i : U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$  con codominio  $U$  determina una criba generada:

$$S(V) = \{ f : V \rightarrow U \mid f = f_i h \text{ para algún } i \}$$

Si  $(\mathcal{C}, J)$  es un sitio, decimos que un conjunto of morfismos  $\{f_i : U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$  con codominio  $U$  es una **familia cubriente** si la criba generada es una criba cubriente.

Alternativamente, uno puede definir una topología definiendo las familias cubrientes que satisfacen algunos axiomas.

**Definición 3.1.6.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría, una **pre-topología** consiste de conjuntos  $\text{Cov}(U)$  for each  $U \in \mathcal{C}$  de familias (i.e. conjuntos indexados) de morfismos  $\{f_i : U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$  llamadas **familias cubrientes** tales que:

(PT1) Si  $V \xrightarrow{f} U$  es un isomorfismo, entonces  $\{f : V \rightarrow U\}$  es una familia cubriente of  $U$ .

(PT2) (Estabilidad por cambio de base) Si  $\{f_i : U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$  es una familia cubriente y  $V \xrightarrow{h} U$  es cualquier morfismo, existe una familia cubriente  $\{g_j : V_j \rightarrow V \mid j \in J\}$  de  $V$ , una función  $\varphi : J \rightarrow I$ , y morfismos  $V_j \xrightarrow{h_j} U_{\varphi(j)}$  tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} V_j & \xrightarrow{h_j} & U_{\varphi(j)} \\ g_j \downarrow & & \downarrow f_{\varphi(j)} \\ V & \xrightarrow{h} & U \end{array}$$

(PT3) (Caracter local) Si  $\{f_i : U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$  es una familia cubriente, y para cada  $i \in I$  tenemos una familia cubriente  $\{g_{i,j} : U_{i,j} \rightarrow U_i \mid j \in J_i\}$ , entonces la familia  $\{f_i g_{i,j} : U_{i,j} \rightarrow U \mid j \in J_i, i \in I\}$  es cubriente.

Una pre-topología es llamada una **topología** si además satisface:

(R) (Cerrada por refinamientos) Si  $\{f_i : U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$  es una familia tal que existe una familia cubriente  $\{g_j : V_j \rightarrow U \mid j \in J\}$ , una función  $J \xrightarrow{\varphi} I$  y morfismos  $V_j \xrightarrow{h_j} U_{\varphi(j)}$  tales que  $g_j = f_{\varphi(j)} h_j$ , entonces  $\{f_i : U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$  es una familia cubriente.

**Ejemplo 3.1.7.** Si  $\mathcal{C} = \mathcal{O}(B)$  es el poset de subconjuntos abiertos de un espacio topológico  $B$ , entonces dado  $U$  abierto, una criba  $S \subset U$  es una colección de subconjuntos abiertos de  $U$  tal que si  $V$  está en  $S$  y  $W \subset V$  entonces  $W$  está en  $S$ , i.e. una colección de subconjuntos abiertos cerrada por subconjuntos. En esta categoría la topología se define de la siguiente forma. Una criba  $S \subset U$  es una criba cubriente si y solo si  $U = \bigcup_{V \in S} V$ . Alternativamente, podemos definir la topología con familias cubrientes, una familia cubriente  $(U_i \longrightarrow U)_i$  es una tal que  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Esta es llamada **la topología de los cubrimientos por abiertos** en  $\mathcal{O}(B)$ .

**Ejemplo 3.1.8.** Dada  $\mathcal{C} = \mathbf{Rings}_{f.p.}^{op}$ , la categoría dual a la de los anillos finitamente presentados, entonces definimos una familia  $(R \longrightarrow R_i)_i$  como una cubriente si  $R_i = R[f_i^{-1}]$ , el morfismo es la localización canónica en  $f_i \in R$ , y también  $1 = \sum a_i f_i$ . Esto define una pre-topología y el sitio asociado es el **sitio Zariski**.

**Definición 3.1.9.** Dada una categoría  $\mathcal{C}$  y dos topologías  $J, J'$ , decimos que  $J$  es mas fina que  $J'$  si  $J' \subset J$ , i.e. cada criba en  $J'$  está en  $J$  ( $J$  tiene mas cribas que  $J'$ ).

**Ejemplo 3.1.10.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña, definimos una topología, la **topología discreta**, declarando que cualquier criba es una criba cubriente, esta es la topología mas fina.

**Ejemplo 3.1.11.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña, definimo la **topología caótica**, declarando  $J(U) = \{U\}$ , esta es la topología más gruesa.

**Proposición 3.1.12.** Vale lo siguiente:

1. Si  $R \subset S \subset U$  y  $R$  es una criba cubriente entonces  $S$  es cubriente.
2. Si tenemos una criba cubriente  $R \subset U$  y para todo  $V \xrightarrow{f} U \in R$  tenemos una criba cubriente  $S_f \subset V$ , entonces la composición de cribas  $R \circ S = \{f \circ g \mid f \in R, g \in S_f\}$  es una criba cubriente.
3. Si  $R, S \subset U$  son cribas cubrientes, entonces  $R \times_U S \subset U$  es cubriente.
4. El conjunto  $J(U)$  de cribas cubrientes de un objeto  $U$  es una poset cofiltrante con respecto de la inclusión.

**Proposición 3.1.13.** Dada  $\mathcal{C}$  con una pretopología, definimos  $\text{Cov}_R(U)$  como las familias que tienen un refinamiento en  $\text{Cov}(U)$ . Entonces esto define una topología, i.e. una pre-topología cerrada por refinamientos.

**Teorema 3.1.14.** Dado un sitio  $(\mathcal{C}, J)$ . Declaramos una familia como cubriente si la criba asociada es una criba cubriente. Esta definición nos da una categoría con una pre-topología (la cual es en efecto una topología, i.e. es cerrada por refinamientos).

Recíprocamente, dada una categoría  $\mathcal{C}$  con una pre-topología, uno obtiene una topología al tomar como cribas cubrientes las que tienen un refinamiento por una familia cubriente. Las cribas generadas por familias cubrientes  $J_{\text{Cov}}(U)$  son iniciales en  $J(U)$  para todo  $U \in \mathcal{C}$ .

Denotamos by  $\text{PSh}(\mathcal{C})$  the categoría de prehaces para un sitio pequeño, i.e. la categoría  $\mathcal{S}^{cop}$  de funtores contravariantes con valores en conjuntos.

**Definición 3.1.15.** Dado un sitio  $(\mathcal{C}, J)$ , un prehaz  $F$  es un **haz** si para toda criba cubriente  $R \subset U$  el morfismo natural

$$\text{PSh}(\mathcal{C})(U, F) \longrightarrow \text{PSh}(\mathcal{C})(R, F)$$

es una biyección.

Dado  $(\mathcal{C}, J)$  un sitio pequeño, denotemos  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  la categoría de haces, una subcategoría plena de la categoría de prehaces  $\text{PSh}(\mathcal{C})$ .

**Proposición 3.1.16.** Dado un sitio definido por una pre-topología, las siguientes son equivalentes:

1.  $F$  es un haz.
2. El morfismo natural  $F(U) \longrightarrow \lim_{f:V \rightarrow U \in R} F(V)$  es una biyección para toda criba cubriente  $R \subset U$ .
3. El siguiente diagrama es un egalizador para cada familia cubriente  $(U_i \xrightarrow{f_i} U)_i$ :

$$F(U) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j)$$

es decir, dadas secciones compatibles  $s_i \in F(U_i)$  para  $i \in I$ , existe una única sección  $s \in F(U)$  tal que  $f_i^*(s) = s_i$ .

En otras palabras,  $F$  es un haz para una pre-topología si y solo si es un haz para la topología generada.

**Teorema 3.1.17.** (Construcción de topologías) Dada  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña y  $\mathcal{F}$  una familia de prehaces, entonces existe una topología donde  $S \subset U$  es una criba cubriente si y solo si para toda  $V \xrightarrow{f} U$  el morfismo

$$\text{PSh}(\mathcal{C})(V, F) \longrightarrow \text{PSh}(\mathcal{C})(f^*(S), F)$$

es biyectivo para todo  $F \in \mathcal{F}$ . Esta es la topología más fina tal que todo  $F \in \mathcal{F}$  es un haz.

**Corolario 3.1.18.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña, existe una topología llamada la **topología canónica**, es la topología mas fina tal que los representables son haces.

**Definición 3.1.19.** Una topología  $J$  se dice **subcanónica** si todos los representables son haces para  $J$ , o equivalentemente si  $J$  está incluido en la topología canónica.

Ahora queremos construir un haz asociado a un prehaz de forma universal, primero definimos el siguiente funtor:

$$LF(U) = \operatorname{colim}_{R \in J(U)} \operatorname{PSh}(\mathcal{C})(R, F)$$

Este es un colímite filtrante de conjuntos y en el caso que tenemos una pre-topología, recordemos que  $J_{Cov} \subset J$  es cofinal, por tanto podemos tomar el colímite con respecto a las familias cubrientes, luego una sección  $s \in LF(U)$  está dada por una familia compatible de secciones  $s_i \in F(U_i)$  para una familia cubriente  $(U_i \rightarrow U)_i$ , módulo una relación de equivalencia dada por refinamiento. Se tiene un morfismo natural  $F \xrightarrow{\eta} LF$ . El prehaz  $LF$  no es en general un haz, sin embargo si aplicamos de nuevo esta construcción entonces  $L^2F$  es un haz.

**Teorema 3.1.20.** Hay una adjunción  $\operatorname{Sh}(\mathcal{C}, J) \xrightleftharpoons[i]{a} \operatorname{PSh}(\mathcal{C}, J)$ , donde el adjunto a izquierda  $a$  es llamado el **haz asociado** e  $i$  es la inclusión canónica. Más aún el haz asociado es exacto a izquierda (i.e. preserva límites finitos).

Usualmente se denota por  $\tilde{F}$  al haz asociado de un prehaz  $F$ .

## 3.2. Propiedades de exactitud de los topos

**Definición 3.2.1.** Un **topos**  $\mathcal{E}$  es una categoría equivalente a una categoría de haces sobre un sitio pequeño  $(\mathcal{C}, J)$ .

**Ejemplo 3.2.2.** 1. Si  $B$  es un espacio topológico, entonces  $\mathcal{E} = \operatorname{Sh}(B)$  la categoría de haces con respecto a la topología de los cubrimientos por abiertos es un topos.

2. Si  $(\mathcal{C}, J)$  es un sitio pequeño, entonces  $\mathcal{E} = \operatorname{Sh}(\mathcal{C}, J)$  es un topos por definición.

3. Si  $\mathcal{C}$  es cualquier categoría pequeña, entonces  $\mathcal{E} = \operatorname{PSh}(\mathcal{C}) = \mathcal{S}^{C^{op}}$  es un topos, llamado un topos de prehaces.

4. Si  $(\mathcal{C}, J)$  es el sitio Zariski del Ejemplo 3.1.8, entonces  $\mathcal{E} = \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  es un topos. Además, la categoría de esquemas sobre  $\mathbb{Z}$  es una subcategoría plena de este topos.
5. La categoría  $\mathcal{S}$  de conjuntos es un topos.
6. Sea  $\Gamma$  la categoría con dos objetos y dos morfismos paralelos  $V \begin{matrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{matrix} E$ , entonces la categoría de grafos dirigidos  $\mathbf{Grph} = \mathcal{S}^{\Gamma^{op}}$  es un topos de prehaces.
7. Sea  $\mathbb{2}$  la categoría con dos objetos y un morfismo entre ellos, entonces la categoría de funciones  $\mathcal{S}^{\mathbb{2}}$  es un topos.
8. Sea  $\Delta$  la categoría de los ordinales finitos no vacíos y morfismos las funciones que preservan el orden, entonces la categoría de conjuntos simpliciales  $s\mathcal{S} = \mathcal{S}^{\Delta^{op}}$  es un topos de prehaces.
9. Sea  $G$  un grupo, consideremos la categoría  $G$  con un objeto  $*$  y  $\text{Hom}(*, *) = G$  con la multiplicación del grupo como la composición. Entonces la categoría  $\mathcal{S}^{G^{op}}$  (resp.  $\mathcal{S}^G$ ) i.e. la categoría de conjuntos con una acción acción a derecha (resp. a izquierda) de  $G$  es un topos de prehaces.

**Observación 3.2.3.** En la definición de un topos, es importante que el sitio sea pequeño, sin embargo en la práctica uno puede trabajar con sitios grandes si estos tienen un conjunto de 'generadores topológicos' [SGA4-1][Exposé II, 3.0.1].

**Definición 3.2.4.** Dado  $(\mathcal{C}, J)$  un sitio (posiblemente grande), entonces una **familia de generadores topológicos** de  $\mathcal{C}$  es un conjunto de objetos  $\mathcal{G}$  en  $\mathcal{C}$ , tales que para todo  $U \in \mathcal{C}$ , existe una familia cubriente  $(U_i \rightarrow U)_i$  con  $U_i \in \mathcal{G}$  para todo  $i \in I$ .

Si tenemos una familia de generadores topológicos, entonces la categoría de haces es legítima (i.e. tiene hom-sets pequeños) y uno puede construir el haz asociado. También podemos tomar la subcategoría plena determinada por sus objetos como un sitio pequeño, y este será un sitio pequeño para el topos de haces.

**Definición 3.2.5.** Dado  $\mathcal{C} \xrightarrow{i} \mathcal{D}$  una subcategoría se dice **reflectiva** si es plena y si la inclusión tiene un adjunto a izquierda  $r \dashv i$ . Esto es equivalente a tener una adjunción tal que la counidad  $ri(c) \xrightarrow{\varepsilon_c} c$  es un isomorfismo natural. El adjunto a izquierda  $r$  se llama **reflector**.

**Ejemplo 3.2.6.** Dado  $(\mathcal{C}, J)$  un sitio pequeño, la adjunción  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J) \xrightleftharpoons[i]{a} \text{PSh}(\mathcal{C}, J)$  hace a la categoría de haces una subcategoría reflectiva de la categoría de prehaces.

**Lema 3.2.7.** Dada  $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[i]{r} \mathcal{D}$  una subcategoría reflectiva y supongamos que  $\mathcal{D}$  es completa y cocompleta, entonces:

1.  $i$  crea los límites en  $\mathcal{C}$  (ver Definición 1.1.27).
2. Los colímites en  $\mathcal{C}$  se calculan como sigue. Tomamos el colímite en  $\mathcal{D}$  y le aplicamos el reflector  $r$ .

**Definición 3.2.8.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría cerrada por colímites pequeños y límites finitos, decimos que los **colímites son universales** si dado un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  y un functor  $Z : I \rightarrow \mathcal{C}$  desde una categoría pequeña  $I$  con un morfismo  $g : \text{colim}_{i \in I} Z_i \rightarrow Y$ , entonces el siguiente morfismo canónico es un isomorfismo:

$$\text{colim}_{i \in I} (X \times_Y Z_i) \longrightarrow X \times_Y (\text{colim}_{i \in I} Z_i)$$

Podemos restringir esta definición de la manera obvia a los colímites de un tipo particular, por ejemplo coproductos o coegalizadores.

**Definición 3.2.9.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría, un **objeto inicial**  $\emptyset_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$  es un objeto con un único morfismo  $\emptyset_{\mathcal{C}} \xrightarrow{!} X$  para todo  $X \in \mathcal{C}$ . Un objeto inicial  $\emptyset_{\mathcal{C}}$  es **estricto** si cualquier morfismo  $X \rightarrow \emptyset_{\mathcal{C}}$  es un isomorfismo.

**Definición 3.2.10.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría, y  $\lambda_i : X_i \rightarrow X$  con  $i \in I$  un coproducto, es decir  $X \simeq \sum_{i \in I} X_i$ . Decimos que los **coproductos son disjuntos** si  $\lambda_i$  es un monomorfismo para todo  $i \in I$ , y dado  $i \neq j$ , el pullback  $X_i \times_X X_j$  es un objeto inicial.

**Definición 3.2.11.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría y  $X \in \mathcal{C}$  un objeto, una **relación de equivalencia** en  $X$  es un objeto  $R$  junto con dos morfismos  $R \xrightleftharpoons[p_1]{p_0} X$  tal que para todo  $Z \in \mathcal{C}$  la función:

$$\mathcal{C}(Z, R) \longrightarrow \mathcal{C}(Z, X) \times \mathcal{C}(Z, X)$$

define una relación de equivalencia en el conjunto de morfismos  $\mathcal{C}(Z, X)$ .

**Ejemplo 3.2.12.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría y  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo, y supongamos que el siguiente pullback existe:

$$\begin{array}{ccc} R_f & \xrightarrow{p_0} & X \\ p_1 \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

Entonces  $R_f \xrightarrow[p_1]{p_0} X$  es una relación de equivalencia, llamada el **kernel pair** de  $f$ .

**Definición 3.2.13.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría y un morfismo  $X \xrightarrow{f} Y$ , decimos que  $f$  es un **epimorfismo efectivo** si el kernel pair  $R_f \xrightarrow[p_1]{p_0} X$  existe y  $f$  es el coequalizador de su kernel pair. Decimos que un epimorfismo efectivo  $f$  es **universal** si su pullback a lo largo de cualquier morfismo es un epimorfismo efectivo.

Decimos que  $f$  es un **epimorfismo regular** si  $f$  es un coequalizador de cualquier par de morfismos.

**Observación 3.2.14.** Trivialmente un epimorfismo efectivo es un epimorfismo regular y un epimorfismo regular es un epimorfismo. Además, si un morfismo  $X \xrightarrow{f} Y$  tiene un kernel pair y es un epimorfismo regular entonces también es efectivo.

**Definición 3.2.15.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría y  $R \xrightarrow[p_1]{p_0} X$  una relación de equivalencia, decimos que es **efectiva** si  $R \xrightarrow[p_1]{p_0} X$  is the kernel pair de un morfismo  $X \xrightarrow{f} Y$ , y  $f$  es un epimorfismo efectivo, i.e.  $f$  es el coequalizador de  $R \xrightarrow[p_1]{p_0} X$ . Decimos que la relación es **universal** si además  $f$  es un epimorfismo efectivo universal.

**Definición 3.2.16.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría y un conjunto de objetos  $(X_i)_{i \in I}$  de  $\mathcal{C}$ , decimos que es un **conjunto de generadores** si para todo  $X \in \mathcal{C}$ , la familia de todos los morfismos  $x : X_i \rightarrow X$  for  $i \in I$  es una familia epimorfa. En otras palabras, si dos morfismos  $X \xrightarrow[g]{f} Y$  son tales que  $fx = gx$  para toda morfismo  $x : X_i \rightarrow X$  para todo  $i \in I$ , entonces  $f = g$ .

Un conjunto de generadores se llama **denso** si dado  $X \in \mathcal{C}$  un objeto, entonces  $X \simeq \operatorname{colim}_{x: X_i \rightarrow X} X_i$  donde el colímite es sobre la categoría de todos los morfismos  $x : X_i \rightarrow X$  para  $i \in I$  y un morfismo  $(x_i, X_i) \rightarrow (x_j, X_j)$  en esta categoría es una flecha  $f : X_i \rightarrow X_j$  tal que  $x_i = fx_j$ .

**Teorema 3.2.17.** (Propiedades de exactitud de un topos) Dado  $(\mathcal{C}, J)$  un sitio pequeño, consideremos la adjunción del haz asociado  $\operatorname{Sh}(\mathcal{C}, J) \xrightleftharpoons[i]{a} \operatorname{PSh}(\mathcal{C}, J)$ , entonces:

1.  $a$  conmuta con colímites y con límites finitos.
2.  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  tiene colímites y estos se calculan al hacificar el colímite de prehaces.
3.  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  tiene límites y estos se calculan punto a punto como en el caso de los prehaces.
4. Para cada haz  $F$ ,  $F = \text{colim}_{(x,U) \in \Gamma_F} \tilde{U}$ , en particular  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  tiene un conjunto pequeño de generadores densos.
5. Todo morfismo tiene una factorización epi-mono, i.e. como un epimorfismo seguido por un monomorfismo.
6. Si  $F \xrightarrow{\varphi} G$  es mono y epi, entonces es iso.
7.  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  tiene un objeto inicial estricto.
8. Los coproductos son disjuntos.
9. Los colímites son universales.
10. Toda familia epimorfa es efectiva y universal.
11. Toda relación de equivalencia es efectiva y universal.
12. Los colímites filtrantes conmutan con los límites finitos.

**Definición 3.2.18.** Dada una categoría  $\mathcal{E}$  y un objeto  $X \in \mathcal{E}$ , entonces un subobjeto de  $X$  está dado por un monomorfismo  $Y \xrightarrow{f} X$  módulo la relación de equivalencia donde dos monos  $f \sim g$  si y solo si existe un isomorfismo  $h : Y \rightarrow Z$  tal que  $f = gh$ . Esto forma una colección posiblemente grande  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$ . Además, existe un orden parcial donde  $[f] \leq [g]$  si y solo si existe un morfismo  $h : Y \rightarrow Z$  tal que  $f = gh$  (notar que si  $[f] \leq [g]$  y  $[g] \leq [f]$  entonces  $[f] = [g]$ ). Nos referimos a  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$  con este orden parcial como el **poset de subobjetos** (posiblemente grande) de  $X$ .

**Teorema 3.2.19.** Dado  $\mathcal{E}$  un topos y  $X \in \mathcal{E}$  un objeto, entonces  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$  es un poset pequeño.

**Proposición 3.2.20.** (Reconocimiento de cubrimientos) Dados  $(\mathcal{C}, J)$  un sitio y  $(U_i \xrightarrow{f_i} U)_i$  una familia en  $\mathcal{C}$ . Entonces esta es una familia cubriente si y solo si  $(\tilde{U}_i \xrightarrow{\tilde{f}_i} \tilde{U})_i$  es una familia epimorfa en los haces.

**Teorema 3.2.21. (Teorema de Giraud)** Dada  $\mathcal{E}$  una categoría, entonces son equivalentes:

1.  $\mathcal{E}$  es un topos.
2. Existe una categoría pequeña  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{E}$  es una subcategoría reflectiva de  $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{op}}$  con reflector exacto a izquierda.
3.
  - a)  $\mathcal{E}$  tiene límites finitos.
  - b)  $\mathcal{E}$  tiene todos los coproductos pequeños, estos son disjuntos y universales.
  - c) Toda relación de equivalencia es efectiva y universal.
  - d)  $\mathcal{E}$  tiene un conjunto de generadores.

**Observación 3.2.22.** Observemos que para nosotros una categoría  $\mathcal{C}$  tiene hom-sets pequeños por definición, una condición que algunos autores excluyen y llaman una categoría localmente pequeña si esto se cumple. Acá no adherimos a esta notación. Esta condición es necesaria para aplicar el Teorema de Giraud (y la mayoría de los teoremas en la teoría de categorías). Esto es, si tenemos una categoría ilegítima (por ejemplo si sus hom-sets no son pequeños) el teorema es falso.

**Teorema 3.2.23.** Dados  $\mathcal{E}$  un topos y  $X \in \mathcal{E}$ , entonces la categoría slice  $\mathcal{E}/X$  es un topos.

### 3.3. Morfismos geométricos

**Definición 3.3.1.** Dados  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  topos, entonces un **morfismo geométrico**  $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$  está dado por un par de funtores adjuntos  $f^* \dashv f_*$

$$\mathcal{E} \begin{array}{c} \xleftarrow{f^*} \\ \xrightarrow{f_*} \end{array} \mathcal{F}$$

tal que  $f^*$  es exacto a izquierda. Notemos que la dirección está dada por la imagen directa  $f_*$ , que va en la "dirección geométrica".

Dados  $f, g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  dos morfismos geométricos, una **transformación geométrica**  $\eta : f \Rightarrow g$  está dada por una transformación natural  $\eta^* : f^* \Rightarrow g^*$ . Denotemos por  $\mathbf{Top}_{\mathcal{S}}$  la 2-categoría (ilegítima) de topos.

**Observación 3.3.2.** Un funtor entre topos que preserva colímites siempre tiene un adjunto a derecha, luego para definir un morfismo geométrico  $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$  es suficiente con dar un funtor exacto a izquierda que preserve colímites  $\mathcal{F} \xrightarrow{f^*} \mathcal{E}$  (y luego elegir a un adjunto a derecha, único salvo isomorfismo).

**Ejemplo 3.3.3.** 1. Si  $X \xrightarrow{f} Y$  es una función continua entre espacios topológicos entonces obtenemos un morfismo geométrico  $\text{Sh}(X) \xrightarrow{f} \text{Sh}(Y)$ . De hecho el recíproco es cierto al menos para espacios hausdorff (más generalmente para espacios sobrios), un morfismo geométrico entre espacios topológicos hausdorff proviene de una función continua (salvo isomorfismo natural). Para ver esto notar que los subobjetos del haz terminal es el poset de abiertos y dado  $\text{Sh}(X) \xrightarrow{f} \text{Sh}(Y)$  un morfismo geométrico, entonces  $f^*$  preserva subobjetos pues es exacto. Definimos  $X \xrightarrow{f} Y$  por  $f(x) = y$  si y solo si  $x \in f^*(V)$  para todo  $V \ni y$ .

2. Si  $\mathcal{E} = \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  entonces la inclusión en los prehaces  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J) \xrightarrow{i} \text{PSh}(\mathcal{C}, J)$  es un morfismo geométrico pues el haz asociado es exacto a izquierda.

3. Si  $\mathcal{E}$  es un topos, tenemos un morfismo geométrico  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$ , donde  $\gamma_* = \mathcal{E}(1, -)$  es el funtor de secciones globales. En efecto, como este es representable tiene un adjunto a izquierda  $\gamma^*$  dado por  $\gamma^*(S) = \sum_{s \in S} 1 = S \cdot 1$  el haz localmente constante en  $S$ . Para ser mas explícitos supongamos  $\mathcal{E} = \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  donde  $\mathcal{C}$  es un sitio con límites finitos, sea 1 el objeto final de  $\mathcal{C}$ , entonces nos da el objeto final en  $\mathcal{E}$ , luego  $\gamma_*(F) = F(1)$  por Yoneda. Para el adjunto a izquierda, primero definamos el prehaz constante  $\gamma^p(S)(U) = S$  este nos da el adjunto a izquierda en prehaces y es claramente exacto a izquierda, luego tomamos el haz asociado  $\gamma^* = a\gamma^p$ .

De hecho  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  es esencialmente el único morfismo geométrico a  $\mathcal{S}$ , pues si  $\mathcal{E} \xrightarrow{\beta} \mathcal{S}$  es un morfismo geométrico entonces  $\beta^*$  preserva coproductos y el objeto final, y dado que un conjunto es el coproducto de sus elementos entonces el par de adjuntos queda determinado salvo isomorfismo.

4. Dado  $\mathcal{E}$  un topos y  $X \in \mathcal{E}$ , entonces el funtor  $\mathcal{E} \xrightarrow{X^*} \mathcal{E}/X$  tiene un adjunto a derecha. Esto se sigue pues  $X^* = (-) \times X$  preserva todos los colímites pues estos son universales, entonces la existencia de  $X_*$  se sigue formalmente del teorema del funtor adjunto.

Además  $X^*$  es exacto a izquierda pues tiene un adjunto a izquierda  $X_!$ , entonces tenemos un morfismo geométrico  $\mathcal{E}/X \xrightarrow{X} \mathcal{E}$ .

5. Dado un funtor  $\mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D}$  entre categorías pequeñas, entonces se tiene un funtor inducido  $\mathcal{S}^{\mathcal{D}} \xrightarrow{f^*} \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$  dado por pre-composición con  $f$ . Este funtor tiene adjuntos a izquierda y a derecha  $f_! \dashv f^* \dashv f_*$  dados respectivamente por la extensión de Kan a izquierda y derecha, ver Observación 1.1.20. Por lo tanto define un morfismo geométrico  $\mathcal{S}^{\mathcal{C}} \xrightarrow{f} \mathcal{S}^{\mathcal{D}}$ . Esta construcción define un 2-functor  $\mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Top}_{\mathcal{S}}$ . Además, el siguiente funtor:

$$\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathbf{Top}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}^{\mathcal{C}}, \mathcal{S}^{\mathcal{D}})$$

es plenamente fiel. Para ver esto, dados funtores  $f, g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y una transformación natural  $\eta : f \Rightarrow g$ . Entonces dado un objeto  $c \in \mathcal{C}$ , tenemos un isomorfismo natural

$$\mathcal{D}(d, fc) \xrightarrow{\eta_{d,c}} \mathcal{D}(d, gc)$$

en  $d \in \mathcal{D}$  (que también es natural en  $c \in \mathcal{C}$ ). Por el Lema de Yoneda esto se corresponde con un morfismo  $fc \xrightarrow{\hat{\eta}_c} gc$  en  $\mathcal{D}$ . Además define una transformación natural  $\hat{\eta} : f \Rightarrow g$  y por tanto el funtor es pleno y fiel.

Supongamos que tenemos sitios  $(\mathcal{C}, J)$  y  $(\mathcal{D}, J')$  con pullbacks y un funtor  $\mathcal{D} \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{C}$  (lo llamamos  $f^{-1}$  para sugerir que es como la preimagen entre los posets de abiertos de espacios topológicos). Entonces tenemos un funtor de imagen directa:

$$\mathbf{PSh}(\mathcal{C}, J) \xrightarrow{f_*} \mathbf{PSh}(\mathcal{D}, J')$$

por la fórmula  $f_*F(U) = F(f^{-1}(U))$ . Si queremos que este funtor se restrinja propiamente a los haces entonces necesitamos que  $f^{-1}$  preserve familias cubrientes. En este caso tenemos un funtor:

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) \xrightarrow{f_*} \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J')$$

Ahora el funtor imagen directa entre prehaces tiene un adjunto a izquierda por la extensión de Kan a izquierda como antes:

$$f^p G(V) = \operatorname{colim}_{V \rightarrow f^{-1}(U)} G(U)$$

Si  $f^{-1}$  es exacto a izquierda entonces el colímite es filtrante, y por tanto  $f^p$  es exacto a izquierda, entonces obtenemos  $f^* \dashv f_*$  con  $f^* = a f^p$  y es exacto a izquierda.

**Definición 3.3.4.** Dados  $(\mathcal{C}, J)$  y  $(\mathcal{D}, J')$  sitios con pullbacks, entonces un **morfismo de sitios** es un funtor  $\mathcal{D} \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{C}$  tal que  $f^{-1}$  preserve familias cubrientes y es exacto a izquierda.

**Proposición 3.3.5.** Un morfismo de sitios  $(\mathcal{D}, J) \xrightarrow{f^{-1}} (\mathcal{C}, J')$  induce un morfismo geométrico

$$\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J) \xrightarrow{f} \mathrm{Sh}(\mathcal{D}, J')$$

**Ejemplo 3.3.6.** 1. Si  $X \xrightarrow{f} Y$  es una función continua entre espacios topológicos entonces tenemos un morfismo de sitios  $\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{O}(X)$ .

2. Si  $(\mathcal{C}, J)$  es un sitio y tomamos  $J'$  la topología caótica, entonces  $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J') = \mathcal{S}^{cop}$  pues la condición de haz es trivial y  $(\mathcal{C}, J') \xrightarrow{1c} (\mathcal{C}, J)$  es un morfismo de sitios esto nos da la adjunción  $a \dashv i$ .

3. Mas generalmente si  $\mathcal{C}$  es una categoría y  $J, J'$  son topologías con  $J$  mas fina que  $J'$ , i.e.  $J' \subset J$ , entonces  $(\mathcal{C}, J') \xrightarrow{1c} (\mathcal{C}, J)$  es un morfismo de sitios, y entonces tenemos un morfismo geométrico inducido dado por la inclusión  $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J) \xrightarrow{i} \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J')$ .

4. Si tomamos  $\mathcal{D}$  la categoría final (con un objeto  $*$  y el morfismo identidad), entonces existe una única topología en  $\mathcal{D}$ , y el topos asociado es  $\mathcal{S}$ . Definimos  $(\mathcal{D}, J') \xrightarrow{\gamma^{-1}} (\mathcal{C}, J)$  por  $\gamma^{-1}(*) = 1 \in \mathcal{C}$  el objeto final, esto da un morfismo de sitios que induce el único morfismo geométrico  $\gamma$ .

5. Si  $X \xrightarrow{f} Y$  es un morfismo de esquemas entonces tenemos un morfismo de sitios  $\mathrm{Zar}(Y) \xrightarrow{f^{-1}} \mathrm{Zar}(X)$  entre los sitios pequeños Zariski (resp. étale), dados por pullback a lo largo de  $f$ . Esto nos da un morfismo geométrico

$$\mathrm{Sh}(\mathrm{Zar}(X)) \xrightarrow{f} \mathrm{Sh}(\mathrm{Zar}(Y))$$

6. Notar que en particular si  $x \in X$  es un punto de un espacio topológico, tenemos una función continua  $* \xrightarrow{x} X$ . Como la categoría de haces del espacio singleton es la categoría de conjuntos, obtenemos un morfismo geométrico  $\mathcal{S} \xrightarrow{x} \mathrm{Sh}(X)$ . Dado  $S$  un conjunto calculamos:

$$x_*S(U) = S(x^{-1}(U)) = \begin{cases} S & \text{si } x \in U \\ * & \text{si } x \notin U \end{cases}$$

Este es llamado el **haz rascacielos** en  $x$  con valor  $S$ . Por otra parte, si  $F$  es un haz en  $X$ , entonces

$$x^*F = \operatorname{colim}_{x \in U} F(U)$$

Notar que este colímite es filtrante por tanto este funtor es exacto, esta es el **stalk** de  $F$  en  $x$  dado por los gérmenes de secciones locales.

**Definición 3.3.7.** Dado  $\mathcal{E}$  un topos, un **punto** de  $\mathcal{E}$  es un morfismo geométrico  $\mathcal{S} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ .

**Lema 3.3.8.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$  un morfismo geométrico, entonces son equivalentes:

1.  $f^*$  es fiel.
2.  $f^*$  es conservativo (i.e refleja isos).
3.  $f^*$  refleja epis.
4.  $f^*$  refleja monos.

En tal caso  $f$  se dice un **morfismo geométrico suryectivo**.

**Definición 3.3.9.** Un topos  $\mathcal{E}$  tiene **suficientes puntos** si existe un conjunto de puntos  $(\mathcal{S} \xrightarrow{x_i} \mathcal{E})_{i \in I}$  tales que la familia de funtores  $(x_i^*)_i$  es conjuntamente conservativa, o equivalentemente existe un morfismo geométrico sobreyectivo  $\mathcal{S}/I \xrightarrow{(x_i)_i} \mathcal{E}$ .

**Ejemplo 3.3.10.** Si  $\mathcal{E} = \operatorname{Sh}(X)$  es el topos de haces sobre un espacio topológico, entonces tiene suficientes puntos, en efecto el conjunto de puntos del espacio nos da puntos tales que  $(x^*)_{x \in X}$  es conjuntamente conservativa. Para esto si  $F \xrightarrow{\varphi} G$  es tal que  $x^*\varphi$  es iso si  $s \in GU$ , entonces tenemos  $s_x \in x^*G$ , para cada  $x$  existe un único  $t_x \in x^*F$  tal que  $x^*\varphi(t_x) = s_x$ , este germen se levanta a secciones locales  $t_i \in FU_i$  y son compatibles por unicidad, por tanto no da un único  $s \in FU$  tal que  $\varphi(t) = s$ .

**Observación 3.3.11.** En el topos  $\mathcal{S}/I$  que como categoría es simplemente un producto de  $I$  copias de la categoría de conjuntos, es claro que todo epimorfismo (i.e. una  $I$ -tupla de funciones suryectivas) tiene una sección. Notar que este es el topos  $\operatorname{Sh}(2^I)$  de haces sobre el algebra de boole de los subconjuntos de  $I$ .

**Observación 3.3.12. (Sobre el teorema de Barr)** Un profundo resultado de M. Barr dice que todo topos  $\mathcal{E}$  admite un morfismo geométrico suryectivo  $\mathcal{B} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$  desde el topos  $\mathcal{B} = \text{Sh}(B)$  de haces de un álgebra de boole completa  $B$ . En este topos todo epimorfismo admite una sección, luego los funtores de evaluación  $\text{ev}_b : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$  dados por  $\text{ev}_b(X) = X(b) = \mathcal{B}(b, X)$  para  $b \in B$  mandan epimorfismos a funciones suryectivas. Luego un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  en  $\mathcal{B}$  es un epimorfismo si y solo si  $X(f) : X(b) \rightarrow Y(b)$  es suryectiva para todo  $b \in B$ .

**Teorema 3.3.13.** Dado un topos  $\mathcal{E} = \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  entonces la categoría de puntos es equivalente a la categoría de funtores playos  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  que manda familias cubrientes a epimorfismos.

Similarmente se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.3.14.** [SGA4-1, Exposé IV, Proposition 4.9.4.] Dado  $(\mathcal{C}, J)$  un sitio y  $\mathcal{E}$  un topos, entonces los morfismos geométricos  $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  se corresponden con funtores playos  $\mathcal{C} \xrightarrow{f^*} \mathcal{E}$  que mandan cubrimientos a familias epimorfas, donde un functor es playo si y solo si su extensión de Kan a izquierda a lo largo de Yoneda preserva límites finitos (si  $\mathcal{C}$  tiene límites finitos entonces es playo si y solo si es exacto a izquierda). Además esto es una equivalencia de categorías.

El siguiente resultado es una caracterización interesante de funtores playos debida a A. Joyal la cual no requiere el embedding de Yoneda ni la noción de extensión de Kan.

**Proposición 3.3.15.** (A. Joyal) Dado  $\mathcal{E}$  un topos y  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña, entonces un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  es playo si y solo si satisface las siguientes propiedades:

- a) La familia de todos los morfismos  $F(U) \rightarrow 1$  para todo  $U \in \mathcal{C}$ , es epimorfa.
- b) Dados  $U, V \in \mathcal{C}$ , consideremos el conjunto de morfismos  $u : W \rightarrow U, v : W \rightarrow V$  en  $\mathcal{C}$ . Entonces la familia de todas las morfismos  $(Fu, Fv) : F(W) \rightarrow F(U) \times F(V)$  es epimorfa.
- c) Dados dos morfismos  $V \xrightarrow[u]{v} U$  en  $\mathcal{C}$ , consideremos el conjunto de todos los morfismos  $w : W \rightarrow V$  tales que  $uw = vw$ . Entonces la familia de morfismos inducidas  $F(W) \rightarrow E$  es epimorfa, donde  $E \in \mathcal{E}$  es el egalizador de  $Fu$  y  $Fv$ .

### 3.4. Torsores

**Definición 3.4.1.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $G$  un grupo, entonces un  $G$ -torsor (a derecha) es un objeto  $T \in \mathcal{E}$  con una acción a derecha  $\mu : T \times \gamma^*G \rightarrow T$  tal que:

- a)  $T \rightarrow 1$  es un epimorfismo.
- b) El morfismo  $\varepsilon = (\mu, \text{pr}_1) : T \times \gamma^*G \rightarrow T \times T$  es un isomorfismo, donde  $\text{pr}_1$  es la proyección en su primera coordenada.

Un morfismo de  $G$ -torsores es simplemente un morfismo  $T \rightarrow T'$  en  $\mathcal{E}$  que es  $G$ -equivariante, i.e. conmuta con la acción de  $G$ , estos determinan una categoría  $\mathbf{Tors}(\mathcal{E}, G)$  de  $G$ -torsores en  $\mathcal{E}$ .

**Observación 3.4.2.** La categoría  $\mathbf{Tors}(\mathcal{E}, G)$  depende funtorialmente en  $\mathcal{E}$ . Esto es, dado un morfismo geométrico  $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$  y  $(T, \mu)$  un  $G$ -torsor, entonces  $f^*T$  define un  $G$ -torsor en  $\mathcal{F}$ . Recordemos que tenemos un isomorfismo natural  $\gamma_{\mathcal{F}}^* \simeq f^*\gamma_{\mathcal{E}}^*$  y como  $f^*$  es exacto a izquierda entonces la acción a derecha en  $f^*T$  está dada por:

$$f^*T \times \gamma_{\mathcal{F}}^*G \simeq f^*(T \times \gamma_{\mathcal{E}}^*G) \xrightarrow{f^*\mu} f^*T$$

En otras palabras, el morfismo geométrico  $f$  define un funtor  $\mathbf{Tors}(\mathcal{E}, G) \xrightarrow{f^*} \mathbf{Tors}(\mathcal{F}, G)$ .

Además, una transformación geométrica  $\mathcal{F} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{g} \end{array} \mathcal{E}$  define una transformación natural  $\eta^* : f^* \Rightarrow g^*$  por restricción a los torsores.

**Observación 3.4.3.** Dado un  $G$ -torsor  $T$ , entonces hay un morfismo  $T \times T \xrightarrow{\delta} \gamma^*G$  dada por  $\delta = \text{pr}_2 \varepsilon^{-1}$ , satisface  $y \cdot \delta(x, y) = x$  si  $x, y : X \rightarrow T$  son morfismos o si los pensamos como variables.

**Ejemplo 3.4.4.** Supongamos que  $\mathcal{E}$  es el topos de conjuntos  $\mathcal{S}$ , entonces un  $G$ -torsor es un conjunto no vacío  $T$  con una acción a derecha de  $G$  que es libre y transitiva, i.e. dados  $x, y \in T$  existe un único  $g \in G$  tal que  $x \cdot g = y$ . En particular el conjunto  $T$  está en biyección con el conjunto subyacente de  $G$ , simplemente elegimos un elemento  $x \in T$ , entonces la función  $G \rightarrow T$  dada por  $g \mapsto x \cdot g$  establece una biyección.

**Ejemplo 3.4.5.** Hay un  $G$ -torsor a derecha  $U_G$  en el topos  $\mathbf{BG} = \mathcal{S}^G$  de  $G$ -conjuntos a izquierda,  $U_G$  está dado por el conjunto subyacente a  $G$  con acciones a izquierda y a derecha dadas por

la multiplicación  $G \times G \xrightarrow{m} G$ , la acción a izquierda da la estructura de  $G$ -conjunto y la derecha da la estructura de  $G$ -torsor a derecha. Este torsor se llama el  **$G$ -torsor universal**.

**Ejemplo 3.4.6.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $G$  un grupo, entonces hay un  $G$ -torsor dado por  $T = \gamma^*G$ , este es llamado el  **$G$ -torsor trivial**, donde la estructura de  $G$ -torsor está dada por la multiplicación a derecha de  $G$ .

**Proposición 3.4.7.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $T$  un  $G$ -torsor. Si existe una sección global  $s : 1 \rightarrow T$ , entonces  $T$  es trivial, i.e. es isomorfo al  $G$ -torsor trivial.

**Proposición 3.4.8.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces un morfismo de  $G$ -torsores  $\alpha : T \rightarrow T'$  es un isomorfismo.

**Ejemplo 3.4.9.** Dado un morfismo de grupos  $\varphi : G \rightarrow H$ , entonces hay un  $H$ -torsor  $\varphi^*U_H$  en  $\mathbf{BG}$  dado por precomposición, explícitamente está dado por el conjunto subyacente a  $H$  con la acción de  $G$  dada por  $g \cdot x = \varphi(g)x$  para  $x \in H$ , y la estructura de  $H$ -torsor dada por la multiplicación a derecha de  $H$ .

Recíprocamente, dado un  $H$ -torsor  $T$  en  $\mathbf{BG}$ , elijamos un punto base  $x \in T$ , entonces dado  $g \in G$  hay un único  $h_g \in H$  tal que  $g \cdot x = x \cdot h_g$ , definimos  $\varphi(g) = h_g$ . Esto da un morfismo, para esto calculemos:

$$(g'g) \cdot x = g' \cdot (g \cdot x) = g' \cdot (x \cdot h_g) = (g' \cdot x) \cdot h_g = x \cdot (h_{g'}h_g)$$

luego  $\varphi(g'g) = \varphi(g')\varphi(g)$ . Definimos un morfismo  $\eta_x : \varphi^*U_H \rightarrow T$  por  $h \mapsto x \cdot h$ . Entonces  $\eta_x$  es  $H$ -equivariante pues:

$$\eta_x(hh') = x \cdot (hh') = (x \cdot h) \cdot h' = \eta_x(h) \cdot h'$$

También es  $G$ -equivariante ya que:

$$\eta_x(g \cdot h) = \eta_x(\varphi(g)h) = x \cdot (\varphi(g)h) = (x \cdot \varphi(g)) \cdot h = (g \cdot x) \cdot h = g \cdot (x \cdot h) = g \cdot \eta_x(h)$$

Entonces todo  $H$ -torsor es isomorfo a un torsor  $\varphi^*U_H$  para un morfismo  $\varphi : G \rightarrow H$ . Notemos que el morfismo  $\varphi$  y el isomorfismo  $\eta_x$  dependen de la elección del punto  $x \in T$ , no es canónico.

**Teorema 3.4.10.** Hay una equivalencia natural de categorías  $\mathbf{Tors}(\mathcal{E}, G) \simeq \mathbf{Top}_{\mathcal{S}}(\mathcal{E}, \mathbf{BG})$ .

**Proposición 3.4.11.** Dados  $G$  y  $H$  grupoides pequeños, entonces hay una equivalencia de categorías  $\mathbf{Top}_{\mathcal{S}}(\mathbf{BG}, \mathbf{BH}) \simeq \mathbf{Grpd}(G, H)$ .

### 3.5. Cohomología

**Definición 3.5.1.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces  $\text{Ab}(\mathcal{E})$  es la categoría de objetos grupo abeliano de  $\mathcal{E}$ .

**Observación 3.5.2.** Podemos dar una descripción mas explícita de esta categoría con la ayuda de un sitio. Supongamos que  $\mathcal{E} \simeq \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ , un pre haz de grupos abelianos es un funtor  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ , y es llamado un **haz de grupos abelianos** si para cada familia cubriente  $(U_i \xrightarrow{f_i} U)_i$  el siguiente diagrama es un egalizador en  $\mathbf{Ab}$ :

$$F(U) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j)$$

Llamemos  $\text{Sh}_{\text{Ab}}(\mathcal{C}, J)$  a la categoría de haces abelianos. Como el funtor conjunto subyacente  $\mathbf{Ab} \xrightarrow{U} \mathcal{S}$  preserva límites, induce un funtor  $\text{Sh}_{\text{Ab}}(\mathcal{C}, J) \xrightarrow{\tilde{U}} \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ . Además, el funtor  $\tilde{U}$  manda un haz abeliano a un objeto grupo abeliano en  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ , y da una equivalencia de categorías:

$$\text{Sh}_{\text{Ab}}(\mathcal{C}, J) \simeq \text{Ab}(\text{Sh}(\mathcal{C}, J))$$

Dados topos  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  y un morfismo geométrico  $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$ , entonces su restricción induce una adjunción entre las categorías de objetos grupo abeliano  $\text{Ab}(\mathcal{E}) \xrightleftharpoons[f_*]{f^*} \text{Ab}(\mathcal{F})$ . Esto se sigue fácilmente del hecho que ambos  $f^*$  y  $f_*$  son exactos a izquierda. En particular tenemos la construcción del haz asociado:

$$\text{Ab}(\text{Sh}(\mathcal{C}, J)) \xrightleftharpoons[a]{i} \text{Ab}(\text{PSh}(\mathcal{C}, J))$$

Esto es, dado un pre haz abeliano  $F$ , el haz asociado  $aF$  (de conjuntos) tiene una estructura de grupo abeliano y es el adjunto a izquierda a la inclusión en pre haces. También dado un topos  $\mathcal{E}$  tenemos una adjunción

$$\text{Ab}(\mathcal{E}) \xrightleftharpoons[\gamma_*]{\gamma^*} \text{Ab}(\mathcal{S})$$

Es decir, dado un grupo abeliano  $A$ , tenemos un haz abeliano  $\gamma^* A$ , el haz constante en  $A$ .

Consideremos ahora la adjunción  $\mathbf{Ab} \xrightleftharpoons[U]{\mathbb{Z}} \mathcal{S}$  donde  $\mathbb{Z}X$  denota el grupo abeliano libre sobre el conjunto  $X$ . Este induce una adjunción  $\text{Ab}(\mathcal{E}) \xrightleftharpoons[U]{\mathbb{Z}} \mathcal{E}$ . Observemos que dado  $(\mathcal{C}, J)$  un sitio, entonces tenemos un isomorfismo  $\text{Ab}(\mathcal{E})(\mathbb{Z}X, A) \simeq A(X)$  para  $X \in \mathcal{C}$  y  $A \in \text{Ab}(\mathcal{E})$ . Describamos el funtor  $\mathbb{Z}$  explícitamente, dado  $X \in \mathcal{E}$ , entonces  $\mathbb{Z}X$  se construye como sigue: primero

nos olvidamos que  $X$  es un haz y tomamos el funtor grupo abeliano libre objeto a objeto, y finalmente tomamos el haz asociado.

Históricamente los topos surgen como una versión no aditiva de las categorías abelianas AB5 (i.e. una categoría abeliana cerrada por colímites pequeños y tal que los colímites filtrantes de sucesiones exactas son exactas) de A. Grothendieck (ver [G57]), ahora podemos decir que las categorías abelianas AB5 son la versión aditiva de la noción más básica de un topos (ver Teorema de Giraud 3.2.21). De hecho se tiene:

**Teorema 3.5.3.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces la categoría de objetos grupo abeliano  $\text{Ab}(\mathcal{E})$  es una categoría abeliana que satisface el axioma AB5 y tiene un generador. En particular  $\text{Ab}(\mathcal{E})$  tiene suficientes inyectivos.

*Demostración.* Ver [SGA4-1, Exposé II, 6.7, 6.9]. □

**Definición 3.5.4.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y dado un objeto grupo abeliano  $A \in \text{Ab}(\mathcal{E})$ , entonces definimos  $H^n(\mathcal{E}, A)$  el  $n^{\text{th}}$  grupo de cohomología de  $\mathcal{E}$  con coeficientes en  $A$  como  $R^n(\gamma_*)(A)$ , i.e. los funtores derivados a derecha de  $\gamma_* : \text{Ab}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Ab}$  evaluados en  $A$ . Más generalmente, dado  $X \in \mathcal{E}$  definimos  $H^n(X, A) = R^n(\mathcal{E}(X, -))(A)$ , i.e. los funtores derivados a derecha de  $\mathcal{E}(X, -) : \text{Ab}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Ab}$ .

**Observación 3.5.5.** Notemos que de la adjunción del grupo abeliano libre dado  $X \in \mathcal{E}$  y  $A \in \text{Ab}(\mathcal{E})$  entonces tenemos un isomorfismo natural  $\mathcal{E}(X, A) \simeq \text{Ab}(\mathcal{E})(\mathbb{Z}X, A)$ , luego estos funtores derivados a derecha son los funtores  $\text{Ext}$ , i.e.  $H^n(X, A) \simeq \text{Ext}^n(\mathbb{Z}X, A)$ .

**Ejemplo 3.5.6.** Dado un grupo  $G$ , consideremos el topos  $\mathcal{E} = \mathbf{B}G = \mathcal{S}^G$  de conjuntos con una acción de  $G$  a izquierda. El objeto final es el singleton  $*$  con la acción trivial, luego  $\gamma_*(M) = \mathcal{E}(*, M) \simeq \text{Ab}(\mathcal{E})(\mathbb{Z}, M)$  donde  $\text{Ab}(\mathcal{E})$  es la categoría de  $G$ -módulos. Por lo tanto la cohomología del topos es el grupo de cohomología definido por Eilenberg y Mac Lane, ver [CE56].

**Proposición 3.5.7.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos,  $A \in \text{Ab}(\mathcal{E})$  y un morfismo  $X \xrightarrow{f} Y$ , entonces se induce un morfismo canónico  $H^n(Y, A) \xrightarrow{f^*} H^n(X, A)$  para todo  $n \geq 0$ .

**Proposición 3.5.8.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos,  $A \in \text{Ab}(\mathcal{E})$ , y  $X = \sum_{j \in J} X_j \in \mathcal{E}$  un coproducto, entonces hay un isomorfismo canónico  $H^n(X, A) \simeq \prod_{j \in J} H^n(X_j, A)$ .

**Proposición 3.5.9.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, y una clase de cohomología  $[\alpha] \in H^n(X, A)$  para  $X \in \mathcal{E}$  y  $A \in \text{Ab}(\mathcal{E})$ . Entonces existe un objeto  $Y \in \mathcal{E}$  y un epimorfismo  $Y \xrightarrow{p} X$  tales que  $[\alpha] \mapsto 0$  via  $H^n(X, A) \xrightarrow{p^*} H^n(Y, A)$ .

**Proposición 3.5.10.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, un objeto  $X \in \mathcal{E}$  y  $A \in \text{Ab}(\mathcal{E})$ , entonces  $H^n(X, A) \simeq H^n(\mathcal{E}/X, X^*(A))$ .

## 4. Homotopía Étale

### 4.1. Hiper cubrimientos

**Observación 4.1.1.** Dado  $\mathcal{E} = \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  un topos, consideremos la categoría  $s\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\Delta^{op}}$  de objetos simpliciales de  $\mathcal{E}$ , ver Definición 2.1.4. Se sigue del Teorema de Giraud 3.2.21 que  $s\mathcal{E}$  es a su vez un topos. En efecto, es fácil ver que  $s\mathcal{E}$  es una subcategoría reflectiva de la categoría  $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{op} \times \Delta^{op}} = (\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{op}})^{\Delta^{op}} = s\text{PSh}(\mathcal{C})$  de prehaces simpliciales con reflector exacto a izquierda.

**Definición 4.1.2.** [AM, Definition 8.1] Dado un objeto simplicial  $\mathcal{X} \in s\mathcal{M}$ , un **splitting hasta grado  $m$**  consiste de subobjetos  $N_k \subset X_k$  tales que para cada  $0 \leq n \leq m$  el morfismo canónico

$\sum_{s:[n] \rightarrow [k]} N_s \xrightarrow{\sim} X_n$  es un isomorfismo donde  $N_s = N_k$  y el coproducto está indexado sobre todos los epimorfismos  $s : [n] \rightarrow [k]$  para todo  $k \leq n$ . Dado un epimorfismo  $s : [n] \rightarrow [k]$ , el morfismo canónico se induce por  $N_k \subset X_k \xrightarrow{s} X_n$ . El objeto  $N_k$  se llama la **parte no degenerada** de  $X_k$ . Un objeto simplicial con un splitting para todos los grados será llamado un **objeto simplicial split**.

**Ejemplo 4.1.3.** Dado un conjunto simplicial  $\mathcal{X}$ , entonces tiene un splitting donde  $N_k \subset X_k$  es el conjunto de  $k$ -simplices no degenerados. El hecho de que  $\sum_{s:[n] \rightarrow [k]} N_s \xrightarrow{\sim} X_n$  sea una biyección es exactamente el resultado del Lema de Eilenberg-Zilber 2.1.12.

**Observación 4.1.4.** Dado  $\mathcal{E}$  un topos y  $\mathcal{X} \in s\mathcal{E}$  un objeto simplicial, luego si  $\mathcal{X}$  es split los subobjetos  $N_k \subset X_k$  están determinados univocamente salvo isomorfismo único. Esto vale pues en un topos el poset  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$  de subobjetos de un objeto  $X$  (ver 3.2.18) es de hecho un reticulado distributivo, luego los complementos (si existen) son únicos (i.e. están determinados salvo isomorfismo único en el topos). Esto fuerza a que el objeto  $N_n$  sea el complemento (si existe) del subobjeto determinado por las degeneraciones  $[s_0, \dots, s_{n-1}] : \sum_{i=0}^{n-1} X_{n-1} \rightarrow X_n$ . Este subobjeto no es otro que el esqueleto  $(\text{sk}_{n-1}\mathcal{X})_n$ .

**Proposición 4.1.5.** [AM, Lemma 8.2] Dada  $\mathcal{M}$  con coproductos finitos y  $\mathcal{X} \in s\mathcal{M}$  con un splitting hasta nivel  $m$ , entonces  $\text{sk}_m\mathcal{X}$  existe y está dada por  $(\text{sk}_m\mathcal{X})_n = \sum_{\substack{s:[n] \rightarrow [k] \\ k \leq m}} N_s$ .

**Proposición 4.1.6.** [AM, Lemma 8.3] Dada  $\mathcal{M}$  con coproductos finitos y  $\mathcal{X} \in s\mathcal{M}$  un objeto simplicial con un splitting hasta grado  $n - 1$ , entonces para extender este splitting a grado  $n$  es

necesario y suficiente dar un subobjeto  $N_n \subset X_n$  tal que el morfismo natural

$$(\mathrm{sk}_{n-1}X)_n + N_n \longrightarrow X_n$$

sea un isomorfismo.

Recordemos la definición de hipercubrimientos de Artin y Mazur [AM][Section 8].

**Definición 4.1.7.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, decimos que un objeto simplicial  $\mathcal{U} = U_\bullet \in s\mathcal{E}$  es un **hipercubrimiento** si para todo  $n \geq 0$  el matching map

$$U_n \longrightarrow (\mathrm{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n$$

es un epimorfismo.

**Observación 4.1.8.** Ahora veamos esta definición de forma mas explícita. Recordemos primero de la Observación 2.2.10 que el coesqueleto tiene una fórmula como un límite pesado (ver Definición 1.1.11) dada por:

$$(\mathrm{cosk}_n\mathcal{U})_m \simeq \{\mathrm{sk}_n\Delta^m, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}}$$

En particular tenemos que  $(\mathrm{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n \simeq \{\partial\Delta^n, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}}$  donde por definición  $\partial\Delta^n = \mathrm{sk}_{n-1}\Delta^n$ .

1. Para  $n = 0$  tenemos que  $(\mathrm{cosk}_{-1}\mathcal{U})_0 \simeq 1$  como  $\partial\Delta^0 = \emptyset$ , esto dice que  $U_0 \xrightarrow{!} 1$  es un epimorfismo.
2. Para  $n = 1$  calculemos:

$$(\mathrm{cosk}_0\mathcal{U})_1 \simeq \{\partial\Delta^1, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}} \simeq \{\Delta^0 + \Delta^0, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}} \simeq U_0 \times U_0$$

entonces la condición dice que el morfismo canónico  $U_1 \xrightarrow{(d_1, d_0)} U_0 \times U_0$  es un epimorfismo.

3. Para  $n = 2$  tenemos que  $(\mathrm{cosk}_1\mathcal{U})_2$  es el siguiente egalizador:

$$(\mathrm{cosk}_1\mathcal{U})_2 \longrightarrow \prod_{0 \leq i \leq 2} U_1 \rightrightarrows \prod_{0 \leq i < j \leq 2} U_0$$

Por lo tanto un morfismo  $X \xrightarrow{x} (\mathrm{cosk}_1\mathcal{U})_2$  está dada por  $X \xrightarrow{(x_0, x_1, x_2)} U_1 \times U_1 \times U_1$ , tal que  $d_0x_0 = d_0x_1$ ,  $d_1x_0 = d_0x_2$  and  $d_1x_1 = d_1x_2$ . Gráficamente, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
X \xrightarrow{x_1} U_1 & & X \xrightarrow{x_2} U_1 \\
x_0 \downarrow & & x_0 \downarrow \\
U_1 \xrightarrow{d_0} U_0 & & U_1 \xrightarrow{d_1} U_0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
X \xrightarrow{x_2} U_1 & & X \xrightarrow{x_2} U_1 \\
x_0 \downarrow & & x_1 \downarrow \\
U_1 \xrightarrow{d_1} U_0 & & U_1 \xrightarrow{d_1} U_0
\end{array}$$

Luego la condición de hipercubrimiento nos dice que el morfismo:

$$U_2 \longrightarrow (\text{cosk}_1 \mathcal{U})_2$$

dado por la fórmula  $x \mapsto (d_0(x), d_1(x), d_2(x))$  es un epimorfismo, donde usamos morfismos como variables.

4. Dado un  $n$ -simplex  $X \xrightarrow{x} U_n$ , el matching map  $U_n \longrightarrow (\text{cosk}_{n-1} \mathcal{U})_n$  lo manda a la tupla  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  donde  $x_i = d_i x$ , este morfismo es un epimorfismo si  $\mathcal{U}$  es un hipercubrimiento.

Comparar con [D10, 4.1, 4.2].

**Ejemplo 4.1.9.** Un conjunto simplicial  $\mathcal{X}$  es un hipercubrimiento si y solo si for all  $n \geq 0$  podemos completar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\partial \Delta^n & \longrightarrow & \mathcal{X} \\
\downarrow & \nearrow \exists & \\
\Delta^n & & 
\end{array}$$

i.e. cada borde tiene simplex que lo rellena. Esto muestra que  $\mathcal{X}$  es un complejo de Kan acíclico. En particular afirmamos que su homología coincide con la del punto. Para esto observemos que  $\mathcal{X} \xrightarrow{!} *$  es una fibración de Kan acíclica, luego es una equivalencia homotópica simplicial por la Proposition 2.5.6, y como una equivalencia homotópica simplicial induce una equivalencia homotópica entre los complejos de Moore asociados, esto prueba la afirmación.

**Ejemplo 4.1.10.** Dado  $U \twoheadrightarrow 1$  un epimorfismo en un topos  $\mathcal{E}$ , entonces  $\mathcal{C}U = \text{cosk}_0 U \in s\mathcal{E}$  es un hipercubrimiento, llamado el **complejo de Čech** del cubrimiento. Excluyendo algunas degeneraciones el complejo empieza como sigue:

$$U \begin{array}{c} \xleftarrow{d_0} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xleftarrow{d_1} \end{array} U \times U \begin{array}{c} \xleftarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \xleftarrow{d_2} \end{array} U \times U \times U \begin{array}{c} \xleftarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \xleftarrow{d_2} \\ \xleftarrow{d_3} \end{array} U \times U \times U \times U \quad \dots$$

La cara  $d^i$  está dada por la proyección en todas las coordenadas excepto la  $i$ -ésima coordenada,  $s^i$  está dada por insertar una diagonal en la  $i$ -ésima coordenada. Para ver esto calculemos:

$$\mathcal{C}U_n = (\text{cosk}_0 U)_n \simeq \{\text{sk}_0 \Delta^n, U\}_{\Delta^{op}} \simeq U \times U \times \dots \times U = U^{n+1}$$

Esto se sigue pues  $\text{sk}_0\Delta^n$  es el coproducto de  $n + 1$  0-simplices. En este caso el matching map  $\mathcal{C}U_n \rightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{C}U)_n$  es un isomorfismo para todo  $n > 0$ , pues de la Proposición 2.2.13 tenemos que:

$$(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{C}U)_n = (\text{cosk}_{n-1}\text{cosk}_0U)_n \simeq (\text{cosk}_0U)_n = \mathcal{C}U_n$$

Ver [D10, 3.5].

**Observación 4.1.11.** Un hipercubrimiento es un refinamiento del complejo de Čech, pero tenemos mucha más flexibilidad en su construcción. Podemos construir hipercubrimientos inductivamente usando el Lema 2.2.14. Supongamos que tenemos un hipercubrimiento truncado  $\mathcal{U}$  hasta grado  $n - 1$ , entonces para extenderlo a grado  $n$  necesitamos un objeto  $U_n \in \mathcal{E}$  con una factorización

$$(\text{sk}_{n-1}\mathcal{U})_n \longrightarrow U_n \twoheadrightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n$$

$\xrightarrow{\tau_n}$

tal que el matching map es un epimorfismo. El complejo de Čech corresponde al caso en el que el matching map es un isomorfismo para todo  $n > 0$ .

Ahora damos algunos lemas elementales de [SGA4-2, Exposé V, 7.3] y [AM, Ch. 8] que muestran la flexibilidad y utilidad de los hipercubrimientos.

**Definición 4.1.12.** [SGA4-2, Exposé V, Définition 7.3.3.] Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, un morfismo  $\mathcal{V} \xrightarrow{f} \mathcal{U}$  entre objetos simpliciales es **especial** si para todo  $n \geq 0$  el morfismo punteado en el siguiente diagrama es un epimorfismo:

$$\begin{array}{ccc} V_n & \xrightarrow{\exists! \hat{f}} & (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n \\ \downarrow f_n & \searrow & \downarrow (\text{cosk}_{n-1}f)_n \\ U_n & \longrightarrow & (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n \end{array}$$

$P_n \longrightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n$

donde el cuadrado es un pullback, i.e.  $P_n = U_n \times_{(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n} (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n$ .

**Ejemplo 4.1.13.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $\mathcal{U}$  un hipercubrimiento, entonces  $\mathcal{U} \rightarrow \text{cosk}_n\mathcal{U}$  es un morfismo especial. Para ver esto, dado  $m \geq 0$  consideremos el pullback:

$$\begin{array}{ccc} U_m & \xrightarrow{\exists! \hat{f}} & (\text{cosk}_{m-1}\mathcal{U})_m \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ (\text{cosk}_n\mathcal{U})_m & \longrightarrow & (\text{cosk}_{m-1}(\text{cosk}_n\mathcal{U}))_m \end{array}$$

$P_n \longrightarrow (\text{cosk}_{m-1}\mathcal{U})_m$

Si  $n \leq m - 1$  entonces por la Proposición 2.2.13  $\text{cosk}_{m-1}\text{cosk}_n\mathcal{U} \simeq \text{cosk}_n\mathcal{U}$ . Entonces  $P_n \simeq (\text{cosk}_{m-1}\mathcal{U})_m$  y por hipótesis  $\mathcal{U}$  es un hipercubrimiento tal que el morfismo  $\widehat{f}$  es un epimorfismo. Si  $n \geq m$ , entonces tenemos un isomorfismo  $\text{cosk}_{m-1}\text{cosk}_n\mathcal{U} \simeq \text{cosk}_{m-1}\mathcal{U}$ , y entonces  $P_n \simeq (\text{cosk}_n\mathcal{U})_m \simeq U_m$ , luego el morfismo  $\widehat{f}$  es un isomorfismo.

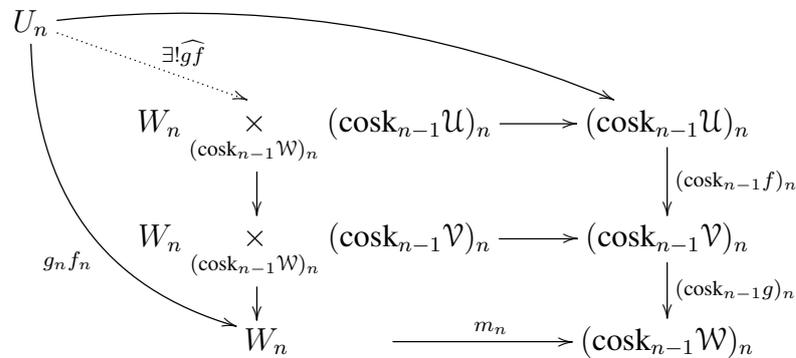
Recíprocamente, si  $\text{cosk}_n\mathcal{U}$  es un hipercubrimiento y  $\mathcal{U} \rightarrow \text{cosk}_n\mathcal{U}$  es un morfismo especial, entonces  $\mathcal{U}$  es un hipercubrimiento.

**Lema 4.1.14.** [SGA4-2, Exposé V, Lemme 7.3.4.] Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces

- a)  $\mathcal{U}$  es un hipercubrimiento si y solo si  $\mathcal{U} \xrightarrow{!} 1$  es un morfismo especial. Además todo isomorfismo es un morfismo especial.
- b) Los morfismos especiales son cerrados por composición.
- c) Los morfismos especiales son universales, i.e. dado  $\mathcal{V} \xrightarrow{g} \mathcal{W}$  un morfismo especial y un morfismo  $\mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathcal{W}$ , entonces  $\mathcal{U} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  es un morfismo especial.
- d) Dado un morfismo  $\mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathcal{W}$  con  $\mathcal{U}$  un hipercubrimiento y  $\mathcal{V} \xrightarrow{g} \mathcal{W}$  un morfismo especial, entonces  $\mathcal{U} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{V}$  es un hipercubrimiento.
- e) En particular, dados  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  hipercubrimientos, entonces  $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$  es un hipercubrimiento.

*Demostración.* a) Trivial.

- b) Dados morfismos especiales  $\mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathcal{V}$  y  $\mathcal{V} \xrightarrow{g} \mathcal{W}$  consideremos el pegado de pullbacks:



Entonces se obtiene la factorización de  $\widehat{gf}$ :

$$\begin{array}{c}
 U_n \xrightarrow{\widehat{gf}} \begin{array}{c} \times \\ (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{W})_n \end{array} \begin{array}{c} (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n \longrightarrow W_n \longrightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n \\ \downarrow (\text{cosk}_{n-1}f)_n \\ (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n \end{array} \\
 \begin{array}{c} \exists! \widehat{f} \\ \downarrow \\ V_n \times_{(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n} (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n \longrightarrow W_n \times_{(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{W})_n} (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n \\ \downarrow \\ V_n \longrightarrow W_n \times_{(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{W})_n} (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n \longrightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n \end{array} \\
 \begin{array}{c} f_n \\ \downarrow \\ U_n \longrightarrow V_n \longrightarrow W_n \xrightarrow{\widehat{g}} W_n \times_{(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{W})_n} (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n \longrightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n \end{array}
 \end{array}$$

Pero los morfismos  $\widehat{f}$  y  $\widehat{g}$  son epimorfismos por hipótesis, y como los epis son universales,  $\widehat{gf}$  es una composición de epis, luego un epimorfismo.

c) Primero consideremos los siguientes pullbacks:

$$\begin{array}{c}
 U_n \times_{(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{W})_n} (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n \longrightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n \times_{(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{W})_n} (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n \longrightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 U_n \longrightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n \longrightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{W})_n
 \end{array}$$

Luego tenemos que mostrar que el morfismo  $U_n \times_{W_n} V_n \longrightarrow U_n \times_{(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{W})_n} (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n$  es un epimorfismo. Para esto consideremos los pullbacks:

$$\begin{array}{c}
 U_n \times_{W_n} V_n \longrightarrow V_n \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \widehat{g} \\
 U_n \times_{(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{W})_n} (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n \longrightarrow W_n \times_{(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{W})_n} (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n \longrightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow (\text{cosk}_{n-1}g)_n \\
 U_n \xrightarrow{f_n} W_n \longrightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{W})_n
 \end{array}$$

Dado que  $\widehat{g}$  es epimorfismo, se sigue que nuestro morfismo es epimorfismo, luego  $\mathcal{U} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$  es un morfismo especial.

d) Se sigue de a), b) and c).

e) Es un caso particular de d).

□

El siguiente lema generaliza las técnicas de [SGA4-2, Exposé V, 7.3.7] desde la inclusión  $\partial\Delta^1 \hookrightarrow \Delta^1$  a una inclusión arbitraria  $K \hookrightarrow L$  de conjuntos simpliciales finitos.

**Lema 4.1.15.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, un hipercubrimiento  $\mathcal{U} \in s\mathcal{E}$  y  $K \hookrightarrow L$  una inclusión de conjuntos simpliciales finitos. Entonces el morfismo inducido  $\{L, \mathcal{U}\} \rightarrow \{K, \mathcal{U}\}$  es un morfismo especial.

*Demostración.* Probamos el lema primero para el caso de la inclusión  $\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$ . Si  $m = 0$  tenemos que mostrar que  $\{\Delta^n, \mathcal{U}\}_0 \rightarrow \{\partial\Delta^n, \mathcal{U}\}_0$  es un epimorfismo. Pero  $\{\Delta^n, \mathcal{U}\}_0 \simeq U_n$  y  $\{\partial\Delta^n, \mathcal{U}\}_0 \simeq (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n$  el morfismo es el matching map que es un epimorfismo pues  $\mathcal{U}$  es un hipercubrimiento. Ahora para  $m > 0$  primero calculemos:

$$(\text{cosk}_{m-1}\{\Delta^n, \mathcal{U}\})_m \simeq \{\partial\Delta^m, \{\Delta^n, \mathcal{U}\}\}_{\Delta^{op}} \simeq \{\partial\Delta^m \times \Delta^n, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}}$$

Similarmente  $(\text{cosk}_{m-1}\{\partial\Delta^n, \mathcal{U}\})_m \simeq \{\partial\Delta^m \times \partial\Delta^n, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}}$ , entonces:

$$\begin{aligned} & \{\partial\Delta^n, \mathcal{U}\}_m \times_{(\text{cosk}_{m-1}\{\partial\Delta^n, \mathcal{U}\})_m} (\text{cosk}_{m-1}\{\Delta^n, \mathcal{U}\})_m \simeq \\ & \simeq \{\Delta^m \times \partial\Delta^n, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}} \times_{\{\partial\Delta^m \times \partial\Delta^n, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}}} \{\partial\Delta^m \times \Delta^n, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}} \simeq \\ & \simeq \{(\Delta^m \times \partial\Delta^n) \times_{\partial\Delta^m \times \partial\Delta^n} (\partial\Delta^m \times \Delta^n), \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}} = \{\partial(\Delta^m \times \Delta^n), \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}} \end{aligned}$$

donde  $\partial(\Delta^m \times \Delta^n)$  es solo notación para indicar que el “borde” de  $\Delta^m \times \Delta^n$ . Entonces un  $k$ -simplex  $(i_0, j_0) \leq \dots \leq (i_k, j_k)$  de  $\Delta^m \times \Delta^n$  está en  $\partial(\Delta^m \times \Delta^n)$  si y solo si  $i_0 \leq \dots \leq i_k$  está en  $\partial\Delta^m$  o  $j_0 \leq \dots \leq j_k$  está en  $\partial\Delta^n$ . Luego se sigue del cálculo con shuffles en el Ejemplo 2.1.14, que  $\partial(\Delta^m \times \Delta^n) \subset \Delta^m \times \Delta^n$  es el subcomplejo generado por los  $k$ -simplices no degenerados para  $k \leq n + m - 1$ . Tenemos que mostrar que el morfismo siguiente es epimorfo:

$$\{\Delta^m \times \Delta^n, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}} \rightarrow \{\partial(\Delta^m \times \Delta^n), \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}}$$

Sabemos que hay una sucesión finita de inclusiones:

$$\partial(\Delta^m \times \Delta^n) = K_0 \hookrightarrow K_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow K_l = \Delta^m \times \Delta^n$$

tal que  $K_{i+1}$  está dado por adjuntar un  $n + m$ -simplex a  $K_i$ , i.e. el siguiente diagrama es un pushout:

$$\begin{array}{ccc} K_i & \hookrightarrow & K_{i+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \partial\Delta^{n+m} & \hookrightarrow & \Delta^{n+m} \end{array}$$

Entonces tenemos el pullback:

$$\begin{array}{ccc} \{K_{i+1}, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}} & \longrightarrow & \{K_i, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{\Delta^{n+m}, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}} & \longrightarrow & \{\partial\Delta^{n+m}, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}} \end{array}$$

El morfismo horizontal de abajo es epimorfo pues  $\mathcal{U}$  es un hipercubrimiento y como los epimorfismos son universales se sigue que  $\{K_{i+1}, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}} \rightarrow \{K_i, \mathcal{U}\}_{\Delta^{op}}$  es epimorfismo, por composición obtenemos el resultado.

Para el caso general de  $K \hookrightarrow L$  una inclusión de conjuntos simpliciales finitos, hay una sucesión finita de inclusiones:

$$K = K_0 \hookrightarrow K_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow K_l = L$$

tal que  $K_{i+1}$  está dado por adjuntar un  $n$ -simplex a  $K_i$  para algún  $n$ , i.e. el siguiente diagrama es un pushout:

$$\begin{array}{ccc} K_i & \hookrightarrow & K_{i+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \partial\Delta^n & \hookrightarrow & \Delta^n \end{array}$$

Entonces tenemos un pullback:

$$\begin{array}{ccc} \{K_{i+1}, \mathcal{U}\} & \longrightarrow & \{K_i, \mathcal{U}\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{\Delta^n, \mathcal{U}\} & \longrightarrow & \{\partial\Delta^n, \mathcal{U}\} \end{array}$$

Pero el morfismo horizontal de abajo es un morfismo especial, entonces por el Lema 4.1.14 b) and c) obtenemos el resultado.  $\square$

**Teorema 4.1.16.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces la categoría de hipercubrimientos módulo equivalencia homotópica simplicial  $\text{HC}(\mathcal{E})_{\sim}$  es cofiltrante.

*Demostración.* La versión dual a la Definición 1.2.1.(F0) se sigue del Lema 4.1.14 e). Para el dual de (F1) dados dos morfismos  $\mathcal{V} \rightrightarrows^f \mathcal{U}$  donde  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  son hipercubrimientos, entonces consideremos el siguiente pullback:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{h} & \{\Delta^1, \mathcal{U}\} \\ u \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{(f,g)} & \mathcal{U} \times \mathcal{U} \end{array}$$

donde  $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \simeq \{\partial\Delta^1, \mathcal{U}\}$ . Del Lema 4.1.15, el morfismo  $\{\Delta^1, \mathcal{U}\} \rightarrow \{\partial\Delta^1, \mathcal{U}\}$  es un morfismo especial. Entonces por el Lema 4.1.14.d) se sigue que  $\mathcal{W}$  es un hipercubrimiento, y el morfismo  $\mathcal{W} \xrightarrow{h} \{\Delta^1, \mathcal{U}\}$  nos da la homotopía simplicial entre  $fu$  y  $gu$ .  $\square$

**Definición 4.1.17.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $\mathcal{U}$  un objeto simplicial, decimos que  $\mathcal{U}$  es un **hipercubrimiento split** si es un hipercubrimiento y un objeto simplicial split.

**Proposición 4.1.18.** Dado  $U = \sum_{i \in I} U_i \twoheadrightarrow 1$  un epimorfismo en un topos  $\mathcal{E}$  tal que cada morfismo  $U_i \rightarrow 1$  es mono, entonces el complejo de Čech  $\mathcal{C}U$  es un hipercubrimiento split.

*Demostración.* Podemos describir  $\mathcal{C}U_n$  como el coproducto  $\mathcal{C}U_k = \sum_{(i_0, \dots, i_k) \in I^{k+1}} U_{i_0} \times \dots \times U_{i_k}$ . Se define  $N_k \subset \mathcal{C}U_k$  como el sumando directo indexado por  $(i_0, \dots, i_k)$  tales que  $i_r \neq i_s$  si  $r \neq s$ . Hay que mostrar que  $\sum_{s: [n] \rightarrow [k]} N_s \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}U_n$  es un isomorfismo, donde  $N_s = N_k$  y el coproducto está indexado sobre todos los epimorfismos  $s: [n] \rightarrow [k]$  for all  $k \leq n$ . La clave es que dado que  $U_i \rightarrow 1$  is mono, se sigue que  $U_i \times U_i \simeq U_i$ . Luego por ejemplo dado  $s = s^j: [n] \rightarrow [n-1]$ , el morfismo inducido en cada sumando directo de  $N_s$  es el isomorfismo:

$$U_{i_0} \times \dots \times U_{i_j} \times \dots \times U_{i_{n-1}} \xrightarrow{\sim} U_{i_0} \times \dots \times U_{i_j} \times U_{i_j} \times \dots \times U_{i_{n-1}}$$

El caso de un epimorfismo general  $s: [n] \rightarrow [k]$  es similar, solo que en este caso hay más repeticiones. Pero dado un índice cualquiera  $(i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1}$  viene de un único epimorfismo  $s: [n] \rightarrow [k]$  y un índice  $(i'_0, \dots, i'_k)$  sin repeticiones, por el lema de Eilenberg-Zilber 2.1.12. Luego el morfismo  $\sum_{s: [n] \rightarrow [k]} N_s \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}U_n$  es un isomorfismo.  $\square$

**Lema 4.1.19.** [AM, Lemma 8.6] Dados  $\mathcal{U} \in s\mathcal{E}$  un hipercubrimiento,  $\mathcal{V} \in \mathcal{E}^{\Delta_{\leq n}^{op}}$  un hipercubrimiento truncado hasta grado  $n$  y un morfismo  $\mathcal{V} \xrightarrow{f} \text{res}_n \mathcal{U}$ . Entonces existe un hipercubrimiento  $\mathcal{V}' \in s\mathcal{E}$  y un morfismo  $\mathcal{V}' \xrightarrow{f'} \mathcal{U}$  tal que restringido hasta grado  $n$  es  $f$ .

*Demostración.* Tomemos  $\mathcal{V}' = (\text{cosk}_n \mathcal{V}) \times_{(\text{cosk}_n \mathcal{U})} \mathcal{U}$ . Por el Ejemplo 4.1.13, sabemos que el morfismo  $\mathcal{U} \rightarrow \text{cosk}_n \mathcal{U}$  es especial y además  $\text{cosk}_n \mathcal{V}$  es un hipercubrimiento, entonces  $\mathcal{V}'$  es un hipercubrimiento por el Lema 4.1.14.d).  $\square$

**Lema 4.1.20.** [AM, Lemma 8.7] Dados  $\mathcal{U} \in \mathcal{E}^{\Delta_{\leq n}^{op}}$  un hipercubrimiento truncado hasta grado  $n$  y split hasta grado  $n-1$ . Entonces existe un hipercubrimiento  $\mathcal{V} \in \mathcal{E}^{\Delta_{\leq n}^{op}}$  truncado hasta grado  $n$ , con un morfismo  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  que induce un isomorfismo en el  $(n-1)$ -esqueleto y tal que  $\mathcal{V}$  es split hasta grado  $n$ .

*Demostración.* Tomemos  $\mathcal{V} = \mathcal{U}$  hasta grado  $n - 1$  y tomamos  $V_n = (\text{sk}_{n-1}\mathcal{V})_n + U_n$  entonces tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} (\text{sk}_{n-1}\mathcal{V})_n & \xrightarrow{i} & V_n & \xrightarrow{[\tau, \mu]} & (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n \\ \parallel & & \downarrow [\ell, U_n] & & \parallel \\ (\text{sk}_{n-1}\mathcal{U})_n & \xrightarrow{\ell} & U_n & \xrightarrow{\mu} & (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n \end{array}$$

donde  $\tau$  es el morfismo canónico del esqueleto al coesqueleto y  $\mu$  es el matching map definido en el Lema 2.2.14. Por el Lema 2.2.14 esto define un hipercubrimiento split  $\mathcal{V} \in \mathcal{E}^{\Delta_{\leq n}^{op}}$  hasta grado  $n$  y un morfismo  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ .  $\square$

Aplicando el lema anterior varias veces se sigue que podemos reemplazar un hipercubrimiento por un hipercubrimiento split.

**Lema 4.1.21.** [AM, Lemma 8.8] Sea  $\mathcal{U} \in s\mathcal{E}$  un hipercubrimiento que es split hasta grado  $n$ , entonces existe un hipercubrimiento split  $\mathcal{V}$  con un morfismo  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  tal que induce un isomorfismo en el  $n$ -esqueleto.

*Demostración.* Por el Lema 4.1.20 tenemos un hipercubrimiento split truncado  $\mathcal{V} \in \mathcal{E}^{\Delta_{\leq n+1}^{op}}$  con un morfismo  $\mathcal{V} \xrightarrow{f} \text{res}_{n+1}\mathcal{U}$  que induce un isomorfismo en el  $n$ -esqueleto. Por el Lema 4.1.19 obtenemos un hipercubrimiento  $\mathcal{V}' \in s\mathcal{E}$  split hasta grado  $n + 1$ , con un morfismo  $\mathcal{V}' \xrightarrow{f'} \mathcal{U}$  tal que restringido hasta grado  $n + 1$  es  $f$ . Ahora se aplica la misma construcción a  $\mathcal{V}'$ , y el lema se sigue por inducción.  $\square$

**Lema 4.1.22.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y dados  $\mathcal{U} \in \mathcal{E}^{\Delta_{\leq n}^{op}}$  un hipercubrimiento split truncado hasta grado  $n$  y un hipercubrimiento  $\mathcal{V} \in \mathcal{E}^{\Delta_{\leq n-1}^{op}}$  split hasta grado  $n - 1$  con un morfismo  $\mathcal{V} \xrightarrow{f} \text{res}_{n-1}\mathcal{U}$ . Dado un epimorfismo  $N' \xrightarrow{p} N_n^{\mathcal{U}}$ , entonces existe una extensión de  $\mathcal{V}$  a un hipercubrimiento split truncado hasta grado  $n$  y una extensión  $\mathcal{V} \xrightarrow{f'} \mathcal{U}$  de  $f$  hasta grado  $n$ , tal que el morfismo  $V_n \xrightarrow{f'_n} U_n$  restringido a  $N_n^{\mathcal{V}}$  se factoriza por  $p$ , i.e. existe una factorización de  $f'_n|_{N_n^{\mathcal{V}}}$  como  $N_n^{\mathcal{V}} \rightarrow N' \xrightarrow{p} N_n^{\mathcal{U}}$ .

*Demostración.* Dado el epi  $N' \xrightarrow{p} N_n^{\mathcal{U}}$ , tomemos un objeto  $N_n^{\mathcal{V}}$  con un epi  $N_n^{\mathcal{V}} \twoheadrightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n$  y un morfismo  $N_n^{\mathcal{V}} \rightarrow N'$  tal que el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{array}{ccc} N' & \xrightarrow{p} & N_n^{\mathcal{U}} \twoheadrightarrow (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n \\ \uparrow & & \uparrow \\ N_n^{\mathcal{V}} & \longrightarrow & (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{V})_n \end{array}$$

Por ejemplo, tomemos  $N_n^\vee$  el pullback pues los epimorfismos son universales y definamos a  $V_n = (\text{sk}_{n-1}\mathcal{V})_n + N_n^\vee$  con el morfismo obvio a  $U_n$ , entonces esto da un hipercubrimiento split hasta grado  $n$  con una extensión de  $f$  que satisface lo requerido.  $\square$

Para definir un pro-objeto indexado por  $\text{HC}(\mathcal{E})_\sim$ , tenemos que mostrar que tiene una subcategoría inicial pequeña. Por esta razón vamos a introducir una clase mas pequeña de hipercubrimientos, con respecto a un sitio, dada por Verdier en [SGA4-2, Exposé V, 7.3.0.].

**Definición 4.1.23.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña, un prehaz  $U \in \mathcal{S}^{\text{cop}}$  se dice **semi-representable** si es un coproducto de objetos representables, i.e.  $U \simeq \sum_{i \in I} U_i$  con  $U_i \in \mathcal{C}$ . Definimos la categoría  $\text{SR}(\mathcal{C})$  de prehaces semi-representables como una subcategoría plena de  $\mathcal{S}^{\text{cop}}$ .

**Observación 4.1.24.** Dados  $U \simeq \sum_{i \in I} U_i$  and  $V \simeq \sum_{j \in J} V_j$  semi-representables, entonces:

$$\mathcal{S}^{\text{cop}}(V, U) \simeq \mathcal{S}^{\text{cop}}\left(\sum_{j \in J} V_j, \sum_{i \in I} U_i\right) \simeq \prod_{j \in J} \mathcal{S}^{\text{cop}}\left(V_j, \sum_{i \in I} U_i\right) \simeq \prod_{j \in J} \sum_{i \in I} \mathcal{S}^{\text{cop}}(V_j, U_i)$$

Luego un morfismo en  $\text{SR}(\mathcal{C})$  está dado por una función  $\alpha : J \rightarrow I$  y morfismos  $f_j : V_j \rightarrow U_{\alpha(j)}$  para  $j \in J$ . Es decir,  $\text{SR}(\mathcal{C})$  es equivalente a la categoría de familias de  $\mathcal{C}$ . Se sigue en particular que un prehaz semi-representable admite una única descomposición salvo una permutación de índices y salvo isomorfismo en cada componente.

**Proposición 4.1.25.** Dada  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña cerrada por límites finitos, entonces  $\text{SR}(\mathcal{C})$  es cerrada por límites finitos y la inclusión  $\text{SR}(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{S}^{\text{cop}}$  los preserva.

**Definición 4.1.26.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $(\mathcal{C}, J)$  un sitio pequeño con  $\mathcal{E}$  cerrado por límites finitos. Un prehaz simplicial  $\mathcal{U} \in s\mathcal{S}^{\text{cop}}$  se dice un hipercubrimiento semi-representable si:

1. Cada  $U_n$  es semi-representable.
2. El haz simplicial asociado  $a\mathcal{U} \in s\mathcal{E}$  es un hipercubrimiento.

**Observación 4.1.27.** Dado  $\mathcal{U} \in s\mathcal{S}^{\text{cop}}$  un hipercubrimiento semi-representable, entonces eliminamos para cada  $n$  una indexación  $U_n \simeq \sum_{i \in I_n} U_{n,i}$ . Como las caras (y las degeneraciones)  $d_i : U_n \rightarrow U_{n-1}$  son morfismos de prehaces, estos inducen morfismos  $d_i^I : I_n \rightarrow I_{n-1}$  satisfaciendo las identidades simpliciales, luego obtenemos un conjunto simplicial  $\mathcal{J}$  “que indexa”. Definimos el **tamaño** de  $\mathcal{U}$  como el cardinal de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} I_n$ .

**Proposición 4.1.28.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $(\mathcal{C}, J)$  un sitio pequeño con  $\mathcal{E}$  cerrado por límites finitos y sea  $\lambda$  un cardinal regular (estrictamente) más grande que el cardinal de todos los morfismos de  $\mathcal{C}$ . Dado  $\mathcal{U} \in {}_s\mathcal{E}$  un hipercubrimiento, entonces existe un hipercubrimiento split semi-representable  $\mathcal{V} \in {}_s\mathcal{S}^{cop}$  de tamaño menor que  $\lambda$  y un morfismo  $a\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ .

*Demostración.* La observación clave es que un epimorfismo  $X \xrightarrow{p} Y$  es un epimorfismo “local”, i.e. dados  $U \in \mathcal{C}$  y  $U \xrightarrow{s} Y$ , entonces existe una familia cubriente  $\{f_i : U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$  of  $U$ , con morfismos  $\{t_i : U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$  tales que el siguiente diagrama conmuta para todo  $i \in I$ :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ t_i \uparrow & & \uparrow s \\ U_i & \xrightarrow{f_i} & U \end{array}$$

Vamos a construir el hipercubrimiento split semi-representable inductivamente. Primero, como  $\mathcal{U}$  es un hipercubrimiento, tenemos un epi  $U_0 \xrightarrow{p} 1$ , entonces existe una familia cubriente  $\{V_j \rightarrow 1 \mid j \in J_0\}$  del objeto terminal (que por hipótesis está en  $\mathcal{C}$ ) con morfismos  $\varphi_j : V_j \rightarrow U_0$ . Definamos  $V_0 = \sum_{j \in J_0} V_j$ , entonces tenemos definido un hipercubrimiento split semi-representable truncado  $\mathcal{V}$  hasta grado 0, con un morfismo  $a\mathcal{V} \xrightarrow{\varphi} \text{res}_0 \mathcal{U}$ . También su índice  $J_0$  es mas chico que  $\lambda$  pues es un conjunto de objetos de  $\mathcal{C}$ . Supongamos que tenemos definido un hipercubrimiento split semi-representable  $\mathcal{V}$  truncado hasta grado  $n-1$ , con un morfismo  $a\mathcal{V} \xrightarrow{\varphi} \text{res}_{n-1} \mathcal{U}$  en  $\mathcal{E}^{\Delta_{\leq n-1}^{op}}$ , de tamaño menor que  $\lambda$ . Dado que  $\mathcal{V}$  es semi-representable entonces  $(\text{cosk}_{n-1} \mathcal{V})_{n-1}$  siendo un límite finito es un objeto semi-representable  $(\text{cosk}_{n-1} \mathcal{V})_{n-1} = \sum_{k \in K} W_k$ , luego dado el epimorfismo  $U_n \rightarrow (\text{cosk}_{n-1} \mathcal{U})_n$ , podemos elegir para cada  $W_k \in \mathcal{C}$  una familia cubriente  $\{f_j : V_j \rightarrow W_k \mid j \in J_k\}$  con un morfismo  $\varphi_j : V_j \rightarrow U_n$  for  $j \in J_k$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U_n & \longrightarrow & (\text{cosk}_{n-1} \mathcal{U})_n \\ \varphi_j \uparrow & & \uparrow \\ V_j & \xrightarrow{f_j} & W_k \end{array}$$

También como  $\mathcal{V}$  es split, entonces  $(\text{sk}_{n-1} \mathcal{V})_n = \sum_{\substack{s: [n] \rightarrow [k] \\ k \leq n-1}} N_s$ , por tanto es semi-representable. Entonces definamos  $V_n = (\text{sk}_{n-1} \mathcal{V})_n + N_n$  donde  $N_n = \sum_{j \in J_k, k \in K} V_j$ . Esto define un hipercubrimiento split semi-representable hasta grado  $n$ , el morfismo obvio  $N_n \rightarrow U_n$  dado por  $\varphi_j$  para  $j \in J_k$  define un morfismo de prehaces simpliciales truncados  $\mathcal{V} \rightarrow \text{res}_n \mathcal{U}$  hasta grado

$n$ , por adjunción obtenemos un morfismo  $a\mathcal{V} \rightarrow \text{res}_n \mathcal{U}$ . Resta solo chequear que la descomposición de  $V_n$  como coproducto de representables tiene cardinalidad menor que  $\lambda$ . Pero dado que  $\text{res}_{n-1} \mathcal{V}$  tenía tamaño menor que  $\lambda$ , entonces  $(\text{sk}_{n-1} \mathcal{V})_n$  y  $(\text{cosk}_{n-1} \mathcal{V})_n$  tiene descomposiciones de cardinalidad menor que  $\lambda$ . Y para cada  $k \in K$  solamente agregamos un conjunto de objetos  $V_j$  indexado por un conjunto de morfismos  $\{f_i : V_j \rightarrow W_k \mid j \in J_k\}$  en  $\mathcal{C}$ . Como el conjunto de todos los morfismos de  $\mathcal{C}$  tiene cardinal menor que  $\lambda$  y  $\lambda$  es regular, se sigue que la descomposición de  $V_n$  como coproducto de representables tiene cardinalidad menor que  $\lambda$ .  $\square$

**Corolario 4.1.29.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces la categoría de hipercubrimientos módulo homotopía simplicial  $\text{HC}(\mathcal{E})_{\sim}$  tiene una subcategoría inicial pequeña.

*Demostración.* Tomemos  $(\mathcal{C}, J)$  un sitio pequeño con  $\mathcal{E}$  cerrado por límites finitos. Sea  $\lambda$  un cardinal regular mayor que el cardinal de todos los morfismos de  $\mathcal{C}$ . Entonces consideremos la subcategoría plena de  $\text{HC}(\mathcal{E})_{\sim}$  cuyos objetos son hipercubrimientos  $a\mathcal{V}$  con  $\mathcal{V} \in s\mathcal{S}^{\text{cop}}$  un hipercubrimiento semi-representable de tamaño menor que  $\lambda$ . Como  $\text{HC}(\mathcal{E})_{\sim}$  es cofiltrante y esta subcategoría es plena, entonces por la Proposición 4.1.28 es inicial. Además esta categoría es pequeña pues un cálculo estándar de conjuntos muestra que su conjunto de objetos tiene cardinalidad acotada por  $2^\lambda$ .  $\square$

## 4.2. Cálculo de la Cohomología con Hipercubrimientos

**Definición 4.2.1.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $\mathcal{U} \in s\mathcal{E}$  un objeto simplicial, entonces aplicando el functor libre  $\mathcal{E} \xrightarrow{\mathbb{Z}} \text{Ab}(\mathcal{E})$  obtenemos un grupo abeliano simplicial  $\mathbb{Z}\mathcal{U}$  y via la construcción de Moore tenemos un complejo de cadenas  $(\mathbb{Z}\mathcal{U}, \partial) \in \text{Ch}_{\bullet}(\mathbf{Ab})$ . Explícitamente,  $(\mathbb{Z}\mathcal{U})_n = \mathbb{Z}U_n$  y  $\partial$  está dado por la suma alternante de las caras inducidas.

**Proposición 4.2.2.** [AM, Proposition 8.14] Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $\mathcal{U}$  un hipercubrimiento, entonces el complejo asociado  $\mathbb{Z}\mathcal{U} \rightarrow \gamma^*\mathbb{Z}$  es una resolución.

*Demostración.* Observamos que en [AM] esto es probado bajo la hipótesis extra de que el topos tiene suficientes puntos (ver Definición 3.3.9). Sin embargo esta hipótesis no es necesaria, fue primero notado por A. Joyal que se puede usar el Teorema de Barr (ver Observación 3.3.12). Notar que el complejo  $\mathbb{Z}\mathcal{U}$  es aumentado con el morfismo inducido por el epimorfismo  $U_0 \twoheadrightarrow 1$ , como  $\mathbb{Z}1 \simeq \gamma^*\mathbb{Z}$  por construcción. Por el Teorema de Barr, existe un mor-

fismo geométrico suryectivo  $\mathcal{B} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$  donde  $\mathcal{B} = \text{Sh}(B)$  para un álgebra booleana completa  $B$ . Pero entonces en  $\mathcal{B}$  todo epimorfismo es split, luego un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  en  $\mathcal{B}$  es un epimorfismo si y solo si  $f_* : \mathcal{B}(b, X) \rightarrow \mathcal{B}(b, Y)$  es suryectivo para todo  $b \in B$ . Dado  $\mathcal{U} \in {}_s\mathcal{E}$  el hipercubrimiento, entonces  $p^*\mathcal{U} \in {}_s\mathcal{B}$  es un hipercubrimiento pues  $p^*$  es exacto. Se sigue que  $\mathcal{B}(b, p^*U_n) \rightarrow \mathcal{B}(b, (\text{cosk}_{n-1}p^*\mathcal{U})_n)$  es suryectivo para todo  $b \in B$ . Además  $\mathcal{B}(b, (\text{cosk}_{n-1}p^*\mathcal{U})_n) \simeq (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{B}(b, p^*\mathcal{U}))_n$  pues el coesqueleto es un límite finito. Entonces el conjunto simplicial  $\mathcal{B}(b, p^*\mathcal{U})$  es un complejo de Kan acíclico para todo  $b \in B$ . Se sigue del Ejemplo 4.1.9 que el complejo de Mooore asociado es una resolución para todo  $b \in B$ :

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{B}(b, p^*U_2) \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{B}(b, p^*U_1) \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{B}(b, p^*U_0) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Por lo tanto tenemos una resolución en los prehaces  $\text{PSh}(B)$ . Y como el haz asociado es exacto tenemos una resolución en  $\mathcal{B} = \text{Sh}(B)$ .

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}p^*U_2 \rightarrow \mathbb{Z}p^*U_1 \rightarrow \mathbb{Z}p^*U_0 \rightarrow \gamma_{\mathcal{B}}^*\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Recordemos de la Observación 3.5.2 que  $\mathbb{Z}$  denota el functor  $\mathcal{B} \xrightarrow{\mathbb{Z}} \text{Ab}(\mathcal{B})$  el cual se obtiene por aplicación del haz asociado al grup abeliano libre en los prehaces. También notemos que  $\mathbb{Z}p^* \simeq p^*\mathbb{Z}$  y  $p^*\gamma_{\mathcal{E}}^* \simeq \gamma_{\mathcal{B}}^*$ . Entonces el complejo  $p^*\mathbb{Z}\mathcal{U} \rightarrow \gamma_{\mathcal{B}}^*\mathbb{Z}$  es una resolución en  $\text{Ab}(\mathcal{B})$ , y dado que  $p$  es suryectiva  $\mathbb{Z}\mathcal{U} \rightarrow \gamma^*\mathbb{Z}$  es una resolución en  $\text{Ab}(\mathcal{E})$ .  $\square$

**Definición 4.2.3.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos,  $U \in \mathcal{E}$  un objeto y  $F \in \text{Ab}(\mathcal{E})$  un objeto grupo abeliano entonces  $F(U) \in \mathbf{Ab}$  es el grupo abeliano dado por  $F(U) = \mathcal{E}(U, F)$  con la multiplicación inducida por  $F$ . Entonces si  $\mathcal{U} \in {}_s\mathcal{E}$  un objeto simplicial,  $F(\mathcal{U}) \in \mathbf{Ab}^{\Delta}$  es el grupo abeliano co-simplicial dado por  $F(\mathcal{U})_n = \mathcal{E}(U_n, F)$  y cuyas co-caras y co-degeneraciones están dadas por pre-composición. Existe un complejo de co-cadenas asociado  $(F(\mathcal{U}), \partial) \in \text{Ch}^{\bullet}(\mathbf{Ab})$  dado por la variante co-simplicial de la construcción de Moore. En particular, dado  $A$  un grupo abeliano, tenemos un grupo abeliano co-simplicial  $\gamma^*A(\mathcal{U})$  y un complejo de co-cadenas asociado.

**Proposición 4.2.4.** [AM, Corollary 8.15] Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos,  $\mathcal{U}$  un hipercubrimiento y  $F \in \text{Ab}(\mathcal{E})$ , entonces existe una sucesión espectral convergente

$${}^I E_1^{p,q} = H^q(U_p, F) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{E}, F)$$

donde  $H$  denota la cohomología de haces.

*Demostración.* Esta es la sucesión espectral estándar del funtor Ext para una resolución, y se sigue de la Proposición 4.2.2.  $\square$

**Teorema 4.2.5. (Teorema de Leray)** Dados un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$ ,  $F \in \text{Ab}(\mathcal{E})$ ,  $\mathcal{U}$  un hipercubrimiento. Si  $H^q(U_p, F) = 0$  para todo  $q > 0$ , entonces  $H^n(\mathcal{E}, F) \simeq H^n(F(\mathcal{U}))$  para todo  $n$ .

*Demostración.* Tomemos la sucesión espectral de la Proposición 4.2.4. Por hipótesis tenemos que  ${}^I E_1^{p,q} = H^q(U_p, F) = 0$  para  $q > 0$  entonces la sucesión espectral colapsa en la segunda página, luego  ${}^I E_2^{n,0} = H^n(F(\mathcal{U})) \simeq H^n(\mathcal{E}, F)$ .  $\square$

**Teorema 4.2.6. (Teorema del hipercubrimiento de Verdier)**([SGA4-2, Exposé V, Théorème 7.4.1.], [AM, Theorem 8.16]) Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $F \in \text{Ab}(\mathcal{E})$ , entonces

$$H^n(\mathcal{E}, F) \simeq \text{colim}_{\mathcal{U} \in \text{HC}(\mathcal{E})^{\text{op}}} H^n(F(\mathcal{U}))$$

donde el lado derecho es la cohomología del complejo  $F(\mathcal{U})$  como en la Definición 4.2.3.

*Demostración.* Pasamos al colímite la sucesión espectral de la Proposición 4.2.4 sobre la categoría de hipercubrimientos salvo equivalencia homotópica simplicial. Sea  $\mathcal{U}$  un hipercubrimiento split y  $[\alpha] \in H^q(U_p, F)$  una clase de cohomología para  $q > 0$ . Descomponemos  $U_p = \sum_s N_s$  donde  $s : [p] \twoheadrightarrow [k]$  para  $k \leq p$ , entonces  $[\alpha]$  es un producto de clases  $[\alpha_s] \in H^q(N_s, F)$  por la Proposición 3.5.8. Dado que la cohomología se anula localmente por la Proposición 3.5.9, hay epimorfismos  $N'_s \rightarrow N_s$  tales que  $\alpha_s \mapsto 0$  in  $H^q(N'_s, F)$ . Pero entonces usando el Lema 4.1.22  $p$ -veces y el Lema 4.1.19 podemos construir un hipercubrimiento  $\mathcal{V}$  con un morfismo  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  tal que  $\alpha \mapsto 0$  en  $H^q(V_p, F)$ . Entonces se sigue que  $\text{colim}_{\mathcal{U} \in \text{HC}(\mathcal{E})^{\text{op}}} H^q(U_p, F) = 0$  para todo  $q > 0$ . Luego  $\text{colim}_{\mathcal{U} \in \text{HC}(\mathcal{E})^{\text{op}}} E_2^{p,q}(\mathcal{U}) = 0$  para  $q > 0$ . También dado que  ${}^I E_2^{p,q} = H_h^p(H^q(\mathcal{U}, F))$  y para  $q = 0$  tenemos  $H^0(\mathcal{U}, F) = F(\mathcal{U})$ , entonces  ${}^I E_2^{n,0} \simeq H^n(F(\mathcal{U}))$ . Dado que la sucesión espectral colímite colapsa en la segunda página, obtenemos el resultado.  $\square$

Ahora por completitud introducimos la cohomología de Čech de una forma más o menos directa y damos el teorema más importante de comparación con la cohomología de haces.

**Observación 4.2.7.** Recordemos que un objeto simplicial  $\mathcal{X}$  se dice  $n$ -**coesquelético** si el morfismo canónico  $\mathcal{X} \rightarrow \text{cosk}_n \mathcal{X}$  es un isomorfismo. Dado un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$ , la categoría de

hipercubrimientos  $n$ -coesqueléticos salvo homotopía simplicial es cofiltrante, esencialmente por los mismos argumentos que antes (hay una afirmación análoga al Teorema 4.1.16 para hipercubrimientos  $n$ -coesqueléticos, ver [SGA4-2, Théorème 7.3.2.]). La categoría de hipercubrimientos 0-coesqueléticos es equivalente (por la adjunción  $\text{res}_0 \dashv \text{cosk}_0$ ) a la categoría de epimorfismos  $U \twoheadrightarrow 1$ , i.e. simplemente cubrimientos del objeto final.

**Definición 4.2.8.** Dado un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  y  $F \in \text{Ab}(\mathcal{E})$ , definimos la **cohomología de Čech** como  $\check{H}^n(\mathcal{E}, F) = \text{colim}_{\mathcal{C}U \in \mathcal{C}(\mathcal{E})_{\sim}^{\text{op}}} H^n(F(\mathcal{C}U))$ , donde  $\mathcal{C}(\mathcal{E})_{\sim}^{\text{op}}$  denota la categoría de hipercubrimientos 0-coesqueléticos (también conocidos como complejos de Čech) salvo homotopía simplicial. Mas generalmente, dado  $X \in \mathcal{E}$  definimos  $\check{H}^n(X, F) = \text{colim}_{\mathcal{C}U \in \mathcal{C}(\mathcal{E}/X)^{\text{op}}} H^n(F(\mathcal{C}U))$  donde el colímite está en el complejo de Čech en el topos  $\mathcal{E}/X$ , salvo homotopía simplicial.

**Teorema 4.2.9. (Teorema de Cartan)** Dado un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  y  $F \in \text{Ab}(\mathcal{E})$ , supongamos que hay un sitio subcanónico pequeño  $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$  cerrado por límites finitos, tal que  $\check{H}^n(V, F) = 0$  para todo  $V \in \mathcal{C}$ . Entonces hay un isomorfismo  $\check{H}^n(X, F) \simeq H^n(X, F)$  para todo  $X \in \mathcal{E}$ .

**Observación 4.2.10.** Bajo las hipótesis del Teorema de Cartan se sigue del Teorema de Leray que podemos calcular la cohomología  $H^n(\mathcal{E}, F)$  como la cohomología del complejo  $H^n(F(\mathcal{C}V))$  donde  $V = \sum_{j \in J} V_j \twoheadrightarrow 1$  es cualquier epimorfismo con  $V_j \in \mathcal{C}$  para todo  $j \in J$ . En efecto, del Teorema de Cartan  $H^q(\mathcal{C}V_p, F) = \check{H}^q(\mathcal{C}V_p, F) = 0$  para  $q > 0$  luego el Teorema Leray se puede aplicar.

## 5. El Funtor de Verdier

### 5.1. Familias en un topos

**Definición 5.1.1.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, una **familia** es una tripla  $(U, I, \xi)$  donde  $U$  es un objeto de  $\mathcal{E}$ ,  $I$  es un conjunto, y  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^* I$  es un morfismo. Dado un objeto  $U$ , el morfismo  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^* I$  es llamado una **indexación** de  $U$ .

Un **morfismo de familias**  $(V, J, \rho) \rightarrow (U, I, \xi)$  está dada por un par  $(f, \alpha)$  donde  $f : V \rightarrow U$  es un morfismo y  $\alpha : J \rightarrow I$  es una función tal que el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & U \\ \rho \downarrow & & \downarrow \xi \\ \gamma^* J & \xrightarrow{\gamma^*(\alpha)} & \gamma^* I \end{array}$$

Las familias de un topos forman una categoría que denotamos  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ .

**Observación 5.1.2.** La categoría  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  es la categoría coma  $(Id_{\mathcal{E}} \downarrow \gamma^*)$ .

**Proposición 5.1.3.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces la categoría  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  es equivalente a la categoría cuyos objetos son colecciones de objetos de  $\mathcal{E}$ ,  $(U_i)_{i \in I}$  indexados por algún conjunto  $I$ , y cuyos morfismos  $(V_j)_{j \in J} \rightarrow (U_i)_{i \in I}$  están dados por una función  $\alpha : J \rightarrow I$  y una familia de morfismos  $f_j : V_j \rightarrow U_{\alpha(j)}$  para  $j \in J$ .

*Demostración.* Dada la familia  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^* I$  se define  $U_i$  como la fibra sobre  $i \in I$ :

$$\begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \xi \\ 1 & \xrightarrow{\gamma^*(i)} & \gamma^* I \end{array}$$

Como los colímites, y en particular los coproductos, son universales entonces  $U \simeq \sum_{i \in I} U_i$ . Recíprocamente, dada  $(U_i)_{i \in I}$ , definimos  $U = \sum_{i \in I} U_i$  y el morfismo  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^* I$  como el coproducto de los morfismos  $U_i \rightarrow 1$  para  $i \in I$ .

Consideremos un morfismo de familias  $(f, \alpha)$ :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & U \\ \rho \downarrow & & \downarrow \xi \\ \gamma^* J & \xrightarrow{\gamma^*(\alpha)} & \gamma^* I \end{array}$$

Dado un índice  $i \in I$ , consideremos los siguientes cuadrados pullback:

$$\begin{array}{ccccc} f^*U_i & \longrightarrow & U_i & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \gamma^*(i) \\ V & \xrightarrow{f} & U & \xrightarrow{\xi} & \gamma^*I \end{array}$$

Pero como  $(f, \alpha)$  es un morfismo de familias,  $\xi f = \gamma^*(\alpha)\rho$  el pullback de afuera es isomorfo a el siguiente pullback:

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{j \in \alpha^{-1}(i)} V_j & \longrightarrow & \gamma^*(\alpha^{-1}(i)) & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \gamma^*(i) \\ V & \xrightarrow{\rho} & \gamma^*J & \xrightarrow{\gamma^*(\alpha)} & \gamma^*I \end{array}$$

Para esto usamos la universalidad de los coproductos y el hecho que  $\gamma^*$  es exacto. Por lo tanto obtenemos un isomorfismo  $f^*U_i \simeq \sum_{j \in \alpha^{-1}(i)} V_j$ . Luego, tenemos un morfismo  $V_j \xrightarrow{f_j} U_{\alpha(j)}$  para cada  $j \in J$ . Para el recíproco, dada una familia de morfismos  $f_j : V_j \rightarrow U_{\alpha(j)}$  con  $j \in J$ , definimos  $f : V \rightarrow U$  vía la propiedad universal del coproducto:

$$\begin{array}{ccc} V_j & \xrightarrow{f_j} & U_{\alpha(j)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{f} & U \end{array}$$

y es fácil chequear que  $(f, \alpha)$  define un morfismo de familias. De esta forma construimos los dos funtores y se chequea fácilmente que éstos constituyen una equivalencia de categorías.  $\square$

**Definición 5.1.4.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y un objeto  $U \in \mathcal{E}$ , una indexación  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$  se dice **reducida** si  $U_i \neq \emptyset$  para todo  $i \in I$ . En este caso también decimos que  $(U, I, \xi)$  es una familia reducida.

**Observación 5.1.5.** Esto es equivalente a la noción de una **partición reducida** de  $\mathcal{E}/U$  en [SGA4-1, Exposé IV, Exercise 8.7]. Observar que dado un objeto  $U$  con una indexación reducida  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$ , entonces los  $U_i$  son disjuntos como subobjetos de  $U$ , es decir  $U_i \cap U_j = \emptyset$  para  $i \neq j$  donde  $U_i \cap U_j = U_i \times_U U_j$ .

**Definición 5.1.6.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y un objeto  $U \in \mathcal{E}$ , entonces la **categoría de indexaciones de  $U$**  es la categoría coma  $\mathcal{F}(\mathcal{E})_U = (U \downarrow \gamma^*)$ . Esto es, sus objetos son indexaciones  $(I, \xi)$ , donde  $\xi$  es un morfismo  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$ , y un morfismo  $(J, \rho) \rightarrow (I, \xi)$  es dado por una

función  $\alpha : J \rightarrow I$  tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \rho \swarrow & & \searrow \xi \\ \gamma^* J & \xrightarrow{\gamma^*(\alpha)} & \gamma^* I \end{array}$$

**Proposición 5.1.7.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y un objeto  $U \in \mathcal{E}$ , entonces la categoría de indexaciones reducidas de  $U$  es esencialmente pequeña.

*Demostración.* Primero recordemos que dado  $U \in \mathcal{E}$ , su poset de subobjetos  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(U)$  es pequeño, por el Teorema 3.2.19. Por simplicidad llamemos  $S$  al conjunto de subobjetos de  $U$  y elegimos para cada subobjeto un representante de la clase  $g_s : V_s \rightarrow U$  con  $s \in S$ . Dada una indexación reducida  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^* I$ , tenemos monomorfismos  $U_i \xrightarrow{f_i} U$  para cada  $i \in I$ , por lo tanto  $[f_i] = [g_s]$  (como subobjetos) para un único  $s \in S$ . Esto define una función  $\alpha : I \rightarrow S$ , mas aún esta es inyectiva pues los coproductos son disjuntos y la indexación es reducida (ver la Observación 5.1.5). Llamemos  $J = \text{Im}(\alpha) \subset S$ , y definamos la indexación  $(J, \rho)$  donde  $\rho$  está definida vía los siguientes cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccc} V_j & \xrightarrow{g_j} & U \\ \downarrow ! & & \downarrow \rho \\ 1 & \xrightarrow{\gamma^*(j)} & \gamma^* J \end{array}$$

Afirmamos que  $(I, \xi) \simeq (J, \rho)$ , para ver esto chequeamos que la biyección  $\alpha : I \rightarrow J$  define un isomorfismo de indexaciones, i.e. el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \xi \swarrow & & \searrow \rho \\ \gamma^* I & \xrightarrow{\gamma^*(\alpha)} & \gamma^* J \end{array}$$

Para ver esto, para  $i \in I$  y  $j = \alpha(i)$  tenemos un isomorfismo  $h_i : V_j \rightarrow U_i$  tal que  $f_i h_i = g_j$ , pues  $[f_i] = [g_j]$ . Consideremos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} & & V_j & & \\ & & \downarrow h_i & & \\ & & U_i & \xrightarrow{f_i} & U \\ & & \downarrow ! & & \downarrow \xi \\ & & 1 & \xrightarrow{\gamma^*(i)} & \gamma^* I \\ & & \downarrow & & \downarrow \gamma^*(\alpha) \\ & & 1 & \xrightarrow{\gamma^*(j)} & \gamma^* J \end{array}$$

Ambos cuadrados son pullbacks y también el cuadrado curvo externo es un pullback por definición de  $\rho$ , entonces calculamos

$$\gamma^*(\alpha)\xi g_j = \gamma^*(\alpha)\xi f_i h_i = \gamma^*(j)!h_i = \gamma^*(j)! = \rho g_j$$

Como  $(V_j \xrightarrow{g_j} U)_{j \in J}$  es epimorfa, se sigue que  $\rho = \gamma^*(\alpha)\xi$ . Ahora consideremos el conjunto de todas las indexaciones reducidas construídas como hicimos con  $(J, \rho)$ , i.e. usando como sumandos los representantes elegidos de cada subobjeto, para  $J \subset S$  un subconjunto de subobjetos disjuntos que generan  $U$ . Este es un conjunto pequeño, pues su cardinal está acotado por  $2^{|S|}$ , y recién mostramos que cada indexación reducida es isomorfa a una indexación de este conjunto, por tanto esta categoría es esencialmente pequeña.  $\square$

**Lema 5.1.8.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces existe un endofuntor  $\mathcal{F}(\mathcal{E}) \xrightarrow{N} \mathcal{F}(\mathcal{E})$  junto con una transformación natural  $\eta : N \Rightarrow Id$  que manda una familia  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$  a una indexación reducida canónicamente asociada  $U \xrightarrow{\xi'} \gamma^*NI$ , donde  $NI = \{i \in I \mid U_i \neq \emptyset\}$ . Mas aún, si denotamos  $\mathcal{F}_r(\mathcal{E})$  a la subcategoría plena de familias reducidas, entonces  $N$  es adjunto a derecha a la inclusion  $\mathcal{F}_r(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{E})$ .

*Demostración.* Dada una indexación  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$  llamemos  $\eta_I : NI \rightarrow I$  a la inclusión, y definamos  $\xi'$  por la propiedad universal del coproducto pues  $U = \sum_{i \in NI} U_i$ .

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{f_i} & U \\ \downarrow & & \downarrow \xi' \\ 1 & \xrightarrow{\gamma^*(i)} & \gamma^*NI. \end{array}$$

Entonces  $\eta_I$  define un morfismo de indexaciones de  $U$ , i.e. tenemos el siguiente triángulo conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \xi' \swarrow & & \searrow \xi \\ \gamma^*NI & \xrightarrow{\gamma^*(\eta_I)} & \gamma^*I \end{array}$$

Dado un morfismo de familias con  $(V, J, \rho)$  reducido:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & U \\ \rho \downarrow & & \downarrow \xi \\ \gamma^*J & \xrightarrow{\gamma^*(\alpha)} & \gamma^*I \end{array}$$

Entonces tenemos  $f_j : V_j \rightarrow U_{\alpha(j)}$ , if  $U_{\alpha(j)} = \emptyset$  luego  $V_j = \emptyset$  pues los topos tienen objetos iniciales estrictos. Por lo tanto  $\alpha$  se restringe a  $NI$ . Llamemos  $\alpha'$  a esta restricción, entonces se ve fácilmente que el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & U \\ \rho \downarrow & & \downarrow \xi' \\ \gamma^* J & \xrightarrow{\gamma^*(\alpha')} & \gamma^* NI. \end{array}$$

Además esta correspondencia es biyectiva y natural, por lo tanto tenemos la adjunción deseada.  $\square$

Las indexaciones reducidas tienen la propiedad que si un morfismo es indexado, entonces existe una única forma de indexarlo.

**Proposición 5.1.9.** Dado un morfismo  $V \xrightarrow{f} U$  y dos indexaciones  $(J, \rho), (I, \xi)$  de  $V$  y  $U$  respectivamente con  $(J, \rho)$  reducida, entonces existe a lo sumo una función  $J \xrightarrow{\alpha} I$  tal que  $(f, \alpha)$  es un morfismo de familias. En el lenguaje de las categorías, el funtor de olvido obvio  $\mathcal{F}_r(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$  es fiel.

*Demostración.* Dadas dos indexaciones del morfismo  $\alpha, \beta$ , y  $j \in J$  tenemos una factorización  $f_j : V_j \rightarrow U_{\alpha(j)} \cap U_{\beta(j)}$ . Dado que  $V_j \neq \emptyset$  entonces  $U_{\alpha(j)} \cap U_{\beta(j)} \neq \emptyset$ , luego  $\alpha(j) = \beta(j)$ .  $\square$

**Proposición 5.1.10.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y un objeto  $U \in \mathcal{E}$ , entonces la categoría  $\mathcal{F}_r(\mathcal{E})_U$  de indexaciones reducidas de  $U$  es un poset (grande) cofiltrante.

*Demostración.* Primero es claro que la categoría de indexaciones reducidas es no vacía, pues tenemos la indexación  $U \xrightarrow{!} 1$ . Necesitamos chequear las condiciones duales a (F0) y (F1) de 1.2.1. Dadas  $(I, \xi), (J, \rho)$  dos indexaciones reducidas de  $U$ , consideremos su producto

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\xi} & \gamma^* I \\ & \nearrow & \uparrow \gamma^*(p_0) \\ U & \xrightarrow{(\xi, \rho)} & \gamma^*(I \times J) \\ & \searrow & \downarrow \gamma^*(p_1) \\ & \xrightarrow{\rho} & \gamma^* J \end{array}$$

Esto da una descomposición  $U = \sum_{(i,j) \in I \times J} U_i \cap V_j$ . Pero la mayoría de estas intersecciones son vacías en general, entonces consideremos  $(K, \zeta)$  la parte reducida de esta indexación, luego el dual de (F0) se sigue. El dual de (F1) se tiene automáticamente pues no hay morfismos paralelos por 5.1.9.  $\square$

Es fácil ver que  $\mathcal{F}_r(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$  en general no es pleno. Por otro lado, podemos convertir cualquier morfismo  $V \xrightarrow{f} U$  en un morfismo de familias si refinamos la indexación del dominio.

**Lema 5.1.11.** Dado un morfismo  $V \xrightarrow{f} U$  e indexaciones  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^* I$ ,  $V \xrightarrow{\rho} \gamma^* J$ , entonces hay una indexación reducida  $(K, \zeta)$  de  $V$ , un morfismo de indexaciones  $\beta : (K, \zeta) \rightarrow (J, \rho)$  y un morfismo de familias  $(f, \alpha) : (V, K, \zeta) \rightarrow (U, I, \xi)$ . Gráficamente:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & U \\
 \downarrow \rho & & \downarrow \xi \\
 \gamma^* J & & \gamma^* I \\
 \uparrow \gamma^*(\beta) & & \uparrow \gamma^*(\alpha) \\
 \gamma^* K & & 
 \end{array}$$

$\zeta$  (curved arrow from  $V$  to  $\gamma^* K$ )  
 $\gamma^*(\beta)$  (curved arrow from  $\gamma^* K$  to  $\gamma^* J$ )  
 $\gamma^*(\alpha)$  (curved arrow from  $\gamma^* K$  to  $\gamma^* I$ )

*Demostración.* Consideremos las indexaciones  $(J, \rho)$  y  $(I, \xi f)$  de  $V$ , entonces construimos una indexación reducida  $(K, \zeta)$  como hicimos en 5.1.10. □

**Lema 5.1.12.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y un objeto  $U \in \mathcal{E}$ , entonces existe un poset pequeño filtrante  $J_U$  y un funtor inicial  $J_U^{op} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}(\mathcal{E})_U$ .

*Demostración.* Consideremos la categoría de indexaciones reducidas de  $U$  módulo la relación de equivalencia dada por isomorfismos de indexaciones, i.e.  $[I, \xi] = [J, \rho]$  si y solo si hay una biyección  $\alpha : I \rightarrow J$  tal que  $\rho = \gamma^*(\alpha)\xi$ . Por 5.1.7, 5.1.9, 5.1.10 este es un poset cofiltrante, llamemos su categoría dual  $J_U$ . Definimos un funtor  $J_U^{op} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}(\mathcal{E})_U$  eligiendo representantes. Necesitamos chequear las condiciones duales a (a) y (b) de 1.2.2, pero (a) se sigue directamente de 5.1.8, i.e. podemos refinar cualquier indexación por su parte no vacía. La condition (b) se sigue directamente de 5.1.9 pues no hay morfismos paralelos desde una indexación no vacía. □

**Lema 5.1.13.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, el funtor  $\mathcal{S} \xrightarrow{\gamma^*} \mathcal{E}$  tiene un pro adjunto a izquierda,  $L \dashv \text{Pro}(\gamma^*)$ . Además, dado  $U \in \mathcal{E}$  entonces  $LU = (I)_{(I, \xi) \in J_U}$  donde  $J_U^{op}$  es un poset pequeño cofiltrante de indexaciones reducidas y  $\varphi : J_U^{op} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{E})_U$  es un funtor inicial.

*Demostración.* Esto se sigue directamente del teorema del funtor pro-adjunto 1.2.14 y 5.1.12. □

**Lema 5.1.14.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos,  $U \in \mathcal{E}$  un objeto,  $A \in \mathcal{S}$  un conjunto, entonces hay un isomorfismo natural  $\mathcal{E}(U, \gamma^* A) \simeq \text{colim}_{(I, \xi) \in J_U} \{I, A\}$ .

*Demostración.* Calculemos:

$$\mathcal{E}(U, \gamma^* A) \simeq \text{Pro}(\mathcal{S})(LU, A) = \text{Pro}(\mathcal{S})((I)_{(I, \xi) \in J_U}, A) \simeq \text{colim}_{(I, \xi) \in J_U} \mathcal{S}(I, A) \simeq \text{colim}_{(I, \xi) \in J_U} \{I, A\}$$

El morfismo canónico  $\text{colim}_{(I, \xi) \in J_U} \{I, A\} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(U, \gamma^* A)$  manda una función  $\omega : I \rightarrow A$  con  $(I, \xi)$

una indexación, al morfismo  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^* I \xrightarrow{\gamma^*(\omega)} \gamma^* A$ .  $\square$

**Teorema 5.1.15.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  es un topos.

*Demostración.* Chequeemos que  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  es un topos usando el Teorema de Giraud 3.2.21. Primero mostremos que  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  tiene límites finitos y colímites pequeños. Dada una categoría pequeña (respectivamente finita)  $\Gamma$  y un funtor  $\Gamma \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{E})$  dado por  $\alpha \mapsto (U_\alpha, I_\alpha, \xi_\alpha)$ , consideremos  $(U, I, \xi)$  donde  $U = \text{colim}_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$ ,  $I = \text{colim}_{\alpha \in \Gamma} I_\alpha$  y  $\xi : U \rightarrow \gamma^* I$  esta dado por el colímite de los  $\xi_\alpha$ , donde usamos que  $\gamma^* I \simeq \text{colim}_{\alpha \in \Gamma} \gamma^* I_\alpha$  pues  $\gamma^*$  preserva colímites (respectivamente límites finitos). Entonces se sigue fácilmente siguiendo elementos en el diagrama que  $(U, I, \xi)$  es el colímite de este diagrama, y el argumento dual funciona para límites finitos. Entonces las propiedades (b) y (c) de 3.2.21 se siguen de los hechos correspondientes sobre  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{S}$ . También necesitamos chequear que  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  es una categoría, y para esto requerimos que los hom-sets sean pequeños, pero trivialmente se tiene la cota

$$\mathcal{F}(\mathcal{E})((V, J, \rho), (U, I, \xi)) \subset \mathcal{E}(V, U) \times \mathcal{S}(J, I)$$

y entonces solamente tenemos que chequear la condición (d), i.e. que  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  tiene un conjunto pequeño de generadores. Para esto, consideremos un sitio  $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$  cerrado por límites finitos, y para cada  $U \in \mathcal{C}$ , consideremos un pro-objeto de indexaciones  $(I_j, \xi_j)_{j \in J_U}$  pro-representando  $LU$  donde  $L$  es el pro-adjunto a izquierda de  $\gamma^*$ . Entonces afirmamos que el conjunto de todas las familias  $(U, I_j, \xi_j)$  para todo  $U \in \mathcal{C}$  y todo  $j \in J_U$  y la familia  $(\emptyset_{\mathcal{E}}, 1_{\mathcal{S}}, !)$  es un conjunto de generators de  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ . Dada una familia arbitraria  $X \xrightarrow{\rho} \gamma^* S$ , tenemos que mostrar que la colección de todas las familias de morfismos de este conjunto, i.e. de tipo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & X \\ \xi_j \downarrow & & \downarrow \rho \\ \gamma^* I_j & \xrightarrow{\gamma^*(\alpha)} & \gamma^* S \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{!} & X \\ ! \downarrow & & \downarrow \rho \\ 1 & \xrightarrow{\gamma^*(s)} & \gamma^* S \end{array}$$

donde  $U \in \mathcal{C}$  y  $j \in J_U$ , es conjuntamente epimorfa. De la caracterización que hicimos antes sobre los colímites en  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  se sigue que un morfismo de familias  $(f, \alpha) : (V, J, \rho) \rightarrow (U, I, \xi)$

es epimorfo si y solo si  $f : V \rightarrow U$  es epimorfa en  $\mathcal{E}$  y  $\alpha : J \rightarrow I$  es sobreyectiva. Primero dado que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$  es un sitio, el conjunto de todos los morfismos  $f : U \rightarrow X$  donde  $U \in \mathcal{C}$  es conjuntamente epimorfo. Pero dado un morfismo  $f : U \rightarrow X$ , se tiene una indexación inducida en  $U$ , a saber  $\xi = \rho f$ , y como las indexaciones  $(I_j, \xi_j)_{j \in J_U}$  eran iniciales, hay alguna indexación  $\xi_j$  que refina  $\xi$  a través de un morfismo  $\alpha : I_j \rightarrow S$ , luego el par  $(f, \alpha)$  constituye un morfismo de familias. Para ver que tenemos una suryección conjunta en  $S$  simplemente usamos el conjunto de todos los morfismos de  $(\emptyset_{\mathcal{E}}, 1_S, !)$ . Esto muestra que tenemos un conjunto de generadores y por el teorema de Giraud  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  es un topos.  $\square$

**Observación 5.1.16.** El Teorema 5.1.15 es un caso particular de un teorema más general, el “Théorème de Recollement” también conocido como “Artin’s Gluing” de [SGA4-1][Exposé IV, Proposition 9.5.4] el cual da condiciones bajo las cuales la categoría coma de un topos es ella misma un topos. Este teorema es también un caso particular de un teorema más general el cual caracteriza cuando la categoría de coálgebras de una comónada es un topos. Seguimos este enfoque para estudiar la categoría de familias que será crucial en este trabajo.

**Observación 5.1.17.** Para nuestro propósito, la clave del Teorema 5.1.15 es que en el topos  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  los límites finitos y los colímites pequeños se calculan como los límites (resp. colímites) de los morfismos de indexación.

Comparemos ahora el caso localmente conexo con el caso general.

**Proposición 5.1.18.** [SGA4-1, Exposé IV, Exercise 8.7.1] Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, las siguientes condiciones son equivalentes:

- a)  $\mathcal{S} \xrightarrow{\gamma^*} \mathcal{E}$  tiene un adjunto a izquierda  $\gamma_! \dashv \gamma^*$ .
- b)  $\mathcal{S} \xrightarrow{\gamma^*} \mathcal{E}$  preserva todos los productos pequeños.
- c) Para cada  $U \in \mathcal{E}$ , la categoría  $\mathcal{F}(\mathcal{E})_U$  de indexaciones de  $U$  tiene un objeto inicial.

En este caso decimos que el topos  $\mathcal{E}$  es **localmente conexo**.

*Demostración.* La equivalencia de (a) y (c) es elemental,  $\gamma^*$  tiene un adjunto a izquierda si y solo si para todo  $U \in \mathcal{E}$  el funtor  $\mathcal{E}(U, \gamma^* -) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  es representable y un funtor es representable si y solo si su categoría de elementos, la cual en este caso es  $\mathcal{F}(\mathcal{E})_U$ , tiene un

objeto inicial. Es claro que (a) implica (b), es suficiente mostrar que (b) implica (c). Dado  $U \in \mathcal{E}$  consideremos el pro-objeto  $LU = (I_j, \xi_j)_{j \in J_U}$  de 5.1.13, si  $\gamma^*$  preserva productos consideremos la indexación  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^* I$  donde  $(I, \xi)$  es la parte reducida de  $(\prod_{j \in J_U} I_j, (\xi_j)_j)$ . Como  $\varphi : J_U^{op} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{E})_U$  es un functor inicial se sigue que cada indexación tiene un morfismo de  $(I, \xi)$ , además de 5.1.9 este morfismo es único, luego  $(I, \xi)$  es inicial.  $\square$

**Observación 5.1.19.** Dado un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  supongamos que  $U \in \mathcal{E}$  tiene una indexación inicial  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^* I$ , entonces esta debe ser reducida y además dado que esta indexación no admite un refinamiento, ningún objeto  $U_i$  puede admitir una indexación no trivial, estos objetos son llamados conexos.

**Definición 5.1.20.** Dado un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$ , un objeto  $U \in \mathcal{E}$  es **conexo** si su categoría de indexaciones reducidas es equivalente a la categoría terminal  $\mathbb{1}$  (con un objeto y un morfismo), i.e. toda indexación reducida es isomorfa a  $U \xrightarrow{!} 1$ .

**Ejercicio 5.1.21.** Dado un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$ , un objeto  $U \in \mathcal{E}$  es conexo si y sólo sí para cada familia  $(V, J, \rho)$  existe una biyección natural  $\mathcal{E}(U, V) \simeq \mathcal{F}(\mathcal{E})((U, 1, !), (V, J, \rho))$ , i.e. si y solo si el functor  $\mathcal{E}(U, -)$  preserva coproductos.

**Observación 5.1.22.** Se sigue que un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  es localmente conexo si y solo si cada objeto  $U \in \mathcal{E}$  admite una indexación  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^* I$  por objetos conexos, estos objetos se llaman las componentes conexas de  $U$ .

## 5.2. Familias simpliciales en un topos

**Definición 5.2.1.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, una **familia simplicial** es un objeto simplicial en  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ , está dado por una tripla  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  donde  $\mathcal{U} \in s\mathcal{E}$  es un objeto simplicial en el topos,  $\mathcal{J}$  es un conjunto simplicial y un morfismo de indexación  $\mathcal{U} \xrightarrow{\xi} \gamma^* \mathcal{J}$ . Un morfismo de familias simpliciales es un morfismo simplicial. Denotemos la categoría de familias simpliciales por  $s\mathcal{F}(\mathcal{E})$ .

**Observación 5.2.2.** La categoría  $s\mathcal{F}(\mathcal{E})$  de familias simpliciales es la categoría  $\mathcal{F}(\mathcal{E})^{\Delta^{op}}$  de objetos simpliciales de  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ , o equivalentemente es la categoría coma  $(Id_{s\mathcal{E}} \downarrow \gamma^*)$  donde  $\gamma^* : s\mathcal{S} \rightarrow s\mathcal{E}$  se define grado a grado.

**Definición 5.2.3.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $\mathcal{U} \in s\mathcal{E}$ , la **categoría de indexaciones de  $\mathcal{U}$**  es la categoría coma  $s\mathcal{F}(\mathcal{E})_{\mathcal{U}} = (\mathcal{U} \downarrow \gamma^*)$ . Una indexación  $(\mathcal{J}, \xi)$  se dice **reducida** si  $U_n \xrightarrow{\xi} \gamma^* I_n$  es reducida (ver ??) para todo  $n \geq 0$ .

**Observación 5.2.4.** Si un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  es localmente conexo, entonces cada objeto simplicial es canónicamente indexado por el functor de componentes conexas. Recordemos que en este caso tenemos un adjunto a izquierda  $\gamma_! \dashv \gamma^*$ ,  $\gamma_! : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ , esto induce una adjunción en objetos simpliciales. Por lo tanto dado  $\mathcal{U} \in s\mathcal{E}$  tenemos una indexación via la unidad de la adjunción  $\mathcal{U} \xrightarrow{\eta} \gamma^* \gamma_! \mathcal{U}$ . Más aún dada otra indexación  $\mathcal{U} \xrightarrow{\xi} \gamma^* \mathcal{J}$ , por adjunción existe un único morfismo  $\gamma_! \mathcal{U} \xrightarrow{\xi'} \mathcal{J}$  de conjuntos simpliciales tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{U} & \\ \eta \swarrow & & \searrow \xi \\ \gamma^* \gamma_! \mathcal{U} & \xrightarrow{\gamma^*(\xi')} & \gamma^* \mathcal{J} \end{array}$$

Esto es,  $\mathcal{U} \xrightarrow{\eta} \gamma^* \gamma_! \mathcal{U}$  es el objeto inicial de la categoría de indexaciones de  $\mathcal{U}$ .

Ahora elevamos nuestros resultados 5.1.8, 5.1.9 y 5.1.10 de familias a familias simpliciales.

**Lema 5.2.5.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces existe un endofunctor  $s\mathcal{F}(\mathcal{E}) \xrightarrow{N} s\mathcal{F}(\mathcal{E})$  con una transformación natural  $\eta : N \Rightarrow Id$  que manda una indexación  $\mathcal{U} \xrightarrow{\xi} \gamma^* \mathcal{J}$  a una indexación reducida canónicamente asociada  $\mathcal{U} \xrightarrow{\xi'} \gamma^* N\mathcal{J}$ , donde  $N\mathcal{J}_n = \{i \in I_n \mid U_{n,i} \neq \emptyset\}$ . Más aún, el functor es adjunto a derecha de la inclusión de familias simpliciales reducidas en  $s\mathcal{F}(\mathcal{E})$ .

*Demostración.* Dado que tenemos un functor  $\mathcal{F}(\mathcal{E}) \xrightarrow{N} \mathcal{F}(\mathcal{E})$  de 5.1.8, este induce un functor en objetos simpliciales grado a grado y la transformación natural  $\eta : N \Rightarrow Id$  induce la correspondiente transformación natural en objetos simpliciales.  $\square$

**Proposición 5.2.6.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $\mathcal{U} \in s\mathcal{E}$ , entonces la categoría  $s\mathcal{F}_r(\mathcal{E})$  de indexaciones reducidas de  $\mathcal{U}$  es un poset cofiltrante esencialmente pequeño.

*Demostración.* Primero probemos que hay a lo sumo un morfismo entre dos indexaciones reducidas. Dadas dos indexaciones reducidas  $(\mathcal{J}, \xi), (\mathcal{J}, \rho)$  de  $\mathcal{U}$ , un morfismo  $(\mathcal{J}, \rho) \rightarrow (\mathcal{J}, \xi)$  está dado por un morfismo simplicial  $\alpha : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$  tal que el siguiente diagrama conmuta para todo  $n$ .

$$\begin{array}{ccc} & U_n & \\ \rho_n \swarrow & & \searrow \xi_n \\ \gamma^* J_n & \xrightarrow{\gamma^*(\alpha_n)} & \gamma^* I_n \end{array}$$

Pero dado que  $J_n$  es una indexación reducida de  $U_n$ , la función  $\alpha_n$  si existe, es única por 5.1.9. Por lo tanto hay a lo sumo un morfismo entre dos indexaciones reducidas.

Ahora mostremos que es cofiltrante, primero es una categoría no vacía pues tenemos una indexación canónica por  $(\Delta^0, !)$  donde  $!$  denota el único morfismo al conjunto simplicial terminal  $\Delta^0$ . Dadas dos indexaciones reducidas  $(\mathcal{J}, \xi), (\mathcal{J}, \rho)$  de  $\mathcal{U}$ , consideremos su producto

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\xi} & \gamma^*\mathcal{J} \\
 \mathcal{U} & \xrightarrow{(\xi, \rho)} & \gamma^*(\mathcal{J} \times \mathcal{J}) \\
 & \xrightarrow{\rho} & \gamma^*\mathcal{J} \\
 & & \uparrow \gamma^*(p_0) \\
 & & \downarrow \gamma^*(p_1)
 \end{array}$$

La indexación  $(\mathcal{J} \times \mathcal{J}, (\xi, \rho))$  no es reducida en general, pero podemos tomar su indexación reducida asociada  $(\mathcal{K}, \zeta)$ , donde  $K_n = N(I_n \times J_n)$  por 5.2.5, esto determina una indexación  $(\mathcal{K}, \zeta)$  con un morfismo simplicial  $\eta : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J} \times \mathcal{J}$  tal que  $(\xi, \rho) = \gamma^*(\eta)\zeta$ . Por lo tanto la categoría es cofiltrante.

Finalmente mostremos que es esencialmente pequeña. Dada una indexación reducida  $(\mathcal{J}, \xi)$  de  $\mathcal{U}$ , entonces  $(I_n, \xi_n)$  es una indexación reducida de  $U_n$  para cada  $n \geq 0$ . Pero salvo isomorfismo existe un conjunto pequeño de indexaciones reducidas de  $U_n$  por 5.1.7. Los otros datos que determinan la indexación  $(\mathcal{J}, \xi)$  son las caras y las degeneraciones, pero estas están unívocamente determinadas por  $(I_n, \xi_n)$  por 5.1.9 pues  $d_i : I_n \rightarrow I_{n-1}$  es una indexación de la cara  $d_i : U_n \rightarrow U_{n-1}$  (similarmente para degeneraciones). Afirmamos que las dos indexaciones  $(\mathcal{J}, \xi), (\mathcal{J}, \rho)$  son isomorfas si y solo si para todo  $n \geq 0$  las indexaciones  $(I_n, \xi_n), (J_n, \rho_n)$  son isomorfas. Probaremos la implicación no trivial, si  $(I_n, \xi_n)$  y  $(J_n, \rho_n)$  son isomorfas para todo  $n$ , entonces existe un isomorfismo  $\alpha_n : J_n \rightarrow I_n$  tal que  $\xi_n = \gamma^*(\alpha_n)\rho_n$ . Afirmamos que  $(\alpha_n)_n$  constituye un isomorfismo simplicial. Debemos mostrar que  $\alpha_{n-1}d_i = d_i\alpha_n$  para todo  $d_i : I_n \rightarrow I_{n-1}$  (similarmente para las degeneraciones). Pero las funciones  $\alpha_{n-1}d_i$  y  $d_i\alpha_n$  son tales que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 U_n & \xrightarrow{d_i} & U_{n-1} \\
 \rho_n \downarrow & & \downarrow \xi_{n-1} \\
 \gamma^*J_n & \xrightarrow[\gamma^*(\alpha_{n-1}d_i)]{\gamma^*(d_i\alpha_n)} & \gamma^*I_{n-1}
 \end{array}$$

Para esto calculemos:

$$\gamma^*(d_i\alpha_n)\rho_n = \gamma^*(d_i)\gamma^*(\alpha_n)\rho_n = \gamma^*(d_i)\xi_n = \xi_{n-1}d_i$$

$$\gamma^*(\alpha_{n-1}d_i)\rho_n = \gamma^*(\alpha_{n-1})\gamma^*(d_i)\rho_n = \gamma^*(\alpha_{n-1})\rho_{n-1}d_i = \xi_{n-1}d_i$$

Por la unicidad de 5.1.9 se sigue que  $\alpha_{n-1}d_i = d_i\alpha_n$ . Por lo tanto existe un conjunto pequeño de indexaciones reducidas de  $\mathcal{U}$  salvo isomorfismo.  $\square$

**Lema 5.2.7.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, un morfismo  $\mathcal{V} \xrightarrow{f} \mathcal{U}$  de objetos simpliciales, e indexaciones  $\mathcal{U} \xrightarrow{\xi} \gamma^*\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{V} \xrightarrow{\rho} \gamma^*\mathcal{J}$ , entonces hay una indexación reducida  $(\mathcal{K}, \zeta)$  de  $\mathcal{V}$ , un morfismo de indexaciones  $\beta : (\mathcal{K}, \zeta) \rightarrow (\mathcal{J}, \rho)$  y un morfismo de familias  $(f, \alpha) : (\mathcal{V}, \mathcal{K}, \zeta) \rightarrow (\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$ . Gráficamente:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{f} & \mathcal{U} \\ \rho \downarrow & & \downarrow \xi \\ \gamma^*\mathcal{J} & & \gamma^*\mathcal{J} \\ \uparrow \zeta & \nearrow \gamma^*(\beta) & \uparrow \gamma^*(\alpha) \\ \gamma^*\mathcal{K} & & \end{array}$$

*Demostración.* Consideremos las indexaciones  $(\mathcal{J}, \rho)$  y  $(\mathcal{J}, \xi f)$  de  $\mathcal{V}$ , entonces construimos  $(\mathcal{K}, \zeta)$  como la indexación reducida asociada de la indexación producto por el Lema 5.2.5.  $\square$

**Ejemplo 5.2.8.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $U$  un objeto con una indexación reducida  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$  de  $U$ , entonces el **complejo de Čech**  $\mathcal{C}U = \text{cosk}_0 U \in s\mathcal{E}$  también tiene una indexación reducida simplicial  $\mathcal{N}U = N_\bullet \in s\mathcal{S}$ , llamada el **nervio de Čech**, dada por

$$N_n = \{(i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1} \mid U_{i_0} \times \dots \times U_{i_n} \neq \emptyset\}$$

Esta es simplemente la indexación reducida asociada (ver Lema 5.2.5) del 0-coesqueleto de la indexación, i.e.  $N_n = N(\text{cosk}_0 I)_n$ . Tenemos un morfismo simplicial  $\mathcal{C}U \xrightarrow{\xi'} \gamma^*\mathcal{N}U$ , gráficamente:

$$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightleftharpoons{\quad} & U \times U & \xleftarrow{\quad} & U \times U \times U & \cdots \\ \downarrow \xi'_0 & & \downarrow \xi'_1 & & \downarrow \xi'_2 & \\ \gamma^*N_0 & \xrightleftharpoons{\quad} & \gamma^*N_1 & \xleftarrow{\quad} & \gamma^*N_2 & \cdots \end{array}$$

**Proposición 5.2.9.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, y  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  familia simplicial reducida, entonces hay un morfismo canónico de familias simpliciales:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{h} & \mathcal{C}U \\ \xi \downarrow & & \downarrow \xi' \\ \gamma^*\mathcal{J} & \xrightarrow{\gamma^*(\eta)} & \gamma^*\mathcal{N}U \end{array}$$

donde  $(U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I) = (U_0 \xrightarrow{\xi_0} \gamma^*I_0)$ .

*Demostración.* Esto se sigue directamente de la adjunción  $\text{res}_0 \dashv \text{cosk}_0$  y la adjunción del Lema 5.2.5.  $\square$

Ahora observemos el simple hecho de que siempre se puede extender una indexación truncada usando el funtor co-esqueleto. Más precisamente:

**Proposición 5.2.10.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos,  $\mathcal{U} \in s\mathcal{E}$  un objeto simplicial y una indexación reducida  $\text{res}_n \mathcal{U} \xrightarrow{\xi} \gamma^* \mathcal{J}$  hasta grado  $n$ , i.e.  $\mathcal{J} \in \mathcal{S}^{\Delta_{\leq n}^{op}}$ . Entonces existe una indexación reducida  $\mathcal{U} \xrightarrow{\xi'} \gamma^* \mathcal{J}'$  tal que su restricción hasta grado  $n$  es igual a  $\xi$ .

*Demostración.* Dado  $\mathcal{J} \in \mathcal{S}^{\Delta_{\leq n}^{op}}$ , consideremos el conjunto simplicial  $\text{cosk}_n \mathcal{J}$ , por adjunción obtenemos un morfismo  $\mathcal{U} \xrightarrow{\tilde{\xi}} \gamma^* \text{cosk}_n \mathcal{J}$  donde usamos que  $\gamma^*$  conmuta con el coesqueleto pues es un límite finito. Esta indexación puede tener componentes vacías, por tanto tomamos su indexación reducida asociada  $(\mathcal{J}', \xi') = (N \text{cosk}_n \mathcal{J}, \tilde{\xi})$  y esto sirve como nuestra extensión.  $\square$

**Definición 5.2.11.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $\mathcal{U} \in s\mathcal{E}$ , entonces llamamos  $J_{\mathcal{U}}^{op}$  al poset de indexaciones reducidas de  $\mathcal{U}$  salvo isomorfismo. Para  $n \geq 0$  existe un funtor de proyección  $J_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\text{Pr}_n} J_{U_n}$  que envía una indexación  $(\mathcal{J}, \xi)$  de  $\mathcal{U}$  a la indexación  $(I_n, \xi_n)$  de  $U_n$ .

El siguiente lema es clave, muestra que las indexaciones son “suficientemente finas”, en el sentido que ellas refinan cualquier indexación en cualquier grado, siempre que nuestro objeto simplicial sea split. Más precisamente:

**Lema 5.2.12.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $\mathcal{U} \in s\mathcal{E}$  un objeto simplicial split, entonces el funtor  $J_{\mathcal{U}}^{op} \xrightarrow{\text{Pr}_n} J_{U_n}^{op}$  es inicial para todo  $n \geq 0$ .

*Demostración.* Recordemos que si  $\mathcal{U}$  es split entonces existen subobjetos  $N_k \twoheadrightarrow U_k$  tales que el morfismo canónico  $\sum_{\substack{s:[n] \twoheadrightarrow [k] \\ k \leq n}} N_s \longrightarrow U_n$  es un isomorfismo, donde  $N_s \twoheadrightarrow U_n$  denota al

subobjeto de  $U_n$  dado por la composición  $N_k \twoheadrightarrow U_k \xrightarrow{s} U_n$ . Mas aún por 4.1.5 tenemos que

$$(\text{sk}_m \mathcal{U})_n \simeq \sum_{\substack{s:[n] \twoheadrightarrow [k] \\ k \leq m}} N_s.$$

Dada una indexación  $U_n \xrightarrow{\xi} \gamma^* I$  vamos a construir una indexación  $(\mathcal{J}, \rho)$  de  $\mathcal{U}$  inductivamente en  $0 \leq k \leq n$  tal que para todo  $k$ , el morfismo canónico  $(\text{sk}_k \mathcal{U})_n \longrightarrow U_n$  es indexado sobre una función  $(\text{sk}_k \mathcal{J})_n \longrightarrow I$ . Para  $k = 0$  tenemos  $(\text{sk}_0 \mathcal{U})_n = U_0$  y el map  $(\text{sk}_0 \mathcal{U})_n \longrightarrow U_n$  está

dato por el único morfismo  $s : [n] \rightarrow [0]$ . Consideremos  $(J_0, \rho_0)$  una indexación reducida de  $U_0$  tal que el morfismo  $U_0 \xrightarrow{s} U_n$  está indexado por una función  $s : J_0 \rightarrow I$ , i.e. el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{s} & U_n \\ \rho_0 \downarrow & & \downarrow \xi \\ \gamma^* J_0 & \xrightarrow{\gamma^* s} & \gamma^* I \end{array}$$

Supongamos que tenemos una indexación  $(\mathcal{J}, \rho)$  truncada hasta grado  $k-1$  tal que el morfismo canónico  $(\text{sk}_{k-1}\mathcal{U})_n \rightarrow U_n$  está indexado sobre  $(\text{sk}_{k-1}\mathcal{J})_n \rightarrow I$ . Queremos extender esta indexación a grado  $k$  manteniendo la propiedad invariante. Primero construimos una indexación reducida  $(N_k^J, \tilde{\rho}_k)$  de  $N_k \subset U_k$ , tal que para cada epimorfismo  $s : [n] \rightarrow [k]$  tenemos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} N_k \hookrightarrow U_k & \xrightarrow{s} & U_n \\ \tilde{\rho}_k \downarrow & & \downarrow \xi \\ \gamma^* N_k^J & \xrightarrow{\gamma^* s} & \gamma^* I \end{array}$$

Y también tal que el morfismo  $N_k \rightarrow U_k \rightarrow (\text{cosk}_{k-1}\mathcal{U})_k$  sea indexado, i.e. tenemos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} N_k \hookrightarrow U_k & \xrightarrow{\mu} & (\text{cosk}_{k-1}\mathcal{U})_k \\ \tilde{\rho}_k \downarrow & & \downarrow \\ \gamma^* N_k^J & \xrightarrow{\gamma^* \mu} & \gamma^*(\text{cosk}_{k-1}\mathcal{J})_k \end{array}$$

Entonces, definimos la indexación en grado  $k$  por  $J_k = (\text{sk}_{k-1}\mathcal{J})_k + N_k^J$ , y el morfismo de indexación está dado por el siguiente coproducto de morfismos.

$$[(\text{sk}_{k-1}\rho)_k, \tilde{\rho}_k] : (\text{sk}_{k-1}\mathcal{U})_k + N_k \longrightarrow \gamma^*(\text{sk}_{k-1}\mathcal{J})_k + \gamma^* N_k^J$$

La indexación  $(\text{sk}_{k-1}\mathcal{U})_k \xrightarrow{(\text{sk}_{k-1}\rho)_k} \gamma^*(\text{sk}_{k-1}\mathcal{J})_k$  es reducida pues  $(\text{sk}_{k-1}\mathcal{U})_n \simeq \sum_{\substack{s:[n] \rightarrow [\ell] \\ \ell < k}} N_s$ , por tanto su indexación está dada por el coproducto  $\sum_{\substack{s:[n] \rightarrow [\ell] \\ \ell < k}} N_s^J$ , las cuales son todas indexaciones reducidas definidas en los pasos previos. Tenemos ahora el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} (\text{sk}_{k-1}\mathcal{U})_k & \longrightarrow & (\text{sk}_{k-1}\mathcal{U})_k + N_k & \xrightarrow{\mu} & (\text{cosk}_{k-1}\mathcal{U})_k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \gamma^*(\text{sk}_{k-1}\mathcal{J})_k & \longrightarrow & \gamma^*(\text{sk}_{k-1}\mathcal{J})_k + \gamma^* N_k^J & \xrightarrow{[\tau, \gamma^* \mu]} & \gamma^*(\text{cosk}_{k-1}\mathcal{J})_k \end{array}$$

Por lo tanto hemos extendido nuestra indexación hasta grado  $k$  por 2.2.15. Ahora dada la descomposición  $(\text{sk}_k\mathcal{U})_n = (\text{sk}_{k-1}\mathcal{U})_n + \sum_{s:[n] \rightarrow [k]} N_s$ , se sigue por construcción que el morfismo

canónico  $(\text{sk}_k \mathcal{U})_n \rightarrow U_n$  es indexado. Supongamos que tenemos nuestra indexación construida por inducción hasta grado  $n$ . Cuando  $k = n$  tenemos que  $(\text{sk}_n \mathcal{U})_n \xrightarrow{\sim} U_n$  es indexado sobre  $J_n \simeq (\text{sk}_n \mathcal{J})_n \rightarrow I$ . Entonces podemos extender esta indexación a grados mayores que  $n$  por la construcción 5.2.10 hecha anteriormente. Esto finaliza la demostración.  $\square$

**Lema 5.2.13.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos,  $A$  un grupo (abeliano) y  $\mathcal{U} \in s\mathcal{E}$  un objeto simplicial split, tenemos que:

1. Un isomorfismo de grupos (abelianos) co-simpliciales:

$$\mathcal{E}(\mathcal{U}, \gamma^* A) \simeq \text{colim}_{(\mathcal{J}, \xi) \in J_{\mathcal{U}}} \mathcal{S}(\mathcal{J}, A)$$

2. Como un corolario, cuando  $A$  es abeliano tenemos el siguiente isomorfismo:

$$H^n(\mathcal{E}(\mathcal{U}, \gamma^* A)) \simeq \text{colim}_{(\mathcal{J}, \xi) \in J_{\mathcal{U}}} H^n(\mathcal{J}, A)$$

donde  $H^q(\mathcal{J}, A)$  es la cohomología con coeficientes en  $A$  del conjunto simplicial que indexa, definida en 2.3.20.

*Demostración.* Recordemos que dado un conjunto simplicial  $\mathcal{J}$  y  $A$  un grupo (abeliano), el grupo co-simplicial  $\mathcal{S}(\mathcal{J}, A)$  está dado por  $\mathcal{S}(\mathcal{J}, A)_n = \mathcal{S}(I_n, A)$  y las co-caras y co-degeneraciones dados por pre-composición. Para cada  $n \geq 0$  por 5.1.14 tenemos un isomorfismo canónico:

$$\text{colim}_{(I, \xi) \in J_{U_n}} \mathcal{S}(I, A) \simeq \mathcal{E}(U_n, \gamma^* A)$$

Dado que el funtor  $\text{pr}_n : J_{\mathcal{U}} \rightarrow J_{U_n}$  es final por el Lema 5.2.12, entonces el morfismo canónico:

$$\text{colim}_{(\mathcal{J}, \xi) \in J_{\mathcal{U}}} \mathcal{S}(\mathcal{J}, A) \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{U}, \gamma^* A)$$

es un isomorfismo pues es un isomorfismo en cada grado. Para la segunda afirmación, primero observemos que la cohomología  $H^q(\mathcal{J}, A)$  es definida como la cohomología del complejo de co-cadenas asociado a  $\mathcal{S}(\mathcal{J}, A)$  donde el morfismo de coborde está dado por la suma alternante de las co-caras. Entonces la afirmación se sigue pues el colímite es filtrante y la cohomología conmuta con colímites filtrantes de complejos.  $\square$

**Observación 5.2.14.** Observemos que el Lema 5.2.13 se generaliza a topos arbitrarios [AM, Lemma 9.2], esto es, las ecuaciones:

$$\mathcal{E}(\mathcal{U}, \gamma^* A) \simeq \mathcal{S}(\gamma_!(\mathcal{U}), A)$$

$$H^n(\mathcal{E}(\mathcal{U}, \gamma^* A)) \simeq H^n(\gamma_!(\mathcal{U}), A)$$

en el caso de topos localmente conexos, pues en este caso  $J_{\mathcal{U}}$  tiene una indexación inicial, ver Observación 5.2.4. La única hipótesis extra que ponemos es que  $\mathcal{U}$  debe ser un objeto simplicial split, pero como los hipercubrimientos split son iniciales entre los hipercubrimientos, esto no es un problema.

### 5.3. Hipercubrimientos indexados

**Definición 5.3.1.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, un **hipercubrimiento indexado** está dado por una tripla  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$ , donde  $\mathcal{U} = U_{\bullet} \in s\mathcal{E}$  es un hipercubrimiento,  $\mathcal{J} = I_{\bullet} \in s\mathcal{S}$  es un conjunto simplicial, y  $\xi : \mathcal{U} \rightarrow \gamma^*\mathcal{J}$  es una indexación reducida.

**Observación 5.3.2.** Consideramos la **categoría de hipercubrimientos indexados**  $\text{IHC}(\mathcal{E})$  como una subcategoría plena de la categoría de familias simpliciales  $s\mathcal{F}(\mathcal{E})$ . Observemos que un hipercubrimiento indexado es un objeto simplicial en el topos de familias  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  (con ciertas propiedades extra), sin embargo no es un hipercubrimiento en este topos, pues un hipercubrimiento in  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  está dado por  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  con  $\mathcal{U}$  un hipercubrimiento en  $s\mathcal{E}$  y  $\mathcal{J}$  un hipercubrimiento en  $s\mathcal{S}$ . Esto fuerza  $\mathcal{J}$  a ser un complejo de Kan acíclico por lo tanto todos sus grupos de homotopía are trivial, notemos que en particular el complejo de Čech indexado no es en general un hipercubrimiento en  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ . En nuestra definición la indexación no es suryectiva en el coesqueleto, por lo tanto tenemos grupos de homotopía no triviales.

**Ejemplo 5.3.3.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y un cubrimiento  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$ , entonces la familia simplicial  $(\mathcal{C}U, \mathcal{N}U, \xi')$  definida en el Ejemplo 5.2.8 es un hipercubrimiento indexado.

**Observación 5.3.4.** (Comparar con [D10, 4.1]) Ahora veamos en detalle que es un hipercubrimiento indexado en grados bajos, como lo hicimos en 4.1.8.

1. Para  $n = 0$  tenemos que  $U_0 = \sum_{i \in I_0} U_i \longrightarrow 1$  es epimorfo.
2. Para  $n = 1$  tenemos que el morfismo  $U_1 \rightarrow U_0 \times U_0$  es epimorfo. Pero este morfismo es indexado luego esto dice que para cada  $(i, j) \in I_0 \times I_0$  tal que  $U_i \times U_j \neq \emptyset$  entonces el siguiente morfismo es epimorfo:

$$\sum_{i \xrightarrow{\xi} j} U_{1,\ell} \longrightarrow U_i \times U_j \tag{1}$$

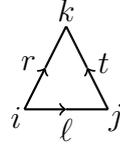
3. Para valores de  $n$  superiores, podemos usar nuestra descripción del coesqueleto como un egalizador, tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} (\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n & \longrightarrow & \prod_{0 \leq i \leq n} U_{n-1} & \rightrightarrows & \prod_{0 \leq i < j \leq n} U_{n-2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \gamma^*(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{J})_n & \longrightarrow & \prod_{0 \leq i \leq n} \gamma^* I_{n-1} & \rightrightarrows & \prod_{0 \leq i < j \leq n} \gamma^* I_{n-2} \end{array}$$

Notemos que la indexación  $(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{U})_n \rightarrow \gamma^*(\text{cosk}_{n-1}\mathcal{J})_n$  no es reducida en general. Por tanto para  $n = 2$  podemos describir  $(\text{cosk}_1\mathcal{U})_2$  como el siguiente egalizador:

$$(\text{cosk}_1\mathcal{U})_2 \longrightarrow U_1 \times U_1 \times U_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{u_0} \\ \xrightarrow{u_1} \end{array} U_0 \times U_0 \times U_0$$

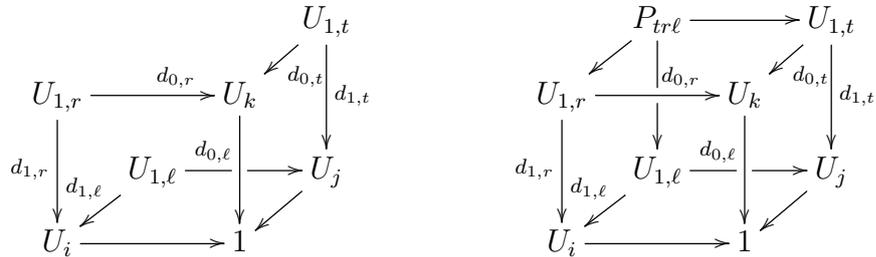
donde  $u_0 = (d_1 \text{pr}_2, d_0 \text{pr}_2, d_0 \text{pr}_1)$   $u_1 = (d_1 \text{pr}_1, d_1 \text{pr}_0, d_0 \text{pr}_0)$  y  $\text{pr}_i$  denota la proyección en la  $i$ -ésima componente para  $0 \leq i \leq 2$ . Se sigue que  $(\text{cosk}_1\mathcal{U})_2 = \sum_{(t,r,\ell) \in (\text{cosk}_1\mathcal{J})_2} P_{tr\ell}$  donde  $(t, r, \ell)$  son tales que completan el siguiente diagrama:



y  $P_{tr\ell}$  es el siguiente egalizador:

$$P_{tr\ell} \longrightarrow U_{1,t} \times U_{1,r} \times U_{1,\ell} \rightrightarrows U_i \times U_j \times U_k$$

Alternativamente podemos describir  $P_{tr\ell}$  como el límite del siguiente diagrama:



Entonces tenemos que para cada  $(t, r, \ell) \in (\text{cosk}_1\mathcal{J})_2$  tal que  $P_{tr\ell} \neq \emptyset$  el siguiente morfismo es un epimorfismo:

$$\sum_{\omega} U_{2,\omega} \longrightarrow P_{tr\ell} \quad (2)$$

donde la suma es sobre  $\omega \in I_2$  tal que  $d_0\omega = t, d_1\omega = r$  y  $d_2\omega = \ell$ .

**Proposición 5.3.5.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces la categoría  $\text{IHC}(\mathcal{E})_{\sim}$  de hipercubrimientos indexados salvo homotopía simplicial es cofiltrante.

*Demostración.* Dados  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  y  $(\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho)$  dos hipercubrimientos indexados, entonces por el Teorema 4.1.16 existe un hipercubrimiento  $\mathcal{W}$  con morfismos  $\mathcal{W} \xrightarrow{f} \mathcal{U}$  y  $\mathcal{W} \xrightarrow{g} \mathcal{V}$ . Pero por el Lema 5.2.7 estos morfismos son morfismos de familias para las indexaciones reducidas respectivas en  $\mathcal{W}$ , como las indexaciones reducidas de  $\mathcal{W}$  son cofiltrantes por la Proposición 5.2.6, existe una indexación reducida  $\mathcal{W} \xrightarrow{\zeta} \gamma^* \mathcal{K}$  tal que ambos morfismos se vuelven indexados. Esto es, tenemos morfismos simpliciales  $\alpha : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}$  y  $\beta : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}$  tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{f} & \mathcal{U} \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \xi \\ \gamma^* \mathcal{K} & \xrightarrow{\gamma^*(\alpha)} & \gamma^* \mathcal{J} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{g} & \mathcal{V} \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \rho \\ \gamma^* \mathcal{K} & \xrightarrow{\gamma^*(\beta)} & \gamma^* \mathcal{J} \end{array}$$

Por lo tanto el dual de la Definición 1.2.1.(F1) se sigue.

Ahora, dados dos morfismos paralelos  $(\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho) \xrightarrow[(g, \beta)]{(f, \alpha)} (\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  por el Teorema 4.1.16 existe un hipercubrimiento  $\mathcal{W}$ , con un morfismo  $\mathcal{W} \xrightarrow{u} \mathcal{V}$  y una homotopía simplicial  $\mathcal{W} \xrightarrow{h} \{\Delta^1, \mathcal{U}\}$  de  $fu$  a  $gu$ . La indexación en  $\mathcal{U}$  induce una indexación  $\{\Delta^1, \mathcal{U}\} \xrightarrow{\xi^*} \gamma^* \{\Delta^1, \mathcal{J}\}$ , donde estamos usando que tenemos un isomorfismo  $\{\Delta^1, \gamma^* \mathcal{J}\} \simeq \gamma^* \{\Delta^1, \mathcal{J}\}$  ya que este es un límite finito en cada grado por el Corolario 2.3.17 y  $\gamma^*$  es exacto a izquierda. Pero entonces nuevamente por la Proposición 5.2.6 y el Lema 5.2.7, existe una indexación reducida  $(\mathcal{K}, \zeta)$  en  $\mathcal{W}$  tal que los morfismos  $h$  y  $u$  se vuelven indexados, i.e. tenemos morfismos simpliciales  $\tilde{h} : \mathcal{K} \rightarrow \{\Delta^1, \mathcal{J}\}$  y  $\tau : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}$  tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{h} & \{\Delta^1, \mathcal{U}\} \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \xi^* \\ \gamma^* \mathcal{K} & \xrightarrow{\gamma^*(\tilde{h})} & \gamma^* \{\Delta^1, \mathcal{J}\} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{u} & \mathcal{V} \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \rho \\ \gamma^* \mathcal{K} & \xrightarrow{\gamma^*(\tau)} & \gamma^* \mathcal{J} \end{array}$$

Entonces los morfismos  $fu$  y  $gu$  son también indexados por  $\alpha\tau$  y  $\beta\tau$  y por unicidad de las indexaciones tenemos que  $\alpha\tau = (d^1)^* \tilde{h}$  y  $\beta\tau = (d^0)^* \tilde{h}$ . Entonces tenemos una homotopía simplicial indexada entre  $(fu, \alpha\tau)$  y  $(gu, \beta\tau)$ , y obtenemos (F1) de la Definición 1.2.1. Se sigue que  $\text{IHC}(\mathcal{E})_{\sim}$  es cofiltrante.  $\square$

**Observación 5.3.6.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y dado que  $s\mathcal{F}(\mathcal{E})$  es una categoría simplicialmente enriquecida, entonces la subcategoría plena  $\text{IHC}(\mathcal{E}) \subset s\mathcal{F}(\mathcal{E})$  es también simplicialmente enri-

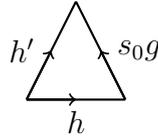
quecida. Por lo tanto hay una 2-categoría asociada  $\text{IHC}(\mathcal{E})_2$  cuyos homs están dados por aplicar la categoría fundamental  $\tau_1$  al hom simplicial, como en la Observación 2.4.7.

**Proposición 5.3.7.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces la 2-categoría  $\text{IHC}(\mathcal{E})_2$  es 2-cofiltrante.

*Demostración.* Dada la prueba de la Proposición 5.3.5, solo tenemos que chequear (F2) de la Definición 1.3.9. La clave es usar de nuevo 4.1.15 de forma inteligente. Supongamos que tenemos homotopías simpliciales indexadas paralelas como sigue:

$$(\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho) \begin{array}{c} \xrightarrow{(f, \alpha)} \\ \xrightarrow{(h, \eta) \Downarrow \Downarrow (h', \eta')} \\ \xrightarrow{(g, \beta)} \end{array} (\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$$

Entonces hay un morfismo  $(s_0(g, \beta), (h', \eta'), (h, \eta)) : (\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho) \rightarrow (\{\partial\Delta^2, \mathcal{U}\}, \{\partial\Delta^2, \mathcal{J}\}, \xi')$  donde  $s_0g$  denota la homotopía constante de  $g$ , gráficamente esta es el borde del 2-simplex en el hom simplicial:



Entonces por la Proposición 4.1.14 y el Lema 4.1.15 hay un morfismo  $u : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$  y un relleno  $w : \mathcal{W} \rightarrow \{\Delta^2, \mathcal{U}\}$  tales que  $d_0w = s_0gu$ ,  $d_1w = h'u$  y  $d_2w = hu$  en el hom simplicial. De nuevo por la Proposición 5.2.6 y el Lema 5.2.7 hay una indexación  $(\mathcal{K}, \zeta)$  en  $\mathcal{W}$  tal que ambos morfismos  $u$  y  $w$  se vuelven indexados, i.e. tenemos diagramas conmutativos como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{w} & \{\Delta^2, \mathcal{U}\} \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \xi_* \\ \gamma^*\mathcal{K} & \xrightarrow{\gamma^*(w)} & \gamma^*\{\Delta^2, \mathcal{J}\} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{u} & \mathcal{V} \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \rho \\ \gamma^*\mathcal{K} & \xrightarrow{\gamma^*(u)} & \gamma^*\mathcal{J} \end{array}$$

Entonces las 2-celdas  $(hu, \alpha\delta)$  y  $(h'u, \beta, \delta)$  son iguales en  $\text{IHC}(\mathcal{E})_2$  por la relación de homotopía en la categoría fundamental. Si tenemos dos 2-celdas paralelas dadas por homotopías de complejos formales, por un argumento similar usando los Lemas 4.1.14 y 4.1.15 tenemos un refinamiento donde podemos componer las homotopías, y lo reducimos al cálculo previo, luego la 2-categoría es 2-cofiltrante.  $\square$

**Observación 5.3.8.** En esta sección no necesitamos el hecho que  $\text{IHC}(\mathcal{E})_2$  es una 2-categoría 2-cofiltrante, solo la afirmación más débil  $\text{IHC}(\mathcal{E})_{\sim}$  es cofiltrante. Sin embargo el resultado 2-dimensional será usado en la siguiente sección.

**Teorema 5.3.9.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topós,  $A$  un grupo abeliano, entonces tenemos un isomorfismo:

$$H^n(\mathcal{E}, \gamma^* A) \simeq \operatorname{colim}_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi) \in \operatorname{IHC}(\mathcal{E})^{\text{op}}} H^n(\mathcal{J}, A)$$

donde el colímite es indexado sobre la categoría de hipercubrimientos indexados salvo homotopía simplicial.

*Demostración.* Del Teorema de Hipercubrimiento de Verdier 4.2.6, el hecho de que los hipercubrimientos split son iniciales por el Lema 4.1.21 y nuestro cálculo del Lema 5.2.13 obtenemos el siguiente isomorfismo:

$$H^n(\mathcal{E}, \gamma^* A) \simeq \operatorname{colim}_{\mathcal{U} \in \operatorname{HC}(\mathcal{E})^{\text{op}}} H^n(\gamma^* A(\mathcal{U})) \simeq \operatorname{colim}_{\mathcal{U} \in \operatorname{HC}(\mathcal{E})^{\text{op}}} \operatorname{colim}_{(\mathcal{J}, \xi) \in \mathcal{J}_{\mathcal{U}}} H^n(\mathcal{J}, A)$$

Dado un morfismo  $\mathcal{V} \xrightarrow{f} \mathcal{U}$  entre hipercubrimientos y una indexación  $(\mathcal{J}, \xi)$  on  $\mathcal{U}$ , por el Lema 5.2.7 existe una indexación reducida en  $\mathcal{V}$ , con un cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{f} & \mathcal{U} \\ \rho \downarrow & & \downarrow \xi \\ \gamma^* \mathcal{J} & \xrightarrow{\gamma^*(\alpha)} & \gamma^* \mathcal{J} \end{array}$$

Si  $[\omega] \in H^n(\mathcal{J}, A)$  es representada por una función  $\omega : I_n \rightarrow A$ , entonces por precomposición obtenemos una función  $J_n \xrightarrow{\alpha_n} I_n \xrightarrow{\omega} A$ . Esto define una clase cohomológica  $[\omega \alpha_n] \in H^n(\mathcal{J}, A)$  y  $[\omega \alpha_n]$  representa  $f^*[\omega] \in H^n(\gamma^* A(\mathcal{V}))$  pues el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V_n & \xrightarrow{f_n} & U_n \\ \rho_n \downarrow & & \downarrow \xi_n \\ \gamma^* J_n & \xrightarrow{\gamma^*(\alpha_n)} & \gamma^* I_n \\ & \searrow & \downarrow \gamma^*(\omega) \\ & & \gamma^* A \end{array}$$

$\gamma^*(\omega \alpha_n) \rightarrow \gamma^* A$

De hecho,  $[\omega]$  como clase en  $H^n(\gamma^* A(\mathcal{U}))$  es representada por el morfismo  $U_n \xrightarrow{\xi_n} \gamma^* I_n \xrightarrow{\gamma^*(\omega)} \gamma^* A$ , se sigue que  $f^*[\omega] = [\gamma^*(\omega) \xi_n f_n] = [\gamma^*(\omega \alpha_n) \rho_n] \in H^n(\gamma^* A(\mathcal{V}))$ .

Por la construcción del colímite filtrante de grupos abelianos, se sigue que una clase de cohomología  $[\omega] \in H^n(\mathcal{E}, \gamma^* A)$  se representa por algún  $[\omega] \in H^n(\mathcal{J}, A)$  para un hipercubrimiento  $\mathcal{U}$  y una indexación  $(\mathcal{J}, \xi)$  of  $\mathcal{U}$ . Dos clases cohomológicas  $[\omega] \in H^n(\mathcal{J}, A)$  y  $[\tau] \in H^n(\mathcal{J}, A)$  para hipercubrimientos  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  con indexations respectivas  $(\mathcal{J}, \xi)$  y  $(\mathcal{J}, \rho)$  son iguales en  $H^n(\mathcal{E}, \gamma^* A)$  si hay un hipercubrimiento  $\mathcal{W}$ , con morfismos  $\mathcal{W} \xrightarrow{f} \mathcal{U}$  y  $\mathcal{W} \xrightarrow{g} \mathcal{V}$  tales que  $f^*[\omega] = g^*[\tau] \in$

$H^n(\gamma^*A(\mathcal{W}))$ . Pero por el mismo argumento dado en la Proposición 5.3.5 se sigue que existe una indexación  $\mathcal{W} \xrightarrow{\zeta} \gamma^*\mathcal{K}$  tal que ambos morfismos  $f$  y  $g$  se vuelven indexados, i.e. hay morfismos simpliciales  $\alpha : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}$  y  $\beta : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}$  tales que  $\xi f = \gamma^*(\alpha)\zeta$  y  $\rho g = \gamma^*(\beta)\zeta$ . También, dado que  $f^*[\omega] = g^*[\tau] \in H^n(\gamma^*A(\mathcal{W}))$ , refinando la indexación en  $\mathcal{W}$  si es necesario, podemos suponer que  $[\omega\alpha_n] = [\tau\beta_n] \in H^n(\mathcal{K}, A)$ .

Por otra parte, describimos el colímite filtrante  $\operatorname{colim}_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi) \in \operatorname{IHC}(\mathcal{E})^{\text{op}}} H^n(\mathcal{J}, A)$ . Un elemento es representado por una clase  $[\omega] \in H^n(\mathcal{J}, A)$  para  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  un hipercubrimiento indexado, donde  $[\omega] \in H^n(\mathcal{J}, A)$  y  $[\tau] \in H^n(\mathcal{J}, A)$  para  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi), (\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho)$  respectivamente son identificados si existe un hipercubrimiento indexado  $(\mathcal{W}, \mathcal{K}, \zeta)$  con morfismos  $(\mathcal{W}, \mathcal{K}, \zeta) \xrightarrow{(f, \alpha)} (\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$ ,  $(\mathcal{W}, \mathcal{K}, \zeta) \xrightarrow{(g, \beta)} (\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho)$  tales que  $[\omega\alpha_n] = [\tau\beta_n] \in H^n(\mathcal{K}, A)$ . Se sigue que tenemos un isomorfismo:

$$\operatorname{colim}_{\mathcal{U} \in \operatorname{HC}(\mathcal{E})^{\text{op}}} \operatorname{colim}_{(\mathcal{J}, \xi) \in \mathcal{J}_{\mathcal{U}}} H^n(\mathcal{J}, A) \simeq \operatorname{colim}_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi) \in \operatorname{IHC}(\mathcal{E})^{\text{op}}} H^n(\mathcal{J}, A)$$

Esto completa la demostración. □

**Definición 5.3.10.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces el pro-objeto  $\operatorname{Ver}(\mathcal{E}) = (\mathcal{J})_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi) \in \operatorname{IHC}(\mathcal{E})^{\text{op}}}$  en la categoría homotópica de conjuntos simpliciales es llamado el **tipo homotópico Étale** o **functor de Verdier** del topos.

**Observación 5.3.11.** Se sigue directamente de la Observación 5.2.4 que nuestra definición del functor de Verdier generaliza a la definición para topos localmente conexos de M. Artin y B. Mazur. Esto es, hay un isomorfismo de pro-objetos  $\operatorname{Ver}(\mathcal{E}) \simeq \prod \mathcal{E}$  donde  $\prod \mathcal{E}$  es el pro-objeto definido en [AM, §9].

**Observación 5.3.12.** Notemos que el Teorema 5.3.9 dice que el tipo homotópico étale determina la cohomología con coeficientes constantes del topos por la fórmula:

$$H^n(\mathcal{E}, \gamma^*A) \simeq H^n(\pi(\mathcal{E}), A)$$

Esta ecuación generaliza [AM, Corollary 9.3].

**Observación 5.3.13.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos con un punto geométrico  $\mathcal{S} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ , recordemos que un **hipercubrimiento punteado** es un hipercubrimiento  $\mathcal{U}$  con una elección de un vértice  $x \in p^*U_0$ . Observemos que dado un objeto  $U$  con una indexación  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$ , entonces un elemento  $x \in p^*U$  determina un elemento  $\xi(x) \in I$ , aplicando la función  $p^*U \xrightarrow{p^*\xi} p^*\gamma^*I \simeq I$ .

Por lo tanto un hipercubrimiento indexado  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  que es además punteado por  $x \in p^*U_0$  da lugar a conjunto simplicial punteado  $(\mathcal{J}, \xi(x))$ . Entonces el funtor de Verdier determina un pro-objeto en la categoría homotópica de conjuntos simpliciales punteados. Luego se pueden definir los pro-grupos de homotopía:

$$\pi_n(\mathcal{E}, p) = (\pi_n(\mathcal{J}, \xi(x)))_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi, x) \in \text{IHC}_*(\mathcal{E})^{\text{op}}}$$

donde  $\text{IHC}_*(\mathcal{E})^{\text{op}}$  denota la categoría de hipercubrimientos indexados punteados.

Ahora mostremos que el tipo homotópico étale del topos determina el  $\pi_0$  del topos. Recordemos la siguiente definición de [Exposé IV, Exercice 8.7][SGA4-1].

**Definición 5.3.14.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces  $\pi_0(\mathcal{E})$  se define como el pro-conjunto que representa al funtor  $\gamma_*\gamma^* : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ .

El funtor  $\gamma_*\gamma^*$  es pro-representable si y solo si existe  $(S_i)_{i \in I} \in \text{Pro}(\mathcal{S})$  tal que:

$$\gamma_*\gamma^*(T) = \mathcal{E}(1, \gamma^*(T)) \simeq \text{Pro}(\mathcal{S})((S_i)_{i \in I}, T) \simeq \text{colim}_{i \in I} \mathcal{S}(S_i, T)$$

natural en  $T \in \mathcal{S}$ . Pero en el Lema 5.1.13 vimos más generalmente que el funtor  $\gamma^*$  tiene un pro-adjunto a izquierda y en particular tenemos que  $\pi_0(\mathcal{E}) = (I)_{(I, \xi) \in J}$  donde  $J^{\text{op}}$  es el poset de indexaciones reducidas del objeto terminal. Ahora mostremos que  $\pi_0(\mathcal{E})$  puede ser calculado del tipo homotópico étale  $\text{Ver}(\mathcal{E})$ .

**Proposición 5.3.15.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces  $\pi_0(\mathcal{E}) \simeq (\pi_0(\mathcal{J}))_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi) \in \text{IHC}(\mathcal{E})^{\text{op}}}$  donde  $\pi_0(\mathcal{J})$  es el conjunto de componentes conexas del conjunto simplicial que indexa, en otras palabras,  $\pi_0(\mathcal{E})$  se calcula al aplicar  $\pi_0$  al tipo homotópico étale, i.e.  $\pi_0(\mathcal{E}) \simeq \pi_0(\text{Ver}(\mathcal{E}))$ .

*Demostración.* Dado  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  un hipercubrimiento indexado, consideremos  $\pi_0(\mathcal{J})$  el conjunto de componentes conexas de  $\mathcal{J}$ , este está dado por el siguiente coegalizador:

$$I_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} I_0 \longrightarrow \pi_0(\mathcal{J})$$

También, el siguiente diagrama es un coegalizador:

$$U_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} U_0 \xrightarrow{!} 1$$

Esto vale pues  $\mathcal{U}$  es un hipercubrimiento y entonces  $U_0 \rightarrow 1$  es epimorfo, por lo tanto es el coegalizadr de  $U_0 \times U_0 \xrightarrow[\text{pr}_1]{\text{pr}_0} U_0$ . Dado que  $U_1 \rightarrow U_0 \times U_0$  es epimorfismo, entonces el objeto terminal es el coegalizador de  $d_0$  y  $d_1$ . Pero entonces tenemos el siguiente morfismo:

$$\begin{array}{ccccc} U_1 & \xrightarrow[\text{d}_1]{\text{d}_0} & U_0 & \longrightarrow & 1 \\ \xi_1 \downarrow & & \downarrow \xi_0 & & \downarrow \exists! \widehat{\xi} \\ \gamma^* I_1 & \rightrightarrows & \gamma^* I_0 & \longrightarrow & \gamma^* \pi_0(\mathcal{J}) \end{array}$$

Entonces dado un hipercubrimiento indexado obtenemos una indexación  $\widehat{\xi} : 1 \rightarrow \gamma^* \pi_0(\mathcal{J})$ . Más aún esta es reducida pues la función  $I_0 \rightarrow \pi_0(\mathcal{J})$  es sobreyectiva. También, dada una indexación reducida del objeto terminal  $\xi : 1 \rightarrow \gamma^* I$  tenemos un hipercubrimiento indexado al tomar  $\mathcal{U}$  el objeto simplicial constante en el objeto terminal, y  $\mathcal{J}$  el conjunto simplicial constante en el conjunto  $I$ . En efecto, esto es simplemente el complejo de Čech asociado con el cubrimiento disjunto  $1 = \sum_{i \in I} U_i$ . Entonces, definimos el functor  $\phi : \text{IHC}(\mathcal{E})_{\sim} \rightarrow J^{op}$  como arriba, i.e.  $\phi(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  es la indexación  $\xi : 1 \rightarrow \gamma^* \pi_0(\mathcal{J})$ . Luego es suficiente mostrar que el functor  $\phi$  is inicial, pero es suryectivo en los objetos pues cualquier indexación del objeto terminal se obtiene vía  $\phi$  por su complejo de Čech y como  $J^{op}$  es un poset esto es suficiente.  $\square$

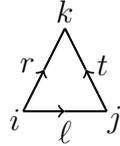
**Ejemplo 5.3.16.** Dado  $X$  un espacio topológico punteado, consideremos  $\mathcal{E} = \text{Sh}(X)$  el topos de haces asociado. Entonces tenemos una definición de los pro-grupos de homotopía que son denotados por  $\bigvee \pi_n(X)$ . Estos pro-grupos coinciden con los grupos de homotopía cuando el espacio es paracompacto y localmente contráctil por [AM, Theorem 12.1]. Como nuestra definición no requiere que el espacio sea localmente conexo, estos pro-grupos son adecuados para nuevos estudios en Teoría de la Forma (ver [CP89] or [EH80]), donde la teoría de Artin-Mazur no era aplicable.

**Ejemplo 5.3.17.** Dado  $X$  un esquema, consideremos  $\mathcal{E} = \text{Sh}(\text{Et}(X), J)$  el topos de haces en su sitio étale. Entonces por medio de la Definición 5.3.10 se tiene un pro-objeto asociado en la categoría homotópica que por simplicidad se denota en este caso como  $X_{et}$ . Como fué observado en [AM] para que este topos sea localmente conexo es suficiente que  $X$  sea un esquema localmente noetheriano, por tanto con nuestra teoría es posible sacar esta hipótesis.

## 6. El grupoide fundamental

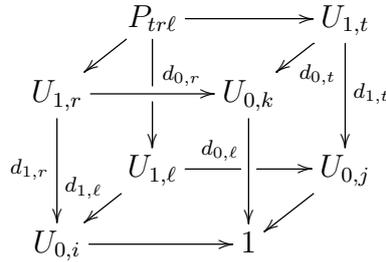
### 6.1. Hipercubrimientos indexados y descenso

**Proposición 6.1.1.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $\mathcal{U} \xrightarrow{\xi} \gamma^*\mathcal{J}$  un hipercubrimiento indexado. Supongamos que nos dan 1-simplices  $(t, r, \ell) \in (\text{cosk}_1\mathcal{J})_2$  que forman un diagrama como el siguiente:



Si  $P_{tr\ell} \neq \emptyset$  entonces  $[r] = [t][\ell]$  como elementos de  $\tau_1\mathcal{J}$  (ver Proposición 2.4.3), donde  $P_{tr\ell}$  es la componente de  $(\text{cosk}_1\mathcal{U})_2$  indexada por  $(t, r, \ell)$  definida explícitamente en la Observación 5.3.4.

*Demostración.* Vamos a mostrar que hay un 2-simplex  $\omega \in I_2$  que llena este borde, i.e. tal que  $(d_0, d_1, d_2)(\omega) = (t, r, \ell)$ . Recordemos que  $P_{tr\ell}$  es el límite del diagrama dado por:



Pero dado que  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  es un hipercubrimiento indexado, se sigue que el morfismo:

$$\sum_{\omega} U_{2,\omega} \longrightarrow P_{tr\ell}$$

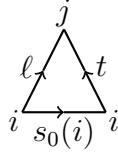
es un epimorfismo, donde la suma es sobre  $\omega \in I_2$  tal que  $(d_0, d_1, d_2)(\omega) = (t, r, \ell)$ . Como  $P_{tr\ell} \neq \emptyset$ , entonces hay un  $U_{2,\omega} \neq \emptyset$  para algún  $\omega \in I_2$  que llena el borde  $(t, r, \ell)$ . Luego por definición  $[r] = [t][\ell]$  como elementos de  $\tau_1\mathcal{J}$ .  $\square$

**Proposición 6.1.2.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $\mathcal{U} \xrightarrow{\xi} \gamma^*\mathcal{J}$  un hipercubrimiento indexado. Dados dos 1-simplices paralelos  $i \xrightarrow[\ell]{t} j$  en  $\mathcal{J}$ , tales que el siguiente pullback es no vacío:

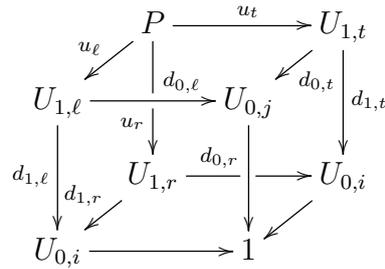
$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{u_t} & U_{1,t} \\ u_\ell \downarrow & & \downarrow (d_{1,t}, d_{0,t}) \\ U_{1,\ell} & \xrightarrow{(d_{1,\ell}, d_{0,\ell})} & U_{0,i} \times U_{0,j} \end{array}$$

Entonces  $[\ell] = [t]$  como elementos de la categoría fundamental  $\tau_1\mathcal{J}$ .

*Demostración.* Consideremos  $r = s_0(i) \in I_1$  y  $(t, \ell, r) \in (\text{cosk}_1\mathcal{J})_2$ , gráficamente:



Afirmamos que  $P_{t\ell r} \neq \emptyset$ , donde  $P_{t\ell r}$  es la componente de  $(\text{cosk}_1\mathcal{U})_2$  indexada por  $(t, \ell, r)$  definida explícitamente en la Observación 5.3.4. Para esto consideremos los siguientes morfismos:



donde  $u_r = s_{0,i}d_{1,\ell}u_\ell$ . Esto define un cono del diagrama, para ver esto recordemos que por definición de  $P$  tenemos que  $d_{1,\ell}u_\ell = d_{1,t}u_t$  y  $d_{0,\ell}u_\ell = d_{0,t}u_t$  los cuales ya nos dan la conmutatividad de la cara de arriba. Las otras caras son:

$$d_{1,r}u_r = d_{1,r}s_{0,i}d_{1,\ell}u_\ell = d_{1,\ell}u_\ell$$

$$d_{0,r}u_r = d_{0,r}s_{0,i}d_{1,\ell}u_\ell = d_{1,t}u_t$$

Como  $P \neq \emptyset$  entonces  $P_{t\ell r} \neq \emptyset$ . Luego por la Proposición 6.1.1 se sigue que  $[\ell] = [t]$  in  $\tau_1\mathcal{J}$ .  $\square$

**Proposición 6.1.3.** Dados  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $\mathcal{U} \xrightarrow{\xi} \gamma^*\mathcal{J}$  un hipercubrimiento indexado. Entonces la categoría fundamental  $\tau_1\mathcal{J}$  es un grupoide.

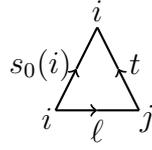
*Demostración.* Dado  $i \xrightarrow{\ell} j$  un 1-simplex en  $\mathcal{J}$ , entonces  $U_{0,i} \times U_{0,j} \neq \emptyset$ . Luego  $U_{0,j} \times U_{0,i} \neq \emptyset$ , y tenemos un epimorfismo:

$$\sum_{j \xrightarrow{t} i} U_{1,t} \longrightarrow U_{0,j} \times U_{0,i}$$

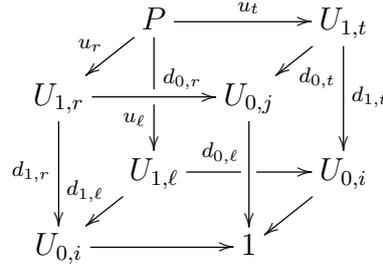
Entonces hay un 1-simplex  $j \xrightarrow{t} i$  tal que el siguiente pullback is no vacío:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{u_t} & U_{1,t} \\ u_\ell \downarrow & & \downarrow (d_{0,t}, d_{1,t}) \\ U_{1,\ell} & \xrightarrow{(d_{1,\ell}, d_{0,\ell})} & U_{0,i} \times U_{0,j} \end{array}$$

Ahora consideremos  $r = s_0(i) \in I_1$  y  $(t, r, \ell) \in (\text{cosk}_1\mathcal{J})_2$ , gráficamente:



Definimos  $u_r : P \rightarrow U_{1,r}$  como  $u_r = s_{0,i}d_{1,\ell}u_\ell$ . Chequeemos que esto define un cono del diagrama:



Para esto observemos que por definición de  $P$  tenemos que  $d_{1,\ell}u_\ell = d_{0,t}u_t$  y  $d_{0,\ell}u_\ell = d_{1,t}u_t$  los cuales ya nos dan la conmutatividad de la cara de atrás. Las otras caras son:

$$d_{1,r}u_r = d_{1,r}s_{0,i}d_{1,\ell}u_\ell = d_{1,\ell}u_\ell$$

$$d_{0,r}u_r = d_{0,r}s_{0,i}d_{1,\ell}u_\ell = d_{0,t}u_t$$

Como  $P \neq \emptyset$  entonces  $P_{tr\ell} \neq \emptyset$ . Se sigue de la Proposición 6.1.1 que  $[t][\ell] = 1$  en  $\tau_1\mathcal{J}$ . Si en su lugar consideramos  $(\ell, s_0(j), t) \in (\text{cosk}_1\mathcal{J})_2$ , por el mismo argumento  $[\ell][t] = 1$  en  $\tau_1\mathcal{J}$ , luego  $\tau_1\mathcal{J}$  es un grupoide.  $\square$

**Definición 6.1.4.** [S87, p. 54] Un **diagrama pseudo-cosimplicial truncado** de categorías  $\mathcal{X}$  consiste de un diagrama de funtores

$$\begin{array}{ccccc} & & & d_0^* & \\ & & & \longrightarrow & \\ \mathcal{X}_0 & \xrightarrow{d_0^*} & \mathcal{X}_1 & \xrightarrow{d_1^*} & \mathcal{X}_2 \\ & \xleftarrow{s_0^*} & & \xrightarrow{d_2^*} & \\ & d_1^* & & & \end{array}$$

con isomorfismos naturales  $d_j^*d_i^* \xrightarrow{\tau_{i,j}} d_i^*d_{j-1}^*$  para  $i < j$  y  $1_{\mathcal{X}_0} \xrightarrow{\tau_i} s_0^*d_i^*$  para  $i = 1, 2$ . Esto es lo mismo que un pseudo-functor  $\Delta_{<2} \xrightarrow{\mathcal{X}} \mathbf{CAT}$  donde  $\Delta_{<2}$  es la subcategoría de  $\Delta_{\leq 2}$  con todos los objetos y todos los morfismos excepto las codegeneraciones  $s^i : [2] \rightarrow [1]$   $i = 0, 1$ .

Un  $\mathcal{X}$ -**dato de descenso** está dado por  $(X, \phi)$  donde  $X \in \mathcal{X}_0$  y  $d_1^*X \xrightarrow{\phi} d_0^*X$  un isomorfismo en  $\mathcal{X}_1$  que satisface la condición de cociclo y la identidad

$$d_0^*(\phi) \tau_{0,2,X} d_2^*(\phi) = \tau_{1,2,X} d_1^*(\phi) \tau_{0,1,X} \quad \text{en } \mathcal{X}_2, \quad s_0^*(\phi) = \tau_{1,X} \tau_{0,X}^{-1} \quad \text{en } \mathcal{X}_0$$

Gráficamente, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
& d_1^* d_1^* X \xrightarrow{d_1^* \phi} d_1^* d_0^* X & \\
\tau \nearrow & & \searrow \tau \\
d_2^* d_1^* X & & d_0^* d_0^* X \\
& d_2^* \phi \searrow & \nearrow d_0^* \phi \\
& d_2^* d_0^* X \xrightarrow{\tau} d_0^* d_1^* X &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
& s_0^* \phi & \\
s_0^* d_1^* X \xrightarrow{\quad} & & s_0^* d_0^* X \\
& \tau \swarrow & \searrow \tau \\
& X &
\end{array}$$

Estos objetos forman la categoría de datos de descenso  $\mathcal{D}_x$ , donde una flecha  $(X, \phi) \rightarrow (Y, \psi)$  está dada por un morfismo  $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{X}_0$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
d_1^* X & \xrightarrow{\phi} & d_0^* X \\
d_1^* f \downarrow & & \downarrow d_0^* f \\
d_1^* Y & \xrightarrow{\psi} & d_0^* Y
\end{array}$$

y tenemos un functor obvio  $\mathcal{D}_x \xrightarrow{\delta} \mathcal{X}_0$  que se olvida del dato de descenso. Esto es una especie de “egalizador” de  $d_0^*$  y  $d_1^*$ , en efecto la categoría  $\mathcal{D}_x$  es equivalente al pseudo-límite del diagrama pseudo-cosimplicial (es el bilímite de este diagrama). Dada una categoría  $\mathcal{Y}$  y un functor  $\mathcal{Y} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{X}_0$  con un isomorfismo natural  $d_1^* \varphi \xrightarrow{\sigma} d_0^* \varphi$  satisfaciendo la condición de cociclo y la identidad, entonces se induce un functor  $\mathcal{Y} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathcal{D}_x$  y un diagrama conmutativo como sigue:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{D}_x & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{X}_0 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^*} \\ \xleftarrow{s_0^*} \\ \xrightarrow{d_1^*} \end{array} & \mathcal{X}_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^*} \\ \xleftarrow{d_1^*} \\ \xrightarrow{d_2^*} \end{array} & \mathcal{X}_2 \\
\tilde{\varphi} \uparrow & & \nearrow \varphi & & & & \\
\mathcal{Y} & & & & & &
\end{array}$$

Decimos que  $\varphi$  es de **descenso** si  $\tilde{\varphi}$  es plenamente fiel y es de **descenso efectivo** si  $\tilde{\varphi}$  es una equivalencia.

Esta definición general puede parecer engorrosa, pero en la práctica la mayoría de los casos están dados por categorías fibradas y un objeto simplicial en la categoría de base donde todos los isomorfismos  $\tau$ 's provienen de la pseudo-funtorialidad.

**Definición 6.1.5.** Dados una categoría fibrada  $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$  y un objeto simplicial (truncado)  $\mathcal{U} \in s\mathcal{C}$ , entonces tenemos un diagrama pseudo-cosimplicial truncado de categorías

$$\begin{array}{ccccc}
& & d_0^* & & \\
& & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} \\
\mathcal{F}_{U_0} & \xrightarrow{d_0^*} & \mathcal{F}_{U_1} & \xrightarrow{d_1^*} & \mathcal{F}_{U_2} \\
& \xleftarrow{s_0^*} & \xrightarrow{d_1^*} & \xleftarrow{d_2^*} & \\
& & & & \\
& & d_0 & & \\
& & \xleftarrow{\quad} & & \xleftarrow{\quad} \\
U_0 & \xleftarrow{d_0} & U_1 & \xleftarrow{d_1} & U_2 \\
& \xleftarrow{s_0} & \xleftarrow{d_1} & \xleftarrow{d_2} & \\
& & & &
\end{array}$$

En este caso hablamos de  $\mathcal{U}$ -datos de descenso para  $\mathcal{F}$ , y denotamos la categoría  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$  (cuando sea claro por el contexto podríamos simplemente llamarla  $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ ). Usualmente se tiene un objeto simplicial aumentado, i.e. tenemos un objeto  $U$  y un morfismo  $U_0 \xrightarrow{f} U$  tal que  $fd_0 = fd_1$  y estamos interesados en saber si  $f^*$  es de descenso (efectivo).

Recíprocamente, dado un morfismo  $U_0 \xrightarrow{f} U$  en  $\mathcal{C}$  se tiene asociado un complejo de Čech aumentado, decimos que  $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$  es de **descenso** (resp. **descenso efectivo**) para  $U_0 \xrightarrow{f} U$  si  $f^*$  es de descenso (resp. descenso efectivo) con respecto al complejo de Čech.

**Ejemplo 6.1.6.** Dada una categoría  $\mathcal{C}$  con pullbacks, consideremos la categoría  $\mathcal{C}^2$  de morfismos en  $\mathcal{C}$ , entonces el functor codominio  $t : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathcal{C}$  define una categoría fibrada. En particular, dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y un cubrimiento  $U \twoheadrightarrow 1$ , consideremos su complejo de Čech asociado  $\mathcal{C}U \in s\mathcal{E}$ , entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}_{\mathcal{C}U} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{E}/U & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^*} \\ \xleftarrow{s_0^*} \\ \xrightarrow{d_1^*} \end{array} & \mathcal{E}/(U \times U) & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^*} \\ \xrightarrow{d_1^*} \\ \xrightarrow{d_2^*} \end{array} & \mathcal{E}/(U \times U \times U) \\ r_{\mathcal{C}U} \uparrow & & \nearrow U^* & & & & \\ \mathcal{E} & & & & & & \end{array}$$

Es bien sabido que los epimorfismos son de descenso efectivo para esta fibración, i.e. el functor  $r_{\mathcal{C}U}$  es una equivalencia de categorías. Podemos describir explícitamente un dato de descenso en este caso, supongamos que  $U = \sum_{i \in I} U_i$ , entonces un dato de descenso  $(X, \phi)$  está dado por  $X_i \in \mathcal{E}/U_i$  para  $i \in I$ , e isomorfismos  $X_i \times U_j \xrightarrow{\phi_{ji}} X_j \times U_i$  tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X_i \times U_j & \xrightarrow{\phi_{ji}} & X_j \times U_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_i \times U_j & \xrightarrow{\tau} & U_j \times U_i \end{array}$$

La condición de cociclo dice que el siguiente diagrama conmuta:

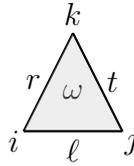
$$\begin{array}{ccccc} & & X_i \times U_k \times U_j & \xrightarrow{\phi_{ki} \times U_j} & X_k \times U_i \times U_j & & \\ & \nearrow X_i \times \tau & & & & \searrow X_k \times \tau & \\ X_i \times U_j \times U_k & & & & & & X_k \times U_j \times U_i \\ & \searrow \phi_{ji} \times U_k & & & & \nearrow \phi_{kj} \times U_i & \\ & & X_j \times U_i \times U_k & \xrightarrow{X_j \times \tau} & X_j \times U_k \times U_i & & \end{array}$$

**Ejemplo 6.1.7.** Otro ejemplo es el dado por considerar la categoría fibrante sobre conjuntos  $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{S}$  donde la fibra sobre un conjunto  $I$  es  $\mathcal{F}(I) = \mathcal{S}/I$ , i.e. la categoría de familias

$I$ -indexadas. Dado un conjunto simplicial  $\mathcal{J} \in s\mathcal{S}$ , entonces se obtiene un diagrama pseudo-cosimplicial:

$$\mathcal{S}/I_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^*} \\ \xleftarrow{s_0^*} \\ \xrightarrow{d_1^*} \end{array} \mathcal{S}/I_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^*} \\ \xrightarrow{d_1^*} \\ \xrightarrow{d_2^*} \end{array} \mathcal{S}/I_2$$

Por tanto, un  $\mathcal{J}$ -dato de descenso está dado por una familia  $S \rightarrow I_0$  y una biyección  $d_1^* S \xrightarrow{\phi} d_0^* S$  en  $\mathcal{S}/I_1$  satisfaciendo la condición de cociclo y la identidad. Esto es lo mismo que conjuntos  $S_i$  para  $i \in I_0$  y biyecciones  $S_i \xrightarrow{\phi_\ell} S_j$  para cada 1-simplex  $i \xrightarrow{\ell} j$  sujeto a  $\phi_{s_0(i)} = 1$  para  $i \in I_0$  y dado un 2-simplex  $\omega$  con  $(d_0, d_1, d_2)(\omega) = (t, r, \ell)$  entonces  $\phi_r = \phi_t \phi_\ell$ , gráficamente:



Luego se sigue que la categoría de datos de descenso  $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$  es isomorfa a la categoría (topos)  $\mathbf{B}(\pi_1 \mathcal{J})$  de acciones del grupoide fundamental de  $\mathcal{J}$ .

La siguiente Proposición de [AM] nos dice que bajo hipótesis razonables la categoría de datos de descenso para un hipercubrimiento y su 0-coesquelo son equivalentes.

**Proposición 6.1.8.** [AM][Proposition 10.3] Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos,  $\mathcal{U}$  un hipercubrimiento y  $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$  una categoría fibrada la cual es una categoría de descenso respecto a los epimorfismos, entonces el morfismo  $\mathcal{U} \rightarrow \text{cosk}_0 \mathcal{U}$  induce una equivalencia entre  $\mathcal{U}$ -datos de descenso y  $\text{cosk}_0 \mathcal{U}$ -datos de descenso para  $\mathcal{F}$ , esto es

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}} \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{F}, \text{cosk}_0 \mathcal{U}}$$

*Demostración.* Como  $U_2 \rightarrow (\text{cosk}_1 \mathcal{U})_2$  es un epimorfismo y  $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$  es una categoría de descenso, entonces la condición de cociclo vale en  $\mathcal{U}$  si y solo si vale en  $\text{cosk}_1 \mathcal{U}$ . Entonces podemos reemplazar  $\mathcal{U}$  por  $\text{cosk}_1 \mathcal{U}$ .

Recordemos que un elemento  $X \xrightarrow{x} (\text{cosk}_1 \mathcal{U})_2$  es una tupla  $X \xrightarrow{(x_0, x_1, x_2)} U_1 \times U_1 \times U_1$ , tal



y como  $\phi$  es inversible  $d_1^* s_0^* \phi = 1$ . Entonces  $\phi$  desciende a  $U_0 \times U_0$  y tenemos la equivalencia.  $\square$

Ahora recordaremos algunas propiedades de funtorialidad de la categoría de datos de descenso.

**Lema 6.1.9.** Dada  $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$  una categoría fibrada y dado  $\mathcal{V} \xrightarrow{f} \mathcal{U}$  un morfismo de objetos simpliciales en  $\mathcal{C}$ , entonces hay un funtor inducido  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}} \xrightarrow{f^*} \mathcal{D}_{\mathcal{F}, \mathcal{V}}$ .

*Demostración.* Dado  $(X, \phi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$  un dato de descenso, definimos  $f^*(X, \phi)$  como el objeto  $f^*X = f_0^*X \in \mathcal{F}_{V_0}$  con el isomorfismo  $d_1^* f^*X \xrightarrow{\tau} f_1^* d_1^* X \xrightarrow{f_1^* \phi} f_1^* d_0^* X \xrightarrow{\tau} d_0^* f^*X$  que denotamos  $f^* \phi$ . Un morfismo  $(X, \phi) \xrightarrow{\theta} (Y, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$  induce un morfismo  $f^*X \xrightarrow{f^* \theta} f^*Y \in \mathcal{F}_{V_0}$ , es un morfismo de datos de descenso pues el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 d_1^* f^* X & \xrightarrow{d_1^* f^* \theta} & & \xrightarrow{\tau} & d_1^* f^* Y \\
 \downarrow f^* \phi & \searrow & f^* d_1^* X \xrightarrow{f_1^* d_1^* \theta} f^* d_1^* Y & \swarrow & \downarrow f^* \psi \\
 & & f_1^* \phi \downarrow & & \downarrow f_1^* \psi \\
 & & f^* d_0^* X \xrightarrow{f_1^* d_0^* \theta} f^* d_0^* Y & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 d_0^* f^* X & \xrightarrow{d_0^* f^* \theta} & & \xrightarrow{\tau} & d_0^* f^* Y \\
 & & & & \downarrow f^* \psi
 \end{array}$$

Alternativamente, esto también se sigue de forma abstracta de la propiedad universal del bilímite.  $\square$

**Lema 6.1.10.** Dada  $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$  una categoría fibrada y dada una homotopía simplicial  $\mathcal{V} \xrightarrow[h^*]{f} \mathcal{U}$  entre morfismos de objetos simpliciales en  $\mathcal{C}$ , entonces hay una transformación natural inducida  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}} \xrightarrow[g^*]{f^*} \mathcal{D}_{\mathcal{F}, \mathcal{V}}$ .

*Demostración.* Supongamos dada la homotopía simplicial  $h_i : V_n \rightarrow U_{n+1}$  como en la Proposición 2.3.21. Dado  $(X, \phi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ , como  $h_0 : V_0 \rightarrow U_1$  es tal que  $d_1 h_0 = f_0$  y  $d_0 h_0 = g_0$ , obtenemos el siguiente isomorfismo:

$$f^* X \xrightarrow{\tau} h_0^* d_1^* X \xrightarrow{h_0^* \phi} h_0^* d_0^* X \xrightarrow{\tau} g^* X$$

Tenemos que mostrar que esto define un isomorfismo natural  $h^*$  entre los funtores  $f^*$  y  $g^*$ . Primero veamos que este mapa define un morfismo en  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}, \mathcal{V}}$ . Por simplicidad excluimos los

isomorfismos de pseudo funtorialidad  $\tau$  del cálculo. Queremos ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} d_1^* f^* X & \xrightarrow{d_1^* h^* \phi} & d_1^* g^* X \\ f^* \phi \downarrow & & \downarrow g^* \phi \\ d_0^* f^* X & \xrightarrow{d_0^* h^* \phi} & d_0^* g^* X \end{array}$$

Para ver esto, dado  $h_i : V_1 \rightarrow U_2$  recordemos las identidades:

$$d_0 h_0 = g_1, d_2 h_0 = h_0 d_1, d_0 h_1 = h_0 d_0, d_2 h_1 = f_1, d_1 h_0 = d_1 h_1$$

Entonces calculamos:

$$d_0^* h^* \phi f^* \phi = h_1^* d_0^* \phi h_1^* d_2^* \phi = h_1^* d_1^* \phi = h_0^* d_1^* \phi = h_0^* d_0^* \phi h_0^* d_2^* \phi = g^* \phi d_1^* h^* \phi$$

Dado que  $f^* \simeq^{\tau} h_0^* d_1^*$  y  $g^* \simeq^{\tau} h_0^* d_0^*$  y dado un morfismo  $(X, \phi) \xrightarrow{\theta} (Y, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$  la naturalidad de  $h^*$  se debe al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} h_0^* d_1^* X & \xrightarrow{h_0^* d_1^* \theta} & h_0^* d_1^* Y \\ h_0^* \phi \downarrow & & \downarrow h_0^* \psi \\ h_0^* d_0^* X & \xrightarrow{h_0^* d_0^* \theta} & h_0^* d_0^* Y \end{array}$$

□

**Lema 6.1.11.** Dada  $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$  una categoría fibrada y dadas homotopías simpliciales  $\mathcal{V} \xrightarrow[\downarrow f']{f} \mathcal{U}$ ,

$\mathcal{V} \xrightarrow[\downarrow f'']{f'} \mathcal{U}$  y  $\mathcal{V} \xrightarrow[\downarrow f'']{f} \mathcal{U}$  entre morfismos de objetos simpliciales en  $\mathcal{C}$ . Si existe un morfismo  $w_0 : V_0 \rightarrow U_2$  tal que  $d_0 w_0 = h_0''$ ,  $d_1 w_0 = h_0$  y  $d_2 w_0 = h_0'$ , entonces la transformación natural inducida  $h^*$  es igual a la composición vertical  $(h'')^* \circ (h')^*$ .

*Demostración.* Excluyendo los isomorfismos de pseudo funtorialidad la transformación natural  $h^*$  está dada en un objeto de descenso  $(X, \phi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$  por  $h_0^* \phi$ . But dado  $(X, \phi)$  tenemos  $d_1^* \phi = d_0^* \phi \circ d_2^* \phi$ . Entonces obtenemos que  $w_0^* d_1^* \phi = w_0^* d_0^* \phi \circ w_0^* d_2^* \phi$ , por lo tanto  $h_0^* \phi = (h_0'')^* \phi \circ (h_0')^* \phi$ . □

**Proposición 6.1.12.** Dada  $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$  una categoría fibrada, entonces la asignación  $(s\mathcal{C})_2 \rightarrow \mathbf{CAT}^{op}$  dada por  $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{D}_{\mathcal{U}}$  define un 2-functor, donde  $(s\mathcal{C})_2$  es la 2-categoría definida en la Observación 2.4.7.

*Demostración.* Se sigue directamente de los Lemas 6.1.9, 6.1.10 y 6.1.11 que este es un 2-functor.  $\square$

**Notación 6.1.13.** De ahora en mas dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  un hipercubrimiento indexado, denotamos por  $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$  a la categoría de datos de descenso para el complejo  $\mathcal{U}$  y la fibración codominio, i.e. el dato de descenso de la categoría cosimplicial  $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ . También denotamos  $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$  a la categoría de datos de descenso para la categoría cosimplicial  $\mathcal{S}/\mathcal{J}$ .

**Lema 6.1.14.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $(\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho) \xrightarrow{(f, \alpha)} (\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  un morfismo entre hipercubrimientos indexados. Entonces el siguiente diagrama conmuta salvo isomorfismo canónico:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{D}_{\mathcal{V}} \\ \xi^* \uparrow & \cong \tau & \uparrow \rho^* \\ \mathcal{D}_{\mathcal{J}} & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathcal{D}_{\mathcal{J}} \end{array}$$

donde las categorías  $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}, \mathcal{D}_{\mathcal{J}}$ , etc., están definidas como en la Notación 6.1.13. Además, dada una homotopía simplicial  $(\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho) \xrightarrow[(g, \beta)]{(f, \alpha)} (\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$ , tenemos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{g^*} & \mathcal{D}_{\mathcal{V}} \\ \xi^* \uparrow \uparrow h^* & & \uparrow \rho^* \\ \mathcal{D}_{\mathcal{J}} & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathcal{D}_{\mathcal{J}} \end{array} = \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{g^*} & \mathcal{D}_{\mathcal{V}} \\ \xi^* \uparrow & \cong \beta^* & \uparrow \rho^* \\ \mathcal{D}_{\mathcal{J}} & \xrightarrow[\alpha^*]{\uparrow \eta^*} & \mathcal{D}_{\mathcal{J}} \end{array}$$

*Demostración.* Los funtores horizontales  $f^*$  y  $\alpha^*$  son inducidos por  $f$  y  $\alpha$  respectivamente por el Lema 6.1.9. Los morfismos verticales  $\xi^*$  (resp.  $\rho^*$ ) están definidos como sigue: dado  $(S \rightarrow I_0, \sigma) \in \mathcal{D}_{\mathcal{J}}$  un dato de descenso para el diagrama cosimplicial  $\mathcal{S}/\mathcal{J}$ , entonces aplicando  $\gamma^*$  obtenemos un dato de descenso en  $\mathcal{E}/\gamma^*\mathcal{J}$ , explícitamente dado por el morfismo  $\gamma^*S \rightarrow \gamma^*I_0$  y el isomorfismo  $\gamma^*(\sigma) : d_1^*\gamma^*S \rightarrow d_0^*\gamma^*S$  sobre  $\gamma^*I_1$ . Luego el functor  $\xi^*$  resulta de aplicar el Lema 6.1.9 al morfismo simplicial  $\mathcal{U} \xrightarrow{\xi} \gamma^*\mathcal{J}$ . Explícitamente, el objeto  $\xi^*(S \rightarrow I_0, \sigma)$  está dado por  $\gamma^*S \times_{\gamma^*I_0} U_0 \rightarrow U_0 \in \mathcal{E}/U_0$  con el cociclo  $\gamma^*(\sigma) \times_{\gamma^*I_0} U_1$ . El isomorfismo canónico  $f^*\xi^* \xrightarrow{\tau} \rho^*\alpha^*$  simplemente se sigue de la ecuación  $\xi f = \rho\gamma^*(\alpha)$ , es un isomorfismo de pseudo-functorialidad dado por un isomorfismo de pullbacks. Ahora, dada una homotopía simplicial  $(\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho) \xrightarrow[(g, \beta)]{(f, \alpha)} (\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  chequeamos que los isomorfismos naturales de  $\rho^*\alpha^*$  a  $g^*\xi^*$  de la afirmación son iguales. Dado que  $(h, \eta)$  es una homotopía simplicial el siguiente diagrama

conmuta para todo  $n \geq 0$ :

$$\begin{array}{ccc} V_n & \xrightarrow{h_i} & U_{n+1} \\ \rho_n \downarrow & & \downarrow \xi_{n+1} \\ \gamma^* J_n & \xrightarrow{\gamma^*(\eta_i)} & \gamma^* I_{n+1} \end{array}$$

donde los  $h_i$ 's y los  $\eta_i$ 's son como en la Proposición 2.3.21. Dado un dato de descenso  $(S \rightarrow I_0, \sigma) \in \mathcal{D}_j$ , el lado izquierdo está dado por la siguiente composición:

$$\rho^* \alpha^* S \xrightarrow{\tau} f^* \xi^* S \xrightarrow{\tau} h_0^* d_1^* \xi^* S \xrightarrow{h_0^* \xi^* \sigma} h_0^* d_0^* \xi^* S \xrightarrow{\tau} g^* \xi^* S$$

Mientras que el lado derecho está dado por la composición:

$$\rho^* \alpha^* S \xrightarrow{\tau} \rho^* \eta_0^* d_1^* S \xrightarrow{\rho^* \eta_0^* \sigma} \rho^* \eta_0^* d_0^* S \xrightarrow{\tau} \rho^* \beta^* S \xrightarrow{\tau} g^* \xi^* S$$

Ahora, este es el mismo isomorfismo por la ecuación  $\xi_1 h_0 = \gamma^*(\eta_0) \rho_0$  y pseudo-funtorialidad. □

**Observación 6.1.15.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $\mathcal{U}$  un hipercubrimiento, entonces es bien sabido que el funtor de localización  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/U_0$  dado por  $X \mapsto X \times U_0$  es de descenso efectivo para la fibración codominio. Entonces tenemos una equivalencia de categorías  $\mathcal{E} \xrightleftharpoons[r_{\mathcal{U}}]{gl_{\mathcal{U}}} \mathcal{D}_{\mathcal{U}}$  que llamamos pegado y restricción, donde  $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$  es como en la Notación 6.1.13. El funtor de restricción  $r_{\mathcal{U}}$  es canónico, dado por pullback a lo largo del morfismo  $U_0 \rightarrow 1$  y el dato de descenso dado por pseudo-funtorialidad. Además, elegimos isomorfismos naturales  $gl_{\mathcal{U}} r_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{U}}} Id_{\mathcal{E}}$  y  $Id_{\mathcal{D}_{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{U}}} r_{\mathcal{U}} gl_{\mathcal{U}}$  tales que ellos dan una adjunción  $gl_{\mathcal{U}} \dashv r_{\mathcal{U}}$  que es también una equivalencia. Dado otro hipercubrimiento con un morfismo  $\mathcal{V} \xrightarrow{f} \mathcal{U}$ , entonces hay un isomorfismo natural  $f^* r_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\tau} r_{\mathcal{V}}$ , dado por pseudo-funtorialidad. Más aún, dada una homotopía simplicial  $\mathcal{V} \xrightarrow[f]{\Downarrow h} \mathcal{U}$  el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} f^* r_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\tau} & r_{\mathcal{V}} \\ h^* r_{\mathcal{U}} \downarrow & \nearrow \tau & \\ g^* r_{\mathcal{U}} & & \end{array}$$

Para ver esto recordemos que el isomorfismo natural  $h^*$  definido en el Lema 6.1.10 está dado por los isomorfismos de pseudo funtorialidad y  $h_0^* \phi$ , donde  $h_0 : V_0 \rightarrow U_1$ . Pero en el caso de un dato de descenso dado para  $r_{\mathcal{U}} X = X \times U_0$  con  $X \in \mathcal{E}$  y el cociclo  $\phi$  dado por un isomorfismo de pseudo funtorialidad, entonces por coherencia el isomorfismo  $h^* r_{\mathcal{U}}$  es el mismo que  $f^* r_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\tau} r_{\mathcal{V}} \xrightarrow{\tau} g^* r_{\mathcal{U}}$ .

**Proposición 6.1.16.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, hay un 2-functor  $\mathbf{IHC}(\mathcal{E})_2 \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbf{Top}_{\mathcal{S}}$  dado por  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi) \mapsto \mathcal{D}_{\mathcal{J}}$ . Además, el topos  $\mathcal{E}$  define un pseudo-cono  $\mathcal{E} \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{J}}} \mathcal{D}_{\mathcal{J}}$  para el funtor.

*Demostración.* Dado un hipercubrimiento indexado  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  el 2-functor  $\mathcal{D}$  lo mapea a la categoría  $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$ . Observemos que esto es simplemente una composición de la proyección  $\mathbf{IHC}(\mathcal{E})_2 \rightarrow s\mathcal{S}_2$  dada por  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi) \mapsto \mathcal{J}$  y entonces tenemos el 2-functor de descenso  $s\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathbf{CAT}^{op}$  asociado con la fibración codominio de la Proposición 6.1.12. Ahora mostremos que esta construcción cae en topos y funtores imagen inversa de morfismos geométricos. Recordemos del Ejemplo 6.1.7 que esto es simplemente el topos clasificante  $\mathbf{B}(\pi_1 \mathcal{J})$  de familias de conjuntos  $I_0$ -indexadas con una acción a izquierda del grupoide fundamental  $\pi_1 \mathcal{J}$ . Dado un morfismo  $(\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho) \xrightarrow{(f, \alpha)} (\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$ , entonces este induce un funtor  $\mathcal{D}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\alpha^*} \mathcal{D}_{\mathcal{J}}$  dado por el Lema 6.1.9, o equivalentemente por pre-composición con el funtor  $\pi_1 \mathcal{J} \xrightarrow{\alpha} \pi_1 \mathcal{J}$ . El funtor  $\alpha^*$  tiene adjuntos a izquierda y a derecha  $\alpha_! \dashv \alpha^* \dashv \alpha_*$  dados respectivamente por las extensiones de Kan a izquierda y a derecha, ver Ejemplo 3.3.3.5, luego define un morfismo geométrico  $\mathcal{D}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{D}_{\mathcal{J}}$ . Se sigue que tenemos un 2-functor  $\mathbf{IHC}(\mathcal{E})_2 \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbf{Top}_{\mathcal{S}}$ .

Recordemos el funtor  $\mathcal{D}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\xi^*} \mathcal{D}_{\mathcal{U}}$  definido en la demostración del Lema 6.1.14. Vamos a mostrar que la composición  $\lambda_{\mathcal{J}}^* := gl_{\mathcal{U}} \xi^* : \mathcal{D}_{\mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{E}$  define un pseudo-cono. Para ver que los funtores  $\lambda_{\mathcal{J}}$  son morfismos geométricos es suficiente chequear que  $\mathcal{D}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\xi^*} \mathcal{D}_{\mathcal{U}}$  es la imagen inversa de un morfismo geométrico. Pero esto se sigue ya que tenemos un morfismo de topos simpliciales  $\xi : \mathcal{E}/\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}/\mathcal{J}$ , gráficamente:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{D}_{\mathcal{U}} & \longleftarrow & \mathcal{E}/U_0 & \begin{array}{c} \xleftarrow{d_0} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xleftarrow{d_1} \end{array} & \mathcal{E}/U_1 & \begin{array}{c} \xleftarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \xleftarrow{d_2} \end{array} & \mathcal{E}/U_2 & & \mathcal{U} \\
 \downarrow \xi_1 & & \downarrow \xi_0 & & \downarrow \xi_1 & & \downarrow \xi_2 & & \downarrow \xi \\
 \mathcal{D}_{\mathcal{J}} & \longleftarrow & \mathcal{S}/I_0 & \begin{array}{c} \xleftarrow{d_0} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xleftarrow{d_1} \end{array} & \mathcal{S}/I_1 & \begin{array}{c} \xleftarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \xleftarrow{d_2} \end{array} & \mathcal{S}/I_2 & & \gamma^* \mathcal{J}
 \end{array}$$

Además el topos de datos de descenso es el colímite en  $\mathbf{Top}_{\mathcal{S}}$  del diagrama simplicial de topos, ver [Mo88, 3.2] para mas detalles. Luego  $\xi^*$  es la imagen inversa de un morfismo geométrico. Dado un morfismo  $(\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho) \xrightarrow{(f, \alpha)} (\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  necesitamos definir un isomorfismo natural  $\lambda_{\alpha}$  que completa el diagram como sigue:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}_{\mathcal{J}} & \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{J}}^*} & \mathcal{E} \\
 \alpha^* \uparrow & \searrow \lambda_{\alpha}^* & \uparrow \\
 \mathcal{D}_{\mathcal{J}} & \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{J}}^*} & \mathcal{E}
 \end{array}$$

Recordemos la adjunción equivalencia  $\mathcal{E} \xrightleftharpoons[r_{\mathcal{U}}]{g_{\mathcal{U}}} \mathcal{D}_{\mathcal{U}}$  de la Observación 6.1.15, entonces el isomorfismo  $\lambda_{\alpha}^*$  estará dado por la siguiente composición:

$$\lambda_j^* \alpha^* = g_{\mathcal{V}} \rho^* \alpha^* \xrightarrow{\tau} g_{\mathcal{V}} f^* \xi^* \xrightarrow{g_{\mathcal{V}} f^* \eta_{\mathcal{U}} \xi^*} g_{\mathcal{V}} f^* r_{\mathcal{U}} g_{\mathcal{U}} \xi^* \xrightarrow{\tau} g_{\mathcal{V}} r_{\mathcal{V}} \lambda_j^* \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{V}} \lambda_j^*} \lambda_j^*$$

En el cálculo de ascensores es el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} g_{\mathcal{V}} & \rho^* & & \alpha^* & \\ \parallel & \searrow & \tau & / & \\ g_{\mathcal{V}} & f^* & & \xi^* & \\ \parallel & \parallel & / \eta_{\mathcal{U}} \backslash & \parallel & \\ g_{\mathcal{V}} & f^* & r_{\mathcal{U}} g_{\mathcal{U}} & \xi^* & \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \\ g_{\mathcal{V}} & r_{\mathcal{V}} & g_{\mathcal{U}} & \xi^* & \\ \searrow \varepsilon_{\mathcal{V}} & & \parallel & \parallel & \\ & & g_{\mathcal{U}} & \xi^* & \end{array}$$

Chequeamos que esto define un pseudo-cono, ver 1.3.6. Para chequear (PC1) necesitamos ver que el morfismo identidad de un hipercubrimiento indexado  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  es tal que  $\lambda_{Id}^* = Id_{\lambda_j^*}$ . Pero en este caso el isomorfismo es:

$$\lambda_j^* = g_{\mathcal{U}} \xi^* \xrightarrow{g_{\mathcal{U}} \eta_{\mathcal{U}} \xi^*} g_{\mathcal{U}} r_{\mathcal{U}} g_{\mathcal{U}} \xi^* \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{U}} g_{\mathcal{U}} \xi^*} g_{\mathcal{U}} \xi^* = \lambda_j^*$$

que es la identidad por las ecuaciones de la adjunción de  $g_{\mathcal{U}} \dashv r_{\mathcal{U}}$ . Para chequear (PC2) dados morfismos

$$(\mathcal{W}, \mathcal{K}, \zeta) \xrightarrow{(g, \beta)} (\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho) \xrightarrow{(f, \alpha)} (\mathcal{U}, \mathcal{I}, \xi)$$

tenemos que probar la siguiente ecuación:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\mathcal{K}} & & \mathcal{D}_{\mathcal{K}} \\ \beta^* \uparrow & \lambda_{\mathcal{K}}^* \curvearrowright & \uparrow \beta^* \alpha^* \\ \mathcal{D}_{\mathcal{J}} & \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{J}}^*} \mathcal{E} & \mathcal{D}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{J}}^*} \mathcal{E} \\ \alpha^* \uparrow & \lambda_{\mathcal{J}}^* \curvearrowleft & \uparrow \alpha^* \\ \mathcal{D}_{\mathcal{I}} & & \mathcal{D}_{\mathcal{I}} \end{array} = \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\mathcal{K}} & & \mathcal{D}_{\mathcal{K}} \\ \beta^* \alpha^* \uparrow & \lambda_{\mathcal{K}}^* \curvearrowright & \uparrow \beta^* \alpha^* \\ \mathcal{D}_{\mathcal{J}} & \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{J}}^*} \mathcal{E} & \mathcal{D}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{J}}^*} \mathcal{E} \\ \alpha^* \uparrow & \lambda_{\mathcal{J}}^* \curvearrowleft & \uparrow \alpha^* \\ \mathcal{D}_{\mathcal{I}} & & \mathcal{D}_{\mathcal{I}} \end{array}$$

Para esto calculamos usando el cálculo de ascensores:

$$\begin{array}{c}
gl_w \zeta^* \quad \beta^* \quad \alpha^* \\
\parallel \quad \backslash \quad \tau \quad / \\
gl_w g^* \quad \rho^* \quad \alpha^* \\
\parallel \quad \parallel \quad / \eta_v \quad \backslash \quad \parallel \\
gl_w g^* r_v gl_v \rho^* \quad \alpha^* \\
\parallel \quad | \quad \tau \quad / \quad \parallel \quad \parallel \\
gl_w r_w \quad gl_v \quad \rho^* \quad \alpha^* \\
\searrow \varepsilon_w \\
\parallel \quad \parallel \quad \parallel \\
gl_v \quad \rho^* \quad \alpha^* \\
\parallel \quad \backslash \quad \tau \quad / \\
gl_v f^* \quad \xi^* \\
\parallel \quad \parallel \quad / \eta_u \quad \backslash \quad \parallel \\
gl_v f^* r_u gl_u \xi^* \\
\parallel \quad | \quad \tau \quad / \quad \parallel \quad \parallel \\
gl_v r_v \quad gl_u \quad \xi^* \\
\searrow \varepsilon_v \\
\parallel \quad \parallel \\
gl_u \quad \xi^*
\end{array}
=
\begin{array}{c}
gl_w \zeta^* \quad \beta^* \quad \alpha^* \\
\parallel \quad \backslash \quad \tau \quad / \\
gl_w g^* \quad \rho^* \quad \alpha^* \\
\parallel \quad \parallel \quad \backslash \quad \tau \quad / \\
gl_w g^* \quad f^* \quad \xi^* \\
\parallel \quad \parallel \quad / \eta_u \quad \backslash \quad \parallel \\
gl_w g^* \quad f^* r_u gl_u \xi^* \\
\parallel \quad | \quad \tau \quad / \quad \parallel \quad \parallel \\
gl_w g^* \quad r_v \quad gl_u \quad \xi^* \\
\parallel \quad \parallel \quad / \eta_v \quad \backslash \quad \parallel \\
gl_w g^* r_v gl_v r_v \quad gl_u \quad \xi^* \\
\parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \searrow \varepsilon_v \\
gl_w g^* \quad r_v \quad gl_u \quad \xi^* \\
\parallel \quad | \quad \tau \quad / \quad \parallel \quad \parallel \\
gl_w r_w \quad gl_u \quad \xi^* \\
\searrow \varepsilon_w \\
\parallel \quad \parallel \\
gl_u \quad \xi^*
\end{array}
=
\begin{array}{c}
gl_w \zeta^* \quad \beta^* \quad \alpha^* \\
\parallel \quad \backslash \quad \tau \quad / \\
gl_w g^* \quad \rho^* \quad \alpha^* \\
\parallel \quad \parallel \quad \backslash \quad \tau \quad / \\
gl_w g^* \quad f^* \quad \xi^* \\
\parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad / \eta_u \quad \backslash \quad \parallel \\
gl_w g^* \quad f^* r_u gl_u \xi^* \\
\parallel \quad | \quad \tau \quad / \quad \parallel \quad \parallel \\
gl_w g^* \quad r_v \quad gl_u \quad \xi^* \\
\parallel \quad \parallel \quad \parallel \\
gl_w r_w \quad gl_u \quad \xi^* \\
\searrow \varepsilon_w \\
\parallel \quad \parallel \\
gl_u \quad \xi^*
\end{array}$$

donde el lado izquierdo es el pegado de  $\lambda_\beta^*$  y  $\lambda_\alpha^*$  y el lado derecho es  $\lambda_{\alpha\beta}^*$ . La segunda ecuación se sigue de las identidades de la adjunción de  $gl_v \dashv r_v$ .

Para chequear (PC3) para un una homotopía simplicial  $(\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho) \xrightarrow[(g, \beta)]{\Downarrow(h, \nu)} (U, \mathcal{I}, \xi)$  tenemos que probar la siguiente ecuación:

$$\begin{array}{ccc}
& \lambda_j^* & \\
\mathcal{D}_j & \curvearrowright & \mathcal{E} \\
\alpha^* \uparrow & \lambda_\alpha^* & \\
\mathcal{D}_j & \curvearrowleft & \\
& \lambda_j^* &
\end{array}
=
\begin{array}{ccc}
& \lambda_j^* & \\
\mathcal{D}_j & \curvearrowright & \mathcal{E} \\
\alpha^* \uparrow \xrightarrow{\nu^*} \beta^* & \lambda_\beta^* & \\
\mathcal{D}_j & \curvearrowleft & \\
& \lambda_j^* &
\end{array}$$

Para esto calculamos usando el cálculo de ascensores:

$$\begin{array}{c}
gl_v \quad \rho^* \quad \alpha^* \\
\parallel \quad \parallel \quad \searrow \nu^* \quad / \\
gl_v \quad \rho^* \quad \beta^* \\
\parallel \quad \backslash \quad \tau \quad / \\
gl_v \quad g^* \quad \xi^* \\
\parallel \quad \parallel \quad / \eta_u \quad \backslash \quad \parallel \\
gl_v \quad g^* \quad r_u gl_u \quad \xi^* \\
\parallel \quad | \quad \tau \quad / \quad \parallel \quad \parallel \\
gl_v \quad r_v \quad gl_u \quad \xi^* \\
\searrow \varepsilon_w \\
\parallel \quad \parallel \\
gl_u \quad \xi^*
\end{array}
=
\begin{array}{c}
gl_v \quad \rho^* \quad \alpha^* \\
\parallel \quad \backslash \quad \tau \quad / \\
gl_v \quad f^* \quad \xi^* \\
\parallel \quad \parallel \quad / \eta_u \quad \backslash \quad \parallel \\
gl_v \quad f^* \quad r_u gl_u \quad \xi^* \\
\parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \searrow \varepsilon_v \\
gl_v \quad g^* \quad r_u gl_u \quad \xi^* \\
\parallel \quad | \quad \tau \quad / \quad \parallel \quad \parallel \\
gl_v \quad r_v \quad gl_u \quad \xi^* \\
\searrow \varepsilon_w \\
\parallel \quad \parallel \\
gl_u \quad \xi^*
\end{array}
=
\begin{array}{c}
gl_v \quad \rho^* \quad \alpha^* \\
\parallel \quad \backslash \quad \tau \quad / \\
gl_v \quad f^* \quad \xi^* \\
\parallel \quad \parallel \quad / \eta_u \quad \backslash \quad \parallel \\
gl_v \quad f^* \quad r_u gl_u \quad \xi^* \\
\parallel \quad | \quad \tau \quad / \quad \parallel \quad \parallel \\
gl_v \quad r_v \quad gl_u \quad \xi^* \\
\searrow \varepsilon_v \\
\parallel \quad \parallel \\
gl_u \quad \xi^*
\end{array}$$

donde la primera igualdad es debida al Lema 6.1.14 y a la naturalidad y la segunda igualdad se

debe a la Observación 6.1.15. El lado izquierdo es el pegado de  $\nu^*$  y  $\lambda_\beta^*$  mientras que el lado derecho es  $\lambda_\alpha^*$ , entonces tenemos un pseudo-cono.  $\square$

**Lema 6.1.17.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces los funtores del pseudo-cono  $\mathcal{D}_J \xrightarrow{\lambda_J^*} \mathcal{E}$  definido en la Proposición 6.1.16 son fieles para cada hipercubrimiento indexado  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$ .

*Demostración.* Recordemos que  $\lambda_J^*$  está dado por la composición  $gl_{\mathcal{U}}\xi^*$  y como  $gl_{\mathcal{U}}$  es una equivalencia, es suficiente ver que  $\xi^*$  es fiel. Dado un dato de descenso  $(S \rightarrow I_0, \sigma) \in \mathcal{D}_J$  el functor  $\xi^*$  le asigna el objeto  $\gamma^*S \times_{\gamma^*I_0} U_0 = \sum_{i \in I_0} \gamma^*S_i \times U_i$  sobre  $U_0$  con el cociclo  $\gamma^*(\sigma) \times_{\gamma^*I_0} U_1$ . Un morfismo  $\alpha : (S, \sigma) \rightarrow (T, \varsigma)$  en  $\mathcal{D}_J$ , i.e. funciones  $\alpha_i : S_i \rightarrow T_i$  para  $i \in I_0$  que conmutan con los cociclos, es mapeada al morfismo dado por  $\gamma^*S_i \times U_i \xrightarrow{\gamma^*(\alpha_i) \times U_i} \gamma^*T_i \times U_i$  con  $i \in I_0$ . Supongamos que nos dan otro morfismo  $\beta : (S, \sigma) \rightarrow (T, \varsigma)$  en  $\mathcal{D}_J$  tal que  $\xi^*(\alpha) = \xi^*(\beta)$ , i.e.  $\gamma^*(\alpha_i) \times U_i = \gamma^*(\beta_i) \times U_i$ . Pero entonces dado que  $U_i \neq \emptyset$  como la indexación es reducida, obtenemos que  $\alpha_i = \beta_i$  for  $i \in I_0$ , entonces el functor es fiel.  $\square$

**Corolario 6.1.18.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces los funtores del pseudo-cono  $\mathcal{D}_J \xrightarrow{\lambda_J^*} \mathcal{E}$  definen un functor fiel  $\text{Colim}_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)} \mathcal{D}_J \xrightarrow{\lambda^*} \mathcal{E}$  donde the pseudo-colímite es sobre  $\text{IHC}(\mathcal{E})_2$ .

*Demostración.* Esto se sigue del Lema 6.1.17 y el Lema 1.3.11.  $\square$

Ahora queremos caracterizar este pseudo-colímite, mostraremos que este pseudo-colímite es equivalente a  $c\mathcal{G}(\mathcal{E})$ , la categoría de proyecciones cubrientes que fué construida en [D08] por diferentes métodos.

**Definición 6.1.19.** Dado un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  y un cubrimiento  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$ , una **trivialization** de un objeto  $X \in \mathcal{E}$  es una familia de conjuntos  $S \rightarrow I$  junto con un isomorfismo  $\theta : \gamma^*S \times_{\gamma^*I} U \rightarrow X \times U$  sobre  $U$ . Esto es, una familia  $(S_i)_{i \in I}$  con isomorfismos  $\gamma^*S_i \times U_i \xrightarrow{\theta_i} X \times U_i$  sobre  $U_i$ . Decimos que  $X$  es **trivializado** por  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$ .

**Definición 6.1.20.** Dado un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$ , un objeto  $X$  es **localmente constante** si es trivializado por algún cubrimiento  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$  en  $\mathcal{E}$ .

En [B92] y [B00] M. Bunge introduce un pushout de topos cuya categoría subyacente es la categoría de objetos localmente constantes trivializados por un cubrimiento y cuyos morfismos son los mapa que preservan las trivializaciones. Esta definición es sólo para el caso localmente conexo, sin embargo aplica al caso general como en [D08].

**Definición 6.1.21.** (M. Bunge) Dado un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  y un cubrimiento  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^* I$ , la categoría  $\mathcal{P}_U$  de objetos localmente constantes trivializados por  $(U, I, \xi)$  está dada por el siguiente pushout de topos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}/U & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{E} \\ \xi \downarrow & & \downarrow v \\ \mathcal{S}/I & \xrightarrow{\varrho} & \mathcal{P}_U \end{array}$$

donde  $\varphi^*(X) = X \times U$  y  $\xi^*(S \rightarrow I) = \gamma^* S \times_{\gamma^* I} U$ .

Por la construcción de pushouts de topos,  $\mathcal{P}_U$  tiene por objetos  $(X, S \rightarrow I, \theta)$ , con  $X \in \mathcal{E}$ ,  $S \rightarrow I \in \mathcal{S}/I$  y  $\theta : \gamma^* S \times_{\gamma^* I} U \rightarrow X \times U$  un isomorfismo sobre  $U$ .

A morfismo  $(X, S \rightarrow I, \theta) \rightarrow (Y, T \rightarrow I, \vartheta)$  está dado por  $X \rightarrow Y$  en  $\mathcal{E}$  y  $\alpha : S \rightarrow T$  sobre  $I$ , tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \gamma^* S_i \times U_i & \xrightarrow{\theta_i} & X \times U_i \\ \gamma^*(\alpha_i) \times U_i \downarrow & & \downarrow f \times U_i \\ \gamma^* T_i \times U_i & \xrightarrow{\vartheta_i} & Y \times U_i \end{array}$$

Observemos que  $\alpha$  si existe, es única, es decir  $f$  determina completamente el morfismo. El functor imagen inversa  $\mathcal{P}_U \xrightarrow{v^*} \mathcal{E}$  dado por  $(X, S \rightarrow I, \theta) \mapsto X$  es fiel pero no pleno en general. Comparar con el Lema 6.1.17.

**Observación 6.1.22.** Cuando el topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  es localmente conexo, entonces se puede tomar un cubrimiento donde  $U_i$  es conexo para todo  $i \in I$ . Se sigue que  $\mathcal{S}/I \xrightarrow{\varrho} \mathcal{P}_U$  es una suryección localmente conexa y por tanto de descenso efectivo. Así, es el topos clasificante del grupoide de automorfismos de  $\varrho$ . También se sigue que en este caso  $\mathcal{P}_U$  via  $v^*$  es una subcategoría plena de  $\mathcal{E}$ . Esto se prueba de forma elemental en el apéndice de [D04].

## 6.2. La categoría y el topos de proyecciones cubrientes

**Proposición 6.2.1.** [D08, Prop. 1.8] El topos pushout  $\mathcal{P}_U$  de objetos localmente constantes trivializados por  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^* I$  es equivalente a la siguiente categoría: Un objeto es un par  $(S \rightarrow I, \phi)$ , donde  $S \rightarrow I$  en  $\mathcal{S}/I$  y  $\phi$  es un cociclo que nos da un  $\mathcal{C}U$ -dato de descenso en  $\gamma^* S \times_{\gamma^* I} U \rightarrow U \in \mathcal{E}/U$ . Un morfismo  $(S \rightarrow I, \phi) \rightarrow (T \rightarrow I, \psi)$  está dado por  $\alpha : S \rightarrow T$  sobre  $I$  tal que

$$\begin{array}{ccc} \gamma^* S_i \times U_i \times U_j & \xrightarrow{\phi_{ji}} & \gamma^* S_j \times U_j \times U_i \\ \gamma^* \alpha_i \times U_i \times U_j \downarrow & & \downarrow \gamma^* \alpha_j \times U_j \times U_i \\ \gamma^* T_i \times U_i \times U_j & \xrightarrow{\psi_{ji}} & \gamma^* T_j \times U_j \times U_i \end{array}$$

*Demostración.* Esto se sigue pues el  $\mathcal{C}U$ -dato de descenso  $(\gamma^*S \times_{\gamma^*I} U \rightarrow U, \phi)$  determina por descenso un objeto  $X \in \mathcal{E}$  con un isomorfismo  $\theta : \gamma^*S \times_{\gamma^*I} U \rightarrow X \times U$  sobre  $U$ . La equivalencia  $\mathcal{E} \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{C}U}$  del Ejemplo 6.1.6 se restringe a una equivalencia entre  $\mathcal{P}_U$  y la categoría recién descrita.  $\square$

**Notación 6.2.2.** Observemos que un cociclo  $\gamma^*S_i \times U_i \times U_j \xrightarrow{\phi_{ji}} \gamma^*S_j \times U_j \times U_i$  está determinado por su proyección a la primera variable  $\text{pr}_1 \phi_{ji}$  que denotamos  $\gamma^*S_i \times U_i \times U_j \xrightarrow{\tilde{\phi}_{ji}} \gamma^*S_j$  por simplicidad.

**Observación 6.2.3.** De nuevo en el caso de un topos localmente conexo  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  y un cubrimiento  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$  with  $U_i$  conexo para todo  $i \in I$ , el cociclo  $\gamma^*S_i \times U_i \times U_j \xrightarrow{\tilde{\phi}_{ji}} \gamma^*S_j$  corresponde por adjunción a una función  $S_i \times \gamma!(U_i \times U_j) \xrightarrow{\hat{\phi}_{ji}} S_j$ , que es biyectiva como una función de la primera variable, para cada  $\ell \in \gamma!(U_i \times U_j)$  fijo. Entonces el topos  $\mathcal{P}_U$  es equivalente al topos clasificante del grupoide (discreto)  $\pi_1(\gamma!\mathcal{C}U)$  donde  $\gamma!\mathcal{C}U$  es la indexación por componentes conexas del complejo de Čech de  $U$ .

En el caso no-localmente conexo los cociclos no están dados generalmente por biyecciones en un cubrimiento de las intersecciones  $U_i \times U_j$ . Esta es la propiedad que un objeto localmente constante carece para ser considerado una proyección cubriente.

**Definición 6.2.4.** [D08, Def. 2.1] Dado un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  y un objeto localmente constante  $X = (S \rightarrow I, \phi)$  trivializado por un cubrimiento  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$ . Una **action triple** para  $X$  está dada por  $(u, v, \sigma)$  con  $V \xrightarrow{u} U_i$ ,  $V \xrightarrow{v} U_j$ , con  $V \neq \emptyset$  y una biyección  $\sigma : S_i \rightarrow S_j$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \gamma^*S_i \times U_i \times U_j & \xrightarrow{\phi_{ji}} & \gamma^*S_j \times U_j \times U_i \\ \gamma^*S_i \times (u,v) \uparrow & & \uparrow \gamma^*S_j \times (v,u) \\ \gamma^*S_i \times V & \xrightarrow{\gamma^*(\sigma) \times V} & \gamma^*S_j \times V \end{array}$$

**Observación 6.2.5.** Observemos que como  $V \neq \emptyset$ , para un par dado  $(u, v)$  si existe una biyección  $\sigma$  que se completa a una action triple, esta biyección es única. Para probar esto observemos que siempre hay un morfismo  $\gamma^*S_i \times V \rightarrow \gamma^*S_j \times V$  que hace conmutar el cuadrado, a saber el dado por la fórmula  $(s, x) \mapsto (\tilde{\phi}_{ji}(s, u(x), v(x)), x)$ . Pero entonces si  $V \neq \emptyset$  el funtor  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}/V$  dado por  $S \mapsto \gamma^*S \times V$  es fiel, luego si hay una biyección es única.

**Definición 6.2.6.** [D08, Def. 2.12] Dado un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$ , decimos que un objeto localmente constante  $X = (S \rightarrow I, \phi)$  trivializado por un cubrimiento  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$  es una **proyección cubriente** si para cada  $(i, j)$  tal que  $U_i \times U_j \neq \emptyset$ , la familia  $(u, v) : V \rightarrow U_i \times U_j$  es epimorfa, donde  $(u, v)$  recorre todas las acción triple  $(u, v, \sigma)$ . La categoría de proyecciones cubrientes trivializada por un cubrimiento  $\xi : U \rightarrow \gamma^*I$  se define como una subcategoría plena  $\mathcal{G}_U \subset \mathcal{P}_U \xrightarrow{v^*} \mathcal{E}$ .

**Definición 6.2.7.** [D08] Dado un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  definimos la **categoría de proyecciones cubrientes**  $c\mathcal{G}(\mathcal{E})$ , cuyos objetos son pares  $(X, U, I, \xi)$  donde  $X = (S \rightarrow I, \phi)$  es una proyección cubriente trivializada por el cubrimiento  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$ , un morfismo  $(X, U, I, \xi) \rightarrow (Y, V, J, \rho)$  está dado por  $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{E}$  tal que hay morfismos  $(u, \alpha) : (W, K, \zeta) \rightarrow (U, I, \xi)$ ,  $(v, \beta) : (W, K, \zeta) \rightarrow (V, J, \rho)$  y una función  $\eta : \alpha^*S \rightarrow \beta^*T$  sobre  $K$  tal que  $(f, \eta)$  define un morfismo en  $\mathcal{G}_W$ . Hay un funtor fiel obvio  $c\mathcal{G}(\mathcal{E}) \xrightarrow{v^*} \mathcal{E}$ .

**Observación 6.2.8.** En [D08] se prueba que la asignación  $(U, I, \xi) \mapsto \mathcal{G}_U$  es funtorial y determina un cono  $\mathcal{G}_U \xrightarrow{v^*} \mathcal{E}$ . Además la categoría  $c\mathcal{G}(\mathcal{E})$  es el colímite de este diagrama, i.e.  $c\mathcal{G}(\mathcal{E}) \simeq \text{Colim}_{(U, I, \xi)} \mathcal{G}_U$ , pero no usaremos este hecho en este trabajo.

**Teorema 6.2.9.** (Comparar con [D10, Th. 7.7]) Un objeto localmente constante  $X = (S \rightarrow I, \phi)$  trivializado por un cubrimiento  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$  es una proyección cubriente si y solo si hay un hipercubrimiento indexado  $\mathcal{U} \xrightarrow{\xi} \gamma^*\mathcal{J}$  cuyo 0-truncamiento es  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$  y un  $\mathcal{J}$ -dato de descenso  $(S \rightarrow I, \sigma)$  tal que  $\xi^*(S \rightarrow I, \sigma) \simeq (S \rightarrow I, \phi)$  via  $\mathcal{D}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\xi^*} \mathcal{D}_{\mathcal{U}} \simeq \mathcal{D}_{eU}$ .

*Demostración.* Si  $X = (S \rightarrow I, \phi)$  es una proyección cubriente,  $U_i \times U_j \neq \emptyset$  para cada  $(i, j)$ , tomemos cualquier familia epimorfa  $(u_\ell, v_\ell, \sigma_\ell)$  de acción triples, entonces definimos el objeto  $U_1$  como el coproducto de  $(\text{sk}_0 U)_1 = \sum_{i \in I} U_i$  y todo  $V_\ell$  para todo  $i, j, \ell$ , con el epimorfismo obvio  $U_1 \rightarrow (\text{cosk}_0 U)_1$ , esto es  $d_{1, \ell} = u_\ell$ ,  $d_{0, \ell} = v_\ell$  para cada acción triple y las identidades para  $(\text{sk}_0 U)_1$ . Entonces tenemos definido un hipercubrimiento indexado split hasta grado 1, podemos extenderlo tomando el 1-coesqueleto, i.e. tomamos  $\mathcal{U} = \text{cosk}_1 \mathcal{U}$ , indexado por la indexación reducida asociada con  $\text{cosk}_1 \mathcal{J}$ . Dada una tripla  $(t, r, \ell) \in (\text{cosk}_1 \mathcal{J})_2$  tal que el límite  $P_{tr\ell}$  es no

vacío:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P_{tr\ell} & \xrightarrow{d_0} & V_t \\
 & d_2 \swarrow & \downarrow v_\ell & \swarrow v_t & \downarrow u_t \\
 V_\ell & \xrightarrow{\quad} & U_j & & \\
 \downarrow u_\ell & & \downarrow d_1 & & \\
 & & V_r & \xrightarrow{v_r} & U_k \\
 & \swarrow u_r & \downarrow & \swarrow & \\
 U_i & \xrightarrow{\quad} & 1 & & 
 \end{array}$$

De la Proposición 5.2.9 tenemos un morfismo canónico  $P_{tr\ell} \xrightarrow{h_{tr\ell}} U_i \times U_j \times U_k$  dado por la ecuación:

$$h_{tr\ell} = (h_i, h_j, h_k) = (u_\ell d_2, v_\ell d_2, u_t d_0) = (u_r d_1, u_t d_0, v_r d_1)$$

Como  $(u_\ell, v_\ell, \sigma_\ell)$  es una acción triple el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma^* S_i \times U_i \times U_j \times U_k \xrightarrow{\phi_{ji} \times U_k} \gamma^* S_j \times U_j \times U_i \times U_k & & \\
 \gamma^* S_i \times (h_i, h_j, h_k) \uparrow & & \uparrow \gamma^* S_j \times (h_j, h_i, h_k) \\
 \gamma^* S_i \times P_{tr\ell} \xrightarrow{\gamma^*(\sigma_\ell) \times P_{tr\ell}} \gamma^* S_j \times P_{tr\ell} & & 
 \end{array}$$

De la identidad de cociclo  $\phi_{ki} = \phi_{kj} \phi_{ji}$  (módulo  $\tau$ 's), junto con el mismo argumento de unicidad que en la Observación 6.2.5, pegando diagramas obtenemos que  $\sigma_t \sigma_\ell = \sigma_r$ . Luego  $(S \rightarrow I, \sigma)$  define un dato de descenso en  $\mathcal{D}_j$ , además es tal que  $\xi^*(S \rightarrow I, \sigma) \simeq (S \rightarrow I, \phi)$ .

Para el recíproco, dado un hipercubrimiento indexado  $\mathcal{U} \xrightarrow{\xi} \gamma^* \mathcal{J}$  tal que su 0-truncamiento es  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^* I$  y dado  $(S \rightarrow I, \sigma) \in \mathcal{D}_j$ , entonces el functor  $\mathcal{D}_j \xrightarrow{\xi^*} \mathcal{D}_\mathcal{U} \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{U}}$  lo mapea a  $(\gamma^* S \times U \rightarrow U, \phi)$ . Además el cociclo  $\phi$  es tal que para  $i \xrightarrow{\ell} j \in I_1$  el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma^* S_i \times U_i \times U_j \xrightarrow{\phi_{ji}} \gamma^* S_j \times U_j \times U_i & & \\
 \gamma^* S_i \times (d_{1,\ell}, d_{0,\ell}) \uparrow & & \uparrow \gamma^* S_j \times (d_{0,\ell}, d_{1,\ell}) \\
 \gamma^* S_i \times U_{1,\ell} \xrightarrow{\gamma^*(\sigma_\ell) \times U_{1,\ell}} \gamma^* S_j \times U_{1,\ell} & & 
 \end{array}$$

Como el morfismo  $\sum_{\ell: i \rightarrow j} U_{1,\ell} \rightarrow U_i \times U_j$  es epimorfo se sigue que  $\xi^*(S \rightarrow I, \sigma)$  es una proyección cubriente trivializada por el cubrimiento  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^* I$ .  $\square$

**Teorema 6.2.10.** Dado un topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$ , entonces el functor  $\text{Colim}_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)} \mathcal{D}_j \xrightarrow{\lambda^*} \mathcal{E}$  se factoriza por la categoría de proyecciones cubrientes y da una equivalencia de categorías  $\text{Colim}_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)} \mathcal{D}_j \simeq c\mathcal{G}(\mathcal{E})$ .

*Demostración.* Recordemos que el functor  $\text{Colim}_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)} \mathcal{D}_j \xrightarrow{\lambda^*} \mathcal{E}$  de la Proposición 6.1.16 mapea  $(S \rightarrow I, \sigma) \in \mathcal{D}_j$  para un hipercubrimiento indexado  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  a un objeto  $X \in \mathcal{E}$  con un

isomorfismo  $\gamma^*S \times_{\gamma^*I} U \xrightarrow{\theta} X \times U$  sobre  $U = U_0$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \gamma^*S_i \times U_i \times U_j^{\theta_i \times U_j} & \xrightarrow{\quad} & X \times U_i \times U_j \\ \phi_{ji} \downarrow & & \downarrow X \times \tau \\ \gamma^*S_j \times U_j \times U_i^{\theta_j \times U_i} & \xrightarrow{\quad} & X \times U_j \times U_i \end{array}$$

Llamemos  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^*I$  el 0-truncamiento del hipercubrimiento indexado, entonces en el Teorema 6.2.9 hemos mostrado que  $(X, U, I, \xi)$  con  $X = (S \rightarrow I, \phi)$  determina un objeto en  $c\mathcal{G}(\mathcal{E})$ . Entonces podemos levantar el funtor en los objetos, tenemos que ver que en los morfismos también se levanta a través del funtor fiel (pero no pleno)  $c\mathcal{G}(\mathcal{E}) \xrightarrow{v^*} \mathcal{E}$ . Dado otro dato de descenso  $(T \rightarrow J, \varsigma) \in \mathcal{D}_j$  para un hipercubrimiento indexado  $(\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho)$  y un morfismo  $[(u, \alpha), \nu, (v, \beta)]$  donde  $(u, \alpha) : (W, \mathcal{K}, \zeta) \rightarrow (U, \mathcal{J}, \xi)$ ,  $(v, \beta) : (W, \mathcal{K}, \zeta) \rightarrow (\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho)$  y una función  $\alpha^*S \xrightarrow{\eta} \beta^*T$  sobre  $K$  son tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} S_{\alpha(k)} & \xrightarrow{\sigma_{\alpha(\ell)}} & S_{\alpha(k')} \\ \eta_k \downarrow & & \downarrow \eta_{k'} \\ T_{\beta(k)} & \xrightarrow{\varsigma_{\beta(\ell)}} & T_{\beta(k')} \end{array}$$

para todo  $\ell : k \rightarrow k' \in K_1$ . Llamemos  $Y = \lambda^*(T \rightarrow J, \varsigma)$  con el isomorfismo  $\gamma^*T \times_{\gamma^*J} V \xrightarrow{\vartheta} Y \times V$

entonces via  $\lambda^*$  el morfismo  $[(u, \alpha), \eta, (v, \beta)]$  define un morfismo  $X \xrightarrow{f} Y \in \mathcal{E}$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \gamma^*S_{\alpha(k)} \times W_k & \xrightarrow{\theta_k} & X \times W_k \\ \gamma^*(\eta_k) \times W_k \downarrow & & \downarrow f \times W_k \\ \gamma^*T_{\beta(k)} \times W_k & \xrightarrow{\vartheta_k} & Y \times W_k \end{array}$$

donde abusamos de la notación y llamamos  $\theta$  (resp.  $\vartheta$ ) a los isomorfismos dados por el pullback de  $\theta$  a través de  $u : W \rightarrow U$  (resp.  $v : W \rightarrow V$ ). Entonces esto define un morfismo en  $c\mathcal{G}(\mathcal{E})$ . Recíprocamente si nos dan un morfismo de proyecciones cubrientes dadas por  $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{E}$  con un refinamiento común  $(u, \alpha) : (W, K, \zeta) \rightarrow (U, I, \xi)$ ,  $(v, \beta) : (W, K, \zeta) \rightarrow (V, J, \rho)$  y una función  $\eta : \alpha^*S \rightarrow \beta^*T$  sobre  $K$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \gamma^*S_{\alpha(k)} \times W_k & \xrightarrow{\theta_k} & X \times W_k \\ \gamma^*(\eta_k) \times W_k \downarrow & & \downarrow f \times W_k \\ \gamma^*T_{\beta(k)} \times W_k & \xrightarrow{\vartheta_k} & Y \times W_k \end{array}$$

Entonces, hay un hipercubrimiento indexado  $(\mathcal{W}, \mathcal{K}, \zeta)$  con morfismos  $(u, \alpha) : (\mathcal{W}, \mathcal{K}, \zeta) \rightarrow (\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$ ,  $(v, \beta) : (\mathcal{W}, \mathcal{K}, \zeta) \rightarrow (\mathcal{V}, \mathcal{J}, \rho)$  tal que cuando se restringe a su 0-truncamiento coincide con el refinamiento previo de cubrimientos. Esto se sigue de aplicar el Lema 4.1.19 al morfismo  $W \rightarrow \text{res}_0(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$ , el hipercubrimiento  $\mathcal{W}$  tiene una indexación canónica reducida dada por su construcción. Pero entonces la conmutatividad del último diagrama es equivalente a la conmutatividad del siguiente diagrama para todo  $k, k'$  tales que  $W_k \times W_{k'} \neq \emptyset$ :

$$\begin{array}{ccc} \gamma^* S_{\alpha(k)} \times W_k \times W_{k'} & \xrightarrow{\phi_{k'/k}} & \gamma^* S_{\alpha(k')} \times W_{k'} \times W_k \\ \gamma^*(\eta_k) \times W_k \times W_{k'} \downarrow & & \downarrow \gamma^*(\eta_{k'}) \times W_{k'} \times W_k \\ \gamma^* T_{\beta(k)} \times W_k \times W_{k'} & \xrightarrow{\psi_{k'/k}} & \gamma^* T_{\beta(k')} \times W_{k'} \times W_k \end{array}$$

Esto vale si y solo si el siguiente diagrama conmuta para todo  $\ell : k \rightarrow k' \in K_1$ :

$$\begin{array}{ccc} S_{\alpha(k)} & \xrightarrow{\sigma_{\alpha(\ell)}} & S_{\alpha(k')} \\ \eta_k \downarrow & & \downarrow \eta_{k'} \\ T_{\beta(k)} & \xrightarrow{\varsigma_{\beta(\ell)}} & T_{\beta(k')} \end{array}$$

Entonces el funtor  $\text{Colim}_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)} \mathcal{D}_{\mathcal{J}} \rightarrow c\mathcal{G}(\mathcal{E})$  es plenamente fiel. Finalmente, la otra dirección en el Teorema 6.2.9 muestra que es esencialmente suryectivo, luego una equivalencia de categorías.  $\square$

**Observación 6.2.11.** Este resultado mejora la Obervación ?? en el sentido que  $\mathcal{G}_U$  es el topos clasificante de un grupoide localico, mientras los topos  $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$  son los topos clasificantes de grupoides discretos (ordinarios).

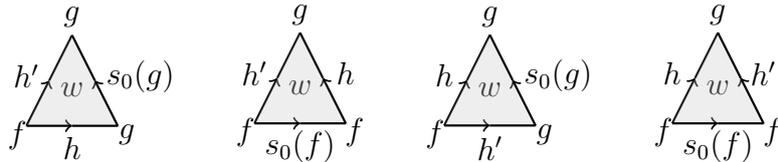
**Observación 6.2.12.** Consideremos en la categoría  $c\mathcal{G}(\mathcal{E})$  la topología de Grothendieck generada por todas las familias epimorfias en  $\mathcal{G}_U$  para todos los cubrimientos  $U \xrightarrow{\xi} \gamma^* I$ . Como es observado en [D08] esta topología es subcanónica y tiene una familia de generadores topológicos. Se sigue que la categoría de haces es legítima y que es un topos (ver [SGA4-1, Exposé II, 4.11]), llamado el **topos de proyecciones cubrientes** de  $\mathcal{E}$ , denotado por  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ . Hay un funtor fiel y pleno  $c\mathcal{G}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{J}}} \mathcal{G}(\mathcal{E})$ . La composición  $\mathcal{D}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{J}}^*} c\mathcal{G}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{E})$  es la imagen inversa de un morfismo geométrico y determina un pseudo-cono para el diagram  $(\mathcal{D}_{\mathcal{J}})_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)}$  de topos y morfismos geométricos indexados definidos en la Proposición 6.1.16.

**Teorema 6.2.13.** El pseudo-cono  $\mathcal{G}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{J}}} \mathcal{D}_{\mathcal{J}}$  es el bilímite 2-cofiltrante en la 2-categoría  $\text{Top}_{\mathcal{S}}$ .

*Demostración.* Se sigue directamente del Teorema 6.2.10 y de la construcción de bilímites 2-cofiltrante de topos dada en [DY11, Theorem 2.5].  $\square$

### 6.3. El 2-pro-grupoide fundamental de un topos

**Observación 6.3.1.** Denotemos por  $\mathbf{Kan}$  a la categoría simplicial de complejos Kan, entonces hay una 2-categoría asociada  $\mathbf{Kan}_2$ . En esta categoría una 2-celda  $\mathcal{X} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow h \\ \xrightarrow{g} \end{array} \mathcal{Y}$  es representada por una homotopía simplicial de  $f$  a  $g$ . Esto es lo mismo que un 1-simplex  $\Delta^1 \xrightarrow{h} \underline{s\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  tal que  $d_1(h) = f$  y  $d_0(h) = g$ . Pero  $\underline{s\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  es también un complejo de Kan (ver [JT08, Corollary 3.2.1.] para una prueba de esto), luego por la Proposición 2.5.8 dos tales 1-simplices de  $f$  a  $g$  representan la misma 2-celda si y solo si existe un 2-simplex  $\Delta^2 \xrightarrow{w} \underline{s\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  con  $h$  y  $h'$  como sus caras y una degeneración para la tercera cara, gráficamente todos los casos son:



Observar que un morfismo  $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$  en  $\mathbf{Kan}_2$  es una equivalencia si y solo si es una equivalencia homotópica simplicial, si y solo si es una equivalencia débil por el teorema de Whitehead (ver [HA]).

**Definición 6.3.2.** Definimos la **2-categoría homotópica**, denotada por  $\mathcal{H}_2$ , cuyos objetos son conjuntos simpliciales y dados  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  conjuntos simpliciales definimos  $\mathcal{H}_2(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \mathbf{Kan}_2(R\mathcal{X}, R\mathcal{Y})$  donde  $R = \text{Ex}^\infty$  denota el reemplazo fibrante functorial definido por D. Kan (ver Ejemplo 2.5.9). Observar que el functor  $s\mathcal{S} \xrightarrow{R} \mathbf{Kan}$  induce un 2-functor  $s\mathcal{S}_2 \xrightarrow{R} \mathcal{H}_2$ . Dada una homotopía simplicial  $\Delta^1 \times \mathcal{X} \xrightarrow{h} \mathcal{Y}$  de  $f$  a  $g$ , esta induce una homotopía simplicial:

$$\Delta^1 \times R(\mathcal{X}) \xrightarrow{j \times R(\mathcal{X})} R(\Delta^1) \times R(\mathcal{X}) \simeq R(\Delta^1 \times \mathcal{X}) \xrightarrow{R(h)} R(\mathcal{Y})$$

entre  $R(f)$  y  $R(g)$ .

**Definición 6.3.3.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos, entonces definimos el **2-functor de Verdier** del topos como sigue  $2\text{-Ver}(\mathcal{E}) := (\mathcal{J})_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \mathcal{E}) \in \text{IHC}(\mathcal{E})_2^{\text{op}}} \in 2\text{-Pro}(\mathcal{H}_2)$ , un 2-pro-objeto en la 2-categoría homotópica de conjuntos simpliciales.

**Definición 6.3.4.** Dado  $\mathcal{E}$  un topos, entonces su **pro-grupoide fundamental** está definido por el 2-pro-grupoide  $\pi_1(\mathcal{E}) := \pi_1(2\text{-Ver}(\mathcal{E})) = (\pi_1\mathcal{J})_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)} \in 2\text{-Pro}(\mathbf{Grpd})$  donde el índice  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  está en  $\text{IHC}(\mathcal{E})_2$ .

**Observación 6.3.5.** La introducción de la 2-categoría homotópica  $\mathcal{H}_2$  se debe al hecho que queremos “levantar” el funtor de Verdier  $\text{Ver}(\mathcal{E}) : \text{IHC}(\mathcal{E})_{\sim} \rightarrow \mathcal{H}$  de la categoría homotópica. Observemos que la adjunción  $\mathbf{Cat} \xrightleftharpoons[d]{\pi_0} \mathcal{S}$  induce una adjunción  $2\text{-}\mathbf{Cat} \xrightleftharpoons[d_*]{(\pi_0)_*} \mathbf{Cat}$  al aplicar  $\pi_0$  (resp.  $d$ ) en los hom-categories. La propiedad clave es que si aplicamos  $\pi_0$  en el hom-categories de  $\mathcal{H}_2$ , i.e. identificamos morfismos simplicialmente homotópicos, del teorema de Whitehead obtenemos el hom en la categoría homotópica. Observemos que esto no es cierto si tomamos  $s\mathcal{S}_2$  en vez. El  $2\text{-Ver}(\mathcal{E})$  da un levantamiento del funtor de Verdier ya que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\text{IHC}(\mathcal{E})_2 & \xrightarrow{2\text{-Ver}(\mathcal{E})} & \mathcal{H}_2 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{IHC}(\mathcal{E})_{\sim} & \xrightarrow{\text{Ver}(\mathcal{E})} & \mathcal{H} \\
\parallel & & \parallel \\
(\pi_0)_*(\text{IHC}(\mathcal{E})_2) & \xrightarrow{(\pi_0)_* 2\text{-Ver}(\mathcal{E})} & (\pi_0)_*(\mathcal{H}_2)
\end{array}$$

## 6.4. La representación de los torsores

Ahora mostremos que el pro-grupoide fundamental  $\pi_1(\mathcal{E})$  representa torsores. Para esto primero estudiemos la relación cercana entre torsores y cociclos para un grupo cosimplicial.

**Observación 6.4.1.** Observemos que dado  $G^\bullet \in \mathbf{Grp}^\Delta$  un grupo cosimplicial, un 1-cociclo (no abeliano) es simplemente un dato de descenso, cuando consideramos los grupos como categorías con un objeto. Explícitamente, es un elemento  $g \in G^1$  tal que  $d_1^*g = d_0^*g \cdot d_2^*g$  en  $G^2$  y tal que  $s_0^*g = e$  in  $G^0$ . Un morfismo de 1-cociclos  $f : g \rightarrow g'$  está dado por un elemento  $h \in G^0$  tal que  $d_0^*h \cdot g = g' \cdot d_1^*h$  en  $G^1$ .

**Proposición 6.4.2.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos,  $G$  un grupo y un cubrimiento  $U \twoheadrightarrow 1$ . Entonces dado  $(S, \mu)$  un  $G$ -torsor a derecha con una sección  $s : U \rightarrow S$ , hay un 1-cociclo para el grupo cosimplicial  $\mathcal{E}(\mathcal{C}U, \gamma^*G)$ .

Además, dado otro  $G$ -torsor  $(T, \mu')$  con una sección  $t : U \rightarrow T$  y dado un morfismo  $G$ -equivariante  $h : S \rightarrow T$ , entonces hay un morfismo inducido entre los 1-cociclos asociados.

*Demostración.* Recordemos que un  $G$ -torsor es un objeto  $S \in \mathcal{E}$  con una acción  $S \times \gamma^*G \xrightarrow{\mu} S$  tal que el morfismo  $S \times \gamma^*G \xrightarrow{\varepsilon} S \times S$  es un isomorfismo, donde  $\varepsilon = (\mu, \text{pr}_1)$  y tal que  $S \xrightarrow{!} 1$  es un epimorfismo. Usamos como variables a los morfismos y denotamos con un punto “.” tanto a la acción como al producto del grupo, entonces  $\varepsilon(x, g) = (x \cdot g, x)$ . Dado el  $G$ -torsor con la sección  $s : U \rightarrow S$ , definimos un 1-cociclo  $U \times U \xrightarrow{g} \gamma^*G$  como la siguiente composición:

$$\begin{array}{ccc} & S \times S \xrightarrow{\varepsilon^{-1}} S \times \gamma^*G & \\ s \times s \nearrow & & \searrow \text{pr}_2 \\ U \times U & \xrightarrow{g} & \gamma^*G \end{array}$$

Así, dado  $X \xrightarrow{(x,y)} U \times U$ , entonces  $g$  es el único morfismo que satisface  $s(y) \cdot g(x, y) = s(x)$ . La identidad de cociclo  $d_1^*g = d_0^*g \cdot d_2^*g$  se sigue pues  $(d_1^*g)(x, y, z) = g \text{pr}_{02}(x, y, z) = g(x, z)$  y el resto son similares, entonces tenemos  $g(x, z) = g(y, z) \cdot g(x, y)$  y  $g(x, x) = e$  por unicidad. Dado un morfismo  $G$ -equivariante  $h : S \rightarrow T$  y dado  $t : U \rightarrow T$ , entonces definimos  $U \xrightarrow{\tilde{h}} \gamma^*G$  como la siguiente composición:

$$\begin{array}{ccc} & T \times T \xrightarrow{\varepsilon^{-1}} T \times \gamma^*G & \\ (hs, t) \nearrow & & \searrow \text{pr}_2 \\ U & \xrightarrow{\tilde{h}} & \gamma^*G \end{array}$$

Estos es,  $\tilde{h}$  es el único morfismo que satisface  $t(x) \cdot \tilde{h}(x) = hs(x)$ . Llamemos  $U \times U \xrightarrow{g'} \gamma^*G$  al 1-cociclo asociado a  $(T, \mu')$  luego se sigue que  $d_0^*\tilde{h} \cdot g = g' \cdot d_1^*\tilde{h}$ , i.e. para  $X \xrightarrow{(x,y)} U \times U$ ,  $\tilde{h}(y) \cdot g(x, y) = g'(x, y) \cdot \tilde{h}(x)$ . Para esto calculemos:

$$t(y) \cdot g'(x, y) \tilde{h}(x) = t(x) \cdot \tilde{h}(x) = hs(x) = h(s(y) \cdot g(x, y)) = hs(y) \cdot g(x, y) = t(y) \cdot \tilde{h}(y) \cdot g(x, y)$$

Entonces por unicidad  $\tilde{h}(y) \cdot g(x, y) = g'(x, y) \cdot \tilde{h}(x)$ . □

**Proposición 6.4.3.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos,  $G$  un grupo y un cubrimiento  $U \twoheadrightarrow 1$ . Entonces dado un 1-cociclo en  $\mathcal{E}(\mathcal{C}U, \gamma^*G)$ , hay un  $G$ -torsor  $(S, \mu)$  en  $\mathcal{E}$  con una sección  $s : U \rightarrow S$ . Además, dado un morfismo de 1-cociclos, este define un morfismo entre los torsores asociados. Más aún, esto define un funtor plenamente fiel.

*Demostración.* Dado el 1-cociclo  $U \times U \xrightarrow{g} \gamma^*G$  definimos un dato de descenso para la fibrición codominio sobre el complejo de Čech  $\mathcal{C}U$  del cubrimiento como el objeto  $\gamma^*G \times U \xrightarrow{\text{pr}_2} U$

junto con un isomorfismo  $\gamma^*G \times U \times U \xrightarrow{\phi} \gamma^*G \times U \times U$  dado por la fórmula  $(u, x, y) \mapsto (g(x, y) \cdot u, y, x)$ . La identidad de cociclo se sigue del siguiente cálculo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (u, x, z, y) & \longrightarrow & (g(x, z) \cdot u, z, x, y) & \longrightarrow & (g(x, z) \cdot u, z, y, x) \\
 & \nearrow & & & & & \parallel \\
 (u, x, y, z) & & & & & & (g(y, z) \cdot g(x, y) \cdot u, z, y, x) \\
 & \searrow & & & & & \\
 & & (g(x, y) \cdot u, y, x, z) & \longrightarrow & (g(x, y) \cdot u, y, z, x) & \longrightarrow & 
 \end{array}$$

La acción obvia  $\gamma^*G \times U \times \gamma^*G \rightarrow \gamma^*G \times U$  dada por la fórmula  $(u, x, v) \mapsto (u \cdot v, x)$  define una estructura de  $G$ -torsor compatible con  $\phi$ , en el sentido que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma^*G \times U \times U \times \gamma^*G & \longrightarrow & \gamma^*G \times U \times U & & (u, x, y, v) & \longmapsto & (u \cdot v, x, y) \\
 \phi \times \gamma^*G \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow & & \downarrow \\
 \gamma^*G \times U \times U \times \gamma^*G & \longrightarrow & \gamma^*G \times U \times U & & (g(x, y) \cdot u, y, x) & \longmapsto & (g(x, y) \cdot u \cdot v, y, x)
 \end{array}$$

Luego por descenso define un  $G$ -torsor a derecha  $(S, \mu)$  en  $\mathcal{E} \simeq \mathcal{D}_{eU}$ . El iso  $\gamma^*G \times U \xrightarrow{\theta} S \times U$  dado por descenso nos permite definir una sección  $s : U \rightarrow S$  via la siguiente composición:

$$\begin{array}{ccc}
 & \gamma^*G \times U \xrightarrow{\theta} S \times U & \\
 (e, Id_U) \nearrow & & \searrow \text{pr}_1 \\
 U & \xrightarrow{s} & S
 \end{array}$$

Dado otro 1-cociclo  $U \times U \xrightarrow{g'} \gamma^*G$  y un morfismo  $U \xrightarrow{h} \gamma^*G$  from  $g$  a  $g'$ , definimos un morfismo  $\gamma^*G \times U \xrightarrow{\tilde{h}} \gamma^*G \times U$  dado por  $(u, x) \mapsto (h(x) \cdot u, x)$ . Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma^*G \times U \times U & \xrightarrow{\phi} & \gamma^*G \times U \times U & & (u, x, y) & \longmapsto & (g(x, y) \cdot u, y, x) \\
 \tilde{h} \times U \downarrow & & \downarrow \tilde{h} \times U & & \downarrow & & \downarrow \\
 \gamma^*G \times U \times U & \xrightarrow{\psi} & \gamma^*G \times U \times U & & (h(y) \cdot g(x, y) \cdot u, y, x) & & \\
 & & & & \parallel & & \\
 & & & & (h(x) \cdot u, x, y) & \longmapsto & (g'(x, y) \cdot h(x) \cdot u, y, x)
 \end{array}$$

donde  $\psi$  es el isomorfismo del dato de descenso asociado a  $U \times U \xrightarrow{g'} \gamma^*G$ . Entonces define un morfismo que es claramente  $G$ -equivariante en  $\mathcal{D}_{eU} \simeq \mathcal{E}$ .

Recíprocamente dado cualquier morfismo  $G$ -equivariante  $\gamma^*G \times U \xrightarrow{f} \gamma^*G \times U$  sobre  $U$  compatible con el dato de descenso asociado a  $g$  y  $g'$ , entonces este determina un morfismo  $U \xrightarrow{h} \gamma^*G$

como la siguiente composición:

$$\begin{array}{ccc}
 & \gamma^*G \times U & \xrightarrow{f} & \gamma^*G \times U \\
 (e, Id_U) \nearrow & & & \searrow \text{pr}_1 \\
 U & \xrightarrow{h} & & \gamma^*G
 \end{array}$$

Como  $f$  es un morfismo sobre  $U$  y este es  $G$ -equivariant entonces:

$$f(u, x) = (f_1(u, x), x) = (f_1(e, x) \cdot u, x) = \tilde{h}(u, x)$$

Además el morfismo  $f$  es compatible con el dato de descenso si y solo si  $h$  es un morfismo de 1-cociclos. Entonces el funtor es plenamente fiel.  $\square$

**Observación 6.4.4.** Observemos que el isomorfismo  $\gamma^*G \times U \xrightarrow{\theta} S \times U$  de la proposición anterior implica en particular que  $S$  es un objeto localmente constante trivializado por  $U$ .

**Definición 6.4.5.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos,  $G$  un grupo y un cubrimiento  $U \twoheadrightarrow 1$ . Definimos la categoría de  $G$ -torsores **split por  $U$** , denotada  $\text{Tors}(\mathcal{E}, G)^U$ , como la subcategoría plena de  $\text{Tors}(\mathcal{E}, G)$  cuyos objetos son  $G$ -torsores  $(S, \mu)$  que admiten una sección  $s : U \rightarrow S$ .

**Observación 6.4.6.** Será conveniente trabajar con una categoría equivalente a  $\text{Tors}(\mathcal{E}, G)^U$ , una categoría cuyos objetos son triplas  $(S, \mu, s)$ , donde  $(S, \mu)$  es un  $G$ -torsor con una sección específica  $s : U \rightarrow S$  y cuyos morfismos son morfismos  $G$ -equivariantes, no necesariamente compatibles con las secciones.

**Teorema 6.4.7.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos,  $G$  un grupo y un cubrimiento  $U \twoheadrightarrow 1$ , entonces  $\text{Tors}(\mathcal{E}, G)^U$  es equivalente a la categoría de 1-cociclos de  $\mathcal{E}(\mathcal{C}U, \gamma^*G)$ .

*Demostración.* Por la Proposición 6.4.3 tenemos un funtor de la categoría de 1-cociclos en  $\mathcal{E}(\mathcal{C}U, \gamma^*G)$  a la categoría de  $G$ -torsores trivializados por  $U$  y además, es plenamente fiel. Ahora usando la Proposición 6.4.2 mostramos que este funtor es esencialmente suryectivo. Dado un  $G$ -torsor  $(S, \mu)$  con una sección especificada  $s : U \rightarrow S$ , este determina un isomorfismo  $\gamma^*G \times U \xrightarrow{\theta} S \times U$  dado por la fórmula  $\theta(u, x) = (s(x) \cdot u, x)$ . Además este conmuta con el dato de descenso:

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma^*G \times U \times U \xrightarrow{\theta \times U} S \times U \times U & & (u, x, y) \longmapsto (s(x) \cdot u, x, y) \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \\
 \gamma^*G \times U \times U \xrightarrow{\theta \times U} S \times U \times U & & (s(x) \cdot u, y, x) \\
 & & \parallel \\
 & & (g(x, y) \cdot u, y, x) \longmapsto (s(y) \cdot g(x, y) \cdot u, y, x)
 \end{array}$$

Más aún  $\theta$  es claramente  $G$ -equivariante. Luego el funtor es esencialmente suryectivo.  $\square$

**Proposición 6.4.8.** Dado un conjunto simplicial  $\mathcal{J} \in s\mathcal{S}$  y  $G$  un grupo, entonces la categoría de 1-cociclos del grupo cosimplicial  $\mathcal{S}(\mathcal{J}, G)$  es isomorfa a la categoría  $\mathbf{Grpd}(\pi_1\mathcal{J}, G)$ .

*Demostración.* Es claro que cualquier acción de un grupoide es por isomorfismos, así por adjunción tenemos que  $\mathbf{Grpd}(\pi_1\mathcal{J}, G) \simeq \mathbf{Cat}(\tau_1\mathcal{J}, G)$  donde pensamos a  $G$  como una categoría con un solo objeto. Ahora un funtor  $\tau_1\mathcal{J} \xrightarrow{g} G$  está dado por  $g_\ell \in G$  para cada  $\ell \in I_1$  tal que dado  $\omega \in I_2$  entonces  $g_{d_1(\omega)} = g_{d_0(\omega)} \cdot g_{d_2(\omega)}$  y  $g_{s_0(i)} = e$  para  $i \in I_0$ . Una transformación natural  $g \xrightarrow{h} g'$  está dada por  $h_i \in G$  para cada  $i \in I_0$  tal que  $h_j \cdot g_\ell = g'_\ell \cdot h_i$  con  $i \xrightarrow{\ell} j \in I_1$ . Entonces esto es lo mismo que la categoría de 1-cociclos para el grupo cosimplicial  $\mathcal{S}(\mathcal{J}, G)$ .  $\square$

**Proposición 6.4.9.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos,  $G$  un grupo y un cubrimiento  $U \twoheadrightarrow 1$ . Dado  $\mathcal{U}$  un hipercubrimiento split con  $U_0 = U$ , entonces la categoría de 1-cociclos de  $\mathcal{E}(\mathcal{C}U, \gamma^*G)$  es equivalente al colímite filtrante de categorías  $\mathop{\mathrm{colim}}_{(\mathcal{J}, \xi) \in J_{\mathcal{U}}} \mathbf{Grpd}(\pi_1\mathcal{J}, G)$  donde  $J_{\mathcal{U}}$  es la categoría de indexaciones de  $\mathcal{U}$ .

*Demostración.* Primero observemos que por la Proposición 6.1.8 hay una equivalencia de categorías de 1-cociclos de  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \gamma^*G)$  y 1-cociclos de  $\mathcal{E}(\mathcal{C}U, \gamma^*G)$ . Necesitamos chequear solamente que esta categoría fibrante es de descenso, pero esto se sigue pues los epimorfismos son efectivos. También, por el Corolario 5.2.13 tenemos un isomorfismo de grupos cosimpliciales:

$$\mathcal{E}(\mathcal{U}, \gamma^*G) \simeq \mathop{\mathrm{colim}}_{(\mathcal{J}, \xi) \in J_{\mathcal{U}}} \mathcal{S}(\mathcal{J}, G)$$

donde el colímite es sobre el poset (dual) filtrante de indexaciones de  $\mathcal{U}$ . Como el descenso es un bilímite finito conmuta con colímites filtrantes (ver por ejemplo [Can16, Theorem 7.24.] o [DDS16, Theorem 3.2.] para resultados más generales). Entonces el resultado se sigue por la Proposición 6.4.8. En los objetos la equivalencia es como sigue, dado un 1-cociclo  $I_1 \xrightarrow{g} G$  en una indexation  $(\mathcal{J}, \xi)$  entonces determina un 1-cociclo  $U_1 \xrightarrow{\xi_1} \gamma^*I_1 \xrightarrow{\gamma^*(g)} \gamma^*G$  para  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \gamma^*G)$  luego por descenso un 1-cociclo para  $\mathcal{E}(\mathcal{C}U, \gamma^*G)$ :

$$\begin{array}{ccc} U_1 \times_{U_0 \times U_0} U_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathrm{pr}_0} \\ \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \end{array} & U_1 \xrightarrow{(d_1, d_0)} U_0 \times U_0 \\ & & \downarrow \exists! \\ & & \gamma^*G \end{array}$$

$\square$

**Teorema 6.4.10.** Dado  $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}$  un topos y  $G$  un grupo, entonces hay una equivalencia de categorías  $\mathbf{Top}_{\mathcal{S}}(\mathcal{E}, \mathbf{BG}) \simeq 2\text{-Pro}(\mathbf{Grpd})(\pi_1(\mathcal{E}), G)$ .

*Demostración.* Recordemos que por definición

$$2\text{-Pro}(\mathbf{Grpd})(\pi_1(\mathcal{E}), G) \simeq \operatorname{Colim}_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi) \in \mathbf{IHC}(\mathcal{E})_2} \mathbf{Grpd}(\pi_1 \mathcal{J}, G)$$

y por el Teorema 3.4.10 hay una equivalencia  $\mathbf{Top}_{\mathcal{S}}(\mathcal{E}, \mathbf{BG}) \simeq \mathbf{Tors}(\mathcal{E}, G)$ . Consideremos el pseudo-cono de topos  $\mathcal{E} \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{J}}} \mathcal{D}_{\mathcal{J}}$  definido en la Proposición 6.1.16, donde el índice corre en  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi) \in \mathbf{IHC}(\mathcal{E})_2$ . Entonces obtenemos un pseudocono de categorías  $\mathbf{Tors}(\mathcal{D}_{\mathcal{J}}, G) \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{J}}^*} \mathbf{Tors}(\mathcal{E}, G)$ .

Por la Proposición 3.4.11 y por el Teorema 3.4.10 hay equivalencias canónicas de categorías:

$$\mathbf{Grpd}(\pi_1 \mathcal{J}, G) \simeq \mathbf{Top}_{\mathcal{S}}(\mathcal{D}_{\mathcal{J}}, \mathbf{BG}) \simeq \mathbf{Tors}(\mathcal{D}_{\mathcal{J}}, G)$$

Entonces mostremos que este pseudo-cono nos da la equivalencia deseada. Dado un hipercubrimiento indexado  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  y un functor  $\pi_1 \mathcal{J} \xrightarrow{g} G$ , entonces el  $G$ -torsor asociado en  $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$  está dado por  $S = G \times I_0 \xrightarrow{\text{pr}_2} I_0$  y el cociclo  $d_1^* S \xrightarrow{\sigma} d_0^* S$  sobre un 1-simplex  $i \xrightarrow{\ell} j$  está dado por la biyección  $G \xrightarrow{\sigma_{\ell}} G$  que mapea  $u \mapsto g_{\ell} \cdot u$ . La estructura de  $G$ -torsor está dada por multiplicación a derecha por  $G$ . Entonces determina un dato de descenso  $(\gamma^* G \times U_0 \rightarrow U_0, \phi) \in \mathcal{D}_{eU_0}$  tal que el siguiente diagrama conmuta para cada 1-simplex  $i \xrightarrow{\ell} j$ :

$$\begin{array}{ccc} \gamma^* G \times U_{0,i} \times U_{0,j} & \xrightarrow{\phi_{ji}} & \gamma^* G \times U_{0,j} \times U_{0,i} \\ \gamma^* G \times (d_{1,\ell}, d_{0,\ell}) \uparrow & & \uparrow \gamma^* G \times (d_{0,\ell}, d_{1,\ell}) \\ \gamma^* G \times U_{1,\ell} & \xrightarrow{\gamma^*(\sigma_{\ell}) \times U_{1,\ell}} & \gamma^* G \times U_{1,\ell} \end{array}$$

Por otra lado, por la Proposición 6.4.9 se asocia a un functor  $\pi_1 \mathcal{J} \xrightarrow{g} G$  un 1-cociclo  $U_0 \times U_0 \xrightarrow{\tilde{g}} \gamma^* G$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U_0 \times U_0 & \xrightarrow{\tilde{g}} & \gamma^* G \\ (d_1, d_0) \uparrow & & \uparrow \gamma^*(g) \\ U_1 & \xrightarrow{\xi_1} & \gamma^* I_1 \end{array}$$

Se sigue por unicidad que el isomorfismo  $\gamma^* G \times U_0 \times U_0 \xrightarrow{\phi} \gamma^* G \times U_0 \times U_0$  está dado por la fórmula  $(u, x, y) \mapsto (\tilde{g}(x, y) \cdot u, y, x)$  como en la Proposición 6.4.3.

Entonces el functor  $\operatorname{Colim}_{(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi) \in \mathbf{IHC}(\mathcal{E})_2} \mathbf{Grpd}(\pi_1 \mathcal{J}, G) \rightarrow \mathbf{Tors}(\mathcal{E}, G)$  es fiel pues  $\mathcal{D}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{J}}^*} \mathcal{E}$  es fiel para cada hipercubrimiento indexado  $(\mathcal{U}, \mathcal{J}, \xi)$  por el Lema 6.1.17, entonces su restricción a  $G$ -torsores  $\mathbf{Tors}(\mathcal{D}_{\mathcal{J}}, G) \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{J}}^*} \mathbf{Tors}(\mathcal{E}, G)$  es también fiel. Como cualquier  $G$ -torsor  $(S, \mu)$  admite

una sección por algún cubrimiento  $U \twoheadrightarrow 1$ , se sigue que este funtor es pleno y esencialmente suryectivo por el Teorema 6.4.7 y por la Proposición 6.4.9.  $\square$

**Observación 6.4.11.** M. Artin y B. Mazur muestran en [AM, Corollary 10.7] que para un topos punteado conexo localmente conexo hay una biyección entra las clases de isomorfismo de  $G$ -torsores (llamados  $G$ -fibrados principales) y morfismos de pro-grupos  $\pi_1(\mathcal{E}, p) \rightarrow G$  salvo conjugación. Nuestro resultado en el Teorema 6.4.10 es más fino incluso en el caso de topos localmente conexos pues da una equivalencia de categorías en lugar de simplemente una biyección entre las clases de isomorfismos.

Aplicando el funtor de componentes conexas en el Teorema 6.4.10 obtenemos una biyección:

$$\pi_0(\mathbf{Top}_{\mathcal{S}}(\mathcal{E}, \mathbf{BG})) \simeq \pi_0(2\text{-Pro}(\mathbf{Grpd})(\pi_1(\mathcal{E}), G))$$

El lado izquierdo es por definición  $H^1(\mathcal{E}, G)$ , la cohomología no-abeliana con coeficientes en  $G$ , i.e. el conjunto de clases de isomorfismo de  $G$ -torsores. En el lado derecho, tenemos primero una biyección:

$$\pi_0(2\text{-Pro}(\mathbf{Grpd})(\pi_1(\mathcal{E}), G)) \simeq \pi_0\left(\operatorname{Colim}_{(U, \mathcal{J}, \xi) \in \mathbf{IHC}(\mathcal{E})_2} \mathbf{Grpd}(\pi_1 \mathcal{J}, G)\right)$$

Entonces tenemos una biyección:

$$\pi_0\left(\operatorname{Colim}_{(U, \mathcal{J}, \xi) \in \mathbf{IHC}(\mathcal{E})_2} \mathbf{Grpd}(\pi_1 \mathcal{J}, G)\right) \simeq \operatorname{colim}_{(U, \mathcal{J}, \xi) \in \mathbf{IHC}(\mathcal{E})_{\sim}} \pi_0 \mathbf{Grpd}(\pi_1 \mathcal{J}, G)$$

donde el lado derecho es un colímite filtrante de conjuntos. Esto se sigue de la adjunción

$$\mathbf{Cat} \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_0} \\ \xleftarrow{d} \end{array} \mathcal{S}$$

donde consideramos a los conjuntos como una 2-categoría discreta.

Pero  $\pi_0 \mathbf{Grpd}(\pi_1 \mathcal{J}, G)$  es simplemente el hom en la categoría homotópica de grupoides, luego el lado derecho es por definición  $\operatorname{Pro}(\mathbf{Ho}(\mathbf{Grpd}))(\pi_1 \operatorname{Ver}(\mathcal{E}), G)$ . Así obtenemos la biyección:

$$H^1(\mathcal{E}, G) \simeq \operatorname{Pro}(\mathbf{Ho}(\mathbf{Grpd}))(\pi_1 \operatorname{Ver}(\mathcal{E}), G)$$

Luego esto generaliza [AM, Corollary 10.7] al caso no-localmente conexo.

## Referencias

- [SGA4-1] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des Schémas, Tome 1 (SGA4)*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 269, Springer-Verlag (1972).
- [SGA4-2] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des Schémas, Tome 2 (SGA4)*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 270, Springer-Verlag (1972).
- [AM] M. Artin, B. Mazur. *Etale Homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 100, Springer-Verlag (1969).
- [BD81] M. Barr, R. Diaconescu. *On locally simply connected toposes and their fundamental groups*. Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, tome 22, no. 3, Pages 301-314 (1981).
- [B92] M. Bunge. *Classifying toposes and fundamental localic groupoids*. R.A.G. Seely, ed., Category Theory '91, CMS Conf. Proc. 13 (1992).
- [B00] M. Bunge. *Galois Groupoids and Covering Morphisms in Topos Theory*. Fields Institute Communications (2000).
- [BM97] M. Bunge, I. Moerdijk. *On the construction of the Grothendieck fundamental group of a topos by paths*. Journal of Pure and Applied Algebra 116, Pages 99-113 (1997).
- [Can16] N. Canevali. *2-filtered bicolimits and finite weighted bilimits commute in Cat*. Degree thesis, <http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/2016> (2016).
- [CE56] H. Cartan, S. Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press (1956).
- [CP89] J.-M. Cordier, T. Porter. *Shape Theory, Categorical Methods of Approximation*, Dover books on Mathematics (1989).

- [D15] M. E. Descotte. *A theory of 2-pro-objects, a theory of 2-model 2-categories and the 2-model structure for  $2\text{-Pro}(\mathcal{C})$* . Ph.D. thesis, [https://digital.bl.fcen.uba.ar/download/tesis/tesis\\_n5805\\_Descotte.pdf](https://digital.bl.fcen.uba.ar/download/tesis/tesis_n5805_Descotte.pdf) (2015).
- [DD14] M. E. Descotte, E. J. Dubuc. *A theory of 2-pro-objects*. Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques tome 55, no. 1 (2014).
- [DDS16] M. E. Descotte, E. J. Dubuc, M. Szyld. *A construction of certain weak colimits and an exactness property of the 2-category of categories*. Theory and Applications of Categories, Volume 33, Pages 193-215 (2018).
- [DDS18] M. E. Descotte, E. J. Dubuc, M. Szyld. *Model bicategories and their homotopy bicategories*. <https://arxiv.org/abs/1805.07749> (2018).
- [D04] E. J. Dubuc. *On the representation theory of Galois and atomic topoi*. Journal of Pure and Applied Algebra. Volume 186, Issue 3, Pages 233-275 (2004).
- [D08] E. J. Dubuc. *The fundamental progroupoid of a general topos*. Journal of Pure and Applied Algebra, 212, Pages 2479-2492 (2008).
- [D10] E. J. Dubuc. *Spans and Simplicial Families*. <https://arxiv.org/pdf/1012.6001.pdf> (2010).
- [DS06] E. J. Dubuc, R. Street. *A construction of 2-filtered bicolimits of categories*. Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, tome 47, no. 2, Pages 83-106 (2006).
- [DY11] E. J. Dubuc, S. Yuhjtman. *A construction of 2-cofiltered bilimits of topoi*. Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, tome 52, no. 4, Pages 242-252 (2011).
- [DHI04] D. Dugger, S. Hollander, D. Isaksen. *Hypercovers and simplicial presheaves*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 136 , no. 1, Pages 9-51 (2004).
- [EH80] D. A. Edwards, H. M. Hastings. *Čech Theory: its past, present and future*. Rocky Mountain Journal of Mathematics, Volume 10, Number 3 (1980).

- [Fd182] E. M. Friedlander. *Etale homotopy of simplicial schemes*. Annals of Mathematics Studies, Number 104, Princeton University Press (1982).
- [Fdm12] G. Friedman. *An elementary illustrated introduction to simplicial sets*. Rocky Mountain J. Math. 42, no. 2, Pages 353-423 (2012).
- [GZ67] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete, Band 35 (1967).
- [G64] J. Giraud. *Méthode de la descente*. Mémoires de la S. M. F., tome 2 (1964).
- [GJ99] P. G. Goerss, J. F. Jardine. *Simplicial Homotopy Theory*. Progress in Mathematics, Volume 174, Birkhauser (1999).
- [G57] A. Grothendieck. *Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tohoku Mathematical Journal, Volume 9, Number 2, Pages 119-221 (1957).
- [SGA1] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1)*. Lecture notes in mathematics, Volume 224, Springer-Verlag (1971).
- [HP98] L. J. Hernández-Paricio. *Fundamental pro-groupoids and covering projections*. Fundamenta Mathematicae 156 (1998).
- [LHT] J. F. Jardine. *Local Homotopy Theory*. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag (2015).
- [JT84] A. Joyal , M. Tierney. *An extension of the Galois Theory of Grothendieck*. Memoirs of the American Mathematical Society 151 (1984).
- [JT08] A. Joyal, M. Tierney. *Notes on simplicial homotopy theory*. (2008).
- [Kel82] G. M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory*. London Mathematical Society Lecture Note Series 64, Cambridge University Press (1982).
- [Ken83] J. F. Kennison. *The fundamental group of a topos*. Journal of Pure and Applied Algebra 30, Pages 23-38 (1983).

- [Ken92] J. F. Kennison. *The fundamental localic groupoid of a topos*. Journal of Pure and Applied Algebra 77, Pages 67-86 (1992).
- [Lac10] S. Lack. *A 2-Categories Companion*. In: Baez J., May J. (eds) Towards Higher Categories. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, vol 152. Springer, New York (2010).
- [Lub67] S. Lubkin. *On a conjecture of André Weil*. American Journal of Mathematics 78, Pages 555-563 (1967).
- [CWM] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (1978).
- [SGL] S. Mac Lane, I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic. A First Introduction to Topos Theory*. Universitext, Springer-Verlag (1992).
- [May67] J. P. May. *Simplicial Objects in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press (1967).
- [Mo88] I. Moerdijk. *The classifying topos of a continuous groupoid I*. Transactions of the American Mathematical Society, Volume 310, Number 2 (1988).
- [Mo89] I. Moerdijk. *Prodiscrete groups and Galois toposes*. Proc. Kon. Nederl. Akad. van Wetens. Series A, 92-2 (1989).
- [Mo95] I. Moerdijk. *Classifying Spaces and Classifying Topoi*. Lecture Notes in Mathematics, Volume 1616 (1995).
- [HA] D. G. Quillen. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, Volume 43, Springer-Verlag (1967).
- [CHT] E. Riehl. *Categorical Homotopy Theory*. New mathematical monographs: 24, Cambridge University Press (2014).
- [RV14] E. Riehl, D. Verity. *The theory and practice of Reedy categories*. Theory and Applications of Categories, Vol. 29, No. 9, Pages 256-301 (2014).

- [S87] R. Street. *Correction to “Fibrations in bicategories”*. Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 28, No. 1, Pages 53-56 (1987).