



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Razón de volumen entre cuerpos convexos

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de
Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Diego Mariano Merzbacher

Director: Dr. Daniel E. Galicer
Consejero de estudios: Dr. Daniel G. Carando

Buenos Aires, 2019

Resumen

Esta tesis tiene como objeto contribuir al estudio de algunos problemas de análisis geométrico asintótico relativos a aproximaciones volumétricas de un cuerpo convexo mediante imágenes afines de otro.

Dado un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ con baricentro en el origen, mostramos que existe un símplice $S \subset K$ que tiene también *baricentro en el origen* tal que $\left(\frac{|S|}{|K|}\right)^{1/n} \geq \frac{c}{\sqrt{n}}$, donde $c > 0$ es una constante absoluta y $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue. Conseguimos esto usando técnicas de geometría estocástica. Más precisamente, si K está en posición isotrópica, presentamos un método para encontrar símplices centrados verificando la cota antes mencionada que funciona con probabilidad extremadamente alta.

Por dualidad, dado un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ mostramos que existe un símplice S que contiene a K con el mismo baricentro tal que $\left(\frac{|S|}{|K|}\right)^{1/n} \leq d\sqrt{n}$, para alguna constante absoluta $d > 0$. Salvo por la constante la estimación no puede ser mejorada.

Definimos la *máxima razón de volumen* de un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ como $\text{lvr}(K) := \sup_{L \subset \mathbb{R}^n} \text{vr}(K, L)$, donde el supremo se toma sobre todos los cuerpos convexos L . Probamos la siguiente cota que resulta ajustada en general: $c\sqrt{n} \leq \text{lvr}(K)$, para *todo* cuerpo K (donde $c > 0$ es una constante absoluta). Este resultado mejora la cota anteriormente conocida que es del orden de $\sqrt{\frac{n}{\log \log(n)}}$.

Estudiamos el comportamiento asintótico exacto para algunas clases naturales de cuerpos convexos. En particular, si K es la bola unitaria de una norma unitariamente invariante en $\mathbb{R}^{d \times d}$ (e.g., la bola unidad de la clase p -Schatten para $1 \leq p \leq \infty$), la bola unidad de una norma tensorial en el producto de espacios ℓ_p o K un cuerpo incondicional, probamos que $\text{lvr}(K)$ se comporta como la raíz cuadrada de la dimensión del espacio ambiente.

También analizamos el problema de estimar la razón de volumen entre proyecciones de dos cuerpos convexos en \mathbb{R}^n en subespacios de dimensión proporcional a n .

Palabras clave: Razón de volumen, símplices, cuerpos convexos, politopos aleatorios.

Abstract

This thesis aims to contribute to the study of some problems of asymptotic geometrical analysis concerning volumetric approximations of a convex body by an affine image of another one. For a convex body $K \subset \mathbb{R}^n$ with barycenter at the origin, we show that there is a simplex $S \subset K$ having also *barycenter at the origin* such that $\left(\frac{|S|}{|K|}\right)^{1/n} \geq \frac{c}{\sqrt{n}}$, where $c > 0$ is an absolute constant and $|\cdot|$ stands for the Lebesgue measure. This is achieved using stochastic geometric techniques. More precisely, if K is in isotropic position, we present a method to find centered simplices verifying the above bound that works with extremely high probability. By duality, given a convex body $K \subset \mathbb{R}^n$ we show that there is a simplex S enclosing K *with the same barycenter* such that $\left(\frac{|S|}{|K|}\right)^{1/n} \leq d\sqrt{n}$, for some absolute constant $d > 0$. Up to the constant, the estimate cannot be lessened.

We define the *largest volume ratio* of given convex body $K \subset \mathbb{R}^n$ as $\text{lvr}(K) := \sup_{L \subset \mathbb{R}^n} \text{vr}(K, L)$, where the sup runs over all the convex bodies L . We prove the following sharp lower bound: $c\sqrt{n} \leq \text{lvr}(K)$, for *every* body K (where $c > 0$ is an absolute constant). This result improves the former best known lower bound, of order $\sqrt{\frac{n}{\log \log(n)}}$.

We study the exact asymptotic behaviour of the largest volume ratio for some natural classes of convex bodies. In particular, if K is the unit ball of an unitary invariant norm in $\mathbb{R}^{d \times d}$ (e.g., the unit ball of the p -Schatten class S_p^d for any $1 \leq p \leq \infty$), the unit ball of a tensor norm on the product of ℓ_p spaces or K is unconditional, we show that $\text{lvr}(K)$ behaves as the square root of the dimension of the ambient space.

We also analyse the problem of estimating the volume ratio between projections of two bodies in \mathbb{R}^n onto subspaces of dimension proportional to n .

Keywords: Volume ratio, simplices, convex bodies, random polytopes.

Agradecimientos

A Dany Galicer, por su dirección. Por enseñarme el oficio y formarme como matemático, siempre con paciencia, buen humor y mucha dedicación. Fue un placer trabajar juntos este tiempo.

A Damián Pinasco, con quien trabajamos codo a codo estos años. Por todos sus aportes a este trabajo, por hacerlo siempre de forma divertida y con una mirada única de la matemática. Gracias por la generosidad y la confianza.

A Dani Carando, por su apoyo como docente y como consejero y por abrirme las puertas del grupo de trabajo.

A todo el grupo de análisis funcional, un grupo excelente con el que compartir ideas. Fueron clave para llevar adelante este doctorado.

A mis compañeros de oficina y amigos que hice todo este tiempo, habría sido imposible sin ustedes.

A los jurados, Károly Böröczky, Pablo De Nápoli y Julián Haddad por la lectura atenta de la tesis, las observaciones y correcciones.

A mi familia, por su la compañía permanente, por su apoyo y por bancarme siempre.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	7
1.1. Conceptos básicos	7
1.2. Desigualdades de volumen	9
1.3. Algunas posiciones especiales	10
1.3.1. Posiciones de John y Löwner	10
1.3.2. Posición isotrópica	13
1.3.3. ℓ -posición	14
2. Razón simplicial	17
2.1. Introducción	17
2.2. Contexto histórico	19
2.3. Razón simplicial interna y dualidad	22
2.4. Un enfoque probabilístico	27
2.5. El caso del cubo y el paralelepípedo de Dvoretzky y Rogers .	33
2.5.1. Versión aleatoria del paralelepípedo de Dvoretzky y Rogers	34
3. Cotas generales	37
3.1. Razón de volumen general	37
3.1.1. Propiedades elementales	38
3.2. Ejemplos	41
3.2.1. Polítopos	42
3.2.2. Cuerpos incondicionales	44
3.3. Cotas para algunas clases naturales de cuerpos convexos . . .	47
3.3.1. Posición de Rudelson	47
3.3.2. Normas unitariamente invariantes	50
3.3.3. Normas tensoriales	53
3.4. Procesos Gaussianos y la desigualdad de Chevet	56
4. Cotas inferiores	61
4.1. Cotas inferior para la razón de volumen	61
4.2. Polítopos de Gluskin	62

5. Razón de volumen entre proyecciones de cuerpos convexos	71
5.1. Razón de volumen de proyecciones	71
5.2. Polítopos Gaussianos	75

Introducción

Dado un espacio vectorial real de dimensión finita equipado con una norma, su bola unitaria es un conjunto convexo, compacto con interior no vacío (lo que llamamos un *cuerpo convexo*). Por otro lado, mediante el funcional de Minkowski, todo cuerpo convexo centralmente simétrico resulta la bola unitaria de alguna norma. Por lo tanto hay una fuerte conexión entre la geometría de un espacio de Banach y su estructura métrica.

Clásicamente la geometría era estudiada en dimensiones bajas, usualmente dos o tres. El estudio de propiedades geométricas de espacios de Banach de dimensiones altas tuvo un gran desarrollo durante las últimas décadas, como herramienta para el estudio de espacios de dimensión infinita. Más adelante, la geometría de espacios de dimensiones altas despertó interés en si misma. En este contexto se estudian familias de objetos de diferentes dimensiones haciendo foco en el comportamiento asintótico de ciertas cantidades. Usualmente la dependencia es con respecto a la dimensión del espacio ambiente.

Para muchas aplicaciones en análisis geométrico asintótico, geometría convexa o incluso optimización es útil aproximar un cuerpo convexo dado por otro. Por ejemplo, la desigualdad clásica de Rogers-Shephard [AAGM15, Teorema 1.5.2] establece que, para un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$, el volumen del *cuerpo de diferencias* $K - K$ es “comparable” con el volumen de K . Más precisamente, $|K - K|^{\frac{1}{n}} \leq 4|K|^{\frac{1}{n}}$. Rogers y Shephard también probaron que, con la condición adicional de que K tenga baricentro en el origen, el *cuerpo de intersección* $K \cap (-K)$ tiene volumen “grande”. Es decir, $|K \cap (-K)|^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2}|K|^{\frac{1}{n}}$. Estas desigualdades implican que un cuerpo convexo está incluido (o contiene) un cuerpo centralmente simétrico cuyo volumen es lo suficientemente “chico” (o “grande”). En muchos casos esto permite aprovechar la simetría de estos cuerpos para concluir algo sobre K .

Otro ejemplo interesante de Milman y Pajor [MP89, Sección 3] muestra que

$$L_K \leq c \inf \left\{ \left(\frac{|W|}{|K|} \right)^{\frac{1}{n}} : W \text{ es incondicional y contiene a } K \right\},$$

donde L_K denota la constante de isotropía de $K \subset \mathbb{R}^n$ (ver [BGVV14,

Sección 2.3.1]) y $c > 0$ es una constante absoluta. Por lo tanto, tener una buena aproximación volumétrica de K por un cuerpo incondicional provee información geométrica estructural de K .

Quizás la aplicación más notable de este tipo de aproximaciones se puede ver estudiando el elipsoide de John/Löwner (elipsoide de volumen maximal/minimal respectivamente). John probó que, si la bola euclídea es el elipsoide de volumen maximal dentro de K , podemos descomponer la identidad como combinación lineal de operadores de rango uno definidos por puntos de contacto [AAGM15, Teorema 2.1.10]. Este resultado fue complementado por Ball [Bal92] quien mostró que esta propiedad caracteriza al elipsoide de John. La distribución de los puntos de contacto entre un cuerpo convexo y su elipsoide de volumen maximal también fue usada por Dvoretzky y Rogers [DR50] para probar que todo espacio de Banach de dimensión infinita admite una serie que converge incondicional pero no absolutamente. También juega un rol clave en el estudio de distancias entre cuerpos, ver [TJ89] para un desarrollo completo sobre este tema. Referimos a [Mat02, Gru07, GPT01, Las92, Las98, Pel83] para diversos resultados y aplicaciones que involucran estos elipsoides extremales.

Una cantidad natural que relaciona un cuerpo K con sus elipsoides de volumen maximal viene dada por la *razón de volumen* “estándar”, que fue introducida por Szarek y Tomczak-Jaegermann en [STJ80],

$$\text{vr}(K) = \inf \left\{ \left(\frac{|K|}{|\mathcal{E}|} \right)^{\frac{1}{n}} : \mathcal{E} \text{ es un elipsoide contenido en } K \right\}. \quad (1)$$

Usando la desigualdad de Brascamp-Lieb, Ball mostró que $\text{vr}(K)$ es maximal cuando K es un símlice. El caso extremo, sobre todos los cuerpos centralmente simétricos, viene dado por el cubo (see [AAGM15, Teorema 2.4.8]).

Una generalización de la razón de volumen “estándar” fue presentada por Giannopoulos y Hartzoulaki [GH02] y también desarrollada por Gordon, Litvak, Meyer y Pajor [GLMP04]: dados dos cuerpos convexos K y L en \mathbb{R}^n la *razón de volumen* del par (K, L) se define como

$$\text{vr}(K, L) := \inf \left\{ \left(\frac{|K|}{|T(L)|} \right)^{\frac{1}{n}} : T(L) \text{ está contenido en } K \right\}, \quad (2)$$

dónde el ínfimo (en realidad un mínimo) es tomado sobre todas las transformaciones afines T .

En otras palabras, $\text{vr}(K, L)$ mide cuán bien puede aproximarse K por una imagen afín de L . Notar que la cantidad clásica $\text{vr}(K)$ es simplemente $\text{vr}(K, B_2^n)$, donde B_2^n es la bola euclídea de \mathbb{R}^n . Es fácil ver que la razón de volumen es invariante por transformaciones afines, lo que significa que depende sólo de la clase afín de K y L . Este invariante ya se puede encontrar en

el trabajo de MacBeath [Mac51a]. La razón de volumen cúbica, $\text{vr}(B_\infty^n, K)$, fue estudiada por Ball [Bal89] quien probó que para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$\text{vr}(B_\infty^n, K)\text{vr}(K, B_2^n) \sim \text{vr}(B_\infty^n, B_2^n).$$

También aparece en el trabajo de Babenko [Bab88] (bajo el nombre de volumen de soporte) y fue estudiada por Pełczynski y Szarek en [PS91]. De hecho, una cota para la razón de volumen cúbica ya puede encontrarse en [DR50].

Tratamos el problema de acotar la *razón simplicial externa* para un cuerpo convexo K . Es decir,

$$S^{\text{out}}(K) := \text{vr}(S, K)$$

donde S es un símplice (la cápsula convexa de $n + 1$ puntos afinmente independientes en \mathbb{R}^n). Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ buscamos símplices que lo contengan de volumen “chico”. Todo esto generaliza, para dimensiones altas, un problema de geometría clásico: dado un conjunto convexo $K \subset \mathbb{R}^2$ encontrar el triángulo de área minimal que lo contenga. En [Gro18], Gross probó que para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^2$ hay un triángulo de a lo sumo el doble de área conteniéndolo. Para dimensiones mayores el problema de encontrar el valor exacto de la razón simplicial sigue abierto.

Macbeath, en [Mac51a], mostró cómo construir un símplice que contiene a un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $|S| \leq n^n |K|$, obteniendo así que $S^{\text{out}}(K) \leq n$. Chakerian [Cha73, Corollary 5] mejoró esta cota mostrando que

$$S^{\text{out}}(K) \leq n^{\frac{n-1}{n}} \approx n.$$

La mejor estimación hasta ahora se puede obtener aplicando una cota general para razones de volumen de Giannopoulos y Hartzoulaki [GH02],

$$S^{\text{out}}(K) \leq \sqrt{n} \log(n). \quad (3)$$

En este trabajo mostramos la siguiente cota que resulta asintóticamente ajustada,

$$S^{\text{out}}(K) \leq \sqrt{n}.$$

De hecho, exhibimos algo más fuerte (Teorema 2.3.4): dado $K \subset \mathbb{R}^n$ hay un símplice que lo contiene con el *mismo baricentro* tal que

$$\left(\frac{|S|}{|K|} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt{n}.$$

Trabajamos con una versión dual de este problema y probamos que, dado un cuerpo $K \subset \mathbb{R}^n$, existe un símplice contenido en él con el *mismo baricentro* tal que

$$\left(\frac{|K|}{|S|}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt{n}.$$

Las técnicas que utilizamos nos permiten obtener un resultado de naturaleza probabilística, el Teorema 2.4.6, que puede ser visto como un algoritmo aleatorio para encontrar dichos símplices.

Para encarar el problema para otras clases de cuerpos convexo definimos la *máxima relación de volumen* (lvr por sus siglas en inglés) de un cuerpo convexo K como

$$\text{lvr}(K) := \sup_{L \subset \mathbb{R}^n} \text{vr}(K, L),$$

donde el supremo se toma sobre todos los cuerpos convexos $L \subset \mathbb{R}^n$.

La cota (3) puede ser escrita como

$$\text{lvr}(K) \leq \sqrt{n} \log(n), \quad (4)$$

para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$. En muchos casos, la máxima razón de volumen de un cuerpo puede ser acotada por la raíz cuadrada de la dimensión del espacio ambiente. De hecho conjeturamos que el factor logarítmico en (4) puede ser removido. Mostramos esto para muchas clases naturales de cuerpos convexos.

Estudiamos el caso en el que $K \subset \mathbb{R}^{d \times d}$ es la bola unitaria de las normas p -Schatten. Estas normas son generalizaciones de la norma clásica de Hilbert-Schmidt para operadores. Referimos a [KMP98, GP07, BCE13, RV16, KPT18] donde pueden encontrarse muchas propiedades de ellas. Estos ejemplos surgen de normas unitariamente invariantes. En el Teorema 3.3.6 probamos que si $K \subset \mathbb{R}^{d \times d}$ es la bola unitaria de una norma unitariamente invariante, entonces

$$\text{lvr}(K) \leq d.$$

Otra clase natural de cuerpos convexos que tratamos son las bolas unitarias de normas tensoriales en productos de espacios ℓ_p^n . Estas normas fueron largamente estudiadas ya que pueden ser relacionadas con espacios de formas multilineales o polinomios homogéneos (ver por ejemplo [DF92, Din99, Flo97]). Estudiamos el caso de las normas inyectiva y proyectiva y sus versiones análogas simétricas. Más precisamente, probamos que si E es cualquiera

de los espacios $\otimes_{\varepsilon}^m \ell_p^n$, $\otimes_{\varepsilon_s}^{m,s} \ell_p^n$, $\otimes_{\pi}^m \ell_p^n$ o $\otimes_{\pi_s}^{m,s} \ell_p^n$, entonces

$$\text{lvr}(B_E) \leq \sqrt{\dim(E)}.$$

Adicionalmente, mostramos que si $K \subset \mathbb{R}^n$ es incondicional, entonces

$$\text{lvr}(K) \leq \sqrt{n}.$$

También tratamos el problema de encontrar una cota inferior para la razón de volumen. Khrabrov [Khr01], usando una construcción de Gluskin [Glu81], probó que para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\text{lvr}(K) \geq \sqrt{\frac{n}{\log \log(n)}}. \quad (5)$$

Para quitar el doble logaritmo en (5) refinamos las técnicas de Khrabrov. Probamos en el Teorema 4.2.9 que para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\text{lvr}(K) \geq \sqrt{n}.$$

Si combinamos esta cota con las cotas superiores que mencionamos anteriormente vemos que esta es la mejor cota asintótica general posible.

En [Rud04], Rudelson estudió el diámetro del compacto de Banach-Mazur para distancias relacionadas con proyecciones o secciones de cuerpos convexos.

Basados en el enfoque de Rudelson analizamos el problema de estimar la razón de volumen entre proyecciones de dos cuerpos en \mathbb{R}^n en subespacios de dimensión proporcional a n . Probamos en el Teorema 5.1.1 que para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ y $k \sim n$ hay un cuerpo convexo Z tal que

$$\text{vr}(QK, QZ) \geq d \sqrt{\frac{k}{\log \log k}},$$

para toda proyección ortogonal $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de rango k . Mediante un argumento de polaridad, obtenemos una versión dual del resultado: para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ y $k \sim n$ existe un cuerpo convexo Z tal que

$$\text{vr}(Z \cap E, K \cap E) \geq d \sqrt{\frac{k}{\log \log k}},$$

para todo subespacio $E \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión k .

El trabajo está organizado en cinco capítulos.

En el Capítulo 1 presentamos la notación y algunas definiciones básicas de geometría convexa. También repasamos algunas desigualdades que involucran el volumen de un cuerpo convexo y serán de utilidad. Finalmente,

introducimos algunas posiciones (imágenes afines) clásicas de cuerpos convexos como la posición de John/Löwner, la ℓ -posición o la posición isotrópica. También presentamos las propiedades principales de estas posiciones que son de nuestro interés.

En el Capítulo 2 encaramos el problema de acotar la razón simplicial exterior. Para eso establecemos una versión dual del mismo: para un cuerpo convexo K buscamos símlices “grandes” contenidos en él. Para poder establecer adecuadamente la correspondencia entre estas dos versiones necesitamos aplicar la desigualdad de Blaschke-Santaló [AAGM15, Theorem 1.5.10], que relaciona el volumen de un cuerpo convexo con el de su polar. Para eso necesitamos que los símlices verifiquen una condición adicional: que compartan el baricentro con el cuerpo convexo involucrado.

Para probar que $\text{vr}(K, S) \leq \sqrt{n}$ y $\text{vr}(S, K) \leq \sqrt{n}$, para $K, S \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo arbitrario y un símplex respectivamente, usamos el método probabilístico. La idea es ver que si uno elige aleatoriamente elementos de un conjunto específico, con probabilidad positiva el resultado pertenece a una clase preestablecida. Esto es lo que nos permite obtener el Teorema 2.4.6.

También presentamos una versión no probabilística del mismo resultado basada en una construcción de Dvoretzky y Rogers [DR50], que tiene la desventaja de requerir un cálculo explícito de algunos puntos de contacto. Basados en un resultado de Pivovarov [Piv10] mostramos una versión probabilística de esta construcción.

El Capítulo 3 está dedicado a acotar la máxima razón de volumen para algunas clases naturales de cuerpos convexos. Primero probamos algunas propiedades elementales de este invariante y mostramos algunos ejemplos para los que pueden obtenerse cotas ajustadas. Repasamos la demostración de Giannopoulos y Hartzoulaki de la mejor cota general conocida [GH02], que está basada en una combinación de una posición particular introducida por Rudelson [Rud00] junto con la desigualdad de Chevet [AAGM15, Theorem 9.4.1]. Aprovechamos propiedades geométricas de algunas clases de cuerpos convexos y usamos las técnicas mencionadas para ver que, para estas clases, la máxima razón de volumen puede ser acotada por la raíz cuadrada de la dimensión del espacio ambiente.

En el Capítulo 4 probamos una cota inferior para $\text{lvr}(K)$, mejorando la mejor cota conocida hasta ahora debida a Krabrov [Khr01]. Presentamos la definición de los politopos aleatorios introducidos por Gluskin [Glu81] y también usados por Khrabrov para probar que $\text{lvr}(K) \geq \sqrt{\frac{n}{\log \log(n)}}$. Hacemos algunos cambios sutiles pero importantes en los argumentos de Khrabrov que nos permiten probar que $\text{lvr}(K) \geq \sqrt{n}$ en el caso en el que $K \subset \mathbb{R}^n$ tiene algunas propiedades geométricas especiales. Para extender la cota a todo cuerpo convexo explotamos dos resultados significativos. El primero es sobre concentración de masa en cuerpos isotrópicos y es debido a Paouris [Pao06], mientras que el segundo es la solución de Klartag a una versión

isomorfa de la conjetura del hiperplano.

En el Capítulo 5 estudiamos la razón de volumen entre proyecciones de dos cuerpos convexos. Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ y k proporcional a n , probamos la existencia de un cuerpo Z tal que, para toda proyección ortogonal Q de rango k , la razón de volumen entre QK y QZ es “grande”. Superamos algunos tecnicismos para poder lidiar con cualquier proyección usando un argumento de ε -redes y una versión Gaussiana de los politopos aleatorios.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos el material necesario sobre la teoría de cuerpos convexos y el análisis geométrico asintótico que usaremos a lo largo del trabajo. Introducimos algunas definiciones básicas de convexidad clásica y establecemos la notación correspondiente. También enunciamos algunas desigualdades importantes que tendrán un rol clave para obtener nuestros resultados principales. En la Sección 1.3 discutimos posiciones particulares de cuerpos convexos que mostraron ser especialmente útiles. En [AAGM15, Pis99, BGVV14, TJ89] puede encontrarse un desarrollo completo de los temas expuestos en este capítulo.

1.1. Conceptos básicos

Con un *cuerpo convexo* (o simplemente un *cuerpo*) $K \subset \mathbb{R}^n$ nos referimos a un conjunto compacto, convexo con interior no vacío. Un cuerpo K es *centralmente simétrico* si $x \in K$ implica $-x \in K$. Dada una norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^n escribimos

$$B_X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\},$$

la bola unitaria del espacio $X := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Las bolas unitarias son, obviamente, centralmente simétricas. En el otro sentido, mediante el funcional de Mikowski podemos definir una norma en \mathbb{R}^n asociada a un cuerpo centralmente simétrico:

$$\|x\|_K := \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda K\}.$$

Escribimos $X_K = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ y tenemos que $B_{X_K} = K$. Por lo tanto, el estudio de cuerpos centralmente simétricos se corresponde al estudio de diferentes estructuras de \mathbb{R}^n como espacio normado. Luego de fijar una estructura euclídea en \mathbb{R}^n podemos asociar a cada cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$,

con el origen como punto interior, su *cuerpo polar*,

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sup_{x \in K} \langle x, y \rangle \leq 1\}.$$

La condición de que el origen sea un punto interior de K es necesaria para que K° sea un conjunto acotado. Notar que, por definición, cuando K es centralmente simétrico, K° es la bola unitaria del espacio dual X_K^* . Una propiedad importante de la polaridad es que revierte inclusiones, es decir, si $L \subset K$, $K^\circ \subset L^\circ$. También se sigue directamente de la definición que, para todo operador invertible T ,

$$(T(K))^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ). \quad (1.1)$$

Una familia importante de cuerpos convexos son los *politopos*, la *cápsula convexa* de algunos puntos v_1, \dots, v_k , esto es, el conjunto

$$\text{conv}\{v_1, \dots, v_k\} := \left\{ \sum_{i=1}^k t_i v_i \mid t_i \geq 0 \text{ and } \sum_{i=1}^k t_i = 1 \right\}.$$

escribiremos $\text{absconv}\{v_1, \dots, v_k\}$ para una *cápsula convexa absoluta*, o sea, $\text{conv}\{\pm v_1, \dots, \pm v_k\}$. El polar de un politopo puede computarse fácilmente de la siguiente forma.

Ejemplo 1.1.1. Sea $K = \text{conv}\{v_1 \dots v_k\}$, entonces

$$K^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \sum_{i=1}^k t_i v_i \rangle \leq 1 \text{ for all } \sum_{i=1}^k t_i = 1 \right\}$$

y por lo tanto, $x \in K^\circ$ si y sólo si $\langle x, v_i \rangle \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq k$. En otras palabras, K° es la intersección de los hiperplanos $P_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v_i \rangle \leq 1\}$.

Durante este trabajo analizaremos algunos parámetros geométricos asociados a cuerpos convexos en \mathbb{R}^n . Estamos interesados en estimar el comportamiento asintótico de estos parámetros como funciones de la dimensión del espacio ambiente y no de computar su valor exacto. Para dos sucesiones de números reales a_n y b_n escribimos $a_n \leq b_n$ cuando existe una constante $C > 0$ (independiente de n) tal que $a_n \leq C b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escribimos $a_n \sim b_n$ si $a_n \leq b_n$ y $b_n \leq a_n$. Probablemente una de las fórmulas asintóticas más famosa es la fórmula de aproximación de Stirling para $n!$. La usaremos una y otra vez. Afirma que:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (1.2)$$

También se puede generalizar para aproximar a la función Gamma,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dx,$$

como sigue

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

Nos concentraremos en propiedades volumétricas de cuerpos convexos. Por volumen de $K \subset \mathbb{R}^n$ nos referimos a su medida de Lebesgue que denotaremos con $|K|$.

Ejemplo 1.1.2 (Volumen de las Bolas p). Una aplicación directa de la fórmula de Stirling es estimar el comportamiento asintótico del volumen de las bolas unitarias de espacios $\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ que escribimos como B_p^n . Un cálculo estándar (ver por ejemplo [Pis99, ecuación (1.17)]) muestra que

$$|B_p^n| = \frac{\left(2\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right)},$$

que aplicando la fórmula de Stirling se comporta como

$$|B_p^n|^{\frac{1}{n}} \sim n^{-\frac{1}{p}}.$$

1.2. Desigualdades de volumen

Ahora enunciaremos algunas desigualdades que involucran el volumen de cuerpos convexos. La primera es la consabida desigualdad de Blaschke-Santaló que acota el producto entre el volumen de un cuerpo convexo y el de su polar. Esta cantidad recibe el nombre de *producto de Mahler* de K , y por la ecuación (1.1), es invariante por transformaciones afines. El siguiente teorema muestra que, entre todos los cuerpos convexos centralmente simétricos, el producto de Mahler se maximiza en elipsoides. Blaschke [Bla17] la probó para $n = 3$ y Santaló [San49] probó el caso general. Meyer y Pajor, en [MP90], dieron una prueba más simple usando el proceso de simetrización de Steiner.

Teorema 1.2.1 (Desigualdad de Blaschke-Santaló). *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo centralmente simétrico, entonces*

$$|K||K^\circ| \leq |B_2^n|^2.$$

Mahler conjeturó que, entre todos los cuerpos con el origen en su interior, el símplice minimiza el producto de Mahler. Él lo probó para $n = 2$ [Mah39]. El siguiente teorema es una forma reversa del anterior y muestra que vale una versión asintótica de la conjetura de Mahler. Fue dada por Bourgain y Milman [BM87]. Una prueba simplificada puede encontrarse en [AAGM15, Teorema 8.2.2].

Teorema 1.2.2. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo centralmente simétrico, entonces*

$$(|K||K^\circ|)^{\frac{1}{n}} \geq |B_2^n|^{\frac{2}{n}}.$$

Las siguientes desigualdades son de Rogers y Shephard [RS57] (ver también [AAGM15, Teorema 1.5.2]). Nos permitirán reducir varios problemas al caso de cuerpos centralmente simétricos. Dado K , el *cuerpo de diferencias* de K se define como el cuerpo convexo centralmente simétrico $D(K) = K - K$. Éste es el menor cuerpo centralmente simétrico que contiene a K . Por otro lado, el mayor cuerpo centralmente simétrico contenido en K es $K \cap (-K)$. Con $\text{bar}(K)$ nos referimos al *baricentro* (o centroide) de K que se define como

$$\text{bar}(K) = \frac{1}{|K|} \int_K x \, dx = 0.$$

El siguiente teorema afirma que, en el caso en el que $\text{bar}(K) = 0$, los tres cuerpos mencionados anteriormente tienen volumen comparable.

Teorema 1.2.3. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, entonces*

$$|K - K| \leq \binom{2n}{n} |K|.$$

En el caso en que $\text{bar}(K) = 0$ también tenemos que

$$|K \cap (-K)| \geq 2^{-n} |K|.$$

1.3. Algunas posiciones especiales

Decimos que K' es una *posición* de K si existe una transformación afín invertible $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $T(K) = K'$. A continuación presentamos algunas posiciones clásicas de cuerpos convexos.

1.3.1. Posiciones de John y Löwner

Unas de las posiciones clásicas más conocidas son las posiciones de John y Löwner. Un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ está en *posición de John* si la bola euclídea es el elipsoide de volumen maximal contenido en K y se dice que está en *posición de Löwner* si B_2^n es el elipsoide de volumen minimal que contiene a K . Todo cuerpo convexo admite una única (salvo transformaciones ortogonales) posición de John y de Löwner. La existencia de dichas posiciones se puede deducir fácilmente de un argumento estándar de compacidad. Según Busemann [Bus50, Bus55], Löwner descubrió la unicidad del elipsoide de volumen minimal pero comunicó el resultado oralmente. John, en [Joh48], extendió la regla de multiplicadores de Lagrange al caso en el

que las condiciones adicionales son inecuaciones (en lugar de ecuaciones). Como consecuencia de esto probó que, cuando B_2^n es el elipsoide de volumen maximal en K tenemos que

$$B_2^n \subset K \subset nB_2^n. \quad (1.3)$$

También señaló que cuando K es centralmente simétrico n puede ser reemplazado por \sqrt{n} , es decir,

$$B_2^n \subset K \subset \sqrt{n}B_2^n. \quad (1.4)$$

De hecho, John también dio una descripción de los puntos de contacto entre K y B_2^n en el caso en el que K está en posición de John. Con un *punto de contacto* entre B_2^n y K nos referimos a un punto x , que está en $\partial B_2^n \cap \partial K \cap \partial K^\circ$. Notar que, si $B_2 \subset K$ y $x \in \partial B_2^n \cap \partial K$, también se tiene que $x \in \partial K^\circ$. Escribimos $x_1 \otimes x_2$ para referirnos al operador de rango uno, $x_1 \otimes x_2(y) = \langle x_1, y \rangle x_2$. En el caso en que x tiene norma uno, $x \otimes x$ es la proyección ortogonal en la recta generada por x . El siguiente teorema es de John y fue complementado por Ball [Bal92].

Teorema 1.3.1. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. La bola euclídea B_2^n es el elipsoide de volumen maximal contenido en K si y sólo si $B_2^n \subset K$ y existen puntos de contacto $(x_j)_{j=1}^m$ y números positivos $(c_j)_{j=1}^m$ tales que*

$$\sum_{j=1}^m c_j x_j = 0$$

y

$$Id = \sum_{j=1}^m c_j x_j \otimes x_j. \quad (1.5)$$

Nos referimos a (1.5) como una *descomposición de la identidad*. No es difícil verificar que cualquier descomposición de la identidad debe satisfacer que $\sum c_i = n$. Observar que, si $\mathcal{E} = T(B_2^n)$ es un elipsoide centralmente simétrico contenido en K , \mathcal{E}° es un elipsoide que contiene a K° . Además, por la ecuación (1.1),

$$|\mathcal{E}||\mathcal{E}^\circ| = |B_2^n|^2.$$

Por lo tanto, si \mathcal{E} es el elipsoide centralmente simétrico de volumen maximal dentro de K , \mathcal{E}° debe ser el elipsoide de volumen minimal que contiene a K° . Entonces, si K está en posición de John, K° está en posición de Löwner. Como, por definición, los puntos de contacto en ambos casos son los mismos, podemos formar también una descomposición de la identidad con estos puntos en el caso en el que K está en posición de Löwner.

Como una aplicación de la descomposición de la identidad presentamos una caracterización de la posición de John para el caso del símplice.

Ejemplo 1.3.2. Decimos que un n -símplice, la capsula convexa de $n + 1$ puntos afinmente independientes, es un *símplice regular* si todos sus vértices son equidistantes. Mostraremos que el símplice en posición de Löwner es un símplice regular. Supongamos que $S := \text{conv}\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ está en posición de Löwner. Notar que, $n + 1$ es la cantidad mínima de vértices que se necesita para formar una descomposición de la identidad. Entonces, existen números positivos $(c_j)_{j=1}^{n+1}$ tal que $Id = \sum_{j=1}^{n+1} c_j v_j \otimes v_j$. Luego, tenemos que

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} c_j \langle v_j, v_k \rangle v_j = c_k v_k + \sum_{j \neq k} c_j \langle v_j, v_k \rangle v_j. \quad (1.6)$$

Por otro lado, como $\sum_{j=1}^{n+1} c_j v_j = 0$,

$$v_k = -\frac{1}{c_k} \sum_{j \neq k} c_j v_j. \quad (1.7)$$

Combinando (1.6) y (1.7) obtenemos,

$$\begin{aligned} 0 &= (c_k - 1) \left(-\frac{1}{c_k} \sum_{j \neq k} c_j v_j \right) + \sum_{j \neq k} c_j \langle v_j, v_k \rangle v_j \\ 0 &= \sum_{j \neq k} c_j \left(\langle v_j, v_k \rangle - \frac{c_k - 1}{c_k} \right) v_j. \end{aligned}$$

Como cualquier elección de n vértices debe ser linealmente independiente, tenemos,

$$\langle v_j, v_k \rangle = \frac{c_k - 1}{c_k},$$

para todo $1 \leq j, k \leq n + 1$. Lo que muestra que todos los c_k son iguales, y entonces $c_k = \frac{n}{n+1}$. Además, el ángulo entre todos los vértices es el mismo, lo que implica que son equidistantes. El polar de S es un símplice en posición de John con caras dadas por $F_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v_k \rangle = 1\}$. Sus vértices se pueden computar como

$$w_k = \bigcap_{i \neq k} F_i.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \langle w_k, v_i \rangle v_i = \frac{n}{n+1} \sum_{i \neq k} v_i + \langle w_k, v_k \rangle v_k \\ &= \frac{n}{n+1} (-v_k + \langle w_k, v_k \rangle v_k) = \frac{n}{n+1} (\langle w_k, v_k \rangle - 1) v_k. \end{aligned} \quad (1.8)$$

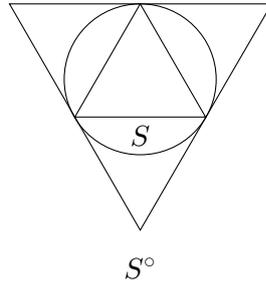


Figura 1.1: Un símplice regular y su polar como en el Ejemplo 1.3.2.

Luego,

$$\langle w_k, v_k \rangle = \frac{n}{n+1} (\langle w_k, v_k \rangle - 1) \langle v_k, v_k \rangle.$$

Por lo tanto tenemos que,

$$\langle w_k, v_k \rangle = -n.$$

De (1.8) deducimos que $S^\circ = -nS$.

1.3.2. Posición isotrópica

Otra posición útil surge de la mecánica clásica y es llamada la *posición isotrópica*. Decimos que un cuerpo convexo está en posición isotrópica (o simplemente que es isotrópico) si tiene volumen uno y satisface las siguientes condiciones:

- $\text{bar}(K) = 0$,
- $\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = L_K^2 \quad \forall \theta \in S^{n-1}$,

donde L_K es una constante independiente de θ , que se llama la *constante isotrópica* de K . Notar que, la posición isotrópica puede ser entendida en términos de la medida uniforme sobre K . Si K es isotrópico, esta es una medida de probabilidad con esperanza cero y matriz de covarianza un múltiplo de la identidad. Es sabido que todo cuerpo convexo admite una única (salvo transformaciones ortogonales) posición isotrópica (ver por ejemplo [BGVV14, Proposición 2.3.3.]). Luego, podemos definir la constante isotrópica de un cuerpo convexo K como la constante isotrópica de la imagen afín isotrópica de K . La siguiente proposición muestra que L_K siempre está acotada inferiormente. Su demostración es simple y puede ser encontrada, por ejemplo, en [AAGM15, Proposición 10.1.8].

Proposición 1.3.3. *Para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$,*

$$L_K \geq L_{B_2^n} \geq 1.$$

Vale mencionar que no se sabe si la constante isotrópica esta acotada superiormente por una constante absoluta. Esta es quizás la principal pregunta abierta en el área y tiene muchas formulaciones equivalentes. El origen de esta pregunta es la llamada *conjetura del hiperplano*, que pregunta si todo cuerpo centrado de volumen uno tiene una sección determinada por la intersección con un hiperplano por el origen cuyo volumen es mayor que alguna constante absoluta $c > 0$. La conjetura del hiperplano aparece por primera vez en el trabajo de Bourgain [Bou86], pero fue enunciada de esta forma en un artículo de Milman y Pajor [MP89], donde se prueban distintas formas equivalentes de la conjetura. La mejor cota general conocida es $L_K \leq cn^{\frac{1}{4}}$, que fue dada por Klartag [Kla06] y mejoró la estimación anterior $L_K \leq cn^{\frac{1}{4}} \log n$ que es de Bourgain [Bou91].

A continuación enunciamos dos propiedades de los cuerpos isotrópicos que usaremos más adelante. El primero es un resultado conocido de Kanner, Lovász y Simonovits [KLS95, Teorema 4.1], que afirma que los cuerpos isotrópicos contienen una bola euclídea “grande”.

Lema 1.3.4. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo isotrópico, entonces*

$$\sqrt{\frac{n+2}{n}} L_K B_2^n \subset K. \quad (1.9)$$

El segundo está relacionado con un buen comportamiento de las marginales. Antes de enunciarlo necesitamos una definición. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Decimos que f es ψ_1 si existe $\lambda > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} e^{\frac{|f(\omega)|}{\lambda}} d\mu < \infty.$$

en ese caso la norma ψ_1 (o norma subexponencial) se define como sigue,

$$\|f\|_{\psi_1} := \inf\{\lambda > 0 \mid \int_{\Omega} e^{\frac{|f(\omega)|}{\lambda}} d\mu \leq 2\}.$$

La norma ψ_1 es un caso particular de las normas de Orlicz. Para más información de este marco general ver por ejemplo [AAGM15, Subsección 3.5.2]

El siguiente lema da una cota para la norma ψ_1 de las marginales de un cuerpo isotrópico. Una prueba de él se puede encontrar en [BGVV14, Proposición 3.1.2].

Lema 1.3.5. *Existe una constante absoluta $C > 0$ tal que para todo cuerpo isotrópico $K \subset \mathbb{R}^n$ y todo $\theta \in S^{n-1}$ se tiene que*

$$\|\langle \cdot, \theta \rangle\|_{L_{\psi_1}} \leq CL_K. \quad (1.10)$$

1.3.3. ℓ -posición

Ahora introduciremos otra posición especial. Primero necesitamos algunas definiciones. Dado un cuerpo centralmente simétrico K el *ancho promedio* de K se define como

$$\omega(K) = \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_{K^\circ} d\sigma(\theta),$$

donde σ es la medida de Haar normalizada en S^{n-1} . El promedio esférico de una norma (en realidad de cualquier función homogénea) se relaciona con su promedio Gaussiano. Si G es un vector con coordenadas Gaussianas independientes, $\frac{G}{\|G\|_2}$ está distribuido uniformemente en la esfera, más aún, $\|G\|_2$ y $\frac{G}{\|G\|_2}$ son independientes. Entonces, los promedios esférico y Gaussiano difieren en el factor $\mathbb{E}(\|G\|_2)$. Un cálculo estándar junto con la fórmula de Stirling muestra que

$$\mathbb{E}(\|G\|_2) = \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \sim \sqrt{n}.$$

Entonces, si γ_n es la medida Gaussiana estándar en \mathbb{R}^n , vale lo siguiente,

$$\sqrt{n} \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_{K^\circ} d\sigma(\theta) \sim \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_{K^\circ} d\gamma_n(x). \quad (1.11)$$

Dado un cuerpo convexo K definimos,

$$\ell(K) := \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K d\gamma_n(x).$$

Con esta definición, la ecuación (1.11) toma la forma

$$\ell(K) \sim \sqrt{n}\omega(K^\circ). \quad (1.12)$$

La definición más usual del parámetro ℓ es usando el segundo momento en lugar del primer momento, o sea

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^2 d\gamma_n(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aplicando una desigualdad del tipo Kahane-Khinchine para seminormas (ver por ejemplo [TJ89, ecuación (4.5)]) vemos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^2 d\gamma_n(x) \right)^{\frac{1}{2}} \sim \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K d\gamma_n(x). \quad (1.13)$$

Por lo tanto, desde un punto de vista asintótico, ambas definiciones de ℓ son equivalente. Usamos el primer momento para que la relación con el ancho

promedio resulte más transparente. El parámetro ℓ fue introducido por Figiel y Tomczak-Jaegermann en [FTJ79] en el contexto de normas de operadores. Ellos probaron que todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ admite una posición \bar{K} tal que

$$\ell(\bar{K})\ell(\bar{K}^\circ) \leq n\text{Rad}(\bar{K}),$$

donde $\text{Rad}(K)$ es la norma de la proyección de Rademacher $R_n : L^2(X_K) \rightarrow L^2(X_K)$. Omitimos las definiciones del caso porque no haremos uso de ellas, más información sobre este tema puede encontrarse en [TJ89] y [Pis99]. Por otro lado, Pisier [Pis79] probó que para todo espacio de Banach X de dimensión n , con $B_X = K$, se tiene,

$$\text{Rad}(K) \leq c \log(d(K, B_2^n) + 1),$$

donde $d(K, \ell_2^n)$ es la distancia de Banach-Mazur entre K y B_2^n ,

$$d(K, \ell_2^n) = \inf\{a \cdot b \mid \frac{1}{a}K \subset TB_2^n \subset bK\},$$

que por el teorema de John está siempre acotado por \sqrt{n} . Juntando todo esto obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.3.6. *Dado un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ existe una posición de K , \tilde{K} tal que $\ell(\tilde{K})\ell(\tilde{K}^\circ) \leq n \log(n + 1)$.*

Terminamos este capítulo con una desigualdad clásica de Urysohn, que relaciona el ancho promedio de un cuerpo convexo con su volumen. Diversas pruebas de ella pueden ser encontradas en [AAGM15, Teorema 1.5.11].

Lema 1.3.7 (Urysohn). *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Entonces,*

$$\omega(K) \geq \left(\frac{|K|}{|B_2^n|} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Aplicando la fórmula de Stirling, la ecuación (1.12), y la desigualdad de Bourgain-Milman Teorema 1.2.2, la desigualdad de Urysohn toma la siguiente forma,

$$\ell(K) \geq \frac{1}{|K|^{\frac{1}{n}}}. \tag{1.14}$$

Capítulo 2

Razón simplicial

En este capítulo tratamos el problema de aproximar un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n por un símplice n -dimensional de volumen similar. Esto es una generalización de una pregunta de geometría clásica relacionada con encontrar triángulos de área mínima que contengan un conjunto convexo plano. En la Sección 2.2 repasamos la rica historia detrás de este problema. Abordamos dos versiones duales de él, es decir, dado un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ aproximarlo por un símplice contenido en él o que lo contenga. Para que estas dos formulaciones sean equivalentes debemos pedirle una propiedad adicional al símplice: que tenga el mismo baricentro que K . Formulamos el problema y probamos la equivalencia entre ambas versiones en la Sección 2.3. En la Sección 2.4 usamos el método probabilístico para probar la existencia de símplices que satisfacen las propiedades deseadas. Obtenemos así nuestro resultado principal, el Teorema 2.4.6, que consiste en un algoritmo probabilístico para encontrar dichos símplices. Finalmente en la Sección 2.5 presentamos una prueba no probabilística del problema usando una construcción clásica de Dvoretzky y Rogers sobre paralelepípedos y cuerpos convexos. Si bien su construcción provee la existencia de un paralelepípedo con las propiedades deseadas puede ser difícil de encontrar explícitamente. También presentamos una versión aleatoria del mismo resultado que nos permite evitar esto.

2.1. Introducción

Con un *símplice* $S \subset \mathbb{R}^n$ nos referimos siempre a un símplice n -dimensional, la cápsula convexa de $n + 1$ puntos afinmente independientes.

Dado un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ definimos la *razón simplicial exterior* de K ,

$$S^{out}(K) := \min \left(\frac{|S|}{|K|} \right)^{1/n},$$

donde el mínimo se toma sobre todos los símplices S en \mathbb{R}^n que contienen a

K . Nuestro objetivo es dar una cota asintótica de la razón simplicial exterior para un cuerpo convexo K cualquiera. Primero observemos que, como todos los símlices pertenecen a la misma clase afin, S^{out} resulta ser un invariante afin de K . De hecho,

$$\begin{aligned} S^{out}(TK) &= \min_{TK \subset S} \left(\frac{|S|}{|TK|} \right)^{1/n} = \min_{TK \subset S} \left(\frac{|T^{-1}(S)|}{|K|} \right)^{1/n} \\ &= \min_{K \subset \tilde{S}} \left(\frac{|\tilde{S}|}{|K|} \right)^{1/n}. \end{aligned}$$

Comencemos con algunos ejemplos para ilustrar el problema.

Ejemplo 2.1.1 (El símlice de volumen minimal para la bola euclídea). Sea $K := B_2^n$, la bola euclídea, y $S \supset B_2^n$ el símlice regular definido en el Ejemplo 1.3.2. Veamos que S es el símlice de volumen minimal que contiene a K . Si no, entonces existe un símlice $T \subset \mathbb{R}^n$ conteniendo a la bola con $\text{vol}(T) < \text{vol}(S)$. Consideremos la transformación lineal $A \in GL(n)$ tal que $A(S) = T$; entonces, $|\det(A)| < 1$. Por lo tanto $A^{-1}(B_2^n)$ es un elipsoide con volumen mayor o igual que $|B_2^n|$ dentro de S , lo que contradice el hecho de que S está en posición de John.

Para computar el volumen del símlice es más fácil trabajar en \mathbb{R}^{n+1} , en el hiperplano $\sum_i x_i = 1$. De esta manera el símlice esta representado como el símlice n -dimensional $\text{conv}\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$, que contiene a la esfera n -dimensional centrada en el punto $(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$ y de radio

$$r = \left\| \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0 \right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}. \quad (2.1)$$

Notar que, mediante esta identificación, S es una cara del símlice $\Delta := \text{conv}\{0, e_1, \dots, e_{n+1}\}$ que tiene volumen $\frac{1}{(n+1)!}$. Si pensamos a este símlice como un cono con base S , el volumen puede ser calculado como

$$|\Delta| = \frac{1}{n+1} |S|_n \left\| \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right) \right\| = \frac{1}{n+1} |S|_n \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Si ahora reescalamos por el radio computado en la ecuación (2.1) obtenemos:

$$|S| = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{n!}. \quad (2.2)$$

Por otro lado, el volumen de la bola euclídea fue calculado en el Ejemplo 1.1.2,

$$|K| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Usando la fórmula de Stirling (ecuación (1.2)) obtenemos entonces

$$\left(\frac{|S|}{|K|}\right)^{\frac{1}{n}} \sim \sqrt{n}.$$

Concluimos que $S^{\text{out}}(B_2^n) \sim \sqrt{n}$.

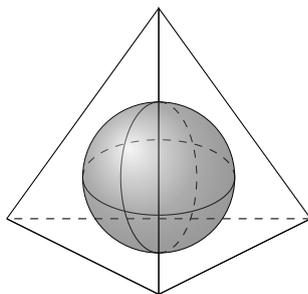


Figura 2.1: El símplice de volumen minimal que contiene a la bola euclídea es el símplice regular que la circunscribe.

Ejemplo 2.1.2 (El cubo). Sea K el cubo $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ y consideremos el símplice $S := \text{conv}\{0, ne_1, \dots, ne_n\}$. Tenemos que $K \subset S$ y

$$\left(\frac{|S|}{|K|}\right)^{\frac{1}{n}} \sim 1.$$

De hecho, como la suma de las coordenadas de todos los puntos en el cubo es menor o igual a n , tenemos que $K \subset S$. El volumen del cubo es 1 y el volumen del símplice es $\frac{\det|ne_1, \dots, ne_n|}{n!} = \frac{n^n}{n!}$. Aplicando la fórmula de Stirling, como siempre se tiene que $S^{\text{out}}(K) \geq 1$, tenemos $S^{\text{out}}(K) \sim 1$.

2.2. Contexto histórico

Antes de enunciar nuestro resultado principal vamos a repasar la historia detrás de este problema. Para el plano, i.e. $n = 2$, fue completamente resuelto por Gross [Gro18] (y generalizado de diferentes formas por Kuperberg [Kup83]): todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^2$ puede ser inscripto en un triángulo de área a lo sumo $2|K|$ (ver Figura 2.3). Esta razón se corresponde (exclusivamente) al caso en el que K es un paralelogramo. En general no se conoce la medida del tetraedro (no necesariamente regular) de menor volumen que contiene a un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^3$. Si $K \subset \mathbb{R}^3$ es un paralelepípedo de volumen uno, entonces el tetraedro de volumen minimal que lo contiene

tiene volumen $9/2$. Es una pregunta abierta si este es el peor caso general. Hasta donde sabemos, para dimensiones mayores ($n \geq 4$) ni siquiera hay cotas conjeturadas.

Una cota n -dimensional para la razón simplicial fue dada por Macbeath en [Mac51a] donde construye un s3mplice conteniendo a un cuerpo convexo K tal que $|S| \leq n^n |K|$, lo que implica la cota $S^{out}(K) \leq n$. Esta cota fue mejorada (pero con el mismo orden asint3tico) en los setenta por Chakerian [Cha73, Corolario 5]. La misma estimaci3n fue recientemente redescubierta por Kanazawa [Kan14, Teorema 1] usando argumentos diferentes. En particular, ambos autores mostraron que

$$S^{out}(K) \leq n^{\frac{n-1}{n}} \approx n. \quad (2.3)$$

Notar que cuando $n = 2$ esta es la cota de Gross.

Es posible mejorar la cota anterior aplicando una desigualdad general para razones de volumen de Giannopoulos y Hartzoulaki [GH02], donde ellos reducen el problema al caso centralmente sim3trico y aplican la desigualdad de Chevet (Teorema 3.3.2) para una posici3n particular de los cuerpos relacionada con la ℓ -posici3n (Teorema 1.3.6). Discutiremos su construcci3n con m3s detalle en el Cap3tulo 3. Como una consecuencia de su resultado tenemos que

$$S^{out}(K) \leq \sqrt{n} \log(n). \quad (2.4)$$

Hasta donde sabemos, esta es la mejor cota obtenida hasta ahora; ver tambi3n el reciente trabajo de Paouris y Pivovarov [PP17, Corolario 5.4], acerca de una versi3n aleatoria de la desigualdad de Urysohn, donde obtienen la misma cota pero con un m3todo diferente.

Por dualidad, acotar la raz3n simplicial exterior est3 relacionado con encontrar s3mplices de volumen grande *dentro* de un cuerpo convexo. La b3squeda de s3mplices de volumen grande contenidos en un cuerpo convexo

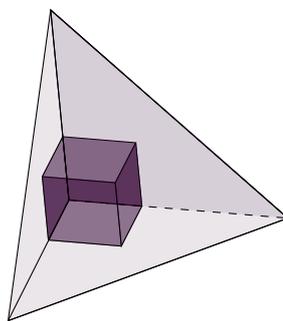


Figura 2.2: El s3mplice $\text{conv}\{0, 3e_1, 3e_2, 3e_3\}$ que contiene al cubo $[0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ como en el Ejemplo 2.1.2.

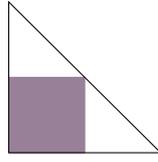


Figura 2.3: Triángulo de área mínima conteniendo al cubo.

tiene una extensa e interesante historia en geometría. Por ejemplo, el estudio de el área máxima de triángulos en un cuerpo plano fue abordado por Blaschke [Bla17] a comienzos del siglo *XX*.

Sas [Sas39] y Macbeath [Mac51b] también consideraron el problema de aproximar un cuerpo convexo por polítopos inscriptos en él. McKinney [McK74] estudió ciertas propiedades de estos símlices de volumen máximo dentro un cuerpo centralmente simétrico. En [HKL96] se trata el caso de símlices de volumen grande dentro de cubos.

En [Syl65] Sylvester plantea una pregunta clásica relacionada con símlices dentro de cuerpos convexos: dados 4 puntos distribuidos uniformemente en un cuerpo plano K , ¿cuál es la probabilidad de que su cápsula convexa sea un triángulo? Esto está directamente relacionado con estimar la esperanza del volumen de un símlice aleatorio con vértices tomados uniformemente en un cuerpo convexo. Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ de volumen 1, sea

$$S_p(K) := \left(\int_K \dots \int_K |\text{conv}\{x_1 \dots x_{n+1}\}|^p dx_1 \dots dx_{n+1} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.5)$$

El llamado *problema de Sylvester* es describir la clase afín de cuerpos convexos para los que $S_p(K)$ es maximizado o minimizado. Para $n = 2$ Blaschke [Bla17] estableció que los minimizadores y maximizadores son elipsoides y símlices respectivamente. Groemer [Gro73] probó que para cualquier cuerpo convexo K se tiene que $S_p(K) \geq S_p(B_2^n)$ (desigualdad de Blaschke-Groemer) y la igualdad se alcanza si y sólo si K es un elipsoide. En la otra dirección el problema está abierto para $n \geq 3$. Se conjetura que el símlice maximiza esta cantidad, esto se conoce como la *conjetura del símlice*. Milman y Pajor [MP89] establecieron una relación entre $S_1(K)$ y la constante de isotropía de K , probaron que

$$S_1(K) \sim \frac{L_k}{\sqrt{n}}. \quad (2.6)$$

Como una consecuencia de esta relación se tiene que la conjetura del símlice implica una respuesta afirmativa a la conjetura del hiperplano.

Busemann [Bus53] introdujo la siguiente variante del funcional de Sylvester,

$$B_p(K) := \left(\int_K \dots \int_K |\text{conv}\{0, x_1, \dots, x_n\}|^p dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.7)$$

Como antes, el mínimo de $B_p(K)$ entre todos los cuerpos convexos se obtiene cuando K es un elipsoide. Esto lleva a la siguiente desigualdad, conocida como la desigualdad del símplice aleatorio de Busemann. [Bus53],

$$B_1(K) \geq \left(\frac{|B_2^{n-1}|}{(n+1)|B_2^n|} \right)^n |K|^{n+1} \geq \left(\frac{c}{\sqrt{n}} \right)^n |K|^{n+1}, \quad (2.8)$$

con $c > 0$ una constante absoluta.

2.3. Razón simplicial interna y dualidad

Para obtener una cota general para $S^{out}(K)$ vamos a trabajar con un enfoque dual del problema: encontrar símplices de volumen grande contenidos en K .

Dado un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ definimos la *razón simplicial interior* de K como

$$S^{inn}(K) := \min \left(\frac{|K|}{|S|} \right)^{1/n},$$

donde el mínimo se toma entre todos los símplices $S \subset K$.

Ejemplo 2.3.1. Sean $K := B_2^n$ y S el símplice regular en posición de Löwner. El mismo argumento que fue utilizado en el Ejemplo 2.1.1 muestra que S es el símplice de volumen maximal dentro de K . Como S puede ser obtenido contrayendo el símplice regular que contiene a la bola por un factor n , por la ecuación (2.2) tenemos que,

$$|S| = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{n! n^n} \sim \frac{1}{n}, \quad (2.9)$$

y entonces $S^{inn}(B_2^n) \sim \sqrt{n}$.

Hay muchas maneras de mostrar que para todo cuerpo K , $S^{inn}(K) \leq \sqrt{n}$. Se puede encontrar en el trabajo de Macbeath [Mac51a]. También fue mostrado por Giannopoulos, Perissinaki y Tsolomitis en [GPT01]. Mostraremos como probarlo usando un lema clásico, el Lema de Dvoretzky-Rogers, que afirma que es posible extraer de una descomposición de la identidad una base “casi” ortogonal.

Lema 2.3.2 (Dvoretzky-Rogers). Sean $w_1, \dots, w_m \in S^{n-1}$ y c_1, \dots, c_m tales que $Id = \sum c_i w_i \otimes w_i$, entonces existe un subconjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \{w_1, \dots, w_m\}$ tal que $\|P_k(v_{k+1})\|_2 \geq \left(\frac{n-k}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ para $1 \leq k \leq n-1$, donde P_k es la proyección ortogonal sobre $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}^\perp$.

Demostración. Primero observemos que para toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ debe existir w_i tal que $\langle w_i, Tw_i \rangle \geq \frac{\text{tr}(T)}{n}$. De hecho,

$$\frac{\text{tr}(T)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i \langle T, w_i \otimes w_i \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i \langle Tw_i, w_i \rangle,$$

y para algún vector w_i , $\langle Tw_i, w_i \rangle$ debe ser mayor que el promedio aritmético. La prueba sigue por inducción. Fijemos $v_1 = w_1$ y supongamos que ya tenemos $v_1 \dots v_k$. Si P_k es la proyección ortogonal sobre $\text{span}\{v_1 \dots v_k\}^\perp$, $\text{tr}(P_k) = n - k$. Tomemos w_i tal que $\langle w_i, P_k w_i \rangle \geq \frac{n-k}{n}$, tenemos

$$\|P_k(w_i)\|_2 = \langle w_i, P_k w_i \rangle^{\frac{1}{2}} \geq \left(\frac{n-k}{n} \right)^{\frac{1}{2}},$$

lo que concluye la demostración □

Ahora, consideremos $\{v_1, \dots, v_n\}$ dados por el Lemma de Dvoretzky-Rogers y definamos el símplice $S := \text{conv}\{0, v_1, \dots, v_n\}$. Podemos pensar a este símplice como el cono con base $\text{conv}\{0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Su volumen se puede calcular como

$$\frac{1}{n} \|P_{n-1}(v_n)\|_2 |\text{conv}\{0, v_1, \dots, v_{n-1}\}|_{n-1}.$$

Ya que $\text{conv}\{0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ es a su vez un cono con base $\text{conv}\{0, v_1, \dots, v_{n-2}\}$, iterando el argumento obtenemos

$$|S| = \frac{1}{n!} \|P_{n-1}(v_n)\|_2 \|P_{n-2}(v_{n-1})\|_2 \dots \|v_1\|_2 \geq \frac{\sqrt{(n-1)!}}{n! \sqrt{n!}} \sim \frac{1}{n}. \quad (2.10)$$

Como una consecuencia de esto tenemos la siguiente proposición sobre la razón de volumen interior para un cuerpo convexo cualquiera

Proposición 2.3.3. *Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo hay un símplice $S \subset K$ tal que $\left(\frac{|K|}{|S|}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt{n}$.*

Demostración. Supongamos que K es en posición de Löwner y consideremos una descomposición de la identidad formada por puntos de contacto entre K y B_2^n como en el Teorema 1.3.1. Extraemos, de los puntos de contactos, los vectores dados por el Lemma 2.3.2 y consideramos el símplice $S := \text{conv}\{0, v_1, \dots, v_n\}$. Como $K \subset B_2^n$ tenemos

$$\left(\frac{|K|}{|S|}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{|B_2^n|}{|S|}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

El resultado se sigue de la ecuación (2.10) y la fórmula de Stirling. □

Una cota del mismo orden asintótico se puede obtener también considerando símlices aleatorios formados por vértices uniformemente distribuidos dentro de K . Aplicando las ecuaciones (2.7) o (2.6) podemos probar la existencia de símlices dentro de K con volumen del mismo orden que el mostrado anteriormente.

Para poder deducir una cota para la razón exterior a partir de la interior es necesario pedirle al símlice una propiedad adicional, que comparta el baricentro con el cuerpo convexo dado. La razón principal detrás de esto es que hacemos uso de la polaridad para pasar de una forma a la otra. Dado un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ y un símlice $S \subset K$ tenemos que $S^\circ \supset K^\circ$, y necesitamos la desigualdad de Blaschke-Santaló (Teorema 1.2.1) para poder relacionar el volumen de S y S° .

Para un cuerpo no centralmente simétrico L , la desigualdad de Blaschke-Santaló toma la siguiente forma:

$$\min_{x \in L} |L|(L - x)^\circ \leq |B_2^n|^2.$$

El punto donde se alcanza el mínimo recibe el nombre de *punto de Santaló* de L . Entonces, sólo podemos relacionar el volumen de L con el volumen del cuerpo polar de una traslación de L . Luego, para que se mantenga la inclusión entre S y K , deberíamos trasladar a K también, pero en ese caso perdemos control sobre el volumen del polar de K . Es sabido (ver por ejemplo [Sch14, ecuación (10.23)]) que si $\text{bar}(L^0) = 0$ entonces el punto de Santaló de L es en el origen y, como veremos en el Lema 2.3.7, ese es el caso de un símlice centrado. Esto induce una versión más fuerte del problema mencionado anteriormente. Dado un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$, definimos

$$S_\circ^{\text{out}}(K) := \min \left(\frac{|S|}{|K|} \right)^{\frac{1}{n}},$$

donde el mínimo se toma sobre todos los símlices S que contienen a K y tienen el mismo baricentro.

Similarmente,

$$S_\circ^{\text{inn}}(K) := \min \left(\frac{|S|}{|K|} \right)^{\frac{1}{n}},$$

donde el mínimo se toma sobre todos los símlices S incluidos en K y tienen el mismo baricentro. El problema ahora es obtener una cota general para ambos, $S_\circ^{\text{out}}(K)$ y $S_\circ^{\text{inn}}(K)$.

Teorema 2.3.4. *Dado un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ existe un símlice S con el mismo baricentro tal que $K \subset S$ y $\left(\frac{|S|}{|K|}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt{n}$.*

Teorema 2.3.5 (Version dual). *Dado un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ existe un símlice S con el mismo baricentro tal que $S \subset K$ y $\left(\frac{|K|}{|S|}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt{n}$.*

Antes de probarlos vamos a mostrar cómo deducir el Teorema 2.3.4 a partir del Teorema 2.3.5.

Comenzamos con dos lemas acerca del baricentro de un símlice y de su cuerpo polar.

Lema 2.3.6. *El baricentro de un símlice $S = \text{conv}\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ está dado por el promedio aritmético de sus vértices,*

$$\text{bar}(S) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} v_i.$$

Demostración. Primero observemos que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación afín, $f(x) = Ax + v$, y $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo se tiene que $f(\text{bar}(K)) = \text{bar}(f(K))$, de hecho,

$$\begin{aligned} \text{bar}(f(K))_i &= \frac{1}{|f(K)|} \int_{f(K)} x_i dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{1}{\det(A)|K|} \int_K f(x)_i \det(A) dx_1 \dots dx_n = \text{bar}(f(K)). \end{aligned}$$

Luego, como todo símlice es una imagen afín de $\Delta = \text{conv}\{0, e_1, \dots, e_n\}$ sólo necesitamos probar la afirmación para este último símlice. Notemos que Δ es invariante por permutaciones de coordenadas y también debe serlo su baricentro. Entonces, tenemos que $\text{bar}(\Delta) = (b, \dots, b)$ y el único punto de esa forma dentro de Δ es $(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$. \square

Lema 2.3.7. *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un símlice con baricentro en el origen, entonces S° también es un símlice centrado.*

Demostración. Sea $\Delta_0 := \text{conv}\{e_1, \dots, e_n, -\sum e_i\}$. Por el lema anterior sabemos que el baricentro del símlice $\text{conv}\{v_0, \dots, v_n\}$ viene dado por el promedio aritmético de sus vértices,

$$\text{bar}(\text{conv}\{v_0, \dots, v_n\}) = \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^n v_i. \quad (2.11)$$

Sabemos que existe una transformación afín T tal que $S = T\Delta_0$. Como S y Δ_0 tienen baricentro en el origen, T debe ser lineal. Sabiendo que $S^\circ = (T^*)^{-1}\Delta_0^\circ$, para mostrar $\text{bar}(S^\circ) = 0$ alcanza con hacerlo para Δ_0° .

El cuerpo polar de un politopo es la intersección de los hiperplanos determinados por sus vértices (Ejemplo 1.1.1), tenemos entonces que $\Delta_0^\circ = \bigcap \{x : \langle x, e_i \rangle \leq 1\} \cap \{x : \langle x, -\sum e_i \rangle \leq 1\}$ y sus $n+1$ vértices vienen dados por todas las posibles intersecciones de n de estos hiperplanos. Luego, $\Delta_0^\circ = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ con

$$v_{n+1} = \bigcap_{i=1}^n \{x : \langle x, e_i \rangle = 1\} = \sum_{i=1}^n e_i$$

y

$$v_k = \bigcap_{i \neq k} \{x : \langle x, e_i \rangle = 1\} \cap \{x : \langle x, -\sum_{i=1}^n e_i \rangle = 1\} = (1, 1, \dots, -n, \dots, 1).$$

El resultado se sigue del hecho de que $\sum_{i=1}^{n+1} v_i = 0$. \square

Demostración del Teorema 2.3.4. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo cualquiera con baricentro en el origen. Por la desigualdad de Rogers-Shephard, Teorema 1.2.3, el cuerpo central mente simétrico de diferencias $D(K) = K - K$ contiene a K y cumple

$$\left(\frac{|D(K)|}{|K|} \right)^{1/n} \leq 4. \quad (2.12)$$

Por el Teorema 2.3.5 aplicado al cuerpo $D(K)^\circ$ existe un símplice con baricentro en el origen $T \subset D(K)^\circ$ tal que

$$\left(\frac{|D(K)^\circ|}{|T|} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt{n}. \quad (2.13)$$

Consideremos el símplice $S = T^\circ$. Por el Lema 2.3.7, S también tiene baricentro en el origen y obviamente $S \supset D(K)$. Ahora,

$$\frac{|S|}{|D(K)|} = \frac{|S||T|}{|D(K)||D(K)^\circ|} \cdot \frac{|D(K)^\circ|}{|T|}. \quad (2.14)$$

Por las desigualdades de Blaschke-Santaló, Bourgain-Milman y la fórmula de Stirling se tiene

$$\left(\frac{|S||T|}{|D(K)||D(K)^\circ|} \right)^{1/n} \leq 1. \quad (2.15)$$

El resultado se sigue inmediatamente de las ecuaciones (2.12), (2.13), (2.14), (2.15) y del hecho de que $D(K) \supset K$ y entonces $S \supset K$, lo que concluye la demostración. \square

Observación 2.3.8. En la demostración anterior pasamos por el cuerpo de diferencias de K porque el polar de un cuerpo centrado puede no necesariamente serlo (ver [MSW10]).

Los Ejemplos 2.1.1 y 2.3.1 muestran que las cotas obtenidas son asintóticamente ajustadas.

2.4. Un enfoque probabilístico

El método probabilístico es un método usual para probar la existencia de un determinado tipo de objeto matemático. La filosofía es mostrar que si uno elige objetos de forma aleatoria de una clase específica, la probabilidad de que el resultado sea un tipo preestablecido es positiva. En esta sección usaremos este método para dar una prueba de una versión más fuerte del Teorema 2.3.5. Para esto necesitamos dos proposiciones que esencialmente afirman que, con probabilidad muy alta, ciertos símlices aleatorios tienen “buenas propiedades”.

Supongamos que $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo isotrópico y elegimos aleatoriamente X_1, \dots, X_n en K . El siguiente enunciado asegura que típicamente el baricentro del símlice aleatorio $\text{conv}\{0, X_1, \dots, X_n\}$ tiene norma “chica”.

Proposición 2.4.1. *Existe una constante absoluta $c_1 > 0$ tal que para todo cuerpo convexo isotrópico $K \subset \mathbb{R}^n$ y $\{X_i\}_{i=1}^n$ vectores aleatorios independientes distribuidos uniformemente sobre K entonces*

$$\mathbb{P}\{\|\text{bar}(T)\| \leq c_1 L_K\} > 1 - \frac{1}{2}e^{-n},$$

donde T es el símlice aleatorio $\text{conv}\{0, X_1, \dots, X_n\}$.

Los argumentos que usamos para probar esta proposición están basados en las pruebas de [AG08, Theorem 3.1.] y [KK09, Theorem 1.1.].

Necesitamos enunciar un lema técnico. Dado un espacio métrico M , una δ -red para M es un conjunto $\mathcal{N} \subset M$ tal que para todo $x \in M$ existe $\eta \in \mathcal{N}$ tal que $d(x, \eta) \leq \delta$.

Lema 2.4.2. *Sea $\delta > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Existe una δ -red \mathcal{N} para S^{n-1} con cardinal $\#\mathcal{N} \leq (1 + \frac{2}{\delta})^n$.*

Demostración. La prueba se obtiene mediante un argumento volumétrico estándar. Sea $\{x_i\}$ un conjunto δ -separado maximal en S^{n-1} . Entonces $\{x_i\}_{i=1}^N$ es una δ -red para S^{n-1} . Como los conjuntos $x_i + \frac{1}{2}\delta B_2^n$ son disjuntos y están todos incluidos en $B_2^n + \frac{\delta}{2}B_2^n$, tomando volumen obtenemos,

$$\#\mathcal{N} \left(\frac{\delta}{2}\right)^n |B_2^n| \leq \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^n |B_2^n|, \quad (2.16)$$

que nos da la cota deseada. \square

También necesitamos una desigualdad clásica de Bernstein sobre sumas de variables aleatorias independientes (ver, por ejemplo [AAGM15, Teorema 3.5.16]) junto con el “buen comportamiento” de las marginales $\langle \cdot, \theta \rangle$, para cualquier dirección $\theta \in S^{n-1}$ (Lemma 1.3.5).

Teorema 2.4.3 (Desigualdad de Bernstein). Sean $\{Y_i\}_{i=1}^n$ variables con esperanza 0 en algún espacio de probabilidad. Supongamos que Y_i pertenece a L_{ψ_1} y que $\|Y_i\|_{L_{\psi_1}} \leq M$ para todo $i = 1, \dots, n$. Sea $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|Y_i\|_{L_{\psi_1}}^2$. Entonces, para todo $t > 0$,

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| > tn \right\} \leq e^{-D n \min\{\frac{t^2}{\sigma^2}, \frac{t}{M}\}}, \quad (2.17)$$

para alguna constante absoluta $D > 0$.

Ahora podemos dar la demostración de la Proposición 2.4.1.

Demostración de la Proposición 2.4.1. Sean $\{X_i\}_{i=1}^n$ vectores aleatorios independientes distribuidos uniformemente sobre K y sea θ una dirección fija en S^{n-1} .

Combinando el Lema 1.3.5 y el Teorema 2.4.3 para las variables aleatorias $Y_j := \langle X_j, \theta \rangle$ tenemos, para todo $t > CL_K$,

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \left\langle \sum_{i=1}^n X_i, \theta \right\rangle \right| > tn \right\} \leq e^{-n \frac{tD}{C L_K}}.$$

Sea \mathcal{N} una $\frac{1}{2}$ -red en la esfera de cardinal menor o igual que 5^n dada por el Lema 2.4.2. Entonces

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \left\langle \sum_{i=1}^n X_i, \theta \right\rangle \right| > tn \text{ para algún } \theta \in \mathcal{N} \right\} \leq e^{-n(\frac{tD}{C L_K} - \log(5))},$$

y por ende

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \left\langle \sum_{i=1}^n X_i, \theta \right\rangle \right| \leq tn \text{ para todo } \theta \in \mathcal{N} \right\} \geq 1 - e^{-n(\frac{tD}{C L_K} - \log(5))}.$$

Todo vector $\vartheta \in S^{n-1}$ se puede escribir de la forma $\vartheta = \sum_{j=1}^n \delta_j x_j$, con $\theta_j \in \mathcal{N}$ y $0 \leq \delta_j \leq 2^{1-j}$. En efecto, comenzamos con $x_0 \in \mathcal{N}$ tal que $\|\vartheta - x_0\|_2 = \delta_1 \leq 1$. Luego, $\frac{\vartheta - x_0}{\delta_1} \in S^{n-1}$ y entonces existe $x_1 \in \mathcal{N}$ con $\|\frac{\vartheta - x_0}{\delta_1} - x_1\|_2 = \delta_2 \leq \frac{1}{2}$. Por lo tanto, tenemos

$$\|\vartheta - x_0 - \delta_1 x_1\|_2 \leq \delta_1 \delta_2.$$

Inductivamente encontramos $x_0, \dots, x_n \in \mathcal{N}$ y $\delta_1, \dots, \delta_n$ tales que

$$\|\vartheta - \sum_{i=0}^n \left(\prod_{j=0}^i \delta_j \right) x_i\|_2 \leq 2^{j-1}.$$

Entonces $\vartheta = \sum_{i=0}^{\infty} (\prod_{j=0}^i \delta_j) x_i$. Observemos que

$$\begin{aligned} \bigcap_{\theta \in \mathcal{N}} \left\{ \left| \left\langle \sum_{i=1}^n X_i, \theta \right\rangle \right| \leq tn \right\} &\subset \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|_2 \leq 2tn \right\} \\ &= \left\{ \max_{\vartheta \in S^{n-1}} \left| \left\langle \sum_{i=1}^n X_i, \vartheta \right\rangle \right| \leq 2tn \right\}. \end{aligned}$$

En efecto, sea ϑ un vector unitario arbitrario y supongamos que $|\langle \sum_{i=1}^n X_i, \theta \rangle| \leq tn$ para todo $\theta \in \mathcal{N}$, entonces

$$\left| \left\langle \sum_{i=1}^n X_i, \vartheta \right\rangle \right| = \left| \left\langle \sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \theta_j \right\rangle \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \left| \left\langle \sum_{i=1}^n X_i, \theta_j \right\rangle \right| \leq 2tn.$$

Así, para todo $t > CL_K$ tenemos

$$\mathbb{P} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|_2 \leq 2tn \right\} \geq 1 - e^{-n(\frac{tD}{CL_K} - \log(5))}.$$

El resultado se obtiene tomando $t := \frac{c_1(n+1)L_K}{2n}$, para $c_1 > 0$ lo suficientemente grande. \square

La segunda proposición que necesitamos asegura que, típicamente, el símplice aleatorio $\text{conv}\{0, X_1, \dots, X_n\}$ tiene volumen “grande”.

Proposición 2.4.4. *Existe una constante absoluta $c_2 > 0$ tal que para todo cuerpo convexo isotrópico $K \subset \mathbb{R}^n$ y $\{X_i\}_{i=1}^n$ vectores aleatorios independientes uniformemente distribuidos sobre K entonces*

$$\mathbb{P} \left\{ |\text{co}\{0, X_1, \dots, X_n\}| \geq \frac{c_2^n L_K^n}{n^{\frac{n}{2}}} \right\} > 1 - \frac{1}{2} e^{-n}.$$

Una demostración de ella se puede encontrar esencialmente en el trabajo de Pivovarov [Piv10, Proposition 1]. Incluimos los detalles por completitud.

Lema 2.4.5. [Piv10, Lemma 2] *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo isotrópico y X un vector aleatorio uniformemente distribuido sobre K . Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio de dimensión k y P_E la proyección ortogonal sobre E . Entonces, la variable aleatoria*

$$Y := \frac{|P_E(X)|}{L_K \sqrt{k}}$$

satisface

$$\mathbb{E} |Y|^{-\frac{1}{2}} \leq C',$$

donde $C' > 0$ es una constante absoluta.

Demostración de la Proposición 2.4.4. Sea $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la transformación lineal que manda la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^n$ a $\{X_i\}_{i=1}^n$. En este caso,

$$\text{conv}\{0, X_1, \dots, X_n\} = A(\text{conv}\{0, e_1, \dots, e_n\})$$

y entonces tenemos

$$|\text{conv}\{0, X_1, \dots, X_n\}| = \frac{|\det(A)|}{n!}.$$

Sean $V_k := \text{span}\{X_1, \dots, X_k\}$ y $Y_k = \frac{|P_{V_{k-1}^\perp X_k}|}{L_K \sqrt{n-k+1}}$. Por el Lema 2.4.5 si X_1, \dots, X_{k-1} están fijos tenemos que $\mathbb{E}[|Y_k|^{-\frac{1}{2}}] \leq C'$.

Calculando el volumen de $\text{conv}\{0, X_1, \dots, X_n\}$ como en la ecuación (2.10),

$$|\det(A)| = \|X_1\|_2 \|P_{V_1^\perp(X_2)}\|_2 \dots \|P_{V_{n-1}^\perp(X_n)}\|_2 \quad (2.18)$$

y aplicando el teorema de Fubini iterativamente obtenemos

$$\mathbb{E}\left[\prod_i^n Y_k^{-\frac{1}{2}}\right] \leq (C')^n. \quad (2.19)$$

Sea $\alpha > 0$ una constante a determinar. Entonces, por la desigualdad de Markov y la ecuación (2.19) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\det(A)| < \alpha^n L_K^n \sqrt{n!}) &= \mathbb{P}\left(\prod_i^n Y_k < \alpha^n\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\prod_i^n Y_k^{-\frac{n}{2}} > \alpha^{-\frac{n}{2}}\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left[\prod_i^n Y_k^{-\frac{1}{2}}\right] \alpha^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Tomando $\alpha = (eC')^{-2}$ se obtiene que

$$\mathbb{P}(|\text{conv}\{0, X_1, \dots, X_n\}| < \frac{\alpha^n L_K^n}{\sqrt{n!}}) \leq \frac{1}{2} e^{-n}.$$

Para obtener el resultado basta aplicar la fórmula de Stirling. \square

El siguiente teorema es una versión más fuerte del Teorema 2.3.5. Si el cuerpo convexo K está en posición isotrópica, provee un método probabilístico para encontrar símlices dentro de K (con baricentro en el origen) con volumen lo suficientemente grande. Creemos que este resultado es interesante en sí mismo. Aquí \mathcal{S}_0^n denota al conjunto de símlices centrados de \mathbb{R}^n .

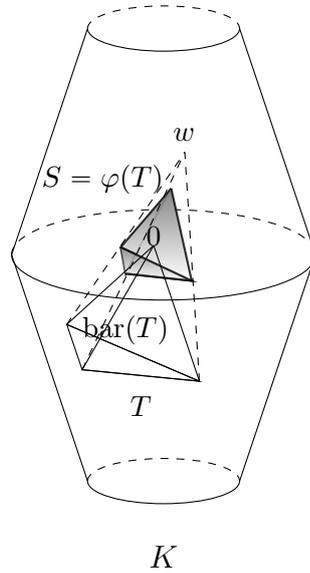


Figura 2.4: Construction involved in the proof of Theorem 2.4.6.

Teorema 2.4.6. *Existe una función $f_n : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_n \rightarrow \mathcal{S}_0^n$ tal que para todo cuerpo convexo isotrópico $K \subset \mathbb{R}^n$ y X_1, \dots, X_n vectores aleatorios independientes uniformemente distribuidos sobre K , con probabilidad mayor o igual a $1 - e^{-n}$ tenemos que $f_n(X_1, \dots, X_n)$ es un símlice con baricentro en el origen contenido en K tal que*

$$|f_n(X_1, \dots, X_n)| \geq \frac{c^n L_K^n}{n^{n/2}}, \quad (2.20)$$

donde $c > 0$ es una constante absoluta.

Los siguientes argumentos están basados en el trabajo reciente de Naszódi [Nas16]. Con las Proposiciones 2.4.1 y 2.4.4 a mano, podemos dar una prueba del Teorema 2.4.6.

Proof of Theorem 2.4.6. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo isotrópico y sean X_1, \dots, X_n vectores aleatorios independientes distribuidos uniformemente sobre K . Notamos con T al símlice $\text{conv}\{0, X_1, \dots, X_n\}$ y con u a su baricentro; i.e., $u = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n X_i$. Por la Proposición 2.4.1 existe una constante absoluta $c_1 > 0$ tal que

$$\mathbb{P}\{\|u\|_2 \leq c_1 L_K\} > 1 - \frac{1}{2}e^{-n}. \quad (2.21)$$

Por otro lado, por la Proposición 2.4.4, sabemos que existe una constante

absoluta $c_2 > 0$ tal que

$$\mathbb{P} \left\{ |T| \geq \frac{c_2^n L_K^n}{n^{\frac{n}{2}}} \right\} > 1 - \frac{1}{2} e^{-n}. \quad (2.22)$$

Por el resultado de Kannan, Lovász and Simonovits, Lema 1.3.4, tenemos

$$\sqrt{\frac{n+2}{n}} L_K B_2^n \subset K$$

Por lo tanto, el vector $w := -\frac{1}{c_1}u$ pertenece K con probabilidad mayor que $1 - \frac{1}{2}e^{-n}$.

Es fácil verificar que si aplicamos la transformación homotética con centro w y razón

$$\lambda = \frac{\|w\|}{\|w-u\|} = \frac{\|w\|}{\|w\| + \|u\|} = \frac{1}{1+c_1} > 0$$

al símlice T , obtenemos otro símlice S con baricentro en el origen (ver Figura 2.4) tal que

$$|S| \geq \lambda^n |T| \geq \lambda^n \cdot \frac{c_2^n L_K^n}{n^{\frac{n}{2}}}.$$

Notemos $\bar{X} := \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n X_i$. Entonces, la función $f_n : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_n \rightarrow \mathcal{S}_0^n$

que buscamos se puede definir como

$$\begin{aligned} f_n(X_1, \dots, X_n) &:= \varphi(\text{conv}\{0, X_1, \dots, X_n\}) \\ &= \frac{1}{1+c_1} \text{conv}\{-\bar{X}, X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X}\}. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. \square

Podemos deducir dos corolarios del Teorema 2.4.6 que son leves variantes de los Teoremas 2.3.5 y 2.3.4. El primero es una aplicación directa del teorema.

Corolario 2.4.7. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$, entonces*

$$S_\circ^{\text{inn}}(K) \leq \frac{\sqrt{n}}{L_K}. \quad (2.23)$$

La prueba del segundo requiere el mismo uso de polaridad que en la deducción del Teorema 2.3.4 a partir del Teorema 2.3.5. Esta es la razón de la presencia de $L_{D(K)^\circ}$ en lugar de L_K .

Corolario 2.4.8. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$, entonces*

$$S_\circ^{\text{out}}(K) \leq c \frac{\sqrt{n}}{L_{D(K)^\circ}}. \quad (2.24)$$

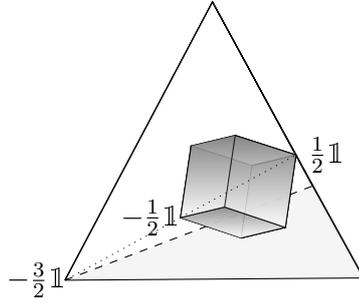


Figura 2.5: El simplejo $\text{conv}\{-\frac{3}{2}\mathbb{1}, 3e_1 - \frac{1}{2}\mathbb{1}, 3e_2 - \frac{1}{2}\mathbb{1}, 3e_3 - \frac{1}{2}\mathbb{1}\}$ que contiene al cubo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3 \subset \mathbb{R}^3$ como en la Proposición 2.5.1.

2.5. El caso del cubo y el paralelepípedo de Dvoretzky y Rogers

Como mencionamos, para $n = 2$ el cubo tiene la mayor razón de volumen simplicial exterior; para $n = 3$ se conjetura lo mismo. Uno podría esperar un fenómeno similar en dimensiones más altas pero, como vimos en el Ejemplo 2.1.2, la razón de volumen simplicial del cubo está acotada uniformemente. Más aún, veremos que el simplejo se puede tomar con el mismo baricentro que el cubo.

Proposición 2.5.1. *Sea $K := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ el cubo centrado de volumen uno, entonces $S_{\circ}^{\text{out}}(K) \sim 1$.*

Demostración. Para construir un simplejo adecuado tenemos que estirar un poco el involucrado en el Ejemplo 2.1.2 para centrarlo. Notamos con $\mathbb{1}$ al vector en \mathbb{R}^n definido como $\sum_{j=1}^n e_j$. Consideremos el simplejo

$$S := \text{conv}\{-\frac{n}{2}\mathbb{1}, ne_1 - \frac{1}{2}\mathbb{1}, ne_2 - \frac{1}{2}\mathbb{1}, \dots, ne_n - \frac{1}{2}\mathbb{1}\}.$$

Como K es centralmente simétrico, $\text{bar}(K) = 0$. Computando el promedio de los vértices (Lema 2.3.6) vemos que lo mismo vale para $\text{bar}(S)$. Observemos también que el cubo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ está incluido en el simplejo $T := \text{conv}\{-\frac{1}{2}\mathbb{1}, ne_1 - \frac{1}{2}\mathbb{1}, ne_2 - \frac{1}{2}\mathbb{1}, \dots, ne_n - \frac{1}{2}\mathbb{1}\}$. En efecto, todos los puntos del cubo tienen coordenadas mayores o iguales a $-\frac{1}{2}$ y su suma es menor o igual a $\frac{n}{2}$. Resta ver que el punto $-\frac{1}{2}\mathbb{1}$ pertenece a S , pero $-\frac{1}{2}\mathbb{1}$ es exactamente $t(-\frac{n}{2})\mathbb{1} + (1-t)\frac{1}{2}\mathbb{1}$ para $t = \frac{2}{n+1}$. Calculando un determinante y aplicando la fórmula de Stirling probamos que el volumen de S es exactamente $\frac{n^n(n+1)}{2n!} \sim 1$. \square

Ahora probaremos el Teorema 2.3.4 de forma no probabilística. El argumento es el siguiente: primero usamos el Teorema 2.3.2 (ver también [PS91])

de la misma forma que en [DR50] para probar que todo cuerpo convexo K puede ser encerrado por un paralelepípedo de volumen adecuado. Luego hacemos uso de la razón simplicial del cubo para concluir la cota deseada.

Proof of Theorem 2.3.5. Nuevamente, aplicando la desigualdad de Rogers-Shephard, Teorema 1.2.3, podemos suponer sin pérdida de generalidad que K es centralmente simétrico. Supongamos también que K está en posición de John y, como en la prueba de la Proposición 2.3.3, tomemos los puntos de contacto $\{v_1, \dots, v_n\}$ dados por el Teorema 2.3.2. Sea P el paralelepípedo

$$P := \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_i \rangle| \leq 1\}.$$

Notemos que para todo $1 \leq i \leq n$, $\{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_i \rangle| = 1\}$ es un hiperplano de soporte de K y luego, $P \supset K$. El volumen de P está dado por $|P| = \frac{2^n}{\det[v_1, \dots, v_n]}$. Computando el determinante como en las ecuaciones (2.18) y (2.10) tenemos que $|P|^{\frac{1}{n}} \sim 1$. Usando el hecho de que $B_2^n \subset K$ obtenemos

$$\left(\frac{|P|}{|K|}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{|P|}{|B_2^n|}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt{n}. \quad (2.25)$$

El resultado se sigue de combinar las ecuaciones (2.25) y la cota dada en la Proposición 2.5.1 para el símplice que contiene al paralelepípedo P (usando también, por supuesto, el hecho de que la razón de volumen es un invariante afín). \square

Comparando el resultado obtenido con esta técnica con (2.23) y (2.24), se puede notar la ausencia de la constante isotrópica (quizás en el caso en el que la conjetura de la constante isotrópica sea falsa, (2.23) o (2.23) podrían dar mejores cotas para ciertas clases de cuerpos convexos).

2.5.1. Versión aleatoria del paralelepípedo de Dvoretzky y Rogers

Observemos que, en general, entender cómo es el paralelepípedo P en la ecuación (2.25) parece difícil (su construcción depende de ciertos puntos de contacto cuando L está en posición de John, que no son necesariamente fáciles de encontrar de forma explícita), entonces, el Teorema 2.4.6 parece mucho más fuerte ya que provee un algoritmo aleatorio que funciona con probabilidad alta.

Por lo tanto enunciamos la siguiente versión probabilística del paralelepípedo de Dvoretzky y Rogers que se puede deducir de un resultado de Pivovarov.

Teorema 2.5.2. *Sea $L \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo centralmente simétrico tal que L° está en posición isotrópica y consideremos la matriz aleatoria $T := \sum_{j=1}^n X_j \otimes e_j$, donde X_1, \dots, X_n son tomados independientemente según la medida uniforme del cuerpo isotrópico L° . Con probabilidad mayor o igual a $1 - e^{-n}$, el paralelepípedo $P = T^{-1}(B_\infty^n)$ contiene a L y*

$$\left(\frac{|P|}{|L|}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{L_{L^\circ}}.$$

Demostración. Primero observemos que $|\text{co}\{0, X_1, \dots, X_n\}| = \frac{\det(\sum_{i=1}^n X_i \otimes e_i)}{n!}$ y entonces el Lema 2.4.5 afirma que

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \det \left(\sum_{j=1}^n X_j \otimes e_j \right) \right|^{1/n} \geq c\sqrt{n}L_{L^\circ} \right\} > 1 - e^{-n}, \quad (2.26)$$

para alguna constante absoluta $c > 0$.

Por otro lado, como $|\langle X_i, y \rangle| \leq 1$ para todo $y \in L$ y $1 \leq i \leq n$ tenemos que $\|T : X_L \rightarrow \ell_\infty^n\| \leq 1$, donde $T := \sum_{j=1}^n X_j \otimes e_j$.

Entonces, $T(L) \subset B_\infty^n$, o equivalentemente $L \subset T^{-1}(B_\infty^n) := P$ y la razón

$$\left(\frac{|P|}{|L|}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{|B_\infty^n|^{\frac{1}{n}}}{|\det T|^{\frac{1}{n}}|L|^{\frac{1}{n}}}. \quad (2.27)$$

Entonces, por las ecuaciones (2.27) y (2.26) y teniendo en cuenta que $|L|^{\frac{1}{n}} \sim \frac{1}{n}$ (que se obtiene aplicando las desigualdades de Blaschke-Santaló y Bourgain-Milman, ya que $|L^\circ| = 1$) tenemos, con probabilidad mayor o igual que $1 - e^{-n}$,

$$\left(\frac{|P|}{|L|}\right)^{\frac{1}{n}} \leq c\frac{\sqrt{n}}{L_{L^\circ}}, \quad (2.28)$$

lo que concluye la demostración. \square

Capítulo 3

Cotas generales

En este capítulo tratamos el problema de aproximar un cuerpo convexo por otro en un contexto más general. Definimos la razón de volumen de un par de cuerpos convexos, que mide cuán bien puede ser aproximado uno de ellos por una imagen afín del otro. En la Sección 3.1 presentamos las definiciones básicas y las propiedades elementales de esta cantidad. También definimos la máxima razón de volumen de un cuerpo convexo y mostramos las mejores cotas conocidas hasta ahora. En la Sección 3.2 presentamos una serie de ejemplos para los cuales esta cota puede ser mejorada. En la Sección 3.3 introducimos algunas herramientas estocásticas que nos permiten extender nuestro resultado a algunas clases naturales de cuerpos convexos como bolas de normas unitariamente invariantes o productos tensoriales de espacios ℓ_p .

3.1. Razón de volumen general

Discutiremos una generalización natural de los problemas tratados en el capítulo anterior: reemplazar el símplice por otra clase afín de cuerpos convexos. Para $K, L \subset \mathbb{R}^n$ nos preguntamos si L puede encerrarse por una imagen afín de K de volumen similar. Este tipo de aproximaciones fueron abordadas por MacBeath [Mac51a] en el estudio de distancias de Banach-Mazur modificadas. Trabajaremos con la siguiente definición que fue introducida por Giannopoulos y Hartzoulaki [GH02] y también estudiada por Gordon, Litvak, Meyer y Pajor [GLMP04]: dados K y L dos cuerpos convexos en \mathbb{R}^n la *razón de volumen* del par (K, L) se define como

$$\text{vr}(K, L) := \inf \left\{ \left(\frac{|K|}{|T(L)|} \right)^{\frac{1}{n}} : T(L) \text{ está contenido en } K \right\}, \quad (3.1)$$

donde el ínfimo (en realidad un mínimo) se toma sobre todas las transformaciones afines T . En otras palabras, $\text{vr}(K, L)$ mide cuán bien puede ser

aproximado K por una imagen afín de L . Notar que el valor clásico $\text{vr}(K)$ es simplemente $\text{vr}(K, B_2^n)$, donde B_2^n es la bola euclídea en \mathbb{R}^n

Dado un cuerpo convexo K es natural preguntarse cuán “buena” puede ser una aproximación de este tipo (en términos de la dimensión del espacio ambiente). Es decir, queremos saber *cuán grande es el valor $\text{vr}(K, L)$* (para cuerpos convexos arbitrarios $L \subset \mathbb{R}^n$). Entonces, resulta importante calcular la *máxima razón de volumen de K* (que abreviaremos como lvr por sus siglas en inglés), definida como

$$\text{lvr}(K) := \sup_{L \subset \mathbb{R}^n} \text{vr}(K, L),$$

donde el supremo se toma sobre todos los cuerpos convexos L . La mejor cota general para esta cantidad conocida hasta ahora es de Giannopoulos y Hartzoulaki [GH02]. Ellos probaron que, para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$\text{lvr}(K) \leq \log(n)\sqrt{n}. \quad (3.2)$$

Retomaremos su resultado en la Sección 3.3. Primero observemos que para muchos cuerpos convexos $K \subset \mathbb{R}^n$, el factor logarítmico en (3.2) puede ser removido, obteniendo que

$$\text{lvr}(K) \leq \sqrt{n}. \quad (3.3)$$

De hecho, no se conocen ejemplos de cuerpos convexos para los que la máxima razón de volumen sea asintóticamente mayor estricta que la raíz cuadrada de la dimensión del espacio ambiente. Mostraremos varios ejemplos de clases naturales de cuerpos convexos para las que podemos obtener la cota (3.3). En todos los casos esta cota es ajustada, ya que, como veremos en el capítulo 4, siempre se tiene que

$$\text{lvr}(K) \geq \sqrt{n}.$$

3.1.1. Propiedades elementales

Ahora repasamos algunas propiedades elementales de la razón de volumen que se obtienen directamente a partir de la definición. Primero observamos que, como en el caso del símplice, la razón de volumen es invariante por transformaciones afines. En otras palabras, la razón de volumen entre K y L depende exclusivamente de las clases afines de los cuerpos involucrados.

Es decir, dadas dos transformaciones afines $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} vr(AK, BL) &= \min_{TBL \subset AK} \left(\frac{|AK|}{|TBL|} \right)^{1/n} = \min_{TBL \subset K} \left(\frac{\det(A)|K|}{|TBL|} \right)^{1/n} \\ &= \min_{TBL \subset K} \left(\frac{|K|}{\det(A)^{-1}|TBL|} \right)^{1/n} \\ &= \min_{TBL \subset K} \left(\frac{|K|}{|A^{-1}TBL|} \right)^{1/n} \\ &= \min_{\tilde{T}L \subset K} \left(\frac{|K|}{|\tilde{T}L|} \right)^{1/n} = vr(K, L). \end{aligned}$$

Otra propiedad útil de la razón de volumen es la siguiente desigualdad que puede entenderse como desigualdad triangular multiplicativa.

Proposición 3.1.1. *Dados $K, L \subset \mathbb{R}^n$, tenemos que*

$$vr(K, L) \leq vr(K, Z) \cdot vr(Z, L)$$

para todo cuerpo convexo Z en \mathbb{R}^n .

Demostración. Supongamos que $TZ \subset K$ y $SL \subset Z$, entonces se tiene que $TSL \subset K$ y

$$vr(K, L) \leq \left(\frac{|K|}{|TSL|} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{|K|}{|TZ|} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{|Z|}{|SL|} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

tomando ínfimo del lado derecho obtenemos,

$$vr(K, L) \leq vr(K, Z)vr(Z, L),$$

lo que concluye la demostración. \square

En el caso en el que K y L son centralmente simétricos podemos relacionar su razón de volumen con la norma de operadores entre los espacios X_K y X_L . También podemos, mediante la aplicación de las desigualdades de Blaschke-Santaló y Bourgain-Milman (Teoremas 1.2.1 y 1.2.2), relacionarla con la razón de volumen de sus cuerpos polares.

Proposición 3.1.2. *Para todo par de cuerpos centralmente simétricos (K, L) en \mathbb{R}^n vale lo siguiente:*

1.

$$vr(K, L) = \left(\frac{|K|}{|L|} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \inf_{T \in SL(n, \mathbb{R})} \|T : X_L \rightarrow X_K\|,$$

donde el ínfimo se toma entre todas las transformaciones T en el grupo lineal especial de grado n (matrices de determinante uno).

2. Si $T : X_L \rightarrow X_K$ es un operador lineal tenemos que $\frac{1}{\|T : X_L \rightarrow X_K\|} \cdot T(L) \subset K$ y entonces

$$vr(K, L) \leq \frac{\|T : X_L \rightarrow X_K\| |K|^{\frac{1}{n}}}{|\det T|^{\frac{1}{n}} |L|^{\frac{1}{n}}}.$$

3. $vr(K, L) \sim vr(L^\circ, K^{\circ})$.

Demostración. Para (1) primero observemos que, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación afín, digamos $f = T + v$ con T lineal y $v \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $f(L) \subset K$ y entonces $T(L) \subset K$. En efecto, como L es centralmente simétrico, $f(L)$ es simétrico con respecto a v . Entonces, dado $x \in L$, tanto $Tx + v$ como $v - T(x)$ pertenecen a $f(L) \subset K$. Luego, como K es a su vez centralmente simétrico, tenemos que $T(x) - v \in K$ y entonces, por convexidad, $T(x) \in K$. Como $|f(L)| = |TL|$ podemos computar la razón de volumen considerando sólo operadores lineales. En ese caso, la condición de que $T(L) \subset K$ se puede escribir como $\|T : X_L \rightarrow X_K\| \leq 1$, donde $\|T : X_L \rightarrow X_K\|$ es la norma de T como operador entre los espacios X_L y X_K .

$$\begin{aligned} vr(K, L) &= \inf_{\|T : X_L \rightarrow X_K\| \leq 1} \left(\frac{|K|}{|TL|} \right)^{\frac{1}{n}} = \inf_{T \in GL(n, \mathbb{R})} \left(\frac{|K|}{\left| \frac{T}{\|T : X_L \rightarrow X_K\|} L \right|} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \inf_{T \in GL(n, \mathbb{R})} \left(\frac{|K|}{|L|} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{\|T : X_L \rightarrow X_K\|}{(\det T)^{\frac{1}{n}}} \\ &= \inf_{T \in GL(n, \mathbb{R})} \left(\frac{|K|}{|L|} \right)^{\frac{1}{n}} \left\| \frac{T}{(\det T)^{\frac{1}{n}}} : X_L \rightarrow X_K \right\| \\ &= \left(\frac{|K|}{|L|} \right)^{\frac{1}{n}} \inf_{T \in SL(n, \mathbb{R})} \|T : X_L \rightarrow X_K\|. \end{aligned}$$

La ecuación (2) se sigue directamente de la definición de la norma de operadores.

La propiedad (3) es una consecuencia directa de las desigualdades de Blaschke-Santaló y Bourgain-Milman (Teoremas 1.2.1 y 1.2.2) y el hecho de que $TL \subset K$, $T^*K^\circ \subset L^\circ$. De hecho,

$$\begin{aligned} vr(K, L) &= \inf_{TL \subset K} \left(\frac{|K|}{|TL|} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{|K^\circ|}{|K^\circ|} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{|L^\circ|}{|L^\circ|} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \inf_{TL \subset K} \left(\frac{|L^\circ|}{|T^*K^\circ|} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{|K||K^\circ|}{|L||L^\circ|} \right)^{\frac{1}{n}} \sim vr(L^\circ, K^\circ), \end{aligned}$$

como queríamos. \square

Notar que por la desigualdad de Rogers-Shephard, Teorema 1.2.3, para todo cuerpo convexo $L \subset \mathbb{R}^n$ se tiene que $\text{vr}(L - L, L) \leq 4$. Por lo tanto, por la Proposición 3.1.1

$$\text{vr}(K, L) \leq \text{vr}(K, L - L) \cdot 4. \quad (3.4)$$

Luego, la máxima razón de volumen del cuerpo K se puede estimar considerando cuerpos centralmente simétricos. Más precisamente,

$$\text{lvr}(K) \leq 4 \sup_{L \subset \mathbb{R}^n} \text{vr}(K, L), \quad (3.5)$$

donde el supremo se toma sobre todos los *cuerpos centralmente simétricos* L . Esto resulta útil porque nos permite tratar solamente con cuerpos centralmente simétricos

3.2. Ejemplos

Para obtener cotas superiores de la máxima razón de volumen para algunas clases naturales de cuerpos convexos necesitamos primero introducir nuevas herramientas. Antes de hacer esto vamos a repasar algunos ejemplos donde puede ser acotada fácilmente.

Recordemos que si un cuerpo centralmente simétrico $K \subset \mathbb{R}^n$ está en posición de John se tiene que

$$B_2^n \subset K \subset \sqrt{n}B_2^n$$

y luego $\text{vr}(B_2^n, K) \leq \sqrt{n}$. El Ejemplo 2.3.1 muestra que $\text{vr}(B_2^n, S) \sim \sqrt{n}$ para S un símplice. Entonces,

$$\text{lvr}(B_2^n) \sim \sqrt{n}.$$

En el capítulo anterior probamos que para todo símplice $S \subset \mathbb{R}^n$ se tiene $\text{vr}(S, K) \leq \sqrt{n}$ para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, por el Ejemplo 2.1.1, $\text{vr}(S, B_2^n) \sim \sqrt{n}$ concluimos que

$$\text{lvr}(S) \sim \sqrt{n}.$$

Dado $K \subset \mathbb{R}^n$, el paralelepípedo de Dvoretzky y Rogers (ver la ecuación (2.25)) satisface que $K \subset P$ y $\text{vr}(P, K) \leq \sqrt{n}$. Como todo paralelepípedo es una imagen afín del cubo B_∞^n , se tiene que $\text{lvr}(B_\infty^n) \leq \sqrt{n}$. Como $\text{vr}(B_\infty^n, B_2^n) \sim \sqrt{n}$ obtenemos que

$$\text{lvr}(B_\infty^n) \sim \sqrt{n}.$$

3.2.1. Polítopos

La siguiente proposición fue obtenida por Bárány y Füredi [BF88], Carl y Pajor [CP88] y Gluskin [Glu89] aplicando técnicas diferentes (todos en 1988), acota el volumen de un polítopo contenido en la bola euclídea.

Lema 3.2.1. Sean $v_1, \dots, v_N \in B_2^n$, entonces, para $P := \text{conv}\{v_1, \dots, v_N\}$, se tiene,

$$|P|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sqrt{\log(1 + \frac{N}{n})}}{n}. \quad (3.6)$$

Para probar el lema vamos a usar un resultado de Sidák sobre la medida Gaussiana de intersecciones de *bandas simétricas*, que son conjuntos de la forma

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |\langle x, v \rangle| \leq \alpha\},$$

para $\alpha > 0$ y $v \in \mathbb{R}^n$. Una prueba de este resultado se puede encontrar en [AAGM15, Teorema 4.4.5].

Proposición 3.2.2 (Sidák). Si P_1, \dots, P_N son bandas simétricas en \mathbb{R}^n entonces

$$\gamma_n \left(\bigcap_{i=1}^N P_i \right) \geq \prod_{i=1}^N \gamma_n(P_i),$$

donde γ_n es la medida Gaussiana en \mathbb{R}^n .

Demostración del Lema 3.2.1. probaremos que si

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |\langle x, v_i \rangle| \leq 1, \text{ para todo } 1 \leq i \leq N\},$$

entonces

$$|K|^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{\log(1 + \frac{N}{n})}}. \quad (3.7)$$

Luego el resultado se obtiene por polaridad y aplicando la desigualdad de Batschke-Santaló (Teorema 1.2.1). En efecto, $P \subset K^\circ$ y entonces

$$|P|^{\frac{1}{n}} \leq |K^\circ|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n|K|^{\frac{1}{n}}}.$$

Para probar (3.7) consideremos las bandas simétricas

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |\langle x, v_i \rangle| \leq \alpha\},$$

con $\alpha > 0$ a determinar. El ancho de cada P_i esta dado por $\frac{2\alpha}{\|v_i\|_2} \geq 2\alpha$. entonces, si γ_n es la medida Gaussiana en \mathbb{R}^n ,

$$\gamma_n(P_i) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq 1 - e^{-\frac{\alpha^2}{2}}.$$

Ahora, notemos que $\alpha K = \bigcap_{i=1}^N P_i$ y entonces

$$\gamma_n(\alpha K) = \gamma_n\left(\bigcap_{i=1}^N P_i\right) \geq \left(1 - e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)^N.$$

Como $|\alpha K| \geq (2\pi)^{\frac{n}{2}} \gamma_n(\alpha K)$, si elegimos $\alpha = 2\sqrt{\log(1 + \frac{N}{n})}$ y tomamos la raíz n -ésima

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\log(1 + \frac{N}{n})} |K|^{\frac{1}{n}} &\geq \sqrt{2\pi} \left(1 - e^{-2\log(1 + \frac{N}{n})}\right)^{N/n} \\ &= \sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{1}{(1 + \frac{N}{n})^2}\right)^{N/n} \geq c \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

Notar que el resultado de Sidák es en realidad una consecuencia de la, recientemente probada, desigualdad Gaussiana [Roy14] (ver también [LM17]), que afirma que para todo par de cuerpos centralmente simétricos C_1 y C_2 se tiene que $\gamma_n(C_1 \cap C_2) \geq \gamma_n(C_1)\gamma_n(C_2)$.

Podemos usar el lema anterior para acotar la máxima razón de volumen para politopos con pocos vértices.

Proposición 3.2.3. *Sea $c > 0$ y $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^n$ con $N = \lceil cn \rceil$. Si $P := \text{conv}\{v_1, \dots, v_N\}$ entonces $\text{lvr}(P) \leq \sqrt{n}$.*

Demostración. Supongamos que P está en posición de Löwner y consideremos el símlice S cuyos vértices son los puntos de contacto dados por el Teorema 2.3.2. Tenemos que $S \subset P$. Usando la ecuación (2.10) obtenemos que $|S|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}$ y luego, aplicando el Lema 3.2.1,

$$\left(\frac{|P|}{|S|}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt{\log(1 + \frac{n}{cn})} \sim 1. \quad (3.8)$$

Ahora bien, dado un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$, aplicando el Teorema 2.3.4 sabemos que $\text{vr}(S, K) \leq \sqrt{n}$. Entonces, por la Proposición 3.1.1,

$$\text{vr}(P, K) \leq \text{vr}(P, S)\text{vr}(S, K) \leq \sqrt{n}.$$

\square

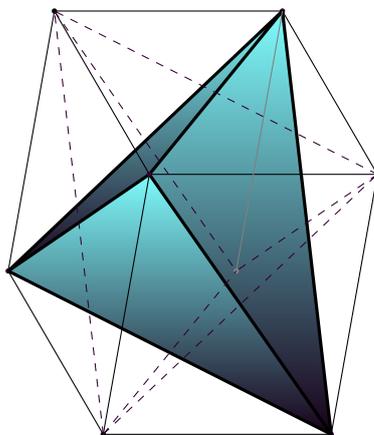


Figura 3.1: Símlice formado por algunos vértices de un politopo como en la prueba de la Proposición 3.2.3.

3.2.2. Cuerpos incondicionales

Decimos que un cuerpo convexo K es *incondicional* si $(x_1, \dots, x_n) \in K$ implica $(\varepsilon_1 x_1, \dots, \varepsilon_n x_n) \in K$ para cualquier elección de signos $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Notar que un cuerpo incondicional es necesariamente centralmente simétrico y $\|(x_1, \dots, x_n)\|_K = \|(\varepsilon_1 x_1, \dots, \varepsilon_n x_n)\|_K$. También decimos que $\|\cdot\|_K$ es una *norma incondicional*.

Decimos que un cuerpo es *permutacionalmente simétrico* si $(x_1, \dots, x_n) \in K$ implica $(\varepsilon_1 x_{\sigma(1)}, \dots, \varepsilon_n x_{\sigma(n)}) \in K$ para toda elección de signos $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ y cualquier permutación σ . También decimos que $\|\cdot\|_K$ es una *norma permutacionalmente simétrica* (comunmente se usa el término norma simétrica, pero queremos evitar cualquier confusión con cuerpos centralmente simétricos). El siguiente lema, que es una consecuencia de un resultado más general de Lozanovskii [Loz69] (ver también [TJ89, Lemma 39.3]), nos permite acotar la razón de volumen para cuerpos incondicionales.

Lema 3.2.4. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo centralmente simétrico, existen números positivos a_1, \dots, a_n tales que*

$$\|(a_1, \dots, a_n)\|_K = 1 \quad \text{and} \quad \|(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1})\|_{K^\circ} = n. \quad (3.9)$$

Más aún, si K es permutacionalmente simétrico, $a_1 = \dots = a_n = \frac{1}{\|(1, \dots, 1)\|_K}$.

Demostración. Consideremos la función $\Phi(t_1, \dots, t_n) := (\prod_{i=1}^n t_i)^{\frac{1}{n}}$ en el ortante positivo. Como es estrictamente cóncava y 1-homogénea tiene un único máximo sobre ∂K . Sea,

$$\Phi_0 = \Phi(a_1, \dots, a_n) = \max\{\Phi(t_1, \dots, t_n) \mid \|(t_1, \dots, t_n)\|_K = 1\},$$

y $A = \{(t_1, \dots, t_n) \mid \Phi((t_1, \dots, t_n)) \geq \Phi_0\}$. Como A es estrictamente convexo y K es convexo, existe (v_1, \dots, v_n) que separa ambos conjuntos, i.e. $\|(v_1, \dots, v_n)\|_{K^\circ} = 1$ y $\langle (v_1, \dots, v_n), (t_1, \dots, t_n) \rangle > 1$ para $(t_1, \dots, t_n) \in A$, $(t_1, \dots, t_n) \neq (a_1, \dots, a_n)$. Ya que Φ es diferenciable, si calculamos $\nabla\Phi$, tenemos que,

$$\langle \nabla\Phi(a_1, \dots, a_n), (a_1, \dots, a_n) \rangle = \Phi_0.$$

La última igualdad implica que

$$\langle \nabla\Phi(a_1, \dots, a_n), (t_1, \dots, t_n) \rangle < \Phi_0$$

para todo $(t_1, \dots, t_n) \in K$, entonces,

$$(v_1, \dots, v_n) = \frac{\nabla\Phi(a_1, \dots, a_n)}{\Phi} = \frac{1}{n}(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}).$$

Luego, $\|(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1})\|_{K^\circ} = n$.

Si K es permutacionalmente simétrico, como Φ es invariante por permutaciones, por la unicidad del máximo, debe ser $a_1 = \dots = a_n$, lo que concluye la demostración. \square

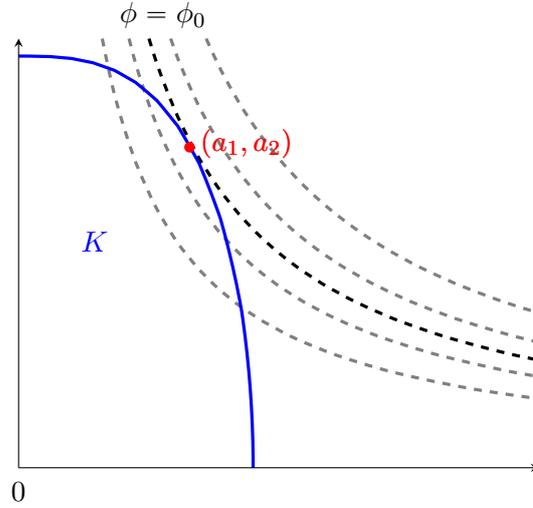


Figura 3.2: Curvas de nivel de ϕ como en la demostración del Lema 3.2.4.

Observación 3.2.5. El último resultado puede ser interpretado geométricamente. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo incondicional, consideremos los números a_1, \dots, a_n dados por el Lema 3.2.4 y definamos D_K como el operador diagonal con entradas $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$, entonces la ecuación (3.9) y la incondicionalidad significan que $D_K B_\infty^n \subset K$ y $D_K^{-1} B_\infty^n \subset nK^\circ$, lo que implica,

$$D_K B_\infty^n \subset K \subset nD_K B_1^n. \quad (3.10)$$

Tomando volumen en la ecuación (3.10), tenemos que,

$$\det(D_K)|B_\infty^n|^{\frac{1}{n}} \leq |K|^{\frac{1}{n}} \leq \det(D_K)n|B_1^n|^{\frac{1}{n}}.$$

Como, $|B_\infty^n|^{\frac{1}{n}} \sim n|B_1^n|^{\frac{1}{n}}$, concluimos que $\text{vr}(K, B_\infty^n) \sim 1$.

Si combinamos este hecho con el Teorema 2.5.2 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.2.6. *Dado K un cuerpo incondicional, sea D_K el operador diagonal como en la Observación 3.2.5. Sea $L \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo centralmente simétrico tal que L° está en posición isotrópica y consideremos la matriz aleatoria*

$$T := \sum_{j=1}^n X_j \otimes e_j,$$

donde X_1, \dots, X_n son tomados de forma independiente de acuerdo a la medida uniforme en el cuerpo isotrópico L° . Con probabilidad mayor o igual a $1 - e^{-n}$, para todo cuerpo incondicional $K \subset \mathbb{R}^n$, la posición $\tilde{L} := D_K T(L)$ Está incluida en K y

$$\left(\frac{|K|}{|\tilde{L}|} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{L_{L^\circ}}. \quad (3.11)$$

Demostración. Por el Teorema 2.5.2 sabemos que con probabilidad mayor o igual a $1 - e^{-n}$, $T(L) \subset B_\infty^n$ y

$$\left(\frac{|P|}{|L|} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{L_{L^\circ}}.$$

Claramente $D_K T(L) \subset D_K(B_\infty^n) \subset K$ y el resultado se obtiene a partir del hecho de que $\left(\frac{|K|}{|D_K(B_\infty^n)|} \right)^{\frac{1}{n}} \sim 1$. \square

Vale observar que si K es un cuerpo convexo isotrópico incondicional podemos asegurar la existencia de un cubo “grande” dentro de K . La siguiente proposición es de Bobkov y Nazarov [BN03].

Proposición 3.2.7. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo isotrópico incondicional. Entonces, $[-\frac{L_K}{\sqrt{2}}, \frac{L_K}{\sqrt{2}}]^n \subset K$.*

Demostración. Definimos $K^+ = 2K \cap \mathbb{R}_+^n$. Como el baricentro $v = (v_1, \dots, v_n)$ de K^+ pertenece a K^+ , el rectángulo $[0, v_1] \times \dots \times [0, v_n] \subset K^+$. Ya que K es incondicional, aplicando la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$4L_K^2 = \int_{K^+} x_i^2 dx \leq 2 \left(\int_{K^+} x_i dx \right)^2.$$

Entonces, si calculamos las coordenadas de v obtenemos

$$v_i = \int_{K^+} x_i dx \geq \sqrt{2}L_k,$$

lo que implica la inclusión deseada. \square

Notar que, como $\frac{L_K}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{e\pi}}$ (ver Proposición 1.3.3), tenemos

$$\left[-\frac{1}{2\sqrt{e\pi}}, \frac{1}{2\sqrt{e\pi}} \right]^n \subset K.$$

Obtenemos entonces el siguiente corolario.

Corolario 3.2.8. *Sea $L \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo centralmente simétrico tal que L° está en posición isotrópica y consideremos la matriz aleatoria*

$$T := \sum_{j=1}^n X_j \otimes e_j,$$

donde X_1, \dots, X_n son tomados de forma independiente de acuerdo a la medida uniforme sobre el cuerpo isotrópico L° . Con probabilidad mayor o igual a $1 - e^{-n}$, para todo cuerpo incondicional isotrópico $K \subset \mathbb{R}^n$, la posición $\tilde{L} := \frac{1}{2\sqrt{\pi e}} \cdot T(L)$ está incluida en K y

$$\left(\frac{|K|}{|\tilde{L}|} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{L_{L^\circ}}. \quad (3.12)$$

Observar que en el Corolario 3.2.8 evitamos el operador diagonal D_K con la condición adicional de que K sea isotrópico. La posición isotrópica de un cuerpo convexo incondicional se puede encontrar calculando $\int_K x_i^2 dx$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces, en los casos en los que uno puede computar esa cantidad, el Corolario 3.2.8 pareciera ser más útil que el Corolario 3.2.6.

3.3. Cotas para algunas clases naturales de cuerpos convexos

3.3.1. Posición de Rudelson

Dado un cuerpo convexo $W \subset \mathbb{R}^n$ necesitamos introducir una posición \tilde{W} altamente relacionada con la ℓ -posición (ver Teorema 1.3.6). Fue introducida por Rudelson en [Rud00] y su existencia también puede deducirse de la demostración del teorema principal del trabajo de Giannopoulos y Hartzoulaki [GH02]. Ellos utilizaron esta posición junto con la desigualdad de Chevet para acotar la razón de volumen. Probaron que para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$, $\text{lvr}(K) \leq \log(n)\sqrt{n}$. Hasta ahora, esta es la mejor cota

general conocida. Sin embargo no se sabe si es óptima y, de hecho, para una amplia clase de cuerpos convexos (muchos de los cuales ya vimos) la máxima razón de volumen se puede acotar por la raíz cuadrada de la dimensión del espacio ambiente.

Proposición 3.3.1. *Dado $W \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, existe una posición de W , \tilde{W} que satisface:*

- $\ell(\tilde{W}) \leq \sqrt{n} \log(n)$,
- $\ell(\tilde{W}^\circ) \leq \sqrt{n}$,
- $\|id : \ell_2^n \rightarrow X_{\tilde{W}^\circ}\| \leq \frac{\sqrt{n}}{\log(n)}$.

En particular,

$$\frac{1}{|\tilde{W}|^{\frac{1}{n}}} \leq \ell(\tilde{W}) \leq \sqrt{n} \log(n).$$

Cuando un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n satisface lo anterior decimos que está en *posición de Rudelson*.

Demostración. Por el Teorema 1.3.6 podemos asumir que W satisface

$$\ell(W)\ell(W^\circ) \leq n \log(n).$$

Como esta cantidad es invariante por reescalamientos supongamos que $\ell(W) \leq \sqrt{n} \log(n)$ y $\ell(W^\circ) \leq \sqrt{n}$.

Elegimos $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$B_2^n \subset SW^\circ \subset \sqrt{n}B_2^n, \quad (3.13)$$

y consideramos $T := I + \alpha S$ con $\alpha := \frac{\log(n)}{\sqrt{n}}$. Veamos que $\tilde{W} := (T^*)^{-1}(W)$ es la posición que buscamos. Primero,

$$\begin{aligned} \ell((T^*)^{-1}(W)) &= \ell((TW^\circ)^\circ) = \ell((I + \alpha S)W^\circ)^\circ \leq \ell(W) + \ell((\alpha SW^\circ)^\circ) \\ &\leq \sqrt{n} \log(n) + \alpha \ell((SW^\circ)^\circ). \end{aligned}$$

Observemos que por la inclusión (3.13) tenemos que $(SW^\circ)^\circ \supset \frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n$ y entonces $\ell((SW^\circ)^\circ) \leq \sqrt{n} \ell(B_2^n) \leq n$, lo que prueba la primera afirmación.

Para la segunda, observemos que como $\ell(\cdot)$ es una norma de operadores,

$$\ell(\tilde{W}^\circ) = \ell(TW^\circ) = \ell((id + \alpha S)W^\circ) \leq \|(id + \alpha S)^{-1} : \ell_2^n \rightarrow \ell_2^n\| \ell(W^\circ).$$

Ya que $id + \alpha S$ es un operador positivo, $\|(id + \alpha S)^{-1} : \ell_2^n \rightarrow \ell_2^n\| \leq 1$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \|id : \ell_2^n \rightarrow X_{\tilde{W}^\circ}\| &= \|(id + \alpha S)^{-1} : \ell_2^n \rightarrow X_{W^\circ}\| \\ &\leq \|((\alpha S)^{-1} + id)^{-1} : \ell_2^n \rightarrow \ell_2^n\| \|((\alpha S)^{-1} : \ell_2^n \rightarrow X_{W^\circ}\| \\ &\leq \|((\alpha S)^{-1} : \ell_2^n \rightarrow X_{W^\circ}\| \leq \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

El hecho de que $\frac{1}{|\tilde{W}|^{\frac{1}{n}}} \leq \ell(\tilde{W})$ se sigue directamente de la desigualdad de Urysohn, Lema 1.3.7. \square

Como vimos anteriormente, existe una relación entre la razón de volumen de un par de cuerpos centralmente simétricos K y L y la norma de operadores de X_L a X_K . La conocida desigualdad de Chevet acota la esperanza de un operador aleatorio Gaussiano en términos de algunos parámetros geométricos de los cuerpos K y L

Teorema 3.3.2 (Desigualdad de Chevet Gaussiana). *Sea $A = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz aleatoria con entradas Gaussianas independientes $g_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $L, K \subset \mathbb{R}^n$ dos cuerpos convexos, entonces*

$$\mathbb{E}(\|A : X_L \rightarrow X_K\|) \leq (\ell(K)\|id : \ell_2^n \rightarrow X_{L^\circ}\| + \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\|\ell(L^\circ)). \quad (3.14)$$

Para nuestros fines utilizaremos la siguiente versión de la desigualdad de Chevet que involucra una estimación probabilística.

Proposición 3.3.3. *Sea $A = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz aleatoria con entradas Gaussianas independientes $g_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $L, K \subset \mathbb{R}^n$ dos cuerpos convexos. Entonces, para todo $u \geq 0$, con probabilidad mayor o igual a $1 - e^{-u^2}$ tenemos que*

$$\|A : X_L \rightarrow X_K\| \leq \ell(K)\|id : \ell_2^n \rightarrow X_{L^\circ}\| + \ell(L^\circ)\|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| + u\|id : \ell_2^n \rightarrow X_{L^\circ}\| \cdot \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\|. \quad (3.15)$$

Daremos un esquema de la demostración de esta proposición en la Sección 3.4. Primero mostraremos cómo usar la posición de Rudelson junto con la desigualdad de Chevet para acotar la máxima razón de volumen de algunas clases naturales de cuerpos convexos.

Observemos que, por la Proposición 3.1.2 (2), acotar simultáneamente el determinante (inferiormente) y la norma (superiormente) de un operador da una cota de la razón de volumen. También necesitamos la siguiente cota inferior para el determinante de una matriz aleatoria Gaussiana, que puede encontrarse en [Piv10, Corollary 1].

Lema 3.3.4. *Sea $A = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $g_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, con probabilidad al menos $1 - e^{-n}$ tenemos*

$$\det(A)^{\frac{1}{n}} \geq \sqrt{n}. \quad (3.16)$$

Combinando la última desigualdad junto con la Proposición 3.3.6 podemos asegurar que para todo $u \leq \sqrt{n}$, con probabilidad mayor o igual a $1 - 2e^{-u^2}$, un operador aleatorio Gaussiana A satisface simultáneamente,

$$\det(A)^{\frac{1}{n}} \geq \sqrt{n},$$

y

$$\|A : X_L \rightarrow X_K\| \leq \ell(K) \|id : \ell_2^n \rightarrow X_{L^\circ}\| + \ell(L^\circ) \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| \quad (3.17)$$

$$+ u \|id : \ell_2^n \rightarrow X_{L^\circ}\| \cdot \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\|,$$

para todo par de cuerpos convexos $K, L \subset \mathbb{R}^n$.

Recordar también que para $T \in GL(n, \mathbb{R})$, por la Proposición 3.1.2 (2),

$$\text{vr}(K, L) \leq \frac{\|T : X_L \rightarrow X_K\| |K|^{\frac{1}{n}}}{|\det T|^{\frac{1}{n}} |L|^{\frac{1}{n}}}. \quad (3.18)$$

Suponiendo que L está en posición de Rudelson, y combinando las ecuaciones (3.17) y (3.18), tenemos que $\frac{TL}{\|T\|} \subset K$ y

$$\left(\frac{|K|}{\left| \frac{TL}{\|T\|} \right|} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \ell(K) |K|^{\frac{1}{n}} \sqrt{n} + (\log(n) + u) \sqrt{n} \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| |K|^{\frac{1}{n}} \quad (3.19)$$

con probabilidad mayor o igual a $1 - 2e^{-u^2}$. Por lo tanto, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.3.5. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $0 \leq u \leq \sqrt{n}$, entonces*

$$\text{lvr}(K) \leq \ell(K) |K|^{\frac{1}{n}} \sqrt{n} + \log(n) \sqrt{n} \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\|$$

$$+ u \sqrt{n} \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| |K|^{\frac{1}{n}}.$$

En lo que sigue vamos a utilizar la proposición anterior para acotar la razón de volumen para algunas clases de cuerpos convexos.

3.3.2. Normas unitariamente invariantes

Primero nos concentraremos en las bolas unitarias de las clases de Schatten. Para una matriz $T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ consideramos $s(T) = (s_1(T), \dots, s_d(T))$ la secuencia de autovalores de $(TT^*)^{\frac{1}{2}}$ (los valores singulares de T). La p -norma de Schatten de $T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ se define como

$$\sigma_p(T) = \|s(T)\|_{\ell_p^d}; \quad (3.20)$$

esto es, la norma en ℓ_p de los valores singulares de T . La p -norma de Schatten surge como una generalización de la clásica norma de Hilbert-Schmidt. Diferentes propiedades de ella en el contexto de dimensión finita fueron largamente estudiadas en el área del análisis geométrico asintótico. Por ejemplo König, Meyer y Pajor [KMP98] acotaron las constantes isotrópicas para las bolas unitarias de $\mathcal{S}_p^d \subset \mathbb{R}^{d \times d}$ ($1 \leq p \leq \infty$), Guédon y Paouris [GP07]

también estudiaron propiedades de concentración de masa para estas bolas, Barthe y Cordero-Eurasquin [BCE13] analizaron estimaciones de varianza, Radke y Vritsiou [RV16] probaron la conjetura de la cáscara fina para estas clases, y recientemente Kabluchko, Prochno and Thäle [KPT18] exhibieron el comportamiento asintótico exacto del volumen y la razón de volumen estándar; para mencionar algunos.

Por lo tanto, es natural intentar entender qué sucede con la máxima razón de volumen para su bola unitaria.

Escribimos $\mathcal{S}_p^d := (\mathbb{R}^{d \times d}, \sigma_p)$ y notamos con $B_{\mathcal{S}_p^d} \subset \mathbb{R}^{d \times d}$ a la bola unitaria de \mathcal{S}_p^d . Las normas de Schatten son casos particulares de una clase más general de normas, *normas unitariamente invariantes*. Una norma unitariamente invariante \mathcal{N} en $\mathbb{R}^{d \times d}$, es una norma que satisface $\mathcal{N}(UTV) = \mathcal{N}(T)$ para todo $U, V \in \mathcal{O}(d)$. La norma σ_p es una de las normas de operadores unitariamente invariante más importante. Dada una norma unitariamente invariante \mathcal{N} en $\mathbb{R}^{d \times d}$ podemos definir una norma permutacionalmente simétrica τ en \mathbb{R}^d como sigue,

$$\tau(x) := \mathcal{N}(D_x), \quad (3.21)$$

donde D_x es la matriz diagonal que tiene como entradas a los coeficientes de x . El hecho de que \mathcal{N} es unitariamente invariante implica que τ es permutacionalmente simétrica. Dada $T \in \mathbb{R}^{d \times d}$, como $(TT^*)^{\frac{1}{2}}$ se diagonaliza en una base ortonormal tenemos que para todo $T \in \mathbb{R}^{d \times d}$,

$$\mathcal{N}(T) = \tau(s_1(T), \dots, s_n(T)).$$

Por ejemplo, si \mathcal{N} es σ_p , τ es la ℓ_p -norma usual.

Sea $\lambda(\tau) = \tau(\sum_{i=1}^d e_i)$ por el Lema 3.2.4, tenemos que

$$\frac{1}{\lambda(\tau)} B_\infty^d \subset B_\tau \subset \frac{d}{\lambda(\tau)} B_1^d,$$

y entonces

$$\frac{1}{\lambda(\tau)} \mathcal{S}_\infty^d \subset B_{\mathcal{N}} \subset \frac{d}{\lambda(\tau)} \mathcal{S}_1^d. \quad (3.22)$$

Tomando volúmenes,

$$\frac{1}{\lambda(\tau)} |\mathcal{S}_\infty^d|^{\frac{1}{d^2}} \leq |B_{\mathcal{N}}|^{\frac{1}{d^2}} \leq \frac{d}{\lambda(\tau)} |\mathcal{S}_1^d|^{\frac{1}{d^2}}.$$

En [Ray84], Saint Raymond calculó el volumen de $B_{\mathcal{S}_p^d}$ for $1 \leq p \leq \infty$. En particular, probó que

$$|\mathcal{S}_\infty^d|^{\frac{1}{d^2}} \sim d |\mathcal{S}_1^d|^{\frac{1}{d^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{d}}. \quad (3.23)$$

Entonces, concluimos que

$$|B_{\mathcal{N}}|^{\frac{1}{d^2}} \sim \left| \frac{1}{\lambda(\tau)} \mathcal{S}_\infty^d \right|^{\frac{1}{d^2}}. \quad (3.24)$$

Teorema 3.3.6. *Sea $B_{\mathcal{N}}$ la bola unitaria de una norma unitariamente invariante \mathcal{N} en $\mathbb{R}^{d \times d}$ y $L \subset \mathbb{R}^{d^2}$ un cuerpo convexo en posición de Rudelson. Sea $A = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq d^2} \in \mathbb{R}^{d^2 \times d^2}$ una matriz aleatoria con entradas Gaussianas independientes $g_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Con probabilidad mayor o igual a $1 - 2e^{-d}$, el cuerpo $\tilde{L} := \frac{AL}{\|A\|} \frac{1}{\tau(u)} \subset B_{\mathcal{N}}$ y también*

$$\frac{|B_{\mathcal{N}}|^{\frac{1}{d^2}}}{|\tilde{L}|^{\frac{1}{d^2}}} \leq d.$$

Proof of Theorem 3.3.6. Notemos que por la ecuación (3.23) sabemos que

$$|B_{\mathcal{S}_\infty^d}|^{\frac{1}{d^2}} \sim d^{-\frac{1}{2}}.$$

Por otro lado, sea $G \in d \times d$ una matriz con entradas Gaussianas independientes. Por la desigualdad de Chevet Gaussian, Teorema 3.3.2, sabemos que

$$\mathbb{E}(\|G : \ell_2^d \rightarrow \ell_2^d\|) \leq \sqrt{d}.$$

Como $\|G : \ell_2^d \rightarrow \ell_2^d\|$ coincide con $\|G\|_{\mathcal{S}_\infty^d}$, tenemos que

$$\ell(B_{\mathcal{S}_\infty^d}) |B_{\mathcal{S}_\infty^d}|^{\frac{1}{d^2}} \sim 1.$$

La inclusión $B_2^d \subset B_\infty^d$ implica que $B_{\mathcal{S}_2^d} \subset B_{\mathcal{S}_\infty^d}$ y entonces, $\|id : \mathcal{S}_2^d \rightarrow \mathcal{S}_\infty^d\| \leq 1$, que coincide con $\|id : \ell_2^{d^2} \rightarrow \mathcal{S}_\infty^d\| \leq 1$ ya que la norma en \mathcal{S}_2^d es la norma euclídea en $\mathbb{R}^{d \times d}$.

Usando el hecho de que L está en posición de Rudelson, por la ecuación (3.19) tenemos que para $u = \sqrt{d}$, $A(L) \subset \|A\| \mathcal{S}_\infty^d$, y

$$\left(\frac{\|A\| |\mathcal{S}_\infty^d|}{|A(L)|} \right)^{\frac{1}{d}} \leq d.$$

con probabilidad mayor o igual que $1 - e^{-d}$.

Por la ecuación (3.22),

$$\tilde{L} := \frac{1}{\lambda(\tau)} \frac{A(L)}{\|A\|} \subset \frac{1}{\lambda(\tau)} \mathcal{S}_\infty^d \subset B_{\mathcal{N}}$$

Como $|\frac{1}{\lambda(\tau)} \mathcal{S}_\infty^d|^{\frac{1}{d^2}} \sim |B_{\mathcal{N}}|^{\frac{1}{d^2}}$ obtenemos la cota deseada. \square

Como consecuencia de esto obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.7. *Sea \mathcal{N} una norma unitariamente invariante en $\mathbb{R}^{d \times d}$ entonces*

$$lvr(B_{\mathcal{N}}) \leq d.$$

3.3.3. Normas tensoriales

Otra clase natural de cuerpos convexos para la que podemos obtener cotas asintóticas ajustadas para la máxima razón de volumen son bolas unitarias dadas por productos tensoriales de espacios ℓ_p . Los productos tensoriales cumplen un rol clave en la teoría local de espacios de Banach. Pueden ser identificados con espacios naturales como formas multilineales o polinomios homogéneos.

Repasaremos las definiciones básicas sobre productos tensoriales, recomendamos ver [DF92, Din99, Flo97] para un desarrollo completo en el tema. Dado un espacio normado E escribimos $\otimes^m E$ para el m -ésimo producto tensorial de E , y $\otimes^{m,s} E$ para el m -ésimo producto tensorial simétrico, es decir, el subespacio de $\otimes^m E$ que consiste en todos los tensores que pueden escribirse como $\sum_{i=1}^k \lambda_i \otimes^m x_i$, donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y $\otimes^m x_i = x_i \otimes \cdots \otimes x_i$. Observar que si E tiene dimensión n , $\dim(\otimes^m E) = n^m$ y $\dim(\otimes^{m,s} E) = \binom{m+n-1}{n-1}$. Como m es un número fijo, tenemos que en ambos casos la dimensión del espacio se comporta como n^m .

Distintas normas pueden definirse en los productos tensoriales, nosotros nos concentraremos en dos de ellas. A partir de ahora, por simplicidad, E es un espacio de dimensión finita.

La *norma tensorial proyectiva* se define como

$$\pi(x) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^r \prod_{i=1}^m \|x_i^r\|_E \right\},$$

donde el ínfimo se toma entre todas las representaciones de x , de la forma $x = \sum_{i=1}^r x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$. La *norma tensorial inyectiva* se define como

$$\varepsilon(x) = \sup \left| \sum_{j=1}^r \prod_{i=1}^m |\varphi_i(x_i)| \right|,$$

donde el supremo se toma sobre $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in E^*$ y $\sum_{j=1}^r x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$ es una representación fija de x . Sea $\alpha = \varepsilon$ o π , escribimos \otimes_α^m para m -ésimo producto provisto de la norma α .

El espacio $\otimes_\varepsilon^m E$ puede ser identificado en el espacio de operadores m -lineales definido en $(E^*)^m$ con la norma del supremo usual. Un operador $T : E^m \rightarrow \mathbb{R}$ es m -nuclear si puede escribirse como,

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_1^i \cdots \varphi_m^i,$$

con $\varphi \in E^*$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_1^i\|_{E^*} \cdots \|\varphi_m^i\|_{E^*} < \infty$. Podemos definir la siguiente norma en el espacio de todos los operadores m -nucleares.

$$\|T\|_{nuc} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_1^i\|_{E^*} \cdots \|\varphi_m^i\|_{E^*} \right\},$$

donde el ínfimos e toma sobre todas las representaciones de T como antes. Con esta norma, el espacio de todos los operadores m -nucleares en $(E^*)^n$ se puede identificar con $\bigotimes_{\pi}^m E$.

De la misma manera podemos definir versiones de la norma inyectiva y proyectiva para el producto tensorial simétrico. Definimos la *norma proyectiva simétrica*,

$$\pi_s(x) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^r \|x_i\|_E^m \right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de x de la forma $x = \sum_{i=1}^r \otimes^m x_i$.

La *norma inyectiva simétrica* se calcula de la siguiente forma,

$$\varepsilon_s(x) = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left| \sum_{i=1}^r \varphi(x_i)^m \right|,$$

donde $x = \sum_{i=1}^r \otimes^m x_i$ es una representación fija de x . Es importante observar que, en general, la norma tensorial y su versión simétrica no coinciden. O sea, $\alpha|_{\bigotimes^{m,s} E} \neq \alpha_s$.

Los espacios $\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} E$ y $\bigotimes_{\pi_s}^{m,s} E$ pueden representarse como espacios de polinomios. Una función $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice un *polinomio m -homogéneo* si existe una forma m -lineal $\varphi : E^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(x) = \varphi(x, \dots, x)$. Excribimos $\mathcal{P}(^m E)$ para referirnos al conjunto de polinomios m -homogéneos en E . Si definimos en $\mathcal{P}(^m E^*)$ la norma,

$$\|p\| := \sup_{x \in B_E} |p(x)|,$$

el espacio resulta isométrico a $\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} E$.

Un polinomio m -homogéneo se dice *nuclear* si puede escribirse como

$$p(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (\varphi_i(x))^m,$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\varphi_i \in E^*$ y $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \|\varphi_i\|_{E^*} < \infty$. Excribimos $\mathcal{P}_{nuc}(^m E)$ para referirnos al espacio de polinomios nucleares. Si definimos la norma,

$$\|p\|_{nuc} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \|\varphi_i\|_{E^*} \right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de p como antes. El espacio $\mathcal{P}_{nuc}({}^m E^*)$ con la norma correspondiente se identifica con $\bigotimes_{\pi_s}^{m,s} E$.

Vamos a trabajar con $E = \ell_p^n$ y, como hicimos en el caso de las normas unitariamente invariantes, para obtener cotas para la razón de volumen necesitamos estimar algunos parámetros de los espacios involucrados. Defant y Prengel [DP09] obtuvieron estimaciones asintóticas para muchos de ellos. Resumimos sus resultados en la siguiente proposición.

Proposición 3.3.8. *Para $m \in \mathbb{N}$ sea $d = n^m$ y $d_s = \binom{m+n-1}{n-1}$. Para cada $1 \leq p \leq \infty$ tenemos,*

$$\begin{aligned}
1. \quad & \left| B_{\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} \ell_p^n} \right|^{\frac{1}{d_s}} \sim \left| B_{\bigotimes_{\varepsilon}^m \ell_p^n} \right|^{\frac{1}{d}} \sim \begin{cases} n^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}} & p \leq 2 \\ n^{-\frac{1}{p}} & p \geq 2. \end{cases} \\
2. \quad & \left| B_{\bigotimes_{\pi_s}^{m,s} \ell_p^n} \right|^{\frac{1}{d_s}} \sim \left| B_{\bigotimes_{\pi}^m \ell_p^n} \right|^{\frac{1}{d}} \sim \begin{cases} n^{1-\frac{1}{p}-m} & p \leq 2 \\ n^{\frac{1}{2}-m(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} & p \geq 2. \end{cases} \\
3. \quad & \ell(B_{\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} \ell_p^n}) \sim \ell(B_{\bigotimes_{\varepsilon}^m \ell_p^n}) \sim \begin{cases} n^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}} & p \leq 2 \\ n^{\frac{1}{p}} & p \geq 2. \end{cases} \\
4. \quad & \ell(B_{\bigotimes_{\pi_s}^{m,s} \ell_p^n}) \sim \ell(B_{\bigotimes_{\pi}^m \ell_p^n}) \sim \begin{cases} n^{m-1+\frac{1}{p}} & p \leq 2 \\ n^{m(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})-\frac{1}{2}} & p \geq 2. \end{cases} \\
5. \quad & \|id : \ell_2^{d_s} \rightarrow \bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} \ell_p^n\| \sim \|id : \ell_2^d \rightarrow \bigotimes_{\varepsilon}^m \ell_p^n\| \sim \begin{cases} n^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} & p \leq 2 \\ 1 & p \geq 2. \end{cases} \\
6. \quad & \|id : \ell_2^{d_s} \rightarrow \bigotimes_{\pi_s}^{m,s} \ell_p^n\| \sim \|id : \ell_2^d \rightarrow \bigotimes_{\pi}^m \ell_p^n\| \sim \begin{cases} n^{\frac{m}{2}+\frac{1}{p}-1} & p \leq 2 \\ n^{\frac{m}{p}-\frac{1}{2}} & 2 \leq p \leq 2m \\ 1 & p \geq 2m. \end{cases}
\end{aligned}$$

Todas las demostraciones pueden encontrarse en [DP09]. La comparación entre el producto tensorial completo y el simétrico se sigue de [DP09, Proposición 3.1]. Las cotas (1) y (2) están en [DP09, Teorema 4.2]. Para (3) y (4) ver [DP09, Lema 4.3]. La prueba de (5) se sigue del hecho de que

$$\|id : \ell_2^{n^m} \rightarrow \bigotimes_{\varepsilon}^m \ell_p^n\| = \|id : \ell_2^n \rightarrow \ell_p^n\|^m.$$

Para (6) se requieren argumentos más técnicos, el resultado está enunciado en [DP09, Lemma 5.2].

Notar que, en particular, para todo espacio E involucrado en la proposición anterior, tenemos que

$$\ell(B_E) | B_E |^{\frac{1}{\dim(E)}} \sim 1.$$

Luego, por la ecuación (3.19), si $K = B_E$, y $N = \dim(E)$ tenemos que, si L es un cuerpo convexo en posición de Rudelson y A es una matriz aleatoria Gaussiana,

$$\left(\frac{\|A\| \|K\|}{|A(L)|} \right)^{\frac{1}{N}} \leq \sqrt{N} + (\log N + u) \sqrt{N} \|id : \ell_2^N \rightarrow E\| |B_E|^{\frac{1}{N}}.$$

con probabilidad mayor que $1 - 2e^{-u^2}$. Ahora bien, si tomamos por ejemplo, $E = \bigotimes_{\varepsilon}^m \ell_p^n$ con $p \leq 2$, tenemos que

$$\|id : \ell_2^N \rightarrow \bigotimes_{\varepsilon}^m \ell_p^n\| |B_{\bigotimes_{\varepsilon}^m \ell_p^n}|^{\frac{1}{N}} = n^{2m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) - \frac{1}{2}}.$$

Entonces, tomando $u = n^{-2m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) + \frac{1}{2}} \geq \log(N)$, obtenemos

$$\left(\frac{\|A\| \|K\|}{|A(L)|} \right)^{\frac{1}{N}} \leq \sqrt{N}.$$

Puede verificarse que en todos los casos, $\|id : \ell_2^N \rightarrow E\| |B_E|^{\frac{1}{N}} \leq \frac{1}{\log(N)}$. Luego, eligiendo

$$u^{-1} = \|id : \ell_2^N \rightarrow E\| |B_E|^{\frac{1}{N}}$$

tenemos que con, probabilidad alta

$$\left(\frac{\|A\| \|K\|}{|A(L)|} \right)^{\frac{1}{N}} \leq \sqrt{N}.$$

Argumentando de forma análoga para los casos que restan, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.3.9. Para $E = \bigotimes_{\varepsilon}^m \ell_p^n, \bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} \ell_p^n, \bigotimes_{\pi}^m \ell_p^n$ tenemos que,

$$lwr(B_E) \leq \sqrt{\dim(E)}.$$

3.4. Procesos Gaussianos y la desigualdad de Chevet

A continuación presentamos la demostración de la Proposición 3.3.3. Para eso necesitamos introducir algunas definiciones sobre procesos aleatorios. Sea $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Con un *proceso aleatorio* nos referimos a una familia de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in T} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con T un conjunto cualquiera. El problema de acotar la norma de un operador puede

ser entendido como el problema de acotar el supremo de un proceso aleatorio. Como el supremo de funciones medibles no es necesariamente medible, definimos el supremo del proceso como:

$$\sup_{t \in T} X_t = \sup_{\substack{T_0 \subset T, \\ T_0 \text{ finito}}} (\sup_{t \in T_0} X_t).$$

Definimos el *incremento* del proceso como

$$d(s, t) := \|X_s - X_t\|_2 = (\mathbb{E}(X_s - X_t)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Decimos que un proceso es un *proceso Gaussiano* si para todo conjunto finito $T_0 \subset T$, el vector $(X_i)_{i \in T_0}$ tiene distribución normal. Equivalentemente, toda combinación lineal, $\sum a_t X_t$ es una variable aleatoria normal. Un ejemplo básico es el llamado *proceso Gaussiano canónico*

$$X_t := \langle g, t \rangle, \quad (3.25)$$

donde g es un vector aleatorio Gaussian estándar y $T \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cualquiera. En este caso los incrementos coinciden con las distancias euclídeas en \mathbb{R}^n .

La demostración de la desigualdad de Chevet depende de una desigualdad de Sudakov (ver por ejemplo [AAGM15, Proposición 9.1.7]) que compara el supremo de dos procesos Gaussianos que tienen incrementos comparables.

Proposición 3.4.1 (Sudakov). *Sea $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $\{X_t\}_{t \in T}$ y $\{Y_t\}_{t \in T}$ dos procesos Gaussianos con $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(Y_t) = 0$ para todo $t \in T$. Si*

$$\|X_t - X_s\|_2 \leq \|Y_t - Y_s\|_2 \quad (3.26)$$

para todo $s, t \in T$, entonces

$$\mathbb{E} \sup_{t \in T} X_t \leq \mathbb{E} \sup_{t \in T} Y_t,$$

donde $g = (g_1, \dots, g_n)$, $h = (h_1, \dots, h_n)$ y $(g_i)_{i=1}^n, (h_j)_{j=1}^n$ son variables aleatorias Gaussianas independientes. Notar que

$$\mathbb{E} \left(\sup_{(x, y^*) \in T} Y_{(x, y^*)} \right) = (\ell(K) \|id : \ell_2^n \rightarrow X_{L^\circ}\| + \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| \ell(L^\circ)).$$

Para probar la Proposición 3.3.3, vamos a utilizar un resultado de Talagrand [Ver18, Teorema 8.5.5] que está enunciado de una forma más general. En nuestro contexto puede verse como una versión de la Proposition 3.4.1 con una estimación de decaimiento. Aquí, $\|\cdot\|_{\psi_2}$ es la norma sub-Gaussiana, definida como

$$\|X\|_{\psi_2} := \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \int_{\Omega} e^{\frac{|X(\omega)|^2}{\lambda^2}} d\mu \leq 2 \right\}.$$

Teorema 3.4.2. *Sea $(X_t)_{t \in T}$ un proceso aleatorio y $(Y_t)_{t \in T}$ un proceso Gaussiano tal que $\|X_t - X_s\|_{\psi_2} \leq \|Y_t - Y_s\|_2$. Entonces, para todo $u \geq 0$, el evento*

$$\sup_{t \in T} |X_t| \leq (\mathbb{E}(\sup Y_t) + u \text{diam}(T))$$

sucede con probabilidad al menos $1 - 2e^{-u^2}$. El diámetro de T es con respecto a la distancia definida por los incrementos del proceso Y_t .

Presentamos a continuación un esquema de la demostración de la Proposición 3.3.3.

Esquema de la demostración de la Proposición 3.3.3. Como antes, definimos en $L \times K^\circ$ el proceso aleatorio dado por

$$X_{(x,y^*)} := \langle Ax, y^* \rangle.$$

Notemos que si consideramos el proceso Gaussiano

$$Y_{(x,y^*)} := \langle g, x \rangle \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| + \langle h, y^* \rangle \|id : \ell_2^n \rightarrow X_{L^\circ}\|,$$

donde $g = (g_1, \dots, g_n)$, $h = (h_1, \dots, h_n)$ y $(g_i)_{i=1}^n, (h_j)_{j=1}^n$ variables Gaussianas independientes; tenemos,

$$\|X_{(x,y^*)} - X_{(\tilde{x}, \tilde{y}^*)}\|_{\psi_2} \leq \|Y_{(x,y^*)} - Y_{(\tilde{x}, \tilde{y}^*)}\|_2.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|X_{(x,y^*)} - X_{(\tilde{x}, \tilde{y}^*)}\|_{\psi_2} &= \left\| \sum_{i,j} g_{ij} (x_i y_j^* - \tilde{x}_i \tilde{y}_j^*) \right\|_{\psi_2} \\ &\leq \left(\sum_{i,j} \|g_{ij} (x_i y_j^* - \tilde{x}_i \tilde{y}_j^*)\|_{\psi_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{i,j} |x_i y_j^* - \tilde{x}_i \tilde{y}_j^*|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{i,j} |x_i y_j^* - \tilde{x}_i y_j^* + \tilde{x}_i y_j^* - \tilde{x}_i \tilde{y}_j^*|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|x - \tilde{x}\|_2 \|\tilde{y}^*\|_2 + \|x\|_2 \|y^* - \tilde{y}^*\|_2 \\ &\leq \|x - \tilde{x}\|_2 \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| + \|y^* - \tilde{y}^*\|_2 \|id : \ell_2^n \rightarrow X_{L^\circ}\|. \\ &= \|Y_{(x,y^*)} - Y_{(\tilde{x}, \tilde{y}^*)}\|_2. \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 3.4.2 obtenemos,

$$\begin{aligned} \|A : X_L \rightarrow X_K\| &= \sup_{(x,y^*) \in L \times K^\circ} X_{(x,y^*)} \\ &\leq \left(\mathbb{E} \left[\sup_{(x,y^*) \in L \times K^\circ} Y_{(x,y^*)} \right] + u \text{diam}(K \times L^\circ) \right), \end{aligned}$$

con probabilidad al menos $1 - e^{-u^2}$.

El resultado se sigue del hecho de que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{(x,y^*) \in L \times K^\circ} Y_{(x,y^*)}\right] = \ell(K)\|id : \ell_2^n \rightarrow X_{L^\circ}\| + \ell(L^\circ)\|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\|$$

y $\text{diam}(L \times K^\circ) \sim \|id : \ell_2^n \rightarrow X_{L^\circ}\| \cdot \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\|$. □

Capítulo 4

Cotas inferiores

En este capítulo tratamos el problema de encontrar cotas inferiores para la máxima razón de volumen. Probaremos que para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$, $\text{lvr}(K) \geq \sqrt{n}$. Si combinamos esta cota con las que obtuvimos en el capítulo anterior concluimos que es la mejor cota general posible. El ingrediente clave para esta demostración es el uso de determinados politopos aleatorios que fueron introducidos por Gluskin mientras estudiaba el diámetro del compacto de Banach-Mazur. En la Sección 4.2 definimos estos politopos y mostramos como utilizarlos para acotar la razón de volumen.

4.1. Cotas inferior para la razón de volumen

Dado un cuerpo convexo K buscamos cotas inferiores para su razón de volumen. Esto es, para un cuerpo K queremos encontrar otro cuerpo, L , tal que $\text{vr}(K, L)$ es “grande”. Khrabrov, en [Khr01], probó que para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ existe un cuerpo L tal que

$$\text{vr}(K, L) \geq \sqrt{\frac{n}{\log \log(n)}}. \quad (4.1)$$

Quitaremos el doble logaritmo en la ecuación (4.1) probando que

$$\text{lvr}(K) \geq \sqrt{n} \quad (4.2)$$

vale para cualquier cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$. Teniendo en cuenta que, como vimos en el capítulo anterior, para muchas colecciones de cuerpos sabemos que $\text{lvr}(K) \leq \sqrt{n}$, la cota en (4.2) es la mejor cota general posible.

Por la Proposición 3.1.1, tenemos

$$\text{vr}(K - K, L) \leq \text{vr}(K, L)\text{vr}(K - K, K) \sim \text{vr}(K, L).$$

Luego, podemos reducir el problema de acotar inferiormente la máxima razón de volumen al caso centralmente simétrico. Recordemos la Proposición 3.1.2 (1): dados $K, L \subset \mathbb{R}^n$ dos cuerpos centralmente simétricos,

$$\text{vr}(K, L) = \left(\frac{|K|}{|L|} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \inf_{T \in SL(n, \mathbb{R})} \|T : X_L \rightarrow X_K\|. \quad (4.3)$$

Entonces, para mostrar “buenas” cotas inferiores para $\text{lvr}(K)$ (para K centralmente simétrico) necesitamos un cuerpo L tal que su volumen sea “chico” y la norma $\|T : X_L \rightarrow X_K\|$ sea grande para todo operador $T \in SL(n, \mathbb{R})$.

Recordar también que, por la ecuación (3.4), $\text{lvr}(K)$ puede calcularse tomando el supremo de $\text{vr}(K, L)$ sólo sobre cuerpos centralmente simétricos L .

4.2. Politopos de Gluskin

La idea central de [Khr01] es usar el método probabilístico. Él consideró cuerpos aleatorios con vértices distribuidos en la esfera unitaria y probó que con probabilidad positiva estos cuerpos satisfacen la cota (4.1). Se basó en el trabajo de Gluskin [Glu81], quien definió los cuerpos aleatorios

$$L^{(m)} := \text{absconv}\{X_1, \dots, X_m, e_1, \dots, e_n\}, \quad (4.4)$$

donde $\{X_i\}_{i=1}^m$ son vectores aleatorios independientes distribuidos según la medida normalizada de Haar en S^{n-1} , σ . Podemos construir la medida σ como una medida cónica de la siguiente manera:

$$\sigma_n(A) = \frac{|\{x \in B_2^n \mid \frac{x}{\|x\|_2} \in A\}|}{|B_2^n|}, \quad (4.5)$$

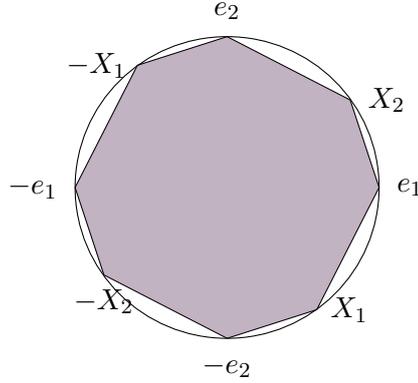
para cualquier conjunto $A \subset S^{n-1}$.

Gluskin utilizó esta construcción para encontrar el orden asintótico del diámetro del *compacto de Banach-Mazur* (también conocido como compacto de Minkowski), \mathcal{C}_n , el conjunto de todos los cuerpos convexos centralmente simétricos de dimensión n junto con la *distancia de Banach-Mazur*:

$$d_{BM}(K, L) = \inf\{a \cdot b \mid \frac{1}{a} \subset TD \subset bK\}, \quad (4.6)$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los operadores invertibles $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. El teorema de John implica que $d_{BM}(K, B_2^n) \leq \sqrt{n}$ para todo cuerpo convexo K centralmente simétrico, y por lo tanto $\text{diam}(\mathcal{C}_n) \leq n$. Gluskin mostró que, si $m \sim n$, con probabilidad positiva, dos politopos aleatorios $L^{(m)}$ y $L'^{(m)}$ satisfacen:

$$d_{BM}(L^{(m)}, L'^{(m)}) \geq n.$$

Figura 4.1: politopo aleatorio $L^{(2)}$ en \mathbb{R}^2 .

Observar que, como $L^{(m)} \subset B_2^n$, por el Lema 3.2.1 el volumen del politopo aleatorio $L^{(m)}$ está acotado por

$$|L^{(m)}|^{1/n} \leq \frac{\sqrt{\log(\frac{m}{n})}}{n}. \quad (4.7)$$

De hecho, esta cota es el comportamiento asintótico exacto de $|L^{(m)}|^{1/n}$ con probabilidad mayor o igual a $1 - \frac{1}{m}$ [BGVV14, Capítulo 11].

Si combinamos la cota para el volumen (4.7) con (4.3) necesitamos probar la existencia de un politopo $L^{(m)}$ para el que podamos acotar inferiormente la norma $\|T : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\|$ para todo operador $T \in SL(n, \mathbb{R})$. Notar que cuando m crece, $\inf_{T \in SL(n, \mathbb{R})} \|T : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\|$ aumenta, pero $\frac{1}{|L^{(m)}|^{1/n}}$ disminuye, por lo que existe algún tipo de compensación.

En [Khr01], para $m = n \log(n)$, se muestra que, con probabilidad alta, la norma $\|T : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\|$ es “grande” para todo $T \in SL(n, \mathbb{R})$. Para conseguir todo esto probó la siguiente interesante desigualdad:

Si $K \subset \mathbb{R}^n$ está en posición de Löwner entonces para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $\beta > 0$,

$$\mathbb{P} \left\{ \text{Existe } T \in SL(n, \mathbb{R}) : \|T : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\| \leq \beta \left(\frac{|B_2^n|}{|K|} \right)^{1/n} \right\} \leq (C\sqrt{n})^{n^2} \left(\frac{|B_2^n|}{|K|} \right)^n \beta^{nm-n^2}. \quad (4.8)$$

Para probar nuestra contribución principal, el Teorema 4.2.9, presentamos el siguiente refinamiento de la estimación anterior.

Proposición 4.2.1. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo centralmente simétrico y $L^{(m)}$ el politopo aleatorio definido en (4.4), entonces para todo $\beta > 0$ tenemos*

$$\mathbb{P} \left\{ \text{Existe } T \in SL(n, \mathbb{R}) : \|T : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\| \leq \beta \left(\frac{|B_2^n|}{|K|} \right)^{1/n} \right\} \\ \leq C^{n^2} \left(\|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| \sqrt{n} |K|^{\frac{1}{n}} \right)^{n^2} (2\beta)^{nm},$$

para alguna constante absoluta $C > 0$.

Para probar la Proposición 4.2.1 necesitamos algunos lemas. El primero, Lema 4.2.2, acota la probabilidad de que un operador fijo $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de determinante uno tenga norma “grande”. El segundo, Lema 4.2.3 es un herramienta técnica que acota el número de puntos en una ε -red para un conjunto adecuado. Esto nos permite usar un argumento estándar de ε -redes para pasar de un operador fijo a todos los operadores en $SL(n, \mathbb{R})$.

Lema 4.2.2. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, $L^{(m)}$ el politopo aleatorio en (4.4), $T \in SL(n, \mathbb{R})$ y $\alpha > 0$. Entonces*

$$\mathbb{P} \{ \|T : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\| \leq \alpha \} \leq \alpha^{mn} \left(\frac{|K|}{|B_2^n|} \right)^m. \quad (4.9)$$

Demostración. Notar que si $L^{(m)} = \text{absconv}\{X_1, \dots, X_m, e_1, \dots, e_n\}$, para que $\|T : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\| \leq \alpha$, debemos tener que para todo $1 \leq i \leq m$, $TX_i \in \alpha K$. Luego,

$$\mathbb{P} \{ \|T : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\| \leq \alpha \} \leq \mathbb{P} \{ \text{Para todo } 1 \leq i \leq m, TX_i \in \alpha K \} \\ = \sigma \{ S^{n-1} \cap T^{-1}(\alpha K) \}^m.$$

Recordar que σ puede obtenerse como una medida cónica (ecuación (4.5)) y entonces,

$$\sigma \{ S^{n-1} \cap T^{-1}(\alpha K) \} = \frac{|\{x \in B_2^n \mid \frac{x}{\|x\|_2} \in S^{n-1} \cap \alpha T^{-1}(K)\}|}{|B_2^n|}.$$

Como $\alpha T^{-1}(K)$ es un cuerpo convexo que contiene al origen, tenemos que

$$\{x \in B_2^n \mid \frac{x}{\|x\|_2} \alpha T^{-1}(K)\} \subset \alpha T^{-1}(K),$$

y luego,

$$\sigma \{ S^{n-1} \cap T^{-1}(\alpha K) \} \leq \frac{|\alpha T^{-1}(K)|}{|B_2^n|} \\ = \alpha^n \frac{|K|}{|B_2^n|},$$

como queríamos. \square

A continuación presentamos el segundo lema involucrado en la prueba de la Proposición 4.2.1. Esto debe compararse con [Khr01, Lemma 5]: observar que tanto el conjunto como la métrica difieren. Este cambio sutil pero importante es el ingrediente clave que necesitamos.

Lema 4.2.3. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, $\gamma > 0$ y*

$$\mathcal{M}_\gamma^K := \{T \in SL(n, \mathbb{R}) \text{ and } \|T : \ell_1^n \rightarrow X_K\| \leq \gamma\}.$$

Entonces existe una γ -red, \mathcal{N}_γ^K para \mathcal{M}^K en la métrica $\mathcal{L}(\ell_2^n, X_K)$ tal que

$$\#\mathcal{N}_\gamma^K \leq C^{n^2} \left(\|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| \sqrt{n} |K|^{1/n} \right)^{n^2}.$$

Demostración. Sea U la bola unitaria de $\mathcal{L}(\ell_2^n, X_K)$. Mediante la identificación estándar pensamos a \mathcal{M}^K y U como subconjuntos de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Sea \mathcal{N}_γ^K una colección maximal de elementos de \mathcal{M}^K γ -separados. Estos elementos forman una γ -red y, para todo $\xi \in \mathcal{N}_\gamma^K$, las bolas $\xi + \frac{\gamma}{2}U$ son disjuntas. Como

$$\|T : \ell_1^n \rightarrow X_K\| \leq \|T : \ell_2^n \rightarrow X_K\|,$$

tenemos que $\gamma U \subset \{T : \|T : \ell_1^n \rightarrow X_K\| \leq \gamma\}$ y entonces

$$\bigcup_{\xi \in \mathcal{N}_\gamma^K} \xi + \frac{\gamma}{2}U \subset \frac{3}{2} \{T : \|T : \ell_1^n \rightarrow X_K\| \leq \gamma\}.$$

Computando el volumen de ambos lados obtenemos la siguiente cota para $\#\mathcal{N}_\varepsilon^K$,

$$\begin{aligned} \#\mathcal{N}_\gamma^K \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n^2} |U| &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{n^2} |\{T : \|T : \ell_1^n \rightarrow X_K\| \leq \gamma\}| \\ \#\mathcal{N}_\gamma^K &\leq \left(\frac{3}{\gamma}\right)^{n^2} \frac{|\{T : \|T : \ell_1^n \rightarrow X_K\| \leq \gamma\}|}{|U|}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} &\{T \in \mathcal{L}(\ell_1^n, X_K) : \|T : \ell_1^n \rightarrow X_K\| \leq \gamma\} \\ &\subset \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X_i \in \gamma \cdot K \text{ para todo } i\} \\ &\subset \underbrace{(\gamma K) \times \cdots \times (\gamma K)}_n, \end{aligned} \quad (4.11)$$

luego

$$|\{T : \|T : \ell_1^n \rightarrow X_K\| \leq \gamma\}| \leq (\gamma)^{n^2} |K|^n. \quad (4.12)$$

Para acotar la ecuación (4.10) necesitamos una cota inferior para $|U|$. Pasando a coordenadas esféricas puede verificarse que

$$\frac{|U|}{|B_2^{n^2}|} = \int_{S^{n^2-1}} \|T\|_{\mathcal{L}(\ell_2^n, X_K)}^{-n^2} d\sigma(T), \quad (4.13)$$

donde σ es la medida de Haar normalizada en S^{n^2-1} . Ahora aplicamos la desigualdad de Hölder para obtener

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left(\int_{S^{n^2-1}} \|T\|_{\mathcal{L}(\ell_2^n, X_K)}^2 d\sigma(T) \right)^{1/2} \left(\int_{S^{n^2-1}} \|T\|_{\mathcal{L}(\ell_2^n, X_K)}^{-2} d\sigma(T) \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{S^{n^2-1}} \|T\|_{\mathcal{L}(\ell_2^n, X_K)}^2 d\sigma(T) \right)^{1/2} \left(\int_{S^{n^2-1}} \|T\|_{\mathcal{L}(\ell_2^n, X_K)}^{-n^2} d\sigma(T) \right)^{1/n^2}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{|U|}{|B_2^{n^2}|} \geq \left(\int_{S^{n^2-1}} \|T\|_{\mathcal{L}(\ell_2^n, X_K)}^2 d\sigma(T) \right)^{-n^2/2}.$$

Comparando promedios esféricos y Gaussianos (ecuación (1.11)) y aplicando la desigualdad de Chevet Gaussiana, Teorema 3.3.2 (recordar que todos los momentos Gaussianos son comparables (1.13)), tenemos que

$$\left(\int_{S^{n^2-1}} \|T\|_{\mathcal{L}(\ell_2^n, X_K)}^2 d\sigma(T) \right)^{1/2} \leq \frac{1}{n} (\ell(K) + \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| \sqrt{n}),$$

lo que implica

$$(\ell(K) + \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| \sqrt{n})^{-n^2} C^{-n^2} \geq |U|. \quad (4.14)$$

Usando (4.12) y (4.14) en la ecuación (4.10) obtenemos:

$$\#\mathcal{N}_\gamma^K \leq C^{m^2} \left(\ell(K) |K|^{1/n} + \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| \sqrt{n} |K|^{1/n} \right)^{n^2}.$$

Ahora observemos, ya que $B_2^n \subset \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| K$, se tiene

$$\frac{1}{\|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\|} K^\circ \subset B_2^n$$

y luego $\omega(K^\circ) \leq \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\|$. Teniendo presente que $\ell(K) \sim \sqrt{n}\omega(K^\circ)$ obtenemos,

$$\ell(K) \leq \|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| \sqrt{n}, \quad (4.15)$$

lo que concluye la demostración. \square

Presentamos ahora la demostración de la Proposición 4.2.1.

Demostración de la Proposición 4.2.1. Sea $\{X_i\}_{i=1}^m \subset S^{n-1}$ y $L^{(m)}$ el polítopo en (4.4) tal que existe $T \in SL(n, \mathbb{R})$ con $\|T : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\| \leq \gamma$. Como $\ell_1^n \subset L^{(m)}$, T pertenece al conjunto \mathcal{M}^K definido en el Lema 4.2.3. Consideremos una γ -red, \mathcal{N}_γ^K para \mathcal{M}^K para la métrica $\mathcal{L}(\ell_2^n, X_K)$ tal que

$$\#\mathcal{N}_\gamma^K \leq C^{n^2} \left(\|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| \sqrt{n} |K|^{\frac{1}{n}} \right)^{n^2}. \quad (4.16)$$

Sea $S \in \mathcal{N}_\gamma^K$ tal que $\|S - T\|_{\mathcal{L}(\ell_2^n, X_K)} \leq \gamma$, entonces

$$\begin{aligned} \|S : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\| &\leq \|T : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\| + \|S - T : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\| \\ &\leq \gamma + \|S - T : \ell_2^n \rightarrow X_K\| \\ &\leq 2\gamma, \end{aligned}$$

donde usamos el hecho de que $\|S - T : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\| \leq \|S - T : \ell_2^n \rightarrow X_K\|$ como, por construcción, $L^{(m)} \subset B_2^n$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\gamma &:= \{\text{Existe } T \in SL(n, \mathbb{R}) : \|T : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\| \leq \gamma\} \\ &\subset \bigcup_{S \in \mathcal{N}_\gamma^K} \{\|S : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\| \leq 2\gamma\}. \end{aligned}$$

Tomemos $\gamma_0 := \beta \left(\frac{|B_2^n|}{|K|} \right)^{\frac{1}{n}}$, acotando la unión por la suma, usando la ecuación (4.16) y el Lema 4.2.2

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}_{\gamma_0}) \leq C^{n^2} \left(\|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| \sqrt{n} |K|^{\frac{1}{n}} \right)^{n^2} (2\beta)^{nm}, \quad (4.17)$$

lo que concluye la demostración. \square

Como consecuencia de la Proposición 4.2.1 obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.2.4. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo centralmente simétrico tal que*

$$\|id : \ell_2^n \rightarrow X_K\| \sqrt{n} |K|^{\frac{1}{n}} \sim 1.$$

Dado $\delta \geq 1$, con probabilidad mayor o igual a $1 - e^{-n^2}$ el polítopo aleatorio $L^{([\delta n])}$ en (4.4) verifica

$$\sqrt{n} \leq vr(K, L^{([\delta n])}).$$

En particular, $\sqrt{n} \leq lvr(K)$.

Demostración. Por la Proposición 4.2.1 sabemos que existe una constante absoluta $C > 0$ tal que, para todo $\beta > 0$,

$$\mathbb{P} \left\{ \text{Existe } T \in SL(n, \mathbb{R}) : \|T : X_{L^{(m)}} \rightarrow X_K\| \leq \beta \left(\frac{|B_2^n|}{|K|} \right)^{1/n} \right\} \leq C^{n^2} (2\beta)^{nm}.$$

Si $m = \lceil \delta n \rceil$ y $\beta \leq \frac{1}{2} (Ce)^{-\frac{1}{\delta}}$, con probabilidad al menos $1 - e^{-n^2}$ el politopo aleatorio verifica

$$\|T : X_{L^{(\lceil \delta n \rceil)}} \rightarrow X_K\| \geq \beta \left(\frac{|B_2^n|}{|K|} \right)^{1/n} \sim \frac{1}{\sqrt{n} |K|^{\frac{1}{n}}}, \quad (4.18)$$

para todo $T \in SL(n, \mathbb{R})$.

Luego, por las ecuaciones (4.7) y (4.18) y la Proposición 3.1.2 (1) tenemos

$$\sqrt{n} \leq \text{vr}(K, L^{(\lceil \delta n \rceil)}),$$

lo que concluye la demostración. \square

Para probar el Teorema 4.2.9 vamos a mostrar que todo cuerpo convexo puede ser aproximado por otro que satisface las hipótesis de la proposición anterior. Para conseguir esto vamos a hacer uso de dos resultados profundos e importantes de la teoría de cuerpos isotrópicos: el resultado de Paouris sobre concentración de masa y la perturbación de Klartag con constante isotrópica acotada (también conocida como la solución de Klartag a la conjetura del hiperplano isomorfa).

Teorema 4.2.5 ([Pao06], Teorema 1.1). *Existe una constante absoluta $c > 0$ tal que si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo isotrópico, entonces*

$$\mathbb{P}\{x \in K : \|x\|_2 \geq cL_K \sqrt{nt}\} \leq e^{-\sqrt{nt}}$$

para todo $t \geq 1$.

Teorema 4.2.6 ([Kla06], Teorema 1.1). *Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $\varepsilon > 0$, entonces existe un cuerpo convexo $T \subset \mathbb{R}^n$ tal que*

1. $d(K, T) < 1 + \varepsilon$,

2. $L_T < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Aquí $c > 0$ es una constante absoluta y

$$d(K, T) = \inf\{ab : a, b > 0, \exists x, y \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{a}(K + x) \subset T + y \subset b(K + x)\}.$$

Observación 4.2.7. Dado un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ existe un cuerpo convexo $T \subset \mathbb{R}^n$ tal que $vr(T, K) \sim vr(K, T) \sim 1$ y $L_T \leq c$, donde $c > 0$ constante absoluta.

En efecto, dado K , por el Teorema 4.2.6 (usando $\varepsilon = 1$) existe $T \subset \mathbb{R}^n$ con $L_T \leq c$ y $d(K, T) \leq 2$. Notar que si para ciertos $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $a, b > 0$ se tiene que $\frac{1}{a}(K+x) \subset T+y \subset b(K+x)$, entonces,

$$vr(T, K) \leq \frac{|T|^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{a}|K|^{\frac{1}{n}}} \leq ab \frac{|K|^{\frac{1}{n}}}{|K|^{\frac{1}{n}}} \leq ab.$$

Luego $vr(T, K) \leq d(T, K)$ y por simetría lo mismo vale para $vr(K, T)$.

Proposición 4.2.8. Para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ existe un cuerpo convexo W con $vr(W, K) \sim 1$ tal que

$$\|id : \ell_2^n \rightarrow X_W\| \sqrt{n} |W|^{\frac{1}{n}} \sim 1. \quad (4.19)$$

Demostración de la Proposición 4.2.8. Por la Observación 4.2.7 y la desigualdad de Rogers-Shephard, Teorema 1.2.3, (reemplazando el cuerpo si es necesario) podemos asumir que K° es un cuerpo convexo isotrópico centralmente simétrico y L_{K° está uniformemente acotada.

Consideremos W tal que $W^\circ = K^\circ \cap c\sqrt{n}B_2^n$, con $c > 0$ la constante absoluta en el Teorema 4.2.5. Este teorema también implica que

$$|W^\circ|^{\frac{1}{n}} \geq (1 - \exp(-\sqrt{n}))^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2}$$

y luego $vr(W, K) \sim vr(K^\circ, W^\circ) \sim 1$.

Como $W^\circ \subset c\sqrt{n}B_2^n$ tenemos que

$$\|id : \ell_2^n \rightarrow X_W\| = \|id : X_{W^\circ} \rightarrow \ell_2^n\| \leq \sqrt{n}.$$

Finalmente, como $|W^\circ|^{\frac{1}{n}} \sim 1$, tenemos que $|W|^{\frac{1}{n}} \sim \frac{1}{n}$ (aplicando las desigualdades de Blaschke-Santaló y Bourgain-Milman, Teoremas 1.2.1 y 1.2.2). Por lo tanto

$$\|id : \ell_2^n \rightarrow X_W\| \sqrt{n} |W|^{\frac{1}{n}} \sim 1,$$

lo que concluye la demostración. \square

Ahora podemos probar el resultado principal de este capítulo. Afirma que, dado K , si consideramos cualquier cantidad de vectores m , proporcional a n , la razón de volumen entre el polítopo aleatorio $L^{(m)}$ y K es “grande”.

Teorema 4.2.9. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Dado $\delta \geq 1$, con probabilidad mayor o igual a $1 - e^{-n^2}$ el polítopo aleatorio $L^{(\lfloor \delta n \rfloor)}$ en (4.4) verifica

$$\sqrt{n} \leq vr(K, L^{(\lfloor \delta n \rfloor)}).$$

En particular, $\sqrt{n} \leq lvr(K)$.

Demostración. Por la Proposición 4.2.8 existe W con $\text{vr}(W, K) \sim 1$ tal que

$$\|id : \ell_2^n \rightarrow X_W\| \sqrt{n} |W|^{\frac{1}{n}} \sim 1. \quad (4.20)$$

Aplicando Proposición 4.2.4, dado $\delta \geq 1$, con probabilidad mayor o igual a $1 - e^{-n^2}$ el politopo aleatorio $L^{([\delta n])}$ en (4.4) verifica

$$\sqrt{n} \leq \text{vr}(W, L^{([\delta n])}).$$

Luego,

$$\sqrt{n} \leq \text{vr}(W, L^{([\delta n])}) \leq \text{vr}(W, K) \text{vr}(K, L^{([\delta n])}) \sim \text{vr}(K, L^{([\delta n])}),$$

como se deseaba. \square

El siguiente corolario se deriva facilmente del teorema anterior por dualidad.

Corolario 4.2.10. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Dado $\delta \geq 1$, existe un politopo Z con $2([\delta n] + n)$ caras tal que*

$$\sqrt{n} \leq \text{vr}(Z^{([\delta n])}, K).$$

Demostración. Por el Teorema 4.2.9 existe un politopo L con $2([\delta n] + n)$ vértices tal que $\text{vr}(K^\circ, L) \geq \sqrt{n}$. Tomando $Z := L^\circ$ y aplicando la Proposición 3.1.2 (3) tenemos que $\text{vr}(Z, K) \sim \text{vr}(K^\circ, L) \leq \sqrt{n}$. El resultado se sigue del hecho de que el polar del politopo $L^{([\delta n])}$ tiene $2([\delta n] + n)$ caras. \square

Capítulo 5

Razón de volumen entre proyecciones de cuerpos convexos

En este capítulo vamos a estudiar el la razón de volumen entre proyecciones de dos cuerpos convexos. Dados $K \subset \mathbb{R}^n$ y $k \sim n$ mostramos que existe un cuerpo convexo Z tal que la razón de volumen entre cualquier proyección de rango k de los cuerpos K y Z es “grande”. Para probar la existencia de Z procederemos de forma similar a como lo hicimos en el capítulo anterior, usando el método probabilístico. Como necesitamos trabajar con proyecciones de cuerpos, introducimos una versión Gaussiana de los politopos aleatorios. Esto nos permite manejar fácilmente las proyecciones involucradas. También utilizamos un argumento de ε -redes para poder controlar la probabilidad para toda proyección ortogonal de rango fijo.

5.1. Razón de volumen de proyecciones

Vamos a abordar una variante del problema que tratamos en el capítulo anterior. Notamos con $\mathcal{P}^k(n)$ al conjunto de todas las proyecciones ortogonales de rango k en \mathbb{R}^n . Para un cuerpo convexo K tenemos entonces una colección de cuerpos convexos k -dimensionales dados por $QK \subset \mathbb{R}^k$ para $Q \in \mathcal{P}^k(n)$. El problema de estimar distancias (en el sentido de la ecuación (4.6)) entre proyecciones de cuerpos convexos despertó un interés considerable (ver por ejemplo [BS88, Sza90, ST89]).

Para un cuerpo convexo K con el origen como punto interior y un subespacio $E \subset \mathbb{R}^n$ se tiene que $P_E(K^\circ) = (E \cap K)^\circ$, donde P_E denota la proyección ortogonal sobre E . Entonces, cada resultado sobre proyecciones de K tiene una versión dual en términos de secciones de K° .

Vale mencionar que dos cuerpos convexos pueden estar lejos pero tener proyecciones o secciones bastante cerca. Este es el caso de los politopos



Figura 5.1: Una proyección de K y una sección de K° .

de Gluskin definidos en el capítulo anterior. Gluskin probó que, para todo $m \sim n$, con probabilidad alta la distancia entre dos polítopos aleatorios de m vértices, digamos $L^{(m)}$ y $L'^{(m)}$, es mayor que n . A pesar de esto, para cada k proporcional a n , para “casi todos” los subespacios $F \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión k se tiene que $d_{BM}(L^{(m)} \cap F, L'^{(m)} \cap F) \leq 1$.

En efecto, Szarek [Sza79] probó que dado un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ con $\text{vr}(K, B_2^n) \sim 1$, y $0 < \delta < 1$, “casi todos” los subespacios $F \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión $k < \delta n$ satisfacen que $d_{BM}(K \cap F, B_2^k) \sim 1$. Es fácil verificar que para todos los polítopos aleatorios se tiene que $\text{vr}(L^{(m)}, B_2^n) \sim 1$.

Mankiewicz y Tomczak-Jaegermann [MTJ01] encontraron estimaciones precisas de la distancia entre secciones aleatorias k -dimensionales de cuerpos convexos en términos de la distancia promedio de secciones de dimensión $\frac{k}{2}$ de cada cuerpo con respecto a la bola.

En [Rud04], Rudelson estudió el problema de estimar distancias extremas entre secciones y proyecciones de cuerpos convexos. Para $k < n$, definió la distancia $\delta_k(K, Z)$ como la mínima distancia entre proyecciones de dimensión k de K y Z . Él estaba interesado en estimar el diámetro del compacto de Banach-Mazur para esta distancia. Esto es, encontrar el comportamiento asintótico de

$$\Delta(k, n) := \sup \delta_k(K, Z),$$

donde el supremo se toma sobre todos los cuerpos convexos simétricos K y Z de dimensión n .

Él probó que

$$\Delta(k, n) \sim_{\log n} \begin{cases} \sqrt{k} & \text{si } k \leq n^{2/3} \\ \frac{k^2}{n} & \text{si } k > n^{2/3}, \end{cases}$$

donde $A \sim_{\log(n)} B$ significa que

$$\frac{1}{C \log^a n} A \leq B \leq (C \log^a n) A$$

para constantes absolutas $C, a > 0$. Para obtener esto, probó que existen cuerpos convexos $K, Z \subset \mathbb{R}^n$, tales que para todo $k < n$,

$$\delta_k(K, Z) \geq \frac{k^2}{n \log(\log(n))},$$

$$\delta_k(K, B_2^n) \geq \sqrt{\frac{k}{\log(1 + \frac{n}{k})}}.$$

Vamos utilizar el enfoque de Rudelson junto con las técnicas desarrolladas en el capítulo anterior para abordar el problema de la razón de volumen para proyecciones. Es decir, dado $K \subset \mathbb{R}^n$, estamos interesados en encontrar un cuerpo $Z \subset \mathbb{R}^n$ tal que, para toda $Q \in \mathcal{P}^k(n)$, $\text{vr}(QK, QZ)$ es “grande”.

El siguiente teorema es el resultado principal de este capítulo.

Teorema 5.1.1. *Dado $\delta > 0$ existe una constante $d := d(\delta) > 0$ con la siguiente propiedad:*

Para todo cuerpo $K \subset \mathbb{R}^n$ y $\delta n \leq k \leq n$, existe un cuerpo centralmente simétrico $Z \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\text{vr}(QK, QZ) \geq d \sqrt{\frac{k}{\log \log k}},$$

para toda proyección ortogonal $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de rango k .

Observemos que podemos enunciar una versión dual de este resultado.

Corolario 5.1.2. *Dado $\delta > 0$ existe una constante $d := d(\delta) > 0$ con la siguiente propiedad:*

Para todo cuerpo centralmente simétrico $K \subset \mathbb{R}^n$ y $\delta n \leq k \leq n$, existe un cuerpo centralmente simétrico $Z \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\text{vr}(E \cap Z, E \cap K) \geq d \sqrt{\frac{k}{\log \log k}},$$

para todo subespacio $E \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión k .

Demostración. Aplicando el Teorema 5.1.1 para K° sabemos que existe un cuerpo centralmente simétrico W tal que

$$\text{vr}(QK^\circ, QW) \geq d \sqrt{\frac{k}{\log \log k}},$$

para toda proyección ortogonal $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de rango k . Dado $E \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión k tenemos que,

$$d \sqrt{\frac{k}{\log \log k}} \leq \text{vr}(P_E K^\circ, P_E W) \sim \text{vr}((P_E W)^\circ, (P_E K^\circ)^\circ)$$

$$= \text{vr}(E \cap W^\circ, E \cap K),$$

como, $P_E K^\circ = E \cap K$ y $P_E W = E \cap W^\circ$. El resultado se sigue tomando $Z = W^\circ$. \square

Antes de empezar con la prueba del Teorema 5.1.1 recordamos un resultado estándar de teoría geométrica de la medida.

Teorema 5.1.3. *Si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función Lipschitz, $0 \leq s \leq m$, y $A \subset \mathbb{R}^m$, entonces*

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq Lip(f)^s \mathcal{H}^s(A),$$

donde \mathcal{H}^s y $Lip(f)$ son la medida de Hausdorff s -dimensional y la constante de Lipschitz de f , respectivamente.

Demostración. Recordar que,

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A),$$

donde

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(C_i)^s \mid \text{diam}(C_i) \leq \delta \text{ and } A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right\}.$$

Fijemos $\delta > 0$, para todo $\varepsilon > 0$ consideremos conjuntos $\{C_i\}$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, $\text{diam}(C_i) \leq \frac{\delta}{Lip(A)}$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(C_i)^s \leq \mathcal{H}^s(A) + \varepsilon$. Observemos que para todo C , $\text{diam}(f(C)) \leq Lip(f) \text{diam}(C)$ y luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s(f(A)) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(f(C_i))^s \leq Lip(f)^s \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(C_i)^s \\ &\leq Lip(f)^s \varepsilon + Lip(f)^s \mathcal{H}^s(A). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathcal{H}_\delta^s(f(A)) \leq Lip(f)^s \mathcal{H}^s(A)$$

para todo $\delta > 0$, lo que completa la demostración. \square

Recordar que, para $k \in \mathbb{N}$, la medida de Hausdorff k -dimensional es un múltiplo de la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^k . Es decir, para todo conjunto medible $\mathcal{H}^k(A) = \frac{2^k}{|B_2^k|} |A|$.

Dada $Q \in \mathcal{P}^k(n)$ notaremos con $|QK|$ a la medida de Lebesgue k -dimensional de QK . Como aplicación del teorema anterior tenemos el siguiente lema, que relaciona el volumen k -dimensional de dos proyecciones diferentes de K con su distancia en la métrica usual de operadores.

Lema 5.1.4. *Sean $P, Q \in \mathcal{P}^k(n)$ tales que $\|P - Q\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Para todo cuerpo centralmente simétrico $K \subset \mathbb{R}^n$ en posición de John,*

$$\frac{1}{3} |QK|^{\frac{1}{k}} \leq |PK|^{\frac{1}{k}} \leq 3 |QK|^{\frac{1}{k}}.$$

Demostración. Primero veamos que

$$PK \subset 3PQK. \quad (5.1)$$

Sea $x \in K$,

$$\begin{aligned} Px &= PQx + P(x - Qx) \\ &= PQx + P(x - Px) + P(Px - Qx) \\ &= PQx + P(P - Q)x. \end{aligned}$$

Entonces, para probar (5.1) basta ver que

$$P(P - Q)x \in 2PQK. \quad (5.2)$$

Es fácil ver que el operador P coincide con $I + P - Q$ en $Q\mathbb{R}^n$ (la imagen de la proyección Q). Como $\|P - Q\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, entonces

$$P|_{Q\mathbb{R}^n} : Q\mathbb{R}^n \rightarrow P\mathbb{R}^n$$

es invertible y su inversa $S := (P|_{Q\mathbb{R}^n})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (Q - P)^k$ satisface

$$\|S\| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \leq 2.$$

Notar que $PB_2^n \subset 2PQB_2^n$. De hecho, por la cota anterior sobre la norma de S tenemos que $SPB_2^n \subset 2QB_2^n$ y entonces, aplicando P , obtenemos $PSPB_2^n = PB_2^n \subset 2PQB_2^n$.

Como $K \subset \sqrt{n}B_2^n$ (K está en posición de John) tenemos que $(P - Q)x \subset B_2^n$ y

$$P(P - Q)x \in PB_2^n \subset 2PQB_2^n \subset 2PQK.$$

Esto prueba (5.2), lo que como mencionamos implica (5.1).

Para finalizar la prueba, con la ecuación (5.1) a mano, aplicamos el Teorema 5.1.3 con $m := n$, $s := k$, $f := P$ and $A := QK$ para obtener

$$|PK|^{\frac{1}{k}} \leq 3|PQK|^{\frac{1}{k}} \leq 3|QK|^{\frac{1}{k}},$$

usando que la constante de Lipschitz de P es obviamente uno y simplificando las constantes para pasar de la medida de Hausdorff a la de Lebesgue. \square

5.2. Polítopos Gaussianos

Definiremos ahora una variante de los polítopos aleatorios de Gluskin definidos en la Sección 4.2. En lugar de considerar la cápsula convexa absoluta de puntos tomados uniformemente en la esfera unitaria vamos a trabajar con vectores aleatorios Gaussianos. La razón para hacer esto es que necesitamos

tratar con proyecciones de estos cuerpos y la medida Gaussiana se ajusta mejor a este propósito.

Sea $N > n$ y g_1, \dots, g_N vectores Gaussianos independientes en \mathbb{R}^n . Definimos el politopo simétrico

$$Z_N = Z_N(\omega) = \text{absconv}\{\sqrt{n}e_1, \dots, \sqrt{n}e_n, g_1, \dots, g_N\}.$$

Vamos a necesitar el siguiente lema.

Lema 5.2.1. *Sea g vector Gaussiano estándar. Entonces, existen constantes $C, c > 0$ tales que $1 \leq \|g\|_2 \leq C\sqrt{n}$ con probabilidad al menos $1 - e^{-cn}$.*

Demostración. Acotando la densidad Gaussiana por $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$. tenemos

$$\mathbb{P}\{\|g\|_2 < 1\} \leq \frac{|B_2^n|}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} = \frac{(2\Gamma(1 + \frac{1}{2}))^n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(1 + \frac{n}{2})},$$

aplicando la fórmula de Stirling y eligiendo una constante apropiada $c_1 > 0$ tenemos,

$$\mathbb{P}\{\|g\|_2 \geq 1\} \geq 1 - e^{-c_1 n}. \quad (5.3)$$

Ahora, si $g = (g_1, \dots, g_n)$ queremos acotar,

$$\mathbb{P}\left\{\left(\sum_{i=1}^n g_i^2\right)^{1/2} \geq C\sqrt{n}\right\} = \mathbb{P}\left\{e^{\frac{1}{4}(\sum_{i=1}^n g_i^2)} \geq e^{C^2 \frac{1}{4}n}\right\}.$$

Aplicando la desigualdad de Markov,

$$\begin{aligned} P\left\{e^{\frac{1}{4}(\sum_{i=1}^n g_i^2)} \geq e^{\frac{1}{4}Cn}\right\} &\leq e^{-\frac{1}{4}Cn} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{\|x\|^2}{4}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} dx \\ &= e^{-\frac{1}{4}Cn} \left((2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}t^2} dt\right)^n. \end{aligned}$$

Si computamos la integral del lado derecho y elegimos una constante apropiada $c_2 > 0$ tenemos,

$$\mathbb{P}\left\{\left(\sum_{i=1}^n g_i^2\right)^{1/2} \geq C\sqrt{n}\right\} \leq 1 - e^{-c_2 n}. \quad (5.4)$$

Finalmente acotamos probabilidad de la unión por la suma de las probabilidades para combinar (5.3) y (5.4). \square

Una consecuencia del lema anterior es que el conjunto

$$\Omega_0 := \{\omega | B_2^n \subset Z_N(\omega) \subset C\sqrt{n}B_2^n\}$$

satisface

$$\mathbb{P}(\Omega_0) \geq 1 - Ne^{-cn}. \quad (5.5)$$

Para estimar el volumen de proyecciones de Z_N . Recordemos que, por el Lema 3.2.1, si v_1, \dots, v_N son vectores en \mathbb{R}^m de longitud a lo sumo uno,

$$|\text{absconv}\{v_1, \dots, v_N\}|^{1/m} \leq c \frac{\sqrt{\log(1 + N/m)}}{m}.$$

Entonces, para cada $w \in \Omega_0$ y $Q \in \mathcal{P}^k(n)$ se tiene que

$$|QZ_N(w)|^{1/k} \leq C \frac{\sqrt{n \log(1 + N/k)}}{k}. \quad (5.6)$$

Probaremos una serie de lemas que son similares a los que enunciamos en la Sección 4.1. Dado un espacio normado de dimensión finita X , notamos con $\mathcal{S}(X)$ al conjunto de operadores lineales $T : X \rightarrow X$ de determinante uno.

Lema 5.2.2. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo centralmente simétrico, $Q_0 \in \mathcal{P}^k(n)$ y $T_0 \in \mathcal{S}(Q_0\mathbb{R}^n)$ fijo. Para $A > 0$ tenemos que*

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega_0 : \|T_0 : X_{Q_0Z_N(\omega)} \rightarrow X_{Q_0K}\| \leq A\} \leq C^{kN} A^{kN} |Q_0K|^N.$$

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega_0 : T_0Q_0(Z_N(\omega)) \subset AQ_0K\} &= \{\omega \in \Omega_0 : Q_0Z_N(\omega) \subset AT_0^{-1}(Q_0K)\} \\ &\subset \{\omega \in \Omega_0 : Q_0g_i(\omega) \in AT_0^{-1}(Q_0K) \text{ para todo } 1 \leq i \leq N\}. \end{aligned}$$

Usando la invarianza por rotaciones de la medida y el hecho de que T_0 preserva medida (tiene determinante uno), tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega_0 : \|T_0 : X_{Q_0Z_N(\omega)} \rightarrow X_{Q_0K}\| \leq A\} & \\ &\leq \mathbb{P}\{\omega \in \Omega_0 : Q_0g_1(\omega) \in AT_0^{-1}Q_0K\}^N \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{AT_0^{-1}Q_0K}(Q_0x) d\gamma_n(x) \right)^N \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_{AT_0^{-1}Q_0K}(y) d\gamma_n(y) \right)^N \\ &\leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{kN}} (|AT_0^{-1}Q_0K|^k)^N \\ &\leq C^{kN} A^{kN} |Q_0K|^N. \end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración. \square

Lema 5.2.3. *Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo centralmente simétrico, $Q_0 \in \mathcal{P}^k(n)$ una proyección ortogonal fija de rango k y $A > 0$, entonces*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega_0 : \exists T \in \mathcal{S}(Q_0\mathbb{R}^n) \text{ y } \|T : X_{Q_0Z_N(\omega)} \rightarrow X_{Q_0K}\| \leq A\} \\ \leq (c\sqrt{n})^{k^2} C^{Nk} A^{Nk} |Q_0K|^N. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $U := B_{\mathcal{L}(\ell_2^k, X_{Q_0K})}$ la bola unitaria de $\mathcal{L}(\ell_2^k, X_{Q_0K})$, y consideremos \mathcal{N} un conjunto minimal $\frac{A}{\sqrt{n}}$ -separado en $AU \cap SL(k, R)$ para la métrica $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\ell_2^k, X_{Q_0K})}$.

Tenemos entonces la siguiente inclusión para la unión disjunta

$$\bigcup_{\eta \in \mathcal{N}} \left(\eta + \frac{A}{2\sqrt{n}} U \right) \subset \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}} \right) AU.$$

Identificando el espacio con \mathbb{R}^{k^2} y tomando medida concluimos que

$$\#\mathcal{N} \leq (c\sqrt{n})^{k^2}.$$

Sea $\omega \in \Omega_0$ tal que existe $T \in \mathcal{S}(Q_0\mathbb{R}^n)$ con $\|T : X_{Q_0Z_N(\omega)} \rightarrow X_{Q_0K}\| \leq A$. Como $B_2^n \subset Z_N(\omega)$ tenemos que $T \in AU$, entonces existe $S \in \mathcal{N}$ tal que

$$\|S - T : \ell_2^k \rightarrow X_{Q_0K}\| \leq \frac{A}{\sqrt{n}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|S : X_{Q_0Z_N(\omega)} \rightarrow X_{Q_0K}\| &\leq \|S - T : X_{Q_0Z_N(\omega)} \rightarrow X_{Q_0K}\| + \|T : X_{Q_0Z_N(\omega)} \rightarrow X_{Q_0K}\| \\ &\leq \sqrt{n} \|S - T : \ell_2^k \rightarrow X_{Q_0K}\| + A \\ &\leq 2A. \end{aligned}$$

Esto muestra que

$$\begin{aligned} &\{\omega \in \Omega_0 : \exists T \in \mathcal{S}(Q_0\mathbb{R}^n) \text{ y } \|T : X_{Q_0Z_N(\omega)} \rightarrow X_{Q_0K}\| \leq A\} \\ &\subset \bigcup_{S \in \mathcal{N}} \{S : \|S : \ell_2^k \rightarrow X_{Q_0K}\| \leq 2A\}. \end{aligned}$$

Tomando medida y aplicando el Lema 5.2.2 se obtiene la cota deseada. \square

Vamos a necesitar el siguiente resultado de Szarek [Sza82] sobre ε -redes.

Lema 5.2.4. *Sea $0 < \varepsilon < 1$. El conjunto $\mathcal{P}^k(n)$ admite una ε -red Π de cardinal*

$$|\Pi| \leq \left(\frac{C}{\varepsilon} \right)^{nk}.$$

Dada una base $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ de un espacio vectorial F y un vector $x \in F$ notamos con $(x)_B$ las coordenadas de x en la base B . Esto es, $(x)_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ si $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$. Además, para un operador $T : F \rightarrow F$ notamos con $[T]_B$ la matriz $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq k}$ tal que $T(v_l) = \sum_{i=1}^k a_{i,l} v_i$, para todo $1 \leq l \leq k$ (i.e., la l -ésima columna de $[T]_B$ es $(Tv_l)_B$).

Lema 5.2.5. *Dado un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ centralmente simétrico y $\beta > 0$ tenemos*

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega_0 \mid \exists Q \in \mathcal{P}^k(n), \exists T \in \mathcal{S}(Q\mathbb{R}^n) \text{ tal que } \|T : X_{QZ_N(\omega)} \rightarrow X_{QK}\| \leq \frac{\beta}{|QK|^{\frac{1}{k}}}\} \\ \leq (c_1\sqrt{n})^{nk} (c_2\sqrt{n})^{k^2} c_3^{kN} \beta^{kN}.$$

Demostración. Supongamos que K está en posición de John. Por el lema anterior existe una $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -red para $\mathcal{P}^k(n)$ de cardinal $\#\Pi \leq (c_1\sqrt{n})^{nk}$. Para probar el resultado necesitamos mostrar que

$$\left\{ \omega \in \Omega_0 \mid \exists Q \in \mathcal{P}^k(n), \exists T \in \mathcal{S}(Q\mathbb{R}^n) \text{ tal que } \|T : X_{QZ_N(\omega)} \rightarrow X_{QK}\| \leq \frac{\beta}{|QK|^{\frac{1}{k}}} \right\} \\ \subset \bigcup_{Q_0 \in \Pi} \left\{ \omega \in \Omega_0 \mid \exists S \in \mathcal{S}(Q_0\mathbb{R}^n) \text{ tal que } \|S : X_{Q_0Z_N(\omega)} \rightarrow X_{Q_0K}\| \leq C \frac{\beta}{|Q_0K|^{\frac{1}{k}}} \right\}.$$

La cota se sigue de aplicar el Lema 5.2.3.

Sea $\omega \in \Omega_0$ tal que existe $Q \in \mathcal{P}^k(n)$ en $T \in \mathcal{S}(Q\mathbb{R}^n)$ con

$$\|T : X_{QZ_N(\omega)} \rightarrow X_{QK}\| \leq \frac{\beta}{|QK|^{\frac{1}{k}}}.$$

Sea $Q_0 \in \Pi$ tal que $\|Q - Q_0\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Fijemos una base ortonormal $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ de $Q\mathbb{R}^n$. Es fácil ver que el conjunto $\tilde{B} = \{Q_0v_1, \dots, Q_0v_k\}$ es una base de $Q_0\mathbb{R}^n$. Definimos S tal que $[S]_{\tilde{B}} = [T]_B$, entonces $S \in \mathcal{S}(Q_0\mathbb{R}^n)$.

Ahora mostraremos que

$$\|S : X_{Q_0Z_N(\omega)} \rightarrow X_{Q_0K}\| \leq C \frac{\beta}{|Q_0K|^{\frac{1}{k}}}. \quad (5.7)$$

En efecto, sea $x \in Z_N(\omega)$,

$$SQ_0x = \underbrace{SQ_0(Q_0x - Qx)}_{(1)} + \underbrace{SQ_0Qx}_{(2)}.$$

Veremos que los términos en (1) y (2) pertenecen a $C \frac{\beta}{|QK|^{\frac{1}{k}}} Q_0K$.

Para ver que el término en (2), SQ_0Qx , pertenece a $C \frac{\beta}{|QK|^{\frac{1}{k}}} Q_0K$, escribimos $Qx = \sum \alpha_i v_i$, entonces $Q_0Qx = \sum \alpha_i Q_0v_i$. Tenemos que,

$$(SQ_0Qx)_{\tilde{B}}^t = [T]_B(Q_0Qx)_{\tilde{B}}^t \\ = [T]_B(Qx)_B^t \\ = (TQx)_B^t.$$

Luego, $SQ_0Qx = Q_0TQx$. Como $x \in Z_N(\omega)$, $TQx \in \frac{\beta}{|QK|^{\frac{1}{k}}}QK$ y entonces $Q_0TQx \in \frac{\beta}{|QK|^{\frac{1}{k}}}Q_0QK$. Ahora observemos que si suponemos que K está en posición de John (luego $B_2^n \subset K \subset \sqrt{n}B_2^n$), tenemos que $Q_0QK \subset 2Q_0K$. Esto se debe a que

$$\begin{aligned} Q_0QK &\subset Q_0K + Q_0((Q - Q_0)K) \\ &\subset Q_0K + Q_0((Q - Q_0)\sqrt{n}B_2^n) \\ &\subset Q_0K + Q_0K \\ &= 2Q_0K. \end{aligned}$$

Probaremos ahora que el término (1), $SQ_0(Q_0x - Qx)$, está en $C\frac{\beta}{|QK|^{\frac{1}{k}}}Q_0K$. Como $Z_N(\omega) \subset \sqrt{n}B_2^n$, $(Q_0 - Q)x \in B_2^n$ y luego $Q_0(Q_0 - Q)x \in B_2^k$.

Debemos ver que $\|S : \ell_2^k \rightarrow X_{Q_0K}\| \leq C\frac{\beta}{|QK|^{\frac{1}{k}}}$.

Sea $y \in Q_0\mathbb{R}^n$ con $\|y\|_2 = 1$. Escribimos $(y)_{\tilde{B}} = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ y $(Sy)_{\tilde{B}} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$. Entonces,

$$\begin{aligned} (\gamma_1, \dots, \gamma_k) &=: [Sy]_{\tilde{B}} = [T]_B(\beta_1, \dots, \beta_k)^t \\ &= [T(\sum \beta_i v_i)]_B. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \|\sum \beta_i v_i\|_2 &\leq \|\sum \beta_i Qv_i - \sum \beta_i Q_0v_i\|_2 + \|\sum \beta_i Q_0v_i\|_2 \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\|\sum \beta_i v_i\|_2 + 1, \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\|\sum \beta_i v_i\|_2 &\leq 1 \\ \|\sum \beta_i v_i\|_2 &\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \leq 2. \end{aligned}$$

Entonces, $T(\sum \beta_i v_i) \in \frac{2\beta}{|QK|^{\frac{1}{k}}}QK$. Por otro lado,

$$Sy = \sum \gamma_i Q_0v_i = Q_0(\sum \gamma_i v_i) = Q_0T(\sum \beta_i v_i).$$

Entonces tenemos que $Sy \in \frac{2\beta}{|QK|^{\frac{1}{k}}}Q_0QK \subset \frac{4\beta}{|QK|^{\frac{1}{k}}}Q_0K$. El resultado se sigue de que $|QK|^{\frac{1}{k}} \sim |Q_0K|^{\frac{1}{k}}$, usando el Lema 5.1.4. \square

Ahora podemos probar nuestro resultado principal.

Demostración del Teorema 5.1.1. Por la desigualdad de Roger-Shephard sabemos que $\text{vr}(L - L, L) \leq 4$, para todo cuerpo convexo $L \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, como $Q(K - K) = Q(K) - Q(K)$, para toda $Q \in \mathcal{P}^k(n)$ se tiene que

$$\text{vr}(Q(K - K), Z) \leq \text{vr}(Q(K - K), QK) \text{vr}(QK, Z) \leq 4 \text{vr}(QK, Z).$$

Luego, si $\text{vr}(Q(K - K), Z)$ es grande, también lo es $\text{vr}(QK, Z)$. De ahora en adelante supondremos, sin pérdida de generalidad, que K es centralmente simétrico.

Por el Lema 5.2.5 sabemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega_0 \mid \exists Q \in \mathcal{P}^k(n), \exists T \in \mathcal{S}(Q\mathbb{R}^n) \mid \|T : X_{QZ_N(\omega)} \rightarrow X_{QK}\| \leq \frac{\beta}{|QK|^{\frac{1}{k}}}\} \\ \leq (c_1\sqrt{n})^{nk} (c_2\sqrt{n})^{k^2} c_3^{kN} \beta^{kN}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Sea $N = n \log(n)$ y fijemos β lo suficientemente chico para que la probabilidad en (5.8) tienda a cero. Entonces, como $\mathbb{P}(\Omega_0) \geq 1 - Ne^{-cn}$ (ecuación (5.5)), sabemos que existe $\omega \in \Omega_0$ tal que para toda $Q \in \mathcal{P}^k(n)$ y $T \in \mathcal{S}(Q\mathbb{R}^n)$,

$$\|T : X_{QZ_N(\omega)} \rightarrow X_{QK}\| \geq \frac{\beta}{|QK|^{\frac{1}{k}}}.$$

Si calculamos la razón de volumen entre proyecciones de $Z := Z_N(\omega)$ y K obtenemos, usando que $\delta n \leq k \leq n$, la Proposición 3.1.2 (1) y la ecuación (5.6),

$$\begin{aligned} \text{vr}(QK, QZ) &\geq \frac{\beta}{|QK|^{\frac{1}{k}} |QZ|^{\frac{1}{k}}} \\ &\geq \frac{\beta k}{C\sqrt{n \log(2 + N/k)}} \\ &\geq d(\delta) \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\log \log(k)}}, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración del teorema principal. \square

Bibliografía

- [AAGM15] Artstein-Avidan, Shiri, Apostolos Giannopoulos y Vitali Milman: *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*, volumen 202. American Mathematical Soc., 2015.
- [AG08] Alonso-Gutiérrez, David: *On the isotropy constant of random convex sets*. Proceedings of the American Mathematical Society, 136(9):3293–3300, 2008.
- [Bab88] Babenko, Ivan Konstantinovich: *Asymptotic volume of tori and geometry of convex bodies*. Mathematical Notes, 44(2):579–586, 1988.
- [Bal89] Ball, Keith: *Volumes of sections of cubes and related problems*. En *Geometric aspects of functional analysis*, páginas 251–260. Springer, 1989.
- [Bal92] Ball, Keith: *Ellipsoids of maximal volume in convex bodies*. Geometriae Dedicata, 41(2):241–250, 1992.
- [BCE13] Barthe, Franck y Dario Cordero-Erausquin: *Invariances in variance estimates*. Proceedings of the London Mathematical Society, 106(1):33–64, 2013.
- [BF88] Bárány, Imre y Zoltán Füredi: *Approximation of the sphere by polytopes having few vertices*. Proceedings of the American Mathematical Society, 102(3):651–659, 1988.
- [BGVV14] Brazitikos, Silouanos, Apostolos Giannopoulos, Petros Valettas y Beatrice Helen Vritsiou: *Geometry of isotropic convex bodies*, volumen 196. American Mathematical Society Providence, 2014.
- [Bla17] Blaschke, Wilhelm: *Über affine Geometrie III: Eine Minimumeigenschaft der Ellipse*. Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 69:3–12, 1917.

- [BM87] Bourgain, Jean y Vitaly Milman: *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in R^n* . *Inventiones mathematicae*, 88(2):319–340, 1987.
- [BN03] Bobkov, Sergey G y Fedor L Nazarov: *On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis*. En *Geometric aspects of functional analysis*, páginas 53–69. Springer, 2003.
- [Bou86] Bourgain, Jean: *On high dimensional maximal functions associated to convex bodies*. *American Journal of Mathematics*, 108(6):1467–1476, 1986.
- [Bou91] Bourgain, Jean: *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*. En *Geometric aspects of functional analysis*, páginas 127–137. Springer, 1991.
- [BS88] Bourgain, Jean y Stanislaw Szarek: *The Banach-Mazur distance to the cube and the Dvoretzky-Rogers factorization*. *Israel Journal of Mathematics*, 62(2):169–180, 1988.
- [Bus50] Busemann, Herbert: *The foundations of Minkowskian geometry*. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 24(1):156–187, 1950.
- [Bus53] Busemann, Herbert: *Volume in terms of concurrent cross-sections*. *Pacific Journal of Mathematics*, 3(1):1–12, 1953.
- [Bus55] Busemann, Herbert: *The geometry of geodesics*. *Geophysica et Geodaetica*, 1955.
- [Cha73] Chakerian, Gulbank: *Minimum Area of Circumscribed Polygons*. *Elemente der Mathematik*, 28:108–111, 1973.
- [CP88] Carl, Bernd y Alain Pajor: *Gelfand numbers of operators with values in a Hilbert space*. *Inventiones mathematicae*, 94(3):479–504, 1988.
- [DF92] Defant, Andreas y Klaus Floret: *Tensor norms and operator ideals*, volumen 176. Elsevier, 1992.
- [Din99] Dineen, Seán: *Complex analysis on infinite dimensional spaces*. Springer Monographs in Mathematics. London: Springer, 1999.
- [DP09] Defant, Andreas y Christopher Prengel: *Volume estimates in spaces of homogeneous polynomials*. *Mathematische Zeitschrift*, 261(4):909, 2009.

- [DR50] Dvoretzky, Aryeh y Claude Rogers: *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 36(3):192–197, 1950.
- [Flo97] Floret, Klaus: *NATURAL NORMS ON SYMMETRIC TENSOR PRODUCTS OF NORMED SPACES*. Note di Matematica, 17:1X–188, 1997.
- [FTJ79] Figiel, Tadeusz y Nicole Tomczak-Jaegermann: *Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces*. Israel Journal of Mathematics, 33(2):155–171, 1979.
- [GH02] Giannopoulos, Apostolos y Marianna Hartzoulaki: *On the volume ratio of two convex bodies*. Bulletin of the London Mathematical Society, 34(06):703–707, 2002.
- [GLMP04] Gordon, Yehoram, Alexander Litvak, Mathieu Meyer y Alain Pajor: *John's decomposition in the general case and applications*. Journal of Differential Geometry, 68(1):99–119, 2004.
- [Glu81] Gluskin, Efim: *Diameter of the Minkowski compactum is approximately equal to n* . Functional Analysis and Its Applications, 15(1):57–58, 1981.
- [Glu89] Gluskin, Efim: *Extremal properties of orthogonal parallelepipeds and their applications to the geometry of Banach spaces*. Mathematics of the USSR-Sbornik, 64(1):85, 1989.
- [GP07] Guédon, Olivier y Grigoris Paouris: *Concentration of mass on the Schatten classes*. En *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*, volumen 43, páginas 87–99. No longer published by Elsevier, 2007.
- [GPT01] Giannopoulos, Apostolos, Irini Perissinaki y Antonis Tsolomitis: *John's theorem for an arbitrary pair of convex bodies*. Geometriae Dedicata, 84(1-3):63–79, 2001.
- [Gro18] Gross, Wilhelm: *Über affine Geometrie XIII: Eine Minimumeigenschaft der Ellipse und des Ellipsoids*. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipz., Math.-Nat. wiss. Kl, 70:38–54, 1918.
- [Gro73] Groemer, Helmut: *On some mean values associated with a randomly selected simplex in a convex set*. Pacific Journal of Mathematics, 45(2):525–533, 1973.
- [Gru07] Gruber, Peter: *Convex and discrete geometry*, volumen 336. Springer Science & Business Media, 2007.

- [HKL96] Hudelson, Matthew, Victor Klee y David Larman: *Largest j -simplices in d -cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem*. Linear algebra and its applications, 241:519–598, 1996.
- [Joh48] John, Fritz: *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*. R. Courant Anniversary Volume, páginas 187–204, 1948.
- [Kan14] Kanazawa, Atsushi: *On the minimal volume of simplices enclosing a convex body*. Archiv der Mathematik, 102(5):489–492, 2014.
- [Khr01] Khrabrov, Alexander: *Generalized Volume Ratios and the Banach–Mazur Distance*. Mathematical Notes, 70(5-6):838–846, 2001.
- [KK09] Klartag, Bo’az y Gady Kozma: *On the hyperplane conjecture for random convex sets*. Israel Journal of Mathematics, 170(1):253–268, 2009.
- [Kla06] Klartag, Bo’az: *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*. Geometric & Functional Analysis GAFA, 16(6):1274–1290, 2006.
- [KLS95] Kannan, Ravi, László Lovász y Miklós Simonovits: *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*. Discrete & Computational Geometry, 13(3-4):541–559, 1995.
- [KMP98] König, Hermann, Mathieu Meyer y Alain Pajor: *The isotropy constants of the Schatten classes are bounded*. Mathematische Annalen, 312(4):773–783, 1998.
- [KPT18] Kabluchko, Zakhar, Joscha Prochno y Christoph Thaele: *Exact asymptotic volume and volume ratio of Schatten unit balls*. arXiv preprint arXiv:1804.03467, 2018.
- [Kup83] Kuperberg, Włodzimierz: *On minimum area quadrilaterals and triangles circumscribed about convex plane regions*. Elemente der Mathematik, 38:57–61, 1983.
- [Las92] Lassak, Marek: *On the Banach–Mazur distance between convex bodies*. J. Geom, 41:11–12, 1992.
- [Las98] Lassak, Marek: *Approximation of convex bodies by centrally symmetric bodies*. Geometriae Dedicata, 72(1):63–68, 1998.

- [LM17] Latała, Rafał y Dariusz Matlak: *Royen's proof of the Gaussian correlation inequality*. En *Geometric aspects of functional analysis*, páginas 265–275. Springer, 2017.
- [Loz69] Lozanovskii, Grigorii: *On some Banach lattices*. Siberian Mathematical Journal, 10(3):419–431, 1969.
- [Mac51a] Macbeath, Alexander: *A Compactness Theorem For Affine Equivalence-Classes of Convex Regions*. Canadian Journal of Mathematics, 3:54–61, 1951.
- [Mac51b] Macbeath, Alexander: *An extremal property of the hypersphere*. En *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volumen 47, páginas 245–247. Cambridge Univ Press, 1951.
- [Mah39] Mahler, Kurt: *Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, 68(3):93–102, 1939.
- [Mat02] Matoušek, Jiří: *Lectures on discrete geometry*, volumen 108. Springer New York, 2002.
- [McK74] McKinney, James: *On maximal simplices inscribed in a central convex set*. Mathematika, 21(01):38–44, 1974.
- [MP89] Milman, Vitali y Alain Pajor: *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n -dimensional space*. En *Geometric aspects of functional analysis*, páginas 64–104. Springer, 1989.
- [MP90] Meyer, Mathieu y Alain Pajor: *On the Blaschke-Santaló inequality*. Archiv der Mathematik, 55(1):82–93, 1990.
- [MSW10] Meyer, Mathieu, Carsten Schütt y Elisabeth M Werner: *A convex body whose centroid and Santaló's point are far apart*. arXiv preprint arXiv:1001.0714, 2010.
- [MTJ01] Mankiewicz, Piotr y Nicole Tomczak-Jaegermann: *Geometry of families of random projections of symmetric convex bodies*. Geometric & Functional Analysis GAFA, 11(6):1282–1326, 2001.
- [Nas16] Naszódi, Márton: *Proof of a conjecture of Bárány, Katchalski and Pach*. Discrete & Computational Geometry, 55(1):243–248, 2016.
- [Pao06] Paouris, Grigoris: *Concentration of mass on convex bodies*. Geometric & Functional Analysis GAFA, 16(5):1021–1049, 2006.

- [Pel83] Pelczynski, Aleksander: *Structural theory of Banach spaces and its interplay with analysis and probability*. En *Proceedings of the ICM*, páginas 237–269, 1983.
- [Pis79] Pisier, Gilles: *Sur les espaces de Banach K -convexes*. Séminaire Analyse fonctionnelle (dit "Maurey-Schwartz"), páginas 1–15, 1979.
- [Pis99] Pisier, Gilles: *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, volumen 94. Cambridge University Press, 1999.
- [Piv10] Pivovarov, Peter: *On determinants and the volume of random polytopes in isotropic convex bodies*. *Geometriae Dedicata*, 149(1):45–58, 2010.
- [PP17] Paouris, Grigoris y Peter Pivovarov: *Random ball-polyhedra and inequalities for intrinsic volumes*. *Monatshefte für Mathematik*, 182(3):709–729, 2017.
- [PS91] Pełczynski, Aleksander y Stanislaw Szarek: *On parallelepipeds of minimal volume containing a convex symmetric body in \mathbb{R}^n* . En *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volumen 109, páginas 125–148. Cambridge University Press, 1991.
- [Ray84] Raymond, Jean: *Le volume des idéaux d'opérateurs classiques*. *Studia Mathematica*, 80(1):63–75, 1984.
- [Roy14] Royen, Thomas: *A simple proof of the Gaussian correlation conjecture extended to multivariate gamma distributions*. arXiv preprint arXiv:1408.1028, 2014.
- [RS57] Rogers, Claude y Geoffrey Shephard: *The difference body of a convex body*. *Archiv der Mathematik*, 8(3):220–233, 1957.
- [Rud00] Rudelson, Mark: *Distances Between Non-symmetric Convex Bodies and the estimate*. *Positivity*, 4(2):161–178, 2000.
- [Rud04] Rudelson, Mark: *Extremal distances between sections of convex bodies*. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 14(5):1063–1088, 2004.
- [RV16] Radke, Jordan y Beatrice Helen Vritsiou: *On the thin-shell conjecture for the Schatten classes*. arXiv preprint arXiv:1602.06934, 2016.
- [San49] Santaló, Luis: *Un invariante afín para los cuerpos convexos del espacio de n dimensiones*. *Portugaliae Mathematica*, 8(4):155–161, 1949.

- [Sas39] Sas, Ernst: *Über eine Extremumeigenschaft der Ellipsen*. Compositio Mathematica, 6:468–470, 1939.
- [Sch14] Schneider, Rolf: *Convex bodies: the Brunn–Minkowski theory*. Cambridge university press, 2014.
- [ST89] Szarek, Stanislaw y Michel Talagrand: *An “isomorphic” version of the Sauer-Shelah lemma and the Banach-Mazur distance to the cube*. En *Geometric aspects of functional analysis*, páginas 105–112. Springer, 1989.
- [STJ80] Szarek, Stanislaw y Nicole Tomczak-Jaegermann: *On nearly Euclidean decomposition for some classes of Banach spaces*. Compositio Mathematica, 40(3):367–385, 1980.
- [Syl65] Sylvester, James: *On a special class of questions on the theory of probabilities*. Birmingham British Association Report, 35:8–9, 1865.
- [Sza79] Szarek, Stanislaw: *Volume estimates and nearly Euclidean decompositions for normed spaces*. Séminaire Analyse fonctionnelle (dit “Maurey-Schwartz”), páginas 1–8, 1979.
- [Sza82] Szarek, Stanislaw: *Nets of Grassmann manifold and orthogonal group*. En *Proceedings of research workshop on Banach space theory (Iowa City, Iowa, 1981)*, volumen 169, página 185, 1982.
- [Sza90] Szarek, Stanislaw: *Spaces with Large Distance to ℓ_n^∞ and Random Matrices*. American Journal of Mathematics, 112(6):899–942, 1990.
- [TJ89] Tomczak-Jaegermann, Nicole: *Banach-Mazur distances and finite-dimensional operator ideals*, volumen 38. Longman Sc & Tech, 1989.
- [Ver18] Vershynin, Roman: *High-dimensional probability: An introduction with applications in data science*, volumen 47. Cambridge University Press, 2018.

Índice alfabético

- B_X , 9
- B_p^n , 11
- $D(K)$, 28
- K° , 10
- $L^{(m)}$, 62
- $S^{inn}(K)$, 24
- $S_\circ^{inn}(K)$, 26
- $S^{out}(K)$, 19
- $S_\circ^{out}(K)$, 26
- X_K , 9
- $\mathcal{P}^k(n)$, 71
- $\mathcal{S}(X)$, 77
- absconv, 62
- bar(K), 12
- ℓ -posición, 49
- ℓ -position, 16
- $\ell(K)$, 17
- lvr(K), 40
- $\|\cdot\|_K$, 9
- $\|\cdot\|_{\psi_1}$, 16
- $\omega(K)$, 18, 66
- σ , 17, 62
- $|K|$, 11
- vr(K, L), 39
- p -norma de Schatten, 52
- ancho promedio, 16
- Banach-Mazur
 - compacto, 62
 - distancia, 18, 62
- bandas simétricas, 44
- baricentro, 12
- barycenter, 27
- Blaschke-Santaló, desigualdad, 11
- Blaschke-Groemer, desigualdad, 23
- Bourgain-Milman, desigualdad, 11
- cápsula convexa, 10
- cápsula convexa absoluta, 10
- centralmente simétrico, 9
- conjetura del hiperplano, 15
- conjetura del símplice, 23
- cuerpo convexo, 9
- cuerpo de diferencias, 11, 28
- cuerpo polar, 10
- descomposición de la identidad, 13
- desigualdad de Chevet
 - Gaussiana, 50
 - probabilidad alta, 51
- Dvoretzky-Rogers, Lema, 24
- incondicional
 - cuerpo convexo, 46
 - norma, 46
- isotrópica
 - constante, 15
 - posición, 15, 29, 47, 68
- John
 - posición, 12
 - Teorema, 13
- Löwner
 - posición, 12
- máxima razón de volumen, 40
 - bola euclídea, 43
 - clases de Schatten, 52
 - cubo, 43
 - cuerpos incondicionales, 46
 - normas tensoriales, 54

- normas unitariamente invariantes, 52
- politopos, 45
- símplice, 43
- medida de Hausdorff, 73
- norma tensorial
 - inyectiva, 55
 - proyectiva, 55
- normas unitariamente invariantes, 52
- operador
 - m -lineal, 55
 - m -nuclear, 55
- permutacionalmente simétrico, 46
- polinomio
 - m -homogéneo, 56
 - nuclear, 56
- politopos, 10
- politopos de Gluskin, 62
- politopos Gaussianos, 75
- posición, 12
- posición de Rudelson, 49
- proceso aleatorio, 58
- proceso Gaussiano, 58
- proceso Gaussiano canónico, 58
- producto tensorial
 - m -ésimo, 54
 - simétrico, 54
- punto de contacto, 13
- punto de Santaló, 26
- razón de volumen, 39
- razón simplicial exterior, 19
- razón simplicial interior, 24
- Rogers-Shephard, desigualdad, 12
- símplice, 19
- símplice regular, 13
- Sitrling, fórmula, 10
- Urysohn, desigualdad, 18