

PRÁCTICA 2: CARDINALIDAD

“Llamaremos número cardinal de M al concepto general que, por medio de nuestra activa capacidad de pensar, surge del conjunto M cuando hacemos abstracción de la naturaleza y el orden de sus elementos. Denotamos el resultado de este doble acto de abstracción por $\overline{\overline{M}}$ ”
 GEORG CANTOR, 1895.

A. Propiedades básicas de los Conjuntos

Ejercicio 1. Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos:

$$\text{i) } B - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B - A_i)$$

$$\text{ii) } B - \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B - A_i)$$

$$\text{iii) } \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) = B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$$

Ejercicio 2. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Hallar una familia de conjuntos $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que verifique simultáneamente:

- $B_n \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$
- $B_k \cap B_j = \emptyset$ si $k \neq j$
- $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

Ejercicio 3. Sea L un conjunto parcialmente ordenado en el cual todo subconjunto no vacío tiene máximo y mínimo. Probar que L es una cadena (o sea, un conjunto totalmente ordenado) finita.

Ejercicio 4. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función y sean A y B subconjuntos de X .

i) Demostrar que:

$$a) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$b) \quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

ii) Generalizar al caso de uniones e intersecciones infinitas.

iii) Exhibir un ejemplo donde la inclusión en i) (b) sea estricta.

Ejercicio 5. Sean $f : X \rightarrow Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Demostrar que:

- i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
- ii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$
- iii) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$
- iv) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- v) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Generalizar iv) y v) al caso de uniones e intersecciones infinitas.

Ejercicio 6. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que $f(f^{-1}(B)) = B$ para cada $B \subseteq Y$ si y sólo si f es suryectiva.

Ejercicio 7. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

- i) f es inyectiva
- ii) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todo $A, B \subseteq X$
- iii) $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq X$
- iv) $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ para todo par de subconjuntos A, B tales que $A \cap B = \emptyset$
- v) $f(A - B) = f(A) - f(B)$ para todo $B \subseteq A \subseteq X$

Ejercicio 8. Para cada subconjunto S de un conjunto A dado se define la *función característica* de S , $\mathcal{X}_S : A \rightarrow \{0, 1\}$, por

$$\mathcal{X}_S(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in S \\ 0 & \text{si } a \notin S \end{cases}$$

Probar que:

- i) $\mathcal{X}_{S \cap T} = \mathcal{X}_S \cdot \mathcal{X}_T$ para todo par de subconjuntos $S, T \subseteq A$
- ii) $\mathcal{X}_{A-S} = 1 - \mathcal{X}_S$ para todo $S \subseteq A$
- iii) $\mathcal{X}_S + \mathcal{X}_T = \mathcal{X}_{S \cup T} + \mathcal{X}_{S \cap T}$ para todo $S, T \subseteq A$

Ejercicio 9. Sea A un cadena (o sea, un conjunto con un orden total) y sea B un conjunto parcialmente ordenado. Sea $f : A \rightarrow B$ una función inyectiva para la cual si $a, b \in A$ y $a \leq b$, entonces $f(a) \leq f(b)$. Probar que $f(a) \leq f(b)$ implica $a \leq b$.

Ejercicio 10. Sea \sim una relación de equivalencia sobre un conjunto A . Para cada $a \in A$ se define el conjunto $S_a = \{b \in A / a \sim b\}$. Probar que:

- i) Para todo par de elementos $a_1, a_2 \in A$ vale: $S_{a_1} = S_{a_2}$ o $S_{a_1} \cap S_{a_2} = \emptyset$
- ii) $A = \bigcup_{a \in A} S_a$

B. Cardinalidad

“Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros”

DAVID HILBERT

Ejercicio 11. Demostrar que si A es un conjunto de n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

Ejercicio 12. Sea A un conjunto. Probar que son equivalentes:

- i) A es infinito (i.e. tiene un subconjunto en biyección con \mathbb{N})
- ii) Para todo $x \in A$, existe una función $f_x : A \rightarrow A - \{x\}$ biyectiva
- iii) Para todo $\{x_1, \dots, x_n\} \subset A$, existe una función $f_{\{x_1, \dots, x_n\}} : A \rightarrow A - \{x_1, \dots, x_n\}$ biyectiva.

Ejercicio 13. Sea A un conjunto numerable. Supongamos que existe una función sobreyectiva de A en un conjunto B . Probar que B es contable.

Ejercicio 14. Probar que los siguientes conjuntos son numerables (es decir, tienen cardinal \aleph_0):

$$\mathbb{Z}_{\leq -1} ; \mathbb{Z}_{\geq -3} ; 3\mathbb{N} ; \mathbb{Z} ; \mathbb{N}^2 ; \mathbb{Z} \times \mathbb{N} ; \mathbb{Q} ; \mathbb{N}^m \quad (m \in \mathbb{N})$$

Ejercicio 15.

- i) Sean A y B conjuntos contables. Probar que $A \cup B$ es contable.
- ii) Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables. Probar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es contable.
- iii) Sea \mathcal{A} un conjunto finito y $\mathcal{S} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^m$. Probar que $\#\mathcal{S} = \aleph_0$.

Deducir que, cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos. ¿Cuántos subconjuntos de \mathbb{N}^2 pueden ser definidos en un lenguaje fijo? ¿Cuántos hay en total?

Ejercicio 16. Sean A y B conjuntos, A infinito y B numerable. Probar que:

- i) Existe una biyección entre $A \cup B$ y A
- ii) Si A no es numerable y $B \subseteq A$, entonces existe una biyección entre $A - B$ y A .
¿Es numerable el conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$?

Ejercicio 17. Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable.

Ejercicio 18. Se dice que un número complejo z es *algebraico* si existen enteros a_0, \dots, a_n no todos nulos, tales que

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$$

- i) Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.
- ii) Deducir que existen números reales que no son algebraicos.

NOTA: Estos números se llaman *trascendentes*.

Ejercicio 19. Sea $X \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ un conjunto de números reales positivos. Supongamos que existe una constante positiva C tal que para cualquier subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ vale $\sum_{i=1}^n x_i \leq C$. Probar que X es contable.

Ejercicio 20. * Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que:

$$\#(\{x \in \mathbb{R} / f \text{ no es continua en } x\}) \leq \aleph_0$$

Ejercicio 21. Probar que si A es un conjunto numerable, el conjunto de las partes finitas de A (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ formado por los subconjuntos finitos de A) es numerable.

Ejercicio 22. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos de sucesiones:

- i) $\{(a_n) / a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$
- ii) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} / a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$
- iii) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} / a_n \geq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$
- iv) $\{(q_n) \subset \mathbb{Q} / \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0\}$
- v) $\{(q_n) \subset \mathbb{Q} / (q_n) \text{ es periódica}\}$
- vi) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} / 1 \leq a_n \leq m \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \quad (m \in \mathbb{N})$

Ejercicio 23. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:

- i) $\{I / I \text{ es un intervalo de extremos racionales}\}$
- ii) $\{[a, b] / a, b \in \mathbb{R}\}$
- iii) I , sabiendo que $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}$ es una familia de intervalos disjuntos
- iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x + 2y \geq 7\}$
- v) $\mathbb{R}_{>0}$

Ejercicio 24. Probar que la unión numerable de conjuntos de cardinal c tiene cardinal c .

Ejercicio 25. Sean a, b, c cardinales. Probar que:

- i) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- ii) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

iii) $(a^b)^c = a^{bc}$

iv) $(ab)^c = a^c \cdot b^c$

v) Si $b \leq c$, entonces $a^b \leq a^c$ y $b^a \leq c^a$

Ejercicio 26. Probar que $n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Ejercicio 27. Mostrar que \mathbb{R} es unión disjunta de c conjuntos de cardinal c .

Ejercicio 28. Se consideran los siguientes conjuntos de funciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbb{R}) &= \{f / f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\} & \mathcal{F}(\mathbb{Q}) &= \{f / f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}\} \\ \mathcal{C}(\mathbb{R}) &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) / f \text{ es continua}\} & \mathcal{C}(\mathbb{Q}) &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}) / f \text{ es continua}\} \end{aligned}$$

i) Probar que $\#(\mathcal{F}(\mathbb{R})) > c$.

ii) Calcular $\#(\mathcal{F}(\mathbb{Q}))$.

iii) Calcular $\#(\mathcal{C}(\mathbb{Q}))$.

iv) Probar que la función $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ dada por $\phi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva. ¿Qué significa esto?

v) Calcular $\#(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$.

Ejercicio 29. Probar que el conjunto de partes numerables de \mathbb{R} (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ formado por todos los subconjuntos numerables de \mathbb{R}) tiene cardinal c .

C. Axioma de Elección y Lema de Zorn

"El Axioma de Elección es obviamente cierto, el Principio de Buena Ordenación es obviamente falso, y ¿Quién puede decirlo para el Lema de Zorn?"

JERRY BONA

Ejercicio 30. Si X es un conjunto infinito, entonces existe una aplicación inyectiva $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Sugerencia: definir f por medio de las fórmulas recursivas $f(1) = e(X)$ y $f(n+1) = e(X - \{f(1), \dots, f(n)\})$ siendo e una función de elección en las partes no vacías de X .

Ejercicio 31. Probar que una cadena infinita contiene o bien una cadena isomorfa (con el orden) a \mathbb{N} o bien una cadena isomorfa a $\mathbb{Z}_{\leq -1}$.

Ejercicio 32. Sean $A, B \neq \emptyset$. Entonces, o bien existe $f : A \rightarrow B$ inyectiva, o bien existe $g : B \rightarrow A$ inyectiva. (Es decir $\#A \leq \#B$ o $\#B \leq \#A$).

Ejercicio 33. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial y $S \subseteq V$ un subespacio. Sea $T : S \rightarrow \mathbb{R}$ una transformación lineal. Entonces T se puede extender a todo el espacio, i.e. $\exists \tilde{T} : V \rightarrow \mathbb{R}$ transformación lineal, tal que $\tilde{T}|_S \equiv T$.

Ejercicio 34. En un espacio vectorial, todo conjunto linealmente independiente se puede extender a una base.

Ejercicio 35. En un espacio vectorial, de todo sistema de generadores se puede extraer una base.

Ejercicio 36. Probar que existe una aplicación suryectiva $f : X \rightarrow Y$ si y sólo si existe $g : Y \rightarrow X$ inyectiva. (Esto dice que $\#X \geq \#Y$ si y sólo si $\#Y \leq \#X$).