Álgebra Lineal Computacional
Clase 4
25 / agosto / 2022

Segundo Cuatrimestre 2022

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

Multiplicación de matrices

Dadas matrices $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, el producto $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ es la matriz de m filas y p columnas con

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \vdots & c_{1p} \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ c_{m1} & \vdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

En la casilla (i, j) de $\boldsymbol{C}$ ponemos el producto de la fila i de $\boldsymbol{A}$ con la columna j de $\boldsymbol{B}$.

Multiplicación de matrices

Ejercicio

Realizar (a mano) los siguientes productos de matrices:

1. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Producto de matrices *punto a punto* en Python

Si multiplicamos dos matrices o vectores en `Python` con $*$ ...

```
A1 = np.array([[1,2],[3,4]])
A2 = np.array([[1,0],[0,1]])
print(A1 * A2)
```

```
%% A1 * A2 =
%%  [[1 0]
%%  [0 4]]
```

La operación $*$ en `Python` calcula el producto coordenada a coordenada. Esta operación se llama producto de Hadamard, y es útil en muchos casos, pero no es el producto usual de matrices.

Producto usual de matrices en Python

Para el producto usual de matrices usamos en Python el símbolo `@`.

```
# Producto usual de matrices
print("A1 @ A2 = \n", A1 @ A2)
```

```
%% A1 @ A2 =
%%  [[1 2]
%%  [3 4]]
```

¡Revisar siempre que estemos usando el producto correcto en `Python`!

Propiedades del producto de matrices

- El producto de matrices es asociativo. Es decir $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$, para matrices con los tamaños apropiados para realizar los productos.
- El producto de matrices no es conmutativo. En general, no vale $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, ni siquiera en el caso de matrices cuadradas. Lo verificamos en `Python`.

```
A = np.array([[1, 2], [2, 3]])
B = np.array([[2, 5], [1, 4]])
print("A␣@␣B␣=␣\n", A @ B)
print("B␣@␣A␣=␣\n", B @ A)
```

Teoría vs. práctica

En la práctica, el producto de matrices **"no"** es asociativo.

La cantidad de operaciones que realizamos depende del orden en que hacemos la multiplicación

```
import numpy as np
A = np.random.rand(10000,10000)
B = np.random.rand(10000,1)
C = np.random.rand(1,10000)
```

```
%%time
X = (A@(B@C))
```

```
%% Wall time: 12.8 s
```

```
%%time
Y = ((A@B)@C)
```

```
%% Wall time: 804 ms
```

Matriz transpuesta

La matriz transpuesta de $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es la matriz que se obtienen a partir de $\boldsymbol{A}$ intercambiando filas por columnas, es decir $\boldsymbol{A}^T = (a_{ji}) \in \mathbb{K}^{n\times m}$.

Ejemplo

- Si $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$.
- Si $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$.

Propiedades

- $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$.
- $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$.

Metamecánica del producto de matrices

Filas y columnas de $\boldsymbol{AB}$

1. Si $\boldsymbol{b}_j$ es la j-ésima columna de $\boldsymbol{B}$, la j-ésima columna de $\boldsymbol{AB}$ es $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_j$.
2. Si $\boldsymbol{a}_i$ es la i-ésima fila de $\boldsymbol{A}$, la i-ésima fila de $\boldsymbol{AB}$ es $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{B}$.

Matrix por vector. $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^m$

1. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ es una combinación lineal de las columnas de $\boldsymbol{A}$.
2. $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}$ es una combinación lineal de las filas de $\boldsymbol{A}$.

Sistemas lineales y ecuaciones matriciales

Podemos plantear el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 5y = \ \ 4 \\ 2x - 9y = 15. \end{cases}$$

en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix},$$

o en general, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es la matriz de coeficientes, $\boldsymbol{x}$ es un vector o matriz columna de n incógnitas y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^{n}$ es el vector de términos constantes.

Pregunta: ¿cuántas incógnitas y cuántas ecuaciones tiene el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con los tamaños dados?

Sistemas lineales en Python

Para resolver sistemas de ecuaciones en `Python` podemos usar el comando `solve` (sólo para sistemas cuadrados con solución única).

```
A = np.array([[3,2],[5,-4]])
b = np.array([22, -11])
print(np.linalg.solve(A, b))
```

```
## [3.  6.5]
```

Matriz diagonal e identidad

Una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice diagonal si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, es decir:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz $\boldsymbol{I}_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonal con $a_{ii} = 1$ para todo i, se llama matriz identidad:

$$\boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Potencia de una matriz diagonal

- $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^2 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{A}^s = \boldsymbol{A} \cdots \boldsymbol{A}$ (s veces) $= \begin{pmatrix} a_{11}^s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^s \end{pmatrix}$

Producto a derecha o izquierda por matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ b_{11}\boldsymbol{a}_1 & b_{22}\boldsymbol{a}_2 & \dots & b_{nn}\boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \boldsymbol{f}_1 & - \\ - & \boldsymbol{f}_2 & - \\ & \dots & \\ - & \boldsymbol{f}_n & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & a_{11}\boldsymbol{f}_1 & - \\ - & a_{22}\boldsymbol{f}_2 & - \\ & \dots & \\ - & a_{nn}\boldsymbol{f}_n & - \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n\boldsymbol{A}$

Inversa de una matriz

Dada una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, si existe una matriz $\boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{BA},$$

decimos que $\boldsymbol{A}$ es inversible y $\boldsymbol{B}$ es la inversa de $\boldsymbol{A}$. Si $\boldsymbol{A}$ es inversible, la inversa es única y la notamos $\boldsymbol{A}^{-1}$. Si $\boldsymbol{A}$ no es inversible, decimos que $\boldsymbol{A}$ es singular.

Aplicación

Si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es inversible, la solución del sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Cálculo de la inversa

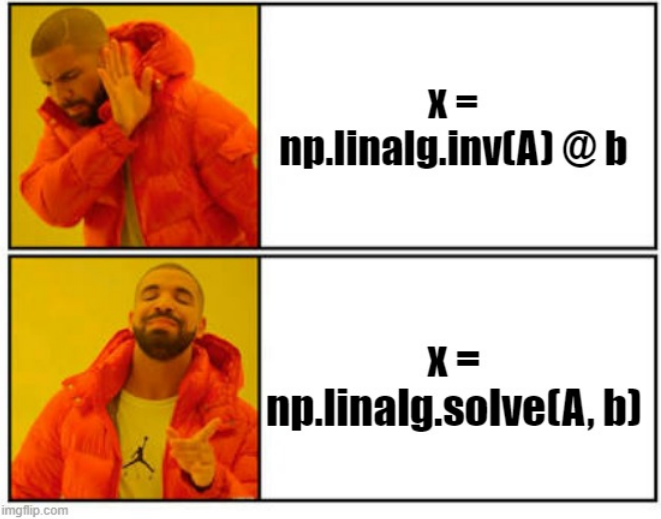
Para calcular la inversa de $\boldsymbol{A}$, buscamos $\boldsymbol{B}$ tal que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_n$.

Resolvemos las ecuaciones $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{e}_j$, donde $\boldsymbol{b}_j$ es la j-ésima columna de $\boldsymbol{B}$.

```
A = np.array([[3,2],[5,-4]])
b = np.array([22, -11])
print(np.linalg.solve(A, np.eye(2)))
print(np.linalg.inv(A))
print(np.linalg.inv(A) @ b)
```

```
%% [[ 0.18181818  0.09090909]
%%  [ 0.22727273 -0.13636364]]
%% [[ 0.18181818  0.09090909]
%%  [ 0.22727273 -0.13636364]]
%% [3.  6.5]
```

¿Cómo resolver un sistema lineal $Ax = b$?



Inversa de una matriz y sistemas de ecuaciones

Propiedad

Para $\boldsymbol{A}$ cuadrada, son equivalentes:

- el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ tiene solución única para un $\boldsymbol{b}$ particular,
- el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ tiene solución única para todo $\boldsymbol{b}$,
- $\boldsymbol{A}$ es inversible.

Determinante de una matriz

El determinante de una matriz *cuadrada* se puede definir *recursivamente* por la siguiente fórmula

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{cases} a_{11} & \text{si } n = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\boldsymbol{M}_{ij}) & \text{si } n > 1, \end{cases}$$

donde $\boldsymbol{M}_{ij}$ es la matrix de $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de $\boldsymbol{A}$.

Esta fórmula se conoce como *desarrollo de una fila o columna*.

Vale (sin demostración): desarrollando cualquier fila o columna se obtiene el mismo resultado.

Determinante de una matriz

Ejemplo

1. $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc,$
2. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 7 - 3 \cdot 11 = -26,$

   desarrollando la primera columna.

Determinante de una matriz triangular superior o inferior

- Si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es triangular inferior o superior su determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- $\det(\boldsymbol{I}_n) = 1.$

Determinante y operaciones de filas y columnas

Si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\boldsymbol{a}_i$, $1 \leq i \leq n$, son las columnas de $\boldsymbol{A}$, valen las siguientes propiedades:

- transponer la matriz: $\det(\boldsymbol{A}^T) = \det(\boldsymbol{A})$,
- si $\boldsymbol{A}$ tiene una columna de ceros, $\det(\boldsymbol{A}) = 0$,
- multilinealidad del determinante:

$$\det\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \dots & \alpha\boldsymbol{a}_i + \beta\boldsymbol{b}_i & \dots & \boldsymbol{a}_n \\ | & & | & & | \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \det\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_i & \dots & \boldsymbol{a}_n \\ | & & | & & | \end{pmatrix} + \beta \det\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{b}_i & \dots & \boldsymbol{a}_n \\ | & & | & & | \end{pmatrix}$$

Determinante y operaciones de filas y columnas

A partir de la multilinealidad obtenemos:

- multiplicar una columna por un escalar:

$$\det\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \dots & \alpha\boldsymbol{a}_i & \dots & \boldsymbol{a}_n \\ | & & | & & | \end{pmatrix} = \alpha\det(\boldsymbol{A})$$

- multiplicar toda la matriz por un escalar:

$$\det(\alpha\boldsymbol{A}) = \alpha^n \det(\boldsymbol{A}), \text{ para } \alpha \in \mathbb{K}.$$

- multiplicar toda la matriz por (-1):

$$\det(-\boldsymbol{A}) = (-1)^n \det(\boldsymbol{A}).$$

Determinante y operaciones de filas y columnas

- Si $\boldsymbol{A}$ tiene dos columnas iguales, $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.
- Sumar un múltiplo de una columna a otra columna:

$$\det\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_i + \alpha\boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_n \\ | & & | & & | \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{A})$$

- Intercambiar dos columnas:

$$\det\begin{pmatrix} & | & & | & \\ \dots & \boldsymbol{a}_i & \dots & \boldsymbol{a}_j & \dots \\ & | & & | & \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} & | & & | & \\ \dots & \boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_i & \dots \\ & | & & | & \end{pmatrix}$$

Otras propiedades del determinante

Proposición

$$\det(\boldsymbol{A}) = 0 \text{ si y solo si } \boldsymbol{A} \text{ es singular.}$$

Proposición

Si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{n\times n}$,

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}),$$

$$\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = 1/\det(\boldsymbol{A}).$$

Complejidad del cálculo del determinante

Si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$,

- ¿cuántas operaciones tenemos que realizar para calcular el determinante de $\boldsymbol{A}$ desarrollando filas o columnas?
- ¿hay alguna forma más eficiente de calcular determinantes?