Álgebra Lineal Computacional
Clase 3 - 23 / agosto / 2022

Segundo Cuatrimestre 2022

Facultad de Ciencias Exacas y Naturales, UBA

Vectores linealmente independientes

Dado un conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ de vectores en $\mathbb{K}^n$, decimos que es un conjunto de vectores linealmente independientes si la única elección de coeficientes para los cuales

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{v}_i = 0$$

es $a_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$.

Ejemplo

- Los vectores $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 2)$ y $\boldsymbol{v}_3 = (1, 2, 5)$ son linealmente dependientes, porque $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$. O equivalentemente, $\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = 0$.
- Los vectores $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 0)$ y $\boldsymbol{v}_3 = (0, 0, 1)$ son linealmente independientes.

Vectores linealmente independientes y matrices escalonadas

- Para $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, las filas $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m\}$ de $\boldsymbol{A}$ son vectores de $\mathbb{K}^n$.

Ejemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Si $a_1\boldsymbol{f}_1 + a_2\boldsymbol{f}_2 + a_3\boldsymbol{f}_3 = 0$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

- Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz escalonada con todas las filas no nulas, los vectores $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m\}$ son l.i.
- Para saber si un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ es l.i., construimos una matriz con esos vectores como filas, escalonamos y verificamos si se anula alguna fila.

Vectores linealmente independientes

Ejercicio

Dados los vectores

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1, 2, 4, 5), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (0, 2, 1, 2), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4, 4, 14, 16), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (1, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

determinar cuáles de los siguientes conjuntos son linealmente independientes:

- $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$,
- $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$,
- $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4\}$.

Vectores linealmente independientes y escritura única

Proposición (Escritura única)

Si los vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ son linealmente independientes, cualquier elemento de $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$ se escribe de forma única como combinación lineal de los vectores $\{\boldsymbol{v}_i : i = 1, \ldots, m\}$.

Demostración.

Bases

Definición

Dado un e.v. V, un conjunto $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\} \subset V$ es una *base* de V si

1. $\mathcal{B}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente,
2. $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle = V$.

Ejercicio

Para los vectores del ejercicio anterior,

- $v_1 = (1, 2, 4, 5)$, $v_2 = (0, 2, 1, 2)$, $v_3 = (4, 4, 14, 16)$ y $v_4 = (1, 0, 0, 0)$ ¿forman una base de $\mathbb{R}^4$?
- Hallar una base de $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

Veremos que si un espacio vectorial V tienen una base con una cantidad finita de elementos, cualquier otra base de V tiene la misma cantidad de elementos.

Lema de intercambio

Proposición (Lema de intercambio)

Si $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ es una base de V y $\boldsymbol{w} \in V$, entonces existe $1 \leq i \leq m$ tal que reemplazando en $\mathcal{B}$ a $\boldsymbol{v}_i$ por $\boldsymbol{w}$, el conjunto resultante sigue siendo una base de V.

Demostración.

Dimensión

Proposición (misma cantidad de elementos)

Dado un espacio vectorial V, si $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s\}$ es una base de V de s elementos, y $\tilde{\mathcal{B}}$ es otra base de V, entonces $\tilde{\mathcal{B}}$ tiene exactamente s elementos.

Demostración.

Cuando V tiene una base finita, llamamos *dimensión* de V a la cantidad de elementos de la base, y decimos que V es un espacio de dimensión finita.

Ejemplo

Para los vectores del ejercicio anterior, $v_1 = (1, 2, 4, 5)$, $v_2 = (0, 2, 1, 2)$, $v_3 = (4, 4, 14, 16)$ y $v_4 = (1, 0, 0, 0)$, una base de $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ es ... y la dimensión de U es ....

Dimensión

Proposición (misma cantidad de elementos)

Dado un espacio vectorial V, si $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s\}$ es una base de V de s elementos, y $\tilde{\mathcal{B}}$ es otra base de V, entonces $\tilde{\mathcal{B}}$ tiene exactamente s elementos.

Demostración.

Cuando V tiene una base finita, llamamos *dimensión* de V a la cantidad de elementos de la base, y decimos que V es un espacio de dimensión finita.

Ejemplo

Para los vectores del ejercicio anterior, $v_1 = (1, 2, 4, 5)$, $v_2 = (0, 2, 1, 2)$, $v_3 = (4, 4, 14, 16)$ y $v_4 = (1, 0, 0, 0)$, una base de $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ es $\{v_1, v_2, v_4\}$ y la dimensión de U es ....

Dimensión

Proposición (misma cantidad de elementos)

Dado un espacio vectorial V, si $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s\}$ es una base de V de s elementos, y $\tilde{\mathcal{B}}$ es otra base de V, entonces $\tilde{\mathcal{B}}$ tiene exactamente s elementos.

Demostración.

Cuando V tiene una base finita, llamamos *dimensión* de V a la cantidad de elementos de la base, y decimos que V es un espacio de dimensión finita.

Ejemplo

Para los vectores del ejercicio anterior, $v_1 = (1, 2, 4, 5)$, $v_2 = (0, 2, 1, 2)$, $v_3 = (4, 4, 14, 16)$ y $v_4 = (1, 0, 0, 0)$, una base de $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ es $\{v_1, v_2, v_4\}$ y la dimensión de U es 3.

Bases de espacios vectoriales

Ejemplo

1. $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimensión n. Una base de $\mathbb{R}^n$ es $\{\boldsymbol{e}_i : i = 1, \ldots, n\}$, con $\boldsymbol{e}_i$ el vector que tiene 1 en la entrada i y 0 en todas las demás. Llamamos base canónica a esta base.
2. $\mathbb{R}[x]_d$ es un espacio vectorial de dimensión $d+1$. La base canónica de $\mathbb{R}[x]_d$ es $\{1, x, x^2, \ldots, x^d\}$.
3. $\mathbb{R}[x]$ es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Coordenadas en una base $\mathcal{B}$

Si $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V y $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{v}$ admite una escritura única como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$,

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{b}_n.$$

Representamos a $\boldsymbol{v}$ en la base $\mathcal{B}$ como

$$\boldsymbol{v} = (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{B}}.$$

Ejemplo

Si $p(x) = x^3 - 3x + 2$ y $\mathcal{E} = \{x^3, x^2, x, 1\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}[x]_3$,

$$p(x) = (1, 0, -3, 2)_{\mathcal{E}}.$$

Coordenadas en una base $\mathcal{B}$

Ejercicio

Hallar las coordenadas del vector

$$\boldsymbol{v} = (-1, 5, -5)$$

en la base de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 3), (2, -1, 4), (3, 2, 1)\}.$$

Ejercicio

Desarrollar el polinomio

$$p(x) = x^2 - 3x + 1$$

en potencias de $(x - 1)$.

Bases y coordenadas

Ejercicio

Desarrollar el polinomio
$$p(x) = x^2 - 3x + 1$$
en potencias de $(x-1)$.

Calculando el desarrollo de Taylor obtenemos
$$p(x) = (x-1)^2 - (x-1) - 1,$$
por lo tanto las coordenadas de p en la base $\mathcal{B} = \{(x-1)^2, (x-1), 1\}$ son
$$(1, -1, -1)_{\mathcal{B}}.$$

Bases, generadores y conjuntos linealmente independientes

Vimos: para un espacio vectorial V de dimensión finita n, cualquier base de V tiene la misma cantidad de elementos n.

Esto implica:

- Si $S \subset V$ tiene menos de n elementos, ...
- Si $S \subset V$ es un conjunto linealmente independiente de n elementos, ...
- Si $S \subset V$ tiene más de n elementos, ...

Bases, generadores y conjuntos linealmente independientes

Vimos: para un espacio vectorial V de dimensión finita n, cualquier base de V tiene la misma cantidad de elementos n.

Esto implica:

- Si $S \subset V$ tiene menos de n elementos, no puede generar todo V.
- Si $S \subset V$ es un conjunto linealmente independiente de n elementos, ...
- Si $S \subset V$ tiene más de n elementos, ...

Bases, generadores y conjuntos linealmente independientes

Vimos: para un espacio vectorial V de dimensión finita n, cualquier base de V tiene la misma cantidad de elementos n.

Esto implica:

- Si $S \subset V$ tiene menos de n elementos, no puede generar todo V.
- Si $S \subset V$ es un conjunto linealmente independiente de n elementos, S es una base de V.
- Si $S \subset V$ tiene más de n elementos, ...

Bases, generadores y conjuntos linealmente independientes

Vimos: para un espacio vectorial V de dimensión finita n, cualquier base de V tiene la misma cantidad de elementos n.

Esto implica:

- Si $S \subset V$ tiene menos de n elementos, no puede generar todo V.
- Si $S \subset V$ es un conjunto linealmente independiente de n elementos, S es una base de V.
- Si $S \subset V$ tiene más de n elementos, no puede ser linealmente independiente.

Extraer una base de un sistema de generadores

Más aún, tenemos el siguiente resultado.

Proposición (Extraer una base)

Si V es un espacio de dimensión n y $S \subset V$ es un conjunto de generadores de m elementos, con $m > n$, podemos extraer de S un subconjunto $\mathcal{B}$ de n elementos que forma una base de V.

Demostración.

Ejemplo

Dado $S = \{(1, -2, 0), (2, 0, 5), (5, -2, 10), (1, 2, 0), (3, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$, extraer de S una base de $\langle S \rangle$.

Base por triangulación

Otra posibilidad:

Dado un conjunto de vectores $S = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s\}$, podemos obtener una base del espacio vectorial generado por S triangulando el sistema, es decir:

1. colocamos los vectores como filas de una matriz,
2. triangulamos la matriz utilizando eliminación gaussiana,
3. tomamos los vectores correspondientes a las filas no nulas de la matriz.

Ejemplo

Dado $S = \{(1, -2, 0), (2, 0, 5), (5, -2, 10), (1, 2, 0), (3, 2, 1)\}$, obtener una base de $\langle S \rangle$ por triangulación.

Extensión de una base

Proposición (Extensión de una base)

Dado un espacio vectorial V de dimensión n y una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s\}$ de un subespacio S, es posible encontrar vectores $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{n-s}\}$ tales que

$$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s\, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{n-s}\}$$

forman una base de V.

Demostración: ejercicio.

Ejemplo

Dado $S = \{(2, -4, 1, 0), (-1, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$, verificar que S es un conjunto linealmente independiente y completar S a una base de $\mathbb{R}^4$.

Espacios vectoriales de dimensión finita

Corolario: Todo espacio vectorial finitamente generado o incluido en un espacio de dimensión finita admite una base.

En esta materia vamos a trabajar sobre espacios de dimensión finita.

Proposición

Todo $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de dimensión finita n es isomorfo a $\mathbb{K}^n$ como espacio vectorial (es decir, si solo consideramos las operaciones de espacio vectorial).

Demostración: considerar una biyección entre una base de V y una de $\mathbb{K}^n$.

Espacios vectoriales de dimensión finita

Ejemplo

1. Las matrices de $m \times n$ podemos pensarlas como vectores de longitud $m \times n$.
2. Los polinomios de grado d podemos representarlos por sus vectores de coeficientes, de longitud $d + 1$.
   Por ejemplo, en $\mathbb{R}[x]_3$ representamos al polinomio
   $$x^3 - 3x + 2$$
   por el vector $(1, 0, -3, 2)$.