Álgebra Lineal Computacional
Clase 2 - 18 / agosto / 2022

Segundo Cuatrimestre 2022

Facultad de Ciencias Exacas y Naturales, UBA

Espacios vectoriales

Un espacio vectorial es un conjunto de elementos, llamados *vectores*, que pueden ser sumados entre sí y multiplicados (*escalados*) por números (llamados *escalares*). Llamamos V al conjunto de vectores y $\mathbb{K}$ al conjunto de números.

Cuerpos

El conjunto $\mathbb{K}$ debe ser un cuerpo. Esto es, $\mathbb{K}$ posee una suma $+$ y un producto $\cdot$ que satisfacen un conjunto de axiomas.

	suma	producto
asociatividad	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
conmutatividad	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
propiedad distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	
elemento identidad	$0 + a = a = a + 0$	$1 \cdot a = a = a \cdot 1$
elemento inverso	$a + (-a) = 0$	$a \cdot (a^{-1}) = 1$

Cuerpos

En esta materia trabajaremos con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, el cuerpo de los números reales o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos.

Cuerpos

En esta materia trabajaremos con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, el cuerpo de los números reales o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos.

Ejemplo

El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros no es un cuerpo, porque excepto 1 y -1, los demás números enteros no poseen un inverso entero para la multiplicación. Por ejemplo, el inverso de 2 es $1/2$ que no es un número entero.

Cuerpos

En esta materia trabajaremos con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, el cuerpo de los números reales o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos.

Ejemplo

El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros no es un cuerpo, porque excepto 1 y -1, los demás números enteros no poseen un inverso entero para la multiplicación. Por ejemplo, el inverso de 2 es $1/2$ que no es un número entero.

Ejemplo

La ecuación lineal $3x = 7$ tiene solución en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ pero no tiene solución en $\mathbb{Z}$.

Espacios vectoriales

Formalmente, un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un conjunto V y dos operaciones, que satisfacen ciertos axiomas.

Las operaciones definidas en V son:

- Suma de vectores. $+ : V \times V \to V$, a cualquier par $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ de vectores le asigna un vector $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in V$.
- Producto por escalar. $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, a un escalar a y un vector $\boldsymbol{v} \in V$ le asigna un vector $a\boldsymbol{v} \in V$ (no confundir con el producto escalar que dados dos vectores devuelve un escalar que veremos más adelante).

Espacios vectoriales

Los axiomas de espacio vectorial son

1. **Asociatividad de la suma.** $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$
2. **Conmutatividad de la suma.** $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
3. **Elemento neutro de la suma.** Existe un elemento $\mathbf{0} \in V$ tal que $\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$ para todo $\boldsymbol{v} \in V$.
4. **Inverso para la suma.** Para todo $\boldsymbol{v} \in V$, existe un elemento $-\boldsymbol{v} \in V$, llamado inverso aditivo de $\boldsymbol{v}$, tal que $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = 0$.

Espacios vectoriales

5. **Compatibilidad de la multiplicación por escalar con la la multiplicación del cuerpo.** $a(b\boldsymbol{v}) = (ab)\boldsymbol{v}$.
6. **Elemento neutro de la multiplicación por escalar.** $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, donde 1 es el neutro de $\mathbb{K}$.
7. **Propiedad distributiva de la multiplicación por escalar respecto de la suma de vectores.** $a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$.
8. **Propiedad distributiva de la multiplicación por escalar respecto de la suma de escalares.** $(a + b)(\boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v}$.

Espacios vectoriales

Ejemplo

Los siguientes conjuntos son espacios vectoriales.

1. $\mathbb{R}^n$
2. $\mathbb{R}^{m\times n}$, el conjunto de matrices.
3. $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de todos los polinomios en una variable.
4. $\mathbb{R}[x]_d$, el conjunto de polinomios en una variable de grado $\leq d$.
5. $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, el conjunto de sucesiones infinitas de números reales.
6. Las funciones continuas $\{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$.

Los siguientes conjuntos no son espacios vectoriales.

1. El conjunto de matrices de cualquier tamaño.
2. Los polinomios de grado exactamente d.

Aplicación: score crediticio

Se quiere predecir el consumo en tarjeta de crédito que tendrán los clientes de un banco mediante un modelo lineal. Se consideran las siguientes *variables explicativas* de los clientes:

1. Sueldo mensual
2. Impuesto a las ganancias pagado el año anterior.
3. Cantidad de integrantes del grupo familiar
4. Puntaje otorgado a la serie "La Casa de Papel"(1 a 5 estrellas)
5. Es fumador (sí / no)
6. Marca de Celular (Samsung / Huawei / Iphone / Otro)

Se quiere definir un espacio vectorial V donde la información de cada cliente sea un vector de V. ¿Qué espacio vectorial utilizaría para este modelo? (Se busca que dos personas con vectores similares tengan comportamiento similar.)

Subespacios vectoriales

Un subespacio U de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que es a la vez un espacio vectorial.

Vale: U subespacio vectorial si y solo si

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$
- $\forall \boldsymbol{u} \in U, \forall k \in \mathbb{K} : k\boldsymbol{u} \in U$.

Ejemplo

1. El subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^5$ tales que la primera coordenada es 0 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$.
2. El conjunto de matrices simétricas de $n \times n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$.
3. El subconjunto de vectores $\mathbb{R}^5$ tales que la primera coordenada es 1 **no** es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$.

Espacio vectorial generado por vectores

Dado un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ de un espacio vectorial V, el conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle = \{a_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_m \boldsymbol{v}_m : a_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, m\}$$

es un subespacio U de V llamado el espacio generado por $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$.

Espacio vectorial generado por vectores

Dado un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ de un espacio vectorial V, el conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores

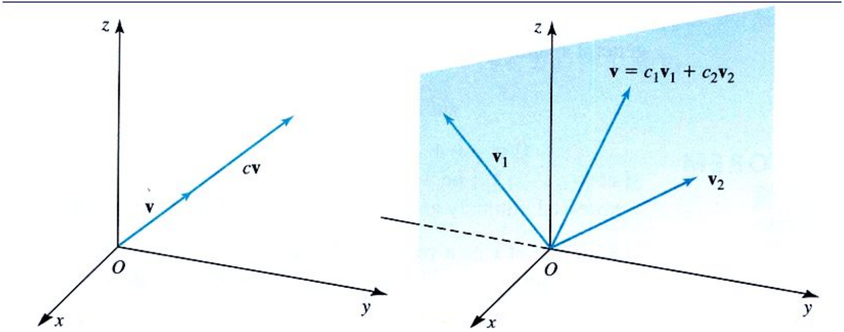
$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle = \{a_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_m \boldsymbol{v}_m : a_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, m\}$$

es un subespacio U de V llamado el espacio generado por $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$.

Ejemplo

$$\begin{aligned} U &= \langle (1,0,3), (2,-1,1) \rangle \\ &= \{a_1(1,0,3) + a_2(2,-1,1) : a_1, a_2 \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(a_1 + 2a_2, -a_2, 3a_1 + a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

Subespacios de $\mathbb{R}^3$



- Un espacio generado por un vector es una recta por el origen.
- Un espacio generado por dos vectores (en rectas distintas) es un plano por el origen.

Espacios dados por ecuaciones homogéneas

Dado un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

el conjunto S de soluciones es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$.

Espacios dados por ecuaciones homogéneas

Para encontrar un sistema de generadores, escalonamos la matriz y despejamos la primera variable de cada ecuación en el sistema escalonado en función de las demás variables.

Ejemplo

Buscamos generadores del sistema escalonado

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ \qquad 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

con $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

Suma e intersección de subespacios

Definición

Dados subespacios S, T de $\mathbb{R}^n$, definimos

- **Suma.** $S + T = \{\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t} : \boldsymbol{s} \in S, \boldsymbol{t} \in T\}$, el conjunto de todas las sumas posibles entre un elemento de S y un elemento de T.
- **Intersección.** $S \cap T = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{v} \in S \text{ y } \boldsymbol{v} \in T\}$.

Suma e intersección de subespacios

Suma

- Si S y T están dados por generadores, $S+T$ está generado por la unión de todos los generadores. Demostración?

Ejemplo

Si $S = \langle (1,0,1,2),(2,1,3,1)\rangle$ y $T = \langle (0,0,-1,0)\rangle$,

$$S+T = \langle (1,0,1,2),(2,1,3,1),(0,0,-1,0)\rangle.$$

Intersección

- Si S y T están dados por ecuaciones, $S\cap T$ está generado por la unión de todas las ecuaciones.

Inclusión de subespacios

Ejemplo: ¿Cómo podemos determinar si $S \subset T$?

El caso más simple es si S está dado por generadores y T por ecuaciones. En este caso, alcanza verificar si todos los generadores de S son elementos de T verificando si cumplen las ecuaciones que definen a T.

Ejemplo

Para los espacios S y T determinar si $S \subset T$.

- $S = \langle (0, 2, -1), (1, 0, 3) \rangle$,
- $T = \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0, x_2 + 2x_3 = 0\}$.

Ejercicio

Ejercicio

Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

- $S = \langle (1, 0, -3, 1), (2, 0, 3, -2) \rangle$,
- $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 - x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}$,

hallar generadores de $S + T$ y $S \cap T$.

Determinar si $S \subset T$.

Vectores linealmente independientes

Dado un conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ de vectores en $\mathbb{K}^n$, decimos que es un conjunto de vectores linealmente independientes si la única elección de coeficientes para los cuales

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{v}_i = 0$$

es $a_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$.

Ejemplo

- Los vectores $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 2)$ y $\boldsymbol{v}_3 = (1, 2, 5)$ son linealmente dependientes, porque $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$. O equivalentemente, $\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = 0$.
- Los vectores $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 0)$ y $\boldsymbol{v}_3 = (0, 0, 1)$ son linealmente independientes.

Vectores linealmente independientes y matrices escalonadas

- Para $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, las filas $\{\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_m\}$ de $\boldsymbol{A}$ son vectores de $\mathbb{K}^n$.

Ejemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Si $a_1\boldsymbol{f}_1 + a_2\boldsymbol{f}_2 + a_3\boldsymbol{f}_3 = 0$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

- Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz escalonada con todas las filas no nulas, los vectores $\{\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_m\}$ son l.i.
- Para saber si un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ es l.i., construimos una matriz con esos vectores como filas, escalonamos y verificamos si se anula alguna fila.

Vectores linealmente independientes

Ejercicio

Dados los vectores

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1, 2, 4, 5), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (0, 2, 1, 2), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4, 4, 14, 16), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (1, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

determinar cuáles de los siguientes conjuntos son linealmente independientes:

- $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$,
- $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$,
- $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4\}$.

Vectores linealmente independientes y escritura única

Proposición

Si los vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ son linealmente independientes, cualquier elemento de $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$ se escribe de forma única como combinación lineal de los vectores $\{\boldsymbol{v}_i : i = 1, \ldots, m\}$.

Demostración (ver apunte).