K-TEORÍA
PRIMER CUATRIMESTRE, 2019
Práctica 6

En esta práctica:

- ℓ es un anillo conmutativo unitario tal que $KH_n\ell = 0$ para $n < 0$ y tal que el morfismo natural $\mathbb{Z} = K_0(\mathbb{Z}) = KH_0(\mathbb{Z}) \to KH_0(\ell)$ es un isomorfismo.
- E es un grafo con finitos vértices y numerables aristas y $C(E)$ y $L(E)$ son las ℓ-álgebras de Cohn y de Leavitt.
- Salvo mención explícita, las afirmaciones acerca de $j : \underline{\mathrm{Ass}}_\ell \to kk$ son válidas tanto para la versión totalmente escisiva como para la que satisface escisión sólo para las extensiones que admiten una sección ℓ-lineal.

(1) Sean $n, m \geq 2$, ℓ un cuerpo y L_n L_m las ℓ-álgebras de Leavitt. Probar que $\mathcal{E}xt(L_n, L_m) = \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/(m-1)\mathbb{Z})$.

(2) Sean G un grupo, X un G-conjunto y A un G-anillo. Una estructura de (G, X)-álgebra en A es una estructura de $\mathbb{Z}^{(X)}$-módulo en A de modo que para todo $c \in Z^{(X)}$, $a, b \in A$ y $g \in G$, se tiene

$$c \cdot (ab) = (c \cdot a)b = a(c \cdot b) \text{ y } g(c \cdot a) = g(c) \cdot g(a).$$

Si además $\mathbb{Z}^{(X)} \cdot A = A$, decimos que el G-anillo A es *propio* sobre X.
Probar

(3) Si A es propio sobre G/H, $\mathrm{Comp}_G^H A = \chi_H A$ es un H-anillo y hay un isomorfismo natural de G-anillos $\mathrm{ind}_H^G(\mathrm{Comp}_G^H A) \cong A$.

(4) Si B es un H-anillo, hay un isomorfismo natural de H-anillos $\mathrm{Comp}_G^H(\mathrm{ind}_H^G B) \cong B$.

(5) Un G-anillo A es propio sobre $\coprod_i G/H_i$ si y sólo si existe una familia B_i con $B_i \in H_i - \underline{\mathrm{Ass}}$ tal que A es G-equivariantemente isomorfo a $\bigoplus_i \mathrm{ind}_{H_i}^G B_i$.

(6) Sean G un grupo y B un anillo. Una *G-graduación* de B es una descomposición en suma directa $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$ tal que para todo $g, h \in G$, $B_g \cdot B_h \subset B_{gh}$. Un anillo *$G$-graduado* es un anillo con una G-graduación. Por ejemplo, si A es un G-anillo, $B = A \rtimes G$ es G-graduado, con $B_g = A \rtimes g$ ($g \in G$).

i) Sea B un anillo G-graduado. Para cada $b \in B$, sea $b_g \in B_g$ la componente homogénea de grado g. Sea $G \hat{\ltimes} B$ el grupo abeliano $\mathbb{Z}^{(G)} \otimes B$ equipado con el siguiente producto y la siguiente acción de G

$$(\chi_g \ltimes x)(\chi_h \ltimes y) = \chi_g \ltimes x_{g^{-1}h} y, \quad s(\chi_g \ltimes x) = \chi_{sg} \ltimes x \qquad (x, y \in B, \quad g, h, s \in G).$$

Probar que $G \hat{\ltimes} B$ es un G-anillo.

ii) Sea B como en i) y sea $M_{\hat{G}} B$ el anillo de matrices indexadas por $G \times G$ finitamente soportadas, equipado con la graduación

$$(M_{\hat{G}} B)_g = \bigoplus_{s,t \in G} \epsilon_{s,t} \otimes B$$