K-TEORÍA
PRIMER CUATRIMESTRE, 2019
Práctica 4

En esta práctica, A es un anillo, R es un anillo con unidad, e $\iota : A \to M_nA$ e $\mathrm{inc} : M_nA \to M_{n+1}A$ denotan los morfismos $\iota(a) = ae_{11}$, $\mathrm{inc}(a) = a$. Escribimos

$$\widetilde{KH}_n(R) = \mathrm{coker}(KH_n(\mathbb{Z}) \to KH_n(R))$$

por el conúcleo del morfismo inducido por el morfismo canónico $\mathbb{Z} \to R$.

(1) Sean $F = (x^2 - y^2)y + x^4 \in \mathbb{C}[x, y]$ y $R = \mathbb{C}[x, y]/\langle F\rangle$. Calcular $K_n(R)$ para $n \leq 0$. Sug: imitar lo hecho en clase para calcular $K_n(S)$, $S = \mathbb{C}[x, y]/\langle y^2 - x^2 - x^3\rangle$.

(2) Sean A_1 y A_2 anillos, sea $P = \{x_a : a \in A_i, i = 1, 2\}$ el anillo no conmutativo de polinomios sin término constante y sea

$$A_1 * A_2 := P/\langle x_{ab} - x_ax_b : a, b \in A_i, i = 1, 2\rangle.$$

Sea $F : \underline{\mathrm{Rings}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ un funtor. Probar:

(a) La aplicación $j_i : A_i \to A_1 * A_2$, $j_i(a) = [x_a]$ es morfismo de anillos. Si $f_1 : A_1 \to B$ y $f_2 : A_2 \to B$ son morfismos de anillos entonces existe un único morfismo de anillos $f : A_1 * A_2 \to B$ tal que $f \circ j_i = f_i$ $(i = 1, 2)$.

(b) Sea $\pi : A_1 * A_2 \to A_1 \oplus A_2$ el morfismo canónico y sea $\mathrm{diag} : A_1 \oplus A_2 \to M_2(A_1 * A_2)$, $\mathrm{diag}(a, b) = ae_{1,1} + be_{2,2}$. Si F es M_2-estable entonces $F(M_2\pi)F(\mathrm{diag})$ es un isomorfismo. En particular, $F(\pi)$ es suryectivo. Sug: encontrar elementos $u, v \in M_3(\widetilde{A_1 * A_2})$ tales que $vu = 1$, $u(\mathrm{inc}(M_2(A_1 * A_2))v \subset \mathrm{inc}(M_2(A_1 * A_2))$ e $\mathrm{inc}(M_2(\pi)(\mathrm{diag}(x))) = u(xe_{3,3})v$.

(c) Si además F es invariante por homotopías polinomiales, entonces $F(\mathrm{diag})F(\pi)$ es un isomorfismo. En particular $F(\pi)$ es un isomorfismo. Sug: considerar el morfismo $H : A_1 * A_2 \to M_3(A_1 * A_2)[t]$ determinado por

$$H(j_i(a)) = a(1 - t^2)^2e_{i,i} + at(t^2 - 1)e_{3,i} + a(1 - t^2)(t^3 - 2t)e_{i,3} - at(t^3 - 2t)e_{3,3}$$

(3) Sea $QA = A * A$ el coproducto de A consigo mismo.

(a) Sea $\mu : QA \to A$ el único morfismo tal que $\mu \circ j_i = id_A$ para $i = 1, 2$, y sea $qA = \ker \mu$. Probar que qA es el ideal bilátero generado por los elementos $q(a) = j_1(a) - j_2(a)$ $(a \in A)$.

(b) Sean $k : qA \to QA$ la inclusión y $F : \underline{\mathrm{Rings}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ un funtor exacto escindido. Sea

$$F(j_0, j_1) = F(k)^{-1}(1_{F(QA)} - F(j_1\mu))F(j_0).$$

Probar que $F(j_0, j_1)$ es un morfismo de grupos $F(A) \to F(qA)$.

(c) Sea $\pi : QA \to A$ el morfismo determinado por $\pi \circ j_1 = id_A$, $\pi \circ j_2 = 0$. Sea $\delta : qA \to A$ la restricción de π. Probar que si $F : \underline{\mathrm{Rings}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ es un funtor exacto escindido, M_2-estable e invariante homotópico, entonces $F(\delta)$ y $F(j_0, j_1)$ son isomorfismos inversos.

(4) Un *grafo dirigido* $G = (E, V, r, s)$ consiste de un conjunto de vértices V, un conjunto de aristas E, y funciones $r, s : E \to V$ que mandan una arista a su destino y su salida, respectivamente. Un camino en G es una sucesión finita de aristas $e = (e_1, \dots, e_l)$ tal que $r(e_i) = s(e_{i+1})$; el número l es la longitud de e, y $s(e) := s(e_1)$ y $r(e) := r(e_l)$ son respectivamente la salida y la llegada de e. Los vértices se consideran caminos de longitud cero. Si e, f son caminos con $r(e) = s(f)$, ef es el camino que resulta de concatenar e con f. Sea $P(G)$ el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por todos los caminos de G.

(a) Probar que $P(G)$ tiene una estructura de anillo donde si e y f son caminos entonces su producto es la concatenación si $r(e) = s(f)$ y cero en otro caso.

(b) Sea $F : \underline{\mathrm{Rings}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ un funtor. Probar que si V es finito y F es aditivo e invariante homotópico, entonces

$$F(P(G)) = \bigoplus_{v \in V} F(\mathbb{Z}).$$

(c) Probar que si además F conmuta con colímites filtrantes entonces la fórmula de arriba vale aunque V no sea finito.

(5) Probar que los morfismos canónicos $\mathbb{Z}[t] \otimes A \to A[t]$, $P\mathbb{Z} \otimes A \to PA$ y $\Omega\mathbb{Z} \otimes A \to \Omega A$ son isomorfismos.

(6) Sea A un anillo. Sea $T(A)$ el anillo de polinomios sin término constante en las variables independientes no conmutativas $\{x_a : a \in A\}$.
(a) Probar que hay un único morfismo de anillos $\pi : T(A) \to A$ que manda $x_a \mapsto a$.
(b) Sea $JA = \ker \pi$. Probar que $KH_n(JA) = KH_{n+1}(A)$ $(n \in \mathbb{Z})$.

(7) (a) Probar que KH satisface Mayer-Vietoris para todos los cuadrados de Milnor de anillos.
(b) Probar que $\widetilde{KH}$ satisface Mayer-Vietoris para cuadrados de Milnor en $\underline{\mathrm{Rings}}_1$.

(8) Un *poliedro* es un conjunto finito K junto con una colección $s(K)$ de subconjuntos no vacíos de K tal que $\sigma \in s(K)$ y $\emptyset \neq \tau \subset \sigma \Rightarrow \tau \in s(K)$. Los elementos de K son los *vértices* del poliedro y los de $s(K)$ sus *simples*. Un *morfismo* de poliedros es una aplicación $f : L \to K$ tal que

$$\sigma \in s(K) \Rightarrow f(\sigma) \in s(K).$$

Un *subpoliedro* de K es un poliedro L tal que $L \subset K$ y tal que la inclusión es morfismo. La *unión* (resp. la *intersección*) de dos subpoliedros $L_1, L_2 \subset K$ es el subpoliedro con vértices $L_1 \cup L_2$ (resp. $L_1 \cap L_2$) y simples $\sigma(L_1) \cup \sigma(L_2)$ (resp. $\sigma(L_1) \cap \sigma(L_2)$).

Sea

$$\mathbb{Z}^K = \mathbb{Z}[v : v \in K]/\langle \sum_{v \in K} v - 1, \quad \prod_{v \in S} v, \quad (S \notin s(K))\rangle.$$

(a) Probar que $K \to \mathbb{Z}^K$ es un funtor de poliedros en anillos unitales.
(b) Probar que si $L \subset K$ es un poliedro entonces $\mathbb{Z}^K \to \mathbb{Z}^L$ es suryectivo.
(c) Sea *pt* el poliedro de un solo vértice. Describir el morfismo $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^K$ inducido por $K \to pt$.
(d) Sea K un poliedro que es unión de dos subpoliedros L_1 y L_2. Probar que el siguiente es un cuadrado de Milnor:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^K \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}^{L_1} \arrow[d] \\
\mathbb{Z}^{L_2} \arrow[r] & \mathbb{Z}^{L_1 \cap L_2}.
\end{tikzcd}$$

(e) Probar que si $K \in s(K)$ entonces $\widetilde{KH}_n(\mathbb{Z}^K) = 0$.
(f) Sea S^n el poliedro con $n+1$ vértices donde los simples son todos los subconjuntos propios. Calcular $\widetilde{KH}_*(\mathbb{Z}^{S^n})$ $(* \in \mathbb{Z})$ en función de $KH_*(\mathbb{Z})$.